

Modellrisiko bei der Bewertung von
Optionen in einem Vergleich von Modellen
mit stochastischer Volatilität

Inauguraldissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität zu Köln

2008

vorgelegt
von
Dipl.-Math.oec Manuela Ender
aus
Göttingen

Referent: Prof. Dr. Alexander Kempf
Korreferent: Prof. Dr. Rüdiger Seydel
Tag der Promotion: 8. Februar 2008

Kurzfassung

Die Entwicklung und empirische Überprüfung von Modellen zur Bewertung von Derivaten ist ein zentraler Gegenstand der Kapitalmarktforschung. Einen Durchbruch erzielten 1973 Black, Scholes [22] und Merton [97]. In den anschließenden empirischen Untersuchungen des „Black–Scholes Modells“, zeigt sich jedoch, dass die am Markt beobachteten „stilisierten Fakten“ nicht gut genug erfasst werden können.

Um den Marktgegebenheiten gerecht zu werden, entsteht die Notwendigkeit, die sehr restriktiven Prämissen des Black–Scholes Modells aufzuweichen. Der Hauptansatzpunkt für Veränderungen liegt darin, eine nicht–konstante Volatilität und Unstetigkeitsstellen im Kursverlauf des Basiswertes zu modellieren. Aus Kombinationen beider Ansätze entstehen zahlreiche alternative Modelle, aus denen für eine konkrete Bewertung ein Modell ausgewählt werden muss. Entscheidet man sich für das „falsche“ Modell, geht man das Risiko ein, einen Verlust zu erleiden, der sich ausschließlich durch die Modellwahl erklärt. Dieses Modellrisiko steckt in jedem Modell und sollte dem Anwender bei der Modellwahl bewußt sein.

Bei börsengehandelten Standardoptionen, den „Plain–Vanillas“, bestimmt der Markt den Preis, so dass hier das Modellrisiko weniger stark ins Gewicht fällt. Daher werden anhand der Marktpreise Plain–Vanilla Optionen auf den DAX von 2002 bis 2005 die Modelle kalibriert, d.h. durch die Minimierung des Abstandes von Markt– zu Modellpreis werden die Modellparameter geschätzt, und die „In–Sample“ Anpassungsgüten untersucht. Der Modellvergleich beinhaltet zusätzlich die „Out–of–Sample“ Anpassung sowie die Hedging–Performance der Modelle. In den Modellvergleich werden drei neue Erweiterungen des Modells von Schöbel und Zhu [116] aufgenommen, die in der Literatur noch nicht empirisch untersucht wurden, aber aufgrund ihrer guten Anpassungseigenschaften in diesem Rahmen nicht fehlen sollten.

Besonders zum Tragen kommt das Modellrisiko bei der Bewertung von exotischen „Over–the–Counter“ Optionen, die nicht am Markt gehandelt werden. Daher werden mit den kalibrierten Parametern Preise exotischer Optionen bestimmt, die trotz Kalibrierung der zugrunde liegenden Parameter an einen Datensatz von Plain–Vanilla Optionen voneinander abweichen. Aufbauend auf dem Ansatz von Cont [38], wird das Modellrisiko in Sensitivitätsanalysen dieser exotischen Optionen verglichen.

Abstract

Several generalisations of the Black–Scholes (BS) Model [22] have been made in the literature to overcome the well-known empirical inadequacies of the BS–Model. The combination of jump components in the underlying and stochastic volatility offers plenty of alternative option pricing models.

In this work I perform an empirical comparison of stochastic volatility models established by Duffie et al [52] with jumps in the volatility and four deductive special cases. In addition I include the model of Schoebel and Zhu [116] with volatility driven by an Ornstein–Uhlenbeck (OU) process instead of a Cox–Ingersoll–Ross (CIR) process. As Zhu [134] suggested the model can be easily combined with a jump component in the underlying. I examine the resulting model empirically and stress its good properties. Further new components are stochastic volatility models with one parameter less than the established models based on the theoretical connection of OU and CIR process.

All these models are calibrated to market data from the German index options market of the years 2002 to 2005. This comparison embeds out-of-sample pricing and hedging performance as important elements in a model performance study based on model risk. The main result in terms of fit performance is that the most complex models are not always the best ones. The model of Schoebel and Zhu [116] with jumps has in many cases the lowest errors.

The model's calibrated parameters are used to price over-the-counter exotic options like asian, lookback, barrier or forward start options. All resulting prices vary heavily, but some exotics like lookback options diversify more than e.g. asian options. A market practitioner who wants to determine a price for the exotic option underwrites model risk, because he can realise a loss only generated by his model choice. So it is important to quantify model risk like e.g. Cont [38] and to examine the sensitivity of each exotic options in terms of moneyness, maturity and market condition.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit im Graduiertenkolleg Risikomanagement der WISO-Fakultät der Universität zu Köln und als wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik bei Herrn Prof. Seydel entstanden.

Daher möchte ich besonders Herrn Prof. Kempf als Sprecher des Graduiertenkollegs und Herrn Prof. Seydel für ihre fachliche und persönliche Unterstützung danken.

Ebenso zum Dank verpflichtet bin ich den weiteren Trägern des Graduiertenkollegs, die besonders in den ersten Jahren maßgeblich zur Ausbildung in den Grundlagen zum wissenschaftlichen Arbeiten beigetragen haben. Namentlich nennen möchte ich Herrn Prof. Schradin, Herrn Prof. Schmid, Herrn Prof. Mosler, Herrn Prof. Kuhner, Herrn Prof. Hartmann-Wendels sowie Herrn Prof. Homburg.

Getreu dem Motto des Graduiertenkollegs „Gemeinsam statt einsam“ bedanke ich mich bei meinen Mit-Kollegiaten der zweiten Kohorte für die gute Zusammenarbeit, die vielfältigen Anregungen, die positive Atmosphäre im Büro und die vielen gemeinsamen Erlebnisse. Dies sind Sanela Čeljo-Hörhager, Tanja Thiele, Thomas Moosbrucker, Martin Honal, Achim Dahlbokum, Ulf Brüggemann und Peter Kosater. Den Kollegiaten der ersten und dritten Kohorte, der Koordinatorin des Kollegs, Silke Ber, sowie den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Angewandte Mathematik gilt ebenfalls mein Dank.

Im privaten Bereich danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ein offenes Ohr zu jeder Zeit, Geduld und Unterstützung. Außerordentlicher Dank gebührt hierbei meinem Mann Thomas.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlagen und Problemstellung	1
1.2	Methodik und Zielsetzung	5
1.3	Aufbau der Arbeit	9
2	Bewertung von Optionen	13
2.1	Grundlagen der Bewertungstheorie	13
2.2	Diskussion des Black–Scholes Modells	21
2.3	Ansätze jenseits der Black–Scholes Welt	27
3	Affine Jump–Diffusion Modelle	31
3.1	Eigenschaften der affinen Jump–Diffusion Modelle	31
3.2	Modellgruppe nach Duffie, Pan und Singleton	34
3.3	Bedeutung von Sprüngen in der Volatilität	35
3.4	Modellgruppe nach Schöbel und Zhu	37
3.5	Zusammenhang von CIR– und OU–Prozessen	40
3.6	Zusammenfassung der relevanten Modelle	43
4	Bewertungsmethoden für affine Jump–Diff. Modelle	45
4.1	Bewertung von Optionen mit Fourier Analysis	45
4.2	Monte Carlo Simulation	49
4.2.1	Diskretisierung des Basiswert–Prozesses	49
4.2.2	Exakte Diskretisierung des Mean–Reverting OU–Prozesses	53
4.2.3	Diskretisierung des CIR–Prozesses	54
5	Kalibrierung der Modelle an Marktdaten	59
5.1	Allgemeiner Kalibrierungsansatz	59
5.2	Optimierungsalgorithmen für die Kalibrierung	63
5.2.1	Quasi–Newton Verfahren	63
5.2.2	Simulated Annealing	65

5.2.3	Kombination der Verfahren für die Kalibrierung	66
5.3	Datenbasis der empirischen Studie	68
5.4	Modellparameter als Ergebnis der Kalibrierung	72
6	In- und Out-of-Sample Pricing Performance	79
6.1	In-Sample Anpassungsgüte	79
6.1.1	Ergebnisse aller Modelle im Überblick	79
6.1.2	Vergleich innerhalb der Modellgruppen	82
6.1.3	Vergleich zwischen den Modellgruppen	85
6.2	Bestrafung hoher Wahrscheinlichkeiten	87
6.3	Der invariante Parameter V_0	93
6.4	Out-of-Sample Performance	95
6.4.1	Motivation und Methode	95
6.4.2	Empirische Ergebnisse	96
7	Exot. Optionen aus impliziten Prozessinformationen	99
7.1	Motivation und Methode	99
7.2	Asiatische Optionen	101
7.3	Forward Start Optionen	106
7.4	Lookback Optionen	108
7.5	Barrier Optionen	111
8	Hedging Performance	117
8.1	Berechnung der Sensitivitäten	117
8.1.1	Griechen europäischer Standard-Optionen	117
8.1.2	Griechen exotischer Optionen	122
8.2	Dynamische Hedging-Strategien	125
8.3	Empirische Ergebnisse	127
9	Modellrisiko bei Finanzinstitutionen	133
9.1	Modellrisiko im Finanz-Risikokontext	133
9.2	Risikomaß für das Modellrisiko	138
9.3	Modellrisiko der empirischen Untersuchung	140
9.4	Risiko durch Marktstandards	149
10	Schlussfolgerung und Ausblick	155
10.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	155
10.2	Offene Fragestellungen	158
	Abbildungsverzeichnis	161

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	xi
Tabellenverzeichnis	165
A Anhang	169
A.1 Grundlegende Definitionen der Wahrscheinlichkeitstheorie	169
A.2 Log-Renditen des DAX in ausgewählten Marktphasen	171
A.3 Relevante charakteristische Funktionen	172
A.4 Obere und untere Schranken der Modellparameter	176
Literaturverzeichnis	178
Lebenslauf	189

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundlagen und Problemstellung

Die exakte zukünftige Entwicklung von Preisen für Finanzprodukte ist ungewiss. Zu diesen Produkten zählen u.a. Anleihen, Devisen, Aktien, Indizes oder Gold.

Bei Verkäufern und Käufern entsteht durch die Ungewissheit der Bedarf, sich gegen künftige Kursschwankungen dieser Produkte abzusichern, oder der Wunsch mit möglichst großem Hebel von den Schwankungen zu profitieren. Beides ist mit derivativen Finanzinstrumenten möglich, deren Werte sich von den zugrunde liegenden Basisprodukten ableiten. Genauer ist ein Finanzderivat ein Vertrag, eine bestimmte Menge am Basisprodukt innerhalb einer festgelegten Laufzeit zu einem vereinbarten Ausübungspreis, dem „Strike“, kaufen bzw. verkaufen zu können. Dass ein Wertpapier mit dieser Struktur den Anforderungen der Marktteilnehmer gerecht wird, zeigt der Umfang von 280 Billionen Euro, den ausstehende Derivate Anfang 2007 weltweit besitzen.¹

Die gängigen Varianten von Derivaten lassen sich grob in drei Klassen einteilen, die sich in der Ausgestaltung des Vertrages unterscheiden.²

Zunächst seien die „Forward-“ bzw. „Future-Verträge“ für unbedingte Termingeschäfte³ genannt. Bei diesen Finanzderivaten muss die vereinbarte Menge am Basisprodukt, wobei es sich meistens um Rohstoffe handelt, geliefert und bezahlt werden. Bei einem Forward wird das unbedingte Termingeschäft außerbörslich⁴ zwischen Verkäufer und Käufer geschlossen. Ein Future ist ein börsengehandeltes, standardisiertes unbedingtes Termingeschäft, das über eine Instanz regelmäßig von den Vertragspartnern wertmäßig ausgeglichen wird.

¹Vgl. Pieper[107].

²Vgl. z.B. Sandmann [115].

³Ein Termingeschäft liegt im internationalen Handel dann vor, wenn der Erfüllungszeitpunkte drei Börsentage nach Vertragsabschluß liegt.

⁴Es besteht das Risiko, dass eine Vertragspartei ausfallen kann und der Forward wertlos wird.

In der Klasse der „Optionen“ erwirbt der Käufer mit einer Option nur das Recht, aber nicht die Verpflichtung, die vereinbarte Transaktion durchzuführen. Es handelt sich dabei um bedingte Termingeschäfte, da der Käufer die Option verfallen lassen kann, wenn sich der Markt zuungunsten seines Derivates entwickelt hat. Der Verkäufer, auch Stillhalter genannt, muss hingegen wie beim unbedingten Termingeschäft liefern bzw. die monetäre Differenz ausgleichen. Optionen werden häufig auf Basiswerte wie Aktien, Indizes, Anleihen, Strom oder sogar Wetter gehandelt. Sie sind im „Over-the-Counter“ Geschäft zwischen den Vertragspartner frei gestaltbar oder können weltweit als standardisierte Kontrakte an Terminbörsen gehandelt werden. Eine Kaufoption wird als „Call“ und eine Verkaufsoption als „Put“ bezeichnet.

Die dritte Klasse in dieser Einordnung umfasst die „Swaps“, bei denen sich die Vertragspartner verpflichten, unterschiedliche Zahlungsströme auszutauschen. Einer der wichtigsten Swaps ist der „Zinsswap“, der den Austausch von variablen und festen Zinssätzen vertraglich regelt.

Der „innere Wert“ einer Option⁵ ergibt sich zu jeder Zeit aus der Differenz vom aktuellen Kurs des Basiswertes und dem vereinbarten Strike. Bei Vertragsende entspricht der Wert der Option ihrem inneren Wert, da der Preis des Basiswertes zu diesem Zeitpunkt bekannt und sicher ist. Vor Ausübung setzt sich der Optionswert aus dem inneren Wert und dem nicht-negativen „Zeitwert“ der Option zusammen. Der wahre Wert bzw. der „faire“ Preis⁶ der Option ist insbesondere bei Emission unbekannt, da die zukünftigen Kurse des Basiswertes nicht mit Sicherheit bekannt sind. Um Aussagen über die Kursänderung im Basiswert machen zu können, wird der Kurs in einem „stochastischen Modell“ mittels eines stochastischen Prozesses modelliert. Je besser ein Modell den Markt beschreibt, um so näher liegt der berechnete Preis am Marktpreis des Derivates.

Die Relevanz guter Optionsbewertungsmodelle zeigt sich aktuell im Beschluss des „International Accounting Standards Board“ (im Folgenden: IASB) über die Bilanzierungsnormen von Aktienoptionen in aktienbasierten Vergütungssystemen.⁷

Die vom IASB festgelegten „International Financial Reporting Standards“ (im Folgenden: IFRS) schreiben Unternehmen vor, die nach IFRS bilanzieren, dass Aktienoptionen erfolgswirksam in der Bilanz erfasst werden müssen. Falls bei Bilanzierung kein Marktpreis für die Option zur Verfügung steht, „ist der beizulegende Zeitwert der gewährten Optionen mithilfe

⁵Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt bei der Derivateklasse der (Index-)Optionen, so dass im Folgenden die Begriffe „Derivat“ und „Option“ äquivalent benutzt werden.

⁶Wert und Preis eines Objektes können in der Realität weit voneinander abweichen und sind nur in den seltensten Fällen identisch (Vgl. Wilde[133]: „Nowadays people know the price of everything but the value of nothing“). In dieser Arbeit ist jedoch, wenn nichts anderes angegeben, Optionswert und Optionspreis als gleichwertig anzusehen, wobei „Preis“ eher aus dem Markt kommt, während „Wert“ mit Modellen berechnet wurde.

⁷Vgl. z.B. FAZ[60].

eines Optionspreismodells zu schätzen“⁸. Da sich nach den neuen Standards die geschätzten Optionspreise direkt auf die Ertragslage des Unternehmens auswirken, sind die Entwicklung und empirische Überprüfung von Modellen überaus aktuelle Fragestellungen, die sich in den vergangenen Jahrzehnten als zentraler Gegenstand der Kapitalmarktforschung erwiesen haben.

Einen ersten Überblick über den Einsatz von Optionen, deren Absicherung und Spekulation, jedoch ohne fundierte Theorie, gab Castelli [35] 1877 mit seinem Buch.

Als einen Vorläufer der modernen Bewertungsansätze kann das Bewertungsmodell⁹ von Bachelier [7] aus dem Jahre 1900 gesehen werden, das jedoch aufgrund einiger Schwachstellen¹⁰ lange Zeit keine durchgängige Anerkennung fand.

Erst über 55 Jahre später wurde Bacheliers Ansatz in neuen Veröffentlichungen¹¹ aufgegriffen, was Weiterentwicklungen durch Sprenkle [122] und Boness [23] 1964 ermöglichte. Sprenkle [122] modellierte Aktienkurse erstmals mit einer log–Normalverteilung, vernachlässigte jedoch die Diskontierung der Erwartungen, um die Boness [23] die Arbeit erweiterte. Während Boness [23] risiko–neutrale Investoren bei gleichen Renditen für alle Wertpapiere unterstellte, ließ Samuelson [114] 1965 unterschiedliche Renditen für die Option im Vergleich zum Basiswert zu, was zu verschiedenen Diskontierungsfaktoren führte. Trotz unterschiedlicher Annahmen für die Risikopräferenz der Investoren bilden die Arbeiten der 60er Jahre die Grundlage für den späteren Durchbruch von Optionsbewertungsmodellen.

Jedoch erst nach 1973 gewannen Derivate stärker an Bedeutung und etablierten sich schließlich in der Finanzwelt. Das hatte vor allem zwei Gründe. Zum einen veröffentlichten Black, Scholes [22] und Merton [97] ein präferenzfreies Bewertungsmodell, für das man Optionspreise mit Hilfe einer nahezu analytischen Formel, der „Black–Scholes Formel“, denkbar einfach berechnen kann. Auf diesen Optionspreis können sich Investoren unabhängig von ihren Erwartungen über die zukünftige Entwicklung des Basiswertes einigen. In diesem präferenzfreien Ansatz liegt daher der wesentliche Beitrag von Black, Scholes [22] und Merton [97], da zum ersten Mal eine von Risikoeinstellungen der Investoren unabhängige Lösung des Bewertungsproblems ermöglicht wurde. Das „Black–Scholes Modell“ wurde schnell zum Standard und die Black–Scholes Formel fand man z.B. auf Taschenrechnern fest verdrahtet.

Zum anderen eröffnete 1973 die „Chicago Board Option Exchange“ als erste Börse für einen amtlich geregelten und standardisierten Handel mit Derivaten.

Die Ergebnisse von Black, Scholes [22] und Merton [97] wurden 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für die noch lebenden Scholes und Merton gewürdigt.

In empirischen Untersuchungen des „Black–Scholes Modells“ (im Folgenden: BS–Modell)

⁸Vgl. IASB[82], Anhang B.

⁹Dieses Modell benötigt explizite Vorgaben über die Präferenzen der Investoren.

¹⁰Z.B. Existenz negativer Aktienkurse.

¹¹Vgl. Kruizenga[90].

zeigte sich jedoch, dass die am Markt beobachteten „stilisierten Fakten“¹² nicht gut erfasst werden können.¹³

Erweiterungen zeigen, dass einige Annahmen des „friktionslosen“ Kapitalmarktes¹⁴, der Dividendenlosigkeit sowie des konstanten Zinssatzes abgeschwächt werden können und sich in das BS-Modell integrieren lassen.¹⁵

Komplizierter verhält es sich bei der Voraussetzung, dass die Volatilität über die Laufzeit und für alle Strikes der Option hinweg konstant bleibt, und dass der zugrunde liegende Kursverlauf einer stetigen geometrisch Brownschen Bewegung¹⁶ genügt. Entfallen diese Annahmen, enthält der Optionspreis zusätzliche Risiken, nämlich das Volatilitäts- oder Sprungrisiko, die nicht am Markt gehandelt werden und sich nicht im BS-Modell eliminieren lassen. Um jedoch die am Markt beobachteten stilisierten Fakten zu erfassen, ist es zum einen erforderlich stochastische Veränderungen in der Volatilität zu beschreiben und zum anderen Unstetigkeitsstellen bzw. Sprünge im Kursverlauf zu modellieren.

Diese Forderungen erfüllend, entstanden in den letzten zwei Jahrzehnten eine Vielzahl weiterer Bewertungsmodelle für Derivate. Merton [98] selbst entwickelte das erste „Jump-Diffusion-Modell“¹⁷, das durch die Kombination von Diffusions- und Poissonprozess Sprünge im Kurs nachbilden kann. Weitere Modelle in der Klasse der Lévy-Prozesse¹⁸ folgten. Vorreiter auf dem Gebiet der stochastischen Volatilität waren am Ende der 80er und zu Beginn der 90er Jahre u.a. Hull und White [81], Scott [119], Stein und Stein [124] sowie Heston [76]. Kombinationen von Sprungprozessen und stochastischer Volatilität eröffnen weitere Gestaltungsspielräume bei der Modellierung.¹⁹

So positiv die resultierende Fülle an alternativen Bewertungsmodellen für Derivate aus wissenschaftlicher Sicht auch zu beurteilen ist, so wird es für Stillhalter und Käufer von Optionen immer diffiziler ein adäquates Modell für die jeweils vorliegende Bewertungssituation z.B. bei Bilanzierung nach IFRS, zu wählen. Treffend umschreibt Lhabitant [93] die Situation mit: „In the early 1970s, the major problem for financial institutions was the lack of models. Thirty years later, the problem is now the excessive number of them.“

Jedes Modell liefert für ein Derivat einen eigenen Preis, der sich von den Preisen der an-

¹²U.a. Smile-Effekt bei impliziter Volatilität, schwere Flanken in der log-Renditeverteilung. Vgl. weiter Ausführungen in Abschnitt 2.2.

¹³Vgl. Black [18], MacBeth/Merville [96], Rubinstein [110].

¹⁴Keine Transaktionskosten, keine Steuern, zu jedem Zeitpunkt geöffnete Märkte, beliebig teilbare Wertpapiere, keine Leerverkaufsbeschränkungen, kein Bid-Ask Spread, keine Marktzugangsbeschränkungen oder sonstigen regulatorischen Hemmnisse.

¹⁵Vgl. Dividenden: Merton[97], Steuern: Ingersoll[83], Zinsen: Merton[97], Transaktionskosten: Leland[92].

¹⁶Vgl. Definition 1 in Abschnitt 2.1.

¹⁷Vgl. Abschnitt 2.3.

¹⁸Vgl. z.B. Cont/Tankov [39].

¹⁹Vgl. z.B. Bates [11].

deren Modelle unterscheidet. Wählt der Händler einen dieser Preise aus, entscheidet er sich für ein Modell und geht dabei das Modellrisiko²⁰ ein. Modellrisiko bedeutet, dass der Händler einen Verlust erleiden kann, der sich ausschließlich aus der Modellwahl erklärt. Modellrisiko entsteht immer dann, wenn der wahre Prozess unbekannt ist und man stattdessen vereinfachende Modelle verwenden muss. Daher steckt das Modellrisiko in jedem Modell, das nicht den wahren Prozess beschreibt, und sollte dem Anwender bei der Modellwahl bewußt und bekannt sein, was zum Beispiel mit Risikomaßen nach Cont [38] möglich ist.²¹

Unter Modellrisiko ist es wichtig die Eigenschaften der Modelle genauer zu untersuchen, um ein Modell zu wählen, das den wahren unbekanntem Prozess am besten beschreibt. Dies ist mit einem Modellvergleich über mehrere Gütekriterien hinweg möglich, der eine solide Entscheidungsgrundlage für die Modellwahl bietet.

1.2 Methodik und Zielsetzung

Der Problemstellung folgend, ist es das Ziel der vorliegenden Arbeit, Bewertungsmodelle für Optionen in einem Modellvergleich zu klassifizieren und ihr Modellrisiko für verschiedene Optionstypen zu untersuchen.

Die Disziplinen, die im Modellvergleich hauptsächlich untersucht werden, sind die „In-Sample“ und „Out-of-Sample“ Anpassungsgüten sowie die „Hedging Performance“ ausgewählter Konzepte. Weitere speziellere Untersuchungen runden diesen Teil ab.

Für die In-Sample Anpassung wird zunächst anhand von beobachteten Marktpreisen für standardisiert börsengehandelte Optionen, den sogenannten „Plain-Vanillas“, eine Querschnittsanalyse durchgeführt, wobei die relevanten Modelle kalibriert werden. Kalibrierung bedeutet, dass durch Minimierung des Abstandes von Markt- zu Modellpreis die optimalen Modellparameter bestimmt werden, die dann die Marktpreise bis auf Fehlerterme nachbilden. Zur Bewältigung dieser anspruchsvollen Minimierungsaufgabe wird, die jeweiligen Vorteile ausnutzend, eine Kombination aus zwei verschiedenen Verfahren gewählt werden.

Für die Kalibrierung werden Marktpreise von Plain-Vanilla Optionen genutzt, da bei diesen Optionen angenommen wird, dass aufgrund des regen Handels der Markt den Preis bestimmt und somit das Modellrisiko weniger stark ins Gewicht fällt. Die Kalibrierung ist bei allen Modellen möglich. Die Ergebnisse unterscheiden sich jedoch in der Höhe der Fehler, wie genau die Marktpreise wirklich repliziert werden können: Je kleiner der Fehler, umso besser ist die In-Sample Anpassung eines Modells.²²

Als Vorgriff auf die Ergebnisse sei schon an dieser Stelle erwähnt, dass Modelle mit mehr freien Parametern kleinere Fehler aufweisen als Modelle mit einer weniger komplexen Mo-

²⁰Vgl. Kapitel 9.

²¹Vgl. z.B. Branger/Schlag [27], Figlewski/Green [63].

²²Vgl. Schoutens et al [118].

dellierung. Allerdings werden die erzielten Verbesserungen prozentual kleiner werden, je mehr der Komplexitätsgrad ansteigt.

In einem nächsten Schritt werden mit den optimalen Modellparametern von gestern die Modellpreise für heute berechnet und mit den tatsächlich realisierten Marktpreisen verglichen. Die Differenz zwischen beiden Werten führt erneut zu Fehlertermen und damit zu der Out-of-Sample Anpassungsgüte der Modelle. Diese Untersuchung liefert Hinweise auf Überparametrisierung, da Modelle mit Parametern, die nur das Rauschen eines Tages wiedergeben, aber die Anpassung nicht in der Struktur verbessern, mit höheren Fehlern bestraft werden.²³

Von dieser Überparametrisierung werden in der Untersuchung besonders die Modelle mit dem höchsten Komplexitätsgrad betroffen sein.

Ein wichtiger Aspekt beim Handeln mit Finanzderivaten ist das „Hedgen“, d.h. eine Absicherung gegen Kursschwankungen und damit Reduzierung der Verlustrisiken mit einem geeigneten Replikationsportfolio. Replizieren bedeutet, dass das Derivat selbstfinanzierend mit einem Portfolio aus anderen Finanzinstrumenten nachgebaut werden kann. Die Handelsstrategie, über die das Replikationsportfolio bestimmt wird, heißt „Hedging-Strategie“. In der Praxis kommt es zwischen Derivat und Replikationsportfolio zu Abweichungen, den „Hedge-Fehlern“, da es in der Realität nur möglich ist, zu diskreten Zeiten und in bestimmten Mengen zu handeln. Die Höhe der Hedge-Fehler in ausgewählten Hedging-Strategien liefert ein weiteres Gütekriterium im Modellvergleich.

Die Performance in den genannten Kriterien fällt für jedes Modell unterschiedlich gut aus, da im Modellbildungsprozess jeweils andere Schwerpunkte zu setzen und die Eigenschaften der Modelle stets als „Trade-Off“ aus Realitätsanspruch und Handhabbarkeit zu wählen sind. Abbildung 1.1 verdeutlicht diesen Prozess: Bessere empirische Eigenschaften erhöhen stets den Aufwand, während z.B. restriktivere Annahmen an den Markt die Performance der Empirie verschlechtern. Werden Annahmen gelockert, erhöht sich u.a. der mathematische Anspruch der Modellierung. Weitere Implikationen sind Abbildung 1.1 zu entnehmen.

Der Beitrag der Arbeit im Bereich Modellvergleich liegt in der Breite der betrachteten Kriterien und in der Vielzahl der einbezogenen Modelle auf einer soliden Basis von gut 1,6 Millionen kalibrierten Optionspreisen. Bekannte Untersuchungen der Literatur beschäftigen sich entweder nur mit Teilaspekten der oben beschriebenen Eigenschaften oder nur mit einer kleinen Anzahl untersuchter Modelle. Schoutens et al [118] z.B. untersuchen innerhalb einer recht großen Gruppe von sieben Modellen nur die In-Sample Performance. Out-of-Sample sowie Hedging Qualitäten bleiben außen vor. Detlefsen [48] schließt in seiner Arbeit zwar neben einer In-Sample Studie auch die Hedging Performance ein. Seine Modellgruppe besteht jedoch lediglich aus drei Modellen. Bakshi et al [8] führen in ihrem Artikel im

²³Vgl. Bakshi et al [8].

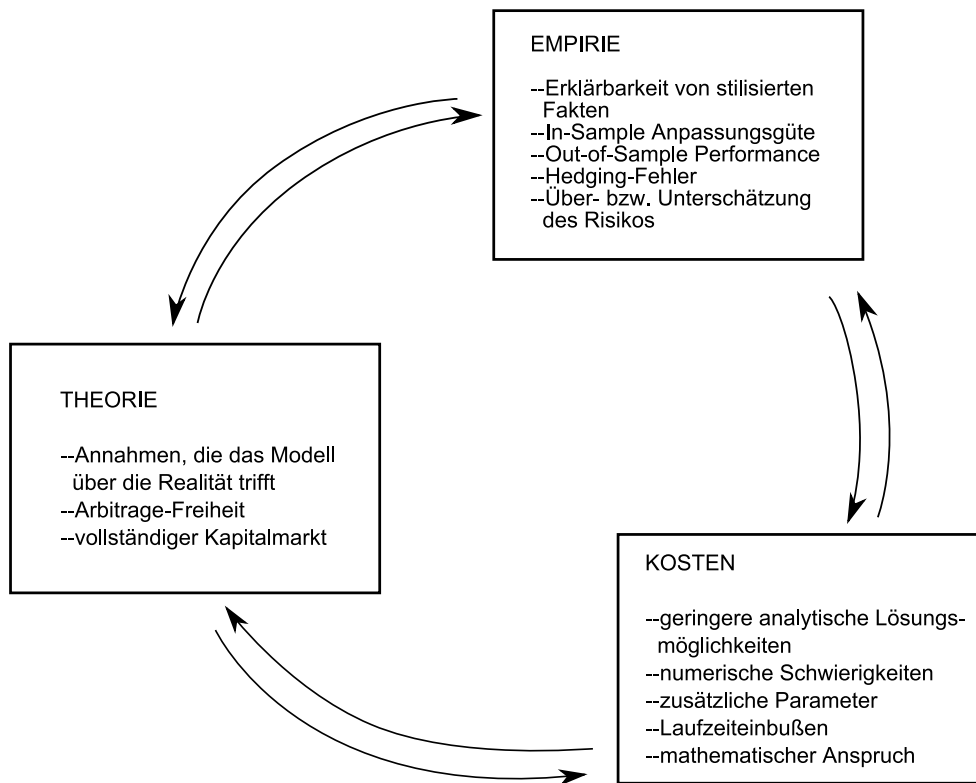


Abbildung 1.1: Trade-Offs im Modellbildungsprozess.

Modellvergleich alle drei Schritte für vier Modelle mit stochastischer Volatilität durch. Da die Ergebnisse dieser Arbeit jedoch schon zehn Jahre zurückliegen, haben sich in der Zwischenzeit gerade auf dem Gebiet der Optimierung durch verbesserte Rechenleistungen neue Möglichkeiten aufgetan, diese Untersuchungen tiefer und präziser durchzuführen.

Als Grund, warum Modellvergleichende Arbeiten in der Literatur selten sind oder nur eine geringe Anzahl an Modellen getestet wird, gibt Lhabitant [93] an, dass ein gemeinsamer Modellrahmen fehlt, der einen Modellvergleich erst ermöglicht.²⁴ Da in dieser Arbeit die Modelle deduktiv aus einem allgemeinen Modellrahmen hergeleitet werden, stellt diese Forderung keine Restriktion dar.

Um neben dem Modellvergleich Aussagen im Hinblick auf die Modellwahl unter Modellrisiko zu treffen, ist eine ganzheitliche Betrachtung unerlässlich. Ebenso ist es erforderlich eine große Anzahl an Modellen in den Vergleich aufzunehmen, um die Untersuchungen auf eine möglichst breite Basis zu stellen. In dieser Arbeit sind dies die Modelle mit stochastischer Volatilität von Duffie, Pan und Singleton [52] sowie die Modelle von Schöbel und Zhu [116] und Zhu [134].

Als weiterer Beitrag dieser Arbeit werden in den Modellvergleich drei neue Modelle der letztgenannten Modellfamilie von Schöbel und Zhu [116] aufgenommen, die in der Literatur

²⁴Vgl. Lhabitant[93], S.426.

bisher gar nicht oder höchstens ansatzweise beschrieben und noch nicht empirisch untersucht wurden, aber aufgrund ihres guten Abschneidens im empirischen Vergleich in diesem Rahmen nicht fehlen sollten. Über weite Bereiche des Modellvergleiches werden Modelle dieser Kategorie bessere Ergebnisse aufweisen als die Modelle der etablierteren Modellgruppe von Duffie, Pan und Singleton [52]. Scheinbare Nachteile der Modelle nach Schöbel und Zhu [116] werden aufgedeckt und entschärft.

Ferner werden im Kapitel über Hedging sowohl die Berechnung der Sensitivitäten, der sogenannten „Griechen“, sowie der Hedging-Strategien für die komplexen Modelle gleichrangig beschrieben und durchgeführt. In der Literatur wird der Schwerpunkt häufig nur bei einem der beiden Themengebiete gesetzt. Für die praktische Umsetzung der Hedging-Strategien ist jedoch eine geeignete Berechnung der benötigten Griechen ebenso wichtig.

Da am Markt gehandelte Plain-Vanilla Optionen zur Kalibrierung verwendet werden, kommt das Modellrisiko besonders bei der Bewertung von exotischen „Over-the-Counter“ (im Folgenden: OTC) Optionen zum Tragen, die nicht am Markt gehandelt werden und somit keinen Marktpreis haben. Um dieses Modellrisiko zu untersuchen, werden mit den optimalen Parametern der Kalibrierung Preise exotischer Optionen bestimmt und verglichen. Es stellt sich heraus, dass die Preise trotz Kalibrierung unterschiedlich hoch sind. Entscheidet man sich für einen dieser Preise, geht man das Modellrisiko ein.

Cont [38] schlägt koherente Risikomaße vor, die das Modellrisiko quantifizierbar und vergleichbar machen. Aufbauend auf dem Ansatz von Cont [38] ist ein weiterer wesentlicher Beitrag dieser Arbeit, die Durchführung umfassender Sensitivitätsanalysen verschiedener exotischer Optionen auf einer Basis von rund 340.000 exotischer Optionswerte. Um vergleichende Aussagen möglich zu machen, wurde das Modellrisikomaß von Cont [38] entsprechend modifiziert. Darüber hinaus wird stets aus dem Blickwinkel des Modellrisikos der Aspekt der Marktphasen beleuchtet.

Durch die Untersuchung wird es möglich, einige OTC Optionen als Modellrisiko-reicher als andere zu identifizieren. So enthalten zum Beispiel Preise von Lookback und Barrier Optionen mehr Modellrisiko als Preise von Forward Start oder asiatischen Optionen. Darüber hinaus werden nicht nur die einzelnen Typen untersucht, sondern auch verschiedene Vertragsausgestaltungen wie Laufzeit oder Verhältnis vom Strike zum aktuellen Kurs des Basiswertes auf Modellrisiko überprüft.

In Abbildung 1.2 ist der beschriebene Ablauf der Untersuchungen schematisch dargestellt. Jede Station dieses Vorgehens ist in einem oder mehreren Kapiteln dieser Arbeit beschrieben. In welchem Teil genau wird im folgenden Abschnitt über den Aufbau der Arbeit präzisiert.

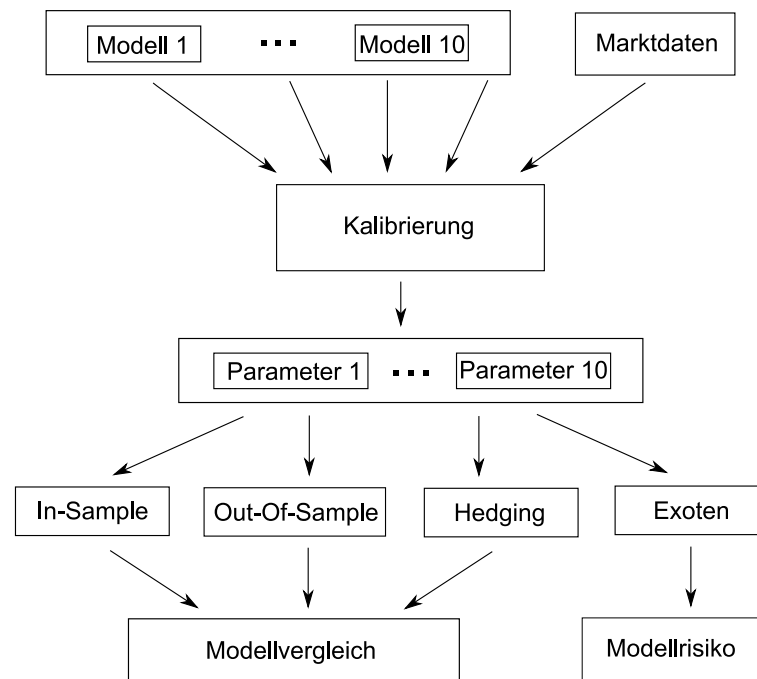


Abbildung 1.2: Schematischer Ablauf der Untersuchungen für 10 Modelle.

1.3 Aufbau der Arbeit

Im Anschluss an diesen einleitenden Abschnitt wird in Kapitel 2 nach einer Zusammenfassung der Bewertungstheorie das BS-Modell im Detail vorgestellt und diskutiert. Erweiterungen am Ende des Kapitels 2 leiten zu den affinen Jump-Diffusion Modellen über, die in Kapitel 3 deduktiv vom Allgemeinen ins Spezielle hergeleitet werden, wobei besonders die neuen, in der empirischen Literatur wenig bekannten Modelle hervorgehoben werden. Neben der technischen Analyse steht die ökonomische Interpretation der Parameter sowie die Diskussion der Vor- und Nachteile der Modelle in diesem Abschnitt im Vordergrund.

In Kapitel 4 werden die verwendeten Bewertungsmethoden für unterschiedliche Optionstypen präzisiert. Dem Ziel des Modellvergleichs folgend, eignet sich für die Kalibrierung die zeit-schnelle und bei allen hier relevanten Modellen einsetzbare Bewertung mittels Fourier Transformation. Für die Bewertung exotischer Optionen wird die universelle Methode der Monte Carlo Simulation vorgestellt. An die Einführung schließt sich eine Untersuchung verschiedener Diskretisierungsverfahren an, die eine entscheidende Rolle für die Qualität der Simulation spielen.

Die technisch größte Herausforderung innerhalb des Modellvergleichs stellt die Durchführung der Kalibrierung dar. Daher werden zu Beginn von Kapitel 5 die relevanten Optimierungsalgorithmen beschrieben und deren Wahl motiviert. Im weiteren Verlauf des Abschnittes wird der für die empirischen Untersuchungen verwendete Datensatz deskriptiv vorgestellt. Abschließend werden die Modellparameter aller Modelle als erstes numerisches

Ergebnis der Kalibrierung auf den Datensatz angegeben und diskutiert.

Der erste Teil des Kapitels 6 beinhaltet die Fehlerterme der Modelle, die nach der Kalibrierung bestehen bleiben. Als erste Disziplin im Modellvergleich werden diese Fehler in unterschiedlichen Konstellationen gegenübergestellt. Untersuchungen zur Reduzierung der Wahrscheinlichkeiten negativer Werte für Volatilität innerhalb der Modellgruppe von Schöbel und Zhu [116] sowie Diskussionen interessanter Eigenschaften einiger Parameter schließen sich in Kapitel 6 an. Im letzten Teil des Kapitels 6 werden Methodik und Ergebnisse der Out-of-Sample Analyse herausgearbeitet und präsentiert. Im Sinne eines umfassenden Modellvergleichs liefert dieser zweite Schritt wichtige Erkenntnisse über die Überparametrisierung der Modelle und deckt deren Anzeichen auf.

Die Einführung von vier exotischen „Over-the-Counter“ Optionstypen, deren Auszahlungsprofile sich von den gewöhnlichen Optionen der bisherigen Kapitel in ihrer Komplexität unterscheiden, erfolgt in Kapitel 7. In diesem Abschnitt werden zunächst für jede exotische Option Definition, Bewertungsmethode und Anwendungsbeispiele angegeben. Im anschließenden empirischen Teil werden Preise, die mit den optimalen Parametern aus Kapitel 5 berechnet wurden, für jede Option und für jedes Modell aufgeführt und verglichen.

Das Hedgen von Optionen als Absicherung gegen Marktrisiken stellt eine besonders relevante Herausforderung an die Modelle dar und bildet somit eine weitere Disziplin im Modellvergleich. Kapitel 8 ist daher der Analyse und Gegenüberstellung verschiedener Hedgingkonzepte gewidmet. Ein zentraler Bestandteil der Hedging-Strategien sind die Sensitivitäten der Optionen. Daher werden verschiedene Verfahren zu ihrer Berechnung in den komplexen Modellen ebenfalls in Kapitel 8 genauer beschrieben und untersucht.

Da die Werte der exotischen Optionen trotz Kalibrierung der zugrunde liegenden Parameter an einen Datensatz Plain-Vanilla Optionen unterschiedlich hoch ausfallen, tritt hier Modellrisiko auf, das in Kapitel 9 tiefer gehend untersucht wird. Die zentrale Frage in Kapitel 9 beschäftigt sich mit der Sensitivität der einzelnen Optionstypen bezüglich Modellrisiko. Dazu zählen Vergleiche über unterschiedliche Laufzeiten und verschiedene „Moneyness-Level“ hinweg, bei denen auch die jeweilige Marktphase berücksichtigt wird.

Kapitel 10 enthält nach einem zusammenfassenden Rückblick Schlussfolgerungen aus den erzielten Ergebnissen sowie einen Ausblick auf offene Fragen.

Für jedes Kapitel gilt hierbei im Besonderen, dass stets die Anwendbarkeit von Modellierungen und Lösungsverfahren im Vordergrund steht. Daher werden nicht immer alle Regularitäts- und Integrierbarkeitsbedingungen im Detail angegeben und explizit überprüft, wenn diese Bedingungen rein technischer Natur sind und nicht dem besseren Verständnis dienen. Dieses Vorgehen wird damit begründet, dass es sich aus technischer Sicht bei allen verwendeten Modellen und Verfahren um Spezialfälle von wesentlich größeren Klassen handelt. Für darüber hinaus gehende Details wird hier auf die entsprechende mathema-

tische Fachliteratur verwiesen.²⁵

Die Programme für die empirischen Studien wurden in MATLAB, einem technischen Computeralgebra-Programm der Firma MathWorks und Standard-Tool zur Berechnung numerischer Fragestellungen in der ganzen Welt, geschrieben. In MATLAB sind Programmierung, Berechnung und Visualisierung in einer Umgebung integriert. Die weiteren Vorteile sind, dass die Programmierung in Problem-naher mathematischer Notierung über Vektoren und Matrizen erfolgt und dass der Quellcode in intuitiver und kompakter Form geschrieben werden kann. Darüber hinaus sind in MATLAB schon viele Funktionen und Algorithmen in professioneller Qualität verfügbar, die nicht neu implementiert werden müssen. Nicht zuletzt erleichtern die vielfältigen Möglichkeiten von MATLAB beim Im- und Export von Daten aus oder zu anderen Programmen wie LaTeX und Microsoft Excel das Arbeiten in verschiedenen Formaten.

²⁵Vgl. z.B. Irle[84], Elliott/Kopp[57], Musiela[101], Seydel[121].

Kapitel 2

Bewertung von Optionen

Zu Beginn dieses Kapitels werden aufbauend auf den grundlegenden Begriffen aus Kapitel 1 die Konzepte zur Bewertung von Optionen vorgestellt. Der Abschnitt 2.1 spielt dabei komplett in der Welt von Black und Scholes [22] und fasst die wesentlichen Gesichtspunkte des Black–Scholes Modells zusammen. Die Frage, warum das Black–Scholes Modell nicht zur Bewertung von Optionen ausreicht und wieso Bedarf an komplexeren Modellen besteht, wird in Abschnitt 2.2 beantwortet. Abschnitt 2.3 zeigt einzelne Komponenten auf, die die größten Schwächen des Black–Scholes Modells umgehen können und aus denen die affinen Jump–Diffusion Modelle in Kapitel 3 zusammengesetzt sind.

2.1 Grundlagen der Bewertungstheorie

In Kapitel 1 wurden bereits die wesentlichen Begriffe eingeführt und erläutert. Da jedoch eine formale Schreibweise die Übersichtlichkeit erhöht, werden die wichtigsten Definitionen im vorliegenden Abschnitt präzisiert.¹

Wie einleitend erwähnt verbrieft eine Call–Option dem Käufer das Recht, aber nicht die Verpflichtung, an zu bestimmenden Zeitpunkten einen Basiswert zum Strike K vom Stillhalter zu erwerben. Bei einer Put–Option gilt entsprechend, dass der Basiswert an den Stillhalter verkauft werden kann.

Hat der Optionskäufer zu jeder Zeit das Recht, die Option auszuüben, wird sie „amerikanische Option“ genannt. Kann der Käufer nur zu einem Zeitpunkt T , nämlich am Ende der Vertragslaufzeit, von seinem Recht Gebrauch machen, liegt eine „europäische Option“ vor.²

Durch die Verbriefung des Optionsrecht erhält die Option einen Wert, der allgemein zur

¹Vgl. z.B. Irle[84], Elliott/Kopp[57], Musiela[101], Sandmann[115], Seydel[121].

²Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit europäischen Optionen. Für die Bewertung amerikanischer Optionen vgl. z.B. Elliott/Kopp[57], Kapitel 8, Seydel[121], S.140ff.

Zeit³ t mit $V_t = V(t)$, explizit für eine Call-Option mit C_t und entsprechend für eine Put-Option mit P_t bezeichnet wird. Dieser Wert ist abhängig vom Kurs $S_t = S(t)$ des zugrunde liegenden Basiswertes zur Zeit t . Bei einer europäischen Call-Option sind am Fälligkeitzeitpunkt T zwei Fälle zu unterscheiden:

$S_T > K$: Der Basiswert ist am Markt teurer als bei Optionsausübung beim Stillhalter zu bezahlen ist. Daher beträgt der Optionswert $S_T - K$, wenn sofort nach Ausüben der Basiswert am Markt verkauft wird.⁴

$S_T \leq K$: Der Basiswert ist am Markt billiger oder gleich teuer. Die Option verfällt, da es besser ist, den Basiswert direkt am Markt zu kaufen. Der Optionswert beträgt somit Null.

Die „Auszahlungsfunktion“ oder auch der „Payoff“ einer europäischen Call-Option zur Zeit T lautet folglich

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} =: (S_T - K)^+. \quad (2.1)$$

Für eine Put-Option gilt $P_T = (K - S_T)^+$ entsprechend.

Aus der Form der Auszahlungsfunktion wird ersichtlich, dass stets das Verhältnis vom Strike zum Basiswert eine Rolle für die Einschätzung über den Wert einer Option spielt. Eine Option liegt „im-Geld“⁵, wenn sie bei sofortiger Fälligkeit einen echt positiven Wert hätte. Entsprechen sich zum untersuchten Zeitpunkt Basiswert und Strike, so heißt die Option „am-Geld“⁶. Ist der Wert bei sofortiger Fälligkeit Null, liegt die Option „aus-dem-Geld“⁷.

In Abbildung 2.1 (a) und (b) sind die Auszahlungsfunktionen für Call- bzw. Put-Option dargestellt.

Die Funktionsverläufe machen deutlich, dass der Käufer einer Call-Option auf steigende Kurse setzt, während ein Put-Options Käufer auf fallenden Kursen spekuliert. Die Verkäufer haben in beiden Fällen die entgegengesetzten Erwartungen.

Da die Optionswerte C_t zur Zeit $t < T$ nicht so einfach zu bestimmen sind wie bei Fälligkeit, ist zunächst die Kenntnis oberer und unterer Wertschranken wünschenswert. Zum Beweis dieser Schranken ist das Nicht-Vorhandensein von sofortigen, risikolosen Gewinnen, die „Arbitrage-Freiheit“⁸, Voraussetzung. Bei Arbitrage-Freiheit gibt es keine Han-

³Der Index t wird dann weggelassen, wenn die zeitliche Abhängigkeit klar ist oder der Index für eine partielle Ableitung nach der Zeit steht. Die Schreibweise mit Klammern wird dann gewählt, wenn neben der zeitlichen Abhängigkeit auch die Abhängigkeit vom Kurs des Basiswertes verdeutlicht werden soll, z.B. in der Form $V(S,t)$. Darüber hinaus hängt der Optionswert vom Strike K und dem Fälligkeitstermin T ab, was im Allgemeinen aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht indiziert wird.

⁴Es wird durchgängig angenommen, dass keine Transaktionskosten entstehen.

⁵Englisch: „in-the-money“, oft „ITM“ abgekürzt.

⁶Englisch: „at-the-money“, oft „ATM“ abgekürzt.

⁷Englisch: „out-of-the-money“, oft „OTM“ abgekürzt.

⁸Vgl. für Definition von Arbitrage vgl. z.B. Musiela[101], S.14f.

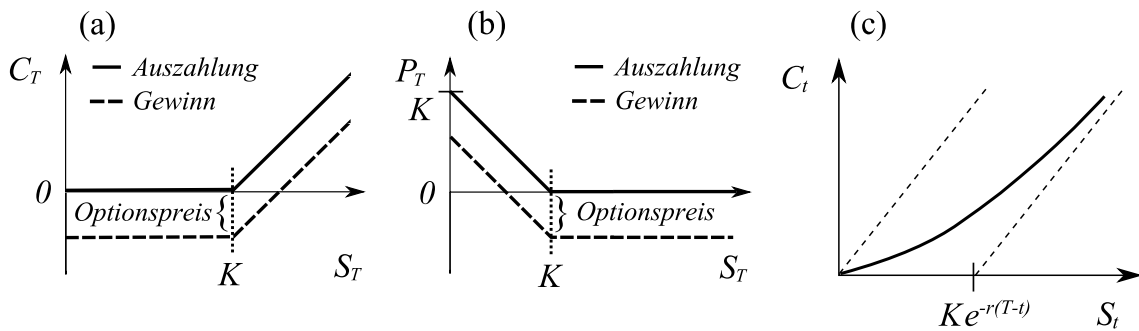


Abbildung 2.1: (a), (b) Auszahlungs- und Gewinndiagramme für einen europäischen Call bzw. Put mit Strike K
 (c) Arbitragefreie Bewertungsschranken mit qualitativem Preisverlauf eines Calls mit Strike K .

delsstrategie⁹, die alle anderen Handelsstrategien dominiert. Bei angenommener Existenz einer solchen einträglicheren Strategie würden alle Anleger diese Anlage wählen, was in einem funktionierenden Kapitalmarkt im Gleichgewicht nach kurzer Zeit durch die veränderte Angebot–Nachfrage Situation unweigerlich zum Auflösen der Arbitrage–Möglichkeit führen würde.

Eine Folge aus der Arbitrage–Freiheit ist das „Gesetz von der Unterschiedslosigkeit der Preise“ oder „Law of one Price“¹⁰, das besagt, dass zwei zu einem späteren Zeitpunkt wertmäßig gleiche Positionen auch schon heute den gleichen Wert besitzen müssen.¹¹

Die Arbitrage–Freiheit zählt zu den fundamentalen Konzepten der Finanzmarkttheorie und erlaubt den Beweis der folgenden Aussagen.¹²

Proposition 1. Unter der Voraussetzung der Arbitrage–Freiheit gilt im friktionslosen Markt für ein dividendenfreies Wertpapier als Basiswert für alle Zeitpunkte $0 \leq t \leq T$:

$$C_t = P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{Put–Call Parität} \quad (2.2)$$

$$0 \leq (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \leq C_t \leq S_t.$$

Die Arbitrage–freien Wertschranken für die Call–Option sind in Abbildung 2.1 (c) zusammen mit einer qualitativen Preiskurve abgebildet. Die entsprechenden Wertschranken für die Put–Option ergeben sich aus der Anwendung der Put–Call Parität (2.2).

Für die Berechnung quantitativer Optionswerte in einem stetigen Kapitalmarkt¹³ wird

⁹Eine Kombination aus zwei Wertpapieren vom Basiswert, Option oder festverzinslicher Anlage, um das dritte wertmäßig zu erzeugen.

¹⁰Von Jevsons[85] eingeführt.

¹¹Angenommen die Aussage gilt nicht, dann kann durch Kaufen der billigeren Position und gleichzeitigem Leerverkauf der teureren Position ein Arbitrage–Gewinn erzielt werden.

¹²Vgl. z.B. Sandmann[115], S.41ff.

¹³Eine andere Möglichkeit bieten Modelle in diskreter Zeit, vgl. z.B. das „Cox–Ross–Rubinstein“ Modell in

der Kurs des Basiswertes S_t , der sich im Folgenden auf einen Aktienkurs bezieht, als Zufallsvariable modelliert, wobei S_t für festes t , $0 \leq t \leq T$, ein Zufallsexperiment zum Zeitpunkt t ist. Die gesamte Abfolge aller Ausgänge beschreibt einen „Pfad“ oder „Trajektorie“. Die mathematische Struktur, die nun jedem Element eines Wahrscheinlichkeitsraums¹⁴ eine Trajektorie zuordnet, heißt „(stetiger) stochastischer Prozess“¹⁵.

Ein spezieller stochastischer Prozess ist der „Wiener–Prozess“¹⁶ oder die „Brownsche Bewegung“¹⁷, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind.

Definition 1. Ein stochastischer Prozess¹⁸ $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$ mit stetigen Pfaden heißt Wiener–Prozess oder Brownsche Bewegung, falls gilt:

- Der Anfangswert $W_0 = 0$.¹⁹
- Die Zuwächse $\Delta W_s := W_t - W_s$ sind $\mathcal{N}(0, t - s)$ normalverteilt für alle $0 \leq s \leq t$.
- Die Zuwächse $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sind für jede Diskretisierung $0 < t_1 < \dots < t_n$ stochastisch unabhängig.

Ein Beispiel für normalverteilte Zuwächse der Brownschen Bewegung ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Da die Brownsche Bewegung nach Definition 1 negative Werte annehmen kann, ist die Brownsche Bewegung in ihrer arithmetischen Form nicht für die Modellierung eines stets positiven Aktienkurses geeignet. Der Prozess

$$\left(\exp(\sigma W_t + at) \right)_{t \in [0, \infty)} \quad (2.3)$$

hingegen bildet die „geometrisch Brownsche Bewegung“ mit Volatilität σ und Drift a und hat nur nicht–negative Realisationen.

Wählt man in (2.3) $a = -\frac{1}{2}\sigma^2$, ist die geometrisch Brownsche Bewegung ein „Martingal“.²⁰

Ein Martingal ist ein spezieller stochastischer Prozess (M_t) ²¹, für den $\mathbb{E}(M_s) = M_t$ für $s \geq t$ gilt. Der Erwartungswert eines Martingals entspricht also der gegenwärtigen Beobachtung.

Musiela[101], Kapitel 2. Mit Hilfe des „Zentralen Grenzwertsatzes“ kann die Black–Scholes Formel aus diesem Modell ebenfalls hergeleitet werden, vgl. Musiela[101], S.40ff.

¹⁴Grundlegende Definitionen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind in Abschnitt A.1 im Anhang aufgeführt und werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt. Darüber hinaus ist bei den Fachbegriffen weiterführende Literatur angegeben.

¹⁵Vgl. für Definition von „stochastischer Prozess“ vgl. z.B. Irle[84], S.36ff., Elliott/Kopp[57], S.133f.

¹⁶Nach dem amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener, 1894–1964, benannt.

¹⁷Nach dem britischen Botaniker Robert Brown, 1773–1858, benannt.

¹⁸Des weiteren wird vorausgesetzt, dass der Prozess adaptiert an eine Filtration ist, um dem zeitlichen Ablauf von Informationen gerecht zu werden. Für Definitionen zu „adaptiert“ und „Filtration“ vgl. z.B. Irle[84], S.36ff., Elliott/Kopp[57], S.131ff.

¹⁹ \mathbb{P} –fast sicher bzgl. einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} .

²⁰Vgl. z.B. Irle[84], S.131., Elliott/Kopp[57], S.135f.

²¹Adaptiert an eine Filtration, vgl. z.B. Musiela[101], S.46., Elliott/Kopp[57], S.135ff.

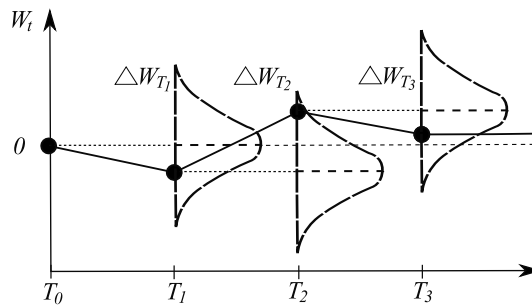


Abbildung 2.2: Zuwächse der Brownschen Bewegung: der Zuwachs $\Delta W_t := W_{t+1} - W_t$ ist von t nach $t + 1$ normalverteilt mit Mittelwert 0.

Von einem Prozess für den Aktienkurs wird gefordert, dass er ein Martingal bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist. Existiert nämlich zu dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} ein äquivalentes Maß \mathbb{Q} , so dass die diskontierten Aktienkurse Martingale unter dem Maß \mathbb{Q} sind, so ist das zugehörige Aktienkursmodell Arbitrage-frei.²²

Somit wird vom folgenden, Arbitrage-freien Modell S_t unter dem risiko-neutralen Maß \mathbb{Q} für die Entwicklung von Aktienkursen mit Anfangspreis S_0 ausgegangen:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right). \quad (2.4)$$

Insbesondere ist S_t log-normalverteilt. Drei mögliche Trajektorien des Modells (2.4) zeigt Abbildung 2.3.

Die Gleichung (2.4) ist exakte Lösung der stochastischen Differentialgleichung²³

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.5)$$

mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$. Gültigkeit der Gleichung (2.5) wird mit Hilfe des Itô Lemmas²⁴ gezeigt.²⁵ Prozesse, die durch Differentialgleichungen der Form (2.5) gegeben sind, sind eine spezielle Form von „Diffusionsprozessen“²⁶. Allgemeiner wird ein Diffusionsprozess durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2.6)$$

beschrieben.

²²Dieser Satz ist unter dem Namen „Erster Fundamentalsatz der Preistheorie“ in der Literatur bekannt. Vgl. z.B. Irle[84], S.105ff., Elliott/Kopp[57], S.72f.

²³Obwohl die Brownsche Bewegung an keiner Stelle differenzierbar ist, hat sich die differentielle Notation gegenüber der Integralschreibweise als kompakt und leichter lesbar in der Literatur durchgesetzt.

²⁴Nach dem japanischen Mathematiker Itô Kiyoshi, geboren 1915, benannt.

²⁵Vgl. Irle[84], S.203ff.

²⁶In ihrem ursprünglichen Sinn beschreibt die Brownsche Bewegung die Bewegung von Teilchen in Gasen und Flüssigkeiten. Der Transport von Teilchen durch Bewegung bei Konzentrationsunterschieden in ein Gleichgewicht heißt „Diffusion“.

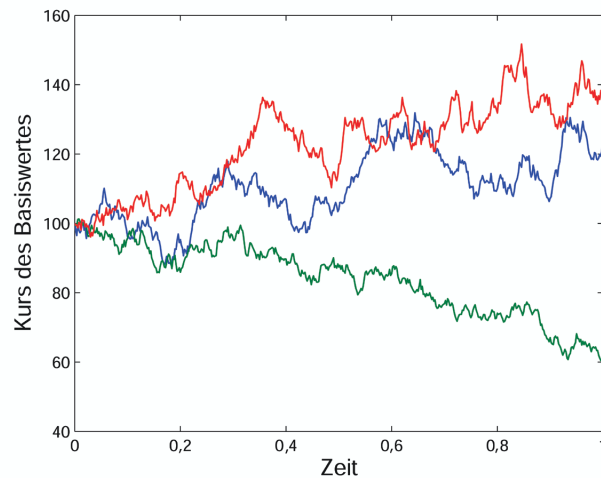


Abbildung 2.3: *Drei Trajektorien der geometrischen Brownschen Bewegung für die Modellierung des Kurses des Basiswertes über die Zeit von 0 bis 1 mit $S_0 = 100$, Strike $K = 100$, Zins $r = 0,1$ und Volatilität $\sigma = 0,3$.*

Dass der Aktienkurs S_t der stochastischen Differentialgleichung (2.5) mit konstanter Volatilität genügt, ist eine der wichtigsten Modellannahmen für das Black–Scholes Modell. Es ergibt sich daraus, dass die Aktienrenditen²⁷ bei log-normalverteilten Aktienkursen normalverteilt sind.

Ebenfalls mit dem Itô Lemma wird gezeigt, dass der Optionswert F ein Itô–Prozess²⁸ ist und die stochastische Differentialgleichung

$$dF = \left(F_t + \mu S F_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 F_{SS} \right) dt + \sigma S F_S dW \quad (2.7)$$

erfüllt, wobei die partiellen Ableitungen als Index geschrieben werden, z.B. $F_S = \frac{\partial F}{\partial S}$ und $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$.

Des weiteren werden die Prämissen aus Tabelle 2.1 an die Umwelt im Black–Scholes Modell gestellt.

Werden diese Voraussetzungen sowie Gleichung 2.4 angenommen und wird ein Duplikationsportfolio aus festverzinslichen Anlagen, Aktien und Optionen stets selbstfinanzierend³⁰

²⁷Die Rendite einer Investition ergibt sich als Quotient aus der Wertsteigerung der Investition in einem bestimmten Zeitraum und ihrem Preis zu Beginn des Zeitraums. Da der Wert am Ende der Periode nicht zu Beginn bekannt ist, spricht man vor Abschluss der Periode von der „erwarteten Rendite“.

²⁸Vgl. für Definition von „Itô–Prozess“ Musiela[101], S.462., Elliott/Kopp[57], S.150.

²⁹Verkauf eines Wertpapiers, das sich zum Zeitpunkt des Verkaufs nicht im Besitz des Verkäufers befindet, sondern z.B. geliehen ist.

³⁰Es fließt kein Geld von außen ins Portfolio. Umschichtungen werden ausschließlich mit Verkäufen oder Käufen aus dem Portfolio selbst finanziert. Vgl. Elliott/Kopp[57], S.183ff.

- Friktionsloser Kapitalmarkt, insbesondere:
 - Möglichkeit für Leerverkäufe²⁹,
 - Zu jedem Zeitpunkt geöffnete Märkte,
 - Beliebig teilbare Wertpapiere.
- Arbitrage–Freiheit,
- Konstante und bekannte risikolose Zinsen,
- Identische Zinsen auf der Soll– und Habenseite,
- Keine Dividenden,
- Individueller Handel ohne Rückwirkung auf den Kurs,
- Kein Ausfall– oder Übernahme–Risiko.

Tabelle 2.1: Voraussetzungen an die Umwelt im Black–Scholes Modell

umgeschichtet, kann die „Black–Scholes Gleichung“

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + rSF_S + F_t - rF = 0 \quad (2.8)$$

aus der Gleichung (2.7) hergeleitet werden.³¹

Ein Kapitalmarkt, der einem Bewertungsmodell zugrunde liegt, heißt „vollständig“³², wenn jedes Derivat mit einem Duplikationsportfolio wie oben beschrieben nachgebildet werden kann. Für einen Kapitalmarkt gilt, dass er genau dann vollständig ist, wenn das äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} eindeutig ist.³³

Das Duplikationsportfolio oder auch „Hedge–Portfolio“ dient dem Stillhalter als Absicherung, da er zu jeder Zeit den Gegenwartswert des Derivats besitzt und bei Fälligkeit der Forderung des Käufers durch Verkauf des Duplikationsportfolios nachkommen kann. Damit ein Kapitalmarkt vollständig sein kann, muss er genauso viele Finanzinstrumente wie Zufallsgrößen enthalten.³⁴

Im Black–Scholes Modell gibt es über die Brownsche Bewegung nur eine Zufallsgröße und mit dem Basiswert den benötigten Finanztitel dazu, so dass der Kapitalmarkt in diesem Modell vollständig ist.

³¹Vgl. Seydel[121], Appendix A4, Elliott/Kopp[57], S.214ff.

³²Vgl. z.B. Irle[84], S.18+66.

³³Dieser Satz ist unter dem Namen „(Zweiter) Fundamentalsatz der Preistheorie“ in der Literatur bekannt. Vgl. z.B. Elliott/Kopp[57], S.89f.

³⁴Vgl. z.B. Sandmann[115], S. 124ff, Elliott/Kopp[57], Kapitel 4.

Die Black–Scholes Gleichung (2.8) hängt nicht mehr von der Drift μ ab, da bei der Herleitung der Driftterm eliminiert werden kann.³⁵

Ökonomisch bedeutet dieser Sachverhalt, dass die Black–Scholes Gleichung und somit auch ihre Lösung, der Optionswert, unabhängig von der Risikoeinstellung der Investoren sind. In diesem Fall führt jede Risikoeinstellung zu der gleichen Bewertung der Option.

Die „Black–Scholes Formel“³⁶ (im Folgenden: BS–Formel) gibt nun eine explizite Lösung zu der parabolischen Differentialgleichung (2.8) mit den Randbedingungen für einen Call $C(0, t) = 0$ ³⁷ und $\lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = S$ ³⁸ sowie Endbedingung $C(S, T) = (S - K)^+$ nach (2.1) an:

$$C(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (2.9)$$

mit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad x \in \mathbb{R},$ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung,

und $d_{1/2} = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$

Die Lösungsformel für die Put–Option lässt sich mit den passenden Rand– und Endbedingungen analog zur Formel (2.9) herleiten.³⁹

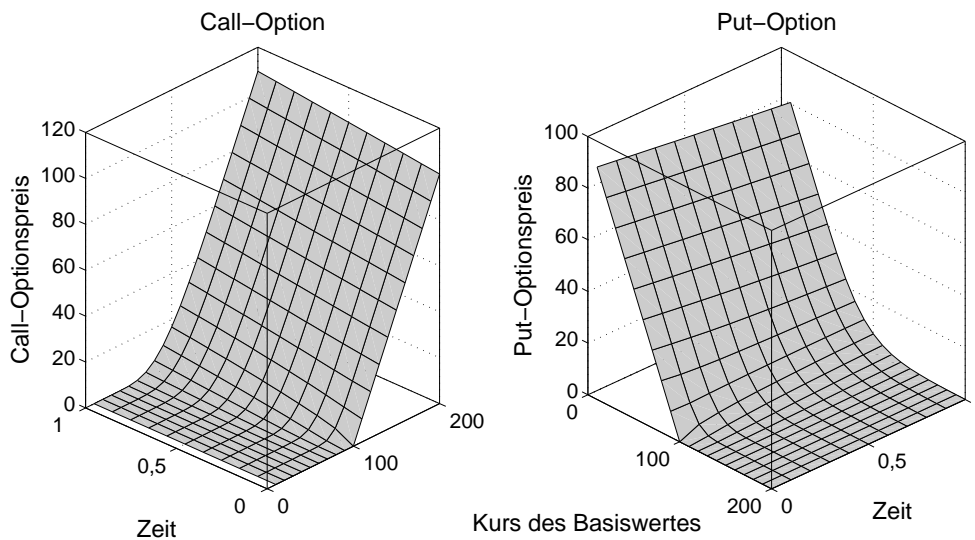


Abbildung 2.4: Call- und Put-Optionspreise in Abhängigkeit vom Kurs des Basiswertes und von der Zeit in 0 bis 1 mit Strike $K = 100$, Zins $r = 0,1$ und Volatilität $\sigma = 0,3$.

Optionspreise in Abhängigkeit vom Kurs des Basiswertes sind nach der BS–Formel (2.9)

³⁵Vgl. Seydel[121], Appendix 3, oder Irle[84], S.232f.

³⁶Vgl. Black, Scholes[22] oder z.B. zum Beweis mit Duplikationsportfolio z.B. Musiela[101], S.115ff.

³⁷Der Prozess S_t bleibt Null, sobald er einmal den Wert Null angenommen hat.

³⁸Gilt zu einem Zeitpunkt $t < T$: $S_t \gg K$, ist die Wahrscheinlichkeit hoch, dass der Call auch mit $S_T \gg K$ enden wird, was zu einer Auszahlung von $S_T - K \approx S_T$ führen wird.

³⁹Vgl. z.B. Musiela[101], S.123.

für verschiedene Zeiten zwischen 0 und 1 für Call und Put in Abbildung 2.4 illustriert. Die bekannten Auszahlungsfunktionen aus Abbildung 2.1 sind als Spezialfall in Abbildung 2.4 enthalten.

2.2 Diskussion des Black-Scholes Modells

Durch Verbreitung der BS-Formel (2.9) haben sich die Märkte für Optionen rasanter entwickelt als jemals zuvor für ein andere Wertpapierklasse.⁴⁰

Der Grund dafür, dass das BS-Modell dabei zur Standard-Referenz in der Optionsbewertung wurde und zurzeit immer noch ist, liegt u.a. darin, dass alle Determinanten für den Optionspreis bis auf die zukünftige Volatilität am Markt beobachtbar sind, wobei die Volatilität sogar vergleichsweise einfach aus Finanzzeitreihen geschätzt werden kann.⁴¹

Der Preis für diese Einfachheit sind die restriktiven Annahmen an den Markt, die teils ganz offensichtlich nicht in der Realität erfüllt werden. Daher stellt sich in Anwendung und Forschung schnell die Frage nach der Validität des BS-Modells. Black selbst hat u.a. in [18], [19], [20] und [21] die unreflektierte Verwendung des BS-Modells kritisiert und die den Annahmen entgegenstehenden Marktfriktionen aufgezeigt. Je mehr Annahmen sich als verletzt erweisen, um so niedriger ist die Aussagekraft des Modells einzustufen.⁴²

Die Prämissen lassen sich in zwei Kategorien einordnen. Zum einen gibt es die große Klasse von Annahmen, die Einschränkungen an die Umwelt darstellen und in Tabelle 2.1 zusammengefasst sind. Diese Prämissen sind in der Realität in der Regel nicht erfüllt, da der geforderte idealtypische Kapitalmarkt in Wirklichkeit Marktunvollkommenheiten aufweist. Mit zusätzlichem Aufwand kann jedoch die Gültigkeit einiger der Annahmen erreicht werden, wobei die Höhe des Aufwands vor allem davon abhängig ist, ob es sich um Privatanleger oder institutionelle Investoren handelt. Dazu zählen z.B. die Voraussetzung beliebig teilbarer Wertpapiere⁴³, die Forderung, dass die Möglichkeit für Leerverkäufe⁴⁴ besteht oder keine impliziten Transaktionskosten⁴⁵. In diesen Fällen beeinflussen die Marktunvollkommenheiten das Ergebnis des BS-Modells nicht grundlegend.

Andere der Restriktionen lassen sich robust durch zusätzliche Komponenten im BS-

⁴⁰Vgl. zur Entwicklung der Märkte für Derivate Rudolph und Schäfer[113].

⁴¹Vgl. Musiela[101], S.151f.

⁴²Weitere empirische Untersuchungen im Zeitraum von 1973 bis 1990 sowie deren Beobachtungen sind in Pape/Merk[105] in Abbildung 2 sehr übersichtlich herausgearbeitet. Ebenfalls liefert Bates[11] einen Überblick über Untersuchungen des BS-Modells in unterschiedlichen Märkten und Ländern.

⁴³Durch eine genügend große Anzahl an Optionen kann die kleinste Einheit der Aktie erreicht werden.

⁴⁴Ein Leerverkauf im klassischen Sinn ist nach deutschem Börsenrecht nicht erlaubt. Der Verkäufer eines Leerverkauf muss sich die entsprechenden Wertpapiere z.B. bei einer Bank oder direkt beim Fonds leihen und dafür Leihgebühren bezahlen.

⁴⁵Institutionelle Investoren teilen große Handelsmengen in kleine Portionen ein.

Modell erfassen, ohne die eigentliche BS–Welt zu verlassen: Optionen auf mehrere Basiswerte, Dividenden, Steuern, deterministische Zinsen und Transaktionskosten können innerhalb bestimmter Strukturen integriert werden.⁴⁶

Innerhalb der ersten Kategorie gibt es allerdings auch Annahmen, die grundlegend für den ganzen theoretischen Überbau sind, wie z.B. die Arbitrage–Freiheit des Marktes oder rationale Marktteilnehmer, und nicht relaxiert werden können.

Die Annahmen der zweiten Kategorie betreffen die Wahl des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses, der die Aktienkurse treibt. Dazu gehören die Prämissen der stetigen Pfade, der normalverteilten log–Renditen sowie der konstanten Volatilität im Aktienkursprozess an, die häufig im Widerspruch zu den beobachteten stilisierten Fakten von Finanzzeitreihen stehen, wie die folgenden empirischen Beispiele verdeutlichen.

Da die Pfade stetig sein müssen, können Sprünge im Aktienkurs nicht vollständig modelliert werden. Ganz kleine Sprünge, die schon durch die vorgegebenen Tick–Größen, den Quotierungsschritten an den Börsen, im Aktienkurs erhalten sind, können mit stetigen Pfaden noch erfasst werden. Anders verhält es sich bei großen Sprüngen, zu denen es zum Beispiel nach Veröffentlichung neuer Informationen über den Basiswert oder nach einem Börsen–Crash kommt. Dieses beobachtbare Kursverhalten ist im BS–Modell nicht abzubilden.

Ebenfalls problematisch ist die Annahme der normalverteilten Aktienkursrenditen bzw. der log–normalverteilter Aktienkurse. Zum einen liefert die Tatsache ein einfaches Beispiel, dass sowohl die einzelnen Aktienoptionen als auch die Optionen auf den DAX, der durch eine gewichtete Summe der Einzelaktien gebildet wird, unter den gleichen Annahmen bewertet werden, obwohl die Summe log–normalverteilter Größen nicht log–normalverteilt ist.

Zum anderen zeigen Marktdaten, dass extreme Kursschwankungen in der Realität mit einer größeren Häufigkeit beobachtet werden als sie nach der Normalverteilung wahrscheinlich sind.

In Abbildung 2.5 ist diese Beobachtung für die täglichen log–Renditen

$$r_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

des DAX vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005⁴⁷ durch ein Histogramm mit dem theoretischen Normalverteilungsverlauf nachzuvollziehen.⁴⁸

Zum einen gibt es in Abbildung 2.5 (b) mehr Beobachtungen um die Null und rechts der Null als von der symmetrischen Normalverteilung vorgesehen. Zum anderen sind Beobachtungen an den Flanken, den „Tails“ des Histogramms, wesentlich häufiger, was in den Abbildungen 2.5 (a) und 2.5 (c) durch einen Zoom in die Extrembereiche der Verteilung deutlich zu erkennen ist. Werden also Kursverläufe wie der beobachtete mit der Normalver-

⁴⁶Vgl. Dividenden: Merton[97], Steuern: Ingersoll[83], Zinsen: Merton[97], Transaktionskosten: Leland[92].

⁴⁷Das entspricht 955 Beobachtungen.

⁴⁸Weitere Informationen zur Datenbasis des DAX sind in Abschnitt 5.3 dargestellt.

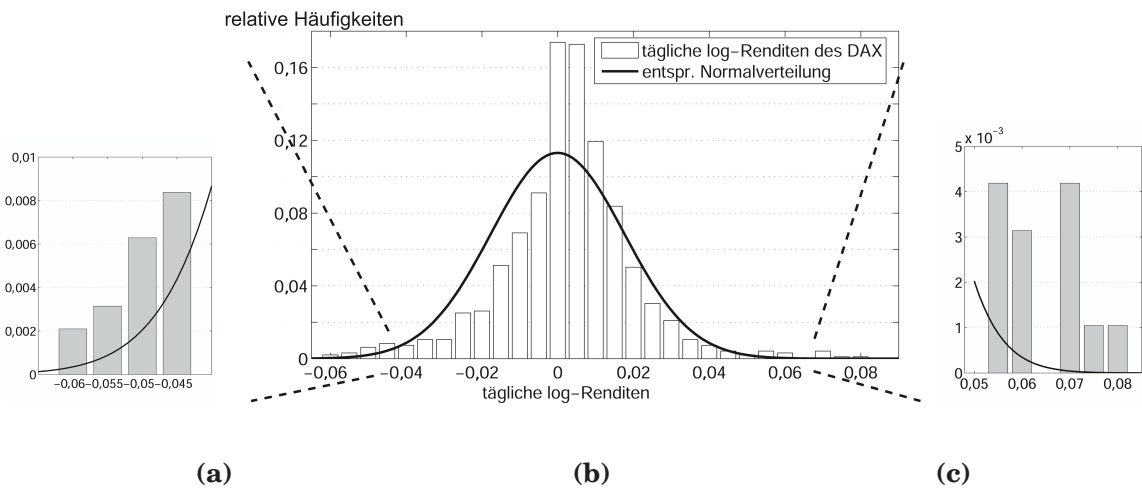


Abbildung 2.5: Histogramm der täglichen log-Renditen des DAX vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 mit theoretischen Normalverteilungsverlauf und Zoom in die Tails.

teilung modelliert, wird das Risiko unterschätzt, was gerade an den Rändern zu Problemen im Risikomanagement führen kann. Insgesamt ist in Abbildung 2.5 festzustellen, dass die beobachtete Verteilung nicht so symmetrisch verläuft wie die Normalverteilung.

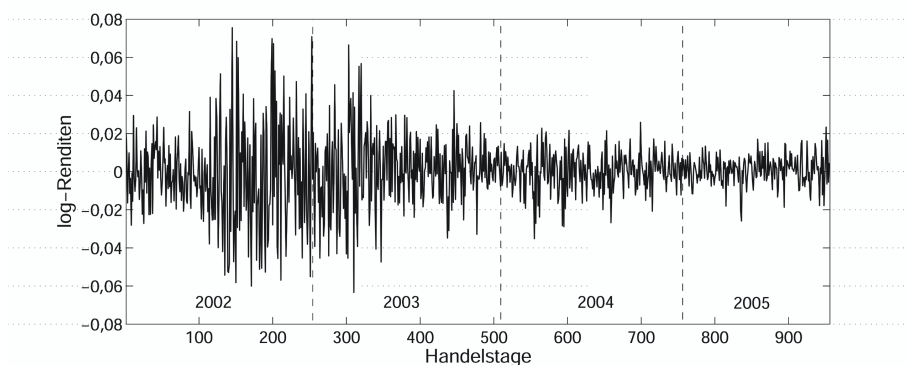
Ein weiteres Phänomen bei beobachteten log-Renditen im Markt ist das „Volatilitäts-Clustering“. Das bedeutet, dass extreme Kursveränderungen gehäuft auftreten. Nach einem großen Kursausschlag ist ein weiterer großer Ausschlag wahrscheinlicher als ein kleinerer. Für eine kleine Kursbewegung gilt es umgekehrt. Es kommt zu einer „Klumpenbildung“ dem Betrage nach besonders großer oder kleiner log-Renditen, was eine von Null verschiedene Korrelation zwischen Volatilitäten bedeutet. Abbildung 2.6 (a) zeigt das Volatilitäts-Clustering für den DAX von 01.01.2002 bis zum 30.09.2005. Von der Mitte des Jahres 2002 bis zur Mitte des Jahres 2003 reihen sich auffallend viele dem Betrage nach große Kursbewegungen aneinander, während Ende 2004 und Anfang 2005 kleinere Kursveränderungen das Bild bestimmen. Normalverteilte log-Renditen zeigen dieses Verhalten nicht, was in Abbildung 2.6 (b) für zu diesem Datensatz passende, simulierte log-Renditen dargestellt ist.

Da die Volatilität im BS-Modell konstant gehalten wird, müssten auch die impliziten Volatilitäten über alle Strikes und Fälligkeitszeitpunkte gleich sein. Die implizite Volatilität einer Option wird berechnet, indem der zugehörige Marktpreis in die BS-Formel eingesetzt und die Gleichung iterativ nach der Volatilität σ aufgelöst wird.

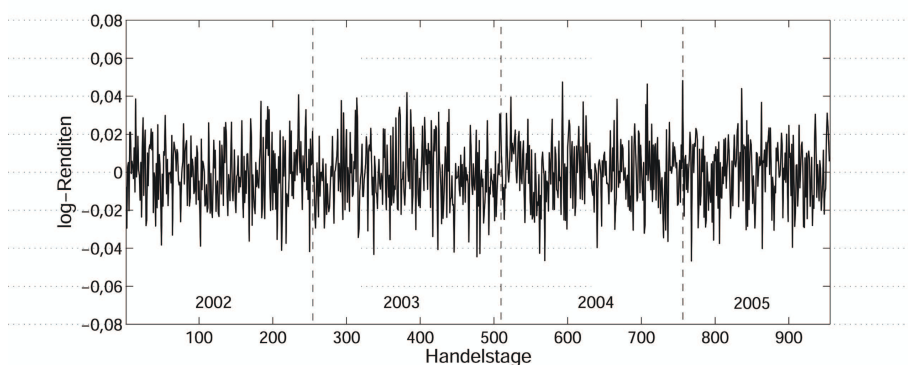
Schon drei Jahre nach Veröffentlichung der BS-Formel bringt Black [19] 1976 seine neuen Erkenntnisse auf den Punkt: „if the volatility of a stock changes over time, the option formulas that assume a constant volatility are wrong.“⁴⁹.

Werden Marktpreise von Optionen auf denselben Basiswert mit gleicher Fälligkeit aber

⁴⁹Vgl. Black[19], S.177.



(a)



(b)

Abbildung 2.6: *Volatilitäts-Clustering bei Kursveränderungen des DAX von 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 im Vergleich mit normalverteilten Zufallsrenditen.*

verschiedenen Strikes betrachtet, weisen die impliziten Volatilitäten einen konvexen, U-förmigen Verlauf auf: Die impliziten Volatilitäten bei Optionen, die weit im-Geld oder weit aus-dem Geld liegen, sind höher als bei Optionen am-Geld. Dieser Effekt wird nach seiner Form „Volatility Smile“ oder „Volatilitäts-Lächeln“ genannt. In Abbildung 2.7 ist der typische Smile-Verlauf schematisch dargestellt.

Die genaue Ausprägung des Smiles variiert mit den Jahren. So stiegen die impliziten Volatilitäten bei höheren Strikes nach 1973 zunächst an⁵⁰, wobei 1976 bis 1978 eine kurzfristige Umkehrung des Effektes beobachtet wurde⁵¹. Trotz statistischer Signifikanz war die Bedeutung des Smiles in diesen frühen Jahren des Optionshandels wesentlich geringer als in den späten achtziger und neunziger Jahren.⁵²

Besonders seit dem Börsen Crash 1987 ergeben empirische Untersuchungen bei Optionen

⁵⁰Vgl. Black[18].

⁵¹Vgl. Rubinstein[110].

⁵²Vgl. Rubinstein[110].

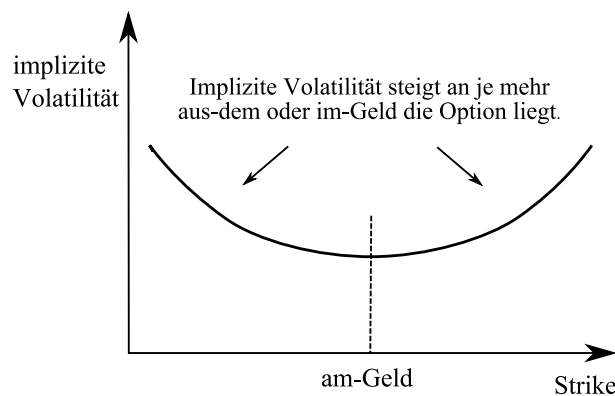


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des Volatilitäts-Lächelns.

auf Aktienindizes, wie der DAX, dass die impliziten Volatilitäten bei höheren Strikes abnehmen⁵³. Die Kurve der impliziten Volatilitäten wird dann „Volatility Skew“ oder „Volatilitäts-Schiefe“⁵⁴ genannt. Werden dabei die Restlaufzeiten kürzer, verstärkt sich der Effekt und die Steigungen werden steiler.⁵⁵

Für einen beliebig gewählten Tag, den 02.08.2002, aus der vorliegenden Datenbasis, beschrieben in Abschnitt 5.3, sind für die Laufzeit in Jahren von $T = 0,404$ die impliziten Volatilitäten über verschiedene Strikes beispielhaft berechnet worden. Abbildung 2.8 zeigt die empirisch festgestellte Volatilitäts-Schiefe.

Die Form des asymmetrischen Lächelns wird häufig mit der gestiegenen Angst seit 1987

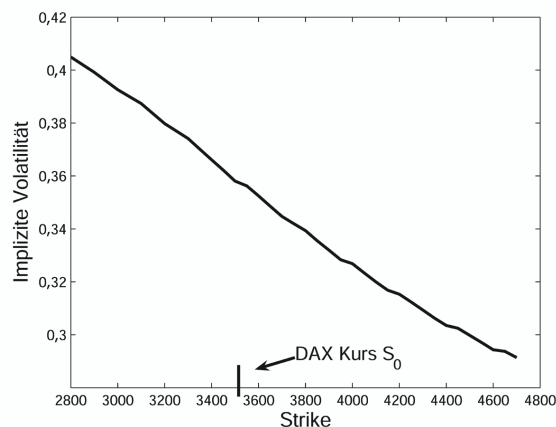


Abbildung 2.8: Volatilitäts-Schiefe für Call-Option auf den DAX am 02.08.2002 über alle Strikes hinweg für Basiswert $S_0 = 3532,49$, Laufzeit $T = 0,404$ und Zins $r = 0,03438$.

⁵³Vgl. Rubinstein[111].

⁵⁴Bezeichnungen wie „Smirke“, „Sneer“ oder „Frown“ sind ebenfalls in der Literatur geläufig.

⁵⁵Vgl. Dumas et al[53].

der Investoren vor starken Abwärtsbewegungen im Basiswert begründet⁵⁶ und lässt auf die Existenz einer negativen Korrelation zwischen Kurs und Volatilität schließen, die Black [19] zum ersten Mal empirisch diskutierte.

In der Literatur ist eine Kontroverse entstanden, welches Phänomen aus welchem folgt. Black [19] beobachtete, dass die Volatilität anstieg, wenn der Aktienkurs fiel und begründete diese Implikationsrichtung damit, dass bei einem Aktienkursrückgang das Insolvenzrisiko und der Verschuldungsgrad des Unternehmens steigt. Die andere Folgerichtung kann jedoch damit begründet werden, dass durch eine gestiegene Volatilität die Aktie weniger interessant am Markt wird und dass es dadurch zu Kursverlusten kommt.⁵⁷

Abbildung 2.9 zeigt durch den in einem Diagramm übereinandergelegten, inversen Verlauf von Kurs des DAX und der impliziten Volatilität, dass es eine negative Korrelation zwischen den beiden Größen in der untersuchten Datenbasis vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 gibt. Bouchaud et al [24] stellte fest, dass bei Aktienindizes die negative Korrelation stärker ausgeprägt ist als bei Einzeloptionen.

Diese Korrelation wird häufig als „Leverage–Effekt“ bezeichnet⁵⁸. Diese Namensgebung erklärt sich dadurch, dass mit „Leverage“ stets eine Hebelwirkung umschrieben wird, unter der sich kommende Entwicklungen immer überproportional auf investiertes Kapital auswirken.⁵⁹

Neben den ausgeprägten Perioden der negativen Korrelation sind vereinzelt Phasen der Konsolidierung auszumachen, in denen der Kurs bei sinkender Volatilität auf einem sehr hohen Niveau leicht nachgibt. Die ersten 50 Handelstage zu Beginn 2002 sind einer solchen Phase zuzuordnen, ebenso einige Passagen in der Mitte des Jahres 2004.

Im BS-Modell gibt es aufgrund der Annahme der konstanten Volatilität keine Möglichkeit den Leverage–Effekt abzubilden. Im folgenden Abschnitt 2.3 werden Auswege aus dem Missverhältnis von theoretischen Marktannahmen zu empirischen Beobachtungen aufgezeigt. Da der Großteil der Diskrepanz nicht auf Marktunvollkommenheiten zurückgeführt werden kann⁶⁰, werden in dieser Arbeit die Restriktionen bzgl. der zweiten Kategorie abgeschwächt. Alle weiteren Voraussetzungen bzgl. der Umwelt der Modelle bleiben weiterhin gültig.⁶¹

⁵⁶Vgl. Rubinstein[111], Andersen/Brotherton–Radcliff[4].

⁵⁷Vgl. Bekaert/Wu[15].

⁵⁸Vgl. Bouchaud et al[24].

⁵⁹Vgl. Leverage–Effekte bei Fremdfinanzierungen oder bei Optionen. Für eine kritische Betrachtung vgl. Figlewski/Wang[64].

⁶⁰Vgl. Buraschi/Jackwerth[32].

⁶¹Integration von relaxierten Marktannahmen in komplexe Modelle ist Gegenstand der Forschung.

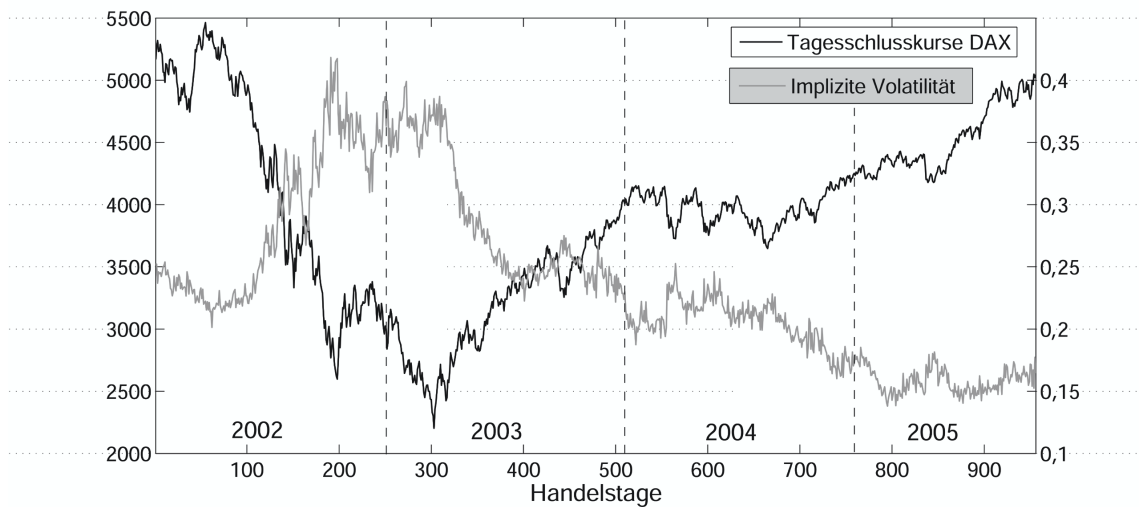


Abbildung 2.9: Negative Korrelation zwischen Basiswert und Volatilität: DAX mit impliziter Volatilität vom 01.01.2002 bis 30.09.2005.

2.3 Ansätze jenseits der Black-Scholes Welt

Im vorausgegangenen Abschnitt 2.2 wurden erste kleine empirische Überprüfungen des BS-Modells vorgenommen, um die Frage zu klären, ob die BS-Formel geeignet ist, Optionen in realen Märkten zu bewerten. Anhand empirischer Beispiele wurde aufgezeigt, dass einige Modellannahmen nicht durch Marktdaten gestützt werden können. In diesem Abschnitt werden nun alternative Modelle vorgestellt, die mit weniger restriktiven Annahmen auskommen und die stilisierten Fakten besser erfassen können.

Als eine Verallgemeinerung wird die Forderung nach konstanter Volatilität aufgegeben. Zwei in der Literatur diskutierte Ansätze, die den Smile oder Skew in der Volatilitätsstruktur erzeugen können, sind die deterministischen und die stochastischen Volatilitätsmodelle. Bei den deterministischen Modellen wird die Volatilität σ durch eine deterministische Funktion von Aktienkurs und Zeit $\sigma(S, t)$ beschrieben, während bei den stochastischen Modellen die Volatilität durch einen eigenen Diffusionsprozess nach Gleichung (2.6) modelliert wird.⁶²

Die wichtigsten vier Vertreter der Klasse der deterministischen Modelle sind das „Constant Elasticity of Variance Model“ (CEV) von Cox und Ross [42] 1976, das „Implied Tree Model“ von Rubinstein [111], die „Generalized Deterministic Volatility Function Models“ von Dupire [54] 1994 und Derman und Kani [47] 1994 sowie der „Kernel Approach“ von Ait-Sahalia und Lo [2] 1998.⁶³

Der Vorteil von deterministischen Modellen ist, dass der zugrunde liegende Kapitalmarkt

⁶²Eine weitere Klasse innerhalb der stochastischen Volatilitätsmodelle aus einem ökonomischen Kontext heraus sind die zeit-diskreten GARCH Optionsbewertungsmodelle von Duan[51] oder Heston/Nandi[77].

⁶³Vgl. Dumas et al[53], Buraschi/Jackwerth[32].

vollständig bleibt, so dass die Bewertung mittels einer Duplikationsstrategie, wie beim BS-Modell, erfolgen kann. Da bei deterministischen Modellen die Volatilitätsfläche so bestimmt wird, dass die Volatilität im Markt genau abgebildet wird, lassen sich die beobachteten Fakten wie Smile, Clustering und Korrelation mit diesen Modellen erfassen. Doch sowohl Dumas et al [53] als auch Buraschi und Jackwerth [32] stellen in ihren empirischen Untersuchungen fest, dass trotz sehr gute „In-Sample“ Anpassung in „Out-of-Sample“ Tests Überparametrisierung, auf Englisch „Overfitting“, festgestellt wird. Daher sehen Buraschi und Jackwerth [32] die Eignung von deterministischen Volatilitätsmodellen im Risikomanagement und bei der Bewertung von exotischen Optionen als begrenzt an. Da bei der Untersuchung von Modellrisiko die Fähigkeit, exotische Optionen zu bewerten, eine zentrale Rolle spielt, werden in dieser Arbeit die deterministischen Modelle nicht betrachtet, sondern der Fokus auf die stochastische Volatilität gelegt.

Die bedeutendsten Arbeiten auf dem Gebiet der stochastischen Volatilitätsmodelle sind Hull und White [81] 1987, Scott [119] 1987, Wiggins [132] 1987, Stein und Stein [124] 1991, Heston [76] 1993 sowie Schöbel und Zhu [116] 1999.

Ein stochastisches Volatilitätsmodell wird durch eine zwei-dimensionale stochastische Differentialgleichung (im Folgenden: SDE)

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(S)}, & (2.10) \\ \sigma_t &= f(Y_t), \\ dY_t &= a(t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dW_t^{(V)}, \\ dW_t^{(S)} dW_t^{(V)} &= \rho dt \end{aligned}$$

mit Drift μ , einer positiven Funktion f und zwei korrelierten Brownschen Bewegungen $W_t^{(S)}$ für den Aktienkurs und $W_t^{(V)}$ für die Volatilität.

Die oben genannten Arbeiten unterscheiden sich hauptsächlich in der Wahl für a , b und f . Hull und White [81] setzen für die Varianz $f(y) = \sqrt{y}$ eine geometrisch Brownsche Bewegung $dY_t = \alpha Y_t dt + \beta Y_t dW_t^{(V)}$ an, während Stein und Stein [124] mit $f(y) = |y|$ bzw. Scott [119] mit $f(y) = e^y$ einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess (im Folgenden: OU-Prozess) [127]

$$dY_t = \kappa(\theta - Y_t) dt + \beta dW_t^{(V)},$$

verwenden.

Diese Modelle sind nur für den unkorrelierten Fall $\rho = 0$ in einer geschlossenen Form lösbar und können somit den Leverage-Effekt nicht modellieren. Daher wird in dieser Arbeit auf den Modellen von Heston [76] sowie Schöbel und Zhu [116] aufgebaut, die einen beliebigen Korrelationskoeffizienten ρ einschließen, was in Schöbel und Zhu [116] genau die Erweiterung des Modells von Stein und Stein [124] darstellt.

Heston [76] verwendet in seinem Modell einen Cox-Ingersoll-Ross Prozess⁶⁴ (im Folgen-

⁶⁴Der CIR-Prozess beschreibt ursprünglich ein Zinsmodell für kurzfristige Zinsen, vgl. Cox et al[41].

den: CIR-Prozess) [41]

$$dY_t = \kappa(\theta - Y_t)dt + \beta\sqrt{Y_t}dW_t^{(V)},$$

für die Varianz mit $f(y) = \sqrt{y}$. Die Modelle von Heston [76] und Schöbel und Zhu [116] werden in den Abschnitten 3.2 und 3.4 ausführlich beschrieben.

Die Modellierung des Volatility Smile, des Clustering sowie des Leverage-Effekts sind in den Modellen von Heston [76] und Schöbel und Zhu [116] marktnah möglich. Der Nachteil bei beiden Modelle besteht darin, dass die zufällige Änderung im Aktienkurs, unverändert zum BS-Modell, durch eine Brownsche Bewegung mit stetigen Pfaden beschrieben wird. Somit sind keine Sprünge in der Modellierung möglich, wie sie z.B. abwärts bei einem Crash vorkommen. Das hat oft zur Folge, dass die Flanken der Renditeverteilung im Vergleich zum Markt nicht schwer genug sind und dass nicht das entsprechende Niveau an Schiefe und Wölbung der Verteilung erreicht werden kann.⁶⁵

Merton [98] hat 1976 das BS-Modell um Sprünge erweitert, indem er die geometrisch Brownsche Bewegung mit von einem Poisson Prozess⁶⁶ generierten Sprüngen kombinierte. Da der Diffusionsteil erhalten bleibt, werden Sprungmodelle dieser Art „Jump-Diffusion“ genannt.⁶⁷

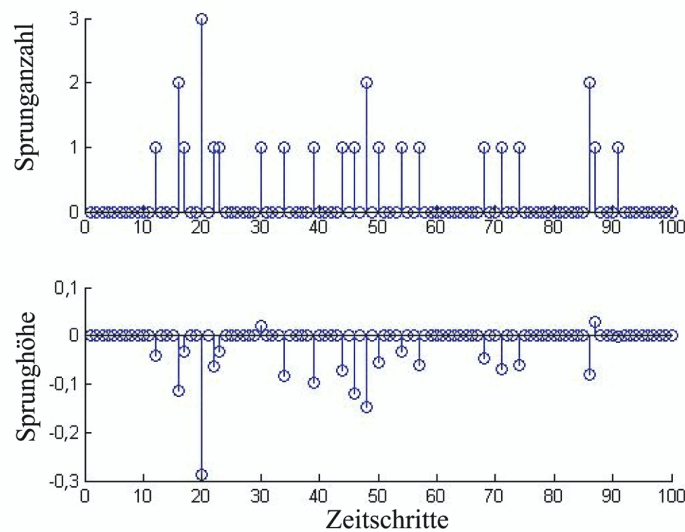


Abbildung 2.10: *Simulierter Poisson Prozess für Sprunganzahl mit kumulierter log-normalverteilter Sprunghöhe für 100 Zeitschritte.*

Der stochastische Prozess für den Aktienkurs ist gegeben durch

$$dS_t = S_t \left((\mu - \lambda k)dt + \sigma dW_t^{(S)} + JdN_t \right), \quad (2.11)$$

⁶⁵Vgl. Bates[11], Chernov et al[37].

⁶⁶Nach dem französischen Physiker und Mathematiker Simeon-Denis Poisson, 1781–1840, benannt.

⁶⁷Eine weitere Möglichkeit der Modellierung stellen reine Sprungprozesse ohne Diffusion dar, vgl. dazu z.B. Cont/Tankov[39].

mit Poisson Prozess N_t und Intensität λ , wobei dW_t und dN_t unabhängig sind.

Mit J wird die zufällige prozentuale Sprunghöhe bedingt auf eine echt positive Sprunganzahl angegeben. Die Sprunghöhe $(1 + J)$ ist log-normalverteilt mit Erwartungswert k und Varianz δ :

$$\log(1 + J) \sim \mathcal{N}\left(\log(1 + k) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right).$$

Folglich gibt es λ durchschnittliche Sprünge mit Höhe k im Mittel pro Jahr.

In Abbildung 2.10 sind im oberen Schaubild die Ausgänge eines simulierten Poisson Prozesses dargestellt. In diesem Beispiel gibt es pro Zeitschritt entweder keinen, einen, zwei oder drei Sprünge. Wie hoch der jeweilige Sprung ausfällt, ist dem unteren Diagramm zu entnehmen, wobei die Sprunghöhe bei mehr als einem Sprung kumuliert angegeben ist.

Zur Charakteristik einer Jump-Diffusion gehört, dass sie i.d.R. wenige große Sprünge im Jahr beschreibt. Zwischen den Sprüngen ist der Pfad stetig.⁶⁸

Mit stochastischer Volatilität und Jump-Diffusion lassen sich alle stilisierten Fakten des Marktes erfassen und bilden somit die Bestandteile der affinen Jump-Diffusion Modelle in Kapitel 3.

⁶⁸Eine Alternative mit vielen kleinen Sprüngen und unstetigen Pfaden bilden die Lévy-Prozesse, die nach dem französischen Mathematiker Paul Lévy, 1886–1971, benannt sind. Eine Übersicht ist gegeben in Cont/Tankov[39], Modellvergleiche sind in Carr/Wu[34], Huang/Wu[79] durchgeführt.

Kapitel 3

Affine Jump–Diffusion Modelle

Die affinen Jump–Diffusion Modelle liegen jenseits der Black–Scholes Welt, von denen in diesem Kapitel zwei Modellgruppen näher betrachtet werden. Mathematische Fakten sind bei der Vorstellung der Modellgruppen nach Duffie, Pan und Singleton [52] im Abschnitt 3.2 und nach Schöbel und Zhu [116] in Abschnitt 3.4 genauso wichtig wie die ökonomische Interpretation ihrer Parameter. Insbesondere ist Abschnitt 3.3 der Frage gewidmet, warum Sprünge in der Volatilität neben der Stochastik eine sinnvolle, realitätsnahe Komponente darstellen. Darüber hinaus werden in den Abschnitten 3.4 und 3.5 die empirische Untersuchung von drei in der Literatur weitgehend unbekannt Modellen motiviert und vorbereitet. Abschnitt 3.6 besteht aus einer tabellarischen Zusammenfassung aller relevanten Modelle für die anschließenden empirischen Untersuchungen.

3.1 Eigenschaften der affinen Jump–Diffusion Modelle

Unter einem affinen Jump–Diffusion Modell (im Folgenden: AJD–Modell) versteht man eine Diffusion mit Sprüngen, deren Drift, Kovarianz–Matrix und Poisson Intensität affine Funktionen¹ des Zustandsvektors S_t sind, der Lösung der SDE

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t + dN_t,$$

ist.²

Alle Modelle, die in dieser Arbeit untersucht werden, gehören der Klasse der AJD–Modelle an. Sie lassen sich in ihrer Allgemeinheit in einem stochastischen Differentialgleichungssystem beschreiben, was eine kompakte Darstellung und einheitliche Schreibweise erlaubt.

¹Die Funktionen sind affin, wenn sie folgender Darstellung genügen: $\mu_t(S_t) = K_1 S_t + K_0$, $\sigma(S_t) = H_1 S_t + H_0$ und $\lambda(S_t) = L_1 S_t + L_0$ mit $H_1, H_0, K_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $K_0, L_1 \in \mathbb{R}^N$ sowie $L_0 \in \mathbb{R}$.

²Vgl. für weitere technische Bedingungen Dai/Singleton[45].

Die konkreten Modelle ergeben sich dann als Spezialfälle aus der SDE

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda_S \bar{\mu}) S_t dt + V_t^p S_t dW_t^{(S)} + J_S S_t dN_t^{(S)} \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \beta V_t^{1-p} dW_t^{(V)} + J_V dN_t^{(V)} \\ dW^{(S)} dW^{(V)} &= \rho dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

unter dem risiko–neutralen Maß \mathbb{Q} mit r als risikolosem Zins durch Wahl der einzelnen Parameter. Werden einige Parameter dabei auf Null gesetzt, erhält man die klassischen Modelle aus Abschnitt 2.3.

Da sich für den Exponent $p = \frac{1}{2}$ oder $p = 1$ zwei verschiedene Modellgruppen ergeben, werden die jeweiligen Spezialfälle der SDE (3.1) in den Abschnitten 3.2 und 3.4 getrennt vorgestellt.

In der Literatur³ werden die Modelle mit $p = 1$ oft nicht zu den AJD–Modellen gezählt. Wie jedoch Gaspar [65] 2004 sowie Cheng und Scaillet [36] 2005 gezeigt haben, gehört die Modellgruppe mit $p = 1$ in die Klasse der AJD–Modelle. Affine Diffusionsmodelle sind wünschenswert, da alle charakteristischen Funktionen⁴ exponentiell affine Funktionen der Form

$$\phi_{\text{affin}, T}(u) = E\left(e^{i u s_T}\right) = e^{F(u, T)}$$

sind mit Laufzeit T und einer vom konkreten Modell abhängigen Funktion F^5 .

Im restlichen Teil des Abschnitts werden die weiteren allgemeinen Charakteristika der SDE (3.1) beschrieben.

Die Volatilität V_t wird in (3.1) durch einen „Mean–Reverting“ Prozess mit $\kappa > 0$ als Mean–Reverting Geschwindigkeit, $\theta > 0$ als langfristiges Mittel und $\beta > 0$ als Variation der Volatilität beschrieben. Da die Drift der Volatilität positiv für $V_t < \theta$ und negativ für $V_t > \theta$ ist, stellt das „Mean–Reverting“ bei diesem Prozess die zentrale Eigenschaft dar. Sie bedeutet, dass der Prozess stets mit der Geschwindigkeit κ vom langfristigen Mittel θ angezogen und dabei durch die Varianz β abgelenkt wird. Das führt zu einer Pendelbewegung der Volatilität um das Mittel. Je größer die Geschwindigkeit, um so schneller bewegt sich der Prozess nach einer Entfernung vom Mittel wieder auf sein Mittel zu. Je größer die Varianz um so stärker ist die Streuung auf dem Weg dorthin.

Ein typischer Verlauf eines Mean–Reverting Pfades ist in Abbildung 3.1 für drei verschiedene Werte für β dargestellt.

Empirische Evidenz der Mean–Reverting Eigenschaft für die Volatilität von Index–Optionen zeigten zum ersten Mal in der Literatur Poterba und Summers [108] 1986 sowie Stein [123] 1989.

In der SDE (3.1) weist die Volatilität über die Mean–Reverting Eigenschaft hinaus eine Sprungkomponente J_V auf, die exponential–verteilt mit Mittel μ_V ist.

³Vgl. z.B. Lee[91].

⁴Vgl. Abschnitt 4.1.

⁵Die Formeln sind für jedes Modell in Abschnitt A.3 im Anhang aufgeführt.

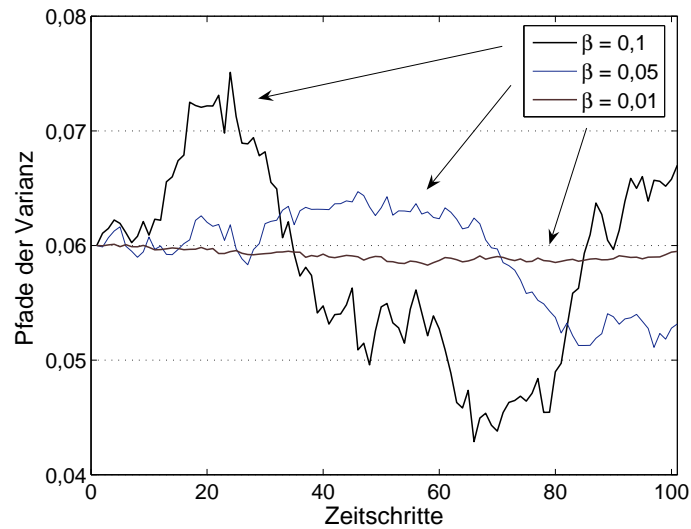


Abbildung 3.1: *Mean-Reverting in Varianzpfaden nach einem CIR-Prozess für verschiedene Variationen β mit $\alpha = 4, \theta = v_0 = 0,06$.*

Die Häufigkeit der Sprünge in der Volatilität wird durch den Poisson-Prozess $N^{(V)}$ mit Intensität λ_V bestimmt. Trotz Sprüngen in der Volatilität bleibt die Mean-Reverting Eigenschaft erhalten: Entfernt sich der Prozess nach einem Sprung weit vom Mittel, setzt der Prozess seinen Pfad in Richtung Mittel fort.

Der Prozess des Basiswertes S_t hat die Eigenschaften eines Jump-Diffusion Prozesses. In diesem Fall ist die Sprunghöhe $(1 + J_S)$ log-normalverteilt mit Mittel $\bar{\mu}_S$ und Varianz δ_S . Die Sprunganzahl folgt wie bei der Volatilität einem Poisson-Prozess $N^{(S)}$ mit Intensität λ_S . Der Zusammenhang von Basiswert und Volatilität wird durch die Korrelation ρ zwischen den beiden Brownschen Bewegungen $W^{(S)}$ und $W^{(V)}$ beschrieben.

Um die Modelle aus Gleichung (3.1) im Einklang mit der Theorie zur Optionsbewertung zu verwenden, sind sie im risiko-neutralen Maß anzugeben. Dazu genügt es den Parameter $\bar{\mu}$ entsprechend zu bestimmen. Seine konkrete Wahl ist in den Abschnitten 3.2 und 3.4 angegeben. Risiko-neutrale Bewertung bei mehr als einer Risikoquelle ist zum Beispiel für Sprünge im Kurs möglich, wenn die Sprungkomponente ein unsystematisches Risiko darstellt.

Durch die Wahl des Exponenten p in (3.1) werden Modellgruppen festgelegt. In den folgenden Abschnitten 3.2 und 3.4 werden zwei Gruppen deduktiv vorgestellt.

3.2 Modellgruppe nach Duffie, Pan und Singleton

Für $p = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus der allgemeinen SDE (3.1) im risiko-neutralen Maß das „Double Jump“-Modell, das von Duffie, Pan und Singleton [52] hergeleitet wurde,

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda_S \bar{\mu}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(S)} + J_S S_t dN_t^{(S)} \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \beta \sqrt{V_t} dW_t^{(V)} + J_V dN_t^{(V)} \\ dW^{(S)} dW^{(V)} &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da im Basiswert die Volatilität als $\sqrt{V_t}$ eingeht, modelliert der Prozess V_t für $p = \frac{1}{2}$ die Varianz. Sie wird durch einen „Square-Root Diffusion“ Prozess beschrieben, der von Cox, Ingersoll und Ross (im Folgenden: CIR) [41] 1985 zum ersten Mal für die Modellierung von stochastischen Zinsen vorgeschlagen wurde. Untersucht wurde diese Klasse von Prozessen bereits von Feller [61]. Für $V_0 > 0$ und

$$2\kappa\theta \geq \beta^2 \quad (3.3)$$

ist der CIR-Prozesses immer strikt positiv, was eine wünschenswerte Eigenschaft sowohl für die Beschreibung von Zinsen als auch für die Modellierung der Varianz ist.

Vom Allgemeinen zum Speziellen ergeben sich aus der SDE (3.2) sechs in der Literatur beschriebene Modelle, die im Folgenden deduktiv hergeleitet werden.

Sind $N^{(S)}$ und $N^{(V)}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit eigenen Intensitäten, ergibt sich für

$$\bar{\mu}_S = \mu_S, \quad \bar{\mu} = \exp\left(\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2\right) - 1$$

das von Duffie, Pan und Singleton [52] vorgestellte Modell mit unabhängigen Sprüngen in Basiswert und Volatilität.

Um eine konsistente Schreibweise⁶ einzuführen, wird dieses Modell im Folgenden mit „SVJ-IJ-CIR“ abgekürzt. Im SVJ-IJ-CIR Modell müssen insgesamt zehn Parameter V_0 , κ , θ , β , ρ , λ_S , μ_S , δ_S , λ_V und μ_V festgelegt werden, die für die Bewertung nötig sind.

Im gleichen Kontext ist es möglich, statt unabhängiger auch korrelierte Sprünge für Basiswert und Volatilität durch $N^{(S)} = N^{(V)}$ und $\lambda_S = \lambda_V$ mit Korrelation ρ_V zu modellieren. Mit

$$\bar{\mu}_S = \mu_S + \rho_V J_V, \quad \bar{\mu} = \frac{\exp\left(\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2\right)}{1 - \rho_V \mu_V} - 1$$

wird das zweite von Duffie, Pan und Singleton [52] untersuchte Modell „SVJ-CJ-CIR“ mit den zehn Parametern V_0 , κ , θ , β , ρ , λ_S , μ_S , δ_S , ρ_V und μ_V beschrieben.

⁶Im Folgenden ist „SV“ stets die Abkürzung für „Stochastic Volatility“ im Gegensatz zu „CV“ für „Constant Volatility“. Werden diese Präfixe um „J“ ergänzt, steht dieses für die Eigenschaft „Jump“. Die Double Jump-Modelle werden durch „C“ für „Correlated“ oder durch ein „I“ für „Independent“ unterschieden. Im Abschnitt „Symbole und Abkürzungen“ ist der Klartext zu den Abkürzungen angegeben.

Setzt man einige der bisherigen Modellparameter auf Null, lassen sich vier weitere, aus der Literatur bekannte Optionspreismodelle herleiten. Ohne Sprünge in der Volatilität ergibt sich das SVJ-CIR Modell von Bates [11] aus (3.2) für $\lambda_V = 0$ und $N^{(V)} = 0$. Für das risiko-neutrale Maß gilt

$$\bar{\mu}_S = \mu_S, \quad \bar{\mu} = \exp\left(\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2\right) - 1.$$

Damit hat das SVJ-CIR Modell noch acht Parameter $V_0, \kappa, \theta, \beta, \rho, \lambda_S, \mu_S$ und δ_S .

Streicht man zusätzlich die Sprungkomponenten aus dem Basiswert-Prozess, erhält man mit $\lambda_V = \lambda_S = 0$ und $N^{(V)} = N^{(S)} = 0$ das SV-CIR Modell von Heston [76] mit den fünf Parametern $V_0, \kappa, \theta, \beta$ und ρ . Die risiko-neutrale Form dieses Modells ist identisch zu der Form unter subjektiven Wahrscheinlichkeiten. Beim Maßwechsel werden lediglich einige Parameter transformiert.⁷ Für $\lambda_V = 0$ und $N^{(V)} = 0$ zusammen mit $\kappa = \theta = \beta = 0$ verschwindet der stochastische Teil der Volatilität und man erhält eine konstante Volatilität $V_t \equiv \sigma$. Dieser Spezialfall ergibt aus (3.2) das CVJ Modell von Merton [98], welches zwar Sprünge im Basiswert aber keine stochastische Volatilität berücksichtigt. Mit

$$\bar{\mu}_S = \mu_S, \quad \bar{\mu} = \exp\left(\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2\right) - 1$$

enthält das CVJ Modell noch vier Parameter σ, λ_S, μ_S und δ_S .

In einem letzten deduktiven Schritt erreicht man für $\lambda_S = 0$ das CV Modell von Black, Scholes [22] und Merton [97], das nur noch einen Parameter σ besitzt und bereits in Abschnitt 2.1 ausführlich beschrieben wurde.

Zu allen in diesem Abschnitt vorgestellten Modellen sind die charakteristischen Funktionen bekannt, die im Anhang, Abschnitt A.3, aufgeführt sind.

3.3 Bedeutung von Sprüngen in der Volatilität

In Gleichung (3.2) steht der Prozess V_t für die Varianz, da $\sqrt{V_t}$ im Basiswert die Volatilität beschreibt. Daher werden korrekterweise in (3.2) Sprünge in der Varianz modelliert. Da aber durch die Transformation das Sprungereignis in die Volatilität übergeht und die Bezeichnung intuitiv ist, werden im restlichen Teil dieses Abschnittes die Sprünge in der Varianz mit den Sprüngen in der Volatilität begrifflich gleichgesetzt.

Das Konzept der Sprünge im Basiswert auf den Prozess der Volatilität zu übertragen, ist intuitiv nahe liegend. Jede Änderung im Basiswert bedeutet auch eine Veränderung der Volatilität, wie bereits in Abschnitt 2.2 anschaulich herausgestellt wurde.

Je größer diese Abweichung im Basiswert ist, um so stärker die Reaktion im Pfad der Volatilität. Kommt es im Basiswert sogar zu einem Sprung, muss die Volatilität in kurzer Zeit

⁷Da in den folgenden Kapiteln nur die risiko-neutralen Parameter von Interesse sind, werden, soweit nichts anderes angegeben, diese Parameter ohne weitere Indizes verwendet.

einen großen Unterschied ausgleichen. Sind Sprünge in der Volatilität modelliert, wird diese Korrektur ebenfalls durch einen Sprung nachvollzogen. Ohne die Möglichkeit zu springen, wird die Varianz des Volatilitätsprozesses steigen, um mit Mean-Reverting Mitteln das neue Volatilitäts-Niveau zu erreichen.

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.2 illustriert. In den Diagrammen 3.2 (a) ist ein Basiswert mit einer Jump-Diffusion modelliert, während der Volatilitätsprozess stetig angenommen wird. Solange der Basiswert steigt, nimmt die Volatilität im Trend ab. Nach dem Sprung des Basiswertes nach unten bei ungefähr Zeitschritt 60 kommt es zu einer Umkehr und die Volatilität beginnt, langsam zu steigen. Dieses Verhalten deckt sich jedoch nicht mit der Realität, in der eine hohe Volatilität direkt nach dem Sprung beobachtet wird, die mit der Zeit abnimmt, wenn sich der Kurs des Basiswertes wieder normalisiert. Das Modell, das in Abbildung 3.2 (b) auch Sprünge in der Volatilität berücksichtigt, erscheint geeigneter, den Markt zu beschreiben.

Mit der empirischen Überprüfung dieser intuitiven Zusammenhänge beschäftigten sich u.a.

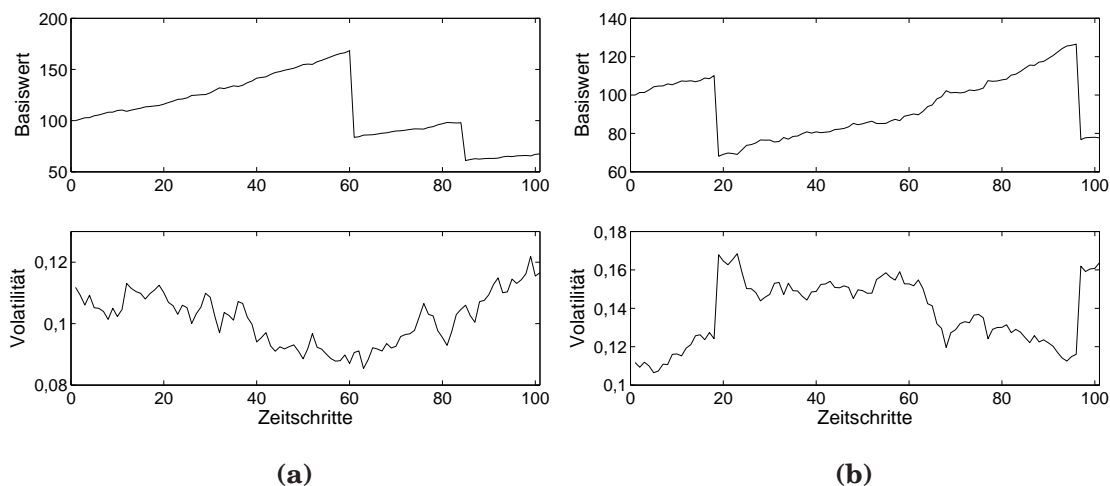


Abbildung 3.2: Verhalten der Volatilität nach einem Sprung im Basiswert: (a) ohne Volatilitäts-Sprung, (b) mit Volatilitäts-Sprung; die Parameter sind wie folgt gewählt: $\beta = 0,1$, $\alpha = 4$, $\theta = 0,112$, $\sqrt{V_0} = 0,112$, $\rho = -0,99$, $\lambda_S = 4$, $\mu_S = -0,5$, $\delta_S = 0,1$, $r = 0,02$ sowie in (b) zusätzlich $\rho_V = 0,1$, $\mu_V = 0,1$.

Duffie et al [52], Pan [104], Eraker et al [59] und Eraker [58]. Alle Autoren unterstreichen die Existenz signifikanter Sprünge in der Volatilität und arbeiten die Bedeutung dieser Modellierung heraus. Eraker et al [59] führen als Beispiel den Crash von 1987 an, als sich die Volatilität von ungefähr 20 Prozent auf über 50 Prozent mehr als verdoppelte. Obwohl solche Extremsituationen sehr seltene Ereignisse auf dem Kapitalmarkt sind, müssen gerade diese von Bewertungsmodellen richtig erfasst werden können.

Die Ergebnisse der Kalibrierung von Duffie et al [52] zeigen, dass sich die In-Sample Per-

formance mit Sprüngen in der Volatilität verbessert und dass der Variation β aus Gleichung (3.1) kleinere Werte für das SVJ-CJ-CIR als für das SVJ-CIR Modell annimmt. Die letzte Eigenschaft ist wünschenswert, da Bakshi et al [8] und Bates [11], [12],[13] festgestellt haben, dass die aus Basiswert–Zeitreihen geschätzte Variation der Volatilität wesentlich geringer ist als die aus den Optionspreisen bestimmte Variation. Da der Parameter β ausschlaggebend für die Stärke des Volatility Smiles ist, wird besonders bei kurzen Laufzeiten eine hohe Variation in den Modellen mit stochastischer Volatilität benötigt, um den stark ausgeprägten Smile für diese Optionen zu rekonstruieren.

Eraker et al [59] untersuchen Renditen von Indizes und erreichen mit Modellen mit Sprüngen in der Volatilität eine sehr gute Anpassung. Die Autoren stellen u.a. fest, dass sich die Anzahl an Sprüngen im Basiswert reduziert, wenn Sprünge in der Volatilität zugelassen sind.

3.4 Modellgruppe nach Schöbel und Zhu

Im Abschnitt 3.2 wurde die Varianz durch einen CIR–Prozess beschrieben. Setzt man $p = 1$ in die allgemeine SDE (3.1) ein, erhält man eine Modellgruppe, bei der die Volatilität mit einem Ornstein–Uhlenbeck Prozess [127] (im Folgenden: OU–Prozess) modelliert wird. Explizit gilt für die SDE im risiko–neutralen Maß mit den bereits eingeführten Bezeichnungen⁸

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda_S \bar{\mu}) S_t dt + V_t S_t dW_t^{(S)} + J_S S_t dN_t^{(S)} \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \beta dW_t^{(V)} \\ dW^{(S)} dW^{(V)} &= \rho dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Für $\lambda_S = 0$ beschreibt (3.4) die Modellgleichungen für das SV-OU Modell von Schöbel und Zhu [116], die ihrerseits das Modell von Stein und Stein [124] erweitern. Stein und Stein [124] entwerfen ein Modell mit stochastischer Volatilität, die einem Mean–Reverting Ornstein–Uhlenbeck Prozess folgt. Allerdings bleibt in diesem Modell die Korrelation zwischen Aktienkurs und Volatilität unberücksichtigt, was empirisch nachteilig ist.⁹ Schöbel und Zhu [116] führen in ihrer Arbeit die Korrelation als freien Parameter ein und leiten die charakteristische Funktion des Prozesses her, deren Kenntnis die Grundvoraussetzung für eine schnelle Bewertung darstellt, vgl. Kapitel 4.

Zhu [134] beschreibt in seiner Arbeit die Bildung von komplexen Optionspreismodellen als ein Setzkastensystem aus einzelnen Modulen. Die Bausteine bilden dabei verschiedene

⁸Theoretisch lässt sich diese Modellgruppe analog zu (3.2) um Sprünge in der Volatilität erweitern. Solche Modelle und insbesondere ihre charakteristischen Funktionen sind in der Literatur noch nicht bekannt und werden daher hier nicht betrachtet.

⁹Vgl. Belledin/Schlag[16] und Abschnitt 2.2.

Jump-Diffusion Prozesse für den Basiswert, unterschiedliche Prozesse für die Volatilität sowie Komponenten für die Modellierung stochastischer Zinsen. Als eine mögliche Kombination ergibt sich die Erweiterung des SV-OU Prozesses um Sprünge im Basiswert analog zu dem SVJ-CIR Modell aus Abschnitt 3.2. Das resultierende SVJ-OU Modell wird jedoch von Zhu [134] weder explizit erwähnt noch empirisch überprüft. Durch die Hinzunahme des SVJ-OU Modells in die Modellgruppe von Schöbel und Zhu soll dieser Teil in der vorliegenden Arbeit ergänzt werden.

Da das SVJ-OU Modell als Komposition von AJD-Modellen ebenfalls in die Klasse der AJD-Modelle gehört, ist die charakteristische Funktion von SVJ-OU einfach anzugeben. Sind die Sprünge in Anzahl und Höhe unabhängig von den Brownschen Bewegungen $W^{(S)}$ und $W^{(V)}$, ergibt sich die charakteristische Funktion ϕ_{AJD} des kombinierten AJD-Modells aus dem Produkt der Funktion ϕ_{affin} des affinen Teils mit der charakteristischen Funktion des Sprungteils ϕ_{sprung} zu

$$\phi_{\text{AJD}}(u) = \phi_{\text{affin}}(u) \cdot \phi_{\text{sprung}}(u).$$

Beim Literaturstudium fällt insgesamt auf, dass nur sehr wenige empirische Untersuchungen über stochastische Volatilitätsmodelle mit OU-Prozess vorliegen. Da der OU-Prozess einige Vorteile gegenüber dem CIR-Prozess besitzt, besteht an dieser Stelle Bedarf an weiteren Studien. Der augenscheinliche Grund dafür, dass der OU-Prozess in der Literatur weniger Beachtung findet als der CIR-Prozess, liegt darin, dass der OU-Prozess eine positive Wahrscheinlichkeit hat, negative Werte anzunehmen.¹⁰

Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$P(V_t < 0) = \phi\left(-\frac{E[V_t]}{\sqrt{\text{Var}[V_t]}}\right), \quad (3.5)$$

wobei für Erwartungswert und Varianz von V_t

$$\begin{aligned} E[V_t] &= e^{-\kappa t} V_0 + (1 - e^{-\kappa t}) \theta, \\ \text{Var}[V_t] &= \frac{\beta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

gilt.¹¹ Anschaulich kann es beim OU-Prozess im Gegensatz zum CIR-Prozess und zur geometrisch Brownschen Bewegung zu negativen Werten kommen, da bei OU der Teil βdW_t nicht von V_t abhängig ist.

Wie sich leicht nachvollziehen lässt, ist diese Wahrscheinlichkeit für eine große Menge an möglichen Parametern relativ klein. Schöbel und Zhu [116] sehen in dieser Eigenschaft keine theoretische Einschränkung für die Verwendung des OU-Prozesses und schlagen ihr Modell als eine Alternative zum Modell von Heston [76] vor.

¹⁰Das gilt nur für die Volatilität V_t . Die Varianz V_t^2 ist offensichtlich nie negativ.

¹¹Vgl. Dixit/Pindyck[50].

Belledin und Schlag [16], die das SV-OU Modell zum ersten Mal empirisch untersuchen, können auch in der Anwendung keine Nachteile feststellen.

Dass das Vorzeichen von V_t nicht notwendigerweise stets positiv sein muss, um Volatilität eines Basiswertes zu beschreiben, zeigt folgende Überlegung.

Da Volatilität nicht direkt am Markt beobachtbar ist, wird sie aus dem Basiswert geschätzt. Für den „Zero-Mean Return“ $dX := \frac{dS}{S} - \mu dt$ mit der SDE $dX_t = V_t dW_t$ ergibt sich die Momentanvolatilität, die „Instantaneous Volatility“ σ_{Inst} , als Grenzwert aus

$$\sigma_{\text{Inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(X(t + \Delta t) - X(t))^2}{\Delta t}}.$$

Nach dem Grenzübergang von $\Delta t \mapsto 0$ kann die infinitesimale Differenz dt betrachtet werden und es gilt

$$\sigma_{\text{Inst}} = \sqrt{\frac{dX_t^2}{dt}}. \quad (3.7)$$

Einsetzen der SDE $dX_t = V_t dW_t$ in Gleichung (3.7) sowie die Berücksichtigung der Tatsache, dass $dW^2 = dt$ gilt, ergibt sich für die Momentanvolatilität

$$\sigma_{\text{Inst}} = \sqrt{V_t^2} = |V_t|. \quad (3.8)$$

Damit ist nach Gleichung (3.8) das Vorzeichen von V_t durch die Betragsbildung für die Momentanvolatilität völlig unerheblich.¹²

Für die ökonomische Interpretation von V_t ist es wichtig, in diesem Fall die Volatilität V_t nicht als Standardabweichung zu verstehen. Diese Verbindung der beiden Größen gilt so nur im BS-Modell. In komplexeren Modellen sollte V_t zunächst als ein Parameter mit Wertebereich im Positiven wie Negativen ausgelegt werden.

Obwohl aus diesen Überlegungen heraus, negative Werte in der Volatilität akzeptiert werden können, bleibt auf empirischer Ebene der Wunsch bestehen, zum einen das Vorkommen negativer Volatilitäten zu untersuchen und zum anderen dieses Verhalten nicht willkürlich zuzulassen, sondern es kontrollieren zu können. Eine Kontrolle ist dabei über die Wahl der Modellparameter möglich. Da die Wahrscheinlichkeit für negative Werte der Volatilität nach Gleichung (3.5) bekannt ist, kann man nur solche Parameter für den Prozess zulassen, für die diese Wahrscheinlichkeit sehr klein ist. Parameterwerte, die zu einer hohen Wahrscheinlichkeit führen, werden bei der Kalibrierung bestraft und somit nicht gewählt. Wie sich eine Restriktion mit einer solchen Straffunktion verhält, wird in Abschnitt 6.2 untersucht.

Der große Vorteil des OU-Prozesses gegenüber dem CIR-Prozess ist seine vergleichsweise Einfachheit. So besitzt der OU-Prozess aus Gleichung (3.4) die explizite Lösung

$$V_t = e^{-\kappa(t-t_0)} V_0 + \left(1 - e^{-\kappa(t-t_0)}\right) \theta + \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u, \quad (3.9)$$

im Gegensatz zum CIR-Prozess, für den keine geschlossene Lösungsformel bekannt ist.

¹²Vgl. Perello/Masoliver[106].

Da der Integrand in Gleichung (3.9) deterministisch ist und somit das Integral normalverteilt, ist der gesamte OU-Prozess normalverteilt bzw. ein „Gauß-Prozess“¹³. Die Verteilung ist mit Gleichung (3.6) für den Anfangswert V_0 gegeben durch

$$V_t \sim \mathcal{N}(E[V_t], \text{Var}[V_t]).$$

Für den CIR-Prozess ist die Verteilung die wesentlich komplexere Nichtzentrale Chi-Quadrat-Verteilung.

Durch die explizite Lösbarkeit ist eine exakte zeitdiskrete Form für die Simulation möglich, was den Diskretisierungsfehler unabhängig von der Länge der betrachteten Zeitintervalle macht, was für den CIR-Prozess ebenfalls nicht gilt. Weitere Ausführungen zur Diskretisierung befinden sich in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3.

Ein weiterer Punkt, der für die Verwendung eines OU-Prozesses in stochastischen Volatilitätsmodellen spricht, ist die Tatsache, dass beim SV-OU Modell sowohl der Prozess für die Volatilität als auch der für die Varianz eine Mean-Reverting Struktur besitzen, während das im SV-CIR Modell nur für die Varianz gilt. Diese Tatsache ergibt sich auch aus dem theoretischen Zusammenhang zwischen CIR- und OU-Prozess. Wie man diesen Zusammenhang ausnutzen kann, um weitere, sparsamere Bewertungsmodelle zu kreieren, ist in Abschnitt 3.5 dargelegt.

3.5 Zusammenhang von CIR- und OU-Prozessen

Die Modelle SV-CIR und SV-OU sind im Allgemeinen unterschiedlich, da die stochastische Volatilität in beiden Modellen durch verschiedene Prozesse beschrieben wird. Dennoch ist es möglich eine Verbindung der beiden Modelle anzugeben, so dass sie sich im Spezialfall gleichen. Im SV-CIR Modell wird, wie im Abschnitt 3.2 beschrieben, die Varianz modelliert. Betrachtet man den Prozess der Volatilität im SV-CIR Modell, so erhält man den OU-Prozess

$$dV_t = -\gamma V_t dt + \beta dW_t \quad (3.10)$$

mit einem Mean-Reverting Parameter, dem langfristigen Mittel θ von Null.¹⁴

Mit der Itô-Formel ist die Varianz $y(t) = V_t^2$ gegeben durch

$$dy(t) = \kappa_h (\theta_h - y(t)) dt + \beta_h \sqrt{y(t)} dW_t, \quad (3.11)$$

mit

$$\gamma = \frac{\kappa_h}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_h}{2} \quad \text{und} \quad \theta_h = \frac{\beta^2}{\kappa_h}. \quad (3.12)$$

Der Unterschied zwischen Gleichung (3.10) und dem OU-Prozess im SV-OU Modell aus Gleichung (3.4) besteht darin, dass in (3.10) der Parameter θ immer gleich Null ist, während θ im

¹³Nach dem Göttinger Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777–1855, benannt.

¹⁴Vgl. Schöbel/Zhu[116].

SV-OU Modell im Allgemeinen von Null verschieden ist. Ein langfristiges Mittel von Null ist für einen Volatilitätsprozess keine realistische Wahl. Da aber die Varianz im SV-CIR Modell durch den CIR-Prozess (3.11) mit $\theta_h = \frac{\beta^2}{\kappa_h} \neq 0$ modelliert wird, spielt der Prozess (3.10) mit dem marktfernen θ für die Modellberechnung im SV-CIR Modell keine Rolle.

Zusammenfassend hat das SV-OU Modell den Vorteil, dass in diesem Modell sowohl die Volatilität selbst als auch die quadrierte Volatilität einem Mean-Reverting Prozess folgen. Beim SV-CIR Modell hingegen entspricht nur die quadrierte Volatilität einem echten Mean-Reverting Prozess. Die Parameter in Gleichung (3.10) werden durch die Gleichungen in (3.12) überbestimmt, so dass eine direkte Überführung der Prozesse für Varianz und Volatilität oft nicht möglich ist.

Setzt man im SV-OU Modell $\theta = 0$, so reduziert sich das SV-OU Modell auf das SV-CIR Modell mit

$$\kappa = \frac{\kappa_h}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_h}{2}, \quad \theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta_h = \frac{\beta^2}{\kappa_h}. \quad (3.13)$$

In Tabelle 3.1 ist der Spezialfall, dass sich SV-OU und SV-CIR gleichen, an einem Beispiel dargestellt. Für die angegebenen Parameter wurde jeweils eine Call-Option mit Laufzeit $T = 1$, Zinsen $r = 0,03$ und $S_0 = 100$ für drei verschiedene Strikes $K = 95$, $K = 100$ und $K = 105$ berechnet. Den Gleichungen (3.13) folgend, stimmen in allen drei Fällen die Preise der Calls überein. Betrachtet man die Erweiterungen der Modelle um Sprünge im Basiswert, so erhält man bei Wahl der Parameter nach (3.13) eine Übereinstimmung der Preise im SVJ-OU und SVJ-CIR Modell, was ebenfalls in Tabelle 3.1 in einem Beispiel zusammengefasst wurde.

Unter Ausnutzen des Zusammenhangs ist es möglich ein Modell mit stochastischer Volatili-

	κ	β	θ	V_0	ρ	λ_S	μ_S	δ_S	Preis für Call mit Strike		
									$K = 95$	$K = 100$	$K = 105$
SV-OU	1	0,1	0	0,01	-0,9	–	–	–	88,97	50,30	19,76
SV-CIR	2	0,2	0,005	0,01	-0,9	–	–	–	88,97	50,30	19,76
SVJ-OU	1	0,1	0	0,01	-0,9	0,7	-0,1	0,05	9,98	6,58	3,81
SVJ-CIR	2	0,2	0,005	0,01	-0,9	0,7	-0,1	0,05	9,98	6,58	3,81

Tabelle 3.1: *Spezialfall in der Parameterwahl, für den sich die Call Preise im SV(J)-OU und SV(J)-CIR Modell gleichen.*

tät einzuführen, das einen freien Parameter weniger hat als SV-CIR oder SV-OU Modell, da θ über die Gleichung (3.13) aus den Parametern β und κ bestimmt wird. Das resultierende Modell ist mit „SV4“ abgekürzt, da es ein vollwertiges Mean-Reverting Modell mit stochastischer Volatilität ist, jedoch mit nur vier Parametern auskommt. Die zugehörige SDE ergibt sich aus der allgemeinen SDE (2.10) mit

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \beta dW_t^{(V)}. \quad (3.14)$$

Das SV4 Modell lässt sich ebenfalls um Poisson-Sprünge im Basiswert zu dem Jump-Diffusion Modell „SVJ7“ erweitern. In diesem Fall ist für den Prozess des Basiswertes die entsprechende Form mit Sprüngen nach Gleichung (2.11) zu wählen, während für die stochastische Volatilität weiterhin Gleichung (3.14) gilt.

Beide Modelle SV4 und SVJ7 sind bisher in der Literatur nicht explizit erwähnt und empirisch untersucht worden, obwohl sie alle wichtigen Eigenschaften der Finanzmarktzeitreihen sogar mit einem Parameter weniger erfassen können als die in der Literatur bekannten Modelle aus Abschnitt 3.2 und 3.4.

Komplexe Modelle mit mehr Parametern lassen sich „In-Sample“ i.d.R. besser an den Markt anpassen als Modelle mit weniger Parametern. Allerdings sind Modelle mit hoher Parameteranzahl schwieriger zu implementieren und zu schätzen, vgl. Abbildung 1.1. Der Vorteil des SV4 und des SVJ7 Modells besteht somit darin, dass sich die Anzahl der Dimensionen in der Kalibrierung¹⁵ um eins reduziert. Die Minimierung wird von einem fünf-parametrischen Raum auf einen vier-parametrischen Raum beschränkt, was neben einem Laufzeitgewinn auch eine größere Sicherheit für das Auffinden des globalen Minimums bedeutet.

Insgesamt sind besonders Modelle mit wenig Parametern und trotzdem guter Anpassung wichtig für eine schnelle und exakte Optionspreisbestimmung. Dass die Modelle SV4 und SVJ7 dafür geeignete Kandidaten sind, zeigen die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen in den Kapiteln 5, 6 und in den Folgekapiteln.

Vom SV-OU Modell ist bekannt, dass mit der positiven Wahrscheinlichkeit (3.5) negative Werte für die Volatilität angenommen werden. Für das SV-CIR Modell gibt es hingegen die Bedingung

$$2\kappa_h\theta_h \geq \beta_h^2 \quad (3.15)$$

an die Parameter, so dass die Volatilität nur strikt positive Werte annehmen kann. Betrachtet man das SV4 Modell, stellt sich die Frage, ob sich die Bedingung (3.15) ebenfalls transformieren lässt und man so die Nicht-Positivität des SV-OU Modells umgehen kann. Einsetzen der Gleichungen (3.13) in die Bedingung (3.15) ergibt

$$\begin{aligned} 2\kappa_h\theta_h - \beta_h^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(2\kappa) \left(\frac{\beta^2}{2\kappa} \right) - 4\beta^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2\beta^2 - 4\beta^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2\beta^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da es in der Anwendung des Modells SV4 nicht möglich ist, Bedingung (3.16) zu erfüllen, kann die Positivität des Prozesses des SV4 genau wie beim SV-OU Modell nicht gewährleistet werden.

¹⁵Vgl. dazu die Ausführungen in Kapitel 5.

3.6 Zusammenfassung der relevanten Modelle

In Tabelle 3.2 sind die Modelle mit Abkürzungen und Eigenschaften zusammengefasst, die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellt wurden und in den folgenden Kapiteln empirisch untersucht werden.

	Anzahl Param.	Charakteristika	Autoren in Literatur	Abschn.
SDE nach Gleichung (3.2):				
SVJ-IJ-CIR	10	$N^{(S)}$ (λ_S) und $N^{(V)}$ (λ_V) unabhängig, $\mu_V, \mu_S, \delta_S, \text{ CIR } (V_0, \kappa, \theta, \beta), \rho.$	DPS[52]	3.2
SVJ-CJ-CIR	10	$N^{(V)} = N^{(S)}$, korrel. Sprünge mit ρ_V , $\lambda_V, \mu_V, \mu_S, \delta_S, \text{ CIR}, \rho.$	DPS[52]	3.2
SVJ-CIR	8	$N^{(V)} = 0, \lambda_V = 0,$ $\lambda_S, \mu_S, \delta_S, \text{ CIR } \rho.$	Bates[11]	3.2
SV-CIR	5	$N^{(V)} = N^{(S)} = 0,$ $\text{ CIR}, \rho.$	Heston[76]	3.2
CVJ	4	konstante Volatilität $V_t \equiv V,$ $\lambda_S, \mu_S, \delta_S.$	Merton[98]	3.2
CV	1	konstante Volatilität: $\sigma.$	BS[22]	2.1
SDE nach Gleichung (3.4):				
SVJ-OU	8	$\lambda_S, \mu_S, \delta_S,$ $\text{ OU } (V_0, \kappa, \theta, \beta), \rho.$	Zhu[134]	3.4
SVJ7	7	$\lambda_S, \mu_S, \delta_S,$ $\text{ OU}^{\text{res}} (V_0, \kappa, \beta), \rho.$		3.5
SV-OU	5	$\text{ OU}, \rho$	Schöbel/Zhu[116]	3.4
SV4	4	$\text{ OU}^{\text{res}}, \rho$		3.5

Tabelle 3.2: Deduktiver Überblick über Charakteristika, Literatur und Abkürzungen aller untersuchten Modelle.

Kapitel 4

Bewertungsmethoden für affine Jump–Diffusion Modelle

Nachdem in Kapitel 2 die Bewertung von Optionen im Allgemeinen vorgestellt worden ist, liegt der Schwerpunkt dieses Kapitels auf den konkret verwendeten Verfahren zur Bewertung von europäischen und pfadabhängigen¹ Call–Optionen der empirischen Studie. Da das Ziel ein Modellvergleich basierend auf Marktdaten sein soll, müssen die Algorithmen zur Bewertung zwei Eigenschaften erfüllen. Zum einen müssen sie für alle zu untersuchenden Modelle universell anwendbar sein, um Vergleichbarkeit zu wahren. Zum anderen darf der Aufwand zur Berechnung eines Optionswertes nicht zu hoch sein, da bedingt durch die große Datenbasis sehr viele Preise bestimmt werden müssen. Diese zwei Eigenschaften hat für europäische Optionen die Bewertung mittels „Fourier Transformation“, was in Abschnitt 4.1 näher beschrieben ist. Für pfadabhängige exotische Optionen eignet sich mit Einschränkungen an die Forderung nach Schnelligkeit die „Monte Carlo Simulation“, die in Abschnitt 4.2 vorgestellt wird. Im weiteren Verlauf des Abschnittes werden die notwendigen Diskretisierungen der eigentlich stetigen Prozesse angegeben und dabei beobachtete Probleme mittels neusten Untersuchungen aus der Literatur umgangen.

4.1 Bewertung von Optionen mit Fourier Analysis

In Abschnitt 3.6 sind zehn Modelle zur Bewertung von Optionen zusammengefasst, von denen nur dem CV Modell nach Black und Scholes [22] ein vollständiger Kapitalmarkt zugrunde liegt. Für die anderen Modelle ist der Kapitalmarkt durch Hinzunahme weiterer Risi-

¹In den Payoff einer europäischen Option geht der Basiswert nur zur Fälligkeit ein. Bei einer pfadabhängigen Option hingegen hat der Kurs des Basiswertes auch zu weiteren Zeitpunkten vor Fälligkeit Einfluss auf den Wert der Option.

koquellen unvollständig, wodurch eine eindeutige Bewertung mittels Duplikationsportfolios nicht möglich ist. Für Volatilitäts- und Sprungrisiko müssen nun die Marktpreise der Risiken mit berücksichtigt werden. Erst wenn angenommen wird, dass weitere Wertpapiere existieren, die perfekt mit dem Volatilitäts- oder Sprungrisiko korreliert sind, kann die Vollständigkeit des Marktes erreicht werden.

Eine Alternative zur Bewertung mittels Duplikationsportfolio bietet bei bekanntem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} , das in diesem Fall existiert, aber nicht eindeutig ist, und analytischer charakteristischer Funktion, die für alle AJD-Modelle vorliegt, die „Fourier Transformation“². Daher nutzen viele Autoren von Modellen in unvollständigen Märkten Fourier Analysis zum Bestimmen analytischer Lösungen in ihren Modellen. Diese Technik verwenden u.a. Heston [76] 1993, Bates [11] 1996 und Scott [120] 1997. Für die praktische Anwendung ihrer Ergebnisse fehlt jedoch die Möglichkeit die Werte der diskreten Fourier Transformation schnell zu berechnen, wie es mit dem Algorithmus „Fast Fourier Transformation“ (im Folgenden: FFT) von Cooley und Tukey [40] möglich wäre.³

Die Kombination von Fourier Analysis und der FFT wurde für europäische Optionen zum ersten Mal von Carr und Madan [33] 1998 eingeführt. Ihre Methode zusammen mit einigen Erweiterungen, z.B. von Lee [91], stellt das schnellste zurzeit bekannte Bewertungsverfahren für eine Vielzahl an Modellen für europäische Optionen dar, da Preise für verschiedene Strikes simultan berechnet werden können.

Bei der Fourier Transformation wird einer allgemeinen Funktion ihre Fouriertransformierte zugeordnet. Ihrem Ursprung in der Physik folgend, werden zeitbezogene Signale über die Funktion $h(t)$ in den Frequenzbereich $H(f)$, wobei H einer Frequenz f eine Amplitude $H(f)$ zuordnet, transformiert. Die stetigen Transformationsgleichungen sowie ihre diskrete Entsprechungen sind

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi ift} dt, & H(f) &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} h(t)e^{2\pi ift/N}, \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi ift} df, & h(t) &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} H(f)e^{-2\pi ift/N}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Da der Preis einer Call-Option eine Funktion bzgl. des Strikes ist, kann nach den obigen Gleichungen die Fourier Transformation des Optionspreises gebildet werden.

Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der charakteristischen Funktion ϕ_T , die mit logarithmierten Basiswert $s_T := \log(S_T)$ zur Fälligkeit T definiert ist als

$$\phi_T(u) = E \left(e^{iust} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ius)} q_T(s) ds, \quad (4.2)$$

wobei q_T die risiko-neutrale Dichte von s_T passend zum risiko-neutralen Maß \mathbb{Q} ist.

²Nach dem französischen Mathematiker Jean B.J. Fourier, 1768–1830, benannt.

³Einen Vorläufer des Algorithmus verwendete bereits um 1805 Carl Friedrich Gauß, um Flugbahnen von Asteroiden zu berechnen.

Nach Abschnitt 2.1 entspricht der faire Preis eines europäischen Calls dem Erwartungswert des diskontierten Payoffs unter dem risiko-neutralen Maß in Abhängigkeit des Strikes K . Somit gilt

$$C_T(K) = E \left(e^{-rT} (e^s - K)^+ \right),$$

bzw. mit logarithmiertem Strike $k := \log(K)$

$$C_T(k) = \int_k^\infty e^{(-rT)} (e^s - e^k) q_T(s) ds. \quad (4.3)$$

Für $k \rightarrow -\infty$ konvergiert $C_T(k)$ nicht gegen Null sondern gegen $S_0 > 0$, wodurch (4.3) nicht quadratisch integrierbar ist.⁴

Durch die Modifikation mit einem exponentiellen Dämpfungsfaktor e^α , $\alpha > 0$ wird

$$c_T(k) := e^{(\alpha \cdot k)} C_T(k)$$

auf ganz \mathbb{R} quadratisch integrierbar, so dass die Fourier Transformation wohldefiniert ist. Die Güte dieser Methode hängt von der Wahl des Faktors α ab, für den jedoch Carr und Madan [33] ein recht großes Intervall herleiten, innerhalb dessen es keine Unterschiede für genügend viele Gitterpunkte gibt. Die Autoren selbst wählen in ihren Anwendungen z.B. $\alpha = 1, 5$ und $\alpha = 1, 1$.

Carr und Madan [33] stellen in ihrer Arbeit noch eine zweite Methode vor, wie die quadratische Integrierbarkeit ohne Wahl eines Dämpfungsparameters erreicht werden kann. In diesem Ansatz wird der innere Wert der Option vom Gesamtwert abgezogen und nur der Zeitwert betrachtet. In der empirischen Literatur⁵ wird jedoch fast ausschließlich die erste Methode mit Dämpfungsfaktor verwendet, was auch in dieser Arbeit übernommen wurde. Die Wahl des Dämpfungsfaktors α wird ebenfalls in der Literatur⁶ diskutiert. Um Probleme zu umgehen, die mit einer nicht optimalen Wahl von α entstehen können, werden die Parameter der FFT in dieser Studie konservativ und in entsprechender Größe gewählt, dass das Ergebnis davon unbeeinflusst bleibt.

Die Fourier Transformation von $c_T(k)$ berechnet sich mit Dämpfungsfaktor α folgender-

⁴Eine Funktion $f(x)$ ist quadratisch integrierbar, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ endlich ist.

⁵Vgl. z.B. Schoutens et al[118].

⁶Vgl. Lee[91] und Lord/Kahl[94].

maßen:

$$\begin{aligned}
 \psi_T(v) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ivk)} c_T(k) dk \\
 &\stackrel{(4.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ivk)} \int_k^{\infty} e^{(\alpha k)} e^{(-rT)} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-rT)} q_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{(s+\alpha k)} - e^{((1+\alpha)k)}) e^{(ivk)} dk ds \\
 &= e^{(-rT)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{((\alpha+1+iv)s)}}{\alpha + iv} - \frac{e^{((\alpha+1+iv)s)}}{\alpha + 1 + iv} \right) q_T(s) ds \\
 &\stackrel{(4.2), (\alpha+1+iv)s=i(v-(\alpha+1)i)s}{=} \frac{e^{(-rT)}}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + iv(2\alpha + 1)} \phi_T(v - (\alpha + 1)i). \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

In Gleichung (4.4) entspricht v der Frequenz f und die logarithmierten Strikes k der Zeit t aus den Gleichungen (4.1) der klassischen Fourier Transformation.

Da die Funktion $\psi_T(v)$ ungerade im imaginären und gerade im reellen Teil ist, ergibt sich für die relevante „Rücktransformation“ des Optionswertes $C_T(k)$ aus $\psi_T(v)$

$$C_T(k) = \frac{e^{(-\alpha k)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-i \cdot v \cdot k)} \psi_T(v) dv \stackrel{C_T \text{ reell}}{=} \frac{e^{(-\alpha k)}}{2\pi} 2 \int_0^{\infty} e^{(-i \cdot v \cdot k)} \psi_T(v) dv. \tag{4.5}$$

Um diese Berechnung mit möglichst wenig Aufwand durchzuführen, wird das Integral in Gleichung (4.5) näherungsweise mit dem FFT-Algorithmus berechnet. Es gilt mit $N = 2^x$ Gitterpunkten und $v_j = \eta(j - 1)$

$$C_T(k) \approx \frac{e^{(-\alpha k)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{(-iv_j k)} \psi_T(v_j) \eta. \tag{4.6}$$

Mit Gleichung (4.6) erhält man N Werte von k , die mit Schrittweite $k_u := -b + \lambda(u - 1)$ für $u = 1, \dots, N$ in einem Intervall von $-b$ bis $+b$ mit $b = \pi/\eta$ liegen, wobei η die Schrittweite in der charakteristischen Funktion ist. Damit ergibt sich für (4.6)

$$\begin{aligned}
 C_T(k_u) &\approx \frac{e^{(-\alpha k_u)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{(-iv_j(-b+\lambda(u-1)))} \psi_T(v_j) \eta \\
 &\stackrel{v_j=\eta(j-1)}{=} \frac{e^{(-\alpha k_u)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{(-i\lambda\eta(j-1)(u-1))} e^{(ibv_j)} \psi_T(v_j) \eta.
 \end{aligned}$$

Gilt für das Produkt der Schrittweiten $\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$, ist der FFT-Algorithmus anwendbar und liefert mit der gewichteten Simpson-Regel⁷ den gesuchten Call-Preis

$$C_T(k_u) = \frac{e^{(-\alpha k_u)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{(-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1))} e^{(ibv_j)} \psi_T(v_j) \eta \frac{1}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \tag{4.7}$$

wobei $\delta_n = 1$ für $n = 0$ und $\delta_n = 0$ sonst.

Für ein bestimmtes Modell aus Abschnitt 3.6 werden Optionspreise für verschiedene Strikes mit dem Verfahren so berechnet, dass zunächst mit der entsprechenden charakteristischen

⁷Nach dem englischen Mathematiker Thomas Simpson, 1710–1761, benannt.

Funktion für das Modell⁸ ψ_T in Gleichung (4.4) bestimmt und in Gleichung (4.7) eingesetzt wird. Da mit FFT die Optionspreise zwar auf dem Strike–Strahl bestimmt werden, aber im Allgemeinen nicht an den Stellen, die zu einer konkreten Bewertung passen, werden die relevanten Werte für die Lösung interpoliert.

Um den FFT–Algorithmus anwenden zu können, muss das Integral aus Gleichung (4.5) mit einer diskreten Summe in Gleichung (4.6) approximiert werden. Dadurch entstehen zwei Arten von Fehlern: zum einen ein Abschneidefehler beim Übergang vom unendlichen Integral auf eine endliche Summe, zum anderen ein Diskretisierungsfehler bei Wahl der Schrittweite. Der Abschneidefehler kann durch die Wahl eines möglichst großen N in Gleichung (4.6) klein gehalten werden. Entsprechend kann der Diskretisierungsfehler über eine kleine Schrittweite gesteuert werden. Bei geeigneter Wahl haben beide Fehler äußerst geringen Einfluss auf das Ergebnis. Als Parameter in der empirischen Studie wurde daher stets $N = 2^{14} = 16.384$ Gitterpunkte, Schrittweiten von $\eta = 0,25$ und $\lambda = 0,001534$, Schranken für den logarithmierte Strike–Strahl von $|b| = \frac{\pi}{\eta} = 12,5664$ sowie $\alpha = 1,25$ gewählt.

Die Wahl dieser Parameter fällt sehr konservativ aus, damit Abschneide– und Diskretisierungsfehler sowie Fehler durch Dämpfung mit α in jedem Modell und in jedem Bewertungskontext keinen relevanten Einfluss auf das Ergebnis haben. Andernfalls müsste eine genauere Untersuchung der Auswirkungen erfolgen, die sich aber bei der konservativen Parameterwahl erübrigt.

4.2 Monte Carlo Simulation

4.2.1 Diskretisierung des Basiswert–Prozesses

Da für alle in Abschnitt 3.6 vorgestellten Modelle die charakteristischen Funktionen (4.2) analytisch vorliegen, ist die FFT–Methode aus Abschnitt 4.1 zur Bewertung europäischer Call–Optionen bei vielen relevanten Strikes in einem Bewertungsschritt die beste Wahl.⁹

Für exotische Optionen gibt es im Allgemeinen diese Bewertungsmöglichkeit nicht, so dass häufig¹⁰ auf die universelle Methode der Monte Carlo Simulation¹¹ zurückgriffen wird. Bei der Monte Carlo Simulation, die von Boyle [25] 1977 auf das Optionsbewertungsproblem übertragen wurde, werden eine sehr große Anzahl an möglichen Pfaden für den zugrunde liegenden Prozess, z.B. für den Kurs des Basiswertes oder für die stochastische Volatilität, in der risiko–neutralen Welt generiert. Die Realisationen der Pfade ergeben gemittelt und diskontiert einen Schätzer für den wahren Wert, dessen Qualität mit der Anzahl der Pfade

⁸Die charakteristischen Funktionen aller relevanten Modelle sind in Abschnitt A.3 im Anhang zusammengefasst.

⁹Vgl. z.B. Lord/Kahl[94].

¹⁰Für weitere Verfahren zur Bewertung exotischer Optionen vgl. Seydel[121], Kapitel 6.

¹¹Nach dem monegassischen Stadtteil Monte Carlo benannt, in dem u.a. die Spielbank steht.

steigt.

Sei konkreter der Erwartungswert $E[f(U)]$ einer Funktion f zwischen 0 und 1 gleich verteilter Zufallsvariablen U zu bestimmen, so wird das Integral $\omega = \int_0^1 f(x)dx$ durch den Monte Carlo Schätzer $\hat{\omega}$ approximiert, der die Funktion an n Teilintervallen zwischen 0 und 1 auswertet und gemittelt über alle Intervalle

$$\hat{\omega}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i)$$

ergibt. Für $n \rightarrow \infty$ gilt nach dem Starken Gesetz Großer Zahlen $\mathcal{P}(\hat{\omega} = \omega) = 1$. Die Konvergenzrate der Monte Carlo Simulation hat dabei eine Größenordnung von $O(n^{-1/2})$.

Um Preise für pfadabhängige Optionen mit Monte Carlo Simulation in den Modellen aus Abschnitt 3.6 zu berechnen, werden die stochastischen Differentialgleichungen diskretisiert. Im CV Modell ist der Prozess des Basiswertes nach Gleichung (2.4) gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$$

mit geometrisch Brownscher Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ .

Da die Inkremente der Brownschen Bewegung nach Definition unabhängig und normalverteilt sind, kann S rekursiv für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ und $S_i = S_{t_i}$ nach Euler–Maruyama¹² wie folgt simuliert werden:

$$S_{i+1} = S_i \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t_i + \sigma \sqrt{\Delta t_i} Z_{i+1} \right), \quad (4.8)$$

oder auch logarithmisiert:

$$\log S_{i+1} = \log S_i + \mu \Delta t_i - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t_i + \sigma \sqrt{\Delta t_i} Z_{i+1},$$

wobei $i = 0, \dots, n-1$ und Z_1, \dots, Z_n unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Da für Gleichung (4.8) Zufallszahlen benötigt werden, kann ein Fehler beim Generieren der Zufallszahlen entstehen.¹³

Die Modelle aus Abschnitt 3.6 haben alle bis auf das CV und CVJ Modell keine konstante Volatilität, sondern eine stochastische Volatilität, die durch eine SDE beschrieben wird. Ersetzt man in Gleichung (4.8) die konstante Volatilität σ durch den entsprechenden Prozess V_i , ändert sich der Prozess in Integralschreibweise zu

$$\log S_{i+1} = \log S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu ds - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^{2p} ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p dW_s \quad (4.9)$$

mit $p = \frac{1}{2}$ für das SV-CIR Modell, $p = 1$ für das SV-OU Modell und für alle Erweiterungen entsprechend. Für das Euler–Maruyama Schema gilt dann:

$$\log S_{i+1} = \log S_i + \mu \Delta t_i - \frac{1}{2} V_i^{2p} \Delta t_i + V_i^p \sqrt{\Delta t_i} Z_{i+1}. \quad (4.10)$$

¹²Nach dem japanischen Mathematiker Gisiro Maruyama des 20. Jahrhunderts und nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783, benannt.

¹³Vgl. Seydel[121], Kapitel 2.

Kahl und Jäckel [87] verbessern die Approximation der einzelnen Terme der Gleichung (4.9). Um den Drift-Term $\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^{2p} ds$ zu simulieren, schlagen die Autoren

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^{2p} ds \approx \frac{1}{2} (V_i^{2p} + V_{i+1}^{2p}) \Delta t_i \quad (4.11)$$

vor. Diese Drift-Interpolation hat für sich alleine keinen numerischen Nutzen, da der Pfad von V_i bereits bekannt ist. Es zeigt sich jedoch, dass die Verwendung der rechten Seite von (4.11) anstatt des einfachen Euler-Schemas einige wichtige Fehlermaße reduziert.¹⁴

Als nächstes soll der Diffusions-Term $\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p dW_s$ interpoliert werden durch

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p dW_s \approx \frac{1}{2} (V_i^p + V_{i+1}^p) \Delta W_i. \quad (4.12)$$

Da im Allgemeinen Aktienkursprozess und Volatilität korreliert sind mit $\rho \neq 0$, zeigen Kahl und Jäckel [87], dass sich die Approximationsgüte des Prozesses bei Verwendung von (4.11) und (4.12), besonders in Verbindung mit einer Cholesky Zerlegung¹⁵ der Korrelation

$$\begin{aligned} dW &= \rho d\widehat{Z} + \sqrt{1 - \rho^2} d\widehat{W}, \\ dZ &= d\widehat{Z}, \end{aligned}$$

mit \widehat{Z} und \widehat{W} unkorreliert, verbessert. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p dW_s &= \rho \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p d\widehat{Z}_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_s^p d\widehat{W}_s \\ &\approx \rho V_i^p \Delta \widehat{Z}_i + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho^2} (V_i^p + V_{i+1}^p) \Delta \widehat{W}_i. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zusammen ergeben Gleichung (4.11) und (4.13) folgendes Schema:

$$\log S_{i+1} = \log S_i + \mu \Delta t_i - \frac{1}{4} (V_i^{2p} + V_{i+1}^{2p}) \Delta t_i + \rho V_i^p \Delta \widehat{Z}_i + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho^2} (V_i^p + V_{i+1}^p) \Delta \widehat{W}_i. \quad (4.14)$$

Des Weiteren zeigen Kahl und Jäckel [87], dass es von Vorteil ist (4.14) um einen Milstein-Term höherer Ordnung¹⁶ zu erweitern:

$$\begin{aligned} \log S_{i+1} &= \log S_i + \mu \Delta t_i - \frac{1}{4} (V_i^{2p} + V_{i+1}^{2p}) \Delta t_i \\ &\quad + \rho V_i^p \Delta \widehat{Z}_i + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho^2} (V_i^p + V_{i+1}^p) \Delta \widehat{W}_i + \frac{1}{2} \rho p V_i^{p-1} b_i (\Delta \widehat{Z}_i^2 - \Delta t_i), \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit $b_i = \beta \sqrt{V_i}$ für SV-CIR Modelle und $b_i = \beta$ für SV-OU Modelle.

Kahl und Jäckel [87] nennen das Schema (4.15) „IJK“ und zeigen in Tests, dass IJK anderen Schemata bezüglich Effizienz und Robustheit vorzuziehen ist. Da Lord et al [95] in ihrer Studie ebenfalls das Ergebnis von Kahl und Jäckel [87] bestätigen, wird in dieser Arbeit der Prozess des Basiswertes stets nach dem Schema (4.15) diskretisiert.

¹⁴Vgl. Kahl/Jäckel[87].

¹⁵Nach dem französischen Mathematiker Andre-Louis Cholesky, 1875–1918, benannt.

¹⁶Vgl. Milstein[100] für SDE.

Obwohl eine Diskretisierung nach „IJK“ besser ist als nach dem Euler-Schema, bleibt die Lösung γ_n des Verfahrens eine Approximation an die Lösung γ der SDE. Somit entsteht ein Fehler $|\gamma_n - \gamma|$, der sich verkleinert, wenn die Stichprobenanzahl n erhöht wird. Allerdings ist bei der langsamen Konvergenzordnung der Monte Carlo Simulation eine Erhöhung von n mit Faktor 100 nötig, um den Fehler um den Faktor 10 zu reduzieren. Da dies zu Laufzeitproblemen führt, kann der Fehler auch verringert werden, indem die Varianz $\text{Var}(\gamma_n)$ möglichst klein gehalten wird. Eine dieser Techniken zur „Varianzreduktion“ ist die Methode der „antithetischen Variable“, bei der zu einer Approximation γ_n mit Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ noch eine zweite Approximation γ_n^- mit $-Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ generiert wird. Die antithetische Variable setzt sich zusammen aus

$$\widehat{\gamma}_n = \frac{1}{2} (\gamma_n + \gamma_n^-), \quad (4.16)$$

wobei gezeigt werden kann, dass die Varianz $\text{Var}(\widehat{\gamma}_n)$ kleiner ist als die Varianz $\text{Var}(\gamma_n)$ ohne die antithetische Variable.¹⁷

Die Auswirkung der antithetischen Variablen auf den Standardfehler der Monte Carlo Simulation wird in Abbildung 4.1 verdeutlicht, da sich der Standardfehler mit antithetischer Variable nahe zu halbieren lässt. Das Verhältnis der Standardfehler bleibt bei steigender Pfadanzahl je Simulation konstant. Das Beispiel bezieht sich auf ein Call-Option mit exaktem Preis von 6,7947 im SV-CIR Modell mit IJK-Schema für den Basiswertprozess und den Parametern $\kappa = 1, 2$, $\beta = 0, 3$, $\theta = v_0 = 0, 04$, $\rho = -0, 5$, Zins $r = 0, 05$, Laufzeit $T = 0, 5$ sowie Strike $K = S_0 = 100$.

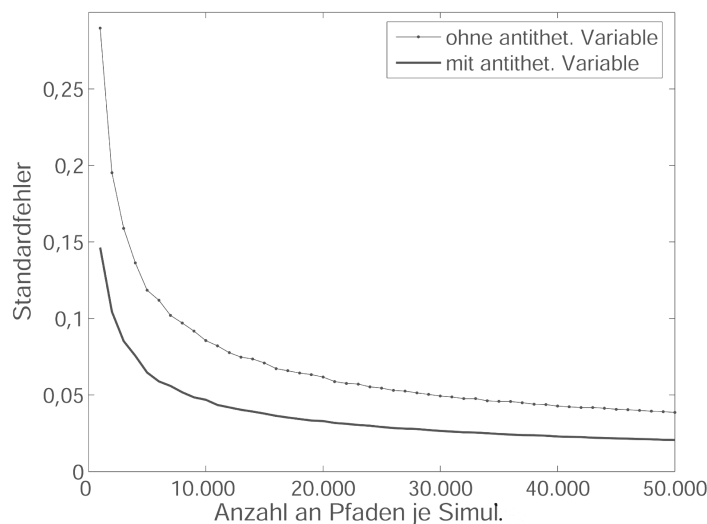


Abbildung 4.1: Standardfehler bei Monte Carlo Simulation mit und ohne antithetischer Variable im SV-CIR Modell mit IJK-Schema.

Dem guten Ergebnis folgend, wird die Technik der antithetischen Variable in das IJK

¹⁷Vgl. z.B. Glasserman[68]; Seydel[121], S. 108f.

Schema integriert und so die guten Eigenschaften des Schemas von Kahl und Jäckel [87] noch gesteigert.

Ist neben dem Basiswert auch die Volatilität durch einen stochastischen Prozess gegeben, muss der Volatilitäts-Prozess ebenfalls diskretisiert werden. In den nächsten Abschnitten werden die diskreten Approximationen der in Kapitel 3 vorgestellten CIR- und OU-Prozesse untersucht.

4.2.2 Exakte Diskretisierung des Mean-Reverting OU-Prozesses

Der Mean Reverting OU-Prozess ist im risiko-neutralen Maß durch die stochastische Differentialgleichung (im Folgenden: SDE)

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \beta dW_t \quad (4.17)$$

gegeben, wobei V_0 , κ , θ und β die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Parameter des Prozesses sind.

Die SDE (4.17) ist explizit lösbar¹⁸ durch

$$V_t = e^{-\kappa t}V_0 + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u, \quad (4.18)$$

wobei $t_0 = 0$. Diese Lösung erhält man, indem zunächst die SDE für $e^{\kappa t}V_t$ bestimmt wird:

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t}V_t) &= e^{\kappa t}V_t\kappa dt + e^{\kappa t}dV_t \\ &= e^{\kappa t}(\kappa V_t dt + \kappa(\theta - V_t)dt + \beta dW_t) \\ &= \kappa e^{\kappa t}\theta dt + \beta e^{\kappa t}dW_t. \end{aligned}$$

Der Übergang zum stochastischen Integral liefert

$$\begin{aligned} e^{\kappa t}V_t &= V_0 + \int_0^t \kappa e^{\kappa u}\theta du + \int_0^t \beta e^{\kappa u}dW_u \\ &= V_0 + (e^{\kappa t} - 1)\theta + \beta \int_0^t e^{\kappa u}dW_u. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Werden beide Seiten der Gleichung (4.19) durch $e^{\kappa t}$ dividiert, erhält man die Lösung (4.18).

Unter dem risiko-neutralen Maß ist V_t normalverteilt mit Erwartungswert

$$E(V_t) = e^{-\kappa t}V_0 + (1 - e^{-\kappa t})\theta,$$

und Varianz

$$\text{Var}(V_t) = \frac{\beta^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}).$$

Man kann zeigen, dass die SDE eine exakte zeitdiskrete Form hat, in dem Sinn, dass die Gleichung auch für große Δt nicht an Genauigkeit verliert¹⁹:

$$V_t = V_{t-1}e^{-\kappa\Delta t} + (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta + \beta\sqrt{\frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}Z, \quad (4.20)$$

¹⁸Vgl. Kloeden/Platen[89] oder Dixit/Pindyck[50].

¹⁹Vgl. Dixit/Pindyck[50].

mit einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z . Um den Diskretisierungsfehler, den alternative Diskretisierungen wie das Euler- oder Milstein-Verfahren für den OU-Prozess mit sich bringen, klein zu halten, muss Δt ausreichend klein gewählt werden, was den Rechenaufwand gegenüber Gleichung (4.20) erhöht. Der einzige Fehler, der in Gleichung (4.20) gemacht wird, resultiert aus der Verwendung von Zufallszahlen.²⁰

Eine weitere Simulationsmöglichkeit ohne Diskretisierungsfehler bietet die Kenntnis der Verteilung von V_t , da man einen zukünftigen Wert des Prozesses direkt aus der Verteilung ziehen kann. Dieses Verfahren bringt Vorteile, wenn nur ein Wert, nämlich der Wert zur Fälligkeit, zur Berechnung des Payoffs erforderlich ist. Bei pfadabhängigen Optionen ist jedoch das mehrmalige Ziehen aus der Verteilung mit einem größeren Aufwand verbunden als die Berechnung der Diskretisierung (4.20).

4.2.3 Diskretisierung des CIR-Prozesses

Für den CIR-Prozess mit der Dynamik unter dem risiko-neutralen Maß

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t \quad (4.21)$$

ist es im Allgemeinen nicht möglich eine geschlossene Lösungsformel, wie für den Prozess (4.17), anzugeben. Da jedoch bekannt ist, dass der CIR-Prozess einer Nichtzentralen $\chi^2_\nu(\lambda)$ -Verteilung mit ν Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter λ folgt, lassen sich Erwartungswert und Varianz geschlossen angeben.²¹ Explizit ist die Verteilung von V_t gegeben V_u für ein $u < t$ durch

$$V_t = \frac{\beta^2 (1 - e^{-\kappa(t-u)})}{4\kappa} \chi_d^2 \left(\frac{4\kappa e^{-\kappa(t-u)}}{\beta^2 (1 - e^{-\kappa(t-u)})} V_u \right) \quad (4.22)$$

mit $d = \frac{4\theta\kappa}{\beta^2}$ bestimmt. Um den Prozess (4.21) zu simulieren, kann man direkt aus der Verteilung (4.22) ziehen oder den Prozess diskretisieren und an Teilintervallen berechnen.²²

Ist nur ein Zeitpunkt T von Interesse, wie bei europäischen Optionen, genügt es Gleichung (4.22) für die Zeitpunkte $u = 0$ und $t = T$ auszuwerten. Dieser Vorteil gegenüber den Diskretisierungsschemata hebt sich auf, wenn der Prozess zu vielen Zeitpunkten bekannt sein muss, wie das bei pfadabhängigen Optionen der Fall ist.²³

Da eine Auswertung der Nichtzentralen χ^2 -Verteilung aufwendiger ist als ein Schritt in einem Diskretisierungsschema, ist auf die Kenntnis guter Approximationsmethoden trotz bekannter Verteilung nicht zu verzichten. Die einfachste Euler-Diskretisierung hat für (4.21) zu Zeitpunkten t_1, \dots, t_n die folgende Form

$$V_{t_{i+1}} = V_{t_i} + \kappa(\theta - V_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \beta\sqrt{V_{t_i}}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \quad (4.23)$$

²⁰Vgl. Seydel[121].

²¹Vgl. Cox et al[41] oder Feller[61].

²²Vgl. Broadie/Kaya[29].

²³Vgl. Lord et al[95].

mit Z_1, \dots, Z_n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen.

Da in Gleichung (4.21) V_t unter der Wurzel steht, ist es entscheidend, dass die Positivität des CIR-Prozesses auch für seine Diskretisierung zu allen Zeitpunkten t_i gewahrt bleibt. Kahl et al [88] zeigen, dass mit der Euler-Methode (4.23) die numerische Positivität $\mathcal{P}(\{X_{i+1} > 0 | X_i > 0\}) = 1$ für SDEs mit positiven Pfaden, d.h. mit $\mathcal{P}(\{X_t > 0 \text{ für alle } t\}) = 1$, nicht in jedem Fall erfüllt werden kann. Für den CIR-Prozess sieht man dies leicht für $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$, $\Delta W_i := W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ und $V_{t_i} = V_i$ mit

$$V_{i+1} = V_i + \kappa(\theta - V_i)\Delta t_i + \beta\sqrt{V_i}\Delta W_i.$$

Betrachtet man den Fall $(V_i + \kappa(\theta - V_i))\beta\sqrt{V_i} > 0$, dann tritt

$$V_{i+1} < 0 \iff \Delta W_i < -\frac{V_i + \kappa(\theta - V_i)\Delta t_i}{\beta\sqrt{V_i}\Delta t_i}$$

mit einer positiven Wahrscheinlichkeit von

$$\mathcal{P}(\{V_{i+1} < 0 | V_i > 0\}) = \mathcal{N}\left(\frac{V_i + \kappa(\theta - V_i)\Delta t_i}{\beta\sqrt{V_i}\Delta t_i}\right)$$

auf, da ΔW_i alle reellen Werte mit einer positiven Wahrscheinlichkeit annimmt.²⁴

Um das Euler-Verfahren trotzdem anwenden zu können, müssen die negativen Werte von V_t aufgefangen werden. Dazu schlagen häufig Praktiker den „Quick Fix“ vor, die negativen Werte entweder zu absorbieren oder zu reflektieren, wobei „absorbieren“ bedeutet, den negativen Wert auf Null zu setzen, und „reflektieren“ den Betrag zu bilden.²⁵

Formal beschreiben also Fix-Funktionen $f_i, i = 1, 2, 3$, in

$$V_{i+1} = f_1(V_i) + \kappa(\theta - f_2(V_i))\Delta t_i + \beta\sqrt{f_3(V_i)}\Delta W_i.$$

den Fix, wobei $f_i(x) = x$, $f_i(x) = |x|$ oder $f_i(x) = x^+ := \max\{x, 0\}$ gewählt werden kann. In Tabelle 4.1 sind die in der Literatur bekannten Fix-Funktionen zusammengefasst.

Die Autoren in Tabelle 4.1 zeigen jeweils die starke Konvergenz der Euler-Schemata mit Fix-Funktion.²⁶

Wenn der wahre Optionspreis eines Modells ω ist und der Monte Carlo Schätzer einen Wert von $\hat{\omega}$ hat, dann bezeichnet $E(\hat{\omega}) - \omega$ die Verzerrung des Schätzers. Durch jeden Fix kommt es offensichtlich zu einer Verzerrung im Schätzer für den Optionspreis, da der Pfad der Varianz beeinflusst wird. Lord et al [95] zeigen die absteigende Reihenfolge, die in Tabelle 4.1 mit 1) bis 5) dargestellt ist, wobei 1) die größte Verzerrung bedeutet und 3) und 4) die gleiche Verzerrung aufweisen.

²⁴Da der CIR-Prozess auch für die Modellierung von Zinsen verwendet wird, treten auch in diesem Fall negative Werte auf. Die Variation β ist jedoch bei Zinsmodellierungen wesentlich kleiner als bei stochastischer Volatilität, so dass die Häufigkeit negativer Werte wesentlich geringer ist.

²⁵Vgl. Lord et al[95].

²⁶Der Beitrag von Higham/Mao[78] ist außerdem, dass sie zum ersten Mal in einem konsequenten Beweis, die Konvergenz des Euler-Schema im SV-CIR Model von Heston[76] zeigen.

Name	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Autoren
1) Reflexion	$ x $	$ x $	$ x $	Berkaoui et al [17] 2005
2) Absorption	x^+	x^+	x^+	<i>unbekannt</i>
3) Reflexion bei Diffusion	x	x	$ x $	Higham/Mao [78] 2005
4) Absorption bei Diffusion	x	x	x^+	Deelstra/Delbaen [46] 1998
5) Absorption bei Diffusion und Drift	x	x^+	x^+	Lord et al [95] 2006

Tabelle 4.1: Fix-Funktionen für das Euler Schema des CIR Prozesses im Literatur-Überblick.

Alternativen, die numerische Positivität ohne zusätzliche Verzerrung zu sichern, stellen neben der Simulation über die Verteilung in Gleichung (4.22) die Verwendung numerischer Schemata höherer Ordnung dar. Ein Methode, die Kahl und Jäckel [87] untersuchen, ist die „Balanced Implicit Method“ (im Folgenden: BIM) mit folgendem Schema:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + \kappa(\theta - V_i) + \beta\sqrt{V_i}\Delta W_i + C(V_i)(V_i - V_{i+1}), \\ C(V_i) &= c_0^{BIM}(V_i) + c_1^{BIM}(V_i)|\Delta W_i|, \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit den Kontrollfunktionen $c_0^{BIM}(x) = \kappa$ und $c_1^{BIM}(x) = \beta\sqrt{x}$. Diese Methode bewahrt nach Schurz [117] die numerische Positivität des Prozesses. Es zeigt sich jedoch, dass das Verfahren (4.24) im besten Fall die gleiche Konvergenzgeschwindigkeit hat wie das explizite Euler-Verfahren. Wählt man Parameter, die auch mit Euler zu einer positiven Lösung führen, ist die Konvergenzgeschwindigkeit von (4.24) sogar langsamer.

Für ein Verfahren mit einer besseren Konvergenz wird das Schema von Milstein²⁷ auf die SDE (4.21) angewandt:

$$V_{i+1} = V_i + \kappa(\theta - V_i)\Delta t_i + \beta\sqrt{V_i}\Delta W_i + \frac{1}{4}\beta^2((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i). \quad (4.25)$$

Kahl et al [88] zeigen, dass das Verfahren (4.25) für geeignete Δt_i und für Parameterkombinationen, die

$$2\kappa\theta \geq \beta^2 \quad (4.26)$$

erfüllen²⁸, numerisch positiv ist.²⁹

Die Konvergenz der „Implicit Milstein Method“ (4.25) (im Folgenden: IMM) ist für geeignete Funktionen doppelt so schnell wie die Konvergenz der BIM.³⁰

²⁷Vgl. Milstein[100] für SDE.

²⁸Vgl. Stabilitätsbedingung (3.3) aus Abschnitt 3.2.

²⁹In ihrem Paper stellen Kahl et al [88] noch ein weiteres Verfahren vor, die „Balanced Milstein Methode“, die aus einer Kombination von BIM und Milstein Schema entsteht. Diese Methode ist jedoch für den CIR Prozess identisch zum IMM und wird daher nicht gesondert betrachtet.

³⁰Im Fall des Prozesses (4.21) kann die Konvergenz jedoch theoretisch nicht garantiert werden, weil der Prozess die Voraussetzungen für ein Verfahren zweiter Ordnung nicht erfüllt. Da der stochastische Prozess dagegen analytisch positiv ist, kann durch eine lokale Taylorentwicklung die Konvergenz des Milstein-Verfahrens (4.25) gesichert werden.

Diese Konvergenzaussagen beziehen sich zunächst nur auf das Grenzverhalten der Diskretisierung. Für die praktische Anwendung ist jedoch ebenfalls die Qualität eines Schemas unter einem gegebenen Rechenaufwand von Interesse. Um diese Qualität zu überprüfen, führen Lord et al [95] für das SV-CIR und das SVJ-CIR Modell numerische Tests durch. Sie zeigen anhand der Verzerrung, dass das von Ihnen vorgeschlagene Verfahren 5) „Absorption bei Diffusion und Drift“ kombiniert mit der Diskretisierung (4.2.1) für den Basiswertprozess die kleinste Verzerrung in beiden Modellen aufweist, dicht gefolgt vom Verfahren von Kahl und Jäckel [87], das IMM (4.25) mit IJK nach (4.15) kombiniert.

Allerdings wählen Lord et al [95] für das SV-CIR Modell solche Parameter, für die Bedingung (4.26) verletzt ist. In dem Fall ist die Positivität von IMM nicht gesichert, wodurch auch in diesem Schema eine zusätzliche Fix-Funktion verwendet werden muss, was die Vorteile des IMM verzerrt. Da das Einhalten der Bedingung (4.26) in dieser Arbeit stets eine Nebenbedingung an den CIR-Prozess darstellt, wird im Folgenden stets das IMM mit IJK kombiniert verwendet. Lord et al [95] integrieren keine weiteren Techniken zur Varianzreduktion der Monte Carlo Simulation. Für die folgenden Berechnungen wird in dieser Arbeit jedoch das Verfahren der antithetischen Variable aus Abschnitt 4.2.1 mit guten Erfolgen eingesetzt und somit das IMM mit IJK um diese Technik erweitert.

Kapitel 5

Kalibrierung der Modelle an Marktdaten

Bei der Kalibrierung wird in einem Optimierungsschritt der Abstand vom Marktpreis zum Modellwert minimiert, bis ein optimaler Parametersatz für einen Handelstag je Modell vorliegt. Die allgemeine Methodik einer solchen Kalibrierung wird in Abschnitt 5.1 beschrieben. Das Herzstück einer Kalibrierung bildet der Algorithmus, der für die Minimierung verwendet wird. Zwei verschiedene Optimierungsansätze werden in Abschnitt 5.2 vorgestellt und ihre Stärken und Schwächen für das Kalibrierungsvorhaben erläutert, was schließlich zu einer Kombination der Ansätze führt. Die Datenbasis, an der die Modelle kalibriert werden, wird in Abschnitt 5.3 vorgestellt. Die optimalen Parametervektoren als Ergebnis der Kalibrierung an diesen Datensatz werden im Abschnitt 5.4 ausgewertet.

5.1 Allgemeiner Kalibrierungsansatz

Unter dem Begriff „Kalibrierung“ versteht man die Minimierung des Abstandes zwischen beobachteten Marktpreisen und modelltheoretischen Werten. Das Ziel dabei ist es, einen Parametervektor $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ zu finden, für den ein Modell mit n Parametern besonders gut auf den Markt eingestellt ist und somit eine Bandbreite realer Daten gut wiedergegeben werden können. Sei $V^{\text{Markt}}(K, T(k))$ eine solche Bandbreite an Marktpreisen für den Strike-Vektor $K = (K_1, \dots, K_k)$ und den zu jedem Strike-Level k gehörenden Laufzeit-Vektor $T(k) = (T_1, \dots, T_{s(k)})$.

Dann ist bei der Kalibrierung das Minimierungsproblem¹

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{s(k)} \left(V^{\text{Markt}}(K_j, T_i(k)) - V^{\text{Modell}}(K_j, T_i(k)) \right)^2 \quad (5.1)$$

zu lösen, wobei $V^{\text{Modell}}(K, T(k))$ für Strike- und Laufzeit-Vektor die modelltheoretischen Werte enthält.

Der Vorteil eines Modellvergleichs über das inverse Problem der Kalibrierung liegt darin, dass kein Modell als „Benchmark“ im Vorfeld festgelegt werden muss, an dem sich dann die weiteren Modelle messen lassen müssen. Jedes Modell hat die gleiche Ausgangsbasis und damit auch die gleiche Chance, die Marktpreise am besten widerzugeben.

Die Minimierung in (5.1) entspricht der „Methode der kleinsten Quadrate“², da die Summe der quadrierten absoluten Fehler von Markt- zu Modellpreis minimiert wird. Neben diesem Ansatz sind weitere Zielfunktionen, z.B. die Summe der quadrierten relativen Fehler, denkbar, die zu einem anderen Kalibrierungsergebnis führen. Eine Untersuchung mit vier verschiedenen Zielfunktionen wird z.B. von Detlefsen und Härdle [49] durchgeführt.

Die Summe der quadrierten absoluten Fehler legt mehr Gewicht bei der Minimierung auf die Optionen mit einem höheren Preis, da Abweichungen bei teureren Optionen die Fehlersumme stärker erhöhen als Abweichungen bei günstigeren Optionen. Dagegen werden bei der Summe der quadrierten relativen Fehler die billigeren Optionen stärker berücksichtigt. Die Wahl der Zielfunktion hängt also von der gewünschten Untersuchung ab. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Zielfunktion der Summe der quadrierten absoluten Fehler (5.1) in der Kalibrierung verwandt, da es der realen Welt entspricht, relativ teureren Objekten auch relativ mehr Beachtung zu schenken.³

In die Zielfunktion (5.1) werden die Optionswerte $V^{\text{Markt}}(K, T)$ direkt eingesetzt. In der Literatur ist auch der Ansatz über implizite Volatilitäten üblich, bei dem der Abstand der impliziten Volatilitäten minimiert wird.⁴

Da in der vorliegenden Datenbasis für diese Arbeit, vgl. Abschnitt 5.3, jedoch die Optionspreise und nicht die impliziten Volatilitäten gegeben sind, ist für die Minimierung über die impliziten Volatilitäten stets ein zusätzlicher Umrechnungsschritt nötig, der bei dem direkten Verfahren (5.1) entfällt.

¹Da in diesem Problem der Parametervektor θ gesucht ist, der die Zielfunktion minimiert, und nicht der minimale Funktionswert an dieser Stelle angegeben werden soll, ist das Minimierungsproblem mit „arg min“ formuliert.

²Um Parameter eines Modells - aus Finanzzeitreihen - zu schätzen, sind in der Ökonometrie weitere Verfahren bekannt. Dazu zählen die „Generalized Method of Moments“ von Hansen[73], die „Efficient Method of Moments“ angewandt z.B. von Chernov et al[37], Maximum Likelihood Methoden z.B. nach AitSahalia/Kimmel[1] oder „Markov Chain Monte Carlo Methods“ angewandt z.B. von Eraker et al[59].

³Diese Zielfunktion wird am häufigsten für empirische Studien in der Literatur verwandt, vgl. z.B. Bakshi et al[8] oder Belledin/Schlag[16].

⁴Vgl. z.B. Weron/Wystup[131].

Am Ende jeder Kalibrierung werden vier bekannte Fehlermaße berechnet, um die Ergebnisse anschaulich und vergleichbar zu machen. Die Fehlermaße sind dabei der „Root Mean Square Error“ (im Folgenden: RMSE), der „Average Absolute Error“ (im Folgenden: AAE), der AAE in Prozent des Durchschnittspreises (im Folgenden: APE) und der „Average Relative Percentage Error“ (im Folgenden: ARPE) mit den entsprechenden Formeln

$$\begin{aligned}
 \text{RMSE} &= \sqrt{\sum_{\text{Optionen}} \frac{(\text{Marktpreis} - \text{Modellpreis})^2}{\text{Anzahl an Optionen}}}, \\
 \text{AAE} &= \sum_{\text{Optionen}} \frac{|\text{Marktpreis} - \text{Modellpreis}|}{\text{Anzahl an Optionen}}, \\
 \text{APE} &= \frac{1}{\text{Durchschnittspreis}} \text{AAE}, \\
 \text{ARPE} &= \frac{1}{\text{Anzahl an Optionen}} \sum_{\text{Optionen}} \frac{|\text{Marktpreis} - \text{Modellpreis}|}{\text{Marktpreis}}. \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

In einem vollständigen Markt wird mit der Kalibrierung das eindeutige risiko–neutrale Maß direkt über die Optionspreise identifiziert. Somit entsteht kein Bedarf den Marktpreis des Risikos zu kennen, da dieser zwar in der Zeitreihe des Basiswertes enthalten ist, aber in den Optionspreisen aufgrund der risiko–neutralen Bewertung eliminiert wurde. Da für einen unvollständigen Markt das risiko–neutrale Maß nicht mehr eindeutig ist, liefert die Kalibrierung viele verschiedene Lösungen. Aus diesen theoretischen Überlegungen folgt, dass der Parametervektor für ein Modell mit unvollständigem Markt nicht eindeutig sein kann. Die Kalibrierung ist somit ein „schlecht gestelltes Problem“.⁵

Darüber hinaus wird das Identifizieren einer Lösung durch numerische Probleme erschwert, da die Minimierung hochgradig nicht–linear ist und sich der Lösungsraum durch Hinzunahme eines weiteren Parameters um eine Dimension erhöht, was z.B. beim SVJ-CJ-CIR oder SVJ-IJ-CIR Modell mit zehn Parametern einen zehn–dimensionalen Lösungsraum bedeutet. Bei sehr vielen Dimensionen sind in der Struktur des Lösungsraums viele nahezu gleichwertige Minima in weiten Tälern zu finden, in denen die Parameter nahezu den gleichen Zielfunktionswert liefern. Da diese Täler oberhalb des tiefsten Tals liegen, darf die Minimierung nicht in einem lokalen Minimum hängen bleiben, sondern sollte, aus den lokalen Minima herauskommend, das globale Minimum finden.

Da die Anforderungen, die das inverse Problem an die Optimierung stellt, so zahlreich sind, ist die Kalibrierung der numerisch anspruchsvollste Teil des Modellvergleichs. Durch die Wahl geeigneter Optimierungsalgorithmen, die im folgenden Abschnitt 5.2 vorgestellt werden, können zwar viele der oben beschriebenen Probleme entschärft werden, aber trotzdem kann nicht mit 100 prozentiger Sicherheit ausgeschlossen werden, dass eine Kalibrie-

⁵Für ein, nach dem französischen Mathematiker Jacques Salomon Hadamard benanntes „gut gestelltes Problem“ existiert eine eindeutige Lösung, die stabil von den Eingangsdaten abhängt. Trifft eine Eigenschaft nicht zu, ist das Problem schlecht gestellt.

rung in einem lokalen Minimum hängen bleibt. Daher ist zum einen eine ständige Kontrolle der Kalibrierungsergebnisse nötig und gegebenenfalls eine Wiederholung der Minimierung zum Vergleich der gelieferten Lösungen. Erst durch Testen kann für das schlecht gestellte Problem der Kalibrierung eine relative Sicherheit über die Korrektheit der Lösung erlangt werden.

Relativiert wird das Problem der weiten Täler bei der Interpretation der Kalibrierungsergebnisse jedoch dadurch, dass es im Markt einen „Bid-Ask Spread“ gibt, der dem Intervall zwischen Kaufs- und Verkaufspreis entspricht. Die Bandbreite an Preisen, die innerhalb dieses Spreads liegen, sind bei der Lösung gleichwertig. Damit sind auch lokale Minima mit so geringer Entfernung zum globalen Minimum zulässig, deren Parameter immer noch zu Preisen innerhalb des Spreads führen.⁶

Den vollständigen empirischen Ergebnissen aus Abschnitt 6.1 vorgreifend, soll ein repräsentatives Beispiel in Abbildung 5.1 verdeutlichen, wie gut die Kalibrierung die Modellparameter auf den Mittelwert des Bid-Ask Spreads der Marktdaten einstellen kann, und in Tabelle 5.1 ein Gefühl für die Höhe der Fehlermaße aus den Gleichungen (5.2) vermitteln.

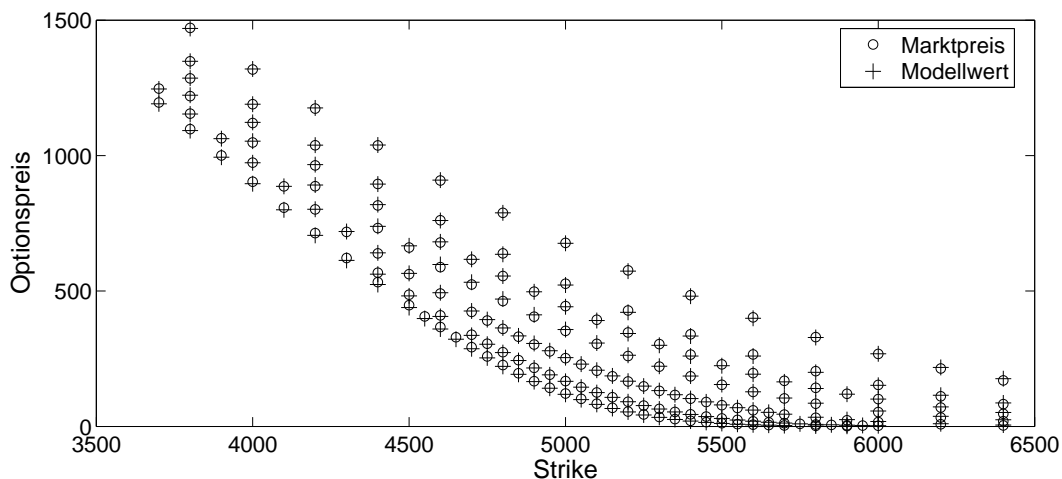


Abbildung 5.1: *Ergebnisse im Preis-Strike Gitter der Kalibrierung an einem beliebigen Beispiel-Tag; „o“ markiert den Marktpreis, „+“ bezeichnet den mit optimalem Parametervektor berechneten Modellwert.*

RMSE	3,48
APE [%]	0,71
AAE	2,61
ARPE [%]	2,82

Tabelle 5.1: *Fehlermaße der Kalibrierung des Beispiel-Tages aus Abbildung 5.1.*

⁶Vgl. z.B. Dumas et al[53], Huang/Wu[79].

In Abbildung 5.1 sind im Preis–Strike Gitter sieben verschiedene Laufzeiten von 0,136 bis 1,664 Jahren dargestellt. Der Kurs des Basiswertes an diesem Tag beträgt 4872,41. Der risikolose Zins liegt bei 3,526 Prozent. Die Anpassung über die 171 Optionen ist in Abbildung 5.1 umso besser je näher das Kreuz „+“ dem Zentrum des Kreises „o“ liegt. Da beide Markierungen in sehr vielen Fällen übereinstimmen, ist die Anpassung als sehr gut zu bezeichnen. Welche Fehlerterme dennoch entstehen, ist in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Optimierungsverfahren, die geeignet sind, Ergebnisse wie in Abbildung 5.1 zu generieren, werden im folgenden Abschnitt 5.2 vorgestellt.

5.2 Optimierungsalgorithmen für die Kalibrierung

5.2.1 Quasi–Newton Verfahren

Der klassische Ansatz zur Bestimmung eines Extremums setzt die Ableitung gleich Null und überprüft anschließend weitere Eigenschaften dieser Nullstelle. Bei einer n –dimensionalen Optimierung eines nicht–linearen Problems ohne Nebenbedingung $\min_x f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit Lösung x^* , $f(x^*) = \min_x f(x)$ ergibt sich die notwendige Bedingung an den Gradienten $\nabla_x f(x^*)$ von x^* :

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_N} = 0 \iff \nabla_x f(x^*) = 0.$$

Die hinreichende Bedingung für einen Minimalpunkt ist eine positiv definite Hesse–Matrix⁷

$$H(x^*) := \nabla_x^2 f(x^*) \geq 0.$$

Da im Allgemeinen die Lösung x^* weder bekannt noch einfach analytisch zu berechnen ist, kann mit dem Newton–Verfahren⁸ die Nullstelle des Gradienten iterativ über eine Approximation nach der Taylor–Reihenentwicklung⁹

$$f(x) \approx f(x_m) + \nabla_m f(x_m)(x - x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^\top \cdot H_m \cdot (x - x_m).$$

mit $H_m := H(x_m)$ bestimmt werden. Die iterative Lösung ergibt sich aus der Vorschrift

$$x_{m+1} = x_m - (H_m)^{-1} \nabla_m f(x_m). \quad (5.3)$$

Wenn die Approximation in der Nähe von x_m gut ist, ist die Hesse–Matrix gut konditioniert und die Konvergenz des Verfahrens quadratisch. Da bei den meisten Anwendungen die Approximation jedoch nicht zufriedenstellend ist, kann die Schrittweite durch ein α_m gesteuert werden, so dass sich mit $\delta_m := (H_m)^{-1} \nabla_m f(x_m)$ im nächsten Iterationsschritt

$$x_{m+1} = x_m - \alpha_m \delta_m$$

⁷Nach dem deutschen Mathematiker Otto Hesse, 1811–1874, benannt.

⁸Nach dem britischen Mathematiker Isaac Newton, 1643–1727, benannt.

⁹Nach dem britischen Mathematiker Broke Taylor, 1685–1731, benannt.

ergibt. Die optimale Schrittweite α_m wird durch eine lokale Optimierung mit „Line Search“-Methoden bestimmt. Dabei wird nach einem optimalen α_m gesucht, das $f(x_m - \alpha_m \delta_m) < f(x_m)$ erfüllt.

In jedem Iterationsschritt von (5.3) muss der n -dimensionale Gradient, die n^2 -dimensionale Hesse-Matrix sowie ein n -dimensionales lineares Gleichungssystem ausgewertet werden, wobei insbesondere die Berechnung der Hesse-Matrix ein sehr rechenintensives Problem darstellt. An dieser Stelle setzen die Quasi-Newton Verfahren an, zu denen das weitverbreitete und zurzeit effizienteste „BFGS“-Verfahren nach Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno¹⁰ zählt. Die Hauptidee besteht darin, aus der bereits bekannten Hesse-Matrix des vergangenen Iterationsschrittes die aktuelle Hesse-Matrix zu approximieren. Sei

$$s_m := x_{m+1} - x_m = \alpha_m \delta_m$$

die Differenz der aktuellen Iterationen und

$$\eta_m := \nabla_{m+1} f(x_{m+1}) - \nabla_m f(x_m)$$

die Differenz der Gradienten, dann gilt

$$H_{m+1} s_m = \eta_m. \quad (5.4)$$

Gleichung (5.4) wird die „Quasi-Newton Bedingung“ genannt, zu der mehrere Lösungen existieren. Im BFGS-Verfahren¹¹ wird folgende Gleichung zur Lösung verwendet:

$$\begin{aligned} H_{m+1} &= H_m + \frac{\eta_m \eta_m^\top}{\eta_m^\top s_m} - \frac{H_m s_m s_m^\top H_m}{s_m^\top H_m s_m} \\ &= H_m + \frac{\eta_m \eta_m^\top}{\eta_m^\top s_m} - \frac{\nabla_m f(x_m) \nabla_m f(x_m)^\top}{\delta_m^\top \nabla_m f(x_m)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Umsetzung der Gleichung (5.5) erfolgt dabei auf der rechentechnisch günstigeren Cholesky-Zerlegung von H .

Mit der Approximation der Hesse-Matrix nach (5.5) stellt der BFGS-Algorithmus für nicht-lineare Optimierungsprobleme ein Verfahren mit einem sehr guten Verhältnis von Aufwand zu Ergebnis dar. Ein Nachteil bei Funktionen mit lokalen Minima ist jedoch, dass, genau wie bei anderen Quasi-Newton Verfahren, ein Startpunkt benötigt wird. Da das Verfahren ein lokales Minimum nicht mehr verlassen kann, hängt das spätere Ergebnis entscheidend von der Wahl der Startwerte ab.

Im Fall einer Kalibrierung über mehrere Tage liegt es nahe, die Parameterwerte des Vortages als Startpunkt des neuen Tages zu wählen. Die Gefahr dabei liegt jedoch darin, dass eine große Strukturveränderung im Markt, durch die die Parameter auf ein anderes Niveau

¹⁰Vgl. z.B. Broyden[31].

¹¹Eine Implementierung des BFGS-Verfahrens in MATLAB mit und ohne Nebenbedingungen ist in den Funktionen *fmincon* und *fminunc* zu finden.

wechsellern, nicht erfasst werden kann, da die Kalibrierung das lokale Minimum des alten Niveaus aufgrund der Startwertvorgaben nicht verlassen kann. Ein Ausweg stellt das Testen mehrerer Startwertkombinationen dar, was den Aufwand jedoch erhöht.

Ein Verfahren, das im Gegensatz zu den Quasi-Newton Verfahren keine feste Vorgabe der Startwerte benötigt, wird im kommenden Abschnitt vorgestellt.

5.2.2 Simulated Annealing

„Simulated Annealing“ ist ein Optimierungsverfahren aus der Physik, um niedrige Energiezustände komplexer Probleme ohne bekannte analytische Lösungen zu bestimmen. Die Idee zu diesem Verfahren stammt von Metropolis et al [99] 1953, die sich einen Algorithmus zum Simulieren des Abkühlungsprozesses eines Materials nach Erhitzen überlegten. Beim kontrollierten Abkühlen ordnen sich die Atome z.B. eines Metallstückes so an, dass sie am Ende einen möglichst geringen Energiezustand einnehmen. Liegt ein solcher niedriger Energiezustand vor, ist das Metallstück besonders stabil und eignet sich gut zur Weiterverarbeitung. Wird das Metallstück jedoch zu schnell abgekühlt, können sich die Atome nicht in stabilen Kristallen anordnen, sondern erreichen nur ein lokales Minimum.

Übertragen auf ein Minimierungsproblem $\min_x f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, kann der Vektor x als Atome in einem Metallstück interpretiert werden, die im m . Schritt einen Energiezustand von $f(x_m)$ haben. Ein neuer Zustand $f(x_{m+1})$ wird immer akzeptiert, wenn $f(x_{m+1}) < f(x_m)$. Diese Bedingung ist Bestandteil jedes Minimierungsverfahren. Das Besondere an Simulated Annealing ist jedoch, dass eine neue Lösung, die nicht besser ist als die vorherige Lösung, nicht sofort abgelehnt wird. Eine zulässige Lösung, durch die sich der Zielfunktionswert verschlechtert, hat eine echt positive Wahrscheinlichkeit

$$P = \exp\left(\frac{f(x_m) - f(x_{m+1})}{T}\right) \quad (5.6)$$

angenommen zu werden. Der Kontroll-Parameter T symbolisiert dabei die Temperatur im Abkühlungsprozess. Für große Werte von T ist die Wahrscheinlichkeit (5.6) so hoch, dass fast jede neue Lösung $f(x_{m+1}) < f(x_m)$ akzeptiert wird. Für $T \mapsto 0$ nimmt die Wahrscheinlichkeit ab. Ist der Zähler $f(x_m) - f(x_{m+1})$ klein, ist P ebenfalls groß, so dass neue Lösungen in der unmittelbaren Umgebung der alten Lösung eher akzeptiert werden als weit entfernte.

Dieses Vorgehen erlaubt es dem Algorithmus¹² in Abhängigkeit von T den kompletten Parameterraum abzusuchen und damit auch ein lokales Minimum wieder zu verlassen. Zu Beginn des Verfahrens müssen keine Startwerte festgelegt werden, da diese zufällig aus den Definitionsbereichen der Parameter gezogen werden. Die Frage, ob die Wahl des Startpunktes das gefundene Minimum beeinflusst, stellt sich somit bei Simulated Annealing nicht.

¹²In der Implementierung wurde der Algorithmus von Goffe[69] verwendet und seine Parametervorschläge übernommen.

Der weitere Vorteil des Simulated Annealing ist, dass die Modelle keine Voraussetzungen für die Anwendbarkeit erfüllen müssen. Daher eignet sich der Algorithmus insbesondere für die hochgradig nicht-linearen Modelle der Optionsbewertung. Da Simulated Annealing nur eine Metaheuristik darstellt, sind mehrere Kontroll-Parameter im Vorfeld festzulegen. Das hat den Vorteil, dass der Algorithmus speziell auf ein Problem eingestellt werden kann, aber auch den Nachteil, dass die richtige Einstellung einer guten Kenntnis der Funktionsweise bedarf. Für unendlich kleine Temperaturänderungen endet der Algorithmus immer im globalen Extremum.¹³

Da es daher viel Zeit erfordert, bis Simulated Annealing terminiert, muss bei realistischer Anwendung stets eine Entscheidung zwischen Laufzeit und Qualität der Lösung getroffen werden.

5.2.3 Kombination der Verfahren für die Kalibrierung

Die Vor- und Nachteile der Verfahren aus den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 ergeben auf den Punkt gebracht, dass ein effizientes Verfahren in ein lokales Minimum geraten kann und das ein globales Verfahren hingegen zeitintensiv ist. Da für die Kalibrierung jedoch ein Minimierungsverfahren benötigt wird, das unabhängig von Startwerten über den gesamten Parameterraum verteilt nach dem globalen Minimum sucht, bildet die Kombination der Verfahren in eine globale und eine lokale Suche eine sinnvolle Alternative. Ist die Umgebung eines globalen Minimums innerhalb des globalen Schrittes gefunden, muss das Verfahren in einem lokalen Schritt schnell in diesem Bereich zu dem kleinsten Wert konvergieren.

Diese beiden Eigenschaften lassen sich durch Kombination von Simulated Annealing und BFGS-Verfahren erreichen. Zu Beginn der Kalibrierung läuft Simulated Annealing bis die Differenz verschiedener Zielfunktionswerte unterhalb einer festgelegten Schranke liegt. Diese Toleranzgrenze ist so zu wählen, dass Simulated Annealing erst abbricht, wenn der Rand des globalen Minimums erreicht ist. Innerhalb dieser Umgebung werden die Parameter, die bisher den kleinsten Zielfunktionswert lieferten, an das BFGS-Verfahren übergeben. Das Quasi-Newton Verfahren konvergiert in diesem lokalen Bereich wesentlich schneller als Simulated Annealing. Durch die Kombination beider Verfahren können ihre jeweiligen Stärken genutzt werden, ohne dass die Schwächen zu stark ins Gewicht fallen.¹⁴

Aufgrund der hoch-dimensionalen Lösungsräume und der anspruchsvollen Zielfunktion ist eine Veranschaulichung der Kalibrierung nur schwer möglich. In Abbildung 5.2 illustriert jedoch ein Beispiel eine Minimierung mit (a) globaler und (b) lokaler Suche für das CVJ Modell mit den freien Parametern Sprungintensität λ_S und Sprunghöhe μ_S . Die Parameter

¹³Vgl. z.B. Van Laarhoven/Aarts[128].

¹⁴Trotz Aufteilen in globale und lokale Suche bleiben alle Vorbehalte gegenüber der Kalibrierung aus Abschnitt 5.1 gültig.

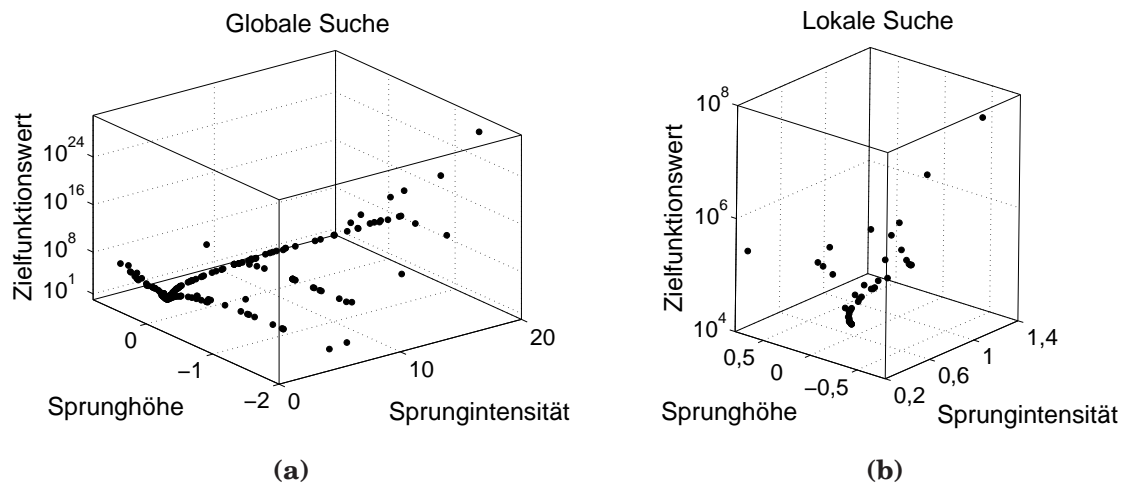


Abbildung 5.2: Kombination von Simulated Annealing (global) und Quasi-Newton (lokal) an einem Beispiel-Tag für das CVJ Modell mit zwei freien Parametern Sprungintensität und Sprunghöhe.

für Volatilität σ und Varianz δ der Sprunghöhen-Verteilung sind auf die beliebigen Werte $\sigma = 0,2$ und $\delta = 0,1$ festgesetzt, um einen anschaulichen zwei-dimensionalen Lösungsraum zu erhalten. In die dritte Dimension wurden die Zielfunktionswerte der entsprechenden Parameterkombinationen eingetragen. In der globalen Suche mit Simulated Annealing wird der ganze zulässige Parameterraum $\lambda_S \in [0,05, 20]$ und $\mu_S \in [-2, 0, 7]$ auf das Minimum geprüft, während in der lokalen Suche mit dem BFGS-Verfahren alle Parameterpaare in wesentlich kleineren Bereichen liegen.

Die Laufzeit der Kalibrierung eines Options-Datensatzes eines Handelstages hängt offensichtlich stark von der Anzahl der Parameter ab. So dauert die Kalibrierung eines Tages für das ein-parametrische CV Modell mit der Kombination von globaler und lokaler Suche ein bis zwei Minuten auf einem Pentium 4 mit 2,60 GHz. Die längste Laufzeit für einen Tag mit ca. 15 bis 20 Minuten hat die Kalibrierung des SVJ-CJ-CIR sowie des SVJ-IJ-CIR mit jeweils zehn Parametern. Bei einem Datensatz von 956 Tagen ergibt das eine Gesamtlaufzeit zwischen 1,5 Tagen und 1,5 Wochen.

An dieser Stelle wird ein weiterer Vorteil von Simulated Annealing für den globalen Teil der Kalibrierung deutlich. Da Simulated Annealing keine festen Vorgaben für die Startwerte benötigt, sondern diese aus den Definitionsbereichen zufällig zieht, ist jeder Tag innerhalb der Kalibrierung unabhängig von den Ergebnissen der Vortage¹⁵. Der Algorithmus eignet sich somit zur parallelen Verarbeitung, die die Gesamtlaufzeit um den Faktor reduziert, um dem die Anzahl der Rechner erhöht wird. Diese Eigenschaft trägt dazu bei, dass die Kalibrie-

¹⁵Müsste ein Startwert gewählt werden, läge die Wahl der Parameter des Vortages nahe, da diese vermutlich schon eine gute Lösung für den aktuellen Tag bilden. Allerdings ist hierbei auch die Gefahr hoch, nur ein lokales Minimum zu finden.

rung auch für umfangreiche Modelle praktikabel bleibt.

5.3 Datenbasis der empirischen Studie

In diesem Abschnitt wird die Datenbasis, die die Grundlage der empirischen Studie bildet, vorgestellt. Der Datensatz¹⁶ umfasst die Tagesschlusskurse des DAX¹⁷ vom 01.01.2002¹⁸ bis zum 30.09.2005 sowie die Tagesschlusskurse der an der EUREX¹⁹ gehandelten Plain–Vanilla Optionen auf den DAX aus dem gleichen Zeitraum. Der Datensatz umfasst somit $3\frac{3}{4}$ Jahre, was 956 Handelstagen entspricht. Als risikoloser Zinssatz wurde der sechs–monatige EURIBOR²⁰ des jeweiligen Tages zugrunde gelegt.²¹

In Abbildung 5.3 sind die Zeitreihen des DAX und des EURIBOR über alle 956 Handelstage dargestellt.

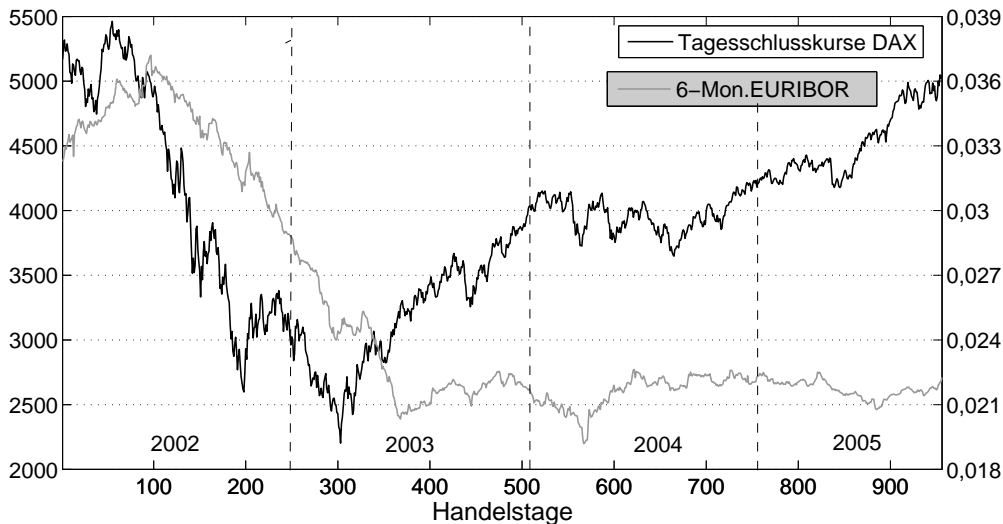


Abbildung 5.3: DAX und sechsmonatiger EURIBOR vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

¹⁶Die Daten wurden über die Karlsruher Kapitalmarktdatenbank, betrieben von der Abteilung Finanzmärkte und Informationen des Instituts für Finanzwirtschaft, Banken und Versicherung der Universität Karlsruhe (TH), bezogen und mit freundlichen Unterstützung des Lehrstuhls für Angewandte Mathematik des Mathematischen Instituts der Universität zu Köln erworben.

¹⁷Der DAX ist der wichtigste deutsche Aktienindex, der die 30 größten deutschen börsennotierten Aktiengesellschaften mit unterschiedlicher Gewichtung enthält.

¹⁸Da der Neujahrstag ein Bankenfeiertag ist, gibt es an diesem Tag keinen expliziten Kurs. Der erste Eintrag liegt somit am 02.01.2002 vor. Um Konsistenz zu wahren, wird im Folgenden stets der 01.01.2002 als Beginn der Datenbasis genannt.

¹⁹Die EUREX gehört zu den weltweit größten Terminbörsen für Finanzderivate.

²⁰Der EURIBOR (European Interbank Offered Rate) ist der Zinssatz in Euro, den Banken untereinander für Termingelder bezahlen müssen.

²¹Die Daten sind frei auf der Internetseite www.euribor.org zu erhalten.

Anfang 2002 schwankt der DAX zunächst auf einem hohen Niveau. Gegen Ende des ersten Quartals 2002 beginnt der Kurs jedoch stark zu fallen, bis er sich im ersten Quartal 2003 im Tiefpunkt mehr als halbiert hat. Im Laufe des Jahres 2003 erholt sich der DAX, bis er gegen Ende des Jahres den Stand des Tiefpunktes fast verdoppelt hat. Das Jahr 2004 ist von einem Seitwärtstrend des DAX geprägt, in dem es im Vergleich zu den Vorjahren nur zu kleinen Schwankungen kommt. Im zweiten Quartal 2005 setzt erneut ein Aufwärtstrend ein, so dass der DAX am Ende der vorliegenden Zeitreihe wieder sein Ausgangsniveau zu Beginn 2002 erreicht hat. Durch diese starken Auf- und Abwärtsbewegungen im DAX ist der Zeitraum von 2002 bis 2005 besonders interessant, da jede Marktphase gut ausgeprägt vertreten ist.²²

Etwas versetzt zu den Kursverlusten des DAX fällt auch der EURIBOR bis Mitte 2003 um etwa ein Drittel. Dieses Niveau hält der EURIBOR in einem Seitwärtstrend über die Jahre 2004 und 2005 bei.²³

Einen Performanceindex wie den DAX als Basiswert zu wählen, hat den Vorteil, dass der Index an sich dividendenlos ist, da die Dividenden der Einzelaktien innerhalb des Index nach einem bestimmten Verfahren verrechnet werden. Darüber hinaus spiegelt ein Index die makroökonomischen Gegebenheiten eines Marktes besser und vollständiger wieder als eine einzelne Aktie. Die Wahl des wichtigsten deutschen Aktienindex als Basis-Index liegt aus einem deutschen universitären Umfeld heraus nahe. Darüber hinaus zählen Optionen auf den DAX „zu den weltweit meistgehandelten Aktienindexoptionen [...]“, für die Daten aus dem elektronischen Handelssystemen der EUREX in hoher Qualität verfügbar sind“²⁴. Da eine zeitlich akzeptable Kalibrierung zurzeit nur für europäische Optionen möglich ist, spricht dies weiterhin für die Verwendung des Index, dass die Indexoptionen, gehandelt an der EUREX, ausschließlich europäischen Typs sind, während Optionen auf eine Einzelaktie an der EUREX immer amerikanisch sind. Als letzte wichtige Eigenschaft werden Indexoptionen in so hohen Volumina gehandelt, dass ihre Marktpreise aus Angebot und Nachfrage hervorgehen.

Da der DAX in Punkten angegeben wird, Optionspreise jedoch in Euro bezahlt werden, gibt es einen festen Umrechnungswert mit fünf Euro je Indexpunkt. Die notierte Schrittweite von DAX-Optionen beträgt 0,1 in Indexpunkten, was umgerechnet 0,5 Euro entspricht.

Wird die Option am Ende ihrer Laufzeit ausgeübt, findet immer ein Barausgleich zwischen den Parteien statt, da eine Lieferung an DAX-Titeln nicht möglich ist. Stillhalter von DAX-Optionen müssen, um den Barausgleich zu gewährleisten, Sicherheitsleistungen hin-

²²Diese Struktur lässt sich ausnutzen, indem man einzelne Marktphasen für getrennte Untersuchungen herausgreift. Vgl. dazu Abschnitt A.2 im Anhang.

²³Auf die Modellierung stochastischer Zinsen wurde in jedem Modell verzichtet, da nach Bakshi et al[8] stochastische Zinsen im Vergleich zum Modellierungsaufwand wenig zur Performance-Verbesserung beitragen.

²⁴Vgl. Wallmeier[130], S.3.

terlegen.²⁵

Da DAX-Optionen erst seit August 1991 gehandelt²⁶ werden, sind empirische Untersuchungen von DAX-Optionen im Vergleich zu internationalen Studien erst in der jüngeren Literatur zu finden. Eine Validierung des BS-Modells auf DAX-Optionen wurde zum ersten Mal von Ripper und Günzel [109] 1997 für die Jahre 1995 und 1996 durchgeführt. Weitere Studien über längere Zeiträume folgten.²⁷

Die empirische Untersuchung in dieser Arbeit wurde auf die Betrachtung von Call-Preisen beschränkt. Da in diesem Kontext die Put-Call Parität (2.2) gilt, sind in den Put-Preisen die gleichen Marktinformationen enthalten wie in ihren entsprechenden Calls. Durch Hinzunahme der Puts in die Kalibrierung erhöht sich somit nur die Anzahl der Datenpunkten, aber nicht deren Informationsgehalt, was relative Fehler zu Unrecht reduziert. Für die Verwendung von Calls spricht zusätzlich, dass amerikanische und europäische Calls den gleichen Wert haben und somit die Untersuchung universeller gesehen werden kann als eine, die Puts mit einschließt.

Um einen widerspruchs- und Arbitrage-freien Datensatz für die Kalibrierung zu verwenden, wird auf der gesamten Datenmenge der Call-Optionen eine Filterung durchgeführt. Infolgedessen wurden alle Optionen mit einem Preis kleiner als eine Einheit aus dem Datensatz entfernt, da bei diesen niedrigpreisigen Optionen häufig das Phänomen auftritt, dass unterschiedliche Strikes zu gleichen Preisen gehandelt werden. Da dies streng genommen eine Arbitragemöglichkeit darstellt, wurden diese Optionen aus dem Datensatz gelöscht.

Ebenfalls weggelassen wurden alle Optionen mit einer Laufzeit von weniger als zehn Handelstagen bzw. zwei Kalenderwochen. Bis März 2003 wurden an der EUREX keine DAX-Optionen mit einer Laufzeit von mehr als zwei Jahren gehandelt. Danach kam es zu einer Verlängerung der maximalen Laufzeit auf bis zu fünf Jahre. Da auf diese besonders langen Laufzeiten wenig Handelsvolumen entfällt und um eine Konsistenz mit den Daten aus 2002 zu gewährleisten, wurde die Laufzeit auf 510 Handelstage mit einer Entsprechung von rund zwei Kalenderjahren begrenzt.

Optionen zu weit im- oder aus-dem-Geld wurden entfernt. Die Grenze bei im-Geld wurde bei 75 Prozent des Basiswertes und bei Optionen aus-dem-Geld bei 135 Prozent des Basiswertes gewählt. Damit sind nur noch Optionen mit einer „Moneyness“ von $K/S_0 \in [0, 75, 1, 35]$ im Datensatz enthalten. Außerhalb dieser Grenzen ist das Handelsvolumen der Optionen zu klein, um sinnvolle Marktinformationen zu enthalten. Die unsymmetrische Wahl des Intervalls orientiert sich dabei an den Gegebenheiten der Datenbasis.

²⁵Regelwerke zum Handel mit Optionen sind auf der Internetseite der EUREX (www.eurexchange.com) einzusehen.

²⁶Der Handel erfolgte zunächst an der Deutschen Terminbörse, die 1998 mit ihrem schweizer Pendant SOFFEX zur EUREX fusionierte.

²⁷Vgl. für einen Überblick Wallmeier[130], S.167ff.

Um Arbitrage-Möglichkeiten auszuschließen, wurden des weiteren alle Call-Optionen gestrichen, die die bekannten Wertschranken aus (2.2) nicht einhalten. Nach der Put-Call Parität muss $P_t = C_t + Ke^{(-rT)} - S_t \geq 0$ mit Strike K , risikoloser Zins r , Laufzeit T und aktueller Kurs des Basiswertes S_t gelten. Ergibt sich für eine Call-Option aus dem Datensatz ein negativer Wert für die zugehörige Put-Option, so wurde die Option aus dem Datensatz entfernt.

Der aus der Filterung resultierende Datensatz besteht aus 158.755 Optionen. Wie sich die Optionen im Einzelnen bezüglich Moneyness-, Preis- und Laufzeit-Verteilung zusammensetzen, ist den Histogrammen in Abbildung 5.4 (a), (b) und (c) zu entnehmen. Abbildung 5.4 (d) zeigt die Verteilung der Anzahl an Optionen pro Handelstag. Im Mittel sind dies 166 Stück.

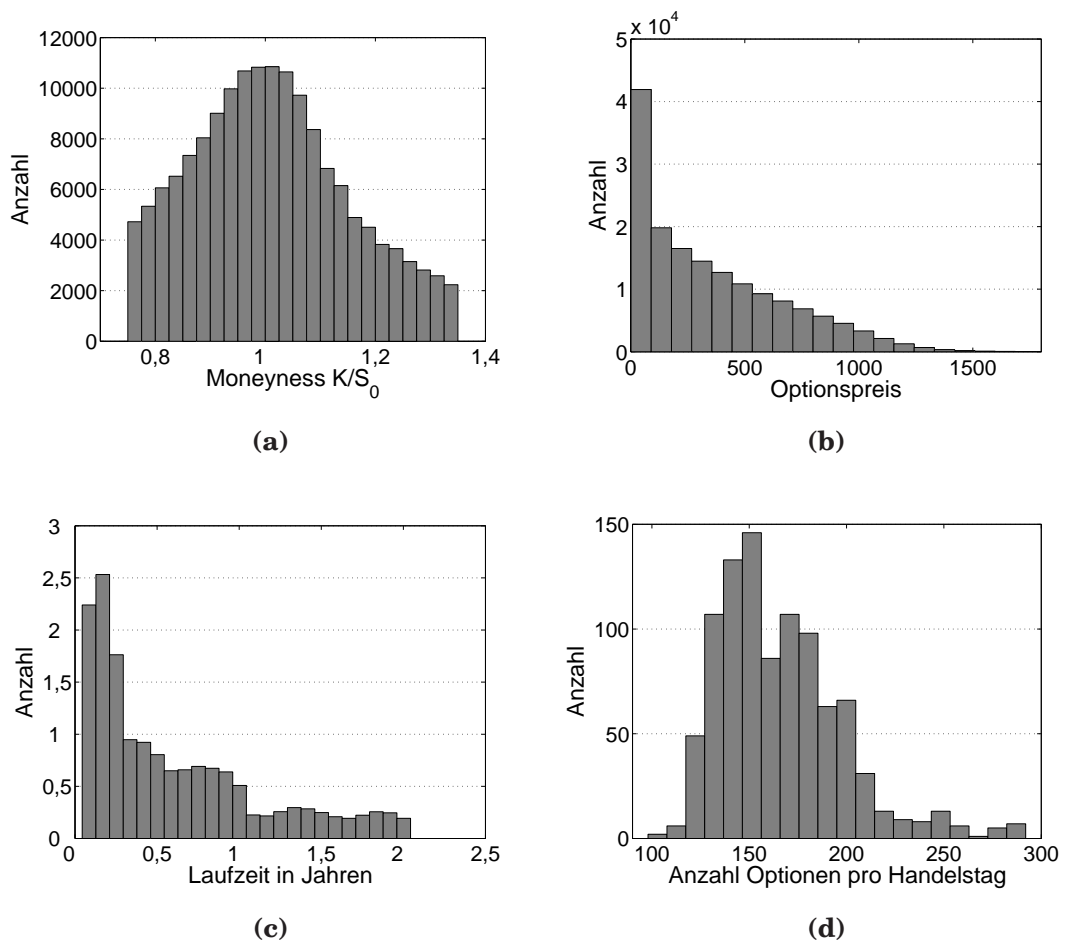


Abbildung 5.4: Histogramme der Call-Optionen auf den DAX vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 im aufbereiteten Datensatz: (a) Moneyness K/S_0 , (b) Optionspreise, (c) Laufzeiten, (d) Anzahl an Optionen pro Handelstag.

5.4 Modellparameter als Ergebnis der Kalibrierung

Die Ergebnisse der Kalibrierung sind unmittelbar der optimale Parametervektor aus der Zielfunktion (5.1) sowie mittelbar die Fehlermaße der Gleichungen (5.2). Der Vergleich der Fehlermaße liefert ein „Ranking“ der Modelle, während der Vergleich der Parameter zunächst keine wertenden Aussagen zulässt. Trotzdem lohnt die nähere Betrachtung der Parameter, da diese Informationen enthalten, auf welche Weise ein Modell die Marktstruktur erfasst und mit welchen Mitteln es den stilisierten Fakten begegnet. Aus diesen Gründen sind die Parameter in diesem Abschnitt aufgeführt und untersucht.

Die Zeitreihe des Parameter σ des CV Modells wurde bereits als implizite Volatilität in Abbildung 2.9 gezeigt. In der Phase der starken Kursverluste des DAX ist die implizite Volatilität besonders hoch, was im Folgenden auch als hochvolatile Phase bezeichnet wird. Nachdem der DAX seinen Tiefpunkt durchschritten hat, sinkt die Volatilität entsprechend. Die Mittelwerte und Standardfehler der Zeitreihen der impliziten Volatilität σ sowie der anderen Parameter innerhalb der Modellgruppe nach Duffie et al [52] sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Der Mittelwert für die konstante Volatilität σ des CVJ Modells in Tabelle 5.2 ist nur halb so hoch wie σ im CV Modell. Die Erklärung für die geringere Volatilität im Mittel ergibt sich aus der Zeitreihe der vier Parameter²⁸ des CVJ Modell, die zusätzlich in Abbildung 5.5 dargestellt sind.

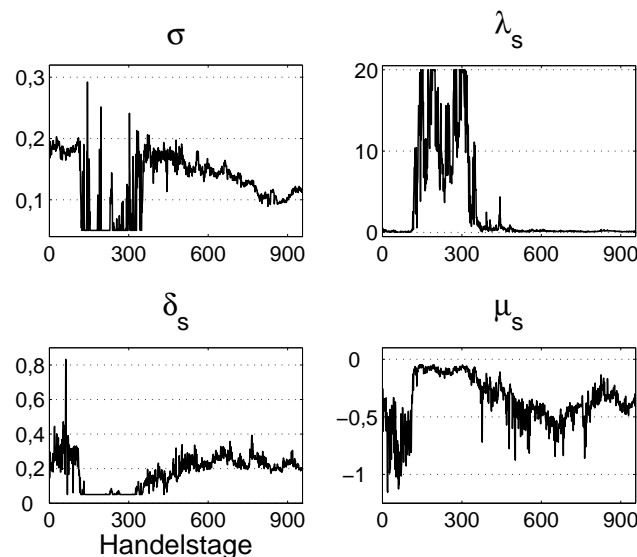


Abbildung 5.5: Zeitreihen der vier Parameter des CVJ Modells vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

²⁸Die zulässigen Intervalle der Parameter sind in Tabelle A.1 im Anhang, Abschnitt A.4, zusammengefasst.

	Parameter für											
	konst. Vola.	stoch. Volatilität					Kurs-Sprung			Vola.-Sprung		
	σ	κ	β	θ	V_0	ρ	λ_S	μ_S	δ_S	μ_V	λ_V	ρ_V
CV	0,2389 [0,0022]	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CVJ	0,1286 [0,0015]	-	-	-	-	-	3,096 [0,1846]	-0,3584 [0,007]	0,1845 [0,0031]	-	-	-
SV-CIR	-	1,6297 [0,0378]	0,4732 [0,006]	0,0934 [0,0042]	0,0821 [0,0026]	-0,8021 [0,0031]	-	-	-	-	-	-
SVJ-CIR	-	1,6807 [0,0488]	0,3471 [0,0062]	0,0925 [0,006]	0,0742 [0,0025]	-0,8371 [0,0047]	0,3185 [0,0155]	-0,1967 [0,01]	0,2527 [0,0068]	-	-	-
SVJ-IJ-CIR	-	1,7596 [0,05]	0,3089 [0,0058]	0,0577 [0,0033]	0,0741 [0,0025]	-0,8515 [0,0044]	0,2703 [0,0141]	-0,2218 [0,0092]	0,3086 [0,0086]	0,1181 [0,004]	0,0861 [0,0036]	-
SVJ-CJ-CIR	-	1,7596 [0,0531]	0,3211 [0,0071]	0,0917 [0,0025]	0,0758 [0,005]	-0,6731 [0,0047]	0,0485 [0,0013]	-0,9392 [0,0149]	0,3273 [0,0103]	0,2048 [0,0056]	-	-0,5353 [0,0127]

Tabelle 5.2: Parameter der Modellgruppe nach Duffie et al [52] als Ergebnis der Kalibrierung: Mittelwert sowie [Standardfehler] der Parameter vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Die Phase der starken Kursverluste des DAX Mitte 2002 bis Mitte 2003 wird im CVJ Modell nicht durch eine steigende Volatilität wie im CV Modell abgebildet, sondern durch eine Zunahme an kleinen Sprüngen nach unten. Die Intensität λ_S nimmt in dieser Zeit die höchsten Werte an, während die Sprunghöhe μ_S schwach negativ mit sehr geringer Varianz δ_S ist, was viele sichere kleine Sprünge im Kurs bedeutet. In der Phase des Aufwärtstrends des DAX nimmt die Anzahl der Sprünge ab, während die Sprunghöhe stärker negativ bei größerer Varianz wird und die Volatilität des CVJ Modells zum Niveau des CV Modells zurückkehrt.

Für die Modelle mit stochastischer Volatilität nach Duffie et al [52] wurde die Bedingung²⁹

$$2\kappa\theta \geq \beta^2$$

als Nebenbedingung in die Minimierung integriert, um bei der Diskretisierung des CIR-Prozesses innerhalb der Monte Carlo Simulation Pfade mit besseren Eigenschaften zu erhalten.

Der Vergleich der Parameter für die stochastische Volatilität der entsprechende vier Modelle in Tabelle 5.2 zeigt, dass die Mean-Reverting Geschwindigkeit κ bei der Hinzunahme von Sprüngen im Mittel leicht von rund 1,63 auf 1,76 steigt, jedoch damit bei allen vier Modellen auf dem gleichen Niveau bleibt. Die Mean-Reverting Geschwindigkeit gibt an, wie stark der Prozess zu einem langfristigen Mittel θ , das bei SV-CIR, SVJ-CIR und SV-CJ-CIR bei rund 0,09 liegt, gezogen wird. Lediglich beim SV-IJ-CIR Modell ist θ mit 0,06 um ein Drittel kleiner. Damit ist der Volatilitäts-Prozess mit Sprüngen unabhängig vom Kurs langfristig am niedrigsten.

Wie stark der Prozess zum langfristigen Mittel hin streut, ist durch die Variation β gegeben, die bei Erweiterung um Sprünge abnimmt, wobei β im SV-IJ-CIR und SV-CJ-CIR Modell annähernd gleich ist. In Tabelle 5.3 wird der Parameter β isoliert und im Mittel, in einzelne

Marktphasen Zeitraum Handelstage	gesamt 1 bis 956	fallender Markt 100 bis 200	steigender Markt 300 bis 400	seitwärts Markt 600 bis 700
SV-CIR	0,47	0,72	0,58	0,43
SVJ-CIR	0,35	0,65	0,44	0,29
SVJ-IJ-CIR	0,31	0,61	0,37	0,26
SVJ-CJ-CIR	0,32	0,58	0,36	0,26

Tabelle 5.3: Veränderungen der Variation β in unterschiedlichen Marktphasen.

Marktphasen unterteilt, betrachtet.³⁰

²⁹Vgl. Stabilitätsbedingung (3.3) aus Abschnitt 3.2 bzw. Bedingung für numerische Positivität 4.26 in Abschnitt 4.2.3.

³⁰Zur Wahl der Zeiträume vgl. Abschnitt A.2 im Anhang, Abschnitt A.2.

Die Ergebnisse stehen im Einklang mit den Beobachtungen von Duffie et al [52] und ist im Hinblick auf den Vergleich mit Schätzungen direkt aus der Zeitreihe des Basiswertes wünschenswert.³¹

Jedoch ist eine deutliche Reduktion nicht ausschließlich mit Sprüngen in der Volatilität zu realisieren. Es genügen bereits modellierte Sprünge im Basiswert wie im SVJ-CIR Modell, um β um rund 25 Prozent im Mittel über den gesamten Beobachtungszeitraum gegenüber dem SV-CIR Modell zu senken. Zusätzliche Sprünge in der Volatilität reduzieren die Variation nochmals um ca. zwölf Prozent. In der Phase fallender Kurse ist β im SVJ-CJ-CIR Modell nur um rund 20 Prozent im Mittel kleiner als im SV-CIR, während die Differenz zurzeit steigender oder trendloser Kurse bis zu durchschnittlich 40 Prozent beträgt. In einem Umfeld fallender Kurse steigt die Volatilität an und entfernt sich vom langfristigen Mittel, was in den Modellen durch eine steigende Variation umgesetzt wird. Modelle mit Sprüngen in der Volatilität, die stets positiv ausfallen und somit den Prozess auf bereits überdurchschnittlich hohem Niveau nur weiter weg vom langfristigen Mittel bringen, benötigen in dieser Phase für die korrekte Modellierung ebenfalls eine hohe Variation.

Im SVJ-CIR Modell ist die Anzahl an Sprüngen im Kurs deutlich niedriger als im CVJ Modell. Im Mittel reichen für SVJ-CIR zehn Prozent der CVJ-Sprünge für die Marktanpassung aus. Ein Großteil der Kursbewegungen, die im CVJ Modell nur mit einem Sprung zu beschreiben sind, lassen sich mit den Komponenten einer stetigen stochastischen Volatilität modellieren. Die Sprunghöhe μ_S des SVJ-CIR ist im Mittel bei höherer Varianz δ_S ebenfalls negativ, jedoch um ca. 45 Prozent weniger stark. Die Hinzunahme von unabhängigen Sprüngen in der Volatilität reduziert die Sprunganzahl nur leicht. Die Modellierung von korrelierten Sprüngen zwischen Volatilität und Kurs kommt hingegen im Mittel mit sehr wenigen, stark negativen Sprüngen im Kurs und gleichzeitig hohen Sprüngen nach oben in der Volatilität aus, um den Markt zu beschreiben. Im SVJ-IJ-CIR Modell kommt es im Durchschnitt rund dreimal häufiger zu einem Sprung im Kurs als zu einem Sprung in der Volatilität.

	Parameter für							
	stoch. Volatilität					Kurs-Sprung		
	κ	β	θ	V_0	ρ	λ_S	μ_S	δ_S
SV-OU	1,1191 [0,0263]	0,3155 [0,005]	0,1477 [0,0034]	0,083 [0,0027]	-0,6842 [0,0034]	–	–	–
SVJ-OU	1,2837 [0,0448]	0,2176 [0,0041]	0,1305 [0,0034]	0,0747 [0,0026]	-0,7687 [0,0055]	0,8567 [0,0393]	-0,2035 [0,0088]	0,2012 [0,0054]

Tabelle 5.4: *Parameter der Modellgruppe nach Schöbel/Zhu [116] als Ergebnis der Kalibrierung: Mittelwert sowie [Standardfehler] der Parameter vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

³¹Vgl. Ausführungen in Abschnitt 3.3.

In Tabelle 5.4 sind die Parameter der Modelle, bei denen nach Schöbel und Zhu [116] mit einem OU-Prozess die Volatilität modelliert wird, gemittelt wiedergegeben. In dieser Modellgruppe gilt ebenfalls, dass die Mean-Reverting Geschwindigkeit κ bei Hinzunahme von Sprüngen im Kurs leicht steigt und die Variation β sinkt. Allerdings sind die Parameter κ und β insgesamt auf einem niedrigeren Niveau als bei der Modellierung mit dem CIR-Prozess. Im SVJ-OU Modell ist ein Sprung im Kurs annähernd dreimal so häufig wie im direkten Vergleichsmodell SVJ-CIR, wobei die Sprunghöhe und deren Streuung auf demselben Niveau liegen. Im SVJ7 Modell in Tabelle 5.5 ist die Anzahl der Sprünge nochmals um gut $\frac{2}{3}$ höher und erreicht damit den höchsten Wert innerhalb aller Modelle mit stochastischer Volatilität.

	Parameter für							
	stoch. Volatilität					Kurs-Sprung		
	κ	β	θ	V_0	ρ	λ_S	μ_S	δ_S
SV4 (OU-Darst.)	0,7245 [0,0214]	0,3254 [0,0046]	–	0,0839 [0,0027]	-0,6465 [0,0027]	–	–	–
SV4 (CIR-Darst.)	1,449 [0,0428]	0,6508 [0,009]	0,1249 [0,0028]	0,0839 [0,0027]	-0,6465 [0,0027]	–	–	–
SVJ7 (OU-Darst.)	0,7902 [0,0345]	0,2425 [0,0041]	–	0,0726 [0,0026]	-0,7082 [0,0065]	1,4408 [0,0628]	-0,2103 [0,0071]	0,185 [0,0044]
SVJ7 (CIR-Darst.)	1,5804 [0,0689]	0,485 [0,0083]	0,094 [0,0025]	0,0726 [0,0026]	-0,7082 [0,0065]	1,4408 [0,0628]	-0,2103 [0,0071]	0,185 [0,0044]

Tabelle 5.5: Parameter der Modelle aus Abschnitt 3.5 in OU- und CIR-Darstellung als Ergebnis der Kalibrierung: Mittelwert sowie [Standardfehler] der Parameter vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Des weiteren sind in Tabelle 5.5 die Mittelwerte der Parameter des SV4 und des SVJ7 Modells aus Abschnitt 3.5 zusammengefasst. Dabei liegen die Ergebnisse der Kalibrierung in der OU-Darstellung vor. Die Umrechnung in ein Mean-Reverting Modell mit langfristigem Mittel $\theta > 0$ mit der CIR-Darstellung erfolgt nach den Gleichungen (3.12). Die Werte für κ sowie für θ liegen in der CIR-Darstellung genau zwischen den Werten der OU- und der CIR-Prozesse, während die Variation β in dieser Darstellung die höchsten Werte annimmt. Der nicht freie Parameter θ in der OU-Form hat somit zur Folge, dass eine größere Streuung für die Marktnachbildung nötig ist, um die fehlende Einstellgröße θ zu ersetzen.

Die Korrelation ρ zwischen Kurs und Volatilität ist in allen Modellen im Mittel und über die Zeitreihen hinweg stark negativ, so dass stets ein negativer Zusammenhang besteht, der im Einklang mit dem in der Literatur beschriebenen Leverage-Effekt³² steht.

Eine weitere Beobachtung über die Modellgruppen hinweg ist für den Parameter V_0 in

³²Vgl. Ausführungen in Abschnitt 2.2.

Abbildung 5.6 aufgezeigt. Die Zeitreihen für V_0 aller acht Modelle mit stochastischer Volatilität sind, in ein Diagramm gezeichnet, kaum voneinander abzugrenzen. Dieses Ergebnis ist erstaunlich, da sich die Modelle zum einen durch verschiedene Sprungkomponenten und zum anderen durch die Prozesse unterscheiden. Der Parameter V_0 bleibt jedoch invariant unter diesen Modifikationen.³³

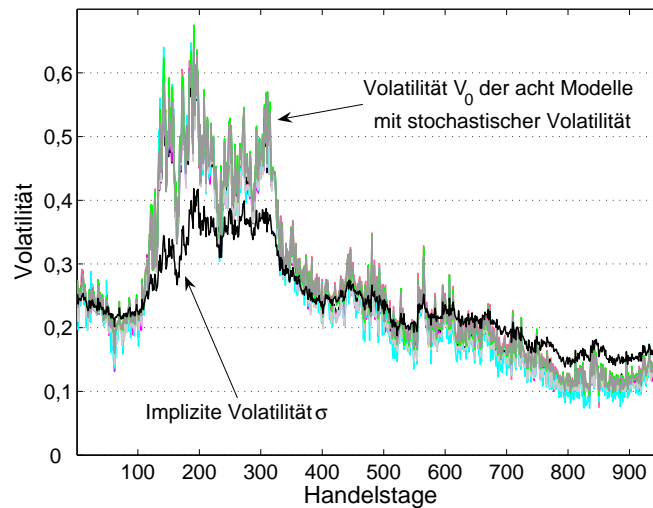


Abbildung 5.6: *Zeitreihen des Parameters V_0 aller acht Modelle mit stochastischer Volatilität sowie implizite Volatilität des CV Modells.*

Der Vorteil eines invarianten Parameters liegt darin, dass dieser zunächst in einem Modell kalibriert und dann bei weiteren Modellen eingesetzt werden kann. Da der Parameter nicht in jedem Modell kalibriert werden muss, kann so eine Dimension in der Minimierung eingespart werden, was bei den Eigenschaften der Kalibrierung, beschrieben in Abschnitt 5.1, die numerischen Probleme reduziert. Ganz besonders wünschenswert ist ein invarianter Parameter, der sich in einem Modell mit besonders wenig Aufwand bestimmen lässt, wie die implizite Volatilität σ des CV Modells. Abbildung 5.6 zeigt jedoch, dass σ und V_0 aus der stochastischen Volatilität, besonders in der Phase der starken Kursverluste des DAX, nicht deckungsgleich sind. Welche Auswirkungen eine solche Vorgehensweise auf die Fehlermaße (5.2) hat, wird in Abschnitt 6.3 des folgenden Kapitels über die „Pricing Performance“ der Modelle näher betrachtet.

³³Vgl. dazu auch Alexander/Nogueira[3].

Kapitel 6

In- und Out-of-Sample Pricing Performance

Ziel dieses Kapitels ist zu untersuchen, wie gut die Modelle aus Abschnitt 3.6 mit den Parametern aus Abschnitt 5.4 an die realen Marktdaten aus Abschnitt 5.3 durch die Kalibrierung angepasst sind und wie hoch die Fehler ausfallen, die bei der Nachbildung des Marktes entstehen. Abschnitt 6.1 enthält dabei die Untersuchungen der In-Sample Pricing Performance, bei der sowohl die Modelle innerhalb einer Gruppe miteinander als auch über die Modellgruppen hinweg verglichen werden. In Abschnitt 6.2 wird eine Kontrollmöglichkeit vorgestellt, um in der Kalibrierung von Modellen mit OU-Prozess Parameter mit einer niedrigeren Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität gegenüber Kombinationen mit höherer Wahrscheinlichkeit vorzuziehen. Die Erkenntnis aus Abschnitt 5.4, dass der Parameter V_0 Modell-invariant ist, wird in Abschnitt 6.3 zur Konstruktion eines stochastischen Volatilitäts-Modells mit drei Parametern genutzt und dessen Anpassung vorgestellt. Eine eventuelle Überparametrisierung der Modelle lässt sich mit der Out-of-Sample Pricing Performance in Abschnitt 6.4 feststellen, bei der mit Parametern von gestern die Optionen von heute bewertet und mit den realen, tatsächlich erzielten Werten verglichen werden.

6.1 In-Sample Anpassungsgüte

6.1.1 Ergebnisse aller Modelle im Überblick

Die Ergebnisse der Kalibrierung sind, neben den Modellparametern aus Abschnitt 5.4, die Zeitreihen der täglichen Fehlermaße (5.2). In Abbildung 6.1 sind die Zeitreihen des RMSE für alle zehn untersuchten Modelle dargestellt. Die Zeitreihe des CV Modells liegt stets wesentlich über denen der Modelle mit stochastischer Volatilität. Da die höchsten Werte für den RMSE während der hochvolatilen Phase des Marktes entstehen, ist die Güte der Anpassung

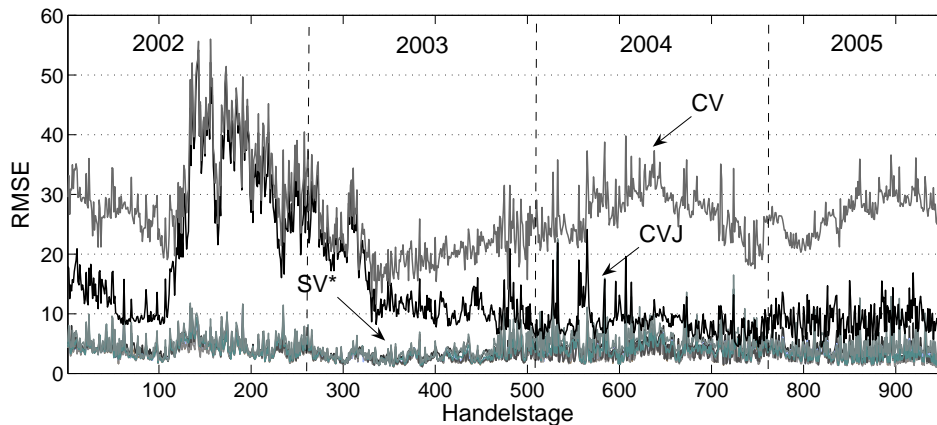


Abbildung 6.1: Zeitreihe des Fehlermaßes RMSE für alle Modelle über die gesamten Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005. SV* steht für die Menge der Modelle mit stochastischer Volatilität.

für das CV Modell abhängig von der vorherrschenden Marktphase. Bei steigenden Kursen im Basiswert ist die Anpassung am besten.

Die Beobachtung, dass die Anpassung je nach Marktlage unterschiedlich gut ist, trifft besonders für das CVJ Modell zu. Zu Beginn des Jahres 2002 ist der RMSE beim CVJ Modell um die Hälfte kleiner als bei CV. Zeigt der Trend des DAX jedoch im zweiten Quartal 2002 verstärkt nach unten, erreicht das Fehlermaß des CVJ das Niveau des CV Modells. Während dieser Phase ist es dem CVJ Modell, trotz der Eignung zur Modellierung negativer Sprünge, nicht möglich, den Markt gut nachzubilden, da die Volatilität in diesem Modell als konstant angenommen wird. Sobald die Kurse des DAX ab Mitte des ersten Quartals 2003 wieder steigen, verbessert sich die Anpassung bis sie sich in der langen Seitwärts-Phase 2004 und Beginn 2005 den Resultaten der Modelle mit stochastischer Volatilität annähert.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass erst die Hinzunahme stochastischer Volatilität eine nahezu Marktphasen-unabhängige Anpassung ermöglicht. Sprünge im Kurs alleine reichen nicht aus. Die RMSE Zeitreihen aller acht Modelle mit stochastischer Volatilität liegen in Abbildung 6.1 soweit übereinander, dass die einzelnen Modelle nicht mehr zu identifizieren sind. Daher dient die direkte Gegenüberstellung der Zeitreihen in Abbildung 6.1 vor allem zur Verdeutlichung wie schlecht Modelle mit konstanter Volatilität im In-Sample Pricing abschneiden.

Die Durchschnittswerte und Standardfehler über alle Handelstage der vier Fehlermaße RMSE, APE, AAE und ARPE sind in Tabelle 6.1 gegenüber gestellt. Im Einklang mit den Ausführungen zu Abbildung 6.1 liefert das CV Modell für jedes Fehlermaße mit Abstand die höchsten Werte. Da das CV Modell mit einem freien Parameter über die kleinste Anzahl Parameter aller Modelle verfügt, ist leicht nachvollziehbar, dass die komplexen Marktzu-

	Anzahl Parameter	Fehlermaße			
		RMSE	APE[%]	AAE	ARPE[%]
CV	1	27,17 [0,213]	6,39 [0,06]	21,75 [0,182]	33,41 [0,584]
CVJ	4	14,28 [0,311]	3,53 [0,091]	11,54 [0,268]	12,4 [0,248]
SV-CIR	5	4,97 [0,072]	1,14 [0,015]	3,95 [0,057]	7,31 [0,104]
SVJ-CIR	8	3,59 [0,054]	0,82 [0,012]	2,77 [0,039]	5,67 [0,1]
SVJ-IJ-CIR	10	3,46 [0,051]	0,77 [0,011]	2,62 [0,037]	5,13 [0,092]
SVJ-CJ-CIR	10	3,4 [0,049]	0,79 [0,011]	2,67 [0,035]	4,54 [0,063]
SV-OU	5	3,93 [0,059]	0,87 [0,012]	2,99 [0,042]	4,56 [0,064]
SVJ-OU	8	3,21 [0,047]	0,72 [0,01]	2,45 [0,033]	4,86 [0,091]
SV4	4	4,38 [0,058]	0,98 [0,012]	3,36 [0,042]	5,09 [0,069]
SVJ7	7	3,5 [0,048]	0,79 [0,01]	2,68 [0,035]	5,46 [0,094]

Tabelle 6.1: *Mittelwerte und [Standardfehler] der Fehlermaße aller Modelle für die In-Sample Performance über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

sammenhänge, die sich in einem Optionspreisdatsatz widerspiegeln, nicht gut mit einem Parameter erfasst werden können. Da das CVJ Modell jedoch vier Parameter umfasst, ist die Anpassungsgüte verglichen mit dem SV4 Modell, das ebenfalls vier Parameter besitzt, unverhältnismäßig schlecht. Folglich werden im CVJ Modell falsche Markteigenschaften modelliert, während die wesentlichen Aspekte unberücksichtigt bleiben.

Welche Auswirkungen die Marktphasen auf die Fehlermaße haben, ist in Tabelle 6.2 exemplarisch über drei verschiedene Zeiträume für RMSE und ARPE dargestellt. Der Zeitraum der Handelstage 100 bis 200 deckt die Phase mit den stärksten Kursrückgängen ab, während die Periode von 300 bis 400 vor allem steigende Kurse enthält. Im Vergleich zu den Phasen mit eindeutigen Trends ist der Zeitraum von Handelstag 600 bis 700 von einer Seitwärtsbewegung geprägt.¹

Die RMSE-Werte in Tabelle 6.2 sind für das CV und CVJ Modell anhand der Abbildung 6.1 leicht nachzuvollziehen: Die Fehler liegen beim fallenden Markt dicht zusammen und gehen über den steigenden Markt bis zur Seitwärtsbewegung auseinander.

Da der RMSE nicht um den Optionspreis bereinigt ist, fällt dieses Fehlermaß in Zeiträumen hoher Preise auch höher aus. Beim spaltenweisen Vergleich der RMSE-Werte in Tabelle 6.2 muss daher beachtet werden, dass die Optionspreise aufgrund des gesunkenen Basiswertes in der steigenden Phase niedriger sind als in der fallenden und trendlosen Phase. Mit diesem Hintergrund fallen die Fehler des CVJ Modells im Mittel im Gegensatz zu den restlichen Modellen beim Seitwärtstrend wesentlich niedriger aus als beim Kursanstieg. Ausschließlich in dieser Marktphase ist das CVJ Modell konkurrenzfähig zu den Modellen mit

¹Zur Wahl der Zeiträume vgl. Abschnitt A.2 im Anhang.

Marktphasen	RMSE			ARPE[%]		
	fallend	steigend	seitwärts	fallend	steigend	seitwärts
Zeitraum Handelstage	100 – 200	300 – 400	600 – 700	100 – 200	300 – 400	600 – 700
CV	36,6	19,9	29,9	21,4	14,5	57,5
CVJ	32,1	14,4	9,0	25,2	15,6	7,6
SV-CIR	5,7	3,1	6,3	6,6	4,0	11,1
SVJ-CIR	5,3	2,5	4,1	5,0	3,1	8,9
SVJ-IJ-CIR	4,9	2,5	3,9	5,0	2,9	8,0
SVJ-CJ-CIR	5,1	2,4	3,9	4,5	2,9	5,9
SV-OU	4,9	2,8	4,6	4,5	3,1	6,0
SVJ-OU	4,1	2,4	3,4	4,2	2,7	7,2
SV4	5,0	3,1	5,2	4,8	3,3	6,4
SVJ7	4,5	2,6	3,9	5,0	3,1	7,9

Tabelle 6.2: Mittelwerte von RMSE und ARPE aller Modelle für die In-Sample Performance in drei Marktphasen geteilt.

stochastischer Volatilität.

Für einen spaltenübergreifenden Vergleich eignet sich das relative ARPE-Maß im rechten Teil der Tabelle 6.2 besser, was allerdings die gute Performance des CVJ Modells in der Seitwärtsbewegung nochmals unterstreicht. Ausnahmslos sind die Fehler im fallenden höher als im steigenden Markt. Entgegen der Intuition sind jedoch die Fehler im trendlosen Markt, bis auf CVJ, am höchsten. Da die Motivation für komplexe Modelle häufig aus Crash-Szenarien stammt, stellt die Seitwärtsbewegung eine Herausforderung an die Modelle dar, die vom SVJ-CJ-CIR Modell am besten gemeistert wird.

Bei einigen Modellen wie beim SVJ7 und SVJ-OU sind die ARPE-Fehler in der Erweiterung höher als bei den dazugehörigen Spezialfällen SV4 bzw. SV-OU, was sich durch die Wahl der Zielfunktion (5.1) erklärt, durch die zwar der RMSE, aber nicht automatisch auch der ARPE minimiert wird.

Eine detaillierte Untersuchung der Modelle mit stochastischer Volatilität und insbesondere der beiden Modellgruppen über die Mittelwerte in Tabelle 6.1 und 6.2 hinaus ist in den folgenden Abschnitten vorgenommen.

6.1.2 Vergleich innerhalb der Modellgruppen

Innerhalb der Modellgruppe nach Duffie et al [52] ist Tabelle 6.1 zu entnehmen, dass alle Fehlermaße bei steigender Anzahl der Parameter sinken. Die Reduktion bei Verdopplung der Parameter von fünf auf zehn fällt jedoch mit etwa einem Drittel in jedem Fehlermaß eher mäßig aus. Der größte Anteil der Verbesserung entfällt mit ca. 28 Prozent auf die Hinzunahme

der drei Sprungparameter vom SV-CIR zum SVJ-CIR Modell. Die Sprünge in der Volatilität, die zwei zusätzliche Parameter benötigen, reduzieren die Fehlermaße des SVJ-CIR nur noch jeweils um rund sechs Prozent. Damit ist der Rückgang insgesamt geringer als die intuitive Bedeutung von Sprüngen in der Volatilität aus Abschnitt 3.3 vermuten ließ. Die Fehlermaße der beiden Modelle mit Sprüngen in der Volatilität unterscheiden sich kaum: Während korrelierte Sprünge in RMSE und ARPE für kleinere Werte sorgen, so fallen APE und AAE bei unabhängigen Sprüngen geringer aus.

Die Ergebnisse der Modellgruppe nach Schöbel und Zhu [116] liefern ein ähnliches Bild. Die Fehler RMSE, APE und AAE reduzieren sich um rund 18 Prozent, wenn das SV-OU Modell um Sprünge zum SVJ-OU erweitert wird, wobei der ARPE allerdings nahezu unverändert bleibt. Im restringierten Modell SV4 sinkt der RMSE ebenfalls durch die Sprünge im SVJ7 um ca. 28 Prozent und der APE sowie der AAE um rund 20 Prozent, während der ARPE nur um einige Prozentpunkte gesenkt wird.

Da ein Parameter für ein vollwertiges Modell mit stochastischer Volatilität nach Abschnitt 3.5 im SV4 bzw. SVJ7 Modell von den anderen abhängig ist, gehen Variationsmöglichkeiten gegenüber den Modellen mit unabhängigen Parametern verloren und die Anpassungsgüte in den Tabellen 6.1 und 6.2 liegt erwartungsgemäß stets unterhalb der vom SV-OU bzw. SVJ-OU Modell.

In Abbildung 6.2 sind die Verbesserungen der RMSE-Fehler der erweiterten Modelle SVJ-CIR, SVJ-IJ-CIR, SVJ-CJ-CIR und SVJ-OU gegenüber den spezielleren Modellen durch Boxplots dargestellt. In einem Boxplot liegen 50 Prozent der Daten innerhalb der Box, die durch das untere und obere Quartil begrenzt ist. Die gepunktete Linie innerhalb der Box kennzeichnet den Median. Die Länge der Box gibt den Interquartilsabstand an, der die Lage des „Whiskers“ am Ende der gestrichelten Linie festlegt. Der Whisker ist hier maximal nach dem 1,5-fachen Interquartilsabstand angebracht. Alle weiteren Datenpunkte, die ober- oder unterhalb der Whisker liegen, sind mit Kreisen markiert. Boxplots eignen sich besonders gut für die Darstellung der Fehler-Zeitreihen, da sie kompakt und anschaulich die Struktur der Zeitreihe wiedergeben, ohne die weniger übersichtliche Zeitreihe selbst darzustellen. Ihre Aussagekraft geht dabei jedoch weit über die der bloßen Mittelwerte mit Standardfehler hinaus.

Abbildung 6.2 enthält auf der linken Seite den Boxplot der RMSE-Verbesserungen des SVJ-CIR Modells gegenüber dem SV-CIR. Da SVJ-CIR mit drei weiteren Parametern eine echte Erweiterung zum SV-CIR darstellt, ist die Verbesserung, den Überlegungen zu Beginn des Abschnitts entsprechend, stets positiv. Durch Hinzunahme von Sprüngen im Kurs verbessert sich die Anpassung an knapp der Hälfte der Tage im Beobachtungszeitraum um bis zu 20 Prozent. An einem Viertel der Tage liegt die Verbesserung zwischen 20 und 40 Prozent. Bei dem verbleibenden Viertel der Tage kann die Anpassung durch Sprünge sogar über 40

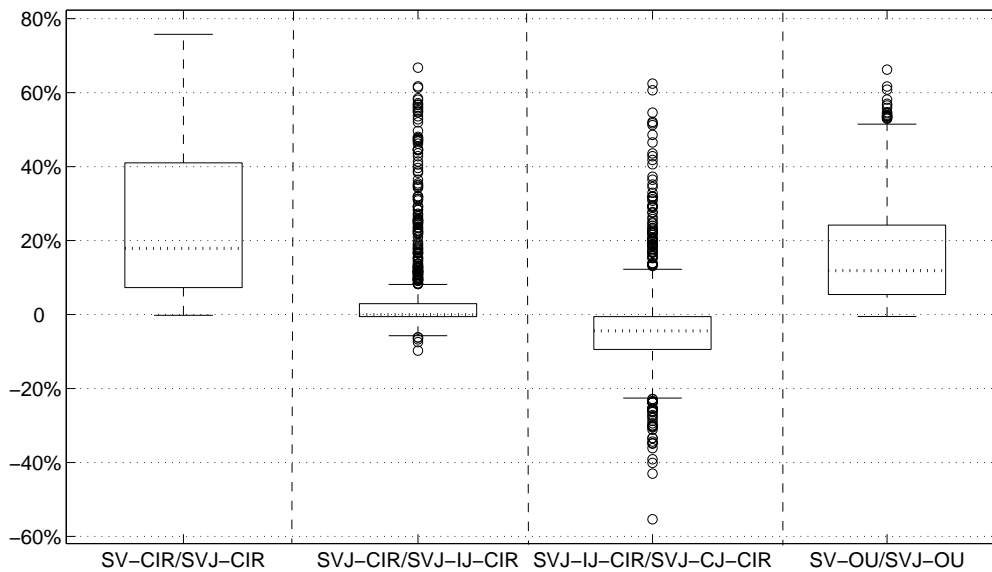


Abbildung 6.2: Boxplots der jeweiligen Verbesserungen der RMSE-Fehler der Modelle SVJ-CIR, SVJ-IJ-CIR, SVJ-CJ-CIR und SVJ-OU über die gesamten Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

bis knapp 80 Prozent verbessert werden.

Eine so deutliche Verbesserung liegt für die Hinzunahme von Sprüngen in der Volatilität nicht vor, was durch den zweiten Boxplot von links in Abbildung 6.2 illustriert wird. An der Hälfte der Tage tritt durch die Erweiterung der Modellierung keine nennenswerte Verbesserung der Anpassung ein, während an 25 Prozent der Tage der Fehler nur um einige Prozentpunkte gesenkt werden kann. Da ein echt positiver Sprung im SVJ-IJ-CIR durch die Festlegung der unteren Schranken der Parameter² gefordert ist, wird an einigen Tagen die Anpassung sogar verschlechtert. Da jedoch eine Reihe von Tagen jenseits des oberen Whiskers liegen, erlaubt die Modellierung von Sprüngen in der Volatilität in einigen Fällen eine deutliche Verbesserung des Ergebnisses um bis zu 70 Prozent.

Da die Modelle SVJ-IJ-CIR und SVJ-CJ-CIR keine Erweiterungen von einander darstellen, zeigt der entsprechende dritte Boxplot von links von Abbildung 6.2 keine eindeutigen Verbesserungen durch das jeweils andere Modell. An einigen Tagen ist die Anpassung des SVJ-CJ-CIR um bis zu 60 Prozent besser als die des SVJ-IJ-CIR Modells, wobei jedoch die Mehrzahl der Beobachtungen um wenige Prozentpunkte im SVJ-CJ-CIR Modell schlechter als im SVJ-IJ-CIR ist. Da bereits die Mittelwerte der RMSE-Fehler in den Tabellen 6.1 und 6.2 kaum verschieden waren, kann in diesem Fehlermaß kein Modell dem anderen bevorzugt werden.

²Vgl. Tabelle A.1 im Anhang.

Der vierte Boxplot auf der rechten Seite in Abbildung 6.2 zeigt die Verbesserungen des SVJ-OU Modells gegenüber dem SV-OU auf. An der Hälfte der Tage im Beobachtungszeitraum wird der RMSE um rund 10 Prozent gesenkt. Für ein weiteres Viertel der Tage wird eine Verbesserung zwischen 10 und 25 Prozent erzielt, während für das letzte Viertel sogar Reduktionen bis zu 70 Prozent im RMSE beobachtet werden.

Insgesamt fällt die Verbesserung durch die Erweiterung um Kurs-Sprünge bei den Modellen mit OU-Prozess etwas schlechter aus als bei den Modellen mit CIR-Prozess. Welche Ergebnisse ein weiterer Vergleich zwischen den Modellgruppen ergibt, ist im folgenden Abschnitt 6.1.3 zusammengefasst.

6.1.3 Vergleich zwischen den Modellgruppen

Nach der Analyse, wie weit die In-Sample Pricing Performance durch eine echte Erweiterung zu verbessern ist, wird in diesem Abschnitt die Frage untersucht, welche der beiden Modellgruppen mit CIR- oder mit OU-Prozess eine bessere Anpassung an die Marktdaten erzielen. In Tabelle 6.1 werden dazu zunächst die Modelle miteinander verglichen, die durch die gleiche Anzahl an Parametern als direkte Konkurrenten angesehen werden können. So liefert in diesem Sinne der Vergleich von SV-CIR mit SV-OU und entsprechend SVJ-CIR mit SVJ-OU, dass die mittleren Fehler aller vier Fehlermaße in den Modellen mit OU-Prozess geringer ausfallen. Diese Aussage gilt ebenfalls für die Ausschnitte der Marktphasen in Tabelle 6.2. Im steigenden Markt ist die Anpassung beider Modellgruppen ähnlich gut, während besonders in der Zeit der Seitwärtsbewegung des Marktes die Modelle mit OU-Prozess dominieren.

Wie sich die prozentualen Verbesserungen der jeweiligen Modelle auf die Beobachtungen verteilen, ist in Abbildung 6.3 durch Boxplots dargestellt. Im linken Boxplot sind die Verbesserungen des SV-OU gegenüber dem SV-CIR Modell angegeben, die an über 90 Prozent der Handelstage positiv sind. Die Hälfte der Beobachtungen weist einen geringeren Fehler von 15 bis 25 Prozent auf, bei einem Viertel sogar mehr als 25 Prozent. Nur an wenigen Tagen ist die Anpassung des SV-CIR besser als die des SV-OU Modells.

Für das SVJ-OU Modell unterscheiden sich die Ergebnisse vom SVJ-CIR Modell stärker, so dass der Boxplot im rechten Teil der Abbildung 6.3 wesentlich mehr streut als der linke Boxplot der Spezialfälle. Trotzdem sind an 75 Prozent der beobachteten Tage die Anpassungen des SVJ-OU besser als die des SVJ-CIR Modells, wo von der größte Teil bis zu 20 Prozent ausmacht, während an einem Viertel der Tage die Performance des SVJ-CIR besser ist.

Da die Bedingung $2\kappa\theta \geq \beta^2$ nach Abschnitt 3.5 für das SV4 und für das SVJ7 Modell keine Restriktion darstellt, kommt es mehrfach vor, dass die Anpassungsgüte in den Tabellen 6.1 und 6.2 im SV4 Modell besser ist als die des SV-CIR bzw. im SVJ7 besser als die des SVJ-CIR Modells, dessen Parameter die Bedingung für die garantierte numerische Positivi-

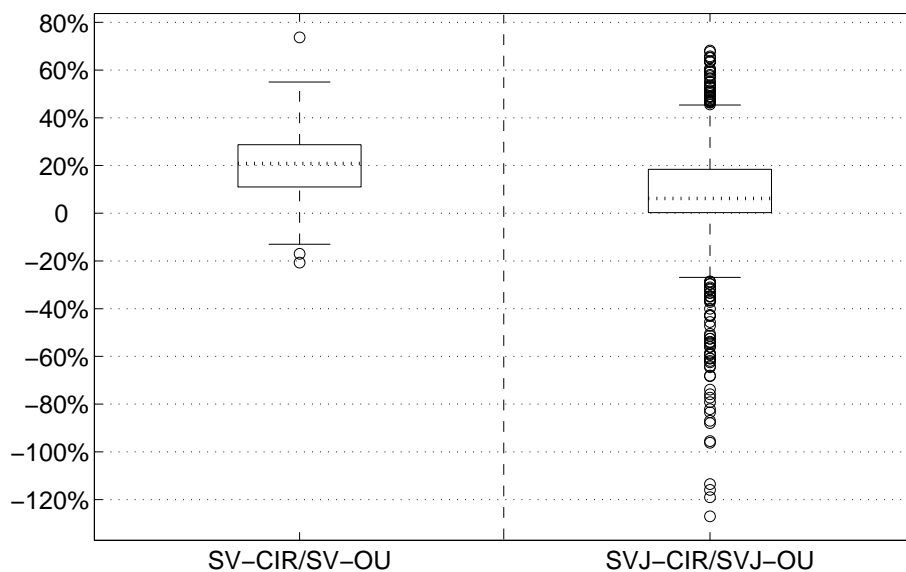


Abbildung 6.3: Boxplots der jeweiligen Verbesserungen der RMSE-Fehler im Vergleich der Modelle SV-CIR gegen SV-OU, und SVJ-CIR gegen SVJ-OU über die gesamten Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

tät nach Abschnitt 4.2.3 erfüllen müssen. Um wie viel die Fehlermaße durch die Restriktion $2\kappa\theta \geq \beta^2$ steigen, ist Tabelle 6.3 zu entnehmen, in der die Fehlermaße für das SV-CIR Modell ohne die Bedingung zusammengefasst sind. Da die Nebenbedingung in gut 94 Prozent der Beobachtungen bindend ist, erreicht SV-CIR ohne die Bedingung eine bessere Anpassung. Folgerichtig sind in diesem Fall die Fehler des SV4 höher als die Fehler des SV-CIR, da SV4 hier eine echte Einschränkung gegenüber SV-CIR darstellt. Um mit den optimalen Parame-

	Anzahl Parameter	Fehlermaße			
		RMSE	APE[%]	AAE	ARPE[%]
SV-CIR _{ohne}	5	4,03	0,9	3,06	4,65

Tabelle 6.3: Mittelwerte der Fehlermaße des SV-CIR ohne Positivitäts-Bedingung für die In-Sample Performance über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

tern jedoch brauchbare Simulationen für die exotischen Optionen im weiteren Verlauf dieser Untersuchung zu bekommen, eignen sich für SV-CIR nach Abschnitt 4.2.3 trotz schlechterer Anpassung nur die Parameter, die $2\kappa\theta \geq \beta^2$ erfüllen. Somit werden im Folgenden stets die Ergebnisse für SV-CIR mit Nebenbedingung behandelt.

Zusammenfassend können im Vergleich der direkten Konkurrenten die Modelle mit OU-Prozess die besseren Anpassungen aufweisen. Die gemittelten Fehler des SVJ-OU Modell liegen nach Tabelle 6.1 sogar unterhalb der Mittelwerte der SVJ-IJ-CIR und SVJ-CJ-CIR

Modelle, die jeweils sogar über zwei zusätzliche Parameter verfügen. Insgesamt ist damit das beste Modell in der In-Sample Pricing Performance das SVJ-OU Modell.

Obwohl die gute Anpassung der Modelle mit OU-Prozess für ihre Verwendung spricht, hat diese Modellgruppe in der Literatur bisher wenig Beachtung erfahren. Wie in Abschnitt 3.4 angedeutet, hängt dieses Phänomen mit der Möglichkeit negativer Werte für die Volatilität zusammen. Obwohl diese Eigenschaft nach Abschnitt 3.4 keine echte Einschränkung darstellt, stellt sich die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit (3.5) negativer Werte der Volatilität für reale Marktdaten ist und ob diese Wahrscheinlichkeit begrenzt werden kann. Im folgenden Abschnitt wird als Antwort die Kontrolle der Wahrscheinlichkeit auf die In-Sample Pricing Performance untersucht.

6.2 Bestrafung hoher Wahrscheinlichkeiten für negative Volatilität in der Modellgruppe nach Schöbel und Zhu

Die Ergebnisse der In-Sample Pricing Performance im vorangegangenen Abschnitt 6.1 zeigen, dass die Modellierung der Volatilität durch einen OU-Prozess in ca. 90 Prozent der Fälle zu einer besseren Anpassung im RMSE führt als mit einem CIR-Prozess, wenn keine Sprünge im Basiswert erlaubt sind. Sind Sprünge möglich, liegt dieser Anteil bei rund 75 Prozent.

Da diese Prozentsätze für die Verwendung des OU-Prozesses sprechen, soll in diesem Abschnitt gesondert auf die Problematik der möglichen Negativität der Volatilität eingegangen werden. Sowohl Schöbel und Zhu [116] als auch Belledin und Schlag [16], die in der Literatur den OU-Prozess in der Volatilitätsmodellierung untersucht haben, betonen, dass sie keine Einschränkungen durch mögliche negative Werte feststellen konnten. Dennoch ist die Erklärung, warum diese stochastischen Volatilitätsmodelle seltener in ihrer Anwendung betrachtet werden, in dieser Eigenschaft des OU-Prozesses zu finden.

Wie viele negative Werte auf lange Sicht vorkommen, ist durch die Wahrscheinlichkeit des OU-Prozesses nach Formel (3.5) gegeben. Zum Vergleich ist die Wahrscheinlichkeit für das gleiche Ereignis bei der Verwendung des CIR-Prozesses 0. Welche Größenordnung die Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität für zwei exemplarische Zeitspannen in den Modellen SV-OU und SVJ-OU annimmt, ist in den Zeitreihen der Abbildung 6.4 dargestellt. Die höchsten Werte erreichen knapp ein Drittel dabei.

Um die Wahrscheinlichkeit für den OU-Fall auf ein niedrigeres, zum CIR-Prozess vergleichbares Niveau zu bringen und damit zu kontrollieren, werden Parameterkombinationen im SV-OU und SVJ-OU Modell mit einer kleinen Negativitäts-Wahrscheinlichkeit den Vorrang vor Parameterkonstellationen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit gegeben. Verfolgt

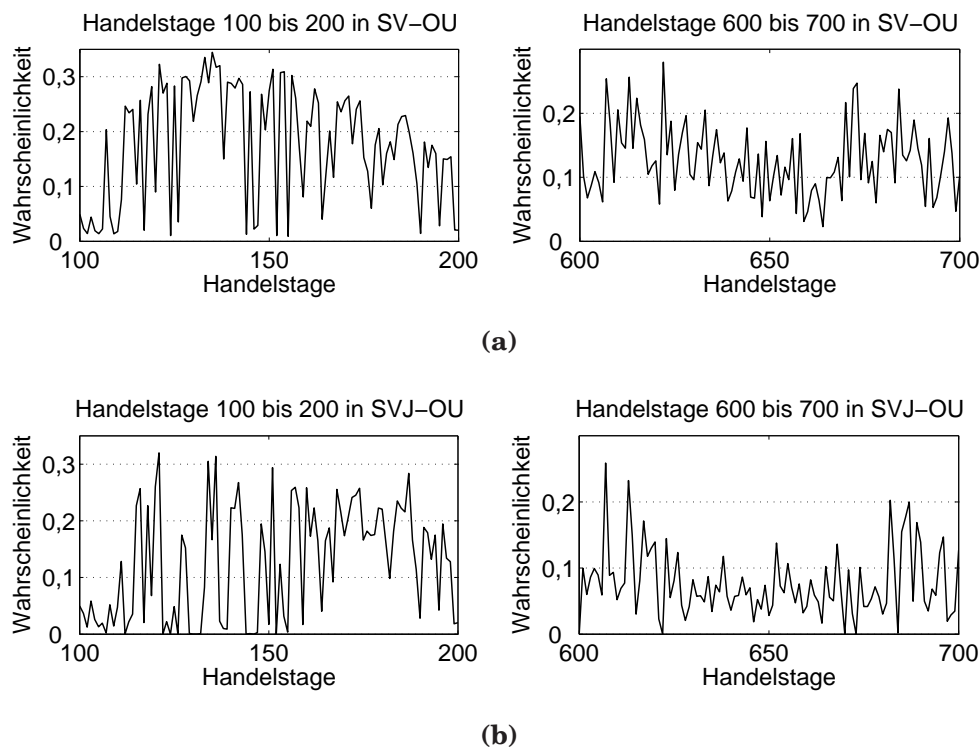


Abbildung 6.4: Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität für die Zeiträume der Handelstage 100 bis 200 sowie 600 bis 700 für das Modell (a) SV-OU, (b) SVJ-OU.

man dieses Ziel in der Minimierung, kann es als Nebenbedingung formuliert werden. Da eine weitere Nebenbedingung eine Restriktion darstellt, bleibt der optimale Zielfunktionswert entweder unverändert oder er steigt an.

In diesem Abschnitt wird daher die Frage untersucht, wie sich die Güte der Anpassung verändert, wenn bei der Kalibrierung Parameter, die zu einer hohen Wahrscheinlichkeit führen, bestraft werden und damit die Wahrscheinlichkeit negativer Werte nach oben begrenzt wird. Realisiert wird dieser Ansatz durch Erweiterung der bekannten Zielfunktion $F(\theta)$ nach (5.1) um einen Strafterm $g \cdot \text{Wkeit}(\theta)$, der die Wahrscheinlichkeit mit unterschiedlichen Gewichten g enthält. Damit wird das restringierte Problem durch das unrestringierte Problem mit Straffunktion approximiert, wobei die Minimierung der neuen Zielfunktion $G(\theta)$ somit der Form

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} G(\theta) = \arg \min_{\theta} (F(\theta) + g \cdot \text{Wkeit}(\theta)) \quad (6.1)$$

entspricht. Der Vektor θ beschreibt die zu bestimmenden Parameter des Modells. Wie stark der Einfluß der Wahrscheinlichkeits-Restriktion in der Minimierung ist, wird in der Zielfunktion (6.1) über die Gewichte g gesteuert. Je größer das Gewicht g gewählt wird, um so mehr werden Parameterkombinationen mit hohen Werten in der Wahrscheinlichkeit be-

strafft.

Um die Eigenschaften der Kalibrierung mit der neuen Zielfunktion (6.1) zu testen, werden die zwei Zeiträume der Handelstage 100 bis 200 und 600 bis 700 aus den Marktdaten ausgewählt, die unterschiedliche Marktphasen repräsentieren.³ Die Abbildung 6.4 der Wahrscheinlichkeiten ohne Kontrolle bezieht sich bereits auf diese Perioden.

Zunächst wird an den zwei Handelstagen 101 und 198 aus dem Zeitraum 100 bis 200 die Bedeutung der Gewichte explizit untersucht. Handelstag 101 wurde gewählt, da er innerhalb der Periode von 100 bis 200 den höchsten Schlusskurs des DAX aufweist und Handelstag 198 entsprechend den niedrigsten. Die Abbildungen 6.5 zeigen für das Modell SV-OU, dass bei der Wahl sehr großer Gewichte g die Minimierung der Wahrscheinlichkeit auf Kosten der Anpassungsgüte in den Vordergrund tritt, wobei die Wahrscheinlichkeit jedoch beliebig weit reduziert werden kann. Im SVJ-OU Modell gilt Entsprechendes. Die Wahrscheinlichkeitsangaben pro Tag in Abbildung 6.5 ergeben sich als Durchschnitt über die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Laufzeiten pro Handelstag.

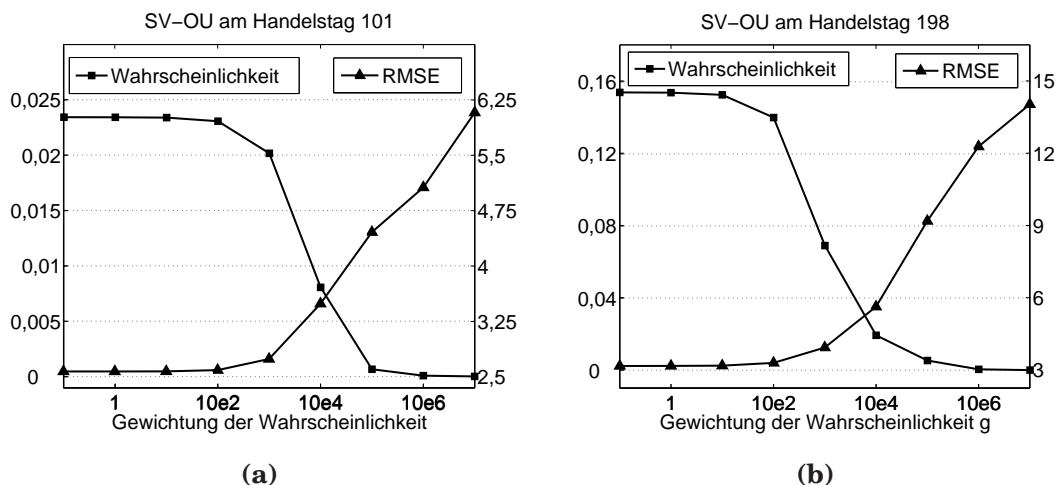


Abbildung 6.5: Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität und korrespondierender Fehler RMSE in der In-Sample Anpassung des SV-OU Modells in Abhängigkeit der Gewichtung der Wahrscheinlichkeit g für Handelstag (a) 101, (b) 198.

Kleine Wahrscheinlichkeiten für negative Werte und gute Anpassung an Marktdaten sind somit gegenläufige Probleme. Für sehr hohe Gewichte geht die Wahrscheinlichkeit gegen Null. Abbildung 6.5 zeigt jedoch, dass schon mit einer kleinen Gewichtung die Wahrscheinlichkeit negativer Werte stark reduziert werden kann, ohne zu große Einbußen bei der Anpassung hinnehmen zu müssen. Eine deutliche Reduktion der Wahrscheinlichkeit findet am Handelstag 101 zwischen den Gewichten $g = 10^3$ und $g = 10^4$ statt. Während der Fehler

³Vgl. Abschnitt A.2 im Anhang.

	Gewichte g									Verlauf
	0	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	
κ	1,54	1,54	1,55	1,65	2,19	2,73	2,72	3,06	3,22	↗
β	0,54	0,54	0,54	0,54	0,48	0,39	0,32	0,26	0,22	↘
θ	0,12	0,12	0,12	0,14	0,24	0,29	0,30	0,32	0,32	↗
V_0	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	→
ρ	-0,77	-0,77	-0,77	-0,78	-0,86	-0,99	-0,99	-0,99	-0,99	↘
ϕ EW	0,31	0,31	0,32	0,32	0,36	0,38	0,38	0,38	0,38	↗
ϕ Var	0,073	0,073	0,072	0,068	0,044	0,025	0,016	0,009	0,006	↘

Tabelle 6.4: Modellparameter des SV-OU Modells als Ergebnis der Kalibrierung sowie durchschn. Erwartungswert (EW) und Varianz (Var) für den Handelstag 198 zu jedem Gewicht g .

um rund 27 Prozent ansteigt, reduziert sich die Wahrscheinlichkeit um ca. 40 Prozent. Am Handelstag 198 kommt es zwischen Gewicht $g = 10^2$ und $g = 10^3$ zu einer Halbierung der Wahrscheinlichkeit, bei der der RMSE-Wert um rund 20 Prozent steigt.

In beiden Fällen liegt für $g = 10^4$ die Wahrscheinlichkeit für negative Werte unter zwei Prozent, was eine gute Toleranzgrenze darstellt. Da damit die Wahrscheinlichkeit für nicht negative Werte größer als 98 Prozent ist, sind die Modelle SV-OU und SVJ-OU mit diesem Gewicht in der Eigenschaft der Positivität der Volatilitätspfade mit den Modellen SV-CIR und SVJ-CIR vergleichbar.

Nach Gleichung (3.5) reduziert sich die Wahrscheinlichkeit negativer Werte, wenn der Erwartungswert steigt und/oder die Varianz sinkt. Um die Frage zu untersuchen, welches Ereignis dominiert und welche Parameter dies auslösen, sind in Tabelle 6.4 exemplarisch die Parameter des SV-OU Modells sowie der durchschnittliche Erwartungswert und die durchschnittliche Varianz nach Formel (3.6) über alle Laufzeiten des Tages für den Handelstag 198 zu jedem Gewicht angegeben.

Die Reduktion der Wahrscheinlichkeit resultiert nach Tabelle 6.4 vorwiegend aus der Abnahme der Varianz und weniger aus dem steigenden Erwartungswert. Die Varianz sinkt bei wachsender Mean-Reverting Geschwindigkeit κ und kleinerer Variation β . Der Parameter V_0 , der Modell-invariant unter der Zielfunktion (5.1) ist, zeigt sich in Tabelle 6.4 ebenfalls invariant unter der Minimierung mit Straffunktion, obwohl V_0 eine Einflussgröße für die Höhe des Erwartungswertes nach Formel (3.6) ist und somit auch ausschlaggebend für die Höhe der Wahrscheinlichkeit ist. Im Gegensatz zu den vier vorangegangenen Parametern ist die Formel für die Wahrscheinlichkeit unabhängig vom Parameter ρ . Da ρ in Tabelle 6.4 jedoch nicht konstant über die Gewichte ist, bietet die Reduktion dieses Parameters,

bis an seine untere Schranke⁴, der Kalibrierung einen Ausgleich für die Anpassung. Eine stärkere negative Korrelation von Volatilität zum Kurs senkt bei höherer Gewichtung des Wahrscheinlichkeits–Strafterms den Fehler.

Der Nachteil der Zielfunktion (6.1) mit fester Gewichtung besteht darin, dass das Gewicht nicht selbst von der Höhe der Zielfunktion abhängt. Ist nämlich der Fehler der Anpassung aus Marktgründen schon sehr hoch, fällt die Bestrafung aus der Positivitätsverletzung nicht mehr so stark ins Gewicht wie bei einem geringeren Fehler. Da jedoch auch an ungünstigen Handelstagen auf eine niedrige Wahrscheinlichkeit negativer Werte geachtet werden soll, wird zusätzlich die Zielfunktion

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} H(\theta) = \arg \min_{\theta} (F(\theta) + f \cdot F(\theta) \cdot \text{Wkeit}(\theta)) \quad (6.2)$$

untersucht, bei der das Gewicht der Wahrscheinlichkeit von der Größe der Zielfunktion $F(\theta)$ abhängig ist. Wie stark der Einfluss von $F(\theta)$ in (6.2) ist, wird durch einen Koeffizienten f gesteuert, der im Folgenden mit $f = 5$ gewählt wird.

Für die Wahl der Gewichte g hat die Untersuchung nach Abbildung 6.5 gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität für Gewichte $g = 10^3$ und $g = 10^4$ auf ein akzeptables Toleranzniveau gesenkt werden kann, ohne dass die Anpassungsgüte auf ein zu schlechtes Niveau sinkt. Daher wird für die Handelszeiträume 100 bis 200 und 600 bis 700 eine Kalibrierung von SV-OU und SVJ-OU sowohl mit Gewicht $g = 10^3$ als auch mit $g = 10^4$ durchgeführt, um Aussagen über eine längere Periode treffen zu können.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.5 als Mittelwerte der RMSE–Fehler und der täglichen Durchschnitts–Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst. Die Werte für SV-CIR, SVJ-CIR sowie für unrestringierten Modelle SV-OU und SVJ-OU sind dabei Abschnitt 6.1 entnommen.

Der RMSE–Fehler des SV-CIR Modells liegt in beiden Zeiträumen genau zwischen den Fehlern der SV-OU Modelle mit Gewichtung 10^3 und 10^4 . Damit ist das SV-OU Modell mit der Gewichtung 10^3 , was einer Reduktion der Wahrscheinlichkeit um ein Drittel für die Handelstage 100 bis 200 und um gut ein Viertel für den Zeitraum zwischen 600 und 700 entspricht, immer noch dem SV-CIR Modell in der Frage der Anpassung vorzuziehen. Die Wahrscheinlichkeit negativer Werte ist im Mittel beim SVJ-OU Modell niedriger als beim SV-OU Modell, was bereits in Abbildung 6.5 angedeutet ist. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit während des Seitwärtstrends des DAX geringer als in der Phase starker Kursverluste, wo jedoch die höheren Potenziale zur Senkung liegen. So kann in der ersten Periode im SVJ-OU Modell die Wahrscheinlichkeit mit dem Gewicht $g = 10^3$ halbiert werden, wobei der RMSE–Fehler im Mittel noch weit unterhalb des Wertes des SVJ-CIR bleibt.

In Abbildung 6.4 streuen die unkontrollierten Wahrscheinlichkeiten stark. Diese Streuung lässt sich mit der Kalibrierung mit Strafterm ebenfalls reduzieren, was sowohl in Tabelle 6.5 durch die Standardfehler als auch durch die Zeitreihe in Abbildung 6.6 zum Ausdruck

⁴Vgl. Tabelle A.1 im Anhang.

	Handelstage 100 bis 200		Handelstage 600 bis 700	
	RMSE	Wahrscheinlichkeit	RMSE	Wahrscheinlichkeit
SV-OU	4,87	0,18 [0,0105]	4,56	0,13 [0,0055]
SV-OU, $g = 10^3$	5,70	0,12 [0,0095]	5,14	0,1 [0,0047]
SV-OU, $g = 10^4$	7,35	0,03 [0,0039]	7,07	0,03 [0,0017]
SV-OU, $f = 5$	7,94	0,01 [0,0015]	8,08	0,02 [0,001]
SV-CIR	5,72	0 [0]	6,34	0 [0]
SVJ-OU	4,14	0,13 [0,0099]	3,44	0,08 [0,005]
SVJ-OU, $g = 10^3$	4,63	0,06 [0,0073]	4,28	0,06 [0,005]
SVJ-OU, $g = 10^4$	5,79	0,02 [0,0034]	4,76	0,01 [0,0013]
SVJ-OU, $f = 5$	6,31	0,01 [0,0015]	5,33	0,01 [0,001]
SVJ-CIR	5,25	0 [0]	4,09	0 [0]

Tabelle 6.5: Mittelwerte von *RMSE* und *Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität* mit [Standardfehlern] der Modelle *SV-OU* und *SVJ-OU* für die Handelstage 100 bis 200 und 600 bis 700.

kommt. Dabei verläuft die Zeitreihe der Wahrscheinlichkeit, die sich bei Anwendung der Zielfunktion (6.2) mit $f = 5$ ergibt, sogar annähernd konstant.

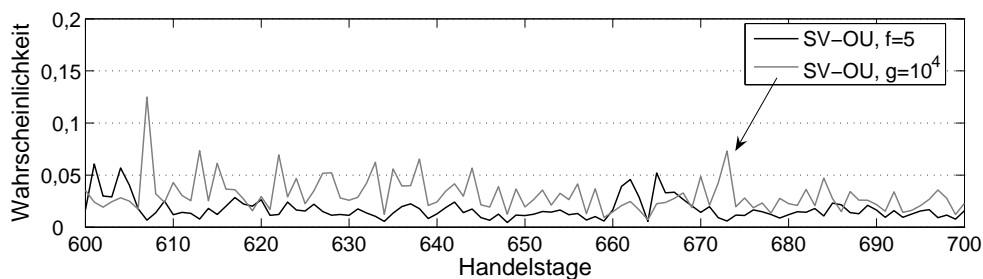


Abbildung 6.6: *Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität im Zeitraum 600 bis 700* für das Modell *SV-OU* mit Strafterm und Gewicht $g = 10^4$ und $f = 5$.

Die Wahrscheinlichkeit für negative Werte in der Volatilität ist für das SV4 und SVJ7 Modell ebenfalls mit Formel (3.5) nach Abschnitt 3.5 zu berechnen, so dass eine Bestrafung hoher Wahrscheinlichkeiten während der Optimierung analog zum SV-OU und SVJ-OU Modell durchgeführt werden kann.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es durch die Verwendung der Zielfunktionen (6.1) und (6.2) mit einem Gewicht ungleich Null möglich ist, die Größe und die Streuung der Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität zu steuern. Somit zeigen die Untersuchungen in diesem Abschnitt, dass eine Kontrolle der Wahrscheinlichkeit negativer Werte im OU-Prozess mit geringem Aufwand möglich ist. Da trotz der Korrektur die Modelle SV-OU

und SVJ-OU bis zu einem bestimmten Gewicht immer noch bessere Anpassungseigenschaften als das SV-CIR bzw. SVJ-CIR Modell aufweisen, sind negative Werte in der Volatilität, an die Feststellungen aus Abschnitt 3.4 anknüpfend, kein Argument gegen Modelle mit OU-Prozess.

6.3 Der invariante Parameter V_0

Der Parameter V_0 verhält sich als ein Ergebnis des Abschnitts 6.1 in allen Modellen mit stochastischer Volatilität invariant gegenüber der Modellwahl. Eine Beobachtung des vorangegangenen Abschnitts 6.2 zeigte darüber hinaus, dass V_0 auch bei Minimierung der Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität für verschiedene Gewichte konstant bleibt.

Diese Eigenschaft ermöglicht die Konstruktion eines Modells „SV3“ mit stochastischer Volatilität, das mit lediglich drei freien Parametern auskommt, indem im vier-parametrischen SV4 Modell V_0 aus einer passenden Kalibrierung übernommen wird. Tabelle 6.6 zeigt den gemittelten RMSE- und ARPE-Fehler für den Zeitraum über die ersten 100 Handelstage für das neue SV3 Modell, in das die Werte des SV-CIR Modells aus Abschnitt 5.4 für V_0 eingesetzt wurden. Zum Vergleich enthält Tabelle 6.6 die entsprechenden Fehler des SV4 Modells aus Abschnitt 6.1. Im RMSE ist SV3 nur um drei Prozent schlechter als SV4, während es im ARPE zu keiner nennenswerten Verschlechterung durch den konstanten Parameter kommt. Da die Zeitreihen der V_0 -Parameter nach Abbildung 5.6 über den ganzen Zeithori-

	Handelstage 1 bis 100	
	RMSE	ARPE[%]
SV3	4,678	3,725
SV4	4,542	3,722

Tabelle 6.6: Mittelwerte von RMSE und ARPE des Modells SV3 mit $V_0^{SV3} = V_0^{SV-CIR}$ aus dem SV-CIR Modell sowie des Modells SV4 zum Vergleich für die ersten 100 Handelstage.

zont deckungsgleich verlaufen, genügt die Betrachtung dieser ausgewählten Zeitspanne, da die Betrachtung längerer Zeiträume zu identischen Ergebnissen führt.

Ist V_0 aus einer anderen Kalibrierung eines beliebigen Modells mit stochastischer Volatilität für den gleichen Zeitraum bekannt, so stellt das SV3 ein sparsames, leicht zu kalibrierendes Modell mit guter Marktanpassung dar, das somit allen Anforderungen an ein gutes Bewertungsmodell gerecht wird.

Da jedoch in der Regel V_0 nicht schon aus einer Kalibrierung gegeben ist, reduziert SV3 nur den Aufwand gegenüber den Modellen mit mehr Parametern, wenn V_0 durch einen Parameter ersetzt werden kann, der mit weniger Aufwand bestimmt wurde. So ein Parame-

Markt- phasen	RMSE					ARPE[%]				
	konsol.	fallend	steig.	seitw.	gesamt	konsol.	fallend	steig.	seitw.	gesamt
Zeit- raum Tage	1 — 100	100 — 200	300 — 400	600 — 700	1 — 956	1 — 100	100 — 200	300 — 400	600 — 700	1 — 956
CV	27,8	36,6	19,9	29,9	27,2	20,4	21,4	14,5	57,5	33,4
SV3	6,3	26,4	9,7	7,5	11,5	5,1	18,9	8,7	9,1	10,1
SV4	4,5	5,0	3,1	5,2	4,4	3,7	4,8	3,3	6,4	5,1

Tabelle 6.7: Mittelwerte von RMSE und ARPE des Modells SV3 mit $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$ (aus dem CV Modell) sowie der Modelle CV und SV4 zum Vergleich für verschiedene Marktphasen und über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

ter bildet die implizite Volatilität σ^{CV} des CV Modells, da durch den enormen Anstieg der numerischen Probleme der Kalibrierung mit jeder Dimension, eine ein-dimensionale mit anschließender drei-dimensionaler Minimierung weniger Aufwand bedeutet als eine vier-dimensionale.

In Tabelle 6.7 sind die Ergebnisse für das SV3 Modell mit $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$ in Form der Fehlerterme RMSE und ARPE zusammengefasst, wobei σ^{CV} der impliziten Volatilität des CV Modells entspricht. Die Tabelle enthält neben den neuen Werten für SV3 auch bereits bekannte Ergebnisse des Abschnitts 6.1 für CV und SV4, die hier zum Vergleich dienen sollen.

Die Anpassung des SV3 ist für ein Modell mit nur drei Parametern in Relation zum Rechenaufwand sehr gut. In Anlehnung an Abbildung 5.6 ist die Anpassung an den Tagen schlechter, an denen sich die Zeitreihe der σ^{CV} -Werte besonders stark von den Zeitreihen der V_0 -Parameter unterscheidet. Diese Phasen decken sich mit den Zeiten besonders schlechter Anpassung im CV Modell. Eine außerordentlich gute Anpassung wird dagegen in Phasen der Konsolidierung und der Seitwärtsbewegung des Marktes erzielt.

Da die gemittelten Fehlerwerte für das SV3 Modell aller Zeiträume in Tabelle 6.7 stets geringer sind als die des CV Modells, ist die implizite Volatilität ein besserer Proxy für den Parameter V_0 eines Modells mit stochastischer Volatilität als für die Volatilität des Marktes.

Die durchschnittlichen Parameterwerte für SV3 sind, in Anlehnung an Tabelle 5.5 für das SV4 Modell, in Tabelle 6.8 zusammengefasst.

Die weitere Betrachtung des SV3 Modells ist hinsichtlich der geringen Anzahl an Parametern und der damit verbundenen Aufwandsersparnis gegenüber bekannten Modellen mit stochastischer Volatilität interessant, was die vergleichsweise gute In-Sample-Performance noch verstärkt. Daher wird im folgenden Abschnitt neben der Out-of-Sample Performance der Modelle aus Abschnitt 3.6 auch die des SV3 Modells mit $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$ untersucht.

	Parameter für stoch. Volatilität		
	κ	β	ρ
SV3	0,5489	0,2576	-0,6729
(OU-Darst.)	[0,0198]	[0,0032]	[0,0027]

Tabelle 6.8: *Parameter des SV3 Modells mit $V_0^{\text{SV3}} = \sigma^{\text{CV}}$ (aus dem CV Modell) in OU-Darstellung als Ergebnis der Kalibrierung: Mittelwert sowie [Standardfehler] der Parameter vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

6.4 Out-of-Sample Performance

6.4.1 Motivation und Methode

Da das Ziel der Modellierung stets darin besteht, die Realität möglichst strukturerhaltend nachzubilden, und nicht die beste Anpassung an einen Datensatz zu erzielen, ist für die Beurteilung der Modelle eine Untersuchung wichtig, die über den Datensatz eines Tages hinausgeht.

Die Untersuchung der In-Sample Pricing Performance verschiedener Bewertungsmodelle an Marktpreise in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels hat gezeigt, dass durch eine komplexere Modellierung mit mehr freien Parametern in der Regel eine bessere Anpassung zu erzielen ist.⁵

Im Gegenzug steigt mit der Anzahl der Parameter die Dimension des Lösungsraums und damit der Aufwand bei der Minimierung an. Um somit dem Zielkonflikt, der in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt ist, zwischen der Anzahl der Parameter und der Handhabbarkeit des Modells gerecht zu werden, ist es wichtig zu wissen, ob ein Modell überparametrisiert ist und es eventuell zum „Over-Fitting“ kommt. Da mit den bisher verwendeten In-Sample Fehlermaßen Over-Fitting nicht erkannt werden kann, sind „Out-of-Sample“ Tests nötig, bei denen Modelle mit Parametern, die die Anpassung nicht in der Struktur verbessern, mit höheren Fehlern bestraft werden.

Die Basis von Out-of-Sample Untersuchungen bilden die optimalen Parameter, die sich aus der Kalibrierung nach Kapitel 5 ergeben. Mit diesen Parametern, die implizit die Informationen des Marktes für ihr Modell bis zu einem festen Zeitpunkt t enthalten, werden Preise für in der Zukunft liegende Termine $t + h$, $h > 0$ berechnet und mit den tatsächlich realisierten Marktpreisen verglichen. Die Differenz beider Preise liefert den Gewinn bzw. den Verlust eines Händlers, der wie beschrieben seine Optionen bewertet hat.

In der Literatur gibt es mehrere Ansätze, wie lang der Zeitraum zu wählen ist, über den die Parameter für den Test gemittelt werden. Da modelltheoretisch davon ausgegangen wird,

⁵Diese Folgerung steht im Einklang zu den Ergebnissen der Literatur. Vgl. z.B. Bakshi et al[8], Bates[11], Figlewski/Green[63].

dass die Parameter in einem korrekten Modell für alle Zeiten konstant sind und somit ein Satz Parameter ausreicht, jede beliebige Option richtig zu bewerten, wird bei der modelltheoretischen Variante der Out-of-Sample Tests⁶ diesem Anspruch dadurch Rechnung getragen, dass der zugrunde liegende Datensatz in zwei Hälften geteilt wird. Die erste Hälfte der Marktdaten wird für die Bestimmung der Parameter mittels Kalibrierung genutzt, die anschließend gemittelt werden. Auf diese Weise erhält man einen Satz Parameter, mit dem die Optionen aus der zweiten Hälfte des Datensatzes bewertet und mit den Marktpreisen dieser Hälfte verglichen werden. Diese Out-of-Sample Untersuchung versucht der Theorie des einen wahren Parametersatzes gerecht zu werden, findet aber in der Praxis von Finanzinstitutionen keine Anwendung.⁷

Durch die Praxis der täglichen Rekalibrierung der Modelle wird im Prinzip schon von dem theoretischen Anspruch des einen wahren Parametersatzes Abstand genommen und akzeptiert, dass die vorliegenden Modelle in diesem Punkt nur Approximationen an das wahre Modell liefern. Die empirischen Ergebnisse der täglichen Rekalibrierung aus Abschnitt 5.4 zeigen, dass die Parameter über die Zeit schwanken. Somit erfüllt keines der betrachteten Modelle die theoretische Anforderung an einen konstanten Parametersatz.

Die tägliche Anpassung der Parameter legt somit den anwendungsorientierten Ansatz nahe, tagesgenaue Out-of-Sample Tests⁸ durchzuführen. Mit den Parametern eines Modells vom Tag $t - 1$ werden Preise für den Tag t berechnet und mit den tatsächlich realisierten Marktpreisen am Tag t verglichen. Diese Variante unterscheidet sich im Prinzip wenig von der ersten Möglichkeit, da bei konsequenter Verkürzung des Intervalls für die Mittelung der Parameter in der ersten Variante die tageweise Out-of-Sample Untersuchung als Grenzwert auftritt.

6.4.2 Empirische Ergebnisse

Die Fehlermaße nach Formel (5.2) sind in Tabelle 6.9 für die praxisnahe tageweise Out-of-Sample Untersuchung über alle Handelstage gemittelt wiedergegeben. Im direkten Vergleich mit Tabelle 6.1 sind alle Out-of-Sample Fehlermaße höher. Für das CV Modell liegen die Fehler im Mittel für morgen nur geringfügig über den Anpassungs-Fehlern von heute. In etwas abgeschwächter Form gilt diese Aussage auch für das CVJ Modell. Da die Out-of-Sample Performance für das CV und CVJ Modell jedoch die schlechteste ist, sind Modelle mit stochastischer Volatilität auch in dieser Kategorie, Modellen mit konstanter Volatilität vorzuziehen.

Die Fehler der Modelle mit stochastischer Volatilität sind für jedes Maß durchweg größer

⁶Vgl. z.B. Figlewski/Green[63].

⁷Vgl. z.B. An/Suo[5].

⁸Vgl. z.B. Bakshi et al[8].

als ihre Vergleichswerte für die In-Sample Anpassung. Trat jedoch in Tabelle 6.1 eine deutliche Abstufung innerhalb und zwischen den Modellgruppen auf, so liegen die Fehlermaße in

	Anzahl Parameter	Fehlermaße							
		RMSE _{OOS}		APE _{OOS} [%]		AAE _{OOS}		ARPE _{OOS} [%]	
CV	1	28,61	[0,231]	6,67	[0,066]	22,65	[0,196]	34,62	[0,675]
CVJ	4	17,27	[0,327]	4,19	[0,094]	13,8	[0,281]	13,16	[0,25]
SV-CIR	5	10,79	[0,215]	2,73	[0,061]	9,24	[0,197]	9,97	[0,152]
SVJ-CIR	8	10,27	[0,223]	2,61	[0,063]	8,81	[0,204]	8,9	[0,161]
SVJ-IJ-CIR	10	10,23	[0,224]	2,61	[0,063]	8,79	[0,205]	8,41	[0,16]
SVJ-CJ-CIR	10	10,21	[0,223]	2,61	[0,063]	8,78	[0,205]	8,38	[0,18]
SV-OU	5	10,4	[0,222]	2,6	[0,063]	8,89	[0,203]	7,64	[0,14]
SVJ-OU	8	10,2	[0,225]	2,61	[0,063]	8,79	[0,206]	8,32	[0,163]
SV3, $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$	3	14,75	[0,31]	3,68	[0,09]	12,14	[0,273]	10,75	[0,215]
SV4	4	10,54	[0,218]	2,66	[0,062]	8,97	[0,199]	7,8	[0,135]
SVJ7	7	10,22	[0,225]	2,61	[0,063]	8,79	[0,205]	8,32	[0,164]

Tabelle 6.9: *Mittelwerte und Standardfehler der Fehlermaße aller Modelle für die Out-of-Sample Performance über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

Tabelle 6.9 sehr nah beieinander, so dass sich kein Modell besonders hervorhebt. Kann im Mittel der RMSE und der AAE im SVJ-CIR Modell noch durch die Modellierung der Sprünge im Kurs um rund fünf Prozent im Vergleich zum SV-CIR gesenkt werden, so reduzieren sich diese Fehlermaße, vom SVJ-CIR ausgehend, um weniger als einen Prozentpunkt im SVJ-CJ-CIR bzw. SVJ-IJ-CIR Modell. Für den APE-Fehler gilt diese Beobachtung durch nahe zu gleiche Werte in allen Modellen noch verstärkt. Lediglich für den ARPE fallen die Verbesserungen von SV-CIR auf SVJ-CIR mit über zehn Prozent und von SVJ-CIR auf SVJ-IJ-CIR bzw. SVJ-CJ-CIR mit gut fünf Prozent etwas höher aus.

Für die Modelle mit stochastischer Volatilität nach dem OU-Prozess wird durch Kurs-sprünge die Anpassung im RMSE um zwei Prozent von SV-OU auf SVJ-OU und um rund drei Prozent von SV4 auf SVJ7 verbessert, was einen sehr geringen Effekt im Vergleich zum gestiegenen Aufwand durch die zusätzlichen Sprungparameter darstellt. Unter dem Aspekt des Aufwands erzielen das SV3 und das SV4 Modell gute Werte. Verglichen mit dem CVJ Modell mit vier Parametern, sind die Fehler des SV4 mit gleich vielen Parametern wesentlich geringer. Doch sogar SV3 mit drei Parametern schneidet besser ab als CVJ.

Insgesamt führen die Ergebnisse zu dem Schluss, dass Konzepte der stochastischen Volatilität die Struktur des Marktes besser erklären als die Modellierung von Sprüngen im Kurs.

Unterschiede zwischen den Modellgruppen, die bei der In-Sample Performance leicht herausgearbeitet werden können, erscheinen in Tabelle 6.9 marginal. Insgesamt erweckt Tabelle 6.9 den Eindruck, dass für dieses Problem im Markt untere Schranken für die Fehlermaße

bestehen, gegen die die Modelle konvergieren und diese nicht unterschreiten können. Neben den kaum variierenden Mittelwerten der Fehler-Zeitreihen ist auch die Streuung der Zeitreihe, ausgedrückt durch die Standardfehler in Tabelle 6.9, für alle Modelle mit stochastischer Volatilität identisch.

Weiteren Aufschluss über das Phänomen eines Markt-internen Grenzwertes soll die Aufteilung des RMSE und des ARPE in Marktphasen⁹ in Tabelle 6.10 ergeben. Zunächst erklärt

Marktphasen	RMSE _{OOS}			ARPE _{OOS} [%]		
	fallend	steigend	seitwärts	fallend	steigend	seitwärts
Zeitraum Handelstage	100 – 200	300 – 400	600 – 700	100 – 200	300 – 400	600 – 700
CV	38,67	21,01	31,05	22,16	15,34	59,02
CVJ	34,7	16,19	12,15	25,68	16,14	8,48
SV-CIR	15,03	7,83	11,0	11,48	6,32	13,42
SVJ-CIR	14,88	7,64	10,01	10,12	6,06	11,86
SVJ-IJ-CIR	14,81	7,6	9,92	10,21	5,83	11,35
SVJ-CJ-CIR	14,71	7,64	9,83	10,23	5,87	9,43
SV-OU	14,84	7,79	10,14	9,99	5,8	8,52
SVJ-OU	14,6	7,67	9,83	10,21	5,93	10,54
SV3, $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$	29,34	11,61	11,1	19,91	9,07	9,72
SV4	14,81	7,92	10,42	10,01	5,96	8,4
SVJ7	14,84	7,73	9,83	10,1	5,99	10,41

Tabelle 6.10: Mittelwerte von RMSE aller Modelle für die Out-of-Sample Performance über alle Handelstage und in drei Marktphasen.

der sehr schlechte ARPE-Wert des CV Modells für den Seitwärts-Markt den unverhältnismäßig hohen Standardfehler der ARPE-Zeitreihe in Tabelle 6.9. Da der entsprechende Wert für CVJ vergleichsweise niedrig ist, verbessern somit seltene Sprünge im Kurs die relative Anpassung in einem Markt in Seitwärtsbewegung entscheidend. Während in einer Periode stark fallender oder steigender Kurse, die die Modellierung vieler kleiner Sprünge erfordert, das CVJ relativ schlechter ist.

Für Modelle mit stochastischer Volatilität liefert Tabelle 6.10 für jede Spalte ein vergleichbares Resultat zu dem der Gesamt-Mittelwerte in Tabelle 6.9 und unterstreicht damit die Existenz gewisser Schranken, wie viel Struktur mit dem Konzept stochastische Volatilität erklärt werden kann. Durch die Hinzunahme weitere Modellierungsspielräume wie Sprünge im Kurs oder in der Volatilität können diese Schranken nicht unterschritten werden und Modelle wie SVJ-IJ-CIR und SVJ-CJ-CIR erscheinen mit zehn Parametern überparametrisiert.

⁹Zur Wahl der Zeiträume vgl. Abschnitt A.2 im Anhang.

Kapitel 7

Exotische Optionen aus impliziten Prozessinformationen

Unter dem Begriff „exotische Option“ werden alle Optionen zusammengefasst, die sich durch Modifikation diverser Kenngrößen von den Standardoptionen unterscheiden. Nach dem einleitenden Abschnitt 7.1 werden zu Beginn jedes weiteren Abschnittes eine von insgesamt vier exotischen Optionstypen vorgestellt. Da diese Optionen speziell auf ihre Käufer zugeschnitten sind und außerbörslich „Over-the-Counter“ gehandelt werden, gibt es für eine Vielzahl dieser Optionen keine Marktpreise, wie das für die DAX-Optionen in Kapitel 5 der Fall war. Die Modellparameter der Kalibrierung aus Abschnitt 5.4 liefern jedoch implizite Prozessinformationen, mit denen die exotischen Optionen im Einklang mit den Marktpreisen der Standardoptionen bewerten werden können. Diese Modellrechnungen sind jeweils im zweiten Teil der Abschnitte wiedergegeben und bilden die Basis für die Auswertungen unter dem Aspekt Modellrisiko in Kapitel 9.

7.1 Motivation und Methode

Exotische Optionen umfassen alle Arten von Optionen, deren Payoff eine komplexere Funktion als die Auszahlung (2.1) der Plain-Vanilla Option umfasst. Das Spektrum an möglichen Kombinationen und Gestaltungsformen scheint nahezu unbegrenzt.¹

In den folgenden Abschnitten werden daher vier Spezialfälle pfadabhängiger² exotischer Optionen charakterisiert und in die empirische Untersuchung eingebunden. Dabei wurden solche Optionen ausgewählt, die häufig in der Praxis Anwendung finden und deren korrekte

¹Vgl. Sandmann[115], Kapitel 3, auch für weiterführende Literatur, oder Hull[80], Kapitel 22.

²Bei einer pfadabhängigen Option hat der Kurs des Basiswertes zu gewissen Zeitpunkten vor Fälligkeit Einfluss auf den Wert der Option.

Bewertung relevant ist. Anwendungsbeispiele für die Optionen runden dabei das Profil ab.

Bei der Bewertung exotischer Optionen kommt erschwerend hinzu, dass es allgemein keine geschlossenen Formeln gibt und auch eine Bewertung mit Fourier Analysis, wie in Abschnitt 4.1 für europäische Standardoptionen vorgestellt, nicht möglich ist. Daher wird im Folgenden auf die universelle Monte Carlo Simulation zurückgegriffen, deren Methode, Vorteile und Probleme bereits in Abschnitt 4.2 für die Anwendung bei exotischen Optionen behandelt wurden.

Die Ergebnisse der In-Sample Performance in Abschnitt 6.1 an den vorliegenden Datensatz haben gezeigt, dass es mit der Mehrzahl der Modelle möglich ist, sehr gute Anpassungen an die Marktdaten zu erzielen. Dennoch unterscheiden sich die konkreten Werte für eine Call Option zwischen den Modellen, was aus den unterschiedlich hohen Anpassungsfehlern folgt. Für drei Call-Optionen sind in Tabelle 7.1 die Preise aller Modelle eines Beispieltages exemplarisch mit DAX-Kurs $S_0 = 3307,34$, Laufzeit $T = 0,492$ und Zinssatz $r = 0,02154$ dargestellt. Dabei sind Laufzeit und Strike annähernd so gewählt, wie sie auch für die folgende

Strike		Modelle I						Marktpreis
$K =$	$\frac{K}{S} \approx$	CV	CVJ	SV-CIR	SVJ-CIR	SVJ-IJ-CIR	SVJ-CJ-CIR	
3000	0,9	440,2	458,4	468,8	469,4	469,4	469,6	470,9
3300	1	265,4	268,4	277,6	278,0	277,6	277,1	276,1
3650	1,1	132,5	116,8	120,2	119,9	120,1	120,6	118,4

Strike		Modelle II				Marktpreis
$K =$	$\frac{K}{S} \approx$	SV-OU	SVJ-OU	SV4	SVJ7	
3000	0,9	470,1	470,1	469,5	469,8	470,9
3300	1	277,8	277,9	275,9	277,9	276,1
3650	1,1	119,8	119,8	119,2	120,0	118,4

Tabelle 7.1: Preise für Plain-Vanilla Calls als Ergebnisse der Kalibrierung aller Modelle an einem Beispieltag für ausgewählte Strikes mit $S_0 = 3307,34$, $T = 0,492$, $r = 0,02154$.

Bewertung der exotischen Optionen gesetzt werden. Die Abweichung des niedrigsten Wertes vom höchsten beträgt über alle Modelle I und II für die Call-Option leicht im Geld mit Strike $K = 3000$ rund sechs Prozent, am-Geld mit Strike $K = 3300$ ungefähr 4,5 Prozent und leicht aus-dem-Geld mit Strike $K = 3650$ knapp zwölf Prozent. Da nach den Untersuchungen aus Abschnitt 6.1 die Anpassung an den Marktpreis besonders im CV und CVJ Modell fehlerhaft ist, sind die Abweichungen der Call-Preise innerhalb der acht verbleibenden Modelle mit stochastischer Volatilität wesentlich geringer. Sie liegen für die Call-Option im Geld mit Strike $K = 3000$ bei gut 0,3 Prozent, am-Geld mit Strike $K = 3300$ bei ca. 0,8 Prozent und leicht aus-dem-Geld mit Strike $K = 3650$ bei etwa 1,2 Prozent.

Bildet ein Modell bereits die Marktpreise der Plain-Vanilla Optionen ungenügend nach,

verstärkt die Bewertung exotischer Optionen den Effekt. Die Abweichungen der Modelle, wie sie beispielhaft in Tabelle 7.1 festgestellt werden, übertragen sich auf die Preise der exotischen Optionen. Vergleicht man die differierenden Preise absolut miteinander, kann die Bewertung nicht unabhängig von der Frage der Anpassungsgüte untersucht werden. Um die Effekte der In-Sample Anpassungsgüte in dieser Untersuchung zu schmälern, werden die absoluten Preise der exotischen Optionen zusätzlich mit einer zugehörigen Plain-Vanilla Option des jeweiligen Modells normiert. Als Normierung wird dabei jeweils eine Plain-Vanilla Option mit demselben Strike der exotischen Option gewählt.

Zu Beginn der folgenden Abschnitte werden asiatische, Forward Start, Lookback und Barrier Optionen definiert, ihre Besonderheiten herausgestellt und ihre Anwendungsmöglichkeiten mit Beispielen beschrieben. Anschließend werden mit den bei der Kalibrierung ermittelten Modellparametern aus Abschnitt 5.4 diese vier verschiedenen exotischen Optionstypen bewertet und die resultierenden Preise dargestellt. Aufgrund der unterschiedlichen impliziten Prozessinformationen aus den spezifischen Modellparametern liefert jedes Modell verschiedene Preise für die gleiche exotische Option, bei der sonst alle Eckdaten unverändert bleiben.

7.2 Asiatische Optionen

Unter der Bezeichnung „asiatischer“ Option wird eine Schar verschiedener Derivate zusammengefasst. Alle Optionen dieser Art haben gemeinsam, dass sich die Auszahlung aus einem Durchschnittswert des Basiswertes ergibt. Wie bei allen Optionstypen gibt es auch bei asiatischen Optionen die Unterteilung in amerikanische und europäische Typen. Im Folgenden wird nur die Ausübung zum Laufzeitende zugelassen und somit in Konsistenz zu den vorangegangenen Kapiteln nur europäische Optionen betrachtet.

Der diskrete arithmetische Durchschnittskurs \overline{S}_T^d des Basiswertes entspricht dem arithmetischen Mittel

$$\overline{S}_T^d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(t_i)$$

für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Ersetzt man das arithmetische durch das geometrische Mittel, ergibt sich der diskrete geometrische Kurs entsprechend aus

$$\widehat{S}_T^d = \left(\prod_{i=1}^N S(t_i) \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Einen kontinuierlichen Durchschnitt erhält man durch Integrieren des Basiswertes über die Zeit

$$\overline{S}_T^c = \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du.$$

Da in der Praxis vorwiegend der diskrete arithmetische Typ gehandelt wird, ist im Folgenden stets das arithmetische Mittel $\overline{S}_T = \overline{S}_T^d$ zur Berechnung zugrunde gelegt.

Eine weitere Einteilung der asiatischen Optionen erfolgt in „fixed Strike“ und „floating Strike“ Option. Bei der „fixed Strike“ oder auch „average Price“ Variante wird bei Vertragsabschluß wie beim Plain–Vanilla Typ ein fester Strike K vereinbart, aber bei der Call–Auszahlung anstatt vom Schlusskurs S_T vom Durchschnittswert $\overline{S_T}$ abgezogen:

$$C_T^{\text{fix}} = \max \{ \overline{S_T} - K, 0 \}. \quad (7.1)$$

Bei der „floating Strike“ oder auch „average Strike“ Option tritt der Durchschnittskurs $\overline{S_T}$ an die Stelle des Strikes K . Der Payoff eines Calls³ hat dann die Form

$$C_T^{\text{float}} = \max \{ S_T - \overline{S_T}, 0 \}.$$

Henderson und Wojakowski [75] sowie Eberlein und Papapantoleon [55] zeigen eine Symmetrie zwischen floating und fixed Strike Optionen im Rahmen des CV Modells. Die Kenntnis der Symmetrie kann bei der Berechnung der Optionspreise auf zwei Arten zunutze gemacht werden. Zum einen genügt es einen der beiden Typen fixed oder floating Strike zu implementieren und sowohl Call als auch Put zu berechnen. Den anderen Typen erhält man durch die entsprechende Transformation. Die andere Möglichkeit erlaubt eine reine Call–Betrachtung, da die Eigenschaften der Puts implizit mit überprüft werden. Da bei der Kalibrierung in Kapitel 5 ausschließlich Marktpreise von Calls eingeflossen sind, ist es konsistent, bei der Untersuchung der exotischen Optionen ebenfalls Calls zu verwenden.

Asiatische Optionen sind günstiger als entsprechende Plain–Vanilla Optionen, da das Risiko der asiatischen Optionen durch bekannte historische Kurse innerhalb der Laufzeit abnimmt. Die Volatilität vom Durchschnittskurs des Basiswertes ist geringer als die Volatilität des Basiswertes selbst. Damit geht der Käufer einer asiatischen Option weniger Risiko ein als beim Kauf einer Plain–Vanilla Option. Gleichzeitig ist aber auch das Gewinnpotential einer asiatischen Option geringer, was insgesamt zu einer niedrigeren diskontierten erwarteten Auszahlung als bei der Plain–Vanilla Option führt.

Der Ursprung asiatischer Derivate liegt im Devisenhandel. Nach Vorst [129] stammt der Name „asiatisch“ für diese spezielle Art von Option von Bankmitarbeitern, die auf Anfrage von japanischen Managern solche Verträge ausarbeiteten. Die Japaner hatten Interesse an asiatischen Optionen, da die Höhe ihres Gehalts unter anderem vom durchschnittlichen Yen–US–Dollar Wechselkurs bestimmt wurde. Mit herkömmlichen Termingeschäften, bei denen der Wechselkurs für den Käufer für eine bestimmte Zeitspanne festgelegt ist, kann sich der Käufer gegen eine nachteilige Wechselkursveränderung schützen. Im Gegenzug kann er aber nicht von einer durchschnittlich positiven Änderung profitieren. Möchte sich z.B. ein japanischer Manager gegen das Wechselkursrisiko auf den durchschnittlichen Devisenkurs absichern, ist er mit einer asiatischen fixed Strike Put–Option vollständig geschützt. Legt

³Die entsprechenden Auszahlungen asiatischer Puts sowie aller weiteren exotischen Put–Optionen ergeben sich jeweils durch Multiplikation mit -1 .

er als Strike den aktuellen Wechselkurs fest, kann er bei Fälligkeit von seinem Optionsrecht Gebrauch machen, wenn der durchschnittliche Wechselkurs bei Optionsfälligkeit geringer ist als der Strike. Auf die gleiche Weise können asiatische Optionen z.B. zur Absicherung gegen Veränderungen im zeitlichen Mittel bei Zinsgeschäften eingesetzt werden.

Asiatische Optionen werden ebenfalls eingesetzt, wenn der Käufer starke Schwankungen im Basiswert erwartet. Rechnet zum Beispiel ein Käufer eines Calls nach langem Aufwärtstrend mit einem plötzlich fallenden Kurs am Ende der Optionslaufzeit aufgrund eines besonderen Ereignisses, kann mit einem asiatischen Call das Risiko von Kursverlusten kurz vor Fälligkeit minimiert werden. Zahlreiche weitere Anwendungsbeispiele⁴ betonen die Vielseitigkeit dieser exotischen Option und unterstreichen die Bedeutung einer korrekten Bewertung solcher Derivate. Aus diesen Gründen werden die zwei Arten fixed Strike und floating Strike Call-Option im Folgenden empirisch untersucht.

In Abbildung 7.1 sind die Zeitreihen der Optionspreise⁵, die sich nach der Methode aus Abschnitt 7.1 für alle zehn Modelle in Abschnitt 3.6 ergeben, für eine fixed Strike und eine floating Strike asiatische Call-Option mit Laufzeit $T = 0,5$ dargestellt. Die fixed Strike Option ist dabei jeweils für die festen Strikes $K = k \cdot S_0$ mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$ und (c) $k = 1,1$ bewertet. Da der Basiswert der asiatischen Optionen konsequenterweise der DAX ist, eignet sich die Zeitreihendarstellung⁶ besonders gut zum Vergleich mit dem Verlauf des DAX nach Abbildung 5.3 sowie zur näheren Betrachtung einzelner Marktphasen.

Für asiatische Optionen im-Geld mit (a) $k = 0,9$ in Abbildung 7.1 liegen die Preise der zehn Bewertungsmodelle in einem engen Band. Lediglich für die Marktphase der stark fallenden Kurse zwischen Handelstag 100 und 200 unterscheiden sich die Preise der Modelle CV und CVJ deutlich von den Preisen der Modelle mit stochastischer Volatilität, die in den Abbildungen stets mit „SVs“ abgekürzt werden. Insgesamt bildet der Verlauf der Preise dieser Option exakt den Verlauf des Basiswertes DAX aus Abbildung 5.3 nach.

Auffallend anders ist hingegen der Preisverlauf der asiatischen Option am-Geld mit (b) $k = 1$. Die Preise der Modelle streuen wesentlich mehr, wobei in der bereits angesprochenen kritischen Marktphase zwischen Handelstag 100 und 200 die Preise in einem Band mit bis zu 100 Einheiten auseinander liegen. Für asiatische Optionen aus-dem-Geld mit (c) $k = 1,1$ verstärkt sich dieser Effekt abermals. Dass die Preise der Modelle mit stochastischer Volatilität in dieser Marktphase höher sind als die von CV und CVJ, ergibt sich aus einem höheren Mittelwert $\overline{S_T}$ dieser Modelle in Gleichung (7.1).

⁴Vgl. Sandmann[115].

⁵Die Optionspreise sowie alle folgenden Modellrechnungen wurden mit Monte Carlo Simulation nach Abschnitt 4.2 bewertet. Dabei wurden 100.000 Simulations-Pfade mit 250 Zeitschritte pro Jahr verwandt.

⁶Im Folgenden sind nicht alle Zeitreihen der Optionen, die innerhalb dieser Studie bewertet wurden, wiedergegeben. Es handelt sich vielmehr um eine Auswahl besonders relevanter Darstellungen mit neuem Inhalt. Auf wiederholende Präsentation wird dabei verzichtet.

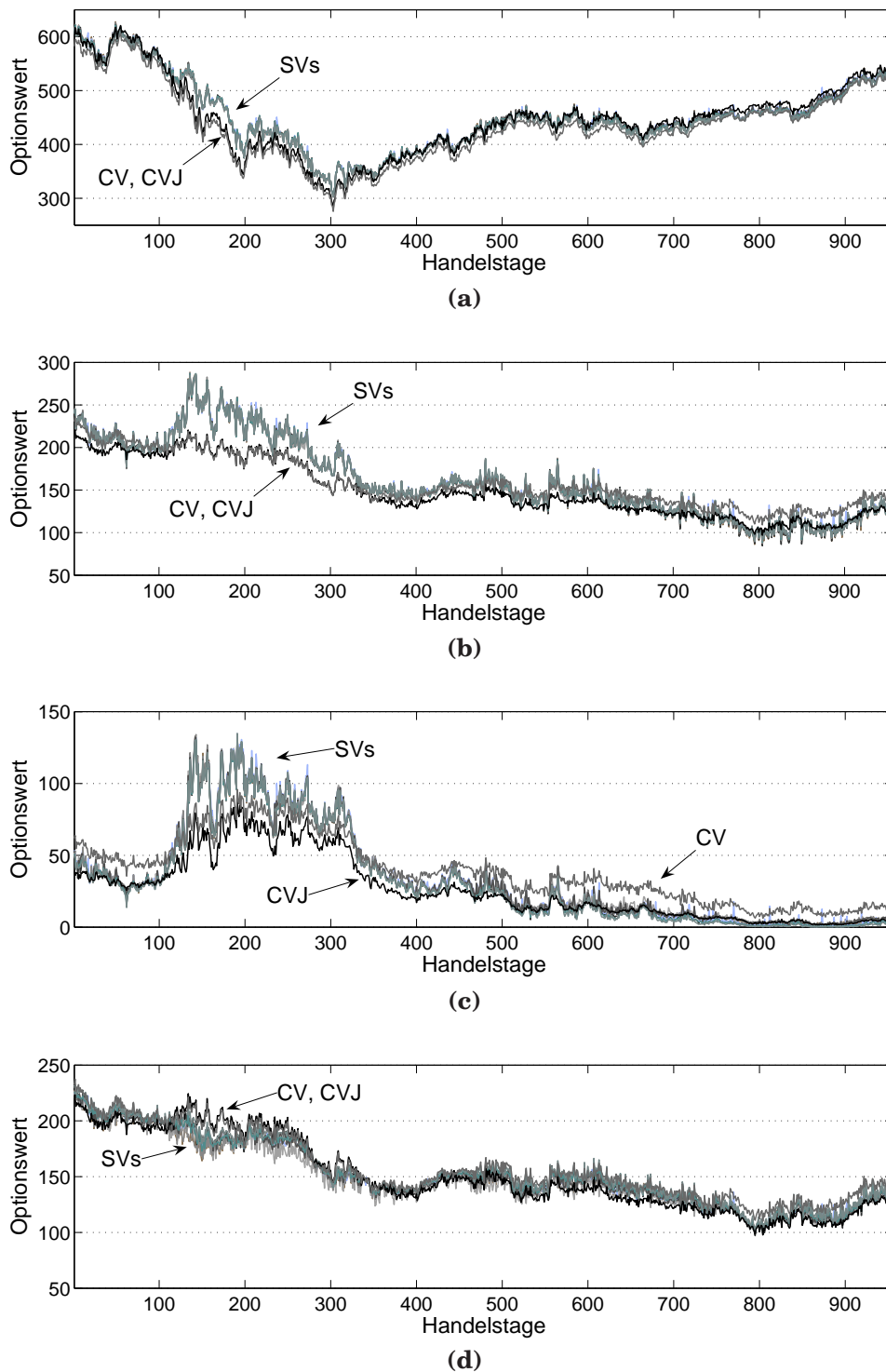


Abbildung 7.1: Absolute Optionspreise für $T = 0,5$ einer fixed Strike asiatischen Call-Option mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ und einer floating Strike asiatischen Call-Option (d) über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

In Abbildung 7.1 (c) tritt darüber hinaus in der Zeit der Seitwärtsbewegung des Marktes

ab Handelstag 600 das Phänomen auf, dass die Preise des CV Modells überdurchschnittlich hoch sind. Teilweise sind hier die Preise doppelt so hoch wie die der anderen Modelle, so dass in diesem Fall der Durchschnitt $\overline{S_T}$ vom CV Modell am höchsten bewertet wird.

Die Verläufe der Zeitreihen der floating Strike asiatischen Call-Option in Abbildung 7.1 (d) bewegen sich in einem schmalen Band. Die größten Differenzen der Preise liegen auch bei diesem Optionstyp in der Marktphase der stark fallenden Kurse des Basiswertes.

Abbildung 7.2 enthält die in Abschnitt 7.1 eingeführten normierten Optionspreise. Als normierende Plain-Vanilla Call-Option wird bei sonst gleichbleibenden Eckdaten die Option verwandt, bei der der Endkurs S_T anstatt des Mittelwertes $\overline{S_T}$ in den Payoff eingesetzt wird. Da diese Option ein größeres Risiko enthält, ist sie teurer als die asiatische Option, so dass die normierten Optionspreise unterhalb der Eins liegen.

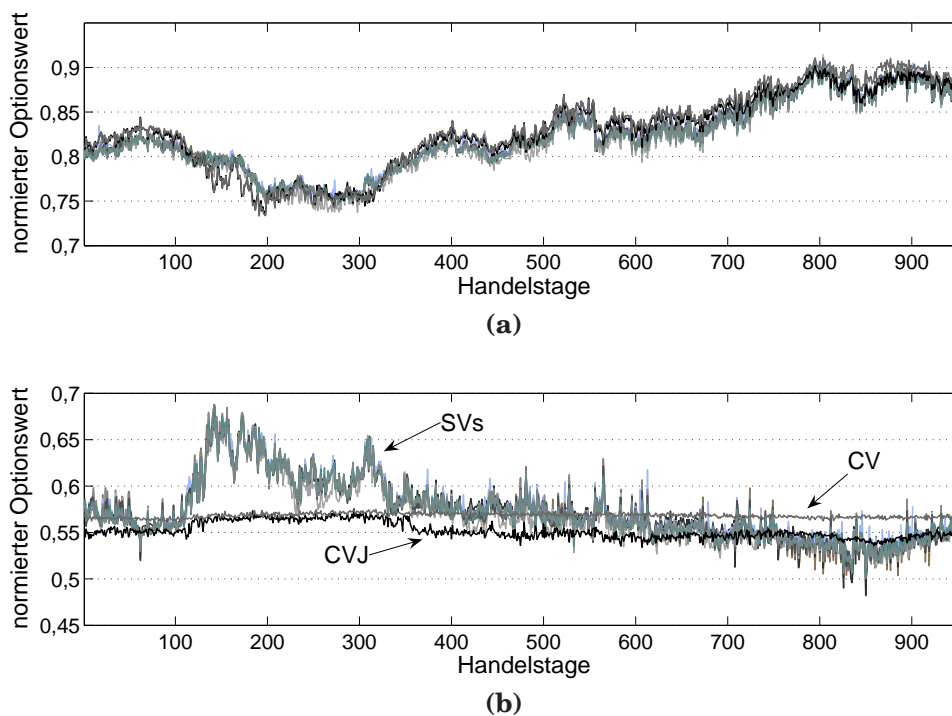


Abbildung 7.2: Normierte Optionspreise einer fixed Strike asiatischen Call-Option für $T = 0,5$ mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

In Abbildung 7.2 (a) streuen die normierten Preise für Optionen im-Geld mit $k = 0,9$ wenig. Für Optionen am-Geld mit $k = 1$ in Diagramm (b) ist jedoch der Verlauf für das CV und CVJ Modell stark von dem der Modelle mit stochastischer Volatilität verschieden.

Über die angegebenen asiatischen Optionen hinaus wurden für die längere Laufzeit $T = 1$ fixed Strike Call-Optionen mit $k = [0,8 \ 0,9 \ 1 \ 1,1 \ 1,2]$ sowie die entsprechende floating Strike Call-Option berechnet. Da die resultierenden Zeitreihen sich im Wesentlichen nicht

von den bereits gezeigten unterscheiden, wird hier auf eine weitere Darstellung verzichtet. Die Ergebnisse fließen jedoch in die Sensitivitätsuntersuchung des Modellrisikos bezüglich der Länge der Laufzeit in Kapitel 9 ein.

7.3 Forward Start Optionen

Bei „Forward Start“ Optionen wird der Strike nicht zu Beginn der Laufzeit in t_0 , sondern erst zu einem vereinbarten späteren Zeitpunkt $T_1 > t_0$ festgelegt, wobei T_1 zeitlich vor dem Fälligkeitszeitpunkt T_2 der Option liegen muß. Im Allgemeinen wird der Strike in T_1 als ein Vielfaches $k \cdot S_1$ vom dann aktuellen Basiswert S_1 zur Zeit T_1 bestimmt und der Faktor k im Vorfeld fixiert. Eine Forward Start Call-Option hat somit die Auszahlung

$$C_{T_2}^{\text{float}} = \max \{S_2 - kS_1, 0\}.$$

Gilt zum Beispiel $k = 1$, wird in T_1 der derzeitige Kurs S_1 zum Strike und die Option erhält den Charakter einer Option am-Geld. Für $k < 1$ beginnt die Call-Option im-Geld und entsprechend für $k > 1$ aus-dem-Geld.

Forward Start Optionen finden Anwendung bei Optionen auf Belegschaftsaktien, den „Employee Stock“ Optionen. Zu Beginn seiner Tätigkeit bekommt ein Arbeitnehmer Optionen auf Unternehmensaktien, deren Strike vorerst offen bleibt. Nach Ablauf bestimmter Fristen, zum ersten Mal zum Zeitpunkt T_1^1 , bietet das Unternehmen dem Arbeitgeber an, in Zukunft in regelmäßigen Abständen zu Zeitpunkten T_2^i , $i = 1, 2, \dots$, Aktien zu erhalten, wenn er jeweils seine Tätigkeit an T_1^i bei dem Unternehmen fortsetzt. Stimmt der Arbeitnehmer zu, wird der Strike seiner Option in T_1^i auf einem am-Geld Level festgelegt. Nach Ablauf der ersten Option bekommt der Arbeitgeber eine neue Forward Start Option. Dieses Verfahren wiederholt sich solange, bis Arbeitgeber oder Arbeitnehmer den Vertrag auflösen. Bei einer leistungsabhängigen Entlohnung von Arbeitgebern spielen Belegschaftsaktien eine immer größere Rolle. Daher werden Forward Start Optionen als typische exotische Optionen der empirischen Studie hinzugefügt.

Analog zu den asiatischen Optionen sind in Abbildung 7.3 die Zeitreihen der Optionspreise für Forward Start Call-Optionen mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$ sowie (c) $k = 1,1$ für die Laufzeit $T_1 = 0,5$, $T_2 = 1$ abgetragen. Die Preise streuen im-Geld mit $k = 0,9$ am wenigsten und folgen in der Form auffallend stark dem Kurs des Basiswertes. Preise für Forward Start Optionen am-Geld mit $k = 1$ differieren von Modell zu Modell stärker, wobei sie in der Marktphase stark fallender Kurse im Basiswert bis zu 100 Einheiten auseinander liegen können. Im Gegensatz zu den asiatischen Optionen aus-dem-Geld, schließt sich diese Schere jedoch für Optionen aus-dem-Geld wieder, während die Preise des CV Modells zu allen weiteren Zeiten stark oberhalb der Preise des CVJ Modells sowie der Modelle mit stochastischer Volatilität liegen.

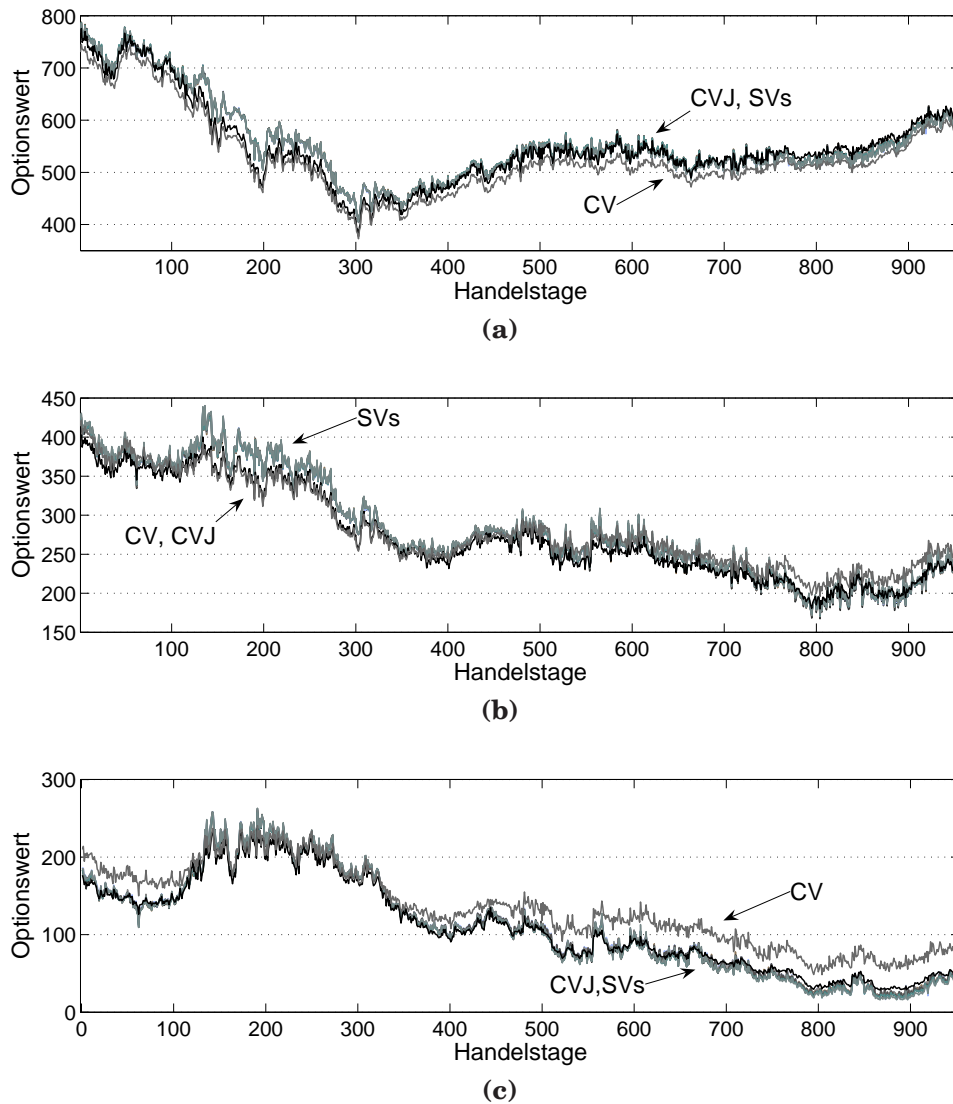


Abbildung 7.3: Absolute Optionspreise einer Forward Start Call-Option für $T_1 = 0,5$, $T_2 = 1$ mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Als ein Beispiel für die normierten Optionspreise der Forward Start Optionen, ist in Abbildung 7.4 die Zeitreihe für $k = 0,9$ wiedergegeben. Für diesen Optionstyp dient die Plain-Vanilla Option mit Laufzeit T_2 als Norm, für die $T_1 = t_0$ gilt und somit der Strike bereits mit Kenntnis von S_0 feststeht. Diese Option ist teurer als die echte Forward Start Option mit $T_1 > t_0$, wodurch die normierten Optionspreise kleiner sind.

Die Optionspreise gehen in dieser Darstellung auffallend stark in der Phase der hohen Volatilität auseinander. Während die normierten Preise für die Modelle mit stochastischer Volatilität steigen, fallen sie für das CV und CVJ Modell. Somit steigt in Zeiten höherer Volatilität der Call-Optionspreis im CV und CVJ Modell an, während er für die Modelle mit

stochastischer Volatilität fällt.

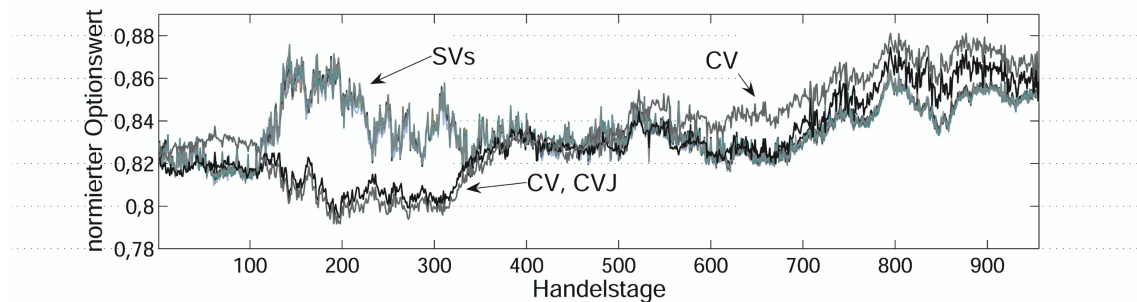


Abbildung 7.4: Normierte Optionspreise einer Forward Start Call-Option für $T_1 = 0,5$, $T_2 = 1$ mit $k = 0,9$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Wie bereits für die asiatischen Optionen erwähnt, wurden ebenfalls Forward Start Optionen mit einer längeren Laufzeit $T_1 = 0,75$, $T_2 = 1,5$ für $k = [0,8 \ 0,9 \ 1 \ 1,1 \ 1,2]$ berechnet, jedoch ohne explizite Darstellung der Optionspreis-Zeitreihen, um diesen Optionstyp auf die Auswirkungen der Laufzeit auf das Modellrisiko in Kapitel 9 zu untersuchen.

7.4 Lookback Optionen

Bei „Lookback“ Optionen ist die Auszahlung vom maximalen bzw. minimalen Kurswert des Basiswertes während der Optionslaufzeit abhängig. Zur Fälligkeit der Lookback Option schaut der Käufer auf den Kursverlauf des Basiswertes zurück⁷ und bestimmt mit Maximum bzw. Minimum des Kurses seinen Gewinn.

Auf dem Markt sind zwei verschiedene Varianten der Lookback Option üblich. Die eine ist die „fixed Strike“ Lookback Option, bei der ein Strike K im Vorfeld festgelegt wird. Zusammen mit dem Kursmaximum S_{\max} innerhalb der Optionslaufzeit ergibt sich die Auszahlung

$$C_T^{\text{fix}} = \max \{S_{\max} - K, 0\} \quad (7.2)$$

für einen Call.

Die zweite typische Lookback Option ist die „floating Strike“ Option, die an Stelle eines festen Strikes Kursmaximum bzw. Kursminimum betrachtet:

$$C_T^{\text{float}} = \max \{S_T - S_{\min}, 0\}. \quad (7.3)$$

Eine Symmetrie zwischen fixed und floating Strike Option, wie sie in Abschnitt 7.2 für die asiatischen Optionen beschrieben wurde, ist nach Eberlein und Papapantoleon [55] im CV Modell auch für die Lookback Optionen bekannt. Aussagen zur Berechnung von Calls

⁷Englisch: to look back.

oder Puts bei den asiatischen Optionen lassen sich somit auf die Untersuchung der Lookback Option übertragen.

Durch die Konstruktion der Auszahlungen (7.3) kann diese Option niemals aus-dem Geld sein. Diese Eigenschaft führt dazu, dass eine floating Strike Lookback Option in der Regel teurer ist als ihr Plain-Vanilla Pendant. In welchen Fällen Lookback Optionen dennoch gehandelt werden und warum die Untersuchung der Bewertung lohnenswert ist, zeigt folgendes Beispiel.

Ein Investor möchte mit dem Kauf einer Call-Option, deren Strike dem aktuellen Basiswert entsprechen soll, in den Markt eintreten, da er annimmt, dass der Wert eines bestimmten Basiswertes nach Kursverlusten in naher Zukunft stark steigt. Im Gegenzug kann er jedoch nicht einschätzen, wann der Wendepunkt im Kursverlauf erreicht ist und der Anstieg beginnt. Dieses Markteintritts-Problem kann der Investor mit dem Kauf einer floating Strike Lookback Option umgehen, da am Ende der Laufzeit automatisch der niedrigste Kurs der gesamten Laufzeit als Strike eingesetzt wird.

Analog kann ein Investor mit einer fixed Strike Lookback Option das Marktaustritts-Problem lösen. Zum Beispiel steigt zunächst der Kurs des Basiswertes, wie vom Investor angenommen, stark an, aber noch vor Laufzeitende der Call-Option wird ein erneuter Wendepunkt erreicht und der Kurs beginnt zu sinken. Hat sich der Investor in diesem Fall bei der Wahl der Laufzeit nur um kurze Zeit verschätzt, kann ein Großteil seines möglichen Gewinns, trotz guter Marktkenntnis, nicht realisiert werden. Da Lookback Optionen eine Lösung für das Marktein- und austrittsproblem darstellen, werden ihre Bewertungen im Folgenden in die empirische Untersuchung aufgenommen.

Waren für die bisher betrachteten exotischen Optionen, wie asiatische und Forward Start Option, die Optionspreise der Modelle für Optionen im-Geld wenig streuend, so gilt dies nicht mehr für die fixed Strike Lookback Call-Option in Abbildung 7.5 (a). In allen Moneyness-Kategorien (a), (b) und (c) liegt der Preis des CV Modells deutlich über den Preisen der restlichen Modelle. Die Ursache für diese Beobachtung liegt darin, dass die Werte für S_{\max} in Gleichung (7.2) des CV Modells stets größer sind als die Werte der anderen Modelle für den maximalen Kurs innerhalb der Laufzeit.

Bei der floating Strike Lookback Option in Abbildung 7.5 (d) ist diese Beobachtung nicht festzustellen. Für diese Option liegen allerdings die Preise des CVJ Modells unterhalb des Bandes der Optionspreise des CV Modells und der Modelle mit stochastischer Volatilität, was durch ein größeres S_{\min} in Gleichung (7.3) innerhalb des CVJ Modells erklärt wird.

Als normierende Option für die Lookback Call-Optionen werden die Plain Vanilla Optionen gewählt, die anstelle des Kursmaximums oder -minimums den Endkurs S_T im Payoff enthalten, während alle weiteren Kenngrößen unverändert bleiben. Da diese Optionen

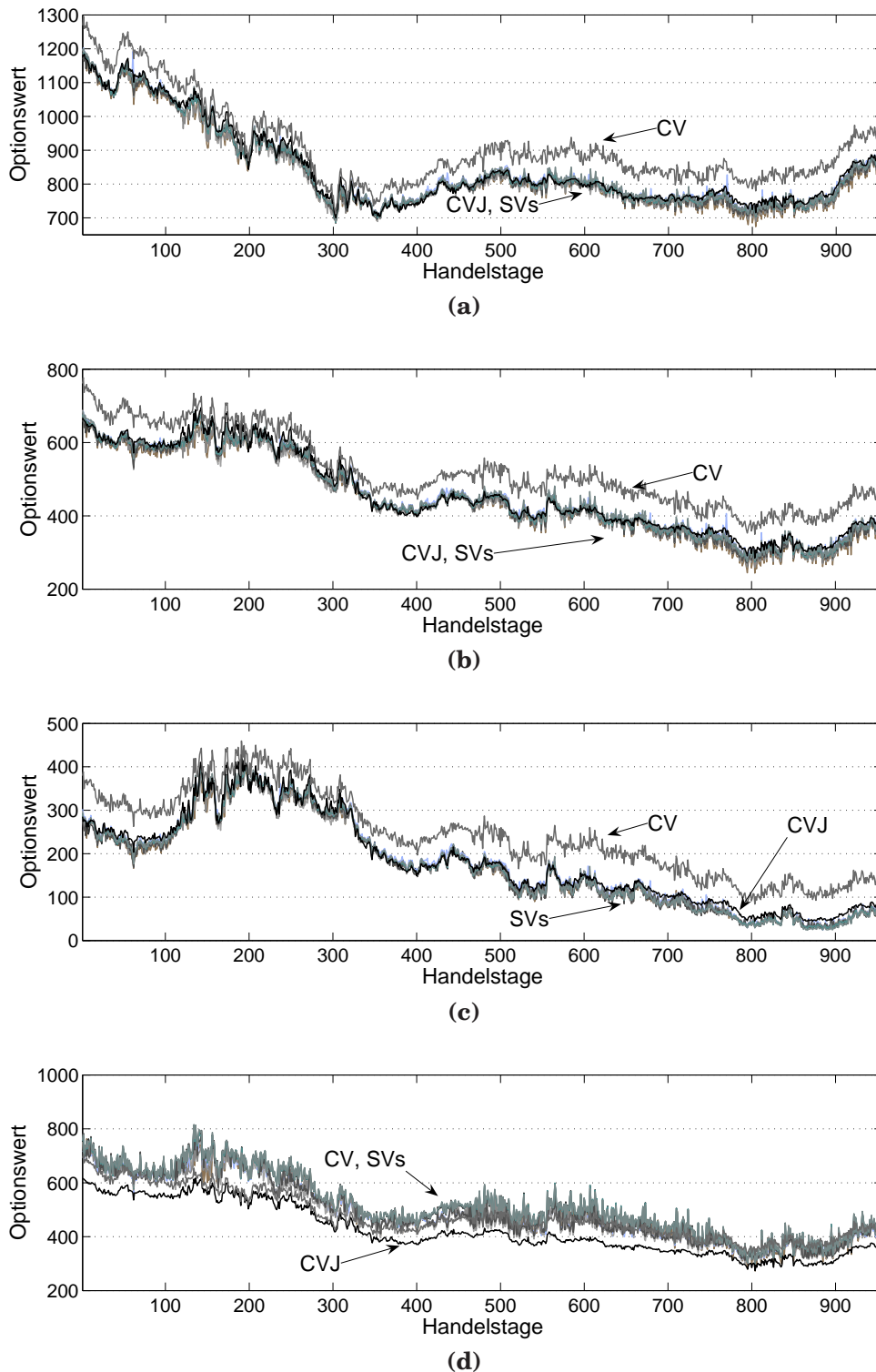


Abbildung 7.5: Absolute Optionspreise für $T = 0,5$ einer fixed Strike Lookback Call-Option mit (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ und einer floating Strike Lookback Call-Option (d) über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

günstiger sind als die Lookback Optionen, liegen die normierten Preise für die fixed Strike

Option mit $T = 0,5$ und $k = 0,9$ in Abbildung 7.6 oberhalb von eins.

Die normierten Optionspreise des CV Modells liegen zu jeder Zeit wesentlich über denen der weiteren Modelle, während sich die Werte des CVJ Modells nur in der Marktphase der fallenden Kurse von den Werten der Modelle mit stochastischer Volatilität unterscheiden.

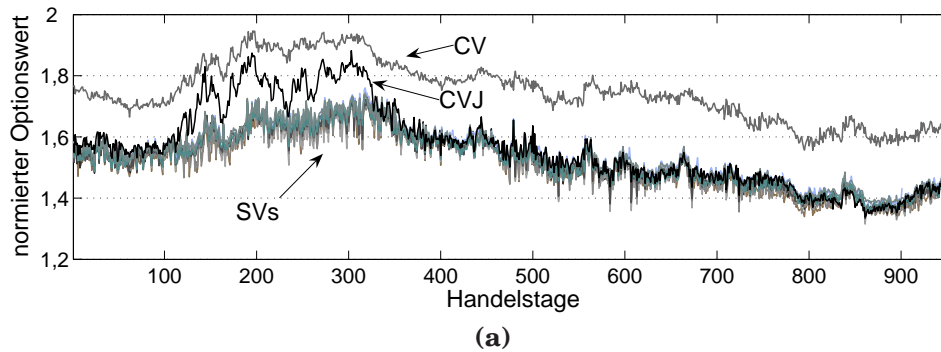


Abbildung 7.6: Normierte Optionspreise einer fixed Strike Lookback Call-Option für $T = 0,5$ mit $k = 0,9$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Über die Fälligkeit $T = 0,5$ hinaus wurden Lookback Call-Optionen mit Laufzeit $T = 1$ für $k = [0,8 \ 0,9 \ 1 \ 1,1 \ 1,2]$ berechnet, die in Kapitel 9 zur Untersuchung dieses Optionstyp auf Modellrisiko dienen.

7.5 Barrier Optionen

Optionen, die abrupt wertlos werden bzw. einen echt positiven Wert erhalten, wenn der Basiswert eine bestimmte Kursschranke durchbricht, werden mit dem Oberbegriff „Barrier“ Optionen bezeichnet. Barrier Optionstypen gehören zum einen zu den ältesten und zum anderen zu den verbreitetsten exotischen Optionen.⁸

Eine „Up-and-Out“ (im Folgenden: UOB) Barrier Option hat dasselbe Auszahlungsprofil wie die entsprechende Plain-Vanilla Option, solange der Kurs des Basiswertes eine vertraglich vereinbarte Schranke nicht überschreitet. Passiert der Kurs jedoch zu einem beliebigen Zeitpunkt bis zur Fälligkeit diesen Schwellenwert, verliert die UOB Option unwiederbringlich ihren Wert. Damit hat eine UOB Call-Option mit Barrier B , Fälligkeit T und Strike K die Auszahlung

$$C_T^{\text{UOB}} = \mathbf{1} \left\{ \tau_B^{\text{Up}} > T \right\} \max \{ S_T - K, 0 \},$$

wobei

$$\tau_B^{\text{Up}} = \inf \{ t_i : S_{t_i} < B \},$$

⁸Vgl. z.B. Thomas[125].

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, $i = 0, \dots, n$ und $\mathbf{1}\{\cdot\}$ die Indikatorfunktion repräsentiert. Der durch τ_B^{Up} definierte Zeitpunkt bedeutet, dass die Indikatorfunktion den Wert Null bekommt, sobald die Schranke zum ersten Mal überschritten wird. Der weitere Kursverlauf nach dem Zeitpunkt τ_B^{Up} ist für die Option irrelevant, da sie nicht wieder an Wert gewinnen kann.

Eine „Down-and-Out“ (im Folgenden: DOB) Barrier Option funktioniert analog zu der UOB Option mit der Ausnahme, dass diese Option eine Auszahlung von Null bekommt, wenn der Basiswert ein festes Kursniveau nach unten durchbricht. Es gilt für

$$\tau_B^{\text{Down}} = \inf\{t_i : S_{t_i} > B\}$$

mit den restlichen Bezeichnungen wie oben

$$C_T^{\text{DOB}} = \mathbf{1}\{\tau_B^{\text{Down}} > T\} \max\{S_T - K, 0\}.$$

Sowohl die UOB als auch DOB Optionen werden bei Eintreten des jeweiligen Ereignisses „ausgeschaltet“. Optionen dieser Art werden auch unter der Bezeichnung „Knock-Out“ Optionen zusammengefasst.⁹

Im Gegensatz dazu werden „Knock-In“ Optionstypen erst bei Erreichen der Barriere aktiviert bzw. „eingeschaltet“ und sind zuvor wertlos. Zu diesen „Knock-In“ Optionen gehören die „Up-and-In“ (im Folgenden: UIB) und die „Down-and-In“ (im Folgenden: DIB) Barrier Option mit den Auszahlungen

$$\begin{aligned} C_T^{\text{UIB}} &= \mathbf{1}\{\tau_B^{\text{Up}} \leq T\} \max\{S_T - K, 0\}, \\ C_T^{\text{DIB}} &= \mathbf{1}\{\tau_B^{\text{Down}} \leq T\} \max\{S_T - K, 0\}, \end{aligned}$$

so dass alleine die Grundformen vier Varianten für Barrier Call-Optionen umfasst.

In den obigen Auszahlungsprofilen wird für die Wahl $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ der Basiswert S_{t_i} an diskreten Zeitpunkten ausgewertet, ob der Kurs des Basiswertes die Barriere überschritten hat oder nicht. Diese Variante wird daher „Discretely Monitored“ Barrier Option genannt. Erfolgt die Überprüfung in jedem Fall kontinuierlich, verdoppeln sich die Grundformen durch die „Continuously Monitored“ Barrier Optionen. Dazu werden die diskreten Zeitpunkte durch stetige Zeiten

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_B^{\text{Up}} &= \inf\{\exists t \in [0, T] \text{ mit } S_t < B\} \text{ bzw.} \\ \tilde{\tau}_B^{\text{Down}} &= \inf\{\exists t \in [0, T] \text{ mit } S_t > B\} \end{aligned}$$

ersetzt.¹⁰

⁹In der Praxis kann bei Knock-Out Optionen ein „Rebate“, eine feste Rückvergütung vom Stillhalter an den Käufer, vereinbart werden, falls der Basiswert die Schranke durchbricht. Da nach Wallmeier[130] die Modellierung eines Rebates „keine wesentlich neuen Erkenntnisse“ bringt, werden Rebates im Folgenden nicht betrachtet.

¹⁰Für Continuously Monitored Barrier Optionen im CV Modell sind analytische Bewertungsformeln bekannt. Vgl. z.B. Thomas[125].

Für die empirische Untersuchung werden im Folgenden diskrete Barrier Optionen betrachtet, die in jedem Modell mit Monte Carlo Simulation bewertet werden können. Dabei wird in einem pfadweisen Vorgehen an jedem diskreten Zeitpunkt überprüft, ob die Schranke durchbrochen wurde. Abhängig von diesem Ergebnis wird die Auszahlung sofort auf Null gesetzt oder die Bedingung zum nächsten Zeitpunkt ausgewertet. Am Ende der Laufzeit werden die einzelnen Auszahlungen, wie bei der Monte Carlo Methode für Standardoptionen, addiert und gemittelt.

Da der Basiswert nur an bestimmten Kontrollzeitpunkten mit der Kursschwelle verglichen wird, gehen die Kursverläufe zwischen den Zeitpunkten nicht in die Bewertung ein. Zwischenzeitliche Über- bzw. Unterschreitungen des Schwellenwertes bleiben unberücksichtigt. Für größere Abstände zwischen den Kontrollzeitpunkten gewinnt eine Knock-Out Option an Wert und wird somit überschätzt, da die Wahrscheinlichkeit einer Schrankenüberschreitung geringer wird. Bei Knock-In Optionen führen große Abstände zu einer Unterschätzung des Wertes. Durch Wahl kleinerer Zeitschritte kann der Fehler reduziert werden, jedoch nur für den Preis eines erhöhten Rechenaufwands.

Barrier Optionen haben nach Konstruktion für einige Kursbereiche des Basiswertes eine Auszahlung von Null, während Plain-Vanilla Optionen auf dem ganzen Kursspektrum aktiv sind. Allein durch diesen einfachen Sachverhalt ist es intuitiv, dass Barrier Optionen im Allgemeinen günstiger sein müssen als ihr gleich ausgestattetes Plain-Vanilla Pendant, dessen Payoff weniger Restriktionen enthält. Daher sind Barrier Optionen für viele Absicherungs- und Spekulationsstrategien eine kostengünstigere Alternative zu Standardoptionen.

Möchte sich z.B. ein Unternehmer für ein zukünftiges Geschäft in ausländischer Währung gegen das Wechselkursrisiko absichern, kann er dieses durch den Kauf einer Plain-Vanilla Put-Option auf die ausländische Währung tun. Wählt er den Strike so, dass sich die Option zum Kaufzeitpunkt am-Geld befindet, ist der Preis für diese Option vergleichsweise hoch. Der Unternehmer beobachtet den Devisenmarkt und tauscht vorzeitig einen Betrag der ausländischen Währung um, wenn bis zum Abschluss seines Geschäfts der Wechselkurs stark steigt und das Tauschverhältnis für ihn günstiger wird. In diesem Fall wird die Put-Option vom Unternehmer nicht mehr benötigt, da er sich durch den frühen Kauf selbst abgesichert hat. Da aber bei einer Plain-Vanilla Option der Pfad des Basiswertes unbeachtet bleibt und nur der Schlusskurs zur Fälligkeit von Interesse ist, stellt eine UOB Put-Option für den Unternehmer die günstigere Alternative dar.

Kennt ein Investor Kursintervalle, für die er keine Sicherung durch Optionen benötigt, weil er sie z.B. durch andere Strategien abdecken kann, trifft er mit dem Kauf einer Barrier Option die preiswertere Entscheidung.

Ist die Höhe von Strike und Barrier identisch gewählt, ergibt sich eine weitere Interpretation dieser exotischen Option. Im weitesten Sinne entspricht dann eine Barrier Option einem

Wertpapierkredit auf den Basiswert, da ein Käufer z.B. einer DOB Call-Option theoretisch den Basiswert kauft, aber zunächst nur die Differenz zwischen dem aktuellen Kurs und dem Strike selbst finanziert. Den restlichen Wert des Basiswertes erhält der Käufer vom Stillhalter in Form eines Kredits, für den der Käufer durch den Optionspreis bezahlt. Obwohl der Käufer nicht das ganze Wertpapier gekauft hat, profitiert er durch den Wertpapierkredit doch genauso an dessen Wertsteigerungen bzw. verliert bei Kursverlusten. Als Sicherheit des Kredits erhält der Stillhalter quasi den Basiswert. Fällt dieser unter die vereinbarte Schwelle, wäre der Kredit nicht mehr gedeckt. Da jedoch zu diesem Zeitpunkt die DOB Option verfällt, ist der Wertpapierkredit ebenfalls beendet.

Wird bei Knock-Out Optionen die Schranke B immer größer gewählt, nähert sich der Preis der UOB Option der entsprechenden Plain-Vanilla Option an. Für $B \rightarrow \infty$ heben sich die Unterschiede ganz auf und die Optionen sind identisch. Derselbe Sachverhalt gilt für Knock-In Optionen, wenn die Kursschwelle B immer näher an den aktuellen Basiswert gelegt wird. Besitzt ein Investor auf einen Basiswert eine Knock-In und die entsprechende Knock-Out Option, so bildet sein Portfolio am Ende der Laufzeit den Payoff der Standardoption mit

$$\begin{aligned} \text{Plain-Vanilla Call} &= \text{UOB Call} + \text{UIB Call}, \\ \text{Plain-Vanilla Call} &= \text{DOB Call} + \text{DIB Call}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

nach, was auch als „In-Out Parität“ von Barrier Funktionen bezeichnet wird.¹¹

Es genügt somit einen der beiden Typen zu betrachten, da auf die andere Variante nach Formel (7.4) leicht geschlossen werden kann. Im Folgenden werden daher nur die Ergebnisse der empirischen Untersuchung für UOB und DOB Optionen wiedergegeben.¹²

Die Abbildungen 7.7 (a) und (b) zeigen demnach die Zeitreihen der Optionspreise aller Modelle einer UOB Call-Option, während die Diagramme (c) und (d) die Preise einer DOB Call-Option, für jeweils zwei unterschiedliche Schranken, enthalten. Die Laufzeit der Optionen beträgt einheitlich $T = 0,5$. Der Strike mit $K = 1 \cdot S_0$ ist in allen Fällen identisch zum aktuellen Kurs des Basiswertes am-Geld gewählt. Die Barrier B ist stets als Vielfaches vom Basiswert S_0 mit $B = b \cdot S_0$ angegeben. In Abbildung 7.7 (a) ist die Schranke mit $b = 1,05$ nur gering oberhalb von S_0 gewählt, so dass die Preise für die UOB relativ niedrig ausfallen, da der Bereich eines positiven Payoffs beim Kauf einer solchen Option auf das Intervall $(S_0, 1,05 \cdot S_0)$ beschränkt ist. Trotz dieses relativ kleinen Bereichs sind UOB Optionen als Teil einer Absicherungsstrategie interessant, da die UOB Optionen nach Formel (7.4) das Pendant zu UIB Optionen bilden.

¹¹Vgl. z.B. Sandmann[115].

¹²Nach Thomas[125] kommen Knock-Out Optionen in der Praxis häufiger vor.

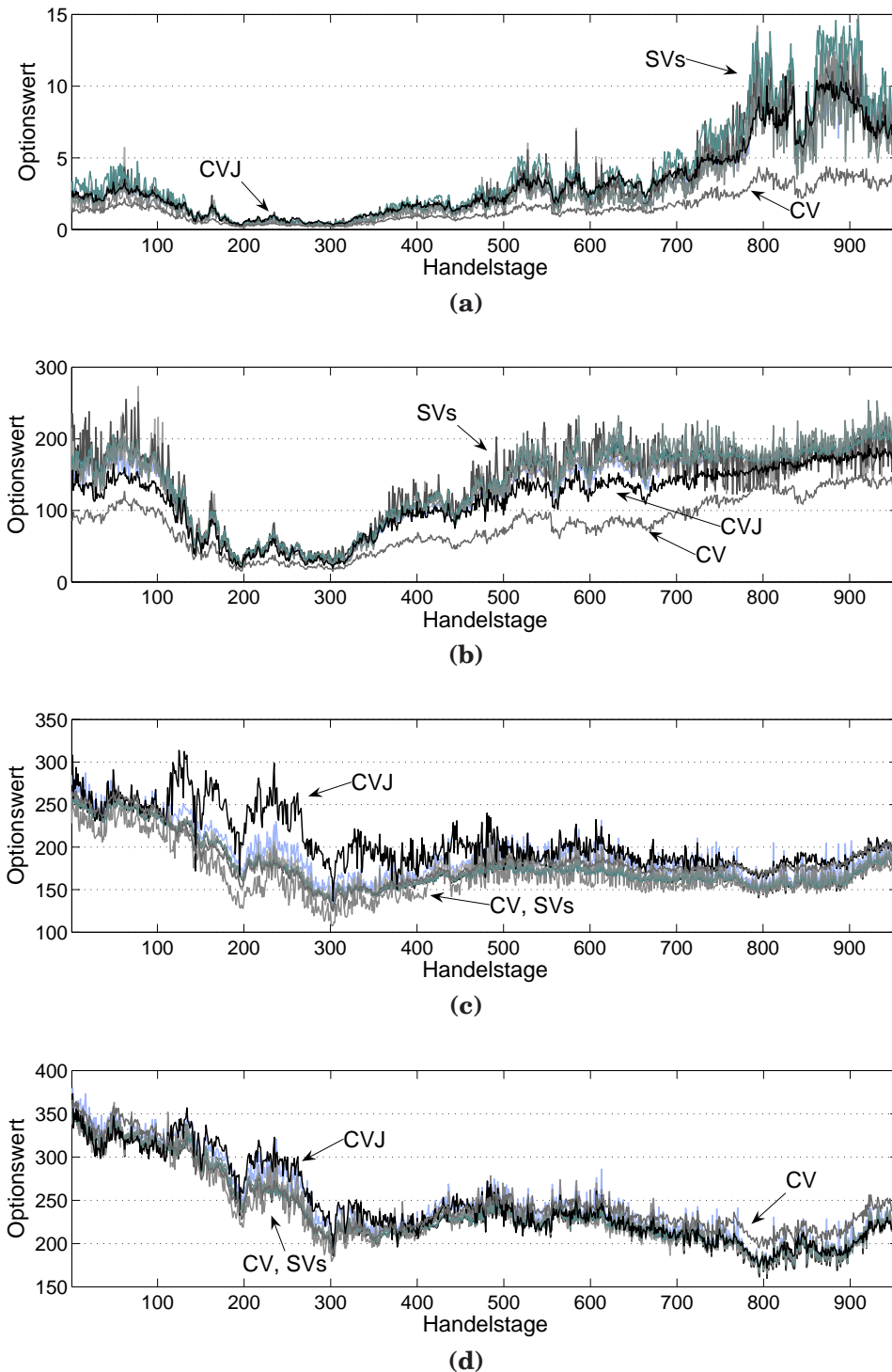


Abbildung 7.7: Absolute Optionspreise für $T = 0,5$ einer UOB Call-Option mit (a) $b = 1,05$, (b) $b = 1,2$ und einer DOB Call-Option mit (c) $b = 0,95$, (d) $b = 0,9$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

In der Phase starker Marktbewegung zwischen Handelstag 100 und Handelstag 400 sind die Preise für die UIB Optionen am geringsten. Darüber hinaus liegen an diesen Tagen die

Ergebnisse aller Modelle dicht beieinander. Während der Seitwärtsbewegung des Marktes steigen die Optionspreise an, wobei jedoch auch die Streuung über die Modelle sehr stark zunimmt. Ein vergleichbarer Effekt ist für diesen Optionstyp auch mit einer höheren Barrier von $b = 1,2$ in Abbildung 7.7 (b) festzustellen.

Da die DOB Call-Optionen in Abbildung 7.7 (c) mit $b = 0,95$ unter großer Kursbewegung stärker streuen und sich unter Seitwärtsbewegung annähern, kehrt sich die Beobachtung der UOB Optionen für diesen Optionstyp um. Je kleiner die Barrier jedoch im Vergleich zum Basiswert S_0 wird, um so stärker überwiegen die Eigenschaften der Plain-Vanilla Option, so dass sich in Abbildung 7.7 (d) mit $b = 0,9$ die einzelnen Preise der Modelle aufgrund der Kalibrierung annähern.

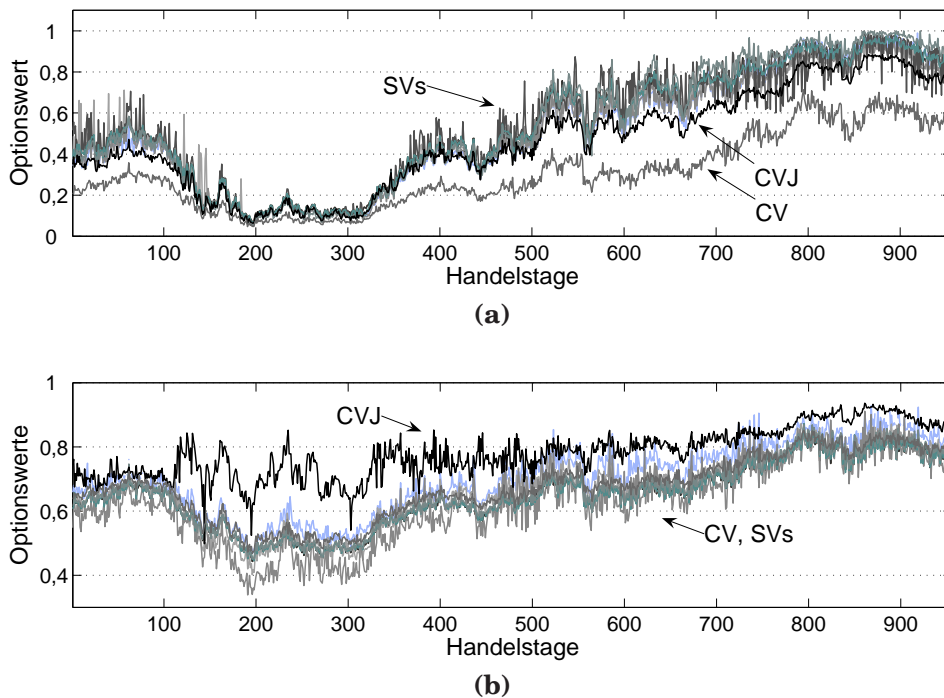


Abbildung 7.8: Normierte Optionspreise für $T = 0,5$ einer UOB Call-Option mit (a) $b = 1,2$ und einer DOB Call-Option mit (b) $b = 0,95$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Als normierende Option für die UOB und DOB Optionen wird der Plain-Vanilla Call gewählt, der sich ergibt, wenn die Schranke im Fall der UOB gegen unendlich geht bzw. im Fall der DOB gegen Null. Dieser Call ist eine obere Schranke der UOB bzw. DOB Preise, so dass alle normierten Preise kleiner als eins sind. Dargestellt sind diese normierten Preise für eine UOB Call-Option mit $b = 1,2$ und für eine DOB Call-Option mit $b = 0,95$ in Abbildung 7.8, wobei sich die Beobachtungen von denen der absoluten Zeitreihen kaum unterscheiden.

Kapitel 8

Hedging Performance

Da durch mögliche ungünstige Preisbewegungen im Basiswert Stillhalterpositionen stets mit einem hohen Risiko behaftet sind, wird in der Praxis versucht, sich gegen das Preisänderungsrisiko der Basiswerte abzusichern. Mit dem gleichen Prinzip einer Duplikationsstrategie, die bereits dazu diente, eine Option zu bewerten, kann eine verkaufte Option „gehedgt“ werden. In diesem Kapitel steht das Hedgen von Optionen im CV, CVJ und in Modellen mit stochastischer Volatilität im Vordergrund. In welchem Verhältnis sich das Duplikationsportfolio aus den einzelnen Kapitalmarktprodukten zusammensetzt, wird durch die „Griechen“ bestimmt, die in Abschnitt 8.1 allgemein eingeführt und für die relevanten Modelle berechnet werden. Welche Produkte jedoch in das Duplikationsportfolio aufgenommen werden, legen Hedging-Strategien fest, die in Abschnitt 8.2 vorgestellt werden. Anschließend werden einige Strategien für ausgesuchte Modelle empirisch umgesetzt und die Ergebnisse in Abschnitt 8.3 zusammengefasst.

8.1 Berechnung der Sensitivitäten

8.1.1 Griechen europäischer Standard-Optionen

Die Sensitivitäten einer Option sind die partiellen Ableitungen des Optionspreises nach Markt- und Modellparametern, die häufig mit einem griechischen Großbuchstaben abgekürzt und daher auch die „Griechen“ der Option genannt werden. Da die Griechen angeben, wie der Optionspreis auf kleine Parameteränderungen reagiert, beschreiben die Sensitivitäten die mit der Option verbundenen Marktrisiken und sind somit maßgeblich für die Zusammensetzung des Duplikationsportfolios. Welche Risiken dabei genau ausgedrückt werden, ist in Tabelle 8.1 wiedergegeben, wobei $\tau = T - t$ für die Restlaufzeit mit Endzeitpunkt T und ∂C für $\partial C(S, \tau, K, r, \theta)$ mit Modellparametervektor θ verwendet werden.

Ein Delta in Höhe von z.B. 0,6 bedeutet, dass sich der Preis einer Call-Option um 0,6

Griechen	Definition	beschriebenes Risiko
Delta Δ :	$C_S = \frac{\partial C}{\partial S}$,	Wertänderung bei Kursbewegung im Basiswert
Gamma Γ :	$C_{SS} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$,	Änderung von Delta bei Kursbewegung im Basiswert
„Vega“:	$C_\sigma = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$,	Wertänderung bei Änderung der Volatilität
Rho:	$C_r = \frac{\partial C}{\partial r}$,	Wertänderung bei Änderung der risikolosen Zinsrate
Theta:	$C_\tau = \frac{\partial C}{\partial \tau}$,	Wertänderung über die Laufzeit

Tabelle 8.1: Überblick über die Sensitivitäten einer Option.

Einheiten erhöht, wenn der Kurs des Basiswertes um eine Einheit steigt. Sinkt der Basiswert um eine Einheit, geht der Optionswert ebenfalls um 0,6 Einheiten zurück.

Für Gamma echt positiv ist die Steigung der Delta-Funktion in Abhängigkeit des Basiswertkurses nicht konstant und der Optionspreis im Basiswert strikt konvex. Je kleiner Gamma ist, um so geringer ist die Steigung der Delta-Funktion. Daher reagiert der Optionspreis für kleine Gamma weniger stark auf Kursänderungen im Basiswert. Bei einem Delta von 0,6 bedeutet ein Gamma von beispielsweise 0,01, dass Delta bei einem um eine Einheit erhöhten Basiswert ebenfalls auf 0,61 ansteigt bzw. auf 0,59 sinkt, wenn der Basiswert um eine Einheit nachgibt.

Wird eine Option nach dem Duplikationsportfolio mit Delta-Anteilen im Basiswert abgesichert, muss bei einem höheren Gamma das Portfolio stärker angepasst werden als bei einem niedrigeren Gamma-Wert. Demnach gibt Gamma für eine diskrete Absicherungsstrategie darüber Auskunft, wie schnell die Option nicht mehr durch das Duplikationsportfolio abgesichert ist.

Mit Vega¹ wird die Wertänderung der Option bei Änderung der Volatilität des log-Kursprozesses des Basiswertes, was im CV Modell dem Parameter σ entspricht, angegeben. Rho und Theta sind im Folgenden für die Hedging-Strategien nicht relevant und nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, wobei Theta auch mehr eine vorhersehbare, meist negative Wertentwicklung beschreibt als ein Marktrisiko.

Als Zutaten der Hedging-Strategien sollten die Griechen aus Tabelle 8.1 für jedes relevante Modell schnell und korrekt berechnet werden, da falsche Griechen direkte Auswirkungen auf die Güte eines Hedgeportfolios haben. Ob dies analytisch oder nur mit numerischen Verfahren möglich ist, hängt zum einen vom Modell und zum anderen stark von dem Payoff der zu hedgenden Option ab. So sind die Griechen für europäische Plain-Vanilla Optionen in den relevanten Modellen aus Abschnitt 3.6 mit einer geschlossenen Formel anzugeben, während für exotische Optionen mit pfadabhängigem Payoff numerische Verfahren zur approximativen Lösung der Aufgabe verwendet werden müssen.

¹Vega hat keinen Ursprung als griechischer Buchstabe.

Der Wert C_t einer europäischen Plain–Vanilla Call–Option zur Zeit t ist gegeben durch

$$C_t = S_t \Pi_1 - e^{-r\tau} K \Pi_2, \quad (8.1)$$

mit den risiko–neutralen Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \log(K)} \phi(u-i)}{iu \phi(-i)} \right), \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \log(K)} \phi(u)}{iu} \right), \end{aligned}$$

für die modellabhängige² charakteristische Funktion ϕ nach Gleichung (4.2).³

Mit Hilfe der risiko–neutralen Wahrscheinlichkeiten Π_1 und Π_2 lassen sich Formeln für die Griechen herleiten, die in Tabelle 8.2 angegeben sind. Im CV Modell gilt nach der Black–Scholes Formel (2.9) $\Pi_1 = \phi(d_1)$ und $\Pi_2 = \phi(d_2)$, so dass für diesen Spezialfall die Griechen in einer separaten Spalte in Tabelle 8.2 aufgeführt sind.

Griechen	Formel mit allgemeinen risiko–neutralen Wahrscheinlichkeiten	Formel für CV Modell als Spezialfall nach Gleichung (2.9)
Delta Δ :	Π_1	$\phi(d_1) > 0$
Gamma Γ :	$\frac{1}{S} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \log S}$	$\frac{\phi'(d_1)}{S \sigma \sqrt{\tau}} > 0$
Vega:	$S \frac{\partial \Pi_1}{\partial \sigma} - K e^{-r\tau} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \sigma}$	$S \sqrt{\tau} \phi'(d_1) > 0$
Rho:	$K \tau e^{-r\tau} \Pi_2$	$K \tau e^{-r\tau} \phi(d_2) > 0$

Tabelle 8.2: *Formeln für die Sensitivitäten einer Plain–Vanilla Call–Option in allen relevanten Modellen allgemein und im CV Modell als Spezialfall.*

Zur Illustration der Formeln für das CV Modell in Tabelle 8.2 sind in Abbildung 8.1 die Griechen Delta, Gamma, Vega und Rho jeweils in Abhängigkeit vom Strike und Laufzeit dargestellt. Für Delta zeigt Abbildung 8.1 den typischen Verlauf: Bei einer Call–Option weit im–Geld nähert sich der Wert für Delta eins⁴ an, während er weit aus–dem–Geld gegen Null konvergiert, aber stets positiv bleibt.

Die niedrigen Werte für Gamma in Abbildung 8.1 erklären sich zum einen dadurch, dass Gamma in den Einheiten des Basiswertes, die hier den Punkten des DAX entsprechen, angegeben wird. Dennoch ist Gamma relativ klein, so dass Delta wenig sensitiv auf Kursbewegungen reagiert. Nach Wallmeier [130] liegt das Maximum für Gamma in Abhängigkeit vom Strike bei fester Restlaufzeit bei

$$\log(S) = \log(K) - \left(r + \frac{3}{2} \sigma^2 \right) \tau.$$

²Vgl. Abschnitt A.3 im Anhang.

³Vgl. zur Herleitung der Gleichung (8.1) Bakshi et al[8], S. 2043ff.

⁴Präziser nähert sich Delta dem Barwert einer Einheit. Liegt der jährliche risikolose Zins z.B. bei 4 Prozent, so kann das Delta einer sechs–monatigen Call–Option den Wert $e^{-0,02}$ nicht überschreiten.

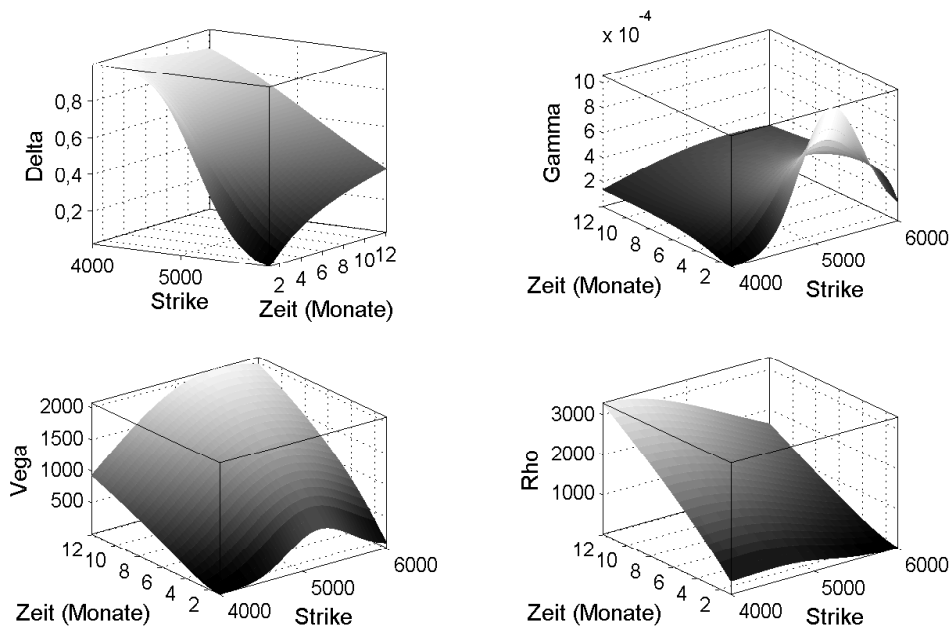


Abbildung 8.1: Griechen im CV Modell für $S_0 = 5.167,88$, $\sigma = 0,252$, $r = 0,03228$ für einen Beispieltag.

Da der zweite Term stets positiv aber in der Regel klein ist, liegt für den maximalen Gamma-Wert die Call-Option leicht aus-dem-Geld. Bei kürzeren Restlaufzeit steigt somit für Optionen am-Geld und leicht aus-dem-Geld bzw. im-Geld der Wert für Gamma. Die größere Steigung des Deltas drückt dabei aus, dass der Optionswert um so sensitiver auf Änderungen im Basiswert reagiert, je näher die Option ihrem Endzeitpunkt kommt.

Für den Beispieltag in Abbildung 8.1 nimmt Gamma für $\tau = \frac{1}{6}$ bei $K \approx 5279$ das Maximum an, was leicht in der Graphik nachzuvollziehen ist. Der Wert von Gamma liegt im Maximum ungefähr bei 0,001, was bedeutet, dass sich Delta um rund 0,001 Einheiten erhöht, wenn der DAX auf 5280 Punkte steigt. Zu beiden Seiten des Maximums fällt Gamma in Strike-Richtung stark ab, da Delta in diese Richtungen gegen eins bzw. Null konvergiert.

Für Vega und Rho, deren Werte in Einheiten des Basiswertes gemessen werden, steigen über alle Strike-Niveaus hinweg die Werte mit längerer Restlaufzeit an. Diese Beobachtung bedeutet, dass eine Änderung der Volatilität oder des risikolosen Zinses für einen längeren Zeithorizont ein höheres Risiko darstellt als für eine kürzere Zeitspanne.

An dem Beispieltag in Abbildung 8.1 nimmt Delta am-Geld für eine Laufzeit von sechs Monaten ungefähr den Wert 0,57 an. Welche Zeitreihen aus den Werten der täglichen Griechen für alle Handelstage der Datenbasis für Optionen am-Geld mit dieser Laufzeit, basierend auf den optimalen Parametervektoren aus Abschnitt 5.4, über alle Modelle hinweg

entstehen, ist in der Abbildung 8.2 für (a) Delta und (b) Gamma für 831 Handelstage⁵ widergegeben. Abgesehen vom CV und CVJ Modell überlagern sich in Abbildung 8.2 die Zeitreihen für Delta und Gamma der Modelle mit stochastischer Volatilität.

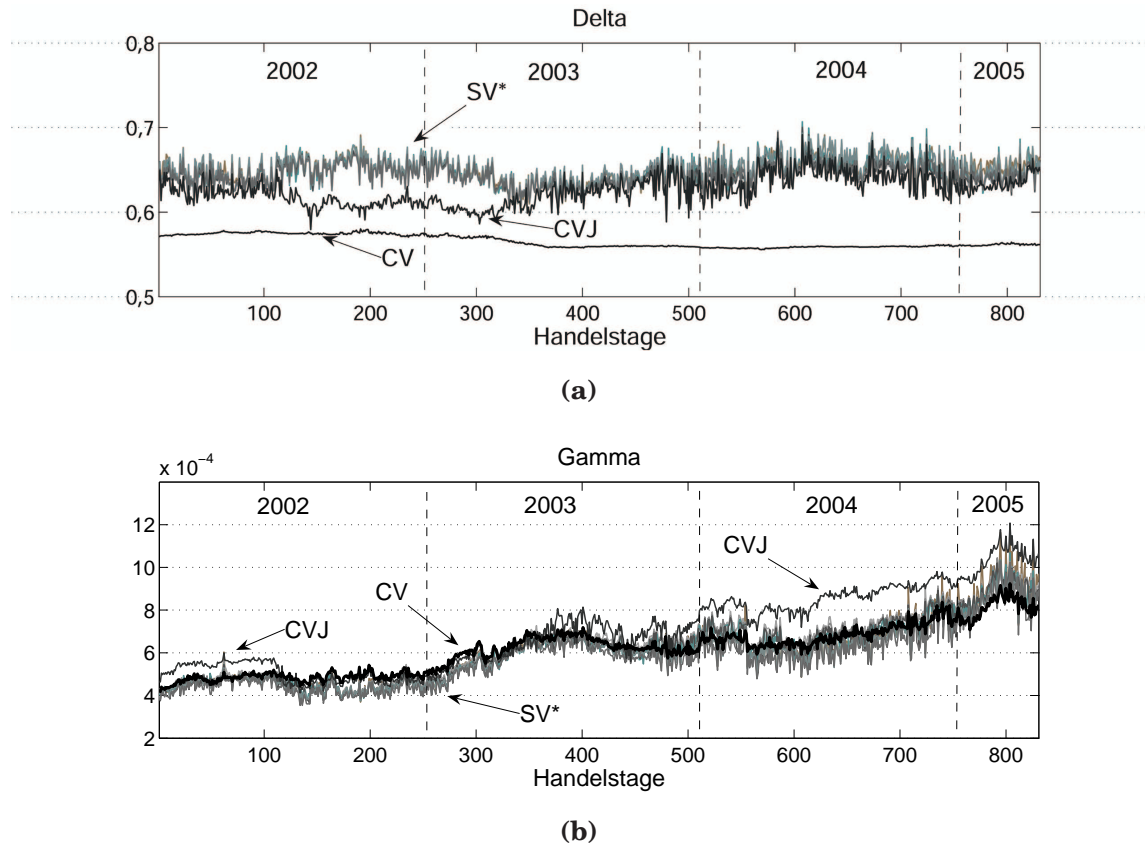


Abbildung 8.2: Zeitreihen für (a) Delta und (b) Gamma für alle Modelle über die ersten 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005 für eine Call-Option mit $\frac{S}{K} = 1$, $T = 0,5$. SV^* steht für die Menge der Modelle mit stochastischer Volatilität.

Diese Beobachtung steht im Einklang mit den Ergebnissen von Alexander und Nogueira [3], dass Delta, Gamma und Rho in „skalen-invarianten Modellen“⁶, zu denen alle hier relevanten Modelle aus Abschnitt 3.6 gehören⁷, modell-frei sind.

Die Abweichungen der Werte in Abbildung 8.2 resultieren nach Alexander und Nogueira [3] aus den unterschiedlich hohen Anpassungsfehlern bei der In-Sample Performance in

⁵Der Zeitraum von 831 Handelstagen ergibt sich aus der Differenz von insgesamt 956 Handelstagen und 125 Handelstage für $T = 0,5$. Somit ist der 831. Tag der letzte, für den empirische Werte bei der Hedging Performance in Abschnitt 8.3 mit $T = 0,5$ vorliegen.

⁶Unter skalen-invarianten Modellen versteht man Modelle, bei denen das Niveau des aktuellen Basiswertes keinen Einfluß auf den Preisprozess hat. Die zukünftige Entwicklung ist unabhängig davon, ob z.B. $S_0 = 100$ oder $S_0 = 1000$ beträgt.

⁷Die charakteristischen Funktionen aus Abschnitt A.3 sind keine Funktionen von S_0 . Vgl. Alexander/Nogueira[3], „Property 1: Independence“.

Abschnitt 6.1. Modelle mit stochastischer Volatilität erreichen dabei ein ähnlich niedriges Fehlerniveau, was bei der Berechnung der modell-freien Griechen zu fast identischen Werten führt. Für Modelle mit hohen Fehlern in der Anpassung, wie bei CV und CVJ, streuen die Griechen wesentlich mehr, obwohl sie theoretisch auch zu identischen Werten führen sollten. Folglich kommen die Werte des Modells mit den geringsten Fehlern den wahren modell-freien Griechen Delta, Gamma und Rho am nächsten.

Die Werte für Delta der Modelle mit stochastischer Volatilität in Abbildung 8.2 (a) bewegen sich, unabhängig von Marktphasen, für alle Handelstage in einem Band zwischen 0,6 und 0,7. Die Werte für Gamma im unteren Diagramm (b) sind auf einem niedrigen Niveau, wie bereits zu Abbildung 8.1 angedeutet. Dennoch steigen die Werte mit der Zeit an und sind für die letzten betrachteten Handelstage mehr als doppelt so groß wie zu Beginn. Obwohl sich der Kurs des DAX nach seiner Talfahrt in den Jahren 2002 und Anfang 2003 wieder erholt, bleibt die Steigung des Deltas auf einem höheren Niveau als vor dem Einbruch. Optionspreise reagieren somit 2005 für ähnliche Kurse stärker auf Änderungen im Basiswert als 2002 vor der Krise. Darüber hinaus müssen Duplikationsportfolios mit Delta-Anteilen im Basiswert 2005 bei Änderungen schneller angepasst werden als noch 2002, da die Option sonst nicht mehr abgesichert ist.

8.1.2 Griechen exotischer Optionen

Von Spezialfällen abgesehen, sind für exotische Optionen die partiellen Ableitungen nach Tabelle 8.1 nur mit numerischen Verfahren berechenbar. Mit der Monte Carlo Simulation hat man eine Bewertungsmethode zur Hand, die universell einsetzbar ist, da mit einem geeigneten Diskretisierungsschema es faktisch möglich ist, jede Option mit beliebigem Payoff in jedem Modell zu bewerten. Zur Berechnung der Sensitivitäten einer Option werden im Folgenden Methoden basierend auf Monte Carlo vorgestellt, die für die in dieser Arbeit relevanten Modelle und Optionen einen universellen Charakter besitzen.

Die in der Literatur⁸ bekannten Monte Carlo Methoden zur Bestimmung der Griechen lassen sich in drei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe bilden Finite-Differenzen Verfahren. Sei θ ein beliebiger Modell- oder Marktparameter und $f(\theta)$ der diskontierte Payoff einer Option, dann ist der Optionspreis durch

$$\alpha(\theta) = E(f(\theta)) \quad (8.2)$$

gegeben. Der einfachste Vorwärts-Differenzen Schätzer für $\alpha'(\theta)$ ergibt sich aus

$$\hat{\alpha}'_V(\theta) = \frac{\bar{f}_n(\theta + h) - \bar{f}_n(\theta)}{h}, \quad (8.3)$$

wobei $\bar{f}_n(\theta + h)$ und $\bar{f}_n(\theta)$ Mittelwerte von n unabhängigen Simulationen $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$ bzw. $f_1(\theta + h), \dots, f_n(\theta + h)$ für eine Schrittweite $h > 0$ sind.

⁸Vgl. z.B. Glasserman[68].

Die Vorteile des Finite-Differenzen Ansatzes sind an seiner Form klar ersichtlich. Es werden keine zusätzlichen Informationen bezüglich des zugrunde liegenden Modells und seiner SDE benötigt. Der Schätzer ist universell für Payoffs beliebiger exotischer Optionen sowie für unterschiedliche Diskretisierungsschemata einsetzbar. Darüber hinaus sind auch keine Einschränkungen für die Wahl des Parameter θ nötig und somit alle Griechen schätzbar. In Analogie zu (8.3) ergibt sich ein Schätzer für Gamma aus

$$\hat{\alpha}'_V(\theta) = \frac{\bar{f}_n(\theta + h) - 2\bar{f}_n(\theta) + \bar{f}_n(\theta - h)}{h^2}.$$

Der Preis für diese Universalität und geringe Komplexität ist die Genauigkeit der Schätzung. Als Nachteil zeigt sich, dass der Schätzer $\hat{\alpha}'_V(\theta)$ nicht erwartungstreu ist mit einer Verzerrung der Größenordnung

$$b(\hat{\alpha}'_V) = \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h + o(h), \quad (8.4)$$

falls α zweimal differenzierbar ist. Eine kleinere Verzerrung als (8.4) weist der Zentrale-Differenzen Schätzer

$$\hat{\alpha}'_Z(\theta) = \frac{\bar{f}_n(\theta + h) - \bar{f}_n(\theta - h)}{2h}$$

auf mit der Verzerrung

$$b(\hat{\alpha}'_Z) = \frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2 + o(h^2).$$

Wählt man die Schrittweite h beliebig klein, reduziert sich die Verzerrung. Doch durch die Form der Varianz der Schätzer

$$\text{Var}(\hat{\alpha}'_V) = \frac{1}{h^2}\text{Var}(\bar{f}_n(\theta + h) - \bar{f}_n(\theta)),$$

wirkt sich eine zu kleine Schrittweite ungünstig auf die Varianz aus. Da kleine Schrittweiten besonders für Sensitivitäten von Optionen mit einem nicht stetigen Payoff, wie z.B. bei einer Barrier Option aus Abschnitt 7.5, wichtig sind, stellt die zunehmende Varianz einen großen Nachteil für dieses Verfahren dar.⁹

Die zweite und dritte Gruppe bilden die „Pathwise“ (im Folgenden: PW) und „Likelihood Ratio“ (im Folgenden: LR) Methoden, die von Broadie und Glasserman [28] eingeführt wurden. Sowohl die Pathwise als auch die Likelihood Ratio Methode basieren auf der Erkenntnis, dass die Reihenfolge von Erwartungswertbildung und Differenzieren vertauscht werden kann. So wird bei der Pathwise Methode die Payoff-Funktion innerhalb des Erwartungswertes differenziert. Der Optionspreis sei gegeben durch $\alpha(\theta) = E(f(\theta))$ mit f als diskontierte Payoff-Funktion analog zu (8.2). Die Pathwise Methode liefert einen erwartungstreuen Schätzer

$$\hat{\alpha}'_{PW}(\theta) = \frac{d}{d\theta}E(f(\theta)) = E\left(\frac{d}{d\theta}f(\theta)\right). \quad (8.5)$$

⁹Vgl. für weitere Ausführungen und Untersuchungen Glasserman [68].

Um diesen Schätzer konkret verwenden zu können, sind Informationen über das zugrunde liegende Modell, den Parameter θ und über den Payoff der Option nötig. Da einige Payoff-Funktionen exotischer Optionen nicht stetig sind, ist in solchen Fällen die Methode (8.5) ohne Modifikation nicht anwendbar.

Die dritte Gruppe der Verfahren, bei der die Form des Payoffs erst außerhalb der Erwartungswertbildung eine Rolle spielt, ist die Likelihood Ratio Methode. Bei dieser Methode wird die Dichtefunktion des Kursprozesses des Basiswertes differenziert, die in allen in dieser Arbeit relevanten Modellen stetig ist. Unter dem Aspekt der Universalität ist die Likelihood Ratio Methode der Pathwise Methode vorzuziehen. Bei der Likelihood Ratio Methode ist der Payoff eine Funktion des Zufallsvektors X und θ ein Parameter der Dichtefunktion von X . Sei die Dichte durch $g_\theta(x)$ gegeben, dann ergibt sich ein erwartungstreuer Schätzer aus

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}'_{LR}(\theta) &= \frac{d}{d\theta} E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{d}{d\theta} g_\theta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g'_\theta(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x) dx = E\left(f(X) \frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)}\right).\end{aligned}\quad (8.6)$$

Der Quotient $\frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)}$ wird auch „Score-Funktion“ genannt, wodurch die Likelihood Ratio Methode (8.6) auch unter dem Namen „Score-Funktion Methode“ in der Literatur bekannt ist. Die Score-Funktion eines Griechen ist unabhängig vom Payoff einer bestimmten Option.

Kaya und Broadie [30] geben für das SV-CIR, das SVJ-CIR und das SVJ-CJ-CIR Modell die entsprechenden Schätzer nach der Likelihood Ratio Methode abhängig vom Optionstyp an. Für die europäische Call-Option mit Payoff $C_T = e^{-rT}(S_T - K)^+$ ergeben sich folgende Griechen:

$$\begin{aligned}\text{Delta:} & P\left(\frac{d}{S_0 \sigma \sqrt{T}}\right) \\ \text{Gamma:} & P\left(\frac{d^2 - d\sigma\sqrt{T} - 1}{S_0^2 \sigma^2 T}\right) \\ \text{Vega:} & P\left(\frac{d^2 - 1}{\sigma} - d\sqrt{T}\right),\end{aligned}$$

wobei r risikoloser Zins, T Laufzeit, K Strike der Option und $d = \left(\frac{\log(S_T/(S_0\xi)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$ entspricht.

Ein Vergleich der Verfahren zum einen aus Tabelle 8.2 und zum anderen der Verfahren PW und LR ist im CV Modell für eine Plain-Vanilla Call-Option mit $T = 1$, $K = 1$, $S_0 = 5270,29$, $r = 0,0324$, $\sigma = 0,252$ sowie mit Optionspreis $C = 608,41$ in Tabelle 8.3 durchgeführt. Erwartungsgemäß fallen die Unterschiede der Ergebnisse zwischen den beiden analytischen Formeln aus Tabelle 8.2 sehr klein aus. Lediglich beim Vega kann von einer kleinen Diskrepanz gesprochen werden. Beim Vergleich mit den numerischen Methoden PW und LR wird unmittelbar ein Nachteil der PW Methode deutlich, da weder Gamma noch Vega mit der PW Methode berechnet werden können. Die Werte für Delta und Rho aus PW weichen jedoch geringer von den analytischen Werten ab als die entsprechenden Werte der LR Methode. Das Vega aus LR liegt genau zwischen den analytischen Werten, während der Wert für Gamma

	Formel aus BS-Formel	Formel über risiko-neutrale Wahrscheinlichkeiten	PW	LR
Delta	0,600457	0,600455	0,600465	0,600513
Gamma	$2,9073 \cdot 10^{-4}$	$2,9072 \cdot 10^{-4}$	x	$2,9085 \cdot 10^{-4}$
Vega	$2,0355 \cdot 10^3$	$2,038 \cdot 10^3$	x	$2,0364 \cdot 10^3$
Rho	$2,55617 \cdot 10^3$	$2,55617 \cdot 10^3$	$2,55616 \cdot 10^3$	$2,55647 \cdot 10^3$

Tabelle 8.3: Vergleich der Verfahren zur Berechnung der Griechen für eine Plain-Vanilla Call-Option im CV Modell mit $T = 1$, $K = 1$, $S_0 = 5270,29$, $r = 0,0324$, $\sigma = 0,252$, Optionspreis $C = 608,41$.

leicht nach oben abweicht. Insgesamt kann jedoch eine ausgesprochen gute Approximation der numerischen Methoden auch für die Modelle mit stochastischer Volatilität und Sprüngen im Kurs festgestellt werden.

8.2 Dynamische Hedging-Strategien

Nach der Diskussion der Griechen im letzten Abschnitt sollte ein optimales Hedge-Portfolio kontinuierlich¹⁰ so angepasst werden, dass der Wert des Portfolios unter allen Wertänderungen, die von den Griechen erfasst werden, stets konstant bleibt. Ist ein Absicherungsportfolio z.B. so gewählt, dass Delta Null ergibt, wird das Portfolio „Delta neutral“ genannt. Für die weiteren Griechen gelten die entsprechenden Bezeichnungen. In der Praxis ist es jedoch nicht möglich alle Griechen neutral zu wählen, da die Wertpapiere, die rechnerisch dafür benötigt werden, nicht exakt in dem Ausmaß verfügbar sind.¹¹

Darüber hinaus ist in der Realität eine stetige Anpassung, z.B. durch handelsfreie Zeiten, nicht möglich. Eine regelmäßige Umschichtung in sehr kurzen Zeitabständen wird durch Transaktionskosten sehr teuer und ist somit ebenfalls in der Praxis nicht beliebig durchführbar. Hull [80] gibt an, dass Händler in der Praxis einmal am Ende des Tages ihr Portfolio Delta neutral stellen, Gamma und Vega zwar beobachten, aber in der Regel nicht täglich anpassen.

Die stetige Anpassung kann somit nur durch eine diskrete Handelsstrategie approximiert werden, die durch ungehedgte Kursbewegungen zwischen den diskreten Zeitpunkten fehlerhaft sein kann. Hedge-Fehler sind somit unvermeidlich.¹²

¹⁰Hedging-Strategien, die zwischenzeitlich angepasst werden, heißen „dynamisch“, im Gegensatz zu den „statischen Hedging-Strategien“, die einmal initialisiert, über die gesamte Laufzeit nicht angepasst werden. Solche Strategien werden im Folgenden jedoch nicht betrachtet.

¹¹In Abschnitt 9.1 über Risikoarten wird dieses Risiko unter dem Begriff „Liquiditätsrisiko für Derivate“ ausführlicher beschrieben.

¹²Vgl. für weitere Ausführungen z.B. Hull[80], S.363f, Wallmeier[130], S.99ff.

Im Folgenden werden drei, bereits diskret formulierte Hedging-Strategien, die unterschiedliche Griechen enthalten, vorgestellt. Das einfachste Konzept, das bereits für die Herleitung des Duplikationsportfolios bei der Bewertung im Black-Scholes Modell verwendet wurde, ist das „Delta Neutral Hedging“. Hierbei wird am Handelstag t das Hedge-Portfolio π_t^D aus

$$\pi_t^D = -C_t + \Delta_t S_t + B_t \quad (8.7)$$

gebildet, wobei B_t den Anteil an der risikofreien Anlage beschreibt. Wird Δ_t nach Tabelle 8.1 berechnet, ist π_t^D Delta neutral.

Aufgrund der Konstruktion des Delta Neutral Hedges ist das Portfolio nur gegen die Wertänderung im Basiswert geschützt, jedoch nicht z.B. gegen Schwankungen in der Volatilität. Somit ist für Modelle mit stochastischer Volatilität das Delta Neutral Hedging weder in der Theorie noch in der praktischen Anwendung eine ausreichende Absicherungsstrategie. Erst durch die Hinzunahme einer weiteren Option ins Hedge-Portfolio kann das Volatilitätsrisiko kontrolliert werden, was im „Delta-Vega Neutral Hedging“ umgesetzt ist. Bei dieser Strategie setzt sich das Portfolio π_t^{DV} aus

$$\pi_t^{DV} = -C_t + a_t C_t^* + b_t S_t + B_t \quad (8.8)$$

zusammen, wobei zusätzlich zu b_t Anteilen im Basiswert a_t Einheiten einer weiteren Option C_t^* benötigt werden. Das Portfolio π_t^{DV} ist für $\frac{\partial \pi_t}{\partial S_t} = \frac{\partial \pi_t}{\partial V_t} = 0$ Delta und Vega neutral, was für die Wahl von

$$a_t = \frac{\partial C_t}{\partial V_t} / \frac{\partial C_t^*}{\partial V_t} \quad \text{und} \quad b_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - a_t \frac{\partial C_t^*}{\partial S_t}$$

erfüllt ist.

Sprungrisiken bleiben jedoch auch bei der Delta-Vega Neutral Strategie weiterhin ungehedgt. Eine Hedging-Strategie, die auch diese Risiken berücksichtigt, ist das „Minimum Variance Hedging“ mit einem Portfolio π_t^{MV} aus

$$\pi_t^{MV} = -C_t + X_t S_t + B_t \quad (8.9)$$

mit zunächst einem allgemeinen Hedge-Ratio X . Dieser Hedge-Ratio wird gebildet, indem die Varianz der Änderung des Hedge-Portfolios $d\pi_t^{MV}$ minimiert wird, was mit

$$X = \frac{\text{Cov}(dS, dC)}{\text{Var}(dS)} \quad (8.10)$$

erreicht wird.¹³

Die konkrete Berechnungsvorschrift für X kann nach Formel 8.10 von Modell zu Modell variieren, während die expliziten Formeln für die Wertpapieranteile des Delta Neutral Hedgings sowie des Delta-Vega Neutral Hedging für alle Modelle gelten, was die Komplexität des Minimum Variance Hedgings im Vergleich erhöht.

¹³Vgl. Bakshi et al[8].

Bei Modellen auf einem vollständigen Kapitalmarkt, wie dem CV Modell, entspricht das Minimum Variance Hedging der Delta Neutral Strategie. Für weitere Modelle mit stochastischer Volatilität und Jump-Diffusion sind die entsprechenden Hedge-Ratios in Tabelle 8.4 zusammengefasst.

Modell	Hedge-Ratio X für Minimum Variance Hedging
CV	$\frac{\partial C}{\partial S}$
CVJ	$\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \nu} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\lambda_S}{S(\sigma^2 + \nu)} \left(E \left(J_S C \left(S(t, 1 + J_S) \right) \right) - \bar{\mu}_S C \right)$
SV-CIR	$\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial V} \rho \beta \frac{1}{S}$
SV-OU	$\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial V} \rho \beta \frac{1}{SV}$
SVJ-CIR	$\frac{V}{V + \nu} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial V} \rho \beta \frac{V}{S(V + \nu)} + \frac{\lambda_S}{S(V + \nu)} \left(E \left(J_S C \left(S(t, 1 + J_S) \right) \right) - \bar{\mu}_S C \right)$
	wobei $\nu := \lambda_S \bar{\mu}_S^2 + \lambda \left(e^{(\delta_S^2)} - 1 \right) (1 + \bar{\mu}_S)^2$

Tabelle 8.4: Hedge-Ratios für Minimum Variance Hedging einzelner Modelle.

8.3 Empirische Ergebnisse

Die Ergebnisse der empirischen Studie bezüglich der Hedge-Strategien aus Abschnitt 8.2 sind im Folgenden zusammengefasst. Ausgehend von den kalibrierten Modellparametern aus Abschnitt 5.4 und den zugehörigen Griechen aus Abschnitt 8.1 für den vorliegenden Datensatz, beschrieben in Abschnitt 5.3, werden die Hedge-Portfolios π_t für eine Option tageweise bestimmt und die resultierenden Hedge-Fehler notiert.

Die Hedge-Fehler werden stets aus der Sicht eines Stillhalters gebildet, der die Optionen verkauft und diesen Verkauf absichern möchte. Somit hat z.B. der diskrete Hedge-Fehler $\Delta \pi_{t_2}^D$ der Delta Neutral Strategie nach Formel (8.7) zum Zeitpunkt t_2 eine Größenordnung von

$$\Delta \pi_{t_2}^D = -C(t_2, S_{t_2}) + \Delta_{t_1} S_{t_2} + B_{t_1} (1 + r_{t_1} (t_2 - t_1)), \quad (8.11)$$

wenn die letzte Anpassung zum Zeitpunkt t_1 erfolgte. Die diskreten Hedge-Fehler der weiteren Hedging-Strategien werden analog bestimmt.

Ist der Hedge-Fehler aus Gleichung (8.11) an einem beliebigen Tag negativ, muss der Stillhalter dieses durch Einschüsse ausgleichen, um die angepasste Strategie durchführen zu können. Ergeben sich jedoch an anderen Tagen positive Werte, so kann der Stillhalter diese als Gewinne entnehmen. Entscheidend für die Güte einer Hedging-Strategie sind somit nur die kumulierten Hedge-Fehler über alle Tage der Laufzeit. Am Ende der Laufzeit werden daher von jeder Option die tageweisen Hedge-Fehler summiert und ein Gesamt-Hedge-Fehler bestimmt, der pro Option einen Datenpunkt für die Gewinn-Verlust Verteilung eines Modells bildet.

Die betrachteten Plain-Vanilla Optionen haben dabei eine Laufzeit von 0,5 Jahren, was 125 Anpassungen im Hedge-Portfolio auf täglicher Basis entspricht, und liegen mit Strike $K = S_0$ am Geld. Für einen 956 Handelstage umfassenden Datensatz können somit 831 täglich startende Optionen gehedgt werden, so dass die empirische Gewinn-Verlust Verteilung eines Modells schließlich aus 831 Datenpunkten bestimmt wird. In Tabelle 8.5 sind Mittelwert und Standardfehler dieser Gewinn-Verlust Verteilungen für das Delta Neutral Hedging aus jedem Modell aufgeführt. Die Fehler sind zum einen in Geldeinheiten, was dem konkreten Endvermögen des Stillhalters entspricht, und zum anderen dem Betrage nach in normierten Form bezüglich des Optionspreises dargestellt, um eine vom konkreten Wert unabhängige Vergleichsbasis zu schaffen.

Im Idealfall, d.h. bei kontinuierlicher Anpassung sowie bei Wahl des richtigen Modells mit geeigneter Hedging-Strategie, sollten die Hedge-Fehler Null sein. Daher erzielen Modelle mit kleineren Fehlern in Tabelle 8.5 das bessere Ergebnis. Für Fehlerwerte dem Betrage nach ist dies offensichtlich, für sehr hohe Gewinne beim Stillhalter sollte dies jedoch ebenfalls so gewertet werden, da die Duplikation der Option beim Hedgen im Vordergrund steht.

Modell	Hedge-Fehler in Geldeinheiten	betragsmäßig normierte Hedge-Fehler
	Mittelwert [Standardfehler]	Mittelwert [Standardfehler]
CV	230,02 [14,48]	22,19 [0,11]
CVJ	232,12 [16,75]	25,68 [0,12]
SV-CIR	240,23 [16,18]	24,32 [0,11]
SVJ-CIR	237,3 [16,11]	24,24 [0,12]
SVJ-IJ-CIR	243,39 [16,02]	23,98 [0,11]
SVJ-CJ-CIR	244,56 [16,12]	24,07 [0,11]
SV4	240,72 [16,38]	25,88 [0,12]
SV-OU	244,16 [16,37]	24,86 [0,11]
SVJ7	236,57 [16,31]	25,23 [0,13]
SVJ-OU	238,99 [16,59]	25,17 [0,13]

Tabelle 8.5: Mittelwerte und Standardfehler der Delta Neutral Hedge-Fehler in Geldeinheiten bzw. betragsmäßig normiert über 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005.

Beim Delta Neutral Hedge kommt das CV Modell mit dem geringsten Fehler in Tabelle 8.5 sowohl in Geldeinheiten als auch betragsmäßig normiert aus. Die komplexeren Modelle erreichen durchweg einen höheren Fehler, wobei die Werte im Einzelnen nicht stark von einander abweichen. Für die Performance im Delta Neutral Hedging ist somit keine eindeutige Differenzierung, insbesondere nicht für die Modellgruppen mit CIR- bzw. OU-Prozess, möglich. Für die Modelle mit CIR-Prozess decken sich die Ergebnisse dieser Studie mit den

Untersuchungen aus der Literatur: Bei Bakshi et al [8] liegen die Hedge-Fehler für Optionen am Geld in einem schmalen Band zusammen, wobei das CV Modell den geringsten Wert annimmt. Nandi [102] gelangt in einer Studie, wobei das SV-CIR Modell dem CV Modell gegenüber gestellt wird, ebenfalls zu diesem Ergebnis.

Die Darstellung der Gewinn-Verlust Verteilung über den gesamten Zeitraum in Abbildung 8.3 unterstreicht die Ähnlichkeit der Ergebnisse. In den einzelnen Diagrammen ist das

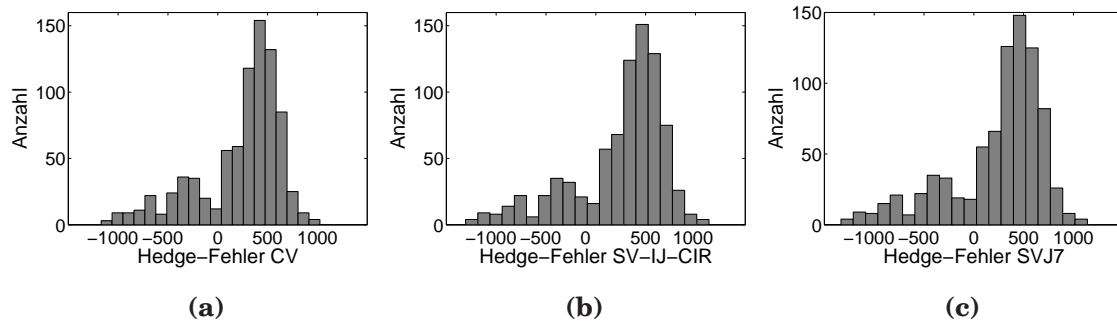


Abbildung 8.3: Gewinn-Verlustverteilungen der Delta Neutral Hedge-Fehler in Geldeinheiten über 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005 des (a) CV Modells, (b) SV-IJ-CIR Modells und (c) SVJ7 Modells.

CV Modell mit dem geringsten Mittelwert, sowie das SV-IJ-CIR und das SVJ7 Modell mit einem höheren und einem mittleren Mittelwert dargestellt. Da der betrachtete Zeitraum sowohl die Phase der starken Kursverluste als auch die Phase der steilen Kursanstiege enthält, ist die Gewinn-Verlust Verteilung der Hedge-Fehler sehr breit, wobei jedoch der größte Teil der Hedge-Fehler im positiven Bereich liegen und somit Gewinne darstellen.

In Tabelle 8.6 sind die Hedge-Fehler eines Delta-Vega Neutral Hedging für die gleichen Optionen wie in für das reine Delta Neutral Hedging aus Tabelle 8.5 dargestellt, wobei das Vorgehen der Gleichung (8.8) entspricht, die wie in Gleichung (8.11) diskretisiert ist. Für die zweite benötigte Option C^* wurde eine Option mit $K = 0,9 \cdot S_0$ und sonst unveränderten Eigenschaften gewählt.

Für Modelle mit konstanter Volatilität führen Delta und Delta-Vega Neutral Hedging auf die gleichen Ergebnisse, so dass die Werte für das CV und CVJ Modell aus Tabelle 8.5 entnommen sind, die im Vergleich mit den Fehlerwerten der Modelle mit stochastischer Volatilität wiederum am besten abschneiden. Die Hedge-Fehler der Modelle mit stochastischer Volatilität und ohne Sprünge in Kurs liegen jedoch näher an den Werten des CV Modells als beim reinen Delta Neutral Hedging. Schließen Modelle jedoch Sprünge im Kurs mit ein, steigen die Hedge-Fehler im Vergleich an. Solche Ergebnisse zeigen sich auch in der Studie von Bakshi et al [8], die beim Minimum Variance Hedging u.a. feststellen, dass die Hedge-Fehler für das SVJ-CIR Modell gegenüber dem SV-CIR Modell ansteigen.

Eine mögliche Erklärung nach Bakshi et al [8], die auch auf den Anstieg der Fehler beim

Modell	Hedge-Fehler in Geldeinheiten	betragmäßig normierte Hedge-Fehler
	Mittelwert [Standardfehler]	Mittelwert [Standardfehler]
CV	230,02 [14,48]	22,19 [0,11]
CVJ	232,12 [16,75]	25,68 [0,12]
SV-CIR	234,76 [16,03]	23,18 [0,11]
SVJ-CIR	249,51 [17,33]	27,87 [0,14]
SVJ-IJ-CIR	247,28 [16,83]	26,86 [0,13]
SVJ-CJ-CIR	248,13 [16,97]	27,03 [0,14]
SV4	235,67 [16,2]	23,87 [0,11]
SV-OU	235,06 [16,38]	24,01 [0,11]
SVJ7	247,73 [16,71]	27,11 [0,14]
SVJ-OU	248,43 [16,9]	27,26 [0,14]

Tabelle 8.6: *Mittelwerte und Standardfehler der Delta-Vega Neutral Hedge-Fehler in Geldeinheiten bzw. betragmäßig normiert über 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005.*

Delta-Vega Neutral Hedging übertragen werden kann, liegt in der Eigenschaft der Jump-Diffusion Modelle, dass Sprünge unregelmäßige große Ereignisse sind. Die durch die Kalibrierung bestimmte Sprunganzahl und -höhe dieser Modelle überschätzt bei der täglichen Anpassung des Hedge-Portfolios die wahre Wahrscheinlichkeit eines Sprungs, wodurch der Hedge-Fehler dem Betrage nach sowie im untersuchten Zeitraum auch der absolute Hedge-Fehler ansteigen.

Auf eine Untersuchung der Performance des Minimum Variance Hedging nach Gleichung (8.9) wurde im Rahmen dieses Kapitels verzichtet, da dafür zum einen weitere Hedge-Ratios für das SV-IJ-CIR Modell sowie für die Modelle mit OU-Prozess bestimmt hätten werden müssen und zum anderen nach der Minimum Variance Hedging Untersuchung von Bakshi et al [8] ein qualitativ vergleichbares Resultat zum Delta-Vega Neutral Hedging zu erwarten gewesen wäre.

Insgesamt kann für die Hedging Performance europäischer Optionen festgehalten werden, dass die komplexeren Modelle die zugrunde liegende dynamische Beziehung zwischen Basiswert und Derivat von Tag zu Tag nicht besser erfassen können als das CV Modell, obwohl diese Modelle in der In-Sample sowie in der Out-of-Sample Performance wesentlich bessere Ergebnisse erzielen konnten.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Unterschiede eines Delta Neutral Hedging einer exotischen Option im Vergleich zu den Ergebnissen der europäischen Option aufgezeigt. Wie bereits in Abschnitt 8.1.2 ausführlich dargestellt, kann Delta in diesem Fall nicht mehr mit einer geschlossenen Formel, sondern zum Beispiel mit Monte Carlo Simulation, berech-

net werden. Da durch den Simulationsschritt bei täglicher Anpassung der Rechenaufwand stark ansteigt, sind in Tabelle 8.7 nur die Hedge-Fehler des CV und des CVJ Modells wiedergegeben, wobei zur Berechnung von Delta die PW-Methode verwendet wird. Als exotische

Modell	Hedge-Fehler in Geldeinheiten	betragsmäßig normierte Hedge-Fehler
	Mittelwert [Standardfehler]	Mittelwert [Standardfehler]
CV	107,93 [14,57]	17,92 [0,11]
CVJ	142,63 [17,09]	20,34 [0,11]

Tabelle 8.7: Mittelwerte und Standardfehler der Delta Neutral Hedge-Fehler einer asiatischen Option in Geldeinheiten bzw. betragsmäßig normiert über 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005.

Option ist die asiatische fixed Strike Option mit Auszahlungsfunktion (7.1) gewählt, wobei alle weiteren Eigenschaften der Untersuchung der europäischen Optionen übernommen wurden, was insbesondere $K = S_0$ und $T = 0,5$ bedeutet.

Im Vergleich mit den Ergebnissen aus Tabelle 8.5 sind die absoluten Hedge-Fehler der asiatischen Option im CV Modell stark und die betragsmäßigen normierten Fehler leicht gesunken, wobei die jeweilige Streuung der Fehler jedoch unverändert geblieben ist. Im CVJ Modell sind die Hedge-Fehler ebenfalls bei unveränderter Streuung geringer.

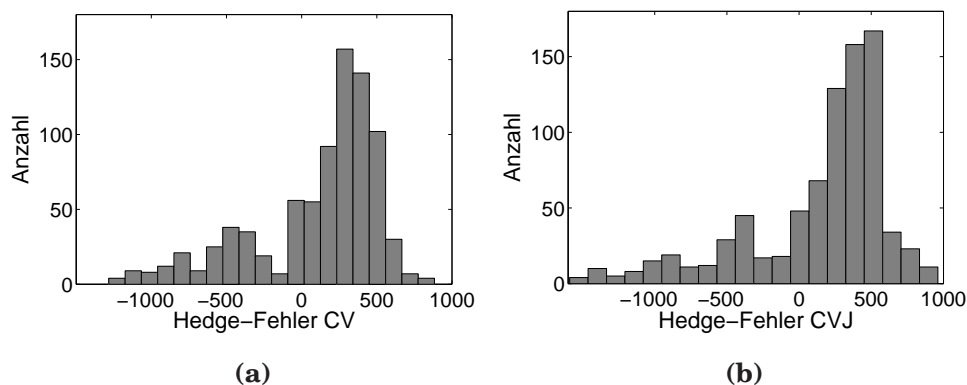


Abbildung 8.4: Gewinn-Verlustverteilungen der Delta Neutral Hedge-Fehler einer asiatischen Option in Geldeinheiten über 831 Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 08.04.2005 des (a) CV Modells und (b) CVJ Modells.

In Abbildung 8.4 sind die zu Tabelle 8.7 gehörenden Gewinn-Verlust Verteilungen für das CV und das CVJ Modell dargestellt. Die geringeren Hedge-Fehler im Mittel zeigen sich bei beiden Modellen dadurch, dass die Konzentration um den Mittelwert näher an die Null gerückt ist. Das Verhalten an den Rändern der Verteilung hat sich hingegen wenig geändert, was auf den sehr volatilen zugrunde liegenden Datensatz zurückzuführen ist.

Dass die Hedge-Fehler eines Delta Neutral Hedges einer asiatischen fixed Strike Option

an sich geringer ausfallen als die Fehler einer europäischen Option, liegt darin begründet, dass mit voranschreitender Zeit immer mehr Kurse des Basiswertes bekannt sind, die in die Berechnung der endgültigen Auszahlungsfunktion einfließen. Kurz vor Fälligkeit der Option nimmt Delta nur noch Werte nahe der Null an, da Schwankungen im Basiswert zu diesem Zeitpunkt nur noch einen geringen Einfluss auf den Wert der asiatischen Option haben.

Ob die Hedge-Fehler einer exotischen Option geringer oder größer als die der entsprechenden europäischen Option sind, hängt vom jeweiligen Optionstyp ab. So nehmen beispielsweise nach Hull [80] die Hedge-Fehler einer Barrier Option im Vergleich zu, da hier die Effekte aus Schwankungen des Basiswertes sehr groß sein können.

Kapitel 9

Modellrisiko bei Finanzinstitutionen

Für Finanzinstitutionen ist der Handel mit Derivaten an eine gewisse Anzahl von Risiken gekoppelt, zu denen auch das Modellrisiko zählt. Im vorliegenden Kapitel wird daher zunächst in Abschnitt 9.1 der Begriff des Modellrisikos von anderen finanziellen Risikoarten abgegrenzt. Nach der Identifizierung des Modellrisikos wird die Frage der Messbarkeit dieses Risikotyps in Abschnitt 9.2 untersucht, da jedes Risikomanagement geeignete Risikomessung voraussetzt. Wie groß der Anteil des Modellrisikos an der empirischen Studie dieser Arbeit folglich ist, wird in Abschnitt 9.3 dargestellt. Abschließend wird in einer weiteren empirischen Studie in Abschnitt 9.4 die Frage untersucht, mit welchem der betrachteten Modelle am wahrscheinlichsten reale Handelspreise für Barrier Optionen berechnet wurden.

9.1 Modellrisiko im Finanz–Risikokontext

Der Begriff des „Risikos“¹ ist in der Literatur nicht eindeutig definiert. In Anlehnung an Brachinger und Weber [26] wird in dieser Arbeit Risiko als ein mögliches, zukünftiges Ergebnis einer Handlungsalternative verstanden, das sich durch zwei Eigenschaften auszeichnet: Erstens wird das Ergebnis als Gefahr empfunden, einen Schaden oder Verlust zu erleiden, zweitens ist das Eintreten des Ergebnisses sowie seine Höhe unsicher.

Der Handel mit Derivaten bietet Investoren ein flexibles Instrument zum Transfer ihrer finanzwirtschaftlichen Risiken. Gleichzeitig treten jedoch eine Vielzahl von mit dem Deriva-

¹Der Begriff leitet sich ursprünglich aus dem lat. bzw. ital. „rischio“/„risco“ ab und bedeutet „eine Klippe umschiffen“. Entlehnt ist der Begriff wahrscheinlich vom griech. „riza“ für Wurzel, Klippe. Ebenfalls möglich, jedoch umstritten, ist die Abstammung vom arab. „risq“ für Gott–Gegebenes/Schicksal. Zuerst wurde der Begriff im ausgehenden Mittelalter in der Schifffahrt verwendet, um einen negativen Ausgang unsicherer Handelsgeschäfte zu beschreiben. Vgl. Gottschalk–Mazouz[70], S. 485f.

tehandel verbundenen Risiken für den gesamten Kapitalmarkt und insbesondere für einzelne Finanzinstitutionen, wie z.B. Banken, auf. Im Folgenden sind die wesentlichen Risiken aus Sicht des Derivatehandels beschrieben. Obwohl diese Risiken aus Gründen der Übersichtlichkeit nacheinander aufgelistet werden, darf nicht vernachlässigt werden, dass die Risiken nicht getrennt sondern simultan auftreten und stets in Wechselwirkung zueinander stehen. Ein Risikomanagement-System muss daher stets ganzheitlich jede Risikokomponente erfassen.

Das gesamte System des Kapitalmarktes wird durch das „Systemrisiko“ gefährdet, da durch Domino-Effekte² zunächst unbedeutender Kurseinbrüche ganze Märkte in Mitleidenschaft gezogen werden können. Nach Wallmeier [130] gibt es jedoch bisher keine signifikante empirische Studie, die zeigt, dass sich das Systemrisiko durch den vermehrten Handel mit Derivaten in den letzten Jahren erhöht hat.

Von den Risiken des klassischen Bankgeschäftes³ unterscheiden sich Risiken für Finanzinstitutionen aus dem Derivatehandel prinzipiell nicht. Die Risiken treten lediglich in anderer Ausformung auf.⁴

Das „Marktrisiko“ umfasst alle Verluste, die sich aus Marktpreisänderungen von Finanzprodukten ergeben können. Dazu zählen auch das „Zinsänderungsrisiko“ sowie das „Volatilitätsrisiko“. Da die Verluste, die Unternehmen bisher im Zusammenhang mit Marktrisiko im Derivatebereich realisierten, spektakuläre Höhen von über einer Milliarde USD erreichten⁵, steht diese Problematik häufig im Vordergrund von Risikountersuchungen.

Da sich der Wert einer Option aus dem Kurs des Basiswertes herleitet, hat das Marktrisiko unmittelbaren Einfluss auf den Optionspreis. Die Absicherung der Preisänderungen von Optionen durch eine geeignete Handelsstrategie ist daher Gegenstand des Kapitels 8.

Das „Kreditrisiko“ beschreibt die Gefahr, dass ein Marktteilnehmer seinen Zahlungsverpflichtungen aufgrund schlechter Bonität teilweise oder gar nicht mehr nachkommen kann. Um dieses Risiko quantitativ zu erfassen, wird versucht, die Wahrscheinlichkeit und gegebenenfalls die Verlusthöhe eines Ausfalls zu modellieren und zu schätzen. Vergeben Banken Kredite, ist es für den Verlauf des Geschäftes außerordentlich wichtig, die Kreditwürdigkeit ihrer Schuldner einschätzen zu können, z.B. durch Ratings, was Kreditrisiko zu einem Gegenstand der aktuellen Forschung macht.⁶

²Vgl. Rudolph[112], S.17f., Figlewski[62], S.163. Solche Kettenreaktionen sollen u.a. dem Börsencrash von 1987 verstärkt haben.

³Vgl. z.B. Hartmann-Wendels et al[74].

⁴Vgl. Figlewski[62].

⁵Vgl. Jorion[86]: die größten Verluste im Derivatehandel durch Marktrisiko Mitte der 90er Jahre: 1994 Orange County, 1,7 Mrd. USD; 1993 Metallgesellschaft, 1,3 Mrd. USD; 1995 Barings Bank, 1,3 Mrd. USD. Diese Verluste werden in der Literatur teilweise auch den anderen Risikoarten zugeschrieben. Wie eingangs erwähnt, gibt es stets Wechselwirkungen, die eine eindeutige Zuordnung erschweren.

⁶Vgl. z.B. Hartmann-Wendels et al[74].

Für börsengehandelte Derivate wird dieses Risiko mit Sicherungsmechanismen fast vollständig ausgeschlossen, da die Börse das Ausfallrisiko übernimmt. Bei OTC-Verträgen ist die Höhe des Kreditrisikos „abhängig von der Bonität des Vertragspartners“⁷. Bei Derivaten kann der Ausfall eines Vertragspartners sogar positiv für den anderen Partner sein, da eine eventuell negative Position durch den ausgefallenen Partner nicht mehr eingefordert wird und somit unrealisiert bleibt. Aus diesen Gründen ist die Bedeutung des Kreditrisikos bei Derivaten eng an das Marktrisiko gekoppelt.⁸

Eine weitere Risikoart sind die „operationellen Risiken“⁹, die sich aus Fehlern bei Arbeitsabläufen ergeben. Dazu zählen Fehlfunktionen bei IT-Systemen durch Störungen von außen aber auch durch Programmierfehler. Gerade letzteres kann bei komplexen Auszahlungsprofilen von exotischen Optionen zu falschen Bewertungen führen. Je spezialisierter die Materie wird, um so größer ist die Gefahr durch operationelle Risiken. Die „Group of Thirty“ schlägt daher z.B. vor, die Verantwortung für IT-Systeme dem obersten Management zu unterstellen sowie Handel und Abwicklung von einander zu trennen.¹⁰

Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (im Folgenden: BCBS) schließt in seiner Definition der operationellen Risiken die „rechtlichen Risiken“ explizit mit ein.¹¹

Die „rechtlichen Risiken“ bestehen darin, dass bereits abgeschlossene Verträge Interpretationsspielräume enthalten, so dass sie bei Gericht angefochten werden können. Je nach Gerichtsentscheid können Ansprüche dann nicht geltend gemacht werden. Für den Derivatehandel sind die rechtlichen Risiken jedoch begrenzt, da für börsengehandelte Derivate standardisierte Verträge geschlossen werden und für OTC-Derivate ebenfalls Rahmenverträge z.B. der „International Swaps and Derivatives Association“ (im Folgenden: ISDA) zur Verfügung stehen.¹²

Um die Auswirkungen der bisherigen Risikoarten für Banken einzudämmen, fordert der BCBS, dass die Bank über ausreichend Eigenkapital verfügt. Für „Liquiditätsrisiken“, die bei Banken auftreten, wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt die Zahlungsabflüsse die Zahlungszuflüsse inklusive Reserven übersteigen, fordert die Bankenaufsicht dies hingegen nicht, sondern macht konkrete Vorgaben zur Begrenzung dieses Risikos.¹³

Für einen Derivate-Verkäufer oder Käufer bedeutet das Liquiditätsrisiko, dass er für ein Derivat zu einem gewünschten Preis oder in einem bestimmten Volumen keinen Vertrags-

⁷Vgl. Hartmann-Wendels et al[74], S.253.

⁸Vgl. Hartmann-Wendels et al[74], S.286.

⁹Der Begriff „Betriebsrisiko“ ist für diese Risikoart ebenfalls geläufig.

¹⁰Vgl. z.B. Group of Thirty[71]. Neuere Publikationen der Group of Thirty sind auf der Internetseite www.group30.org zu finden.

¹¹Vgl. z.B. BCBS[10].

¹²Vgl. Hartmann-Wendels[74], S.286, oder die Internetseiten der ISDA: www.isda.org.

¹³Vgl. Hartmann-Wendels[74], S.411ff. Da der übermäßige Abzug von Einlagen in einem „Bank Run“ häufig aus irrationalen Gründen erfolgt, kann dies nicht durch höhere Eigenmittel verhindert werden.

partner findet, obwohl er es zur Absicherung seines Portfolios theoretisch benötigt. Derivate, die an Börsen gehandelt werden, sind in ihrer standardisierten Form jedoch im Normalfall liquide. Bei OTC-Kontrakten hingegen muss stets mit einem Liquiditätsrisiko gerechnet werden, dass es durch Engpässe im Handel zu Verlusten bei derivativen Strategien kommen kann.¹⁴

Eine Risikoart, die im Gegensatz zu den bisherigen Risiken erst mit dem Derivatehandel entsteht, ist das „Modellrisiko“. Erst in den Jahren 1997 bis 2000 wurde diese Risikoart durch mehrere Artikel zum Thema Modellrisiko, zumindest schlagwortartig, in Theorie und Praxis bekannt.¹⁵

Somit wurde erst 25 Jahre nach den ersten Modellen zur Optionsbewertung der Begriff des Modellrisikos ins allgemeine Interesse gerückt, während für die bereits beschriebenen Risikoarten schon seit zwei Dekaden anerkannte Risikomanagementsystemen ausgearbeitet und Erfolge erzielt wurden.¹⁶

Dass die Aufmerksamkeit genau Ende der 90er Jahre auf das Modellrisiko gelenkt wurde, ist nach der Asien Krise 1997 mit großen finanziellen Verlusten, gerade auch im Derivatebereich durch fehlerhafte Bewertung, sehr gut nachvollziehbar, da verstärkt nach Ursachen dieser Einbußen geforscht wurde.¹⁷

Die Existenz von Modellrisiko, einen Verlust aus modellbedingter Diskrepanz zum Marktwert zu erleiden, ist in der aufgeführten Literatur durchgängig anerkannt. Unter den Autoren herrscht Einigkeit darüber, dass ein mathematisches Modell stets nur einen Ausschnitt der wahren Welt widerspiegelt und immer ein Kompromiss zwischen Komplexität und Realität bildet. Damit müssen die Realität vereinfachende Voraussetzungen für die Modelle getroffen werden, die eventuell ganz oder teilweise nicht erfüllt sind. Somit birgt jedes Modell das Risiko fehlerhaft zu sein.

Über dieses allgemeine und intuitive Verständnis von Modellrisiko hinaus gehen die Meinungen in der Literatur jedoch auseinander. Eine anerkannte exakte Definition sowie Ansätze zur Quantifizierung fehlen in den frühen Arbeiten zum Modellrisiko. Stattdessen verwenden Crouhy et al [43] den Begriff des Modellrisikos als eine Art Sammelbecken für alle

¹⁴Vgl. Crouhy et al[43], S.27: ein Beispiel für einen Verlust im Derivatebereich von 670 Mio. USD, der auf Liquiditätsrisiko zurückzuführen ist, lieferte 1997 UBS mit modifizierten Wandelanleihen japanischer Banken. Als im November 1997 Aktien japanischer Banken tagelang nicht gehandelt wurden, konnte UBS seinen Hedge nicht rechtzeitig anpassen.

¹⁵Vgl. Elliott[56], Figlewski [62], Crouhy et al[43], Figlewski/Green[63], Gibson et al[67], Lhabitant[93]. Viele weitere Artikel aus dieser Zeit sind im Buch von Gibson(Hrsg.)[66] erschienen.

¹⁶Vgl. Gibson[66], S.XI.

¹⁷Vgl. Lhabitant[93], S.417: die größten Verluste mit Derivaten durch fehlerhafte Bewertung 1997: NetWest Markets, Verlust von 90 Mio. GBP durch falsche Schätzung der Volatilität von GBP-Zinsderivaten; Bank of Tokyo-Mitsubishi, Verlust von 83 Mio. USD, da ungeeignete Modelle US-Zinsderivate systematisch überbewerteten; UBS AG, Verlust von 120 Mio. CHF durch ungeeignete Modelle für strukturierte derivative Produkte.

Risiken, die bei der Bewertung von Derivaten mit Modellen entstehen. Darüber hinaus grenzen die Autoren Modellrisiko nur ungenau von den zuvor beschriebenen Risikokomponenten ab. Zum Beispiel sehen Crouhy et al [43] eine Quelle für Modellrisiko in unzureichender Liquidität für einen perfekten Hedge, was jedoch zuvor unter dem Aspekt Liquiditätsrisiko definiert wurde.

Ferner zählen in ihrer Arbeit u.a. Implementierungsfehler, mangelnde Datenqualität und schlechte Schätzverfahren für Parameter zu den Ursachen des Modellrisikos, obwohl diese Verlustquellen nach obiger Einordnung unter die operationellen Risiken fallen. Ähnliche Formulierungen finden sich z.B. bei Figlewski [62] und Lhabitant [93], die ebenfalls fehlerhafte Implementierung der Modelle als eine Ursache von Modellrisiko erwähnen, sowie bei Gibson et al [66] und erneut Lhabitant [93], die Schätzfehler und eine schlechte Datengrundlage als Risikoquellen angeben.

Da neben der Identifikation auch die Messung und das Management von Modellrisiken Ziel ist, erscheint eine präzise Beschreibung, was unter diesem Aspekt zu verstehen ist, unerlässlich. Daher wird in dieser Arbeit Modellrisiko in klarer Abgrenzung zu den bereits definierten Risikoarten stets als Risiko verstanden, das mit der Verwendung eines Modells verbunden bleibt, obwohl Datenauswahl, Schätzverfahren und Implementierungen mit größter Sorgfalt und Verständnis durchgeführt wurden, und das sich nicht mit besseren Verfahren reduzieren lässt. Die Gefahr eines Verlustes durch operationelle Risiken, z.B. durch Störungen von außen, oder Liquiditätsrisiken bleibt bestehen. Modellrisiko wird nicht als Ursache dieser Risiken gesehen, sondern als weitere, in Wechselwirkung stehende Komponente, die in die zu beachtenden Risiken des Derivatehandels eingegliedert werden muss.

Eine weitere Ursache jedoch, die von den Autoren ohne Einschränkung angeführt ist, wird im Folgenden als Grund für das Auftreten von Modellrisiko übernommen: Modellrisiko entsteht durch die unterschiedliche Spezifikation der stochastischen Prozesse in der Modellbildung. Die unbekannte wahre Renditeverteilung wird in jedem Modell mit einer eigenen Verteilungsannahme angenähert, wobei die Approximationen von unterschiedlicher Güte sind. Die beste Approximation innerhalb einer Modellmenge an die wahre Verteilung ist jedoch ebenfalls unbekannt. Lediglich die Schätzung für die beste Approximation ist bekannt.

Im folgenden Abschnitt wird konkretisiert, bei welcher Anwendung Modellrisiko auftritt und wie dies nach Cont [38]¹⁸ zur Konstruktion eines Modellrisikomaßes genutzt werden kann.

Damit kommt der Abschnitt der Vision von Gibson [66] ein Stück näher, Modellrisiko so zu beschreiben, wie die Nebenwirkungen eines Medikamentes: „a [...] financial model should be accompanied by its model risk contra-indications, in the same way as a drug is prescribed

¹⁸Cont[38] bevorzugt den Begriff „Modellunsicherheit“ anstatt „Modellrisiko“. Diese begriffliche Unterscheidung wird im Folgenden jedoch nicht übernommen, da Modellrisiko bereits im richtigen Kontext eingeführt wurde.

with a pharmacological listing of its potential side effects.“¹⁹

9.2 Risikomaß für das Modellrisiko

Bei börsengehandelten Optionen bestimmt der Markt den Preis, so dass das Modellrisiko bei diesen Optionen entfällt. Eventuelle Diskrepanzen zwischen dem theoretischen Wert und dem tatsächlichen Marktpreis verschwinden durch den Handel. Viele OTC Optionen hingegen sind stark anfällig für Modellrisiko, wenn ihre Bewertung ausschließlich über Modelle erfolgt. Es besteht somit die Möglichkeit eines Verlustes in einem Derivategeschäft, der sich aus der Modellwahl erklärt und nicht auf andere Risikoarten zurückzuführen ist. Greifbar wird Modellrisiko dann, wenn mit Modellen, die an Marktpreise kalibriert²⁰ sind, Preise einer OTC Option²¹ berechnet werden, deren weiteren Kenngrößen sonst unverändert bleiben. Wie bereits in den einzelnen Abschnitten des Kapitels 7 dargestellt, variieren diese Preise. Entscheidet sich eine Finanzinstitution nach diesem Vorgehen für einen dieser Preise, geht sie das Modellrisiko ein.

Die Bedeutung dieses Modellrisikos stellt Cont [38] am Beispiel der Bewertung von OTC Optionen vor und entwickelt Methoden, es nicht nur qualitativ zu erfassen, sondern auch quantitativ zu messen. Ziel eines solchen Modellrisikomaßes ist es, die Sensitivität eines Optionspreises bezüglich unterschiedlicher Bewertungsmodelle zu beschreiben und zu untersuchen, welche Optionstypen besonders sensibel bei der Modellwahl reagieren.

Durch die Ausrichtung der Modelle an Marktpreise bleibt bei diesem Vorgehen die Arbitrage-Freiheit und somit auch die Eigenschaften der Kohärenz²² des Modellrisikomaßes, die Cont [38] verlangt, gesichert. Die Forderung nach geldwerten Aussagen über den Anteil des Modellrisikos am Optionspreis wird ebenfalls mit der Kalibrierung des Bewertungsmodells am Marktpreis erfüllt.

Somit lauten die Voraussetzungen für ein sinnvolles Modellrisikomaß in einem endlichen Rahmen nach Cont [38] wie folgt:

- (i) Den Referenzpunkt bilden n gehandelte Optionen mit Auszahlungsfunktion $(H_i)_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, n\}$ und dazugehörige beobachtete Marktpreise $(C_i^*)_{i \in I}$. Dabei liegt C_i^* üblicherweise in einer Preisspanne $[C_i^{Bid}, C_i^{Ask}]$ zwischen Verkaufs- und Kaufpreis.
- (ii) Es liegt eine Menge \mathcal{Q} an m Arbitrage-freien Bewertungsmodellen vor, für die unter dem äquivalenten Martingalmaß $Q_k, k = 1, \dots, m$ bezüglich einer technisch adäquaten

¹⁹Vgl. Gibson[66], S.11.

²⁰Vgl. Kapitel 5.

²¹Vgl. Kapitel 7.

²²Diese sind Translationsinvarianz, Subadditivität, positive Homogenität, Monotonie. Vgl. Artzner et al[6].

Filtration \mathcal{F}_t der diskontierten Basiswerte $(S_t)_{t \in [0, T]}$ ein Martingal²³ ist und

$$\forall Q_k \in \mathcal{Q}, \forall i \in I: E^{Q_k}(|H_i|) < \infty, E^{Q_k}(H_i) = C_i^*,$$

$$\text{bzw. } E^{Q_k}(H_i) \in [C_i^{Bid}, C_i^{Ask}]$$

gilt.

Die Modellmenge \mathcal{Q} kann dabei mindestens aus einer parametrischen Modellfamilie $(Q_\theta)_\theta$ mit unterschiedlichen $\theta_1, \dots, \theta_m$ gebildet werden. Dies liefert bereits die geforderten m äquivalente Martingalmaße Q_k . Für die empirische Anwendung in dieser Arbeit besteht die Modellmenge aus den bereits diskutierten Modellen aus Abschnitt 3.6.

Sei die Menge aller Optionen mit zulässiger Auszahlungsfunktion wie folgt definiert

$$\mathcal{C} := \left\{ H \in \mathcal{F}_t, \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_i^Q(|H|) < \infty \right\},$$

dann beschreibt die Abbildung $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}^+$ das Modellrisiko für eine Option mit Auszahlungsfunktion aus der Menge \mathcal{C} .

Für die börsengehandelten Optionen, die nach obigen Voraussetzungen nicht dem Modellrisiko unterliegen, gilt für das Risikomaß μ

$$\forall i \in I: \mu(H_i) \leq |C_i^{Ask} - C_i^{Bid}|.$$

Eine konkrete Berechnungsvorschrift für ein kohärentes μ ergibt sich nach Cont [38] wie folgt: Hat eine Option mit Auszahlungsfunktion $X \in \mathcal{C}$ wohldefinierte Werte in allen Bewertungsmodellen aus der Modellmenge \mathcal{Q} und sind

$$\bar{\pi}(X) = \sup_{k=1, \dots, m} E^{Q_k}(X),$$

$$\underline{\pi}(X) = \inf_{k=1, \dots, m} E^{Q_k}(X) = -\bar{\pi}(-X)$$

die oberen und unteren Preisgrenzen, dann beschreibt

$$\mu_{\mathcal{Q}}(X) := \bar{\pi} - \underline{\pi} \tag{9.1}$$

das Modellrisiko der Option mit Auszahlungsfunktion X in Geldeinheiten.

Dabei erfüllt $\mu_{\mathcal{Q}}$ die folgenden Eigenschaften:

- Jeder Optionspreis, der mit den Modellen in \mathcal{Q} berechnet wird, liegt in dem Intervall $[\underline{\pi}, \bar{\pi}]$.
- Kommt bei einer Option mit Auszahlungsfunktion X' gar kein Modellrisiko zum Tragen, gilt $\underline{\pi} = \bar{\pi}$ und somit $\mu_{\mathcal{Q}}(X') = 0$.

²³Vgl. Kapitel 2 oder Abschnitt A.1 im Anhang.

- Die Preisgrenzen der börsengehandelten Optionen liegen innerhalb des Bid–Ask–Spreads:

$$\forall i \in I: \quad C_i^{Bid} \leq \underline{\pi}(H_i) \leq \overline{\pi}(H_i) \leq C_i^{Ask}.$$

Cont [38] gibt für eine kleine Auswahl an Bewertungsmodellen zwei Beispiele für $\mu_{\mathcal{Q}}$ an. Da diese wenigen Beispiele jedoch nicht ausreichen, Sensitivitätsfragen bzgl. eines Optionstyps zu beantworten, erfolgt im folgenden Abschnitt die Anwendung und Überprüfung des Modellrisikomaßes anhand der umfangreichen Auswahl an Preisen für exotische Optionen für zehn Bewertungsmodelle aus Kapitel 7.

9.3 Modellrisiko der empirischen Untersuchung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zu klären, welche der exotischen Optionen, vorgestellt in Kapitel 7, am anfälligsten für Modellrisiko ist. Innerhalb eines Optionstyps werden die Fragen untersucht, welchen Einfluss die Länge der Laufzeit, die Wahl des Strikes und die Phase des Marktes auf das Modellrisiko haben. Grundlage der Studie bilden die Preise der exotischen Optionen aus Kapitel 7, die dort bereits abgebildet und beschrieben wurden, jedoch nur im Hinblick auf die Variation der Preise, ohne Modellrisiko explizit zu untersuchen.

Die Modellmenge \mathcal{Q} setzt sich konsistenterweise aus den zehn Modellen aus Abschnitt 3.6 zusammen. Diese Modellmenge ist als Basis der Untersuchung fest gewählt, so dass sich alle Aussagen stets auf diese Modellmenge beziehen. Nach der Motivation dieser Modelle in Kapitel 3 besteht kein Zweifel an der Eignung dieser Modellmenge, alle wichtigen Aspekte des Marktes zu erfassen und somit als repräsentativ verstanden zu werden.²⁴

Um die Einflüsse der Anpassungsgüte an Marktdaten gering zu halten, werden im Folgenden stets die normierten Optionspreise verwendet, deren Vorteile und Berechnung ebenfalls in Kapitel 7 beschrieben wurden. Somit wird das Modellrisikomaß $\mu_{\mathcal{Q}}$ nach Gleichung (9.1) nicht in Geldeinheiten sondern in Einheiten der normierenden Plain–Vanilla Option beschrieben. Da die Werte des Modellrisikomaßes jedoch für die Sensitivitätsanalyse vergleichbar sein müssen, ist unter diesem Aspekt die Einheit des Modellrisikos irrelevant. Um vergleichbare Werte zu erhalten, wird das Modellrisikomaß $\mu_{\mathcal{Q}}$ durch den Durchschnittswert der normierten Preise der Modellmenge $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m C_k^{\text{norm}}$ dividiert und somit in Prozent dieses Durchschnittswertes angegeben. So erhält man pro Handelstag eine Prozentangabe je Option für die gesamte zehn–elementige Modellmenge, die sich für Tag t aus

$$\overline{\mu}_{\mathcal{Q}}(X, t) := \frac{\mu_{\mathcal{Q}}(X, t)}{\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} C_k^{\text{norm}}(X, t)} \quad (9.2)$$

²⁴Die Ergebnisse aus Kapitel 7 zeigen deutlich, dass besonders die Preise des CV und des CVJ Modells von den Preisen der Modelle mit stochastischer Volatilität abweichen. Demnach würde eine Modellmenge, die CV und CVJ nicht enthält, weniger Modellrisiko enthalten als eine Menge, die diese beiden Modelle berücksichtigt. Ziel dieses Abschnittes ist es jedoch gerade eine möglichst breite Auswahl relevanter Bewertungsmodelle, zu denen auch das CV und CVJ gehören, auf Modellrisiko zu untersuchen.

berechnet.

Dieses Maß $\overline{\mu_Q}(X, t)$ für Modellrisiko eines Optionstyps mit Auszahlungsfunktion X ist im Folgenden für die vier exotischen Optionen, Forward Start, asiatisch, Lookback und Barrier Option, über alle Handelstage t des Beobachtungszeitraums hinweg anhand der Ergebnisse aus Kapitel 7 berechnet und illustriert. Dabei sind X und t entsprechend einzusetzen und werden in der Bezeichnung im Folgenden weggelassen.

Zunächst sind in Abbildung 9.1 die Zeitreihen der $\overline{\mu_Q}$ für Forward Start Call-Optionen aus Abschnitt 7.3 wiedergegeben. Dargestellt sind jeweils für die Laufzeiten $T_1 = 0,5, T_2 = 1$ und $T_1 = 0,75, T_2 = 1,5$ das Maß $\overline{\mu_Q}$ für drei verschiedene Strikes im-Geld mit $k = 0,9$, am-Geld mit $k = 1$ sowie aus-dem-Geld mit $k = 1,1$. Die Zeitreihendarstellung gibt einen Überblick über die Größenordnung des Modellrisikos und dient der Einordnung unter Marktphasenaspekten.

Während für Forward Start Optionen im- und am-Geld das Modellrisiko für beide Laufzeiten über alle Marktphasen hinweg unter 20 Prozent bleibt, sind Forward Start Optionen aus-dem-Geld während der Seitwärtsbewegung des Marktes besonders anfällig für Modellrisiko. Eine kompaktere Darstellung der Werte für $\overline{\mu_Q}$ liefern die Boxplots in Abbildung 9.2 und 9.3, die die Beobachtungen aus der Zeitreihendarstellung unterstreichen.

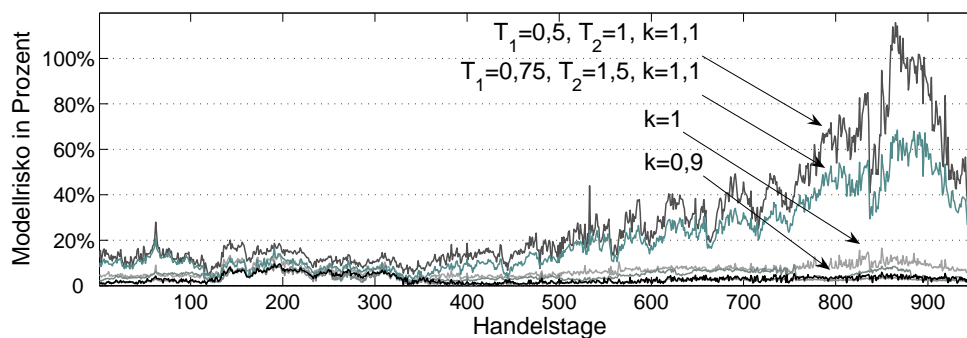


Abbildung 9.1: Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer Forward Start Call-Option für $k = 0,9, k = 1, k = 1,1$ jeweils für $T_1 = 0,5, T_2 = 1$ und $T_1 = 0,75, T_2 = 1,5$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

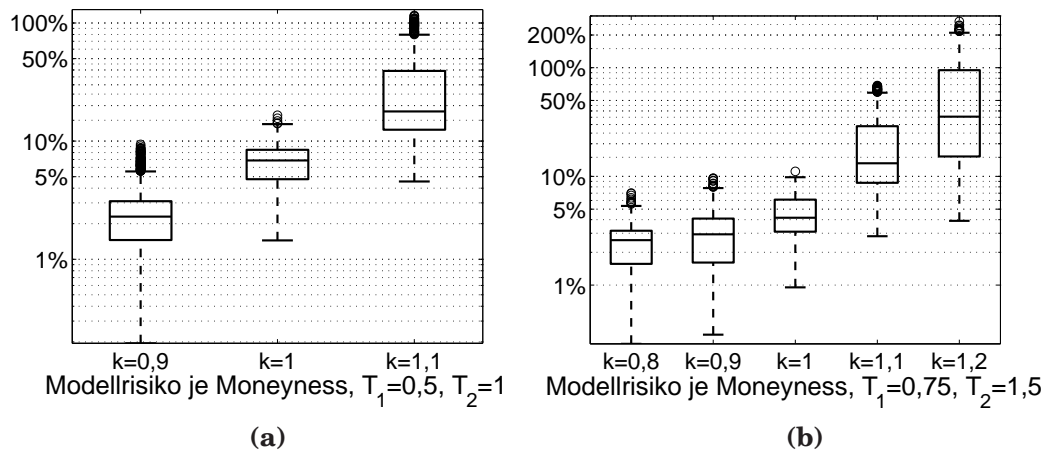


Abbildung 9.2: Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer Forward Start Call-Option mit verschiedenen Strikes für (a) $T_1 = 0,5$, $T_2 = 1$, (b) $T_1 = 0,75$, $T_2 = 1,5$ über alle Handelstage.

In Abbildung 9.2 sind jeweils für die zwei verschiedenen Laufzeiten (a) und (b) das Modellrisiko unterschiedlicher Moneyness-Kategorien, drei für die kürzere Laufzeit sowie fünf für die längere Laufzeit, auf logarithmierter Skala dargestellt. Für beide Fälligkeiten ist eine Zunahme des Modellrisikos zu erkennen, je weiter aus-dem Geld die Option liegt. Für Optionen im-Geld ist das Modellrisiko stets kleiner, während für Optionen am-Geld am wenigsten Ausreißer nach oben beobachtet werden.

Der direkte Vergleich der Laufzeiten, unterteilt in Moneyness-Kategorien, ist in Abbildung 9.3 aufgeführt. Die Länge der Laufzeit hat für (a) Optionen im-Geld wenig Auswirkungen auf das Modellrisiko. Für Optionen (b) am- und (c) aus-dem Geld jedoch ist für die kürzere Laufzeit stets ein höheres Modellrisiko festzustellen.

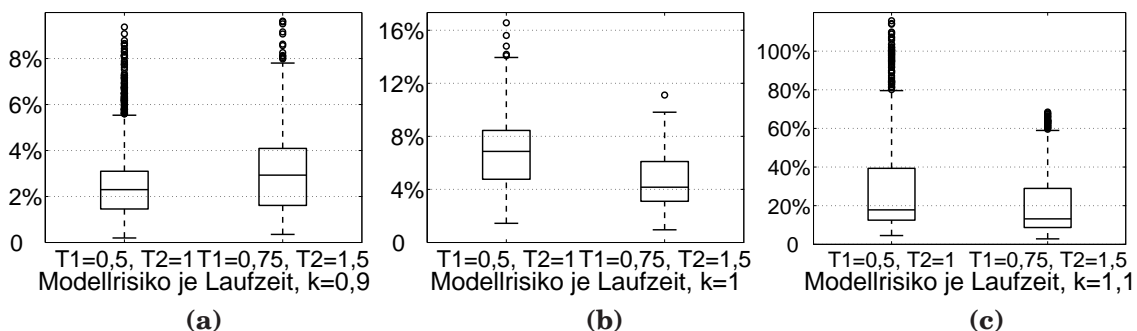


Abbildung 9.3: Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer Forward Start Call-Option für verschiedene Laufzeiten für (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ über alle Handelstage.

Identische Untersuchungen wie für die Forward Start Optionen sind im Folgenden für die asiatische und die Lookback Option aus Abschnitt 7.2 bzw. 7.4 durchgeführt. Zunächst sind in Abbildung 9.4 die Zeitreihendarstellungen der Werte für $\overline{\mu_Q}$ fixed Strike asiatischer Optionen dargestellt. Optionen aus-dem-Geld unterliegen während der Seitwärtsbewegung des Marktes einem sehr hohen Anteil an Modellrisiko, während das Modellrisiko für Optionen im-Geld und am-Geld wesentlich niedriger ausfällt.

Bei der Unterteilung in Moneyness-Gruppen, illustriert in Abbildung 9.5 jeweils für eine Laufzeit mit (a) $T = 0,5$ und (b) $T = 1$, ist das Modellrisiko für Optionen im- oder am-Geld eher moderat, während es für Optionen aus-dem Geld wesentlich höhere Werte annimmt.

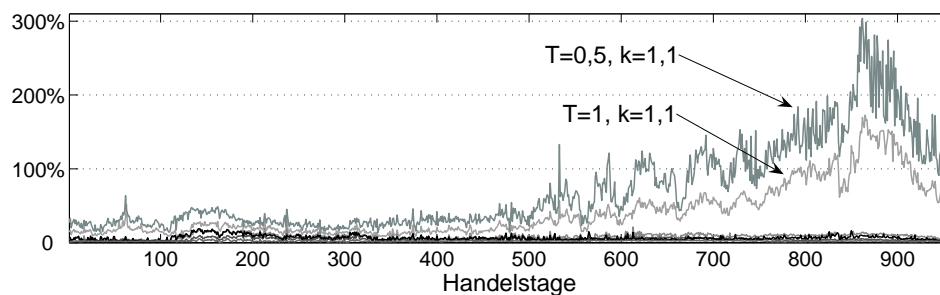


Abbildung 9.4: Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike asiatischen Call-Option für $k = 0,9$, $k = 1$, $k = 1,1$ jeweils für $T = 0,5$ und $T = 1$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

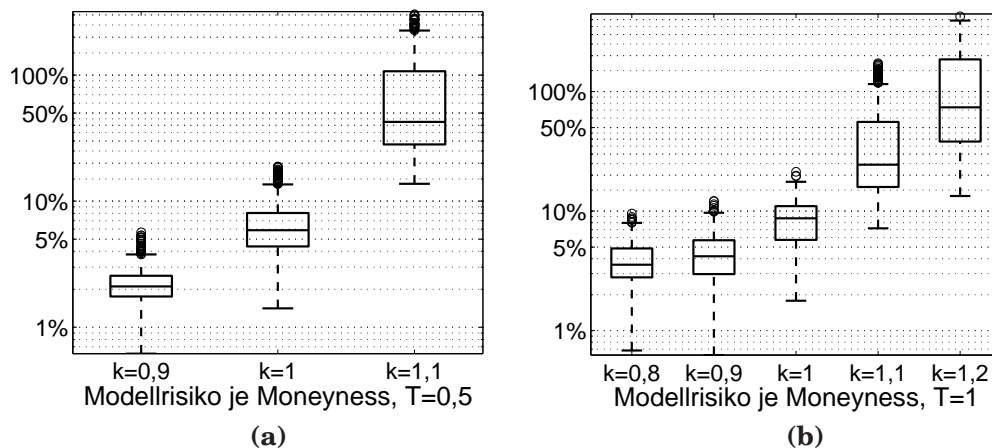


Abbildung 9.5: Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike asiatischen Call-Option mit verschiedenen Strikes für (a) $T = 0,5$, (b) $T = 1$ über alle Handelstage.

Ändert sich der Zeitpunkt der Fälligkeit für die gleiche Moneyness-Kategorie, so steigt nach Abbildung 9.6 das Modellrisiko für (a) Optionen im-Geld mit längerer Laufzeit an. Eine

leichte Erhöhung ist für (b) Optionen am–Geld zu registrieren, während für (c) Optionen aus–dem–Geld das Modellrisiko bei längerer Laufzeit sinkt.

Neben den Werten für die fixed Strike asiatische Option, ist nach Formel (7.2) pro Fälligkeit ebenfalls eine floating Strike asiatische Option berechnet. Für (a) $T = 0,5$ sowie (b) $T = 1$ ist das Modellrisiko dieses Optionstyps in Abbildung 9.7 dargestellt, aus der zu entnehmen ist, dass das Modellrisiko für die floating Strike asiatische Option bei längerer Laufzeit ansteigt.

Abbildung 9.8 enthält die Zeitreihendarstellungen der Werte für $\overline{\mu_Q}$ der fixed Strike Lookback Optionen. Wie zuvor werden in dieser Darstellung zwei Fälligkeiten, $T = 0,5$ sowie $T = 1$, und drei Moneyness–Kategorien, $k = 0,9$, $k = 1$ bzw. $k = 1,1$, unterschieden.

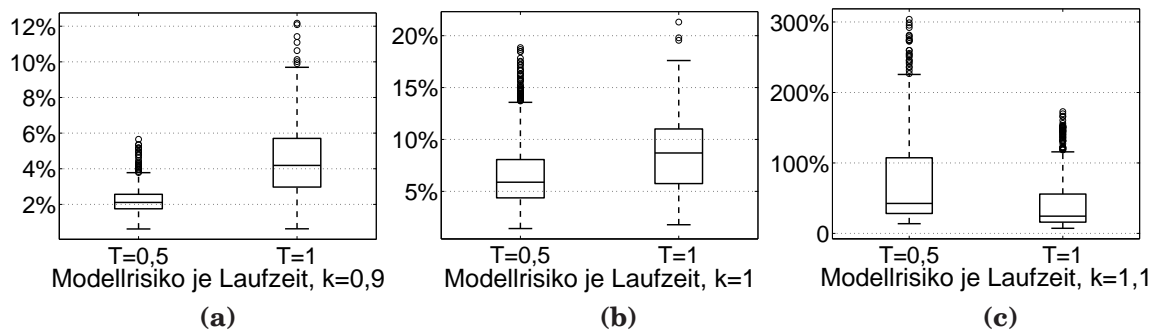


Abbildung 9.6: *Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike asiatischen Call–Option für verschiedene Laufzeiten für (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ über alle Handelstage.*

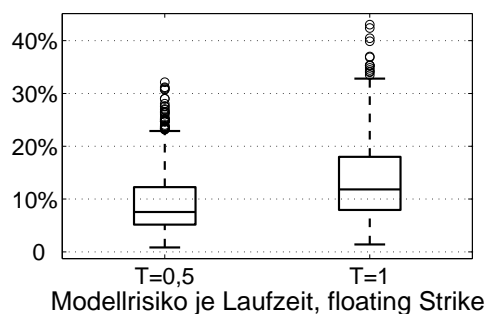


Abbildung 9.7: *Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer floating Strike asiatischen Call–Option für verschiedene Laufzeiten über alle Handelstage.*

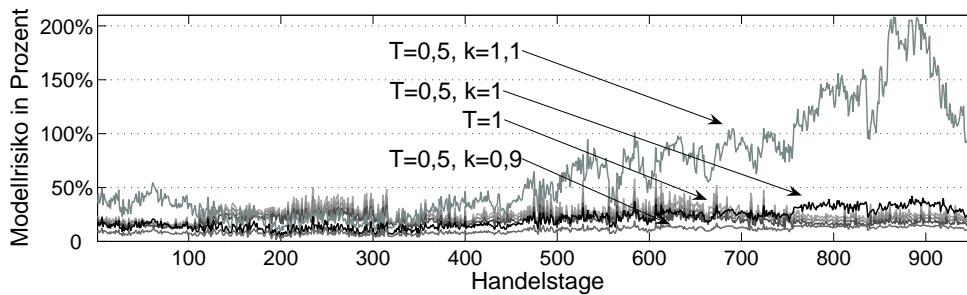


Abbildung 9.8: Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike Lookback Call-Option für $k = 0,9, k = 1, k = 1,1$ jeweils für $T = 0,5$ und $T = 1$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.

Die Zeitreihen mit Laufzeit $T = 0,5$ liegen deutlich getrennt jeweils auf einem anderen Niveau, während die Zeitreihen für $T = 1$ in Abbildung 9.8 optisch kaum verschieden sind. Dies deutet eine stärkere Streuung des Modellrisikos bei einer kürzeren Laufzeit an, was durch Abbildung 9.9 bestätigt wird. Zwar gilt für beide Laufzeiten (a) und (b), dass das Modellrisiko umso größer wird, je weiter die Option aus-dem-Geld liegt. Die Sensitivität bezüglich der Moneyness ist jedoch für die kurze Laufzeit (a) wesentlich stärker ausgeprägt als für die lange Laufzeit (b).

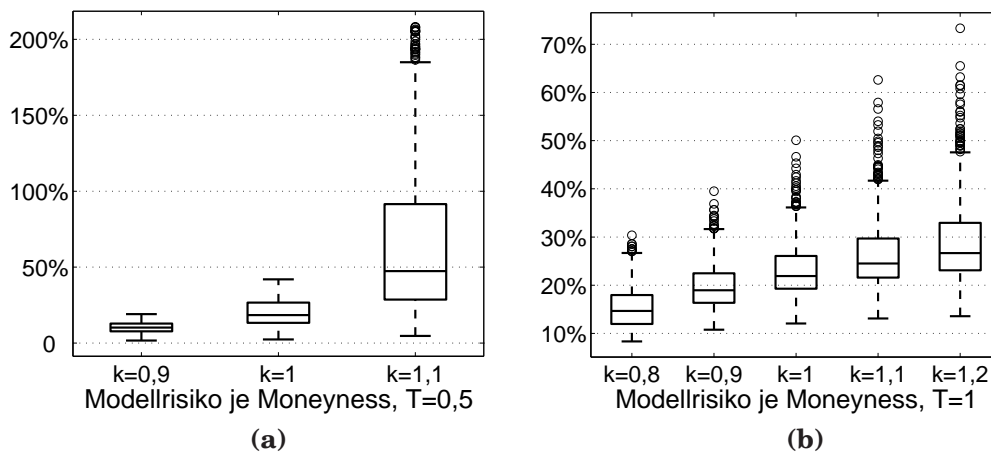


Abbildung 9.9: Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike Lookback Call-Option mit verschiedenen Strikes für (a) $T = 0,5$, (b) $T = 1$ über alle Handelstage.

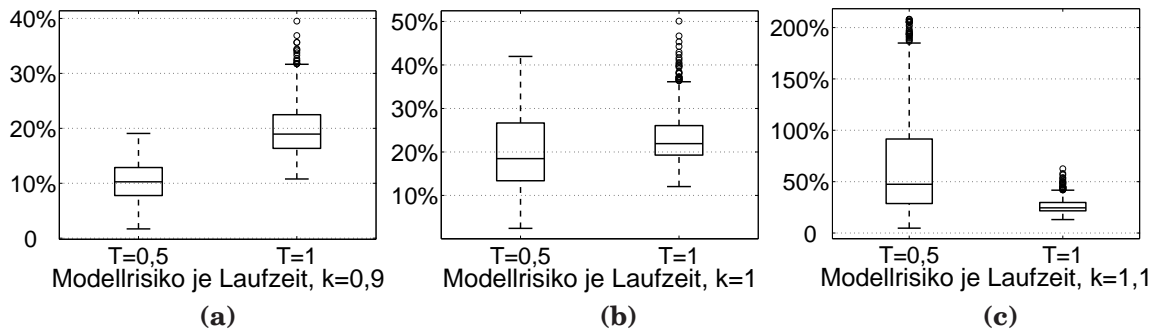


Abbildung 9.10: *Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer fixed Strike Lookback Call-Option für verschiedene Laufzeiten für (a) $k = 0,9$, (b) $k = 1$, (c) $k = 1,1$ über alle Handelstage.*

Der direkte Vergleich der Moneyness-Kategorien unterschiedlicher Laufzeiten ist in Abbildung 9.10 wiedergegeben. Das Modellrisiko steigt bei längerer Laufzeit für (a) Optionen im-Geld, bleibt etwas erhöht auf dem gleichen Niveau für (b) Optionen am-Geld und sinkt deutlich für (c) Optionen aus-dem-Geld. Das Modellrisiko bleibt folglich klein bei fixed Strike Lookback Call-Optionen im-Geld mit kürzerer Laufzeit und bei aus-dem-Geld mit längerer Laufzeit.

Bei den floating Strike Lookback Optionen in Abbildung 9.11 ist für die wesentliche Höhe des Modellrisikos, abgesehen von mehr Ausreißern nach oben, kein wesentlicher Einfluss der Laufzeit festzustellen.

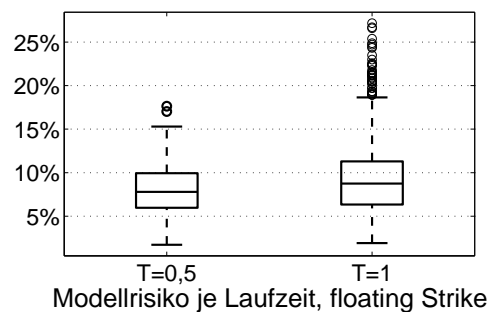


Abbildung 9.11: *Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes einer floating Strike Lookback Call-Option für verschiedene Laufzeiten über alle Handelstage.*

Abbildung 9.12 beinhaltet die Zeitreihendarstellung des Modellrisikomaßes $\overline{\mu_Q}$ für Barrier-Optionen, beschrieben in Abschnitt 7.5. Im Diagramm (a) sind DOB Call-Optionen für drei verschiedene Kursschranken dargestellt, wobei das Modellrisiko bei Schranken nahe dem aktuellen Kurs des Basiswertes größer ist als für deutlich kleinere Barrieren, was besonders in

Marktphasen starker Kursschwankungen zum Tragen kommt. Während der Seitwärtsbewegung des Marktes nähern sich die Zeitreihen an und die Unterschiede der drei Optionstypen verwischen. Für die UOB Call-Optionen in Abbildung 9.12 (b) ist die Beobachtung umgekehrt. Sind zunächst keine klaren Aussagen zu treffen, so trennen sich die Zeitreihen in der Phase der Seitwärtsbewegung und das Modellrisiko nimmt besonders für die Option mit Schranke $b = 1,2$ ab. Der Anteil des Modellrisikos fällt in dieser Phase sogar unter den Durchschnitt der Werte zuvor, während sich der Anteil für die Schranken mit $b = 1,1$ und $b = 1,05$ eher oberhalb der bisherigen Werte befindet. Insgesamt ist für diesen Optionstyp das Modellrisiko auf einem höheren Niveau als für die DOB Call-Optionen.

Die Boxplots in Abbildung 9.13 verdeutlichen die Erkenntnis aus der Zeitreihendarstellung: Je unbedeutender die Kursschranke wird und je mehr sich die Barrier Option der Plain-Vanilla Option nähert, umso weniger spielt das Modellrisiko eine Rolle. Liegt die Barriere aber nahe dem aktuellen Kurs des Basiswertes, so enthält dieser Optionstyp ein hohes Modellrisiko.

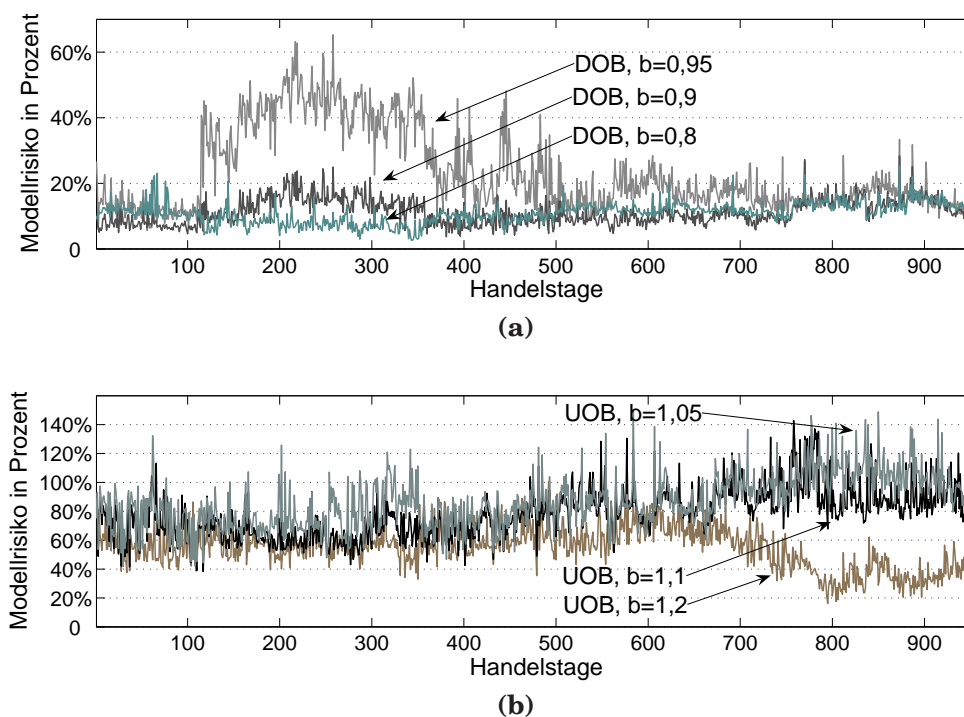


Abbildung 9.12: *Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes (a) DOB Call-Optionen mit Kursschranken $b = 0,8$, $b = 0,9$, $b = 0,95$ und (b) UOB Call-Optionen mit Kursschranken $b = 1,05$, $b = 1,1$, $b = 1,2$ jeweils für $T = 0,5$ über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass bei allen betrachteten Optionstypen für Optionen aus-dem-Geld das Modellrisiko höher ist als für Optionen im- oder am-Geld.

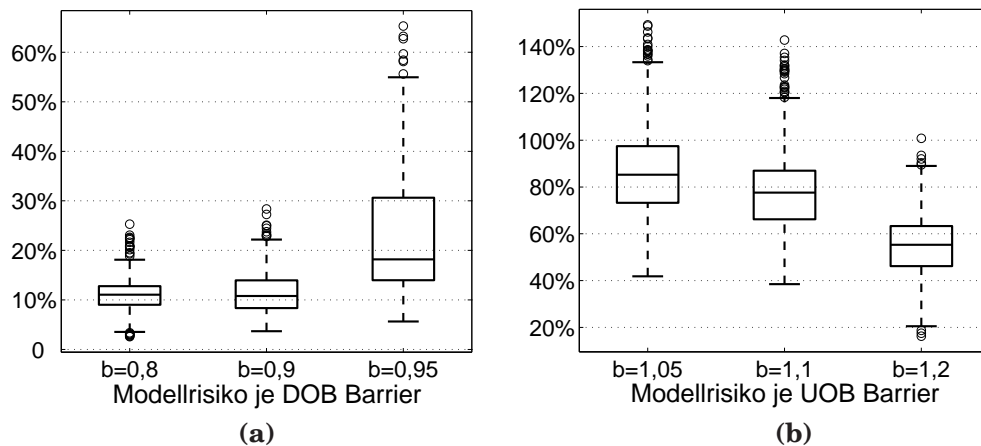


Abbildung 9.13: *Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes*
 (a) *DOB Call-Optionen mit Kursschranken $b = 0,8$, $b = 0,9$, $b = 0,95$ und*
 (b) *UOB Call-Optionen mit Kursschranken $b = 1,05$, $b = 1,1$, $b = 1,2$ jeweils für*
 $T = 0,5$ *über alle Handelstage vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005.*

Dabei werden die höchsten Werte stets für die kürzere Laufzeit angenommen, so dass Call-Optionen aus-dem-Geld mit baldiger Fälligkeit am meisten Modellrisiko in sich tragen. Für Optionen im-Geld ist das Modellrisiko über alle Typen hinweg am geringsten, so dass kurze Call-Optionen im Geld insgesamt am wenigsten vom Modellrisiko betroffen sind.

Auf diesem niedrigen Niveau steigt es jedoch bei längerer Laufzeit an. Diese Laufzeiteffekte auf das Modellrisiko sind in Tabelle 9.1 für alle exotischen Optionstypen zusammengestellt. Das Verhalten für Optionen am-Geld ist je nach konkretem Optionstyp verschieden.

Modellrisikoeffekte bei steigender Laufzeit	Optionen		
	im-Geld	am-Geld	aus-dem-Geld
Forward Start	↗	↘	↘
fixed Strike Asiat	↗	↗	↘
floating Strike Asiat	→		
fixed Strike Lookback	↗	↗	↘
floating Strike Lookback	→		

Tabelle 9.1: *Laufzeiteffekte auf das Modellrisiko bei steigender Laufzeit.*

Für die Forward Start Option fällt der Anteil des Modellrisikos, während er für fixed Strike asiatische und Lookback Option leicht zunimmt.

Die floating Strike Optionen sind für beide Laufzeiten bei der asiatischen Option etwas modellrisikoreicher als die fixed Strike Variante am- bzw. leicht aus-dem Geld. Bei den Lookback Optionen bildet der floating Strike Typ die modellrisikoärmste Ausprägung dieses Op-

tionstyps.

Eine deutliche Auswirkung auf die Höhe des Modellrisikos haben die unterschiedlichen Marktphasen bei Forward Start, asiatischer und Lookback Option nur auf die Optionen ausdem-Geld und dabei besonders für die kürzere Laufzeit. Problematisch ist hierbei besonders die Phase der Seitwärtsbewegung des Marktes. Für UOB Barrier Optionen ist diese Beobachtung ebenfalls zutreffend, für DOB Barrier Optionen ist jedoch die kritische Phase die Zeit starker Marktbewegungen. Insgesamt steigt das Modellrisiko bei Barrier Optionen an, je näher die Kursschranke an den aktuellen Basiswert gelegt wird.

Der Vergleich des Modellrisiko-Medians der exotischen Optionstypen untereinander ergibt für Optionen am-Geld, dass die Forward Start Option mit Laufzeit $T = 1$ den niedrigsten Median mit rund vier Prozent erreicht, gefolgt von der fixed Strike asiatischen Option für $T = 0,5$ mit rund sieben Prozent. Die floating Strike Variante kommen bei dieser Laufzeit auf rund acht Prozent. Mit rund 20 Prozent Anteil Modellrisiko im Median liefert die fixed Strike Lookback Option die höchsten Werte der exotischen Optionen ohne Kursschranken. Durch eine extreme Wahl der Kursschranken für Barrier Optionen steigt der Anteil Modellrisiko stark an, was diesen Typ zum sensitivsten bezüglich Modellrisiko unter den exotischen Optionen macht.

9.4 Risiko durch Marktstandards

Die bisherigen Untersuchungen zum Modellrisiko in diesem Kapitel fanden innerhalb einer bekannten, auf Marktpreise von Plain-Vanilla Optionen kalibrierten Modellmenge statt, die schließlich eine entsprechende Menge an Optionspreisen für OTC Optionen lieferte.

Figlewski [62] und Wallmeier [130] beziehen in ihre Überlegungen zum Modellrisiko jedoch auch den Marktstandard als ein quasi unbekanntes Modell mit ein, wobei der Marktstandard durchaus nicht dem Modell mit dem besten Ranking in einem Modellvergleich entsprechen muss. Vermutlich wird der Marktstandard sogar von einem vergleichsweise älteren oder weniger komplexem Modell repräsentiert, da sich die neusten theoretischen Modellentwicklungen erst mit der Zeit am Markt etablieren.

Für Figlewski [62] und Wallmeier [130] birgt daher die Verwendung eines Modells, das zwar objektiv die Realität besser nachbildet, aber nicht dem Marktstandard entspricht, ein Risiko. Die zwangsläufige Abweichung vom Modellwert zum Marktpreis kann nicht für eine Arbitrage-Strategie verwendet werden²⁵, da kein Marktteilnehmer bereit ist, zu diesem theoretischen Preis zu kaufen²⁶.

Aus diesen Gründen wird in diesem Abschnitt die Fragestellung untersucht, ob anhand

²⁵Vgl. Wallmeier[130], S. 149.

²⁶Vgl. Figlewski[62], S. 214.

eines Datensatzes realer Handelspreise²⁷ für Barrier Optionen²⁸ zu erkennen ist, mit welchem Modell aus der betrachteten Modellmenge am wahrscheinlichsten die vorliegenden Optionspreise berechnet wurden. Das Modell, mit dem die Handelspreise ursprünglich von den Finanzinstitutionen berechnet wurden, ist unbekannt und wird im Folgenden als Marktstandard bezeichnet.

Im Gegensatz zu den Anpassungsuntersuchungen im Kapitel 6 handelt es sich bei dieser empirischen Studie nicht um ein Kriterium des Modellvergleichs. Das heißt, eine gute Nachbildung der Handelspreise sagt nichts über die Güte des Modells aus, sondern hilft den Marktstandard für Barrier Optionen zu identifizieren.

Der Datensatz²⁹ enthält Handelspreise der EUWAX³⁰ von Down-and-Out Barrier Call-Optionen³¹ auf den DAX vom 01.01.2004³² bis zum 30.06.2004. Die Zeitspanne umfasst 127 Handelstage und reicht, innerhalb des bisher betrachteten Zeitraums vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 aus Abschnitt 5.3 eingeordnet, von Handelstag 507 bis Handelstag 633.

Die Höhe der Barrier entspricht bei allen Optionen der Höhe des Strikes, wodurch alle Call-Optionen im-Geld sind, was Abbildung 9.14 (a) verdeutlicht. Die Handelspreise geben die Mittelwerte der Bid-Ask Spreads zwischen 16:25 Uhr und 16:30 Uhr wider und stehen damit in Konsistenz zu den Tagesschlusskursen des DAX aus Abschnitt 5.3, die jeweils gegen 17:30 Uhr in diesem Zeitraum aufgezeichnet wurden.

Nach der Aufbereitung des Datensatzes durch Entfernen aller doppelten, fehlerhaften oder unvollständigen Einträge sowie nach Streichen aller Optionen mit einer Barrier weniger als drei Prozent unterhalb des Basiswertes, da sich diese Gruppe als besonders fehleranfällig erwies, liegen 7.045 Preise von DOB Call-Optionen vor. Die Häufigkeitsverteilungen bezüglich Moneyness, Preishöhe, Laufzeit sowie Anzahl pro Handelstag sind in Abbildung 9.14 dargestellt. Besonders auffallend sind die überwiegend kurzen Laufzeiten der DOB Optionen im Diagramm 9.14 (c), was sich jedoch mit der Einordnung dieser Wertpapiere durch die EUWAX als „spekulative, meist für kurzfristige Investments gedachte Produkte, denen unter gewissen Bedingungen der Totalverlust droht“³³ deckt.

Um einen Anhaltspunkt zu erhalten, an welches Modell bzw. an welche Modellierungs-

²⁷In diesem Abschnitt wird zur Abgrenzung zu den EUREX-Marktpreisen der DAX Optionen, beschrieben in Abschnitt 5.3, der Begriff Handelspreise für die real handelbaren Barrier-Optionspreise verwandt.

²⁸Vgl. Abschnitt 7.5 für Definition und Interpretation.

²⁹Die Daten wurden freundlicherweise vom Lehrstuhl für Derivate und Financial Engineering, Prof. Dr. Christian Schlag, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main zur Verfügung gestellt.

³⁰Die EUWAX ist seit 1999 ein spezielles Segment der Börse Stuttgart, das eine Plattform für den verbrieften Handel mit Derivaten wie Optionsscheine, exotische Optionen oder Aktienanleihen bietet.

³¹Vgl. Gleichung (7.5) für die Formel des Payoffs.

³²Wie für die Marktpreise der Plain-Vanilla Optionen gilt, dass der erste Handelstag im Jahr der 02.01. ist. Aus Konsistenzgründen wird jedoch stets der 01.01. als Beginn des Datensatzes angegeben.

³³Vgl. die Internetseiten der EUWAX: www.euwax.de.

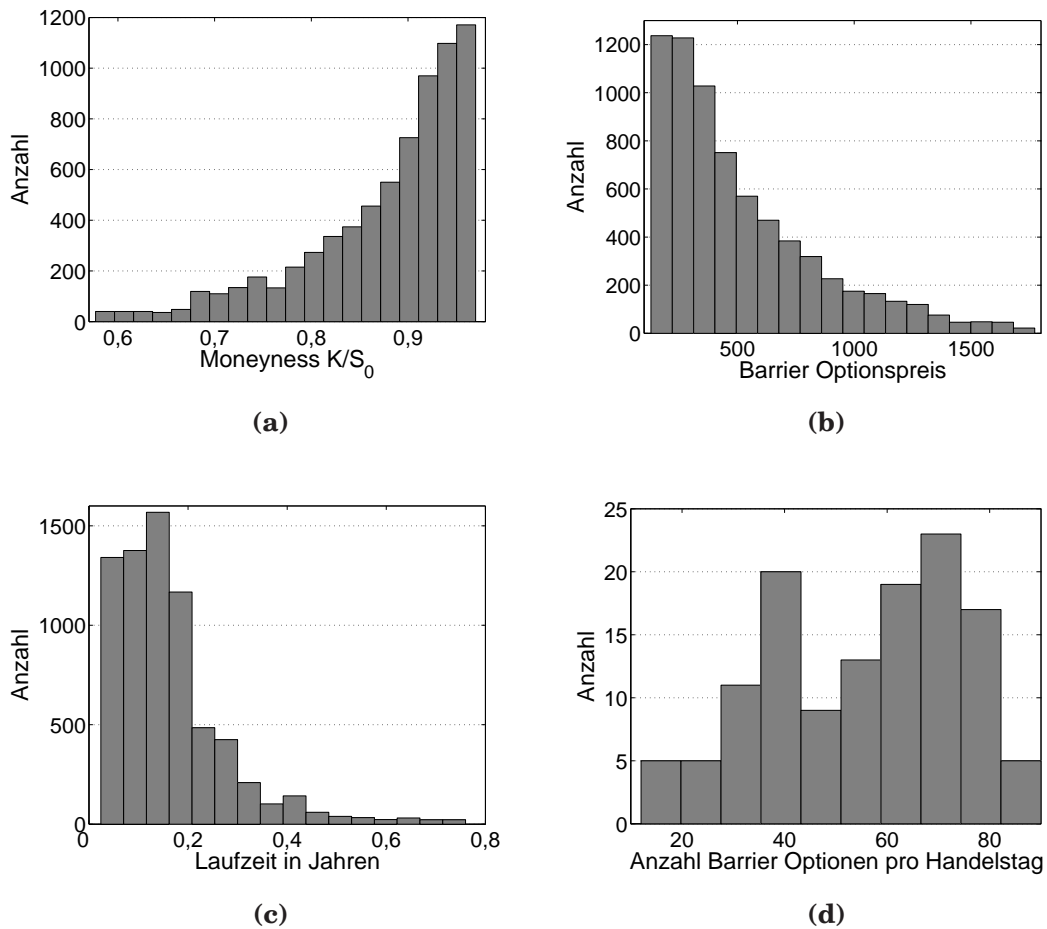


Abbildung 9.14: *Histogramme der Down-and-Out Barrier Call-Optionen auf den DAX vom 01.01.2004 bis zum 30.06.2004 im aufbereiteten Datensatz: (a) Moneyness K/S_0 , (b) Barrier Optionspreise, (c) Laufzeiten, (d) Anzahl an Barrier Optionen pro Handelstag.*

komponenten sich die Preise aus Abbildung 9.14 (b) anlehnen, werden die DOB Optionen aus dem beschriebenen Datensatz mit den Modellen aus Abschnitt 3.6 nachgebildet. Dazu werden für jeden Handelstag die entsprechenden Parameter aus der Kalibrierung aus Abschnitt 5.4 gewählt und die DOB Optionen bewertet.

In den bisherigen Untersuchungen zu DOB Optionen in Abschnitt 7.5 wurde ein diskreter Beobachtungszeitpunkt am Ende jedes Handelstages gewählt, um den Basiswert mit der Schranke zu vergleichen. Da für DOB Optionen an der EUWAX dieser Vergleich zu Handelszeiten jedoch kontinuierlich erfolgt, wurden bei der Bewertung zehn tägliche Beobachtungszeitpunkte berücksichtigt, was in Tests zu einer annehmbaren Approximation an eine kontinuierliche Option bei vertretbarem Rechenaufwand führt.

Die Abweichungen der Modellwerte von den Handelspreisen werden mit den bekannten Fehlermaßen nach Gleichung (5.2) quantifiziert. Die gemittelten Fehler sind in Tabelle 9.2

über alle 127 Handelstage dargestellt. Die Ergebnisse sind dabei so zu interpretieren, dass

	RMSE	APE[%]	AAE	ARPE[%]
CV	7,53	1,29	6,2	1,87
CVJ	20,45	3,17	14,93	5,06
SV-CIR	8,08	1,36	6,52	2,11
SVJ-CIR	14,93	2,39	11,44	3,77
SVJ-IJ-CIR	12,98	2,07	9,91	3,33
SVJ-CJ-CIR	16,55	2,62	12,56	4,14
SV-OU	7,93	1,32	6,36	2,05
SVJ-OU	14,34	2,32	11,14	3,68
SV4	7,98	1,34	6,43	2,08
SVJ7	15,76	2,5	12,05	4,04

Tabelle 9.2: *Mittelwerte der Fehlermaße aller Modelle für die Abweichungen vom Modellwert zum Handelspreis von DOB Call-Optionen über alle 127 Handelstage vom 01.01.2004 bis zum 30.06.2004.*

ein niedriger Fehler darauf hindeutet, dass das entsprechende Modell eher Anwendung in der Praxis zur Bewertung von DOB Call-Optionen findet als ein Modell, dessen Abweichungen wesentlich größer sind.

In Tabelle 9.2 stimmen die Modellwerte der CV, SV-CIR, SV-OU und SV4 Modelle am besten mit den Handelspreisen überein, während die Fehler der Modelle mit Sprüngen nahezu doppelt so hoch ausfallen. Gemäß der obigen Interpretation sind die Handelspreise somit wahrscheinlicher auf das CV Modell oder auf Modelle mit stochastischer Volatilität ohne Sprünge zurückzuführen. Da das CV Modell in allen vier Fehlermaßen die kleinsten Werte aufweist, bildet dieses Modell vermutlich den Marktstandard. Verglichen mit den Ergebnissen des Kapitels 6, die dem CV stets die schlechteste In- und Out-of-Sample Performance zusprechen, scheint das CV Modell als Marktstandard jedoch nicht mehr zeitgemäß.

Da die Modelle mit stochastischer Volatilität die Handelspreise nur wenig schlechter als CV nachbilden, scheint sich dieses Konzept im Markt schon etabliert zu haben, was aufgrund des guten Aufwand-Performance Verhältnisses nach Kapitel 6 zu befürworten ist.

Die mit Abstand höchsten Fehler des CVJ Modells sprechen dafür, dass mit diesem Modell die Handelspreise nicht bewertet wurden. Die Entscheidung des Marktes, dieses Modell nicht zu verwenden, kann aufgrund schlechter Anpassungseigenschaften ebenfalls unterstützt werden.

Ungerechtfertigt hingegen bleibt die geringe Verwendung von Kombinationsmodellen mit stochastischer Volatilität und Sprüngen im Basiswert. Mit den richtigen Algorithmen liefern diese Modelle unter vertretbarem Aufwand die besten Ergebnisse des Modellvergleichs und

sollten somit stärker in der Praxis eingesetzt werden.

Insgesamt ist jedoch festzuhalten, dass durch die großen Abweichungen in Tabelle 9.2 das eingangs erwähnte Risiko nach Figlewski [62] und Wallmeier [130] besteht, wenn mit den Modellwerten an Marktstandards vorbei Angebote plaziert werden.

Theoretisch schafft eine Kalibrierung der Modelle auf die Handelspreise der DOB Call-Optionen anstatt auf die Marktpreise der Plain-Vanilla Optionen Abhilfe, wenn weitere DOB Optionen mit anderer Ausstattung, wie z.B. Strike oder Laufzeit, bewertet werden sollen. Praktisch ist jedoch eine Kalibrierung auf DOB Optionen technisch schwieriger und zeitlich aufwendiger als die in Kapitel 5 beschriebene Kalibrierung auf Plain-Vanilla Optionen. Da keine geschlossenen Bewertungsmethoden für die DOB Optionen vorliegen, müssen innerhalb der Minimierung Monte Carlo Simulationen verwendet werden, was die Anwendbarkeit auf eine kleine Zeitspanne begrenzt. Im Folgenden sind daher beispielhaft die Ergebnisse einer Kalibrierung über einen Zeitraum von vier Handelstagen für drei Modelle mit relativ wenig Parametern, CV, CVJ und SV4, wiedergegeben.

Die gemittelten, bekannten Fehlermaße nach Gleichung (5.2) sind in Tabelle 9.3 aufgeführt, wobei die mit „DOB“ gekennzeichneten Modelle die Kalibrierung auf die DOB Call-Optionen symbolisieren, während die Modelle ohne Index den Vergleichswert der Nachbildung, entsprechend dem Vorgehen in Tabelle 9.2, enthalten. Die Fehler der Kalibrierung auf

Zeitraum	Handelstage 507 bis 510	
	RMSE	ARPE[%]
CV _{DOB}	5,14	1,00
CV	6,31	1,58
CVJ _{DOB}	7,90	2,02
CVJ	20,24	5,39
SV4 _{DOB}	4,68	0,95
SV4	7,33	1,99

Tabelle 9.3: Mittelwerte der Fehlermaße der Modelle CV, CVJ und SV4 aus der Kalibrierung auf die Handelspreise von DOB Call-Optionen über vier Handelstage.

DOB Optionen sind in Tabelle 9.3 erwartungsgemäß kleiner als die Fehler aus der Nachbildung mit der Kalibrierung auf Plain-Vanilla Optionen. Daher senkt die Verwendung der Parameter aus der DOB Kalibrierung für weitere Bewertungen von DOB Optionen für diesen Markt das Risiko, am Marktstandard vorbei zu bewerten.

Die Ursache für die unterschiedlich hohen Fehler liegt in der Konstellation der Parameter, die im Folgenden verglichen werden. Die EUWAX gibt an, dass ein „weiterer Vorteil der Knock-out-Produkte [...] der geringe, weitgehend vernachlässigbare Einfluss der Vola-

tilität auf die Wertentwicklung der Produkte³⁴ sei. Dies deutet an, dass die Parameter, die die Volatilität repräsentieren, bei der DOB Kalibrierung geringer als die Parameter bei der Plain–Vanilla Kalibrierung ausfallen.

Zur Überprüfung sind die gemittelten Parameter über die vier Handelstage im direkten Vergleich zu den entsprechend gewählten Parametern aus Abschnitt 5.4 in Tabelle 9.4 gegenübergestellt.

Zeitraum	Handelstage 507 bis 510						
	σ / v_0	λ	μ	δ	κ	β	ρ
CV _{DOB}	0,11	-	-	-	-	-	-
CV	0,23	-	-	-	-	-	-
CVJ _{DOB}	0,10	1,20	-0,03	0,30	-	-	-
CVJ	0,16	0,20	-0,43	0,23	-	-	-
SV4 _{DOB}	0,14	-	-	-	2,23	0,30	-0,70
SV4	0,22	-	-	-	0,38	0,38	-0,62

Tabelle 9.4: Mittelwerte der Parameter der Modelle CV, CVJ und SV4 aus der Kalibrierung auf die Handelspreise von DOB Call–Optionen über vier Handelstage.

Die Werte für σ bzw. v_0 der DOB Kalibrierung sind entsprechend der Vermutung wesentlich geringer als bei der Plain–Vanilla Variante. Für das CV Modell hat sich die implizite Volatilität mehr als halbiert.

Da Modellierungen von Sprüngen im Kurs eher mit hohen Fehlern in Tabelle 9.2 versehen wurden, wird die bessere Anpassung des CVJ Modells in Tabelle 9.3 durch eine stark reduzierte Sprunghöhe μ erreicht, so dass es nur zu sehr kleinen Sprüngen kommt. Dies jedoch in erhöhter Anzahl durch die gestiegene Intensität λ .

Bei dem SV4 Modell als Vertreter der Modelle mit stochastischer Volatilität erhöht sich die Mean–Reverting Geschwindigkeit κ , so dass Ausreißer schneller zurück zum langfristigen Mittel gezogen werden, was bei geringerer Variation β die Volatilität stabilisiert.

³⁴Vgl. die Internetseiten der EUWAX: www.euwax.de.

Kapitel 10

Schlussfolgerung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die wesentlichen Ziele dieser Arbeit setzen sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen aus einem umfassenden Vergleich von bekannten wie neuartigen Optionsbewertungsmodellen und zum anderen aus einer Untersuchung bezüglich Modellrisiko in Preisen exotischer Optionen. Diese beiden Komponenten hängen stark zusammen und sind sich gegenseitig Motivation und Folge. Zum einen ist die Existenz von Modellrisiko seit einigen Jahren in der Literatur unumstritten, so dass sich unweigerlich die Frage stellt, welches Modell unter Modellrisiko anderen Modellen vorzuziehen ist. Eine Antwort liefert ein Modellvergleich, der Stärken und Schwächen der Modelle in wichtigen Eigenschaften offenlegt und ein Ranking ermöglicht, auf dessen Basis eine Empfehlung ausgesprochen werden kann. Zum anderen ist für die Untersuchung des Modellrisikos ein Großteil der Ergebnisse des Modellvergleichs Voraussetzung. Erst auf einer Basis, die nur die Technik des Modellvergleichs schafft, können quantitative Aussagen über die Höhe des Modellrisikos getroffen werden. Miteinander verzahnt, laufen beide Untersuchungen über weite Teile der Arbeit parallel. Eine deutliche Trennung der Ergebnisse ist ebenso Ziel dieses letzten Kapitels wie die Darstellung der Konsequenzen aus Modellvergleich und Modellrisikountersuchung.

Jedoch noch vor Modellvergleich und vor Modellrisiko liegen die ersten Ergebnisse dieser Arbeit im Bereich der Modellierung. Im Einklang mit den Wechselwirkungen im Modellbildungsprozess aus Abbildung 1.1 wurde das in der Literatur wenig beachtete SV-OU Modell von Schöbel und Zhu [116] um Sprünge im Basiswert zum SVJ-OU Modell erweitert. Darüber hinaus war es durch geschickte Transformation der Parameter möglich, einen freien Parameter in der Originalversion für ein SV4 Modell als auch in der neuen Sprung-Variante für SVJ7 einzusparen. Ein Nachteil der Modellierung mit OU-Prozess, nämlich die positive Wahrscheinlichkeit negative Werte für die Volatilität anzunehmen, wurde theoretisch und empirisch entkräftet. Eine entsprechende Studie zur Kontrolle der Höhe der Wahrschein-

lichkeit hat gezeigt, dass mit einem Strafterm in der Zielfunktion der Kalibrierung Parameterkonstellationen, die zu einer geringeren Wahrscheinlichkeit führen, bevorzugt werden können, ohne dass zu starke Einbußen bei der Marktanpassung akzeptiert werden müssen.

Um wichtige Eigenschaften für den Modellvergleich, wie die Marktanpassung, untersuchen zu können, ist ein performantes Kalibrierungsverfahren nötig, wobei sich in dieser Arbeit eine Kombination aus einem Simulated Annealing Verfahren für die globale Suche und aus einem Quasi-Newton Verfahren für die anschließende lokale Minimierung bewährt hat. Die unmittelbaren Ergebnisse der Kalibrierung sind die optimalen Parametervektoren, aus deren Interpretation drei Ergebnisse an dieser Stelle herausgestellt werden sollen. Zum einen stellte sich die Korrelation zwischen Basiswert und Volatilität, eingangs als Leverage-Effekt eingeführt, für alle Modelle und über alle Marktphasen hinweg stets als negativ heraus. Zur Reduktion der Variation β in den Modellen mit CIR-Prozess reichte zum anderen bereits die Hinzunahme von Sprüngen im Basiswert aus. Die Erweiterung um Sprünge in der Volatilität reduzierte die Variation nur um einen kleinen weiteren Teil. Als letztes konnte die Start-Volatilität V_0 als Modell-invariant identifiziert werden. Die Ausnutzung dieser Eigenschaft führte in Kombination mit der impliziten Volatilität σ auf ein SV3 Modell mit stochastischer Volatilität, das nur über drei freie Parameter verfügte. Dieses Modell übertraf in Anpassungsfragen Modelle in einer ähnlichen Parameter-Größenklasse und hielt dem Vergleich mit anderen Modellen durch die Vorteile einer Modellierung mit nur drei Parametern auf der Kostenseite Stand.

Die anschließende Untersuchung der In- und Out-of-Sample Performance ließ die folgenden Schlüsse zu. Das CV Modell hatte in allen Marktphasen die schlechteste Anpassung. Das reine Jump-Diffusion Modell CVJ versagte besonders in den hoch volatilen Phasen des Marktes. Modelle mit stochastischer Volatilität waren dagegen zu jeder Zeit vergleichbar gut. Entgegen der Intuition war die In-Sample Performance der Modelle mit Sprüngen in der Volatilität nur geringfügig besser als die der Spezialfälle mit weniger Parametern. Bei der Out-of-Sample Performance schrumpfte dieser Vorsprung noch weiter, so dass Modelle mit Sprüngen in der Volatilität überparametrisiert erschienen, da sie die Fehlerschranke der Modelle mit stochastischer Volatilität ohne Volatilitäts-Sprünge nicht unterschreiten konnten. Im Vergleich zwischen dem OU- und dem CIR-Prozess schnitten Modelle mit OU-Prozess in der Anpassung stets besser ab als Modelle mit CIR-Prozess.

Insgesamt kann aufgrund des Modellvergleiches festgehalten werden, dass für Plain-Vanilla Optionen eine Empfehlung für Modelle mit Sprüngen im Kurs und mit durch den OU-Prozess modellierte stochastische Volatilität ausgesprochen werden kann. Im Hinblick auf die Anforderungen an die Modellierung aus Abbildung 1.1 erfüllten diese Modelle jede Kategorie am besten, ohne zu große Zugeständnisse an eine andere Kategorie machen zu müssen. Neben dieser generellen Empfehlung sollte durch die Unterscheidung nach Markt-

phasen jedoch auch herausgestellt werden, dass die getroffenen Modellannahmen stets überprüft werden müssen, um eine gute Performance auf Dauer zu erzielen.

Zu klären zu welchen Zeiten und für welche exotischen Optionstypen eine gut überlegte Wahl des Modells vor der Bewertung erfolgen sollte, war Ziel der Modellrisikountersuchung. Ergab sich für ein untersuchtes Szenario wenig Modellrisiko kann bei der Bewertung der entsprechenden Option ein weniger komplexes Modell gewählt werden, um Rechenaufwand einzusparen. Liegt jedoch eine Konstellation vor, die sich als besonders Modellrisiko-reich erwiesen hat, empfiehlt es sich, mehr Aufwand in die Modellierung zu investieren. Da sich aber durch solche Maßnahmen, das Modellrisiko nur eindämmen aber nicht eliminieren läßt, sollte das Modellrisiko in diesem Fall insbesondere mit Kapital unterlegt werden, um mögliche Verluste auffangen zu können.

Die wichtigsten Schlüsse aus der Modellrisikountersuchung sind im Folgenden zusammengestellt. Zum einen ergab sich, dass Modellrisiko für Optionen aus-dem-Geld, unabhängig vom konkreten Typ, höher ist als für Optionen am-Geld. Für Optionen im-Geld wurde ein weiterer Rückgang des Modellrisikos festgestellt. Ebenfalls Typ-übergreifend, wirkte sich eine kürzere Laufzeit Modellrisiko erhöhend aus.

Der Vergleich von vier unterschiedlichen exotischen Optionstypen führte auf die folgende Anfälligkeit für Modellrisiko. Die geringsten Auswirkungen hatte das Modellrisiko für die Forward Start Optionen. Ein etwas höherer Einfluss war hingegen bei den asiatischen Optionen zu verzeichnen. Gefolgt von den Lookback und Barrier Optionen, die sich am sensitivsten für Modellrisiko erwiesen.

Bei asiatischer und Lookback Option ist darüber hinaus eine Unterscheidung in fixed und floating Strike Option durchgeführt worden. Dabei ergab sich die floating Variante bei den Lookback Optionen als Modellrisiko-ärmer als die fixed Strike Optionen. Bei den asiatischen Optionen plazierte sich der floating Typ zwischen den Optionen am- und aus-dem-Geld und ist somit eher als Modellrisiko-reicher einzustufen. Für die Barrier Optionen kann das intuitive Ergebnis festgehalten werden, dass das Modellrisiko geringer wird, je weiter die Kursschranke vom aktuellen Kurs des Basiswertes entfernt liegt. Ein spürbarer Einfluss der Marktphase konnte vor allem auf Optionen aus-dem-Geld festgestellt werden, wobei die Auswirkungen besonders stark für die kürzere Laufzeit während der Seitwärtsbewegung des Marktes waren.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass bei Berücksichtigung der wesentlichen Aspekte ein geeignetes Bewertungsmodell für jede Situation gefunden werden kann. Dabei sollten jedoch stets die Modellannahmen mit der realen Welt überprüft und gegebenenfalls angepasst werden. Tompkins [126] vergleicht dazu die Instrumente zum Fliegen eines Flugzeugs mit den Modellen zur Bewertung von Optionen und kommt dabei zu dem Schluss, dass zwar die Instrumente die Umgebung des Flugzeugs beschreiben, aber sie niemals den „Blick aus

dem Fenster“ ersetzen können.

10.2 Offene Fragestellungen

Trotz einer umfassenden Studie und einer Reihe gelöster Probleme bleiben am Ende offene Fragestellungen, die weiterer Klärung über diese Arbeit hinaus bedürfen. Zunächst sind im Bereich der Modellierung durch Kombination andersartiger Prozesse weitere Modelle denkbar. Naheliegender könnten die Modelle mit OU-Prozess und Sprüngen im Basiswert um Sprünge in der Volatilität erweitert werden. Nachdem jedoch die Modelle von Duffie et al [52], die Modelle mit dieser Eigenschaft unter dem CIR-Prozess umfassen, keine bahnbrechende Verbesserung der In- und Out-of-Sample Performance bewirkten, wurde im Rahmen dieser Arbeit von einer Erweiterung der Modelle mit OU-Prozess in diese Richtung abgesehen. Ob dieser Schluss von CIR- auf OU-Prozess jedoch folgerichtig ist, würde erst eine weitere Untersuchung solcher Modelle zeigen.

In einem nächsten Punkt ist zurzeit die Frage nach der besten, die Positivität erhaltende Diskretisierung des CIR-Prozesses für z.B. die Monte Carlo Simulation noch nicht umfassend geklärt. Da Simulationen besonders bei der Bewertung pfadabhängiger Optionen benötigt werden, sollten zukünftige Tests von Diskretisierungsfragen auch für solchen Optionstypen anstatt für Plain-Vanilla Optionen, für die, die Untersuchung vereinfachend, durch im weitesten Sinne analytische Formeln Benchmark-Preise zum Vergleichen vorliegen, erfolgen.

Die Kalibrierung der Modelle an reale Marktdaten bildet die Grundlage weiterführender Untersuchungen. Da jedoch die Kalibrierung das numerisch aufwändigste Problem in diesem Zusammenhang darstellt, ist der Bedarf an geeigneten und schnellen Minimierungsverfahren noch lange nicht gedeckt.

Durch eine Weiterentwicklung der Hedging-Strategien sollte der Einfluß der Hedging-Performance im Modellvergleich erhöht werden. Ebenfalls sind weitere Aspekte für den Modellvergleich denkbar. Zum Beispiel stellt sich die spannende Frage, wie sich der Übergang vom risiko-neutralen Maß \mathbb{Q} zum ursprünglichen, realen \mathbb{P} -Maß auf die Parameter der Modelle auswirkt. Gelingt die Transformation der Parameter, liefert der Vergleich der Angemessenheit der Risikoprämien für das Volatilitäts- und Sprungrisiko eine weitere Instanz im Modellvergleich.¹

Die Auswahl an exotischen Optionen für die Modellrisikountersuchung bildet nur einen sehr kleinen Teil an exotischen Produkten ab, die aktuell OTC bewertet und verkauft werden. Untersuchungen weiterer Optionstypen könnten die Eigenschaften von Modellrisiko weiter aufzeigen sowie Händler bezüglich dieses Risikos weiter aufklären und sensibilisieren. Dazu würde auch die Weiterentwicklung von Risikomaßen für Modellrisiko entscheidend beitra-

¹Vgl. z.B. für erste Überlegungen Pan [104].

gen. Zum Beispiel wäre eine Modellrisikobetrachtung nicht nur über die Bewertung exotischer Optionen sondern auch über die Gewinn–Verlust Verteilung beim Hedgen exotischer Optionen denkbar. Am Ende könnte sich sogar auf Basis der einen oder anderen Herangehensweise ein Standard herauskristallisieren, mit dem eine Kapitalunterlegung des Modellrisikos für betroffene Finanzinstitutionen durchgesetzt werden kann.

In der festen Zuversicht, dass zukünftige Studien zu diesem Thema, die genannten Fragestellungen befriedigend klären werden, wird jedoch die grundlegendste Frage aller Modellierungen von Gibson [66] stets unbeantwortet bleiben: „Unfortunately, some questions will remain unanswered like: [. . .] And, if God exists, why didn't he shape the world according to our model? . . .“².

²Vgl. Gibson[66], S.15.

Symbole und Abkürzungen

AAE	Average Absolute Error
AJD	Affine Jump–Diffusion Modelle
APE	Average Percentage Error
ARPE	Average Relative Percentage Error
ATM	Option am–Geld
β	Variation der Volatilität
BFGS	Verfahren von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno [31]
BS	Black–Scholes [22]
Call	Kaufoption
C_T	Wert einer Call–Option am Ende der Laufzeit
CIR	Prozess von Cox, Ingersoll und Ross [41]
CV	„Constant Volatility“, Modell von Black und Scholes [22]
CVJ	„Constant Volatility“ mit „Jump“, Modell von Merton [98]
DAX	Deutscher Aktien Index
δ_S	Varianz der Sprünge im Basiswert
\mathcal{F}	Filtration
FFT	Fast Fourier Transformation
ITM	Option im–Geld
K	Strike
κ	Mean–Reverting Geschwindigkeit
λ_S	Intensität für Sprungprozess im Basiswert
λ_V	Intensität für Sprungprozess in der Volatilität
μ_S	Mittelwert für Sprünge im Basiswert
μ_V	Mittelwert für Sprünge in der Volatilität
$\bar{\mu}$	Korrekturterm für Martingalbedingung
N_t	Poisson Prozess

Ω	Zustandsraum
OTC	Over-the-Counter, Maßgeschneidertes Produkt auf Kundenwunsch
OTM	Option aus-dem Geld
OU	Prozess von Ornstein und Uhlenbeck [127]
Put	Verkaufsoption
P_T	Wert einer Put-Option
\mathbb{P}	Wahrscheinlichkeitsmaß (in der realen Welt)
\mathbb{Q}	Risiko-neutrales Wahrscheinlichkeitsmaß
ρ	Korrelationskoeffizient zwischen Basiswert und Volatilität
ρ_V	Korrelationskoeffizient zwischen Sprüngen im Basiswert und in der Volatilität
RMSE	Root Mean Square Error
S_t	Prozess des Basiswertes
S_0	Basiswert zum Anfangszeitpunkt $t = 0$
SDE	Stochastische Differentialgleichung
σ	Implizite Volatilität
SV	„Stochastic Volatility“
SV4	„Stochastic Volatility“-Modell mit vier Parametern
SV-CIR	„Stochastic Volatility“ mit CIR-Prozess, Modell von Heston [76]
SVJ7	„Stochastic Volatility“ mit „Jump“-Modell mit sieben Parametern
SVJ-CIR	„Stochastic Volatility“ mit „Jump“ und CIR-Prozess, Modell von Bates [11]
SVJ-CJ-CIR	„Stochastic Volatility“ mit „Jump“ im Basiswert und „Correlated Jumps“ in der Volatilität mit CIR-Prozess, Modell von Duffie, Pan und Singleton [52]
SVJ-IJ-CIR	„Stochastic Volatility“ mit „Jump“ im Basiswert und „Independent Jumps“ in der Volatilität mit CIR-Prozess, Modell von Duffie, Pan und Singleton [52]
SV-OU	„Stochastic Volatility“ mit OU-Prozess, Modell von Schöbel und Zhu [116]
SVJ-OU	„Stochastic Volatility“ mit „Jump“ und OU-Prozess, erwähnt bei Zhu [134]
T	Zeitpunkt der Fälligkeit
θ	Langfristiges Mittel im Prozess der Volatilität
V_t	Prozess der Volatilität
V_0	Volatilität zum Anfangszeitpunkt 0, „Spot Volatility“
W_t	Standard Brownsche Bewegung

Abbildungsverzeichnis

1.1	Trade-Offs im Modellbildungsprozess	7
1.2	Schematischer Ablauf der Untersuchungen	9
2.1	Auszahlungs- und Gewinndiagramme, Arbitragefreie Bewertungsschranken .	15
2.2	Normalverteilte Zuwächse der Brownschen Bewegung	17
2.3	Drei Trajektorien der geometrischen Brownschen Bewegung	18
2.4	Call- und Put-Optionspreise in Abhängigkeit vom Kurs des Basiswertes und von der Zeit	20
2.5	Histogramm der täglichen log-Renditen des DAX mit theoretischen Normal- verteilungsverlauf	23
2.6	Volatilitäts-Clustering bei Kursveränderungen des DAX (a) im Vergleich mit normalverteilten Zufallsrenditen (b)	24
2.7	Schematische Darstellung des Volatilitäts-Lächelns	25
2.8	Volatilitäts-Schiefe für Call-Option auf den DAX am 02.08.2002	25
2.9	Negative Korrelation zwischen Basiswert und Volatilität: DAX mit impliziter Volatilität	27
2.10	Simulierter Poisson Prozess für Sprunganzahl mit kumulierter log-normalverteilter Sprunghöhe	29
3.1	Mean-Reverting in Varianzpfaden nach einem CIR-Prozess für verschiedene Variationen β	33
3.2	Verhalten der Volatilität nach einem Sprung im Basiswert	36
4.1	Standardfehler bei Monte Carlo Simulation mit und ohne antithetischer Varia- ble im SV-CIR Modell mit IJK-Schema	52
5.1	Ergebnisse im Preis-Strike Gitter der Kalibrierung an einem beliebigen Beispiel- Tag	62
5.2	Kombination von Simulated Annealing (global) und Quasi-Newton (lokal) an einem Beispiel-Tag für das CVJ Modell mit zwei freien Parametern	67

5.3	DAX und sechsmonatiger EURIBOR vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005	68
5.4	Histogramme der Call-Optionen auf den DAX vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 im aufbereiteten Datensatz	71
5.5	Zeitreihen der vier Parameter des CVJ Modells	72
5.6	Zeitreihen des Parameters V_0 aller acht Modelle mit stochastischer Volatilität .	77
6.1	Zeitreihe des Fehlermaßes RMSE für alle Modelle über die gesamten Handelstage	80
6.2	Boxplots der jeweiligen Verbesserungen der RMSE-Fehler der Modelle SVJ- CIR, SVJ-IJ-CIR, SVJ-CJ-CIR und SVJ-OU über die gesamten Handelstage .	84
6.3	Boxplots der jeweiligen Verbesserungen der RMSE-Fehler im Vergleich der Modelle SV-CIR gegen SV-OU, und SVJ-CIR gegen SVJ-OU über die gesamten Handelstage	86
6.4	Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität für die Zeiträume der Handelstage 100 bis 200 sowie 600 bis 700	88
6.5	Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität und korrespondierender Fehler RMSE in der In-Sample Anpassung des SV-OU Modells in Abhängigkeit der Gewichtung der Wahrscheinlichkeit g	89
6.6	Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität im Zeitraum 600 bis 700 für das Modell SV-OU mit Strafterm	92
7.1	Absolute Optionspreise asiatischer Call-Optionen für $T = 0,5$ über alle Han- delstage	104
7.2	Normierte Optionspreise fixed Strike asiatischer Call-Optionen für $T = 0,5$ über alle Handelstage	105
7.3	Absolute Optionspreise einer Forward Start Call-Option für $T_1 = 0,5, T_2 = 1$ über alle Handelstage	107
7.4	Normierte Optionspreise einer Forward Start Call-Option für $T_1 = 0,5, T_2 = 1$ über alle Handelstage	108
7.5	Absolute Optionspreise Lookback Call-Optionen für $T = 0,5$ über alle Handels- tage	110
7.6	Normierte Optionspreise einer fixed Strike Lookback Call-Option für $T = 0,5$ über alle Handelstage	111
7.7	Absolute Optionspreise Barrier Call-Optionen für $T = 0,5$ über alle Handelstage	115
7.8	Normierte Optionspreise Barrier Call-Optionen für $T = 0,5$ über alle Handels- tage	116
8.1	Griechen im CV Modell für $S_0 = 5.167,88, \sigma = 0,252, r = 0,03228$ für einen Beispieltag	120

8.2	Zeitreihen für (a) Delta und (b) Gamma für alle Modelle über die ersten 831 Handelstage	121
8.3	Gewinn–Verlustverteilungen der Delta Neutral Hedge–Fehler in Geldeinheiten über 831 Handelstage von drei Modellen	129
8.4	Gewinn–Verlustverteilungen der Delta Neutral Hedge–Fehler einer asiatischen Option in Geldeinheiten über 831 Handelstage von zwei Modellen	131
9.1	Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes von Forward Start Call–Optionen über alle Handelstage	141
9.2	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von Forward Start Call–Optionen mit verschiedenen Strikes	142
9.3	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von Forward Start Call–Optioen für verschiedene Laufzeiten	142
9.4	Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike asiatischen Call–Optionen über alle Handelstage	143
9.5	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike asiatischen Call–Optionen mit verschiedenen Strikes	143
9.6	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike asiatischen Call–Optionen für verschiedene Laufzeiten	144
9.7	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von floating Strike asiatischen Call–Optioen für verschiedene Laufzeiten	144
9.8	Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike Lookback Call–Optionen über alle Handelstage	145
9.9	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike Lookback Call–Optionen mit verschiedenen Strikes	145
9.10	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von fixed Strike Lookback Call–Optioen für verschiedene Laufzeiten	146
9.11	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von floating Strike Lookback Call–Optionen für verschiedene Laufzeiten	146
9.12	Modellrisiko in Prozent des normierten Durchschnittswertes von Barrier Call–Optionen über alle Handelstage	147
9.13	Boxplots des Modellrisikos in Prozent des normierten Durchschnittswertes von Barrier Call–Optionen mit verschiedenen Kursschranken	148
9.14	Histogramme der Down–and–Out Barrier Call–Optionen auf den DAX vom 01.01.2004 bis zum 30.06.2004 im aufbereiteten Datensatz	151
A.1	Histogramme der täglichen log–Renditen des DAX in drei Perioden	171

Tabellenverzeichnis

2.1	Voraussetzungen an die Umwelt im Black–Scholes Modell	19
3.1	Spezialfall in der Parameterwahl, für den sich die Call Preise im SV(J)-OU und SV(J)-CIR Modell gleichen	41
3.2	Deduktiver Überblick über Charakteristika, Literatur und Abkürzungen aller untersuchten Modelle	43
4.1	Fix–Funktionen für das Euler–Schema des CIR–Prozesses im Literatur–Überblick	56
5.1	Fehlermaße der Kalibrierung des Beispiel–Tages aus Abbildung 5.1	62
5.2	Parameter der Modellgruppe nach Duffie et al [52] als Ergebnis der Kalibrierung	73
5.3	Veränderungen der Variation β in unterschiedlichen Marktphasen	74
5.4	Parameter der Modellgruppe nach Schöbel/Zhu [116] als Ergebnis der Kalibrierung	75
5.5	Parameter der Modelle aus Abschnitt 3.5 in OU– und CIR–Darstellung als Ergebnis der Kalibrierung	76
6.1	Mittelwerte und Standardfehler der Fehlermaße aller Modelle für die In–Sample Performance über alle Handelstage	81
6.2	Mittelwerte von RMSE und ARPE aller Modelle für die In–Sample Performance in drei Marktphasen geteilt	82
6.3	Mittelwerte der Fehlermaße des SV-CIR ohne Positivitäts–Bedingung für die In–Sample Performance über alle Handelstage	86
6.4	Modellparameter des SV-OU Modells als Ergebnis der Kalibrierung sowie durchschn. Erwartungswert und Varianz für den Handelstag 198 zu jedem Gewicht	90
6.5	Mittelwerte von RMSE und Wahrscheinlichkeit negativer Werte in der Volatilität der Modelle SV-OU und SVJ-OU für die Handelstage 100 bis 200 und 600 bis 700	92
6.6	Mittelwerte von RMSE und ARPE des Modells SV3 mit $V_0^{\text{SV3}} = V_0^{\text{SV-CIR}}$ aus dem SV-CIR Modell sowie des Modells SV4 zum Vergleich	93

6.7	Mittelwerte von RMSE und ARPE des Modells SV3 mit $V_0^{SV3} = \sigma^{CV}$ (aus dem CV Modell) sowie der Modelle CV und SV4 zum Vergleich	94
6.8	Parameter des SV3 Modells in OU-Darstellung als Ergebnis der Kalibrierung	95
6.9	Mittelwerte und Standardfehler der Fehlermaße aller Modelle für die Out-of-Sample Performance über alle Handelstage	97
6.10	Mittelwerte von RMSE aller Modelle für die Out-of-Sample Performance über alle Handelstage und in drei Marktphasen	98
7.1	Preise für Plain-Vanilla Calls als Ergebnisse der Kalibrierung aller Modelle an einem Beispieltag für ausgewählte Strikes	100
8.1	Überblick über die Sensitivitäten einer Option	118
8.2	Formeln für die Sensitivitäten einer Plain-Vanilla Call-Option in allen relevanten Modellen allgemein und im CV Modell als Spezialfall	119
8.3	Vergleich der Verfahren zur Berechnung der Griechen für eine Plain-Vanilla Call-Option im CV Modell	125
8.4	Hedge-Ratios für Minimum Variance Hedging einzelner Modelle	127
8.5	Mittelwerte und Standardfehler der Delta Neutral Hedge-Fehler in Geldeinheiten bzw. betragsmäßig normiert über 831 Handelstage	128
8.6	Mittelwerte und Standardfehler der Delta-Vega Neutral Hedge-Fehler in Geldeinheiten bzw. betragsmäßig normiert über 831 Handelstage	130
8.7	Mittelwerte und Standardfehler der Delta Neutral Hedge-Fehler einer asiatischen Option in Geldeinheiten bzw. betragsmäßig normiert über 831 Handelstage	131
9.1	Laufzeiteffekte auf das Modellrisiko bei steigender Laufzeit	148
9.2	Mittelwerte der Fehlermaße aller Modelle für die Abweichungen vom Modellwert zum Handelspreis von DOB Call-Optionen über alle 127 Handelstage . .	152
9.3	Mittelwerte der Fehlermaße der Modelle CV, CVJ und SV4 aus der Kalibrierung auf die Handelspreise von DOB Call-Optionen über vier Handelstage . .	153
9.4	Mittelwerte der Parameter der Modelle CV, CVJ und SV4 aus der Kalibrierung auf die Handelspreise von DOB Call-Optionen über vier Handelstage	154
A.1	Zulässige Intervalle für die Parameter in der Kalibrierung	177

Anhang A

A.1 Grundlegende Definitionen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Zustandsraum Ω , σ -Algebra \mathcal{F} und Wahrscheinlichkeitsmaß P .

Definition 2. Y_t sei für jedes $t \in [0, T]$ eine Zufallsvariable aus (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in einem gemeinsamen meßbaren Raum $(\tilde{E}, \mathcal{B}(\tilde{E}))$. $\mathcal{B}(\tilde{E})$ sei die Borelsche σ -Algebra von \tilde{E} . Dann heißt $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ ein stochastischer Prozess. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion $T \rightarrow \tilde{E}$, $t \mapsto Y_t(\omega)$ ein Pfad des Prozesses.

Zukünftige Zeitpunkte können nur mit dem heutigen Wissen geplant werden. Je weiter man sich jedoch dem Planungshorizont T nähert, um so mehr Informationen liegen vor und vergangene Informationen gehen nicht verloren. Wahrscheinlichkeitstheoretisch liegen alle beobachtbaren Ereignisse in der σ -Algebra \mathcal{F} . Dabei sei \mathcal{F}_t eine Unter- σ -Algebra mit

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Sei nun \mathcal{F}_s ebenfalls eine Unter- σ -Algebra mit $0 \leq t < s \leq N$, dann beschreibt

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$$

die oben formulierte Bedingung an die mit der Zeit wachsenden oder gleich bleibende Informationen.

Definition 3. Ist eine Familie von Unter- σ -Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ monoton wachsend im folgenden Sinne: $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ für $0 \leq t < s \leq N$, dann heißt $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtration.

Eine Zufallsvariable Y_t ist \mathcal{F}_t -meßbar, wenn alle beobachtbaren Ereignisse $\{Y_t \in \mathcal{Y}\}$ bis zum Zeitpunkt t in der Unter- σ -Algebra \mathcal{F}_t liegen. Damit ist Y_t beobachtbar bis zum Zeitpunkt t .

Definition 4. $(Y_t)_{t \in T}$ heißt adaptiert zu einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, wenn Y_t \mathcal{F}_t -meßbar ist für alle $t \in T$.

Bemerkung 1. $\sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ ist die von Y_0, \dots, Y_t erzeugte σ -Algebra. Sei $\mathcal{F}_t^Y := \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$. Dann ist $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in T}$ eine Filtration in \mathcal{F} , zu welcher $(Y_t)_{t \in T}$ adaptiert ist, und heißt die zu $(Y_t)_{t \in T}$ gehörende kanonische Filtration.

Definition 5. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sei eine Unter- σ -Algebra. $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Zufallsvariable mit reellem Erwartungswert. Die Zufallsvariable $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V := E(Y | \mathcal{G})$ heißt bedingte Erwartung von Y unter der Hypothese \mathcal{G} , falls gilt :

- V ist \mathcal{G} -meßbar
- $\int_{\tilde{G}} V dP = \int_{\tilde{G}} Y dP$ für alle $\tilde{G} \in \mathcal{G}$.

Definition 6. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sei eine Unter- σ -Algebra. $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ sei ein Ereignis. Die Zufallsvariable $P(\tilde{F} | \mathcal{G}) := E(\mathbb{1}_{\tilde{F}} | \mathcal{G})$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von \tilde{F} unter der Hypothese \mathcal{G} . $P(\tilde{F} | \mathcal{G})$ ist \mathcal{G} -meßbar.

Bedingte Erwartungswerte nach Definition 5 sind in der Regel schwer berechenbar, da alle früheren Zustände berücksichtigt werden müssen. Bei speziellen Prozessen, bei denen der aktuelle Zustand nur von dem vorherigen Zustand in der Vergangenheit abhängt und nicht von allen geschichtlichen Zuständen zu früheren Zeitpunkten, wie bei den Markov-Prozessen, ist dies wesentlich leichter.

Definition 7. Ein stochastischer Prozess $(Y_t)_{t \in T}$ heißt Markov-Prozess, falls für alle $B \in \mathcal{B}(\tilde{E})$ und für $0 \leq t < s \leq N$ P -fast sicher gilt:

$$P(Y_s \in B | \mathcal{F}_t^Y) = P(Y_s \in B | Y_t)$$

Bei einem homogenen Markov-Prozess ist $P(Y_{t+s} \in B | Y_t = y)$ unabhängig von t für alle $y \in \tilde{E}$.

Mit Hilfe der bedingten Erwartungswerte nach Definition 5 lässt sich eine Klasse von Prozessen, die Martingale, beschreiben, die keinem positiven oder negativen Trend unterliegen und daher im Mittel keine zukünftige Änderung aufweisen.

Definition 8. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtration. Ein zu \mathcal{F}_t adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $(\mathcal{M}_t)_{t \in T}$ heißt im diskreten Zeitkontext Martingal, falls für alle $t \in T$: $E | \mathcal{M}_t | < \infty$ und

$$E(\mathcal{M}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{M}_t$$

gilt.

Man kann zeigen, dass sich jeder stochastische Prozess so zerlegen lassen lässt, dass eine Komponente der Zerlegung ein Martingal ist.

A.2 Log-Renditen des DAX in ausgewählten Marktphasen

Vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005 durchläuft der Kurs des DAX unterschiedliche Marktphasen, was in den Abbildungen 2.9 oder 5.3 leicht nachvollziehbar ist. Einzelne Perioden separat betrachtend, eignet sich der Datensatz besonders gut, um Abhängigkeiten von der jeweiligen Marktsituation zu untersuchen.

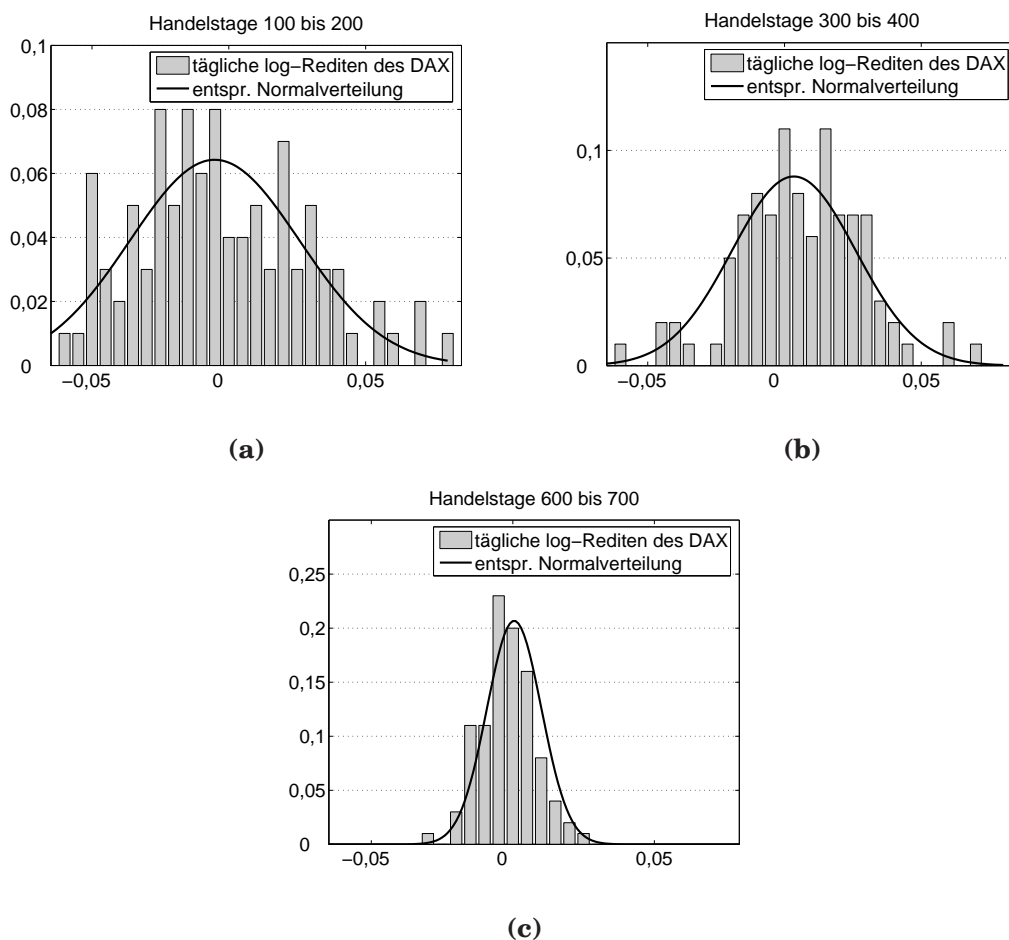


Abbildung A.1: *Histogramme der täglichen log-Renditen des DAX in drei Perioden von (a) 100 – 200, (b) 300 – 400, (c) 600–700 Handelstage mit entsprechendem Normalverteilungsverlauf.*

Dafür werden drei Zeiträume aus den Marktdaten ausgewählt, die verschiedene Marktphasen repräsentieren. Zum einen wird die Handelsperiode zwischen Handelstag 100 bis 200 betrachtet, die in dem Zeitraum vom 24.05.2002 bis zum 11.10.2002 liegt. In diese Zeitspanne fallen die größten Kursverluste des DAX und der steilste Anstieg der impliziten Volatilitäten

innerhalb der vorliegenden Kursdaten vom 01.01.2002 bis zum 30.09.2005. Die zweite Periode umfasst Handelstag 300 bis 400, was dem 07.03.2003 bis zum 30.07.2003 entspricht. In diesen Zeitraum fallen nach Erreichen des Tiefststandes zwischen 2002 bis 2005 starke Kurssteigerungen, die die Trendwende des DAX bedeuten. Die implizite Volatilität fällt in dieser Zeit deutlich ab, bis sie das Niveau vor ihrem starken Anstieg wieder erreicht hat. Als letzter Zeitabschnitt werden die Handelstage 600 bis 700 bzw. vom 14.05.2004 bis zum 01.10.2004 mit in die Untersuchung aufgenommen, da in dieser Zeit der DAX einem Seitwärtstrend folgt und die implizite Volatilität nur leicht sinkt.

Die Häufigkeitsverteilungen der täglichen log-Renditen der drei Perioden in Abbildung A.1 verdeutlichen, dass diese drei gewählten Zeiträume für die Untersuchung unterschiedlicher Marktphasen geeignet sind.

A.3 Relevante charakteristische Funktionen

Im Folgenden sind die charakteristischen Funktionen $\phi_T(u) = E(e^{ius_T})$ nach Gleichung (4.2) aller Modelle aus Abschnitt 3.6 zusammengefasst. Die Bedeutung der einzelnen Parameter ist den Kapiteln 2 und 3 über die Modelle sowie dem Symbolverzeichnis zu entnehmen.

Alle charakteristischen Funktionen sind unter dem risiko-neutralen Maß gegeben und erfüllen die Martingalbedingung. Teilweise ist der Driftterm $\tilde{\mu}$ aus Darstellungsgründen explizit angegeben und muss zur konkreten Berechnung entsprechend eingesetzt werden. Ansonsten ist $\tilde{\mu} = 1$ zu wählen, da der Driftterm schon implizit in die Gleichungen einbezogen wurde. Im Folgenden wird unter $\tilde{\mu}$ stets der gesamte korrigierte Driftterm verstanden, von dem der Korrekturterm $\bar{\mu}$ in Gleichung (3.1) ein Bestandteil ist.

CV Modell [22]:

$$\phi_T^{\text{CV}}(u) = \exp \left[\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) iu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \right) T \right]. \quad (\text{A.1})$$

CVJ Modell [98]:

$$\phi_T^{\text{CVJ}}(u) = \exp \left[\left(\tilde{\mu} iu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \lambda_S \exp \left[-\frac{1}{2}\delta_S^2 u^2 + \mu_S iu \right] - 1 \right) T \right], \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{\mu} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda_S \left(\exp \left[\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2 \right] - 1 \right).$$

SV-CIR Modell [76]:

$$\begin{aligned}
g &= \kappa - \beta \rho i u, \\
d &= \sqrt{g^2 - i u (i u - 1) \beta^2}, \\
f_1 &= -\frac{2\kappa\theta}{\beta^2} \log \left(1 - \frac{(d-g)(1-e^{-dT})}{2d} \right), \\
f_2 &= -\frac{\kappa\theta}{\beta^2} (d-g) T, \\
f_3 &= \frac{(i u (i u - 1) (1 - e^{-dT}))}{2d - (d-g)(1 - e^{-dT})} V_0, \\
\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SV-CIR}}(u) &= \exp [r T i u + f_1 + f_2 + f_3].
\end{aligned} \tag{A.3}$$

SVJ-CIR Modell [11]:

g, d, f_1, f_2, f_3 siehe oben bei SV-CIR.

$$\begin{aligned}
f_4 &= \lambda_S \left(\exp \left[-\frac{1}{2} \delta_S^2 u^2 + \mu_S i u \right] - 1 \right) T, \\
\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SVJ-CIR}}(u) &= \exp [\tilde{\mu} T i u + f_1 + f_2 + f_3 + f_4],
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\tilde{\mu} = r - \lambda_S \left(\exp \left[\mu_S + \frac{1}{2} \delta_S^2 \right] - 1 \right).$$

SVJ-IJ-CIR Modell [52]:

$$\begin{aligned}
a &= i u (1 - i u), \\
b &= \beta \rho i u - \kappa, \\
\gamma &= \sqrt{b^2 + a \beta^2}, \\
\alpha &= r T (i u - 1) - \frac{\theta \kappa}{\beta^2} \left(T (\gamma + b) + 2 \log \left(1 - \frac{(\gamma + b) (1 - e^{-\gamma T})}{2\gamma} \right) \right), \\
f_1 &= \alpha - \lambda_V T + \frac{\lambda_V T (\gamma - b)}{\gamma + a \mu_V - b} - \frac{2 \lambda_V a \mu_V}{(-a \mu_V + \gamma + b) (\gamma + a \mu_V - b)} \log \left(\frac{2\gamma - (-a \mu_V + \gamma + b) (1 - e^{-\gamma T})}{2\gamma} \right) \\
&\quad + \lambda_S T \left((1 + \mu_S)^{i u} e^{-\frac{1}{2} a \delta_S^2} - 1 \right) - i u \lambda_S \mu_S T, \\
f_2 &= V_0 \frac{-a (1 - e^{-\gamma T})}{2\gamma - (\gamma + b) (1 - e^{-\gamma T})}, \\
\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SVJ-IJ-CIR}}(u) &= \exp [f_1 + f_2].
\end{aligned} \tag{A.5}$$

SVJ-CJ-CIR Modell [52]:

a, b, γ siehe oben bei SVJ-IJ-CIR.

$$\begin{aligned}
q_1 &= -a\mu_V + (b + \gamma)(1 - \mu_V\rho_V iu), \\
q_2 &= 2\gamma(1 - \mu_V\rho_V iu) - q_1, \\
\alpha_0 &= rT(iu - 1) - \frac{\theta\kappa}{\beta^2} \left(T(\gamma + b) + 2 \log \left(1 - \frac{(\gamma + b)(1 - e^{-\gamma T})}{2\gamma} \right) \right), \\
\alpha_1 &= \frac{T\lambda_S(\gamma + b) \exp \left[\mu_S iu - \frac{1}{2} \delta_S^2 u^2 \right]}{q_2}, \\
\alpha_2 &= \frac{-2a\lambda_S\mu_V \exp \left[\mu_S iu - \frac{1}{2} \delta_S^2 u^2 \right]}{q_2 q_1} \log \left(\frac{q_2 + q_1 e^{-\gamma T}}{q_2 + q_1} \right), \\
f_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - T\lambda_S iu \left(\frac{\exp \left[\mu_S + \frac{1}{2} \delta_S^2 \right]}{1 - \mu_V\rho_V} - 1 \right) - T\lambda_S, \\
f_2 &= V_0 \frac{-a(1 - e^{-\gamma T})}{2\gamma - (\gamma + b)(1 - e^{-\gamma T})},
\end{aligned}$$

$$\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SVJ-CJ-CIR}}(u) = \exp[f_1 + f_2]. \quad (\text{A.6})$$

SV-OU Modell [116]:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}u^2(1 - \rho^2) + \frac{1}{2}iu \left(1 - \frac{2}{\beta}\kappa\rho \right), \\
s_2 &= \frac{1}{\beta}iu\kappa\theta\rho, \\
s_3 &= \frac{1}{2\beta}iu\rho, \\
\gamma_1 &= \sqrt{2\beta^2 s_1 + \kappa^2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1}(\kappa - 2\beta^2 s_3), \quad \gamma_3 = \kappa^2\theta - s_2\beta^2, \\
B &= \frac{1}{\beta^2\gamma_1} \left(\frac{(\kappa\theta\gamma_1 - \gamma_2\gamma_3) + \gamma_3(\sinh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \cosh(\gamma_1 T))}{\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)} - \kappa\theta\gamma_1 \right), \\
C &= \frac{1}{2} \log(\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)) + \frac{1}{2}\kappa T \\
&\quad + \frac{(\kappa^2\theta^2\gamma_1^2 - \gamma_3^2)}{2\beta^2\gamma_1^3} \left(\frac{\sinh(\gamma_1 T)}{\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)} - \gamma_1 T \right) \\
&\quad + \frac{(\kappa\theta\gamma_1 - \gamma_2\gamma_3)\gamma_3}{\beta^2\gamma_1^3} \left(\frac{\cosh(\gamma_1 T) - 1}{\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)} \right), \\
D &= \frac{1}{\beta^2} \left(\kappa - \gamma_1 \frac{\sinh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \cosh(\gamma_1 T)}{\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= iurT - \frac{1}{2}iu\rho \left(\frac{1}{\beta}V_0^2 + \beta T \right), \\ f_2 &= \frac{1}{2}DV_0^2 + BV_0 + C, \end{aligned}$$

$$\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SV-OU}}(u) = \exp[f_1 + f_2]. \quad (\text{A.7})$$

SVJ-OU Modell [134]:

s_i, γ_i, B, C, D siehe oben bei SV-OU, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} f_1 &= iu\tilde{\mu}T - \frac{1}{2}iu\rho \left(\frac{1}{\beta}V_0^2 + \beta T \right), \\ f_2 &= \frac{1}{2}DV_0^2 + BV_0 + C, \\ f_3 &= \lambda_S \left(\exp \left[-\frac{1}{2}\delta_S^2 u^2 + \mu_S iu \right] - 1 \right) T, \end{aligned}$$

$$\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SVJ-OU}}(u) = \exp[f_1 + f_2 + f_3], \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{\mu} = r - \lambda_S \left(\exp \left[\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2 \right] - 1 \right).$$

SV4 Modell

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}u^2 (1 - \rho^2) + \frac{1}{2}iu \left(1 - \frac{2}{\beta}\kappa\rho \right), \\ s_3 &= \frac{1}{2\beta}iu\rho, \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{2\beta^2 s_1 + \kappa^2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1} (\kappa - 2\beta^2 s_3),$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \log (\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)) + \frac{1}{2}\kappa T, \\ D &= \frac{1}{\beta^2} \left(\kappa - \gamma_1 \frac{\sinh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \cosh(\gamma_1 T)}{\cosh(\gamma_1 T) + \gamma_2 \sinh(\gamma_1 T)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= iurT - \frac{1}{2}iu\rho \left(\frac{1}{\beta}V_0^2 + \beta T \right), \\ f_2 &= \frac{1}{2}DV_0^2 + C, \end{aligned}$$

$$\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SV4}}(u) = \exp[f_1 + f_2]. \quad (\text{A.9})$$

SVJ7 Modell

$s_1, s_3, \gamma_1, \gamma_2, C, D$ siehe oben bei SV4.

$$\begin{aligned} f_1 &= iu\tilde{\mu}T - \frac{1}{2}iu\rho \left(\frac{1}{\beta}V_0^2 + \beta T \right), \\ f_2 &= \frac{1}{2}DV_0^2 + C, \\ f_3 &= \lambda_S \left(\exp \left[-\frac{1}{2}\delta_S^2 u^2 + \mu_S iu \right] - 1 \right) T, \end{aligned}$$

$$\phi_{\mathbf{T}}^{\text{SVJ7}}(u) = \exp[f_1 + f_2 + f_3], \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\mu} = r - \lambda_S \left(\exp \left[\mu_S + \frac{1}{2}\delta_S^2 \right] - 1 \right).$$

A.4 Obere und untere Schranken der Modellparameter

Tabelle A.1 enthält die Intervalle, aus denen die jeweiligen Modellparameter innerhalb der Kalibrierung in Kapitel 5 gewählt werden können. Eine Eingrenzung ist zum einen nötig, da manche Parameter nur auf einem bestimmten Definitionsbereich zugelassen sind. Z.B. liegt ein Korrelationskoeffizient immer zwischen den Werten -1 und $+1$.

Zum anderen wurden die Grenzen bei positiven Parametern nach unten stets so gewählt, dass die Parameter mindestens einen Wert ungleich Null annehmen müssen, um echte Erweiterungen zu erhalten.

Nach Testläufen sind die oberen Schranken stets so hoch angesetzt, dass sich oberhalb dieser Werte kein globales Minimum mehr befindet, aber gleichzeitig so niedrig gewählt, dass der Zeitaufwand der Kalibrierung angemessen bleibt.

	Parameter für										
	konst. Vola.	stoch. Volatilität					Kurs-Sprung			Vola.-Sprung	
	σ	κ	β	θ	V_0	ρ	λ_S	μ_S	δ_S	μ_V	λ_V bzw. ρ_V
CV	[0,05; 0,5]	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CVJ	[0,05; 0,99]	-	-	-	-	-	[0,05; 20]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	-	-
SV-CIR	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	-	-	-	-	-
SVJ-CIR	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	[0,05; 15]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	-	-
SVJ-IJ-CIR	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	[0,05; 15]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	[0,05; 0,4]	[0,01; 5]
SVJ-CJ-CIR	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	[0,05; 5]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	[0,05; 0,4]	[-0,99; -0,05]
SV3	-	[0,05; 5]	[0,05; 0,99]	-	-	[-0,99; 0,99]	-	-	-	-	-
SV4	-	[0,05; 5]	[0,05; 0,99]	-	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	-	-	-	-	-
SV-OU	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,05; 0,99]	[-0,99; 0,99]	-	-	-	-	-
SVJ7	-	[0,05; 5]	[0,05; 0,99]	-	[0,01; 0,99]	[-0,99; 0,99]	[0,05; 15]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	-	-
SVJ-OU	-	[0,01; 5]	[0,01; 0,99]	[0,01; 0,99]	[0,05; 0,99]	[-0,99; 0,99]	[0,05; 15]	[-2; 0,5]	[0,05; 0,99]	-	-

Tabelle A.1: Zulässige Intervalle für die Parameter in der Kalibrierung.

Literaturverzeichnis

- [1] Ait-Sahalia, Y.; Kimmel, R. (2007): Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models. *Journal of Financial Economics*, 83(2), 413-452.
- [2] Ait-Sahalia, Y.; Lo, A.W. (1998): Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *Journal of Finance*, 53(2), 499-547.
- [3] Alexander, C.; Nogueira, L. (2006): Hedging Options with Scale-Invariant Models. IS-MA Centre Discussion Papers in Finance DP2006-3.
- [4] Andersen, L.; Brotherton-Ratcliffe, R. (1997): The Equity Option Volatility Smile: An implicit Finite-Differences Approach. *Journal of Computational Finance*, 1(2), 5-37.
- [5] An, Y.; Suo, W. (2004): The Performance of Option Pricing Models on Hedging Exotic Options. Working Paper.
- [6] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.M.; Heath, D. (1999): Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.
- [7] Bachelier, L. (1900): Theorie de la Speculation. *Annales de l'Ecole Normale Superieure*, 17, 21-86.
- [8] Bakshi, G.; Cao, C.; Chen, Z. (1997): Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *Journal of Finance*, 52(5), 2003-2049.
- [9] Baldi, P.; Caramellino, L.; Iovino, M.G. (1999): Pricing Single and Double Barrier Options via Sharp Large Deviations Techniques. *Mathematical Finance*, 9(4), 293-321.
- [10] Basel Committee on Banking Supervision (1998): Operational Risk Management. Basel Committee Publication 42, Basel.
- [11] Bates, D. (1996): Jumps and Stochastic Volatility: the Exchange Rate Processes implicit in Deutschmark Options. *Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107.
- [12] Bates, D. (1996): Testing Option Pricing Models. *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, Amsterdam, 567-611.

- [13] Bates, D. (2000): Post-87 Crash Fears in the S&P500 Futures Option Market. *Journal of Econometrics*, 94, 181-238.
- [14] Beaglehole, D.R.; Dybvig, P.H.; Zhou., G. (1997): Going to Extremes: Correcting Simulation Bias in Exotic Option Valuation. *Financial Analysts Journal*, 53(1), 62-68.
- [15] Bekaert, G.; Wu, G. (2000): Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets. *The Review of Financial Studies*, 13(1), 1-42.
- [16] Belledin, M.; Schlag, C. (1999): An Empirical Comparison of Alternative Stochastic Volatility Models. Working Paper Series: Finance and Accounting 38, Department of Finance, Goethe University Frankfurt am Main. .
- [17] Berkaoui, A.; Bossy, M.; Diop, A. (2007): Euler Schemes for SDEs with non-Lipschitz Diffusion Coefficient: Strong Convergence. *Erscheint in ESAIM: Probability and Statistics*.
- [18] Black, F. (1975): Fact and Fantasy in the Use of Options. *Financial Analysts Journal*, 31(Juli/August), 36-72.
- [19] Black, F. (1976): Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Section*, 177-181.
- [20] Black, F. (1989): How to Use the Holes in Black-Scholes. *Journal of Applied Corporate Finance*, 1(4), 67-73.
- [21] Black, F. (1992): *From Black-Scholes to Black Holes*. Risk Books, London.
- [22] Black, F.; Scholes, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- [23] Boness, A.J. (1964): Elements of a Theory of Stock-Option Value. *The Journal of Political Economy*, 72(2), 163-175.
- [24] Bouchaud, J.P.; Matacz, A.; Potters, M. (2001): Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model. *Physical Review Letters*, 87(22), 1-4.
- [25] Boyle, P.P. (1977): A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Econometrics*, 4(3), 323-338.
- [26] Brachinger, H.W.; Weber, M. (1997): Risk as a Primitive – A Survey of Measures of Perceived Risk. *Operations Research-Spektrum*, 19(3), 235-250.
- [27] Branger, N.; Schlag, C. (2004): Model Risk: A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging. *EFMA 2004 Basel Meetings Paper*.

- [28] Broadie, M.; Glasserman, P. (1996): Estimating Security Price Derivatives using Simulation. *Management Science*, 42(2), 269-285.
- [29] Broadie, M.; Kaya, Ö. (2006): Exact Simulation of Stochastic Volatility and other Affine Jump Diffusion Processes. *Operations Research*, 54(2), 217-231.
- [30] Broadie, M.; Kaya, Ö. (2004): Exact Simulation of Option Greeks under Stochastic Volatility and Jump Diffusion Models. *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*.
- [31] Broyden, C.G. (1970): The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics* , 6(1), 76-90.
- [32] Buraschi, A.; Jackwerth, J. (1999): Is Volatility Risk Priced in the Option Market? Empirical Evidence and Implications for Deterministic and Stochastic Option Pricing Models. Working Paper.
- [33] Carr, P.; Madan, D.B. (1998): Option Valuation using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4), 61-73.
- [34] Carr, P.; Wu, L. (2004): Time-changed Levy Processes and Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, 71(1), 113-141.
- [35] Castelli, C. (1877): *The Theory of Options in Stocks and Shares*. Mathieson, London.
- [36] Cheng, P.; Scaillet O. (2005): Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modelling with Application to Stochastic Volatility. Working Paper, Credit Suisse, FAME and HEC Geneve.
- [37] Chernov, M.; Gallant, R.; Ghysels, E.; Tauchen, G. (2003): Alternative Models for Stock Price Dynamics. *Journal of Econometrics*, 116, 225-257.
- [38] Cont, R. (2004): Model Uncertainty and its Impact on the Pricing of Derivative Instruments. Finance Concepts Working Paper FC-04-02.
- [39] Cont, R.; Tankov, P. (2004): *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- [40] Cooley, J.; Tukey, J.W. (1965): An Algorithm for the Machine Calculation of complex Fourier Series. *Mathematical Computation*, 19(90), 297-301.
- [41] Cox, J.C.; Ingersoll, J.E.; Ross, S.A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385-407.
- [42] Cox, J.C.; Ross, S.A. (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process. *Journal of Financial Studies*, 3(1-2), 145-166.

- [43] Crouhy, M.; Galai, D.; Mark, R. (1998): Model Risk. *Journal of Financial Engineering*, 7(3/4), 267-288.
- [44] Dahlbokum, A. (2007): Empirischer Vergleich von Optionspreismodellen auf Basis Zeitdeformierter Levy-Prozesse: Kalibrierung, Hedging, Modellrisiko. Dissertation, Universität zu Köln.
- [45] Dai, Q.; Singleton, K. (1999): Specification Analysis of Affine Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978.
- [46] Deelstra, G.; Delbean, F. (1998): Convergence of Discretized Stochastic (Interest Rate) Processes with Stochastic Dirft Term. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 14(1), 77-84.
- [47] Derman, E.; Kani, I. (1994): Riding on the Smile. *Risk*, 7, 32-39.
- [48] Detlefsen, K. (2005): Hedging Exotic Options in Stochastic Volatility and Jump Diffusion Models. Masterarbeit, Kiel.
- [49] Detlefsen, K.; Härdle, W.K. (2006): Calibration Risk for Exotic Options. SFB 649 Discussion Paper 2006-001.
- [50] Dixit, A.K.; Pindyck, R.S. (1994): Investment under Uncertainty. Princeton University Press.
- [51] Duan, J. (1995): The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance*, 5(1), 13-32.
- [52] Duffie, D.; Pan, J.; Singleton, K. (2000): Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343-1376.
- [53] Dumas, B.; Fleming, J.; Whaley, R.E. (1998): Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *Journal of Finance*, 53(6), 2059-2106.
- [54] Dupire, B. (1994): Pricing with the Smile. *Risk*, 7, 18-20.
- [55] Eberlein, E.; Papapantoleon, A. (2005): Equivalence of Floating and Fixed Strike Asian and Lookback Options. *Stochastic Processes and Their Applications*, 115, 31-40.
- [56] Elliott, M. (1997): Controlling Model Risk. *Derivatives Strategy*. June.
- [57] Elliott, R.J.; Kopp, E. (2005): *Mathematics of Financial Markets*. Springer Verlag Heidelberg Berlin.
- [58] Eraker, B. (2004): Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices. *Journal of Finance*, 59(3), 1367-1403.

- [59] Eraker, B.; Johannes, M.; Polson, N. (2003): The Impact of Jumps in Volatility and Returns. *Journal of Finance*, 58(3), 1269-1300.
- [60] Aktienoptionen müssen als Aufwand verbucht werden. *Frankfurter Allgemeine Zeitung*, 21. Februar 2004, 4, 11.
- [61] Feller, W. (1951): Two Singular Diffusion Problems. *Annals of Mathematics*, 54, 173-182.
- [62] Figlewski, S. (1998): Derivatives Risks, Old and New. *Brookings-Wharton Papers on Financial Services*, 1(1), 159-217.
- [63] Figlewski, S.; Green, T. (1999): Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options. *Journal of Finance*, 54(4), 1465-1499.
- [64] Figlewski, S.; Wang, X. (2000): Is the „Leverage Effect“ a Leverage Effect? Working Paper.
- [65] Gaspar, R. (2004): General Quadratic Term Structures of Bond, Futures and Forward Prices. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance*, 559.
- [66] Gibson, R.(Hrsg.) (2000): *Model Risk: Concepts, Calibration and Pricing*. Risk Books.
- [67] Gibson, R.; Lhabitant, F.-S.; Pistre, N.; Talay, D. (1999): Interest Rate Model Risk: An Overview. *The Journal of Risk*, 1(3), 37-62.
- [68] Glasserman, P. (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Applications of Mathematics*, 53, Springer Verlag New-York.
- [69] Goffe, W.L. (1996): SIMANN: A Global Optimization Algorithm using Simulated Annealing. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 1(3), 169-176.
- [70] Gottschalk-Mazouz, N. (2002): Risiko. *Handbuch Ethik*. Düwell, M.; Hübenthal, C.; Werner, M. (Hrsg.). Metzler Verlag Stuttgart, 485-491.
- [71] Group of Thirty (1993): *Derivatives: Practices and Principles*. Washington, D.C.
- [72] Günter, M.; Jünger A. (2003): *Finanzderivate mit MATLAB, Mathematische Modellierung und numerische Simulation*. Vieweg und Sohn Verlag Wiesbaden.
- [73] Hansen, L.P. (1982): Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50(4), 1029-1054.
- [74] Hartmann-Wendels, T.; Pfingsten, A.; Weber, M. (2007): *Bankbetriebslehre*. 4. Aufl., Springer Verlag Berlin Heidelberg.

- [75] Henderson, V.; Wojakowski, R. (2002): On the Equivalence of Floating and Fixed-Strike Asian Options. *Journal of Applied Probability*, 39(2), 391-394.
- [76] Heston, S.L. (1993): A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- [77] Heston, S.L.; Nandi, S. (2000): A Closed-Form GARCH Option Pricing Model. *Review of Financial Studies*, 13(3), 585-626.
- [78] Higham, D.J.; Mao, X. (2005): Convergence of Monte Carlo Simulations involving the Mean-Reverting Square Root Process. *Journal of Computational Finance*, 8(3), 35-62.
- [79] Huang, J.Z.; Wu, L. (2004): Specification Analysis of Option Pricing Models Based on Time-Changed Levy Processes. *Journal of Finance*, 59(3), 1405-1439.
- [80] Hull, J.C. (2005): *Options, Futures, and other Derivatives*. 6. Aufl., Pearson Perentice Hall.
- [81] Hull, J.C.; White, A. (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42(2), 281-300.
- [82] International Accounting Standards Board (2006): *Verordnung (EG) Nr. 211/2005 der Kommission. International Financial Reporting Standard 2*.
- [83] Ingersoll, J. (1976): A Theoretical and Empirical Investigation of the Dual Purpose Funds: an Application of Contingent Claims Analysis. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 83-123.
- [84] Irle, A. (1998): *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner Stuttgart.
- [85] Jevons, W.S. (1871): *The Theory of Political Economy*. London.
- [86] Jorion, P. (1997): *Value at Risk: the new Benchmark for Controlling Derivatives Risk*. Irwin Professional Publishing, Chicago.
- [87] Kahl, C.; Jäckel P. (2006): Fast strong Approximation Monte-Carlo Schemes for Stochastic Volatility Models. *Quantitative Finance*, 6(6), 513-536.
- [88] Kahl, C.; Günther M.; Roßberg, T. (2004): *Structure Preserving Stochastic Integration Schemes in Interest Rate Derivative Modeling*. Working Paper. Preprint BUW-AMNA 04/10.
- [89] Kloeden, P.E.; Platen E. (1992): *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [90] Kruiuzenga, R.J. (1956): *Put and Call options: A Theoretical and Market Analysis*. Ph.D. Thesis, Cambridge.

- [91] Lee, R.W. (2004): Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification, and Error Control. *Journal of Computational Finance*, 7(3), 51-86.
- [92] Leland, H.E. (1985): Option Pricing and Replication with Transaction Costs. *Journal of Finance*, 40(5), 1283-1301.
- [93] Lhabitant, F.-S. (2000): Coping with Model Risk, in: *The Professional's Handbook of Financial Risk Management*, Lore M.; Borodovsky, L.(Hrsg). Butterworth-Heinemann.
- [94] Lord, R.; Kahl, C. (2006): Optimal Fourier Inversion in Semi-Analytical Option Pricing. Tinbergen Institute Discussion Papers, No 06-066/2.
- [95] Lord, R.; Koekkoek, R.; van Dijk, D. (2006): A Comparison of biased Simulation Schemes for Stochastic Volatility Models. Tinbergen Institute Discussion Papers, No. 06-046/4.
- [96] MacBeth, J.D.; Merville, L.J. (1979): An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. *Journal of Finance*, 34(5), 1173-1186.
- [97] Merton, R. (1973): The Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.
- [98] Merton, R. (1976): Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1), 125-144
- [99] Metropolis, N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.; Teller, A.H.; Teller, E. (1953): Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087-1092.
- [100] Milstein, G.N. (1974): Approximate Integration of Stochastic Differential Equations. *Theory of Probability and Applications*, 19, 557-562.
- [101] Musiela, M.; Rutkowski, M. (1998): *Martingale Methods in Financial Modelling: Theory and Applications*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [102] Nandi, S. (1998): How important is the Correlation between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging in the S&P 500 Index Options Market. *Journal of Banking and Finance*, 22, 589-610.
- [103] Nelder, J.A.; Mead, R. (1965): A Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*, 7, 303-333.
- [104] Pan, J. (2002): The Jump-Risk Premia implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study. *Journal of Financial Economics*, 63(1), 3-50.

- [105] Pape, U.; Merk, A. (2003): Zur Angemessenheit von Optionspreisen. ESCP–EAP Working Paper, 4.
- [106] Perello, J.; Masoliver, J. (2002): A correlated Stochastic Volatility Model measuring Leverage and other Stylized Facts. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5, 541-562.
- [107] Pieper, C. (2007): Es war einmal ein fairer Preis. *DIE ZEIT*, 1. Februar 2007, 6, 33.
- [108] Poterba, J, Summers, L. (1986): The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations. *American Economic Review*, 76(5), 1142-1151.
- [109] Ripper, K.; Günzel, A.(1997): Volatilitäts–Smile von DAX–Optionen. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 11(4), 470-479.
- [110] Rubinstein, M. (1985): Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using all Reported Trades and Quotes. *Journal of Finance*, 40(2), 455-480.
- [111] Rubinstein, M. (1994): Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49(3), 771-818.
- [112] Rudolph, B. (1995): *Derivative Finanzinstrumente: Entwicklung, Risikomanagement und bankaufsichtliche Regulierung*. Schäffer–Poeschel Stuttgart.
- [113] Rudolph, B.; Schäfer, K. (2005): *Derivative Finanzmarktinstrumente: Eine anwendungsbezogene Einführung in Märkte, Strategien und Bewertung*, Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [114] Samuelson, P.A. (1965): A rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*, 6(2), 13-32.
- [115] Sandmann, K. (2001): *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. 2. Aufl., Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [116] Schöbel, R.; Zhu, J. (1999): Stochastic Volatility with an Ornstein–Uhlenbeck Process: An Extension. *European Finance Review*, 3(1), 23-46.
- [117] Schurz, H. (1996): Numerical Regularization for SDE's: Construction of Nonnegative Solutions. *Dynamical Systems and Applications*, 5, 323-352.
- [118] Schoutens, W.; Simons, E.; Tistaert, J. (2004): A perfect Calibration! Now what? *Willmott Magazine*, March.
- [119] Scott, L.O. (1987): Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4), 419-438.

- [120] Scott, L.O. (1997): Pricing Stock Options in a Jump–Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates. *Mathematical Finance*, 7(4), 413-426.
- [121] Seydel, R. (2006): *Tools for Computational Finance*. 3. Aufl., Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [122] Sprenkle, C.M. (1964): Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences, in: *The Random Character of Stock Market Prices*, Cootner, P.(Hrsg.). Cambridge, 414-474.
- [123] Stein, J.C. (1989): Overreactions of the Options Market. *Journal of Finance*, 44(4), 1011-1023.
- [124] Stein, E.M.; Stein, J.C. (1991): Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, 4(4), 727-752.
- [125] Thomas, B. (1996): *Exotic Options II. Risk Management and Analysis*, Chichester, 111-146.
- [126] Tompkins, R. (1994): *Options Explained²*. 2. Aufl., Palgrave Macmillan, England.
- [127] Uhlenbeck, G.E.; Ornstein, L.S. (1930): On the Theory of Brownian Motion. *Physics Review*, 36(5), 823-841.
- [128] Van Laarhoven, P.J.M.; Aarts, E.H.L. (1987): *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [129] Vorst, T.C. (1996): *Averaging Options*. *The Handbook of Exotic Options*, IRWIN Professional Publishing, Chicago, 175-199.
- [130] Wallmeier, M. (2003): *Der Informationsgehalt von Optionspreisen*. Physica–Verlag Heidelberg.
- [131] Weron, R.; Wystup, U. (2005): *Heston’s Model and the Smile*. *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [132] Wiggins, J.B. (1987): Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates. *Journal of Financial Economics*, 19(2), 351-372.
- [133] Wilde, O. (1890): *The Picture of Dorian Gray*. Lippincott’s Monthly Magazine.
- [134] Zhu, J. (2000): *Modular Pricing of Options: An Application of Fourier Analysis*. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*: 493, Springer Verlag Berlin Heidelberg.

Lebenslauf

Name: Manuela Ender
Anschrift: Waldhornstr. 51
76131 Karlsruhe
Geboren: 08. Mai 1979
in Göttingen
Geburtsname: Reich

Ausbildung: 10/2006 - 03/2007 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik bei Prof. Seydel an der Universität zu Köln.
10/2003 - 09/2006 Doktorandin im Graduiertenkolleg Risikomanagement der WISO-Fakultät an der Universität zu Köln, Stipendium der DFG.
10/1998 - 03/2004 Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Karlsruhe (TH), Abschluss: Dipl. Math. oec.
08/1991 - 07/1998 Privates Gymnasium des Englischen Instituts in Heidelberg, Abschluss: Allgemeine Hochschulreife.