# Kurzzusammenfassung

Wir beschäftigen uns damit, einen Graphen disjunkt mit Zusammenhangskomponenten, die Bäume der Tiefe 1 sind, zu überdecken (*Sternüberdeckungsproblem*). Diese Zusammenhangskomponenten nennen wir Sterne. Plesník hat herausgefunden, dass eine solche Überdeckung von $k$ Knoten auf einem positiv gewichteten Graphen polynomiell optimal gelöst werden kann.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass das Sternüberdeckungsproblem bereits auf bipartiten Graphen mit negativen Kosten $\mathcal{NP}$–vollständig ist. Verbietet man einzelne Matchingkanten, erhält man das *2–Sternüberdeckungsproblem*. Dieses Problem ist auch in der positiven Gewichtungsvariante $\mathcal{NP}$–vollständig.

Anschließend untersuchen wir, ob es neben Plesníks Spezialfall weitere polynomiell lösbare Klassen von Graphen gibt: Wir konstruieren Verfahren zur Lösung des Sternüberdeckungsproblems auf einfachen Bäumen und $k$–Bäumen. Ferner weisen wir nach, dass Plesníks Ansatz auch dann die Optimallösung liefert, wenn ein Teil der Kanten negativ gewichtet ist. Die entsprechende Struktur der negativen Kanten wird analysiert.

Außerdem beschäftigen wir uns mit der polyedrischen Struktur des Sternproblems. Wir stellen vier unterschiedliche IP–Modellierungsvarianten vor. Sowohl die Güte der einzelnen Ungleichungen als auch die der Varianten untereinander wird analysiert. Zusätzliche Facetten werden angegeben. Die Qualitätsaussagen zu den Formulierungen werden empirisch belegt.

Abschließend untersuchen wir die Anwendbarkeit der beiden Dekompositionsverfahren „Lagrange–Relaxierung“ und „Benders–Dekomposition“ auf die vorgestellten Modelle. Während die Benders–Dekomposition nicht sinnvoll eingesetzt werden kann, wird eine auf Rucksackproblemen mit Abhängigkeiten basierende Lagrange–Relaxierung vorgestellt. Deren Qualität wird empirisch belegt.

# Abstract

In this thesis we study the following graph problem: Excatly $k$ nodes of a graph are to be disjunctively covered with trees of depth 1. We will call this type of components *stars* and the whole problem *star covering problem*. It has been shown by Plesník that such a covering of $k$ nodes on a positive weighted graph may be solved polynomially.

We show that the star covering problem is already $\mathcal{NP}$ complete on bipartite graphs with negative cost. If one prohibits single arcs in the covering (matching arcs) it results in the *2–star covering problem*. This problem is $\mathcal{NP}$ complete in the positive weighted version as well.

After that we are looking for further polynomially solvable graph classes beside Plesníks case: We construct methods for creating optimal star coverings on simple trees as well as on $k$–trees. Further on we show that Plesníks case is still feasible for graphs with negative weights on the arcs, if the structure of the cost fulfills a special condition. We examine this condition.

Further on we investigate the polyhedral structure of the problem. We present four different IP models. The quality will be analysed both for single inequalities and for the models as whole. Additional facets will be stated. Empirical results for all models are given.

We will conclude with an analysis, if either benders decomposition or lagrangian relaxation is applicable to the models. While benders decomposition may not be used reasonable, we will present a lagrangian relaxation, based on a knapsack problem with side constraints. The quality of the relaxation will be documented empirically.