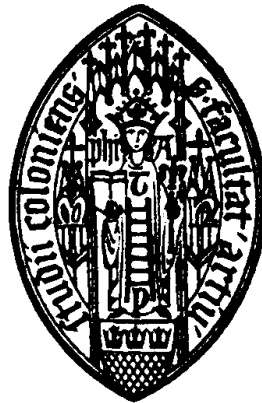


Deformationen entlang integrabler Untergarben des Tangentialbündels

DIPLOMARBEIT
von
DANIEL LOHMANN



angefertigt am
Mathematischen Institut der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, im Wintersemester 2007/2008

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen für ihre Unterstützung danken.

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus danke ich für die Zeit, die er für meine Betreuung aufgebracht hat.

Ohne seine Geduld und seine hilfreichen Hinweise wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Andreas Fuhrich, Wolfgang Krupp, Severin Müller-Platz, Sarah Rockhoff, Cordula Schaarschmidt und Jonas Stein sei für das teils häufige Lesen einer fehlerhaften Arbeit gedankt.

Dank ihrer Korrekturen wurde die Anzahl der Fehler deutlich gesenkt.

Meinen Eltern, Margot und Dr. Eckhard Lohmann, danke ich für ihre Unterstützung – sowohl in finanzieller als auch in moralischer Hinsicht.

Zuletzt danke ich meiner Freundin, Sarah Rockhoff, dafür, dass sie die Geduld aufbrachte, mich zu ertragen und mich stets zum Weitermachen ermutigt hat.

Köln, den 12. März 2008

Daniel Lohmann

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 12. März 2008

(Daniel Lohmann)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Vektorfelder	3
1.1 Grundlagen	3
1.2 Produkte von Vektorfeldern	8
1.3 Produktmannigfaltigkeiten	12
1.4 Untermannigfaltigkeiten	19
2 Vektorfelder und Jets	23
2.1 Jet-Bündel	23
2.2 Vektorfelder und Jets	28
2.3 Jet-Bündel auf Produktmannigfaltigkeiten	36
3 Infinitesimale Deformationen	39
3.1 Infinitesimale Deformationen	40
3.2 Transversale Deformationen von Untermannigfaltigkeiten . . .	41
3.3 Deformationen von Untermannigfaltigkeiten	46
3.4 Deformation beliebiger Morphismen	53
Literaturverzeichnis	56

Einleitung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Tangentialvektoren auf einer komplexen Mannigfaltigkeit N zu definieren.

Aus geometrischer Sicht ist ein Tangentialvektor im Punkt $p \in N$ eine Äquivalenzklasse von glatten Wegen durch p , wobei zwei Wege äquivalent sind, wenn sie bis zur ersten Ableitung übereinstimmen.

Vorteil dieser Definition ist, dass der Begriff „Tangentialvektor“ leicht verallgemeinert werden kann. Ein n -Jet im Punkt p ist dann eine Äquivalenzklasse von glatten Wegen, wobei zwei Wege äquivalent sind, wenn sie bis zur n -ten Ableitung übereinstimmen.

Dies führt zur Theorie der n -Jet-Bündel, welche in Stavros Kousidis' Arbeit „Extensionsprobleme für Jets und Deformationstheorie“ behandelt wird.

In dieser Arbeit werden wir einen Tangentialvektor im Punkt $p \in N$ vom algebraischen Standpunkt aus betrachten, fassen ihn also als Derivation

$$v : \mathcal{O}_{N,p} \rightarrow \mathbb{C}$$

auf. Hier ist nicht klar, wie man auf analoge Weise einen n -Jet konstruieren kann. Allerdings können wir Vektorfelder, also Schnitte im Tangentialbündel, multiplizieren und die Lie-Klammer definieren, was dem Tangentialbündel die Struktur einer Lie-Algebra gibt.

Im ersten Kapitel werden wir folgende Aussage beweisen:

Stimmen zwei Vektorfelder X und Y bis zur $(n - 1)$ -ten Potenz in einem Punkt $p \in N$ überein, so ist die Differenz $(Y^n - X^n)_p$ im Punkt p durch die iterierte Lie-Klammer $[X, Y]_p^{(n)}$ gegeben.

Diese Aussage motiviert zu der Definition der integrablen Untergarbe des Tangentialbündels. Eine derartige Garbe zeichnet sich dadurch aus, dass sie abgeschlossen bezüglich der Lie-Klammer ist. Damit ist in obiger Situation die Differenz $(Y^n - X^n)_p$ durch ein Element der Garbe gegeben.

Im zweiten Kapitel werden wir sehen, dass ein Vektorfeld X für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Schnitt $s_n^X : N \rightarrow J_n N$ im n -Jet-Bündel induziert. Haben wir nun

zwei Schnitte $s, s' : N \rightarrow J_n N$, die im Punkt p bis zur $(n - 1)$ -ten Ordnung übereinstimmen, so werden wir insbesondere zeigen, dass die Differenz $s - s'$ durch die iterierte Lie-Klammer von geeigneten Vektorfeldern gegeben ist.

Im dritten Kapitel geht es schließlich darum, einen Morphismus $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten zu deformieren.

Dazu startet man mit einer infinitesimalen Deformation $s : M \rightarrow f^* J_n N$ und versucht, diese zu einer Deformation $s_{n+1} : M \rightarrow f^* J_{n+1} N$ zu liften. Im Allgemeinen ist das nicht möglich. Wenn jedoch der so genannte „Obstruktionsraum“ $H^1(f^* J_1 N)$ gleich Null ist, ist es stets möglich, eine Liftung zu finden, wie in Kousidis' Arbeit gezeigt wird.

Unser Anliegen wird es nun sein, den Obstruktionsraum zu „verkleinern“. Ist $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, so finden wir unter gewissen Bedingungen lokal Vektorfelder, welche die infinitesimale Deformation induzieren.

Wie im zweiten Kapitel gezeigt wird, liefern diese Vektorfelder direkt lokale Liftungen, welche im Allgemeinen allerdings nicht verkleben. Die Differenzen dieser Liftungen sind durch die iterierte Lie-Klammer gegeben und definieren einen Kozykel in $Z^1(f^* J_1 N)$.

Liegen die Vektorfelder in einer integralen Untergarbe $\mathcal{F} \subset TN$ des Tangentialbündels, so ist auch die iterierte Lie-Klammer ein Element von \mathcal{F} , was uns einen Kozykel in $Z^1(f^* \mathcal{F})$ liefert.

In diesem Fall ist für die Existenz einer globalen Liftung hinreichend, dass $H^1(f^* \mathcal{F}) = 0$ ist, womit wir einen geeigneten kleineren Obstruktionsraum gefunden haben.

Kapitel 1

Vektorfelder

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen geschaffen, die wir später bei der Behandlung infinitesimaler Deformationen benötigen.

Nachdem wir die für uns wichtigsten Eigenschaften von Vektorfeldern – und damit des Tangentialbündels – formuliert haben, werden wir speziell das Tangentialbündel auf Produktmannigfaltigkeiten untersuchen. Dieses ist bei der späteren Behandlung infinitesimaler Deformationen von großem Interesse.

Ein weiterer wichtiger Teil dieses Kapitels sind Potenzen von Vektorfeldern. Diese lassen sich leicht definieren, wenn man Vektorfelder als \mathbb{C} -lineare Derivationen $\mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ definiert – weitaus schwieriger ist es hingegen, diese als Schnitte in einem geeigneten Bündel aufzufassen. Wir werden einige Eigenschaften dieser Potenzen erarbeiten und insbesondere zeigen, dass sich die Differenz solcher Potenzen unter geeigneten Bedingungen mit Hilfe der iterierten Lie-Klammer bestimmen lässt.

Zuletzt werden wir untersuchen, ob es möglich ist ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit so zu korrigieren, dass sich die Potenzen auf einer Untermannigfaltigkeit M bis zu einer bestimmten Ordnung $n \in \mathbb{N}$ nicht ändern, aber die $(n+1)$ -te Potenz einen Korrektur-Term erhält. Es wird sich herausstellen, dass dieses Problem unter gewissen Bedingungen gelöst werden kann.

1.1 Grundlagen

Wir fassen hier einige Fakten über Vektorfelder zusammen, welche man beispielsweise in [War71, Kapitel 1, „Vector Fields“] findet.

Im Folgenden sei N eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension d und

$U \subset N$ offen.

Definition 1.1. Betrachte das Tangentialbündel $\pi : TU \rightarrow U$ auf U . Ein Vektorfeld auf U ist eine holomorphe Abbildung $X : U \rightarrow TU$, die rechtsinvers zur Projektion $\pi : TU \rightarrow U$ ist. Ein Vektorfeld ist also ein Schnitt im Tangentialbündel. Mit $TN(U)$ bezeichnen wir die Menge der Vektorfelder auf U .

Es folgen einige Fakten über Vektorfelder.

Fakten 1.1. 1. Vektorfelder definieren eine Garbenstruktur auf N .

Die Garbe der Vektorfelder nennen wir Tangentialbündel und bezeichnen sie mit TN .

Aus dem Zusammenhang sollte stets klar werden, ob wir TN als Garbe der Schnitte oder als Mannigfaltigkeit $TN \rightarrow N$ aufzufassen haben.

2. TN ist eine lokal-freie \mathcal{O}_N -Modulgarbe.

Ist (V, Φ) eine Karte mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$, so bilden die konstanten Vektorfelder $\{\frac{\partial}{\partial z_k} | k \in \{1, \dots, d\}\}$ eine Modul-Basis von $TN(V)$.

3. Jedes Vektorfeld $X \in TN(U)$ induziert auf eindeutige Weise einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$, den wir der Einfachheit halber auch mit X bezeichnen.

Für $V \subset U$ offen ist das Bild einer Funktion $f \in \mathcal{O}_N(V)$ unter $X(V)$ gegeben durch $X(V)(f) : p \mapsto X_p(f)$.

Wenn klar ist, welche offene Menge V gemeint ist, schreiben wir aus Gründen der Lesbarkeit Xf statt $X(V)(f)$.

X ist eine \mathbb{C} -lineare Derivation, erfüllt also die Produktregel:

$$\forall_{V \subset U \text{ offen}} \forall_{f, g \in \mathcal{O}_N(V)} : X(fg) = gXf + fXg$$

4. Jede \mathbb{C} -lineare Derivation $\Phi : \mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ wird von einem Vektorfeld $X \in TN(U)$ induziert.

Einen Beweis dazu findet man in [Hol72, Kapitel II, „Das Tangentialbündel“, Satz 9.5].

Punkt 3 bietet sich an, um Produkte von Vektorfeldern zu definieren.

Definition 1.2. Seien $X, Y \in \text{Hom}(\mathcal{O}_N, \mathcal{O}_N)(U)$.

Das Produkt $XY : \mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ ist durch die Komposition beider Abbildungen, also durch $(XY)f := X(Yf)$, für alle $V \subset U$ offen und $f \in \mathcal{O}_N(V)$, definiert.

Bemerkung 1.1. Das Produkt zweier Vektorfelder ist im Allgemeinen kein Vektorfeld, da die Produktregel nicht gilt.

Wir werden später noch genauer sehen, was diese Produkte mit Jets zu tun haben.

Der folgende Satz erleichtert das Rechnen mit Vektorfeldern.

Satz 1.1. Sei X ein Vektorfeld auf U und $p \in U$ ein beliebiger Punkt mit $X_p \neq 0$.

Dann existiert eine Karte (V, Φ) mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$, so dass $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$ ist.

Beweis: Einen Beweis findet man in [War71, 1.Kapitel, Proposition 1.53]. □

Als nächstes betrachten wir eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$.

Definition 1.3. Seien $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung, $p \in M$ und $v \in N_{\iota(p)}$ ein Tangentialvektor.

v schneidet M transversal, falls gilt:

$$v \notin d\iota(M_p)$$

Sei X ein Vektorfeld auf N . X schneidet M im Punkt $p \in M$ transversal, wenn $X_{\iota(p)}$ M transversal schneidet.

X schneidet M transversal, falls diese Eigenschaft für alle $p \in M$ gilt.

Satz 1.2. Sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $c = \dim M < \dim N = d$.

Sei $U \subset N$ offen und $X \in TN(U)$ ein Vektorfeld, das M im Punkt $p \in \iota(M) \cap U$ transversal schneidet.

Dann gilt:

$$\exists_{p \in V_p \subset N \text{ offen}} \exists_{t \in \mathcal{O}_N(V_p)} : t|_{V_p \cap \iota(M)} = 0 \text{ und } X|_{V_p}(t) \equiv 1$$

Beweis: Die Aussage folgt aus dem vorherigen Satz 1.1 und dem Satz über implizite Funktionen.

Offensichtlich ist $X_p \neq 0$, weshalb nach Satz 1.1 eine Karte (V, Φ) mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$ existiert, so dass $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$ ist.

Das Bild von $\iota(M) \cap V$ unter Φ ist eine c -dimensionale Untermannigfaltigkeit $\tilde{M} \subset \mathbb{C}^d$. Also existiert eine Umgebung W_p von $\Phi(p)$ und eine holomorphe

Abbildung $F : W_p \rightarrow \mathbb{C}^{d-c}$, so dass $\tilde{M} \cap W_p = \{F = 0\}$ ist.

Seien $f_i, i \in \{1, \dots, d-c\}$, die einzelnen Komponenten von F und $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ die Koordinaten des \mathbb{C}^d .

Da X und M sich im Punkt p transversal schneiden, ist $\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$ nicht im Tangentialraum von \tilde{M} an der Stelle $\Phi(p)$. Also existiert ein $i \in \{1, \dots, d-c\}$, ohne Einschränkung $i = 1$, so dass $\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}(\Phi(p)) \neq 0$ ist.

Sei $\text{Jac}_{F, \Phi(p)}$ die zu F gehörende Funktionalmatrix im Punkt $\Phi(p)$. Da \tilde{M} eine Untermannigfaltigkeit ist, ist der Rang dieser Matrix $d-c$.

Durch Umsortieren der Koordinaten $\{\zeta_2, \dots, \zeta_d\}$ des \mathbb{C}^d erreichen wir somit, dass die Matrix $(\frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(\Phi(p)))_{i,j \in \{1, \dots, d-c\}}$ vollen Rang hat.

Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir also offene Mengen $W_1 \subset \mathbb{C}^c, W_2 \subset \mathbb{C}^{d-c}$ mit $\Phi(p) \in W_1 \times W_2 \subset \Phi(V)$ und eine Abbildung $G : W_2 \rightarrow W_1$, deren Graph $\tilde{M} \cap (W_1 \times W_2)$ ist.

Sei g_1 die erste Komponente von G .

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \tilde{t} : W_1 \times W_2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\zeta_1, \dots, \zeta_d) &\mapsto \zeta_1 - g_1(\zeta_{c+1}, \dots, \zeta_d) \end{aligned}$$

Man rechnet sofort nach, dass $\tilde{t}|_{\tilde{M}} = 0$ ist, womit folgt, dass $t := \tilde{t} \circ \Phi$ auf $\iota(M) \cap \Phi^{-1}(W_1 \times W_2)$ verschwindet.

Ferner ist $\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \zeta_1} \equiv 1$ auf $W_1 \times W_2$, womit für $x \in V_p := \Phi^{-1}(W_1 \times W_2)$ folgt:

$$\begin{aligned} Xt(x) &= Xt \circ \Phi^{-1} \circ \Phi(x) \\ &= \left. \frac{\partial (t \circ \Phi^{-1})}{\partial \zeta_1} \right|_{\Phi(x)} \\ &= \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \zeta_1} \right|_{\Phi(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit liefert t das Gewünschte. □

Mit der Funktion t aus Satz 1.2 kann man sehr intuitiv rechnen – im Prinzip erhalten wir die für Polynome bekannten Ableitungsregeln. Dazu ein Lemma.

Lemma 1.1. *Mit den Voraussetzungen aus Satz 1.2 gilt auf der Menge V_p :*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : Xt^n = nt^{n-1} \tag{1.1}$$

$$\forall_{m, n \in \mathbb{N}, m \leq n} : X^m t^n = \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m} \tag{1.2}$$

$$\forall_{m, n \in \mathbb{N}, m > n} : X^m t^n = 0 \tag{1.3}$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen lassen sich per Induktion zeigen.

zu (1.1): Für $n = 1$ ist das Satz 1.2.

Mit der Produktregel folgt im Induktionsschritt, dass

$$\begin{aligned}Xt^{n+1} &= tXt^n + t^n Xt \\ &= tnt^{n-1} + t^n \\ &= (n+1)t^n\end{aligned}$$

ist, womit (1.1) folgt.

zu (1.2): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Die Aussage wird mit Induktion über m bewiesen.

Für $m = 1$ ist das (1.1).

Mit der Definition der $(m+1)$ -ten Potenz von X und mit (1.1) erhalten wir im Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}X^{m+1}t^n &= X(X^m t^n) \\ &= X\left(\frac{n!}{(n-m)!}t^{n-m}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}Xt^{n-m} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}(n-m)t^{n-m-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(m+1))!}t^{n-(m+1)}\end{aligned}$$

Damit gilt (1.2).

zu (1.3): Seien $m > n$ beliebig. Dann existiert ein $k \geq 1$, so dass $m = n + k$ ist. Mit (1.2) folgt:

$$\begin{aligned}X^m t^n &= X^{k-1}(X(X^n t^n)) \\ &= X^{k-1}X(n!) \\ &= X^{k-1}(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit folgt (1.3). □

1.2 Produkte von Vektorfeldern

Für das Produkt XY zweier Vektorfelder ist bisher noch nicht klar, was es bedeutet, dieses in einem Punkt $p \in N$ auszuwerten. Folgende Definition gibt Aufschluss darüber.

Definition 1.4. Sei $U \subset N$ offen und $X : \mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ ein Garbenmorphismus. Für $p \in U$ definieren wir:

$$\begin{aligned} X_p : \mathcal{O}_N|_{U,p} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (W, f) &\mapsto X(W)(f)(p) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne (W, f) den Lift eines Funktionenkeims \bar{f} auf einer offenen Menge W .

Warnung 1.1. Man verwechsle X_p nicht mit der Abbildung zwischen den Halmen $(W, f) \mapsto (W, X(W)(f))$. Da wir im Folgenden Produkte von Vektorfeldern betrachten, ist die Schreibweise X_p konsistent mit der für Vektorfelder üblichen Schreibweise $N_p \ni X_p : \mathcal{O}_{N,p} \rightarrow \mathbb{C}$. Aus der Tatsache, dass die Abbildung zwischen den Halmen wohldefiniert ist, folgt sofort, dass X_p wohldefiniert ist.

Lemma 1.2. Seien $X, Y \in \text{Hom}(\mathcal{O}_N, \mathcal{O}_N)(U)$ und $p \in U$ beliebig. Dann ist $(XY)_p = X_p Y$. Anders gesagt: für ein beliebiges $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,p}$ mit Lift f gilt:

$$(XY)_p(\bar{f}) = X_p(\overline{Yf})$$

Beweis: Seien $p \in U$ und $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,p}$ mit Lift f beliebig. Damit ist:

$$\begin{aligned} (XY)_p(\bar{f}) &= (XY)f(p) \\ &= X(Yf)(p) \\ &= X_p(\overline{Yf}) \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Bemerkung 1.2. Die Aussage des vorherigen Lemmas scheint trivial, allerdings werden wir oft Potenzen eines Vektorfeldes in einem Punkt auswerten

und mit folgender Regel, die eine direkte Folgerung aus diesem Lemma ist, rechnen:

Seien $X, Y, Z \in \text{Hom}(\mathcal{O}_N, \mathcal{O}_N)(U)$ beliebig, sei $p \in U$, so dass $X_p = Y_p$ ist. Dann folgt sofort mit Lemma 1.2:

$$(XZ)_p = X_p Z = Y_p Z = (YZ)_p$$

Wir können X also durch Y ersetzen, wenn es links im Produkt steht – an anderer Stelle ist das im Allgemeinen nicht möglich.

Wir kommen nun zu der Definition, die uns später helfen wird, geschickt Jet-Differenzen auszurechnen.

Definition 1.5. Sei $U \subset N$ offen, und seien X, Y Vektorfelder auf U . Dann bezeichnen wir mit $[X, Y]$ die Lie-Klammer von X und Y . Diese ist definiert durch:

$$[X, Y] := XY - YX$$

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definieren wir die iterierte Lie-Klammer $[X, Y]^{(n)}$ rekursiv durch:

$$\begin{aligned} [X, Y]^{(2)} &= [X, Y] \\ [X, Y]^{(n)} &= [X, [X, Y]^{(n-1)}] \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3. Wir könnten schon bei $n = 1$ starten, indem wir $[X, Y]^{(1)} := Y - X$ setzen.

Man rechnet sofort aus, dass das mit der Rekursionsformel konsistent ist.

Es folgen ein paar wichtige Eigenschaften der Lie-Klammer. Diese finden sich in [War71, Kapitel 1, „Vector Fields“] und werden hier nicht bewiesen.

Satz 1.3. Seien $X, Y, Z \in TN(U)$ und $f, g \in \mathcal{O}_N(U)$ beliebig. Folgende Eigenschaften gelten:

1. $[X, Y]^{(n)}$ ist ein Vektorfeld
2. $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear
3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$
4. $[X, Y] = -[Y, X]$
5. $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$

Interessant werden für uns Untergarben des Tangentialbündels sein, die abgeschlossen bezüglich der Lie-Klammer sind.

Definition 1.6. *Es sei TN die Garbe der Schnitte im Tangentialbündel. Eine Untergarbe $\mathcal{F} \subset TN$ heißt integrabel, falls gilt:*

$$\forall_{U \subset N \text{ offen}} \forall_{X, Y \in \mathcal{F}(U)} : [X, Y] \in \mathcal{F}(U)$$

Beispiel 1.1. 1. *Die trivialen Garben TN und 0 sind offensichtlich integrabel.*

2. *Wir fassen jetzt TN als Mannigfaltigkeit auf, und sei $\mathcal{D} \subset TN$ eine involutive Distribution (siehe [War71, Kapitel 1, „Distributions and the Frobenius Theorem“]).*

Dann ist die Garbe der Schnitte, welche wir auch mit \mathcal{D} bezeichnen, nach Definition integrabel.

3. *Sei $\mathcal{F} \subset TN$ integrabel, und $A \subset N$ eine (nicht notwendig offene) Teilmenge. Dann ist die Garbe \mathcal{F}^A , die für $U \subset N$ offen durch*

$$\mathcal{F}^A(U) := \{X \in \mathcal{F}(U) \mid \forall_{p \in A \cap U} : X_p = 0\}$$

definiert ist, integrabel.

Bemerkung 1.4. *Beispiel 3 zeigt, dass der Begriff der integrablen Untergarbe eine Verallgemeinerung des Begriffes der involutiven Distribution ist. Es ist für eine Menge A im Allgemeinen nicht möglich, ein Vektorbündel anzugeben, dessen Schnitte genau durch die Garbe \mathcal{F}^A gegeben sind, da die Dimension einer Faser über einem Punkt aus A gleich Null wäre, und damit verschiedene Fasern im Allgemeinen unterschiedliche Dimensionen hätten.*

Als nächstes werden wir zeigen, dass die iterierte Lie-Klammer unter geeigneten Voraussetzungen die Differenz von Potenzen zweier Vektorfelder liefert. Zur Vorbereitung beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.3. *Es seien $X, Y \in TN(U)$, $p \in U$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:*

$$\forall_{n \leq n_0} : X_p^n = Y_p^n$$

Dann gilt:

$$\forall_{k, l \in \mathbb{N}, l \geq 2} : k + l \leq n_0 \Rightarrow X^k[X, Y]_p^{(l)} = 0 \quad (1.4)$$

$$\forall_{k, l \in \mathbb{N}, l \geq 2} : k + l = n_0 + 1 \Rightarrow X^k[X, Y]_p^{(l)} = X^{n_0-1}[X, Y]_p \quad (1.5)$$

Beweis: Beide Gleichungen folgen per Induktion über l , wobei wir Gleichung (1.4) für den Beweis von Gleichung (1.5) benutzen werden.

zu (1.4): Für $n_0 \in \{1, 2\}$ ist die Aussage immer wahr, weshalb wir $n_0 \geq 3$ annehmen.

Für $l = 2$ gilt mit Lemma 1.2 für beliebiges $k \leq n_0 - l$:

$$\begin{aligned} X^k[X, Y]_p^{(l)} &= X^k X Y_p - X^k Y X_p \\ &= X^{k+1} Y_p - Y^{k+1} X_p \\ &= Y_p^{k+2} - X_p^{k+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} X^k[X, Y]_p^{(l+1)} &= X^k[X, [X, Y]^{(l)}]_p \\ &= X^k X [X, Y]_p^{(l)} - X^k [X, Y]^{(l)} X_p \\ &= 0 \end{aligned}$$

zu (1.5): Der Induktionsanfang ($l = 2$) ist evident.

Im Induktionsschritt können wir wieder von $n_0 \geq 3$ ausgehen, und wir nutzen Gleichung (1.4):

$$\begin{aligned} X^k[X, Y]_p^{(l+1)} &= X^k[X, [X, Y]^{(l)}]_p \\ &= X^k X [X, Y]_p^{(l)} - X^k [X, Y]^{(l)} X_p \\ &= X^{n_0-1} [X, Y]_p - 0 X_p \\ &= X^{n_0-1} [X, Y]_p \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 1.4. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 1.3.*

Dann gilt:

$$[X, Y]_p^{(n_0+1)} = Y_p^{n_0+1} - X_p^{n_0+1}$$

Beweis: Für $n_0 = 1$ haben wir:

$$\begin{aligned} [X, Y]_p^{(2)} &= (XY)_p - (YX)_p \\ &= Y_p^2 - X_p^2 \end{aligned}$$

Im Induktionsschritt erhalten wir mit der Definition der iterierten Lie-Klammer

und mit Lemma 1.3:

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p^{(n_0+1)} &= [X, [X, Y]^{(n_0)}]_p \\
&= (X[X, Y]^{(n_0)})_p - ([X, Y]^{(n_0)}X)_p \\
&= (X^{n_0-1}[X, Y])_p \\
&= (X^{n_0}Y)_p - (X^{n_0-1}YX)_p \\
&= Y_p^{n_0+1} - (Y^{n_0}X)_p \\
&= Y_p^{n_0+1} - X_p^{n_0+1}
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. \square

An dieser Stelle sei auf die Bedeutung von Satz 1.4 hingewiesen.

Zwar ist die Potenz eines Vektorfeldes nicht sonderlich anschaulich, aber die Differenz solcher Potenzen ist, sofern die Potenzen kleineren Grades übereinstimmen, durch ein Vektorfeld gegeben, und Vektorfelder verstehen wir gut.

Wir haben eine ähnliche Situation bei Jet-Differenzen, welche durch ein Element des Translations-Bündels gegeben sind.

In Kapitel 2 werden wir sehen, dass unter geeigneten Bedingungen die Lie-Klammer genau die Jet-Differenz liefert.

1.3 Produktmannigfaltigkeiten

In Folgenden widmen wir uns der Struktur des Tangentialbündels auf Produktmannigfaltigkeiten.

Sind M, N komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimensionen c und d , so ist $M \times N$ eine $(c + d)$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, dessen Atlas von Karten der Gestalt $(U \times V, (\Phi \times \Psi)) - (U, \Phi)$ beziehungsweise (V, Ψ) sind Karten auf M beziehungsweise N - erzeugt wird. Man gewinnt die Karten also auf kanonische Weise aus denen von M und N .

Wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung des Tangentialbündels sind die kanonischen Projektionen $\pi_i, i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{array}{ccc}
M \times N & \xrightarrow{\pi_2} & N \\
\pi_1 \downarrow & & \\
M & &
\end{array}$$

Um das Tangentialbündel beschreiben zu können, zunächst folgendes Lemma (siehe [War71, Kapitel 1, exercise 24]).

Lemma 1.4. 1. Ist \tilde{M} eine weitere komplexe Mannigfaltigkeit und $\alpha : \tilde{M} \rightarrow M \times N$ eine Abbildung, so ist α holomorph genau dann, wenn $\pi_1 \circ \alpha$ und $\pi_2 \circ \alpha$ holomorph sind.

2. Folgende Abbildung ist ein Vektorraum-Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen:

$$\begin{aligned} \varphi : (M \times N)_{(m,n)} &\rightarrow M_m \oplus N_n \\ v &\mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v)) \end{aligned}$$

3. Vektorfelder $X \in TM(U), Y \in TN(V)$ induzieren auf kanonische Weise Vektorfelder \tilde{X} auf $U \times N$ beziehungsweise \tilde{Y} auf $M \times V$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{(n)} = 0$.

4. Für $(m_0, n_0) \in M \times N$ definieren wir Injektionen:

$$\begin{aligned} \iota_{n_0} : M &\rightarrow M \times N \\ m &\mapsto (m, n_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \iota_{m_0} : N &\rightarrow M \times N \\ n &\mapsto (m_0, n) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\forall_{v \in (M \times N)_{(m_0, n_0)}} \forall_{f \in \mathcal{O}_{M \times N, (m_0, n_0)}} : v(f) = d\pi_1(v)(f \circ \iota_{n_0}) + d\pi_2(v)(f \circ \iota_{m_0})$$

Beweis:

1. Sei \tilde{M} eine k -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Da die Projektionen holomorph sind, ist für die Hinrichtung nichts zu zeigen.

Seien $\pi_1 \circ \alpha$ und $\pi_2 \circ \alpha$ holomorph.

Wir zeigen zunächst, dass α stetig ist.

Seien $U \subset M$ und $V \subset N$ offen. Dann ist

$$\alpha^{-1}(U \times V) = (\pi_1 \circ \alpha)^{-1}(U) \cap (\pi_2 \circ \alpha)^{-1}(V)$$

offen.

Da derartige Mengen eine Basis der Topologie bilden, ist α stetig.

Für die Holomorphie betrachten wir eine Karte $(\tilde{U}, \tilde{\Phi})$ von \tilde{M} und eine Karte $(U \times V, \Phi \times \Psi)$ von $M \times N$, wo wieder (U, Φ) beziehungsweise

(V, Ψ) Karten von M beziehungsweise N sind. Es ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$g := (\Phi \times \Psi) \circ \alpha \circ \tilde{\Phi}|_{\tilde{\Phi}^{-1}(\alpha^{-1}(U \times V))} : \mathbb{C}^k \supset \tilde{\Phi}^{-1}(\alpha^{-1}(U \times V)) \rightarrow \mathbb{C}^{c+d}$$

holomorph ist.

Dazu genügt es, dass jede Komponente g_i von g holomorph ist. Ist $i \leq c$ und z_i die i -te Koordinate des \mathbb{C}^c , so ist g_i gegeben durch $g_i = z_i \circ \Phi \circ \pi_1 \circ \alpha \circ \tilde{\Phi}^{-1}$, und damit holomorph.

In analoger Weise sind die übrigen Komponenten von g holomorph, womit die Behauptung folgt.

2. Offensichtlich haben sowohl $(M \times N)_{(m,n)}$, als auch $M_m \oplus N_n$ Dimension $c + d$. Da $d\pi_1$ und $d\pi_2$ linear sind, ist auch φ linear. Also genügt es zu zeigen, dass φ injektiv ist.

Sei $v \in \ker \varphi$ beliebig.

Wir wählen eine Karte $(U \times V, \Phi \times \Psi)$ mit $(m, n) \in U \times V$ und Koordinaten $\{z_1, \dots, z_c, z_{c+1}, \dots, z_{c+d}\}$. Bezüglich dieser Karte ist v durch $\sum_{k=1}^{c+d} a_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, mit $a_k \in \mathbb{C}$, gegeben. Sei $\bar{f} \in \mathcal{O}_{M,m}$ ein Funktionenkeim. Offensichtlich ist $f \circ \pi_1$ konstant in z_{c+1}, \dots, z_{c+d} womit folgt:

$$\begin{aligned} d\pi_1(v)(\bar{f}) &= v(f \circ \pi_1) \\ &= \sum_{k=1}^c a_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nehmen wir für f die Koordinaten-Funktionen, so folgt, dass alle a_k , wo $k \leq c$ ist, verschwinden. Die gleiche Überlegung mit π_2 statt π_1 liefert, dass auch die a_k für $k \in \{c+1, \dots, c+d\}$ verschwinden. Also war v schon der Nullvektor, woraus die Injektivität von φ folgt.

3. \tilde{X} ist gegeben durch $\tilde{X}_{(m,n)} = \varphi^{-1}(X_m, 0)$, wo φ der Isomorphismus aus Punkt 2 ist. Analog wird \tilde{Y} definiert.

Es genügt zu zeigen, dass $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ ist, für die iterierte Lie-Klammer folgt die Aussage dann sofort per Induktion. Null zu sein, ist eine lokale Eigenschaft, weshalb wir uns wieder auf ein Kartengebiet der Form $(U \times V, \Phi \times \Psi)$ beschränken können.

Bezüglich dieser Karte sind unsere Vektorfelder gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \sum_{k=1}^c f_k \frac{\partial}{\partial z_k} \\ \tilde{Y} &= \sum_{k=c+1}^{c+d} f_k \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned}$$

Hier sind $f_1, \dots, f_c \in \mathcal{O}_M(U)$ und $f_{c+1}, \dots, f_{c+d} \in \mathcal{O}_N(V)$. Aufgrund der Linearität der Lie-Klammer genügt es, Lie-Klammern der Form $[f_i \frac{\partial}{\partial z_i}, f_j \frac{\partial}{\partial z_j}]$, $i \in \{1, \dots, c\}, j \in \{c+1, \dots, c+d\}$, zu bestimmen. Für solche i, j ist offensichtlich $\frac{\partial f_i}{\partial z_j} = \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0$. Mit den Rechenregeln für die Lie-Klammer erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left[f_i \frac{\partial}{\partial z_i}, f_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right] &= f_i f_j \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right] + f_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} - f_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Seien $v \in M \times N_{(m_0, n_0)}$ und $\bar{f} \in \mathcal{O}_{M \times N, (m_0, n_0)}$ beliebig. Auch hier können wir uns auf eine Karte der Form $(U \times V, \Phi \times \Psi)$ beschränken.

Wir stellen fest:

$$\begin{aligned} \iota_{n_0} \circ \pi_1(m, n) &= (m, n_0) \\ \iota_{m_0} \circ \pi_2(m, n) &= (m_0, n) \end{aligned}$$

Bezüglich $\Phi \times \Psi$ ist $v = \sum_{k=1}^{c+d} a_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, wobei wieder $\{z_1, \dots, z_c\}$ Koordinaten von M und $\{z_{c+1}, \dots, z_{c+d}\}$ Koordinaten von N sind.

Damit ist $f \circ \iota_{n_0} \circ \pi_1$ konstant in z_{c+1}, \dots, z_{c+d} , und wir erhalten:

$$\begin{aligned} d\pi_1(v)(f \circ \iota_{n_0}) &= v(f \circ \iota_{n_0} \circ \pi_1) \\ &= \sum_{k=1}^{c+d} a_k \frac{\partial (f \circ \iota_{n_0} \circ \pi_1)}{\partial z_k} \Big|_{(\Phi(m_0), \Psi(n_0))} \\ &= \sum_{k=1}^c a_k \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_{(\Phi(m_0), \Psi(n_0))} \end{aligned}$$

Analog folgt, dass $d\pi_2(v)(f \circ \iota_{m_0}) = \sum_{k=c+1}^{c+d} a_k \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_{(\Phi(m_0), \Psi(n_0))}$ ist, womit die Behauptung folgt. □

Die Vektorfelder aus Punkt 3 erfüllen eine überaus nützliche Eigenschaft, die wir zunächst definieren.

Definition 1.7. Seien $X \in TM(U)$, $Y \in TN(V)$ und $\varphi : U \rightarrow V$ holomorph. X und Y heißen φ -related, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{d\varphi} & TV \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$

Für Vektorfelder, die φ -related sind, gilt folgender Satz.

Satz 1.5. Seien $\varphi : U \rightarrow V$ holomorph, $X_1, X_2 \in TM(U)$ und $Y_1, Y_2 \in TN(V)$. Falls X_i φ -related zu Y_i , für $i = 1, 2$, ist, so sind die Lie-Klammern $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ φ -related.

Beweis: Ein Beweis findet sich in [War71, chapter 1, „Vector Fields“, Proposition 1.55]. \square

Lemma 1.5. Die Vektorfelder aus Punkt 3 sind π_1 - und π_2 -related in dem Sinne, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xleftarrow{d\pi_1} & T(M \times N) & \xrightarrow{d\pi_2} & TN \\ X \uparrow & & \tilde{X} + \tilde{Y} \uparrow & & Y \uparrow \\ \pi_1(U) & \xleftarrow{\pi_1} & U & \xrightarrow{\pi_2} & \pi_2(U) \end{array}$$

Beweis: Aus Symmetrie-Gründen können wir uns auf das linke Rechteck beschränken.

Sei $(m, n) \in U$ beliebig. Der Tangentialvektor $v := (\tilde{X} + \tilde{Y})_{(m,n)}$ ist per Definition gegeben durch $\varphi^{-1}(X_m, 0) + \varphi^{-1}(0, Y_n)$.

Aus der Definition von φ folgt damit sofort, dass $d\pi_1((\tilde{X} + \tilde{Y})_{(m,n)}) = X_m$ ist. \square

Wir können nun das Tangentialbündel (aufgefasst als Garbe der Schnitte) beschreiben.

Satz 1.6. Seien M, N komplexe Mannigfaltigkeiten. Es gilt folgende Isomorphie zwischen Garben:

$$\pi_1^*TM \oplus \pi_2^*TN \cong T(M \times N)$$

Sind ferner $\mathcal{F} \subset TM$ und $\mathcal{G} \subset TN$ integrabel, so ist $\pi_1^*\mathcal{F} \oplus \pi_2^*\mathcal{G} \subset T(M \times N)$ integrabel.

Beweis: Zunächst definieren wir Morphismen:

$$\begin{aligned}\alpha &: \pi_1^*TM \rightarrow T(M \times N) \\ \beta &: \pi_2^*TN \rightarrow T(M \times N)\end{aligned}$$

Dazu gehen wir wie folgt vor:

Sei $U \subset M \times N$ offen.

Wir definieren zunächst einen $\mathcal{O}_M(\pi_1(U))$ -bilinearen Modulmorphismus:

$$\begin{aligned}\varphi(U) &: \langle TM(\pi_1(U)) \times \mathcal{O}_{M \times N}(U) \rangle \rightarrow T(M \times N)(U) \\ (X, f) &\mapsto f\tilde{X}\end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert dann einen Prägarben-Morphismus:

$$\alpha^-(U) : TM(U) \otimes_{\mathcal{O}_M(\pi_1(U))} \mathcal{O}_{M \times N}(U) \rightarrow T(M \times N)(U)$$

Durch Vergarben und mit der universellen Eigenschaft der Vergarbung erhalten wir den gesuchten Morphismus α .

Analog konstruiert man $\beta : \pi_2^*TN \rightarrow T(M \times N)$.

Den gesuchten Isomorphismus $\Phi : \pi_1^*TM \oplus \pi_2^*TN \rightarrow T(M \times N)$ erhält man, indem man $\Phi(U)(s, t) := \alpha(U)(s) + \beta(U)(t)$, für $(s, t) \in \pi_1^*TM \oplus \pi_2^*TN(U)$, setzt.

Wir zeigen auf den Halmen, dass Φ ein Isomorphismus ist.

Sei $(m, n) \in M \times N$ beliebig. Wir können wieder Koordinaten $\{z_1, \dots, z_{c+d}\}$ derart wählen, dass $\{z_1, \dots, z_c\}$ Koordinaten von M und die übrigen $\{z_{c+1}, \dots, z_{c+d}\}$ von N sind.

Die Äquivalenzklasse eines Vektorfeldes aus $T(M \times N)_{(m,n)}$ hat dann einen Vertreter der Gestalt $\sum_{k=1}^{c+d} f_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, mit $\bar{f}_k \in \mathcal{O}_{(M \times N), (m,n)}$. Es ist evident, dass ein solches Vektorfeld ein Urbild hat, womit die Surjektivität folgt.

Für die Injektivität betrachten wir ein Element $(\bar{s}, \bar{t}) \in \pi_1^*TM \oplus \pi_2^*TN_{(m,n)}$ des Kerns.

Dann existiert eine offene Menge $W \subset M \times N$ und Funktionen $f_1, \dots, f_{c+d} \in \mathcal{O}_{M \times N}(W)$, so dass Lifts s von \bar{s} und t von \bar{t} in Koordinaten folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned}s &= \sum_{k=0}^c \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes f_k \\ t &= \sum_{k=c+1}^{c+d} \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes f_k\end{aligned}$$

Damit ist das Bild von (\bar{s}, \bar{t}) durch die Äquivalenzklasse von $\sum_{k=1}^{c+d} f_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ gegeben. Damit diese Null ist, müssen aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $\frac{\partial}{\partial z_k}$ schon alle f_k auf einer offenen Menge verschwinden. Damit folgt aber, dass $\bar{s} = 0$ und $\bar{t} = 0$ sind, also ist Φ injektiv.

Den zweiten Teil des Satzes beweisen wir zunächst für Vektorfelder der Form $\tilde{X} + \tilde{Y}$, wie sie in Lemma 1.4 definiert wurden.

Betrachten wir zwei Vektorfelder $\tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2 \in T(M \times N)(U)$, so folgt mit Lemma 1.5 und Satz 1.5, dass die entsprechenden Lie-Klammern π_1 -related sind. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xleftarrow{d\pi_1} & T(M \times N) & \xrightarrow{d\pi_2} & TN \\ \uparrow [X_1, X_2] & & \uparrow [\tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2] & & \uparrow [Y_1, Y_2] \\ \pi_1(U) & \xleftarrow{\pi_1} & U & \xrightarrow{\pi_2} & \pi_2(U) \end{array}$$

Betrachten wir einen Punkt $(m, n) \in M \times N$, so folgt aus der Tatsache, dass $(d\pi_1, d\pi_2) : (M \times N)_{(m,n)} \rightarrow M_m \oplus N_n$ ein Isomorphismus ist, und dass das Diagramm kommutiert:

$$[\tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2]_{(m,n)} = ([X_1, X_2]^\sim + [Y_1, Y_2]^\sim)_{(m,n)}$$

Damit folgt:

$$[\tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2] = [X_1, X_2]^\sim + [Y_1, Y_2]^\sim \in \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* \mathcal{G}(U)$$

Schauen wir uns als nächstes Vektorfelder der Form $f_i \tilde{X}_i + g_i \tilde{Y}_i$, mit $f_i, g_i \in \mathcal{O}_{M \times N}(U)$ beliebig, an. Mit den Rechenregeln für die Lie-Klammer folgt:

$$[f_1 \tilde{X}_1, f_2 \tilde{X}_2] = f_1 f_2 [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] + f_1 (\tilde{X}_1 f_2) \tilde{X}_2 - f_2 (\tilde{X}_2 f_1) \tilde{X}_1$$

Der erste Summand liegt wegen obiger Überlegung in $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* \mathcal{G}$.

Analog folgt, dass $[g_1 \tilde{Y}_1, g_2 \tilde{Y}_2] \in \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* \mathcal{G}$ ist.

Aus der Linearität der Lie-Klammer folgt die allgemeine Aussage. \square

Satz 1.7. *Seien $\mathcal{F} \subset TM$ eine beliebige Untergarbe und $n_0 \in N$ beliebig. Betrachte die Einbettung:*

$$\begin{aligned} \iota_{n_0} : M &\rightarrow M \times N \\ m &\mapsto (m, n_0) \end{aligned}$$

Sei $X \in \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN(U)$ beliebig, mit $U \subset M \times N$ offen. Dann liegt das Vektorfeld $X' := d\pi_1 \circ X \circ \iota_{n_0}$ in \mathcal{F} .

Beweis: Wir zeigen, dass die Abbildung $X \mapsto d\pi_1 \circ X \circ \iota_{n_0}$ einen Garbenmorphismus $\varphi : \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN \rightarrow \iota_{n_0,*} \mathcal{F}$ in den Push-Forward von \mathcal{F} definiert. φ ist offensichtlich ein Morphismus nach $\iota_{n_0,*} TM$. Um zu zeigen, dass das Bild in $\iota_{n_0,*} \mathcal{F}$ liegt, betrachten wir zunächst die Prägarbe $(\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN)^-$, welche für $U \subset M \times N$ offen durch

$$(\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN)^-(U) = \mathcal{F}(\pi_1(U)) \otimes_{\mathcal{O}_M(\pi_1(U))} \mathcal{O}_{M \times N}(U)$$

definiert ist.

Man rechnet sofort nach, dass die Aussage für Vektorfelder der Form $X = f\tilde{X} + g\tilde{Y}$, mit $f, g \in \mathcal{O}_{M \times N}(U)$ und $X \in \mathcal{F}(\pi_1(U)), Y \in TN(\pi_2(U))$, stimmt. Mit linearer Erweiterung folgt, dass das Bild der Prägarbe im Push-forward $\iota_{n_0,*} \mathcal{F}$ liegt.

Mit der universellen Eigenschaft der Vergarbung finden wir einen Morphismus Φ , der den Prägarbenmorphismus fortsetzt, wir erhalten also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN & \xrightarrow{\Phi} & \iota_{n_0,*} \mathcal{F} \\ \uparrow & \nearrow & \\ (\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* TN)^- & & \end{array}$$

Da dieser Morphismus eindeutig ist, muss er schon mit φ übereinstimmen, womit die Behauptung folgt. \square

1.4 Untermannigfaltigkeiten

Wir haben schon festgestellt, dass das Produkt zweier Vektorfelder keine Derivation ist, die Produktregel also nicht erfüllt ist. Für Potenzen der Form X^n gilt jedoch eine etwas verallgemeinerte Produktregel, die ein wenig an den binomischen Lehrsatz erinnert.

Lemma 1.6. *Sei $U \subset N$ offen, $X \in TN(U)$ ein Vektorfeld und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.*

Dann gilt:

$$\forall_{f,g \in \mathcal{O}_N(U)} : X^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^k f)(X^{n-k} g)$$

Beweis: Für $n = 1$ ist das die übliche Produktregel.
Per Induktion ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
X^{n+1}(fg) &= X(X^n(fg)) \\
&= X\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^k f)(X^{n-k} g)\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X((X^k f)(X^{n-k} g)) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X^{n-k} g)X(X^k f) + (X^k f)X(X^{n-k} g)) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X^{n-k} g)X^{k+1} f + (X^k f)X^{n-k+1} g) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (X^{n+1-k} g)X^k f + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^k f)X^{n+1-k} g \\
&= X^{n+1}g + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) (X^k f)(X^{n+1-k} g) + X^{n+1}f \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^k f)(X^{n+1-k} g)
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.7. *Es sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung, mit $\dim M = c < \dim N = d$ und X ein Vektorfeld auf $U \subset N$, das M im Punkt p_0 transversal schneidet. Wir finden nach Satz 1.2 aus Abschnitt 1.1 eine offene Teilmenge $p_0 \in V \subset U$ mit einer Funktion $t \in \mathcal{O}_N(V)$, so dass $Xt = 1$ und $t|_{\iota(M)} = 0$ ist. Sei $Y \in TN(V)$ ein weiteres Vektorfeld und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig.*

Dann gilt:

$$\forall_{m \leq n} \forall_{p \in V \cap \iota(M)} : (X + t^n Y)_p^m = X_p^m$$

Beweis: Seien $p \in V$, $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,p}$ mit Lift f und $n \geq 1$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass für alle $m \leq n$ gilt:

$$(X + t^n Y)_p^m(\bar{f}) = X_p^m(\bar{f})$$

Das zeigen wir per Induktion über m .

Für $m = 1$ ist $(X + t^n Y)_p^m(f) = X_p(f) + t^n(p)Y_p(f) = X_p(f)$.

Für den Induktionsschritt benutzen wir Lemmata 1.6 und 1.1.
 Sei die Aussage für $m < n$ bewiesen, dann folgt für $m + 1$:

$$\begin{aligned}
 (X + t^n Y)_p^{m+1}(f) &= (X + t^n Y)_p^m((X + t^n Y)f) \\
 &= X_p^m((X + t^n Y)f) \\
 &= X_p^{m+1}(f) + X_p^m(t^n(Yf)) \\
 &= X_p^{m+1}(f) + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X_p^k(t^n) X_p^{n-k}(Yf) \\
 &= X_p^{m+1}(f) + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}(p) X_p^{n-k}(Yf) \\
 &= X_p^{m+1}(f) + 0
 \end{aligned}$$

□

Damit folgt:

Lemma 1.8. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 1.7.
 Dann existiert zu jedem $p \in \iota(M) \cap U$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung $p \in V \subset U$
 mit einem Vektorfeld $X' \in TN(V)$, für das gilt:*

$$\begin{aligned}
 \forall_{k < n} : X'^k|_{\iota(M) \cap V} &= X^k|_{\iota(M) \cap V} \\
 X'^n|_{\iota(M) \cap V} &= (X^n - Y)|_{\iota(M) \cap V}
 \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{F} \subset TN$ integrabel und $X, Y \in \mathcal{F}(U)$, so ist $X' \in \mathcal{F}(V)$

Beweis: Seien $p \in \iota(M) \cap U$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir finden eine Umgebung $V \subset N$ von p und eine Funktion $t \in \mathcal{O}_N(V)$, die auf M verschwindet und für die $Xt \equiv 1$ gilt.

Setze

$$X' := X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(Y)$$

Mit Lemma 1.7 folgt für $k < n$ und $x \in \iota(M) \cap V$:

$$\begin{aligned}
 X'_x{}^k &= \left(X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(Y)\right)_x^k \\
 &= X_x^k
 \end{aligned}$$

Sei $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,x}$ mit Lift f beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
X_x^n(f) &= \left(X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right)_x^n(f) \\
&= \left(X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right)^{n-1} \left(X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right)_x(f) \\
&= X^{n-1} \left(X - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right)_x(f) \\
&= X_x^n(f) - X_x^{n-1} \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(Yf)\right) \\
&= X_x^n(f) - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X_x^k(t^{n-1})) (X_x^{n-1-k}(Yf)) \\
&= X_x^n(f) - Y_x(f)
\end{aligned}$$

Also erfüllt X' das Gewünschte.

Sind $X, Y \in \mathcal{F}(U)$, so folgt direkt aus der Konstruktion, dass $X' \in \mathcal{F}(V)$ ist. \square

Kapitel 2

Vektorfelder und Jets

2.1 Jet-Bündel

Alles, was wir über Jet-Bündel wissen müssen, steht in [Kou07, Kapitel 1 und 2]. Wir vergegenwärtigen uns einige Fakten. Sei N eine d -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Fakten 2.1. 1. Ein n -Jet im Punkt $p \in N$ ist eine Äquivalenzklasse $[\gamma]_n$ eines glatten Weges $\gamma : \Delta \rightarrow N$ mit $\gamma(0) = p$. Dabei sind zwei Wege äquivalent, falls sie (bezüglich einer Karte) bis zur n -ten Ableitung übereinstimmen. Die Menge aller Äquivalenzklassen im Punkt p bezeichnen wir mit $(J_n N)_p$. Bei einer gegebenen Karte Φ können wir $(J_n N)_p$ mit einer Vektorraumstruktur versehen. Betrachte dazu folgende Bijektion:

$$\begin{aligned} (d^n \Phi)^p : (J_n N)_p &\rightarrow \mathbb{C}^{nd} \\ [\gamma]_n &\mapsto \left(\frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dz}(0), \dots, \frac{d^n(\Phi \circ \gamma)}{dz^n}(0) \right) \end{aligned}$$

2. $J_n N := \coprod_{p \in N} (J_n N)_p$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $(n+1)d$. Mit der natürlichen Projektion $\pi_{n,n-1} : J_n N \rightarrow J_{n-1} N$ wird $J_n N$ zu einem affinen Bündel über $J_{n-1} N$, welches trivial ist auf Mengen der Form $U \times \mathbb{C}^{(n-1)d}$, wo $U \subset N$ ein Kartengebiet mit Karte Φ ist. Die

holomorphe Struktur ist durch Isomorphismen folgender Art gegeben:

$$\begin{aligned} d^n \Phi : J_n U &\rightarrow U \times \mathbb{C}^{nd} \\ [\gamma]_n &\mapsto (\gamma(0), (d^n \Phi)^{\gamma(0)}[\gamma]) \end{aligned}$$

3. Zu einem gegebenen 1-Jet $[\gamma]_1 \in (J_1 N)_p$ definieren wir einen Tangentialvektor:

$$\begin{aligned} v_\gamma : \mathcal{O}_{N,p} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \bar{f} &\mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dz}(0) \end{aligned}$$

Die Abbildung $[\gamma] \mapsto v_\gamma$ definiert einen Vektorbündel-Isomorphismus zwischen $J_1 N$ und TN (siehe zum Beispiel [Jän91, Kapitel 2.3]).

4. Wir erhalten auf kanonische Weise ein zu $\pi_{n,n-1} : J_n N \rightarrow J_{n-1} N$ assoziiertes Vektorbündel, das sogenannte Translationsbündel:

$$\pi_{n,n-1}^{tl} : J_n^{tl} N \rightarrow J_{n-1} N$$

Dieses ist auf den gleichen Mengen trivial, wie $J_n N \rightarrow J_{n-1} N$, und die Übergangsfunktionen sind durch den linearen Anteil der Übergangsfunktionen des affinen Bündels $J_n N \rightarrow J_{n-1} N$ gegeben.

5. Sind $[\gamma]_n, [\mu]_n \in \pi_{n,n-1}^{-1}([\lambda]_{n-1})$ zwei n -Jets, die über $J_{n-1} N$ in der gleichen Faser liegen, so ist die koordinatenunabhängige Jet-Differenz ein Element des Translationsbündels, also $[\gamma]_n - [\mu]_n \in J_n^{tl} N$.
6. Sei M eine weitere komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension c und $f : M \rightarrow N$ ein Morphismus.
Dann induziert J_n einen Morphismus zwischen den n -Jet Bündeln:

$$\begin{aligned} J_n f : J_n M &\rightarrow J_n N \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

$J_n f$ ist mit den Projektionen verträglich in dem Sinne, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} J_n M & \xrightarrow{J_n f} & J_n N \\ \pi_{n,n-1}^M \downarrow & & \downarrow \pi_{n,n-1}^N \\ J_{n-1} M & \xrightarrow{J_{n-1} f} & J_{n-1} N \end{array}$$

J_1f liefert bereits Bekanntes, wie das folgende kommutative Diagramm zeigt.

$$\begin{array}{ccc} J_1M & \xrightarrow{\sim} & TM \\ J_1f \downarrow & & \downarrow df \\ J_1N & \xrightarrow{\sim} & TN \end{array}$$

Bemerkung 2.1. 1. Für $m < n - 1$ erhalten wir ein Faserbündel $\pi_{n,m} : J_nN \rightarrow J_mN$.

Beachte, dass dieses Bündel im Allgemeinen kein affines Bündel ist.

2. Es ist äquivalent, einen n -Jet als Äquivalenzklasse von Wegen $\gamma' : \Delta' \rightarrow N$, wo $0 \in \Delta' \subset \mathbb{C}$ eine beliebige offene Menge ist, zu definieren.

Vermöge der in Punkt 1 angegebenen Bijektion sieht man, dass man zu einem solchen Weg γ' einen äquivalenten Weg $\gamma : \Delta \rightarrow N$ findet.

Da wir in diesem Kapitel Differentialgleichungen lösen werden, und das im Allgemeinen nur lokal möglich ist, ist es sinnvoll, mit dieser etwas abgeschwächten Definition zu arbeiten.

Für uns ist von Interesse, wie Differenzen in folgender Situation aussehen: Zu einem gegebenen Morphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten haben wir einen Schnitt im Pullback-Bündel, also folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} f^*J_{n-1}N & \longrightarrow & J_{n-1}N \\ s \uparrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Diesen Schnitt s liften wir auf zwei unterschiedliche Weisen, wir erhalten also kommutative Diagramme mit $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & f^*J_nN & \longrightarrow & J_nN \\ & s_i \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{s} & f^*J_{n-1}N & \longrightarrow & J_{n-1}N \end{array}$$

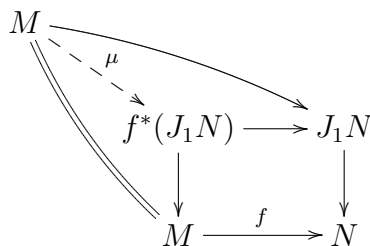
Zu einem gegebenen $m \in M$ erhalten wir damit n -Jets $[\gamma]_n, [\mu]_n \in J_nN$, die über $J_{n-1}N$ in der gleichen Faser liegen.

Wir können also die Differenz ausrechnen und erhalten so eine Abbildung $s_2 - s_1 : M \rightarrow J_n^{tl}N$.

Nach [Kou07, Kapitel 2, Note 2.3.2.] ist $J_n^{tl}N \cong (\pi_{n-1,0})^*(J_1N)$.

Insgesamt erhalten wir so eine Abbildung $M \rightarrow J_1N$. Wir sehen, dass man Jet-Differenzen als Elemente des 1-Jet-Bündels, also des Tangentialbündels, auffassen kann.

Mit der universellen Eigenschaft des Faser-Produkts erhalten wir einen passenden Schnitt:



Wir fassen die Differenz als Schnitt μ in $f^*(J_1N)$ auf.

Dass wir auf diese Weise eine affine Struktur erhalten, besagt der folgende Satz.

Satz 2.1. *Sei $f : M \rightarrow N$ ein Morphismus und $s : M \rightarrow f^*J_{n-1}N$ ein Schnitt im Pullback-Bündel. Seien $s_1, s_2, s_3 : M \rightarrow f^*J_nN$ drei verschiedene Liftungen und $\mu_{1,2}, \mu_{1,3}, \mu_{2,3} : M \rightarrow f^*J_1N$ die dazugehörigen Differenzen. Dann gilt für alle $m \in M$:*

$$\begin{aligned}
 \mu_{1,2}(m) = 0 &\Leftrightarrow s_1(m) = s_2(m) \\
 \mu_{1,2}(m) + \mu_{2,3}(m) &= \mu_{1,3}(m)
 \end{aligned}$$

Beweis: Offensichtlich erfüllt die Abbildung nach J_n^tN die beiden Eigenschaften. Da die obigen Isomorphismen insbesondere Vektorraum-Isomorphismen auf den Fasern definieren, folgt sofort die Behauptung. \square

Notation 2.1. *Falls s_1 und s_2 zwei Liftungen wie in Satz 2.1 sind, schreiben wir auch $s_2 - s_1$ für μ . Wir gehen also stillschweigend davon aus, dass $s_2 - s_1$ nach f^*J_1N abbildet.*

Zuletzt untersuchen wir, was mit Differenzen unter Morphismen passiert.

Satz 2.2. *Sei $f : M \rightarrow N$ ein Morphismus und $[\gamma] \in J_{n-1}M$ ein $(n-1)$ -Jet. Es sei $J_nM([\gamma]) := (\pi_{n,n-1}^M)^{-1}([\gamma]) \subset J_nM$ die Faser über $[\gamma]$ und entsprechend $J_nN([f \circ \gamma]) := (\pi_{n,n-1}^N)^{-1}(J_{n-1}f([\gamma]_{n-1})) \subset J_nN$ die Faser über $J_n f([\gamma])$.*

Wir betrachten die Differenzen

$$\mu^M : J_nM([\gamma]) \rightarrow J_1M$$

und

$$\mu^N : J_n N([f \circ \gamma]) \rightarrow J_1 N$$

Dann ist $J_n f$ affin, wir haben also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} J_n M([\gamma]) \times J_n M([\gamma]) & \xrightarrow{J_n f \times J_n f} & J_n N([f \circ \gamma]) \times J_n N([f \circ \gamma]) \\ \mu^M \downarrow & & \downarrow \mu^N \\ J_1 M & \xrightarrow{J_1 f} & J_1 N \end{array}$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage in Koordinaten.

Seien $[\gamma_1], [\gamma_2] \in J_n M([\gamma])$ zwei n -Jets. Wir betrachten auf M eine Karte (U, Φ) und können ohne Einschränkung annehmen, dass $\Phi(\gamma(0)) = 0$ ist.

Wir setzen $g_j := \Phi \circ \gamma_j$ für $j \in \{1, 2\}$. Damit ist

$$\mu^M([\gamma_1], [\gamma_2]) = [t \mapsto \Phi^{-1}(g_1^{(n)}(0) - g_2^{(n)}(0))t]$$

Es folgt, dass

$$J_1 f \circ \mu([\gamma_1], [\gamma_2]) = [t \mapsto f \circ \Phi^{-1}(g_1^{(n)}(0) - g_2^{(n)}(0))t]$$

ist. Wir wählen auf N eine Karte (V, Ψ) mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$. Wir zeigen die Aussage komponentenweise, sei also $i \in \{1, \dots, d\}$ beliebig.

Wir bestimmen die i -te Komponente von $(d\Psi)^{f \circ \gamma(0)}(J_1 f \circ \mu([\gamma_1], [\gamma_2]))$. Seien $\{\zeta_1, \dots, \zeta_c\}$ die Koordinaten des \mathbb{C}^c und $g_{j,k}$, für $k \in \{1, \dots, c\}$, die Komponenten von g_j . Mit der Produkt- und Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} ((d\Psi)^{f \circ \gamma(0)}(J_1 f \circ \mu([\gamma_1], [\gamma_2])))_i &= \left. \frac{d \left(z_i \circ f \circ \Phi^{-1} \left((g_1^{(n)}(0) - g_2^{(n)}(0)) t \right) \right)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^c \left. \frac{\partial(z_i \circ f \circ \Phi^{-1})}{\partial \zeta_k} \right|_0 \cdot \left. \left(\frac{d^n g_{1,k}}{dt^n} - \frac{d^n g_{2,k}}{dt^n} \right) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt die i -te Komponente von $(d\Psi)^{f \circ \gamma(0)}(\mu^N(J_n f[\gamma_1], J_n f[\gamma_2]))$.

Dazu bestimmen wir die n -te Ableitung von $z_i \circ f \circ \gamma_1 - z_i \circ f \circ \gamma_2$ in $t = 0$.

Mit $h = z_i \circ f \circ \Phi^{-1}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^n(z_i \circ f \circ \gamma_1 - z_i \circ f \circ \gamma_2)}{dt^n} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^n(z_i \circ f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma_1 - z_i \circ f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma_2)}{dt^n} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d^n(h \circ g_1 - h \circ g_2)}{dt^n} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von $h \circ g_1$ ist durch

$$(h \circ g_1)'(t) = \sum_{k=1}^c \frac{\partial h}{\partial \zeta_k} \Big|_{g_1(t)} \cdot \frac{dg_{1,k}}{dt}(t)$$

gegeben.

Da für alle $m < n$ die Ableitungen $g_1^{(m)}(0)$ und $g_2^{(m)}(0)$ übereinstimmen, können wir per Induktion mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel folgern, dass

$$(h \circ g_1)^{(n)}(t) - (h \circ g_2)^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^c \frac{\partial h}{\partial \zeta_k} \Big|_{g_1(0)} \cdot \left(\frac{d^n g_{1,k}}{dt^n} - \frac{d^n g_{2,k}}{dt^n} \right) \Big|_{t=0}$$

ist (für eine genauere Behandlung der höheren Ableitungen sei auf [Kou07, Kapitel 2, Proposition 2.1.3.] verwiesen).

Damit folgt, wenn wir h wieder durch $z_i \circ f \circ \Phi^{-1}$ ersetzen, die Behauptung. \square

2.2 Vektorfelder und Jets

Reden wir über Vektorfelder, denken wir an Schnitte im Tangentialbündel, wobei ein Tangentialvektor im Punkt $p \in N$ eine Derivation ist.

Ordnen wir einem 1-Jet $[\gamma]_1 \in (J_1 N)_p$ den Tangentialvektor v_γ zu, der eine Funktion $f \in \mathcal{O}_{N,p}$ Richtung γ ableitet, erhalten wir einen Isomorphismus. Das Tangentialbündel ist also kanonisch-isomorph zum 1-Jet-Bündel. In diesem Abschnitt widmen wir uns der Frage, ob ähnliche Aussagen für Potenzen von Vektorfeldern und n-Jets gelten.

Als Hilfsmittel müssen wir Wege nehmen, die zu einem gegebenen Vektorfeld passen.

Dazu machen wir einen kurzen Ausflug in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Satz 2.3. *Sei $X \in TN(U)$ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge U , sei $p \in U$ beliebig.*

Dann existiert eine offene Menge $0 \in \Delta' \subset \mathbb{C}$ und ein eindeutiger Weg $\gamma : \Delta' \rightarrow U$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\gamma(0) = p \tag{2.1}$$

$$\forall t \in \Delta' : \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \tag{2.2}$$

Dieser Satz befindet sich in [War71, chapter 1, „Vector Fields“, Theorem 1.48], wir werden ihn trotzdem hier beweisen, da der Beweis eine Differentialgleichung liefert, die wir später noch konkret lösen werden. Voraussetzung ist der folgende Satz, welcher in [Wal72, Kapitel III, §10, „Existenzsatz im Komplexen“] bewiesen wird.

Satz 2.4. *Sei $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorph. Seien ferner $(z_0, w_0) \in D$ beliebig.*

Dann existiert ein $\alpha > 0$, so dass auf der offenen Kreisscheibe $\{|z - z_0| < \alpha\}$ das Anfangswertproblem

$$w' = f(z, w), \quad w(z_0) = w_0$$

genau eine Lösung besitzt.

Damit können wir jetzt Satz 2.3 beweisen.

Beweis: Wir wählen eine Karte (U, Φ) mit Koordinaten z_1, \dots, z_d und $p \in U$. Auf U hat X folgende Gestalt:

$$X|_U = \sum_{k=1}^d f_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

Bezeichnen wir die Koordinate von \mathbb{C} mit ζ , so lässt sich die linke Seite von Gleichung 2.2 für $t \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Kettenregel wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= d\gamma \left(\frac{d}{d\zeta} \Big|_t \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{d(z_k \circ \gamma)}{d\zeta} \Big|_t \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_{\gamma(t)} \end{aligned}$$

Die rechte Seite von Gleichung (2.2) wird für $t \in \mathbb{C}$ zu:

$$\begin{aligned} X_{\gamma(t)} &= \sum_{k=1}^d f_k \circ \gamma(t) \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{k=1}^d f_k \circ \Phi^{-1}(z_1 \circ \gamma(t), \dots, z_d \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_{\gamma(t)} \end{aligned}$$

Setzen wir zuletzt $\gamma_k := z_k \circ \gamma$, erhalten wir folgendes Anfangswertproblem:

$$\frac{d\gamma_k}{d\zeta} \Big|_t = f_k \circ \Phi^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t)), \quad \gamma_k(0) = z_k(p) \quad (k = 1, \dots, d) \quad (2.3)$$

Beachte, dass die Abbildung $f := (f_1 \circ \Phi^{-1}, \dots, f_d \circ \Phi^{-1}) : \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}^d$ holomorph ist, und damit die Voraussetzungen für Satz 2.4 erfüllt sind. Das Anfangswertproblem besitzt damit auf einem geeigneten Gebiet $\Delta' \subset \mathbb{C}$ eine eindeutige Lösung $(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$.

$\gamma := \Phi^{-1} \circ (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ leistet damit das Gewünschte. \square

Definition 2.1. *Ein Weg γ , der die Bedingungen aus Satz 2.3 erfüllt, heißt ein zu X integraler Weg.*

Wir sagen auch, dass γ das von X induzierte Anfangswertproblem im Punkt p löst.

Es folgen zwei Lemmata, die uns helfen einen Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und n -Jets herzustellen.

Lemma 2.1. *Sei $U \subset N$ offen und $X \in TN(U)$ beliebig.*

Seien weiter $\gamma : \Delta' \rightarrow U$ ein zu X integraler Weg und $f \in \mathcal{O}_N(U)$ beliebig.

Dann gilt mit $g := f \circ \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(t) = X^n f \circ \gamma(t)$$

Beweis: Es genügt, die Gleichung lokal zu zeigen.

Seien $f \in \mathcal{O}_N(U)$ und $t_0 \in \Delta'$ beliebig.

Wir erreichen nach einer Verschiebung $t \mapsto t - t_0$, dass $t_0 = 0$ ist.

Nehmen wir zunächst an, dass $X_{\gamma(0)} = 0$ ist.

In diesem Fall ist der konstante Weg $\gamma \equiv \gamma(0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Da die Lösung eindeutig ist, ist der konstante Weg sogar die einzige Lösung. Damit folgt:

$$\forall t \in \Delta' \forall n \in \mathbb{N} : g^{(n)}(t) = 0$$

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} \forall t \in \Delta' \forall n \in \mathbb{N} : X^n f \circ \gamma(t) &= X_{\gamma(0)}^n(f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für den Fall, dass $X_{\gamma(0)} = 0$ ist.

Wir gehen jetzt davon aus, dass $X_{\gamma(0)} \neq 0$ ist.

Nach Satz 1.1 aus Kapitel 1 existiert eine Karte (V, Φ) mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$ und $\gamma(0) \in V$, so dass $X|_V = \frac{\partial}{\partial z_1}$ und $\Phi(\gamma(0)) = 0$ ist.

In diesen Koordinaten lösen wir das Anfangswertproblem. Anhand des Beweises von Satz 2.3 sehen wir, dass Gleichung (2.3) zu lösen ist, welche sich

in unserem Fall für $t \in V$ auf folgende Gestalt reduziert:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\gamma_1}{d\zeta} \right|_t &= 1 \\ \left. \frac{d\gamma_k}{d\zeta} \right|_t &= 0, \quad (k = 2, \dots, d) \end{aligned}$$

Damit ist offensichtlich $\Phi \circ \gamma : t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$ die gesuchte Lösung.

Seien $(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ die Koordinaten des \mathbb{C}^d . Dann gilt per Definition auf V :

$$Xf \circ \Phi^{-1} = \frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial\zeta_1}$$

Induktiv sieht man, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} X^n f \circ \Phi^{-1} &= X(X^{n-1} f) \circ \Phi^{-1} \\ &= \frac{\partial((X^{n-1} f) \circ \Phi^{-1})}{\partial\zeta_1} \\ &= \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} f \circ \Phi^{-1}}{\partial\zeta_1^{n-1}}\right)}{\partial\zeta_1} \\ &= \frac{\partial^n(f \circ \Phi^{-1})}{\partial\zeta_1^n} \end{aligned}$$

Mit $g(t) = f \circ \gamma(t)$ gilt mit der Kettenregel für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(t) &= \frac{d^n}{dt^n}(f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(f \circ \Phi^{-1}(t, 0, \dots, 0)) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial\zeta_1^n}(f \circ \Phi^{-1})|_{z_1=t, z_2=\dots=z_d=0} \\ &= X^n f \circ \Phi^{-1}|_{z_1=t, z_2=\dots=z_d=0} \\ &= X^n f \circ \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ \gamma)(t) \\ &= X^n f \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Um das nächste Lemma zu formulieren, führen wir vorher noch eine Notation ein.

Notation 2.2. Sei (U, Φ) eine Karte von N mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$. Wir definieren für einen beliebigen Garbenmorphismus $\text{Hom}(\mathcal{O}_N, \mathcal{O}_N)(U) \ni X : \mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ eine Abbildung:

$$\begin{aligned} X^\Phi : U &\rightarrow \mathbb{C}^d \\ p &\mapsto X^\Phi(p) = (X_p(z_i))_{i \in \{1, \dots, d\}} \end{aligned}$$

Folgendes Lemma ist nicht sonderlich überraschend.

Lemma 2.2. Für $(\cdot)^\Phi$ gilt:

1.

$$\forall X \in \text{Hom}(\mathcal{O}_N, \mathcal{O}_N)(U) : X^\Phi \text{ ist holomorph}$$

2. Seien $X, Y : \mathcal{O}_N|_U \rightarrow \mathcal{O}_N|_U$ und $f \in \mathcal{O}_N(V)$, mit $V \subset U$ offen, beliebig. Dann gilt:

$$(X|_V + fY|_V)^\Phi = (X|_V)^\Phi + (f \cdot Y|_V)^\Phi$$

Mit anderen Worten: $(\cdot)^\Phi$ definiert einen $\mathcal{O}_M|_U$ -Modul-Homomorphismus.

Beweis:

1. Wir müssen zeigen, dass jede Komponente von X^Φ holomorph ist. Das folgt jedoch direkt aus der Tatsache, dass X nach $\mathcal{O}_M(U)$ abbildet.
2. Sei $p \in V$ beliebig. Dann ist für $j \in \{1, \dots, d\}$ die j -te Komponente von $(X + fY)^\Phi(p)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} (X + fY)^\Phi(p)_j &= (X + fY)(z_j)(p) \\ &= X(z_j)(p) + fY(z_j)(p) \\ &= (X^\Phi + f \cdot Y^\Phi)(p)_j \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2. Für den Fall, dass X ein Vektorfeld ist, liefert Lemma 2.2 schon Bekanntes.

Ist X ein Vektorfeld auf U , so besitzt X bezüglich einer Karte (V, Φ) mit Koordinaten $\{z_1, \dots, z_d\}$ eine Darstellung der Form $\sum_{k=1}^d f_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, mit

$f_k \in \mathcal{O}_N(V)$.

Damit ist die i -te Komponente von X^Φ gegeben durch:

$$\begin{aligned} Xz_i &= \sum_{k=1}^d f_k \frac{\partial z_i}{\partial z_k} \\ &= f_i \end{aligned}$$

Also liefert X^Φ in diesem Fall genau die Funktionen, die vor den Differentialoperatoren stehen.

Dass die eben eingeführte Notation sinnvoll ist, besagt das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 2.1. Es sei (U, Φ) eine beliebige Karte, mit $\gamma(0) = p \in U$.*

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n(\Phi \circ \gamma)}{dt^n}(0) = (X^n)_p^\Phi$$

Beweis: Da beide Seiten der Gleichung Elemente des \mathbb{C}^d sind, genügt es, die einzelnen Komponenten zu vergleichen. Es muss demnach für jede Koordinate $\zeta_i : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}, i \in \{1, \dots, d\}$, gelten, dass $\zeta_i \circ \frac{d^n(\Phi \circ \gamma)}{dt^n}(0) = \zeta_i \circ (X^n)_p^\Phi$ ist. Nach Lemma 2.1 gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_i \circ \frac{d^n(\Phi \circ \gamma)}{dt^n}(0) &= \frac{d^n((\zeta_i \circ \Phi) \circ \gamma)}{dt^n}(0) \\ &= X^n(\zeta_i \circ \Phi)(\gamma(0)) \\ &= ((X^n)_p^\Phi)_i \\ &= \zeta_i \circ (X^n)_p^\Phi \end{aligned}$$

□

An dieser Stelle vermutet man schon, dass die n -te Potenz eines Vektorfelds mit einem Schnitt im n -Jet-Bündel zusammenhängt. Man könnte versucht sein, einen solchen Schnitt durch $p \mapsto (p, X_p, \dots, X_p^n)$ zu definieren.

Dass dies prinzipiell so funktioniert, besagt der nächste Satz.

Satz 2.5. *Es sei $X : U \rightarrow TN(U)$ ein Vektorfeld auf $U \subset N$ offen. Wir überdecken U mit Karten $(V_i, \Phi_i)_{i \in I}$. Betrachte für alle $i \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ die Isomorphismen $d^n \Phi_i : J_n N(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{C}^{nd}$ aus Fakten 2.1.*

Dann induziert X einen Schnitt $U \rightarrow J_n N$, auf V_i definiert durch:

$$\begin{aligned} s_n^{X, \Phi_i} : V_i &\rightarrow J_n N(V_i) \\ x &\mapsto (d^n \Phi_i)^{-1}((x, X^\Phi(x), \dots, (X^n)^\Phi(x))) \end{aligned}$$

Dieser Schnitt ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung, wohldefiniert und wird im Folgenden mit s_n^X bezeichnet.

Ist $\gamma : \tilde{\Delta} \rightarrow V$ ein Weg mit $\gamma(0) = p$, der das durch X gegebene Anfangswert-Problem

$$\forall t \in \tilde{\Delta} : \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

löst, dann gilt für die von γ erzeugten Jets:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (J_n M)_p \ni [\gamma]_n = s_n^X(p)$$

Insbesondere kommutiert für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & J_{n+1}M \\ & \nearrow s_{n+1}^X & \downarrow \pi_{n+1,n} \\ U & \xrightarrow{s_n^X} & J_n M \end{array}$$

Beweis: Als Komposition holomorpher Abbildungen ist $s_n^{X,\Phi}$ offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}$ holomorph.

Seien $V \subset U$ offen und $\Phi, \Psi : V \rightarrow \mathbb{C}^d$ zwei Karten, $n \in \mathbb{N}, p \in V$ beliebig. Wähle eine Umgebung $\tilde{V} \ni p$, auf der eine Lösung γ des Anfangswertproblems $X_\gamma = \dot{\gamma}$ existiert. Sei $[\gamma]_n \in (J_n N)_p$ die Äquivalenzklasse von γ im n -Jet-Bündel.

Dann gilt nach Lemma 2.3:

$$\begin{aligned} d^n \Phi([\gamma]_n) &= \left(p, \frac{d}{dt} \Phi \circ \gamma(0), \dots, \frac{d^n}{dt^n} \Phi \circ \gamma(0) \right) \\ &= (p, X^\Phi(p), \dots, (X^n)^\Phi(p)) \end{aligned}$$

Da $d^n \Phi$ einen Isomorphismus definiert, ist somit $[\gamma]_n = s_n^{X,\Phi}(p)$.

Die obige Rechnung mit Ψ statt Φ liefert außerdem $[\gamma]_n = s_n^{X,\Psi}(p)$, womit die Wohldefiniertheit und die Unabhängigkeit von der Wahl der Karten folgt. Insbesondere verkleben damit s_n^{X,Φ_i} und s_n^{X,Φ_j} auf $V_{i,j} := V_i \cap V_j$.

Die Kommutativität des Diagrammes folgt sofort aus der Definition von s_n^X . \square

Wir haben schon gesehen, dass das 1-Jet-Bündel zum Tangentialbündel isomorph ist.

Die eben erklärte Art, aus einem Vektorfeld einen Schnitt im n -Jet-Bündel zu gewinnen, ist mit diesem Isomorphismus verträglich.

Satz 2.6. Sei $\varphi : J_1N \rightarrow TN$ der Isomorphismus, der jedem 1-Jet die entsprechende Richtungsableitung zuordnet und sei $X : U \rightarrow TU$ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset N$. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} J_1U & \xrightarrow{\varphi} & TU \\ s_1^X \uparrow & & \uparrow X \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

Beweis: Sei $p \in U$ beliebig und sei γ ein Weg, der das von X induzierte Anfangswertproblem in p löst.

Wegen Satz 2.5 gilt für den durch γ gegebenen 1-Jet:

$$[\gamma]_1 = s_1^X(p)$$

Betrachten wir einen Funktionenkeim $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,p}$, so ist mit Lemma 2.1:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ s_1^X(p))(\bar{f}) &= \varphi([\gamma]_1)(\bar{f}) \\ &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= Xf \circ \gamma(0) \\ &= Xf(p) \\ &= X_p(\bar{f}) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 2.4. Seien (U, Φ) eine Karte von N , X und Y Vektorfelder auf U und $p \in U$ beliebig.

Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k \leq n$ gilt:

$$(X^k)^\Phi(p) = (Y^k)^\Phi(p)$$

Dann ist $X_p^n = Y_p^n$.

Beweis: Seien $\gamma : \Delta' \rightarrow U$ die Lösung des von X induzierten Anfangswertproblems in p und analog $\mu : \Delta' \rightarrow U$ die Lösung des von Y induzierten Anfangswertproblems in p . Sei $\bar{f} \in \mathcal{O}_{N,p}$ ein Funktionenkeim mit Lift f .

Dann folgt mit Lemma 2.1:

$$\begin{aligned} X_p^n(\bar{f}) &= X^n(f)(p) \\ &= X^n(f) \circ \gamma(0) \\ &= (f \circ \gamma)^{(n)}(0) \\ &= (f \circ \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ \gamma))^{(n)}(0) \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel überlegt man sich, dass $\Phi \circ \gamma$ hier nur bis zur n -ten Ableitung auftaucht, weshalb wir γ durch μ ersetzen können. Damit folgt, dass $X_p^n(\bar{f}) = Y_p^n(\bar{f})$ ist, was zu zeigen war. \square

Wir können nun geschickt Differenzen zweier n -Jets $[\gamma]_n, [\mu]_n \in J_n N$, die über $J_{n-1} N$ in der gleichen Faser $\pi_n^{-1}([\gamma]_{n-1})$ liegen, ausrechnen. Dies sagt folgender Satz.

Satz 2.7. *Sei $U \subset N$ offen und X, Y Vektorfelder auf U .*

γ beziehungsweise μ seien Wege, die das von X beziehungsweise Y induzierte Anfangswertproblem in einem Punkt $p \in U$ lösen. Ferner sei $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass die Restklassen $[\gamma]_{n_0}, [\mu]_{n_0} \in J_{n_0} N$ gleich sind.

Dann gilt für $l = n_0 + 1$:

$$(\Phi \circ \mu)^{(l)}(0) - (\Phi \circ \gamma)^{(l)}(0) = ([X, Y]^{(l)})_p^\Phi$$

Insbesondere ist die koordinatenunabhängige Jet-Differenz durch $[X, Y]_p^{(l)}$ gegeben.

Beweis: Nach Lemma 2.3 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(\Phi \circ \gamma)^{(n)}(0) - (\Phi \circ \mu)^{(n)}(0) = (X^n)_p^\Phi - (Y^n)_p^\Phi$$

Damit folgt mit Lemma 2.4 für alle $n \leq n_0$:

$$(X^n)_p = (Y^n)_p$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt nach Satz 1.4 aus Kapitel 1, dass $X_p^l - Y_p^l = [X, Y]_p^{(l)}$ ist, womit die Behauptung folgt. \square

2.3 Jet-Bündel auf Produktmannigfaltigkeiten

In Kapitel 1 haben wir gesehen, wie das Tangentialbündel auf Produktmannigfaltigkeiten aussieht. Wir werden nun das gleiche Problem für Jet-Bündel untersuchen. Dabei werden erneut die Projektionen

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\pi_2} & N \\ \pi_1 \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

wesentliches Hilfsmittel sein.

Satz 2.8. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} (J_n\pi_1, J_n\pi_2) : J_n(M \times N) &\rightarrow J_nM \times J_nN \\ [\gamma] &\mapsto (J_n\pi_1([\gamma]), J_n\pi_2([\gamma])) \end{aligned}$$

ist ein Faserbündel-Isomorphismus über $M \times N$.

Beweis: Die Komponenten der Abbildung sind holomorph, womit die Holomorphie folgt.

Wir konstruieren eine inverse Abbildung $(J_n\pi_1, J_n\pi_2)^{-1}$.

Seien $([\lambda], [\mu]) \in J_nM \times J_nN$ mit Repräsentanten λ und μ beliebig.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \gamma : \Delta &\rightarrow M \times N \\ t &\mapsto (\lambda(t), \mu(t)) \end{aligned}$$

und setzen $(J_n\pi_1, J_n\pi_2)^{-1}([\lambda], [\mu]) := [\gamma]$.

Für die Wohldefiniertheit der Abbildung wählen wir eine Karte der Gestalt $(U \times V, \Phi \times \Psi)$, wobei (U, Φ) und (V, Ψ) Karten von M und N sind.

Seien λ' und μ' weitere Repräsentanten von $[\lambda]$ und $[\mu]$. Diese induzieren einen Weg $\gamma' : \Delta \rightarrow M \times N$.

In Koordinaten sieht man, dass $(\Phi \times \Psi) \circ \gamma' = (\Phi \circ \lambda', \Psi \circ \mu')$ ist, womit $[\gamma] = [\gamma']$ folgt. Damit folgt die Wohldefiniertheit.

Die Abbildungen sind zueinander invers, da sie schon auf Repräsentantenniveau zueinander invers sind.

Für die Holomorphie von $(J_n\pi_1, J_n\pi_2)^{-1}$ betrachten wir erneut die Karte $(U \times V, \Phi \times \Psi)$. Es genügt, die Holomorphie der Abbildung

$$d^n(\Phi \times \Psi) \circ (J_n\pi_1, J_n\pi_2)^{-1} \circ ((d^n\Phi)^{-1} \times (d^n\Psi)^{-1}) : d^n\Phi(U) \times d^n\Psi(V) \rightarrow \mathbb{C}^{(n+1)(c+d)}$$

zu zeigen.

Mit den Definitionen der einzelnen Abbildungen rechnet man sofort aus, dass diese Abbildung die Identität, also insbesondere holomorph ist.

Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} J_n(M \times N) & \xrightarrow{(J_n\pi_1, J_n\pi_2)} & J_nM \times J_nN \\ \pi_{n,0}^{M \times N} \downarrow & & \downarrow \pi_{n,0}^M \times \pi_{n,0}^N \\ M \times N & \xlongequal{\quad\quad\quad} & M \times N \end{array}$$

ist evident, was $(J_n\pi_1, J_n\pi_2)$ schließlich zum Faserbündel-Isomorphismus macht.

□

Der vorangegangene Satz und Satz 2.2 implizieren das folgende Korollar.

Korollar 2.1. *Es sei $[\gamma] \in J_{n-1}(M \times N)$ ein $(n-1)$ -Jet im Punkt $(x, y) \in M \times N$.*

Seien $[\gamma_1], [\gamma_2] \in J_n(M \times N)([\gamma]) = (\pi_{n,n-1}^{M \times N})^{-1}([\gamma])$.

Dann ist $[\gamma_1] - [\gamma_2] = (d\pi_1, d\pi_2)^{-1}(J_n\pi_1([\gamma_1]) - J_n\pi_1([\gamma_2]), J_n\pi_2([\gamma_1]) - J_n\pi_2([\gamma_2]))$.

Differenzbildung vertauscht also mit den Projektionen.

Kapitel 3

Infinitesimale Deformationen

Eine Deformation eines Morphismus $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei projektiven, komplexen Mannigfaltigkeiten ist ein Weg

$$\begin{aligned}\gamma : \Delta &\rightarrow \text{Mor}(M, N) \\ t &\mapsto f_t\end{aligned}$$

mit $f_0 = f$. Präziser ausgedrückt fassen wir M und N als projektive, reduzierte, noethersche Schemata über $\text{Spec } \mathbb{C}$ auf und betrachten das Schema $\text{Mor}(M, N)$ der Morphismen von M nach N . Variieren wir nun $t \in \Delta$, so erhalten wir, anschaulich gesagt, Morphismen f_t , die „in der Nähe von f “ liegen.

Zum Verständnis fixieren wir einen festen Punkt $m \in M$. Variieren wir jetzt $t \in \Delta$, erhalten wir einen Weg

$$\begin{aligned}\gamma_m : \Delta &\rightarrow N \\ t &\mapsto f_t(m)\end{aligned}$$

und können damit jedem Punkt $m \in M$ einen Tangentialvektor $\dot{\gamma}_m(0) \in N_{f_0(m)}$ zuordnen, was einen Schnitt $s : M \rightarrow f^*TN$ liefert.

Ein derartiger Schnitt heißt „infinitesimale Deformation 1. Ordnung“ und ist – ähnlich wie die Ableitung einer Funktion – eine grobe Approximation der Deformation.

Um die Deformation genauer approximieren zu können, betrachten wir n -Jets anstelle von Tangentialvektoren, was schließlich einen Schnitt $M \rightarrow f^*J_n N$, eine so genannte „infinitesimale Deformation n -ter Ordnung“ liefert.

Für eine mathematisch exakte Behandlung dieses Themas sei auf [Kou07, chapter 3] verwiesen.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Frage beschäftigen, inwieweit zu einem Morphismus $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und einer gegebenen infinitesimalen Deformation n -ter Ordnung ein Lift, also eine infinitesimale Deformation $(n + 1)$ -ter Ordnung, existiert.

Wir werden, nachdem die grundlegenden Begriffe geklärt wurden, dieses Liftungs-Problem in drei Schritten angehen.

Im ersten Schritt wird f eine Einbettung sein und die infinitesimale Deformation die Mannigfaltigkeit M transversal schneiden.

Im zweiten Schritt verzichten wir auf die Bedingung, dass die infinitesimale Deformation die Mannigfaltigkeit transversal schneidet, und im dritten Schritt darauf, dass f eine Einbettung ist.

Wir starten mit einigen Grundlagen.

3.1 Infinitesimale Deformationen

Definition 3.1. Sei $f : M \rightarrow N$ holomorph, $n \in \mathbb{N}$. Eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung ist ein Schnitt $s : M \rightarrow f^*J_n N$ im Pullback-Bündel.

Bemerkung 3.1. Der Begriff „infinitesimale Deformation n -ter Ordnung“ ist streng genommen anders definiert. Es sei auf [Kou07, Chapter 3] verwiesen. Dort wird gezeigt, dass im Fall, dass M und N projektive Mannigfaltigkeiten — also aus algebraisch-geometrischer Sicht projektive, reduzierte, noethersche Schemata über $\text{Spec } \mathbb{C}$ — sind, die hier gegebene Definition äquivalent zur „richtigen“ Definition ist.

Definition 3.2. Sei $s_n : M \rightarrow f^*J_n N$ eine infinitesimale Deformation der Ordnung n . Eine (globale) Liftung von s_n ist eine infinitesimale Deformation $s_{n+1} : M \rightarrow f^*J_{n+1} N$ derart, dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 & & f^*J_{n+1}N \\
 & \nearrow^{s_{n+1}} & \downarrow f^*\pi_n \\
 M & \xrightarrow{s_n} & f^*J_n N
 \end{array}$$

Nun kann die Frage nach der Existenz globaler Liftungen im Allgemeinen nicht positiv beantwortet werden. Lokal ist es jedoch stets möglich, eine Lif-

tung zu finden. Einen Beweis findet man in [Kou07, Kapitel 4].

Satz 3.1. *Es sei $s_n : M \rightarrow f^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation der Ordnung n . Dann existiert für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $p \in U \subset M$, auf der s_n geliftet werden kann.*

Diesen Satz können wir etwas später direkt aus einem anderen Satz folgern, weshalb wir hier auf den Beweis verzichten.

3.2 Transversale Deformationen von Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass die Abbildung eine Einbettung $\iota : M \rightarrow N$, also insbesondere M eine Untermannigfaltigkeit von N ist, und dass die infinitesimale Deformation die Untermannigfaltigkeit transversal schneidet.

In diesem Fall ist manches leichter zu zeigen. Zum Beispiel können wir das Pullback-Bündel explizit angeben. Es ist $\iota^* J_n N \cong J_n N|_M$. Der allgemeine Fall wird dann später daraus gefolgert.

Die Idee wird es sein, Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge von N zu suchen, deren Einschränkung auf M die infinitesimale Deformation liefert. Mit Hilfe von Kapitel 2 erhalten wir dann Liftungen.

Analog zu Kapitel 1 definieren wir den Begriff „transversal“.

Definition 3.3. *Sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $s : M \rightarrow \iota^* J_1 N$ eine infinitesimale Deformation erster Ordnung. Betrachte die Projektion $\text{pr} : \iota^* J_1 N \rightarrow J_1 N \cong TN$.*

s schneidet M im Punkt $p \in M$ transversal, falls der Tangentialvektor $\text{pr} \circ s(p)$ M transversal schneidet.

Ist $s : M \rightarrow \iota^ J_n N$ eine infinitesimale Deformation höherer Ordnung, so schneiden sich s und M im Punkt $p \in M$ transversal, falls $s_1 := \iota^* \pi_{n,1} \circ s$ M im Punkt p transversal schneidet. Gilt diese Eigenschaft für alle $p \in M$, schneidet s die Mannigfaltigkeit M transversal.*

Satz 3.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Seien $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $s : M \rightarrow J_n N|_M$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung, die M transversal schneidet.*

Dann existiert zu jedem $p_0 \in M$ eine offene Umgebung $p_0 \in U \subset N$ und ein

Vektorfeld $X \in TN(U)$, so dass gilt:

$$s_n^X|_{\iota^{-1}(U)} = s|_{\iota^{-1}(U)}$$

Beweis: Sei $p_0 \in M$ beliebig.

Wir beweisen die Aussage per Induktion über n .

Offensichtlich ist der Garbenmorphismus $TN \rightarrow TN|_M$ surjektiv. Damit folgt, dass der Homomorphismus $TN_{p_0} \rightarrow TN|_{M,p_0}$ zwischen den Halmen surjektiv ist, womit folgt:

$$\exists \bar{X} \in TN_{p_0} : \bar{X}|_M = \bar{s}_{p_0}$$

Nach Definition existiert damit eine offene Menge $p_0 \in U \subset N$ und ein Lift $X \in TN(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset N$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} J_1U|_M & \longrightarrow & TU \\ \uparrow s & & \uparrow X \\ \iota^{-1}(U) & \xrightarrow{\iota} & U \end{array}$$

Damit folgt die Behauptung für $n = 1$.

Nehmen wir für den Induktionsschritt an, die Behauptung sei für alle $n < n_0 \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Sei $s : M \rightarrow J_{n_0}N|_M$ eine infinitesimale Deformation n_0 -ter Ordnung. Durch Projizieren erhalten wir eine infinitesimale Deformation $(n_0 - 1)$ -ter Ordnung, $s_{n_0-1} = \iota^* \pi_{n_0, n_0-1} \circ s$. Für diese finden wir nach Induktions-Voraussetzung eine offene Menge $p \in U \subset N$ und ein Vektorfeld $X \in TN(U)$, für das gilt:

$$s_{n_0-1}^X|_{\iota^{-1}(U)} = s_{n_0-1}|_{\iota^{-1}(U)}$$

Damit liegen für alle $p \in \iota^{-1}(U)$ die n_0 -Jets $s_{n_0}^X(p)$ und $s(p)$ über $J_{n_0-1}N$ in der gleichen Faser, nämlich in $\iota^* \pi_{n_0, n_0-1}^{-1}(s_{n_0-1}(p))$.

Wir können also punktweise die Jet-Differenzen ausrechnen, welche uns einen Schnitt $\mu : \iota^{-1}(U) \rightarrow J_1N|_M$ liefern.

Für diesen Schnitt finden wir – nachdem wir U gegebenenfalls verkleinert haben – nach Induktions-Voraussetzung ein weiteres Vektorfeld $Y \in TN(U)$ mit $Y|_{\iota^{-1}(U)} = \mu$.

Da X und M sich transversal schneiden, finden wir mit Lemma 1.8 – nachdem wir U nochmals verkleinert haben – ein Vektorfeld $X' \in TN(U)$, das bis zur $(n_0 - 1)$ -ten Potenz mit X übereinstimmt und dessen n_0 -te Potenz durch $X^{n_0} - Y$ gegeben ist. Damit gilt:

$$\forall_{k < n_0} : X'^k|_{\iota^{-1}(U)} = X^k|_{\iota^{-1}(U)}$$

Also liegen für alle $p \in \iota^{-1}(U)$ die n_0 -Jets $s_{n_0}^{X'}(p)$ und $s(p)$ wieder in der gleichen Faser $\iota^* \pi_{n_0, n_0-1}^{-1}(s_{n_0-1}^{X'}(p))$.

Die Transitivität des affinen Raums nutzend wird die Differenz zu:

$$\begin{aligned} s_{n_0}^{X'}(p) - s(p) &= s_{n_0}^{X'}(p) - s_{n_0}^X(p) + s_{n_0}^X(p) - s(p) \\ &= X_p^{n_0} - Y_p - X_p^{n_0} + Y_p \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit, dass $s_{n_0}^{X'}|_{\iota^{-1}(U)} = s|_{\iota^{-1}(U)}$ ist.

□

Etwas umformuliert ergibt sich damit folgendes

Korollar 3.1. *Es seien $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung, die M transversal schneidet. Dann existiert eine offene Überdeckung $\iota(M) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset N$ mit einer Familie von Vektorfeldern $(X_i)_{i \in I}$, $X_i \in TN(U_i)$, so dass für jedes $i \in I$ gilt:*

$$s_n^{X_i} = s|_{U_i}$$

Die Voraussetzung, dass die infinitesimale Deformation M transversal schneidet, wurde im Beweis von Satz 3.2 nur im Induktionsschritt benötigt. Für den Fall, dass $n = 1$ ist, können wir den Satz also leicht verschärfen.

Satz 3.3. *Es sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $s : M \rightarrow \iota^* J_1 N$ eine infinitesimale Deformation erster Ordnung.*

Dann existieren eine offene Überdeckung $\iota(M) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset N$ und Vektorfelder $X_i \in TN(U_i)$, so dass $X_i|_{\iota^{-1}(U_i)} = s|_{\iota^{-1}(U_i)}$ ist.

Bisher haben wir zugelassen, dass die infinitesimale Deformation ein beliebiger Schnitt in $f^* J_n N$ ist, jedoch interessieren uns in Anwendungen nur bestimmte Deformationen, die zum Beispiel in eine bestimmte „Richtung“ zeigen oder, in dem Fall, dass wir eine Untermannigfaltigkeit deformieren, einen bestimmten Punkt festhalten.

An dieser Stelle kommen wir zu dem Begriff der „integralen Untergarbe“, welchen wir in Kapitel 1 bereits definiert haben.

Die folgende Definition soll klären, was es bedeutet, dass eine infinitesimale Deformation in einer integralen Untergarbe des Tangentialbündels liegt.

Definition 3.4. *Es gelte die Situation aus Satz 3.2. Sei $\mathcal{F} \subset TN$ integral. s liegt in \mathcal{F} oder s ist eine infinitesimale Deformation entlang \mathcal{F} , falls zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $\iota(p) \in U \subset N$ und ein Vektorfeld $X \in \mathcal{F}(U)$ existiert, so dass $s_n^X|_{\iota^{-1}(U)} = s|_{\iota^{-1}(U)}$ ist.*

Diese Definition ist auf den ersten Blick nicht sonderlich zufrieden stellend, da sie die Existenz gewisser Vektorfelder voraussetzt und nicht für beliebige infinitesimale Deformationen gilt. Ferner ist noch nicht klar, wie man überprüft, dass eine gegebene infinitesimale Deformation in \mathcal{F} liegt.

Falls $n = 1$ ist, ist diese Definition jedenfalls äquivalent dazu, dass s in $\iota^*\mathcal{F}$ liegt, wie man sofort verifiziert. Das heißt, wir können im Fall $n = 1$ diese Definition für beliebige Morphismen $f : M \rightarrow N$ erweitern.

Offensichtlich können wir auf den offenen Mengen aus Satz 3.2 ganz einfach Deformationen s_n der Ordnung n zu Deformationen s_{n+1} der Ordnung $n + 1$ liften. Dazu nehmen wir ein Vektorfeld X mit den Eigenschaften aus Satz 3.2 und setzen $s_{n+1} = s_n^X$. Dieses ist wegen Satz 2.5 eine Liftung. Die Frage, ob man solche Deformationen auch global liften kann, lässt sich im Allgemeinen allerdings nicht positiv beantworten.

Bevor wir eine hinreichende Bedingung formulieren, wann es möglich ist, global zu liften, formulieren wir noch ein Lemma, das uns im eigentlichen Satz etwas Notation ersparen wird.

Lemma 3.1. *Sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung, $\mathcal{F} \subset TN$ integrabel und $s : M \rightarrow \iota^*J_nN$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung entlang \mathcal{F} . Sei $\mu \in \iota^*\mathcal{F}(M)$ eine infinitesimale Deformation erster Ordnung. Dann existiert eine infinitesimale Deformation $s' : M \rightarrow \iota^*J_nN$ entlang \mathcal{F} , für die gilt:*

$$\begin{aligned}\forall_{m \in M} : \iota^*\pi_{n,n-1} \circ s(m) &= \iota^*\pi_{n,n-1} \circ s'(m) \\ \forall_{m \in M} : s(m) - s'(m) &= \mu(m)\end{aligned}$$

Beweis: Mit den Sätzen 3.1 und 3.3 finden wir zunächst eine offene Überdeckung $\iota(M) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset N$ und Vektorfelder $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$, welche für alle $i \in I$ in $\mathcal{F}(U_i)$ liegen und für die gilt:

$$\begin{aligned}\forall_{i \in I} : s_n^{X_i}|_{\iota^{-1}(U_i)} &= s|_{\iota^{-1}(U_i)} \\ \forall_{i \in I} : Y_i|_{\iota^{-1}(U_i)} &= \mu|_{\iota^{-1}(U_i)}\end{aligned}$$

Sei $i \in I$ beliebig.

Mit Lemma 1.8 können wir $\iota^{-1}(U_i)$ mit offenen Mengen $(U'_{i,j})_{j \in J_i}$ überdecken, auf denen Vektorfelder $X'_{i,j} \in \mathcal{F}(U'_{i,j})$, für alle $j \in J_i$, existieren, für die gilt:

$$\begin{aligned}\forall_{l < n} : X'_{i,j}|_{\iota^{-1}(U_{i,j})} &= X_i^l|_{\iota^{-1}(U_{i,j})} \\ X'_{i,j}|_{\iota^{-1}(U_{i,j})} &= (X_i^n - Y_i)|_{\iota^{-1}(U_{i,j})}\end{aligned}$$

Wir definieren für alle $i \in I$ und $j \in J_i$ eine infinitesimale Deformation $s^{i,j} := s_n^{X_i^j}|_{\iota^{-1}(U_{i,j})}$.

Offensichtlich ist für alle $m \in \iota^{-1}(U_{i,j})$ nach Konstruktion $\iota^* \pi_{n,n-1} \circ s^{i,j}(m) = \iota^* \pi_{n,n-1} \circ s(m)$.

Wir zeigen, dass $s^{i,j}$ zu einer infinitesimalen Deformation s' auf M verkleben. Sei $m \in \iota^{-1}(U_{i_1,j_1} \cap U_{i_2,j_2})$ beliebig.

$$\begin{aligned} s^{i_1,j_1}(m) - s^{i_2,j_2}(m) &= X_{i_1,j_1,m}^n - X_{i_2,j_2,m}^m \\ &= (X_{i_1}^n - Y_{i_1})_m - (X_{i_2}^n - Y_{i_2})_m \\ &= X_{i_1,m}^n - X_{i_2,m}^n + (Y_{i_2,m} - Y_{i_1,m}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zuletzt bestimmen wir die Differenz zu s .

Sei $m \in \iota^{-1}(U'_{i,j})$ beliebig. Dann ist:

$$\begin{aligned} s(m) - s'(m) &= X_{i,m}^n - X_{i,j,m}^m \\ &= X_{i,m}^n - (X_i^n - Y_i)_m \\ &= Y_{i,m} \\ &= \mu(m) \end{aligned}$$

Also leistet s' das Gewünschte. \square

Folgender Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz globaler Liftungen, hier wieder nur für den Spezialfall, dass $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Wir werden, ähnlich wie im Beweis von Lemma 1.8, zwei Vektorfelder verkleben. Später wird dieser Satz noch stark verallgemeinert.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit vereinbaren wir vorher noch eine übliche Notation.

Notation 3.1. Sei $(U_i)_{i \in I} \subset N$ eine Familie von offenen Mengen.

Dann setzen wir $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ für beliebige $i, j \in I$.

Satz 3.4. Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.2 und sei $\mathcal{F} \subset TN$ integrierbar.

Seien $(U_i, X_i)_{i \in I}$ die entsprechenden offenen Mengen mit Vektorfeldern $X_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

Wir setzen für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in I$:

$$Y_{i,j}^{(n)} := [X_i, X_j]^{(n)} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$$

Die Abbildung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}|_M$ induziert eine Abbildung $\varphi : H^1(\mathcal{F}) \rightarrow H^1(\iota^* \mathcal{F})$

Sei $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{i,j \in I} : Y_{i,j}^{(n)}|_{U_{i,j} \cap \iota(M)} \neq 0\}$.

Falls $\varphi\left(\overline{Y_{i,j}^{(n_0)}}\right) = \bar{0}$ in $H^1(\iota^*\mathcal{F})$ ist, existiert eine infinitesimale Deformation $s' : M \rightarrow \iota^*J_{n_0}N$ entlang \mathcal{F} , welche ein Lift von s ist. Insbesondere lässt sich s beliebig oft liften, falls $H^1(\iota^*\mathcal{F}) = 0$ ist.

Beweis: Sei $i \in I$ beliebig. Wir setzen $s^i = s_{n_0}^{X_i} : \iota^{-1}(U_i) \rightarrow \iota^*J_{n_0}N$. Nach Voraussetzung liegen für $x \in \iota^{-1}(U_{i,j})$ die Jets $s^i(x)$ und $s^j(x)$ in der gleichen Faser, weshalb wir Differenzen ausrechnen können, welche uns Schnitte $\mu_{i,j} \in \iota^*\mathcal{F}(U_{i,j})$ liefern.

Für diese Schnitte gilt, wie wir gezeigt haben, folgende Gleichheit:

$$\mu_{i,j} = Y_{i,j}^{(n_0)}|_{\iota^{-1}(U_{i,j})}$$

Damit folgt, dass $\overline{(\mu_{i,j})} = \bar{0} \in H^1(\iota^*\mathcal{F})$ ist.

Wir folgern aus der Definition, dass $(\mu_{i,j}) \in B^1(\iota^*\mathcal{F})$ ein Korand ist und finden damit eine Kokette $(\mu_i) \in C^0(\iota^*\mathcal{F})$ deren Bild unter der Randabbildung $(\mu_{i,j})$ ist.

Mit Lemma 3.1 finden wir also zu jedem U_i eine infinitesimale Deformation $s^i : \iota^{-1}(U_i) \rightarrow \iota^*J_{n_0}N$ entlang \mathcal{F} , welche ein Lift von s ist und mit der Eigenschaft, dass $s^i - s^j = \mu_i$ ist. Wir zeigen, dass die s^i auf M verkleben, wodurch wir eine Liftung gefunden haben.

Seien also $i, j \in I$ und $m \in \iota^{-1}(U_{i,j})$ beliebig.

$$\begin{aligned} s^i(m) - s^j(m) &= s^i(m) - s^j(m) + (s^i(m) - s^i(m)) + (s^j(m) - s^j(m)) \\ &= (s^i(m) - s^i(m)) - (s^j(m) - s^j(m)) - (s^i(m) - s^j(m)) \\ &= \mu_i(m) - \mu_j(m) - \mu_{i,j}(m) \\ &= \mu_{i,j}(m) - \mu_{i,j}(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ist schon der ganze Obstruktionsraum $H^1(\iota^*\mathcal{F}) = 0$, so können wir das Argument beliebig oft anwenden, also beliebig oft liften, womit die Behauptung folgt. \square

3.3 Deformationen von Untermannigfaltigkeiten

Wir werden Satz 3.4 für beliebige Deformationen $s : M \rightarrow \iota^*J_nN$ verallgemeinern.

Anschaulich gesagt werden wir die Dimension von N erhöhen, indem wir zu

$N \times \mathbb{C}$ übergehen und das Liftungsproblem für eine infinitesimale Deformation $M \rightarrow f^* J_n(N \times \mathbb{C})$ lösen.

Wie man eine derartige Deformation erhält, sagt das folgende Lemma.

Lemma 3.2. *Seien M, N, \tilde{N} komplexe Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow \tilde{N}$ holomorph.*

Dann induziert jede infinitesimale Deformation $s : M \rightarrow f^ J_n N$ auf natürliche Weise eine infinitesimale Deformation, die wir mit $g_* s : M \rightarrow (g \circ f)^* J_n \tilde{N}$ bezeichnen.*

Existiert ferner ein Morphismus $h : \tilde{N} \rightarrow N$, so dass $h \circ g = \text{id}_N$ ist, so ist die von $g_ s$ induzierte Deformation $h_*(g_* s) : M \rightarrow (h \circ g \circ f)^* J_n N = f^* J_n N$ gleich s .*

Beweis: Der Beweis nutzt die universelle Eigenschaft des Faserprodukts.

Zunächst erhalten wir eine Abbildung $M \rightarrow J_n \tilde{N}$. Betrachte dazu das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 f^* J_n N & \longrightarrow & J_n N & \xrightarrow{J_n g} & J_n \tilde{N} \\
 \uparrow s & & \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & \tilde{N}
 \end{array}$$

Die universelle Eigenschaft des Faserprodukts liefert damit die gesuchte Deformation, wie das folgende Diagramm zeigt.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g_* s} & (g \circ f)^* J_n \tilde{N} \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & M \\
 & & \downarrow \\
 & & \tilde{N}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & J_n \tilde{N} \\
 & & \downarrow \\
 & & \tilde{N}
 \end{array}$$

Sei jetzt $h : \tilde{N} \rightarrow N$ linksinvers zu g .

Wie wir gerade gesehen haben, erhalten wir $h_* g_* s$ aus der universellen Eigenschaft des Faserprodukts.

Sei $\varphi : M \rightarrow J_n N$ die Abbildung, die von $g_* s$ induziert wird. Es ist offensichtlich $J_n(h \circ g) : J_n N \rightarrow J_n N$ die Identität auf $J_n N$, weshalb folgendes

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 (g \circ f)^* J_n \tilde{N} & \longrightarrow & J_n \tilde{N} & \xrightarrow{J_n h} & J_n N \\
 g_* s \uparrow & & & \swarrow J_n g & \uparrow \text{id}_N \\
 M & \xrightarrow{s} & f^* J_n N & \longrightarrow & J_n N
 \end{array}$$

Damit folgt, dass s das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & J_n N \\
 \downarrow s & \searrow & \downarrow \\
 f^* J_n N & \longrightarrow & J_n N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.2. Seien $s^1, s^2 : M \rightarrow f^* J_n N$ zwei Liftungen einer infinitesimalen Deformation $s : M \rightarrow f^* J_{n-1} N$ und sei $g : N \rightarrow \tilde{N}$ holomorph. Mit Lemma 2.2, also aus der Tatsache, dass $J_n g$ eine affine Abbildung ist, folgt direkt, dass für alle $m \in M$ gilt:

$$g_*(s^1 - s^2) = g_* s^1 - g_* s^2$$

Diese Rechenregel werden wir öfters benutzen.

Wir haben gezeigt, wie man aus einer Deformation mit Hilfe einer universellen Eigenschaft eine neue Deformation gewinnt.

Es ist noch nicht klar, was es bedeuten soll, dass eine infinitesimale Deformation $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ in \mathcal{F} liegt.

Für den Fall, dass $n = 1$ ist, ist es sicherlich sinnvoll zu sagen, dass s in \mathcal{F} liegt, falls $s \in \iota^* \mathcal{F}$ ist. Falls $n \geq 2$ ist, suchen wir eine infinitesimale Deformation, die M transversal schneidet und wenden die bisherige Definition an. Der folgende Satz besagt, dass eine solche Deformation existiert.

Satz 3.5. Es sei $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung.

Setze $\tilde{N} := N \times \mathbb{C}$. Wir definieren eine Einbettung:

$$\begin{aligned}
 \iota_0 : N &\rightarrow \tilde{N} \\
 x &\mapsto (x, 0)
 \end{aligned}$$

Damit werden N und M zu Untermannigfaltigkeiten von \tilde{N} .

Es existiert eine infinitesimale Deformation $s^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_n \tilde{N}$, die M transversal schneidet.

Betrachte die Projektion $\pi_1 : \tilde{N} \rightarrow N$.

Dann ist die in Lemma 3.2 durch s^{tr} definierte Deformation $\pi_{1*} s^{tr} : M \rightarrow \iota^* J_n N$ gleich s .

Beweis: Sei z die Koordinate von \mathbb{C} . Betrachte den von $\frac{d}{dz}$ erzeugten Schnitt $s_n^{\frac{d}{dz}} =: \sigma : \mathbb{C} \rightarrow J_n \mathbb{C}$.

Sei $\text{pr} : \iota^* J_n N \rightarrow J_n N$ die natürliche Projektion.

Wir konstruieren eine holomorphe Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow J_n N \times J_n \mathbb{C} \\ m &\mapsto (\text{pr} \circ s(m), \sigma \circ \iota_0 \circ \iota(m)) \end{aligned}$$

Mit Satz 2.8 erhalten wir also eine holomorphe Abbildung:

$$\begin{aligned} \psi : M &\rightarrow J_n(N \times \mathbb{C}) \\ m &\mapsto (J_n \pi_1, J_n \pi_2)^{-1} \circ \varphi(m) \end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft des Faserprodukts liefert die gesuchte Deformation:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & J_n \tilde{N} \\ \downarrow \text{id} & \searrow s^{tr} & \downarrow \iota_0 \circ \iota^* J_n \tilde{N} \\ M & \xrightarrow{\iota_0 \circ \iota} & \tilde{N} \end{array}$$

Es ist noch zu zeigen, dass s^{tr} und M sich transversal schneiden.

Im Fall $n = 1$ folgt das direkt aus der Konstruktion von s^{tr} .

Per Induktion folgt der allgemeine Fall. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} J_n \tilde{N} & \xrightarrow{(J_n \pi_1, J_n \pi_2)} & J_n N \times J_n \mathbb{C} \\ \pi_{n,n-1}^{\tilde{N}} \downarrow & & \downarrow \pi_{n,n-1}^N \times \pi_{n,n-1}^{\mathbb{C}} \\ J_{n-1} \tilde{N} & \xrightarrow{(J_{n-1} \pi_1, J_{n-1} \pi_2)} & J_{n-1} N \times J_{n-1} \mathbb{C} \end{array}$$

Dass s^{tr} schließlich wieder s liefert, wird anhand des folgenden Diagramms

ersichtlich:

$$\begin{array}{ccc}
 J_n N \times J_n \mathbb{C} & \longrightarrow & J_n \tilde{N} \\
 \uparrow \varphi & \searrow & \downarrow J_n \pi_1 \\
 M & \xrightarrow{\text{pr} \circ s} & J_n N
 \end{array}$$

Durch Projizieren auf $J_n N$ erhalten wir also wieder die ursprüngliche Abbildung $\text{pr} \circ s$, was uns die ursprüngliche Deformation liefert. \square

Wir können jetzt klären, was es bedeutet, dass eine Deformation in einer integren Untergabe liegt.

Definition 3.5. Sei $\iota : M \rightarrow N$ eine Einbettung und $\mathcal{F} \subset TN$ integren. Eine infinitesimale Deformation $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ liegt in \mathcal{F} , falls die in Satz 3.5 konstruierte Deformation $s^{tr} : M \rightarrow \iota_0 \circ \iota^* J_n \tilde{N}$ in $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$ liegt.

Falls $n = 1$ ist, liefert diese Definition schon Bekanntes.

Lemma 3.3. Sei $s : M \rightarrow \iota^* J_1 N$ eine infinitesimale Deformation erster Ordnung und $\mathcal{F} \subset TN$ integren. s liegt genau dann in \mathcal{F} , falls $s \in \iota^* \mathcal{F}$ ist.

Beweis: Es genügt, den Satz auf den jeweiligen Halmen zu verifizieren. Sei $p \in M$ beliebig.

Nehmen wir für die Hinrichtung an, dass s in \mathcal{F} liegt, also s^{tr} eine Deformation entlang $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung $(\iota(m), 0) \in W \subset N \times \mathbb{C}$, Funktionen $f, g \in \mathcal{O}_{N \times \mathbb{C}}(W)$ und Vektorfelder $X \in \mathcal{F}(\pi_1(W))$, $Y \in T\mathbb{C}(\pi_2(W))$ derart, dass

$$s^{tr}|_{(\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W)} = (f\tilde{X} + g\tilde{Y})|_{(\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W)}$$

ist. Damit folgt, dass

$$s|_{(\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W)} = ((f \circ \iota_0)X)|_{(\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W)}$$

ist.

Die Rückrichtung folgt analog. \square

Notation 3.2. Sei z die Koordinate von \mathbb{C} .

Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.5 bezeichnen wir die durch $\frac{\partial}{\partial z}$ induzierte Deformation $M \rightarrow (\pi_2 \circ \iota_0 \circ \iota)^* J_n T\mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit ε_1 .

Das folgende Lemma garantiert, dass wir auf der größeren Mannigfaltigkeit $N \times \mathbb{C}$ in bestimmte Richtungen liften können.

Lemma 3.4. *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.5, wobei $s : M \rightarrow \iota^* J_n \tilde{N}$ entlang einer integrierbaren Untergarbe $\mathcal{F} \subset TN$ deformiert. Sei $s_{n+1}^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_{n+1} \tilde{N}$ ein Lift von s^{tr} entlang $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$. Dann existiert ein weiterer Lift $\tilde{s}^{tr} : M \rightarrow J_{n+1} \tilde{N}$ von s entlang $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$, für den gilt:*

$$\begin{aligned}\pi_{1*} \tilde{s}^{tr} &= \pi_{1*} s_{n+1}^{tr} \\ \pi_{2*} \tilde{s}^{tr} &= \varepsilon_1\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst konstruieren wir die Deformation.

Der Lift s_{n+1}^{tr} induziert eine infinitesimale Deformation $\pi_{1*} s_{n+1}^{tr} : M \rightarrow \iota^* J_n N$, welche ein Lift von s ist. Wenden wir Satz 3.5 auf diese Deformation an, erhalten wir \tilde{s}^{tr} , wie man sofort nachrechnet.

Es bleibt noch zu zeigen, dass \tilde{s}^{tr} eine Deformation entlang $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$ ist. Dazu bestimmen wir die Differenz $\mu = \tilde{s}^{tr} - s_{n+1}^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* T(N \times \mathbb{C})$. Diese Differenz liegt, da $\pi_{1*} \tilde{s}^{tr} = \pi_{1*} s_{n+1}^{tr}$ ist, in $\pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$.

Mit Lemma 3.1 folgt dann die Behauptung. \square

Wir können nun einige Sätze verallgemeinern.

Satz 3.6. *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.5. Sei $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation entlang \mathcal{F} .*

1. *Es existieren lokale Liftings von s entlang \mathcal{F} .*
2. *Sei $\mu : M \rightarrow \iota^* J_1 N$ eine infinitesimale Deformation entlang \mathcal{F} . Dann existiert eine Deformation $s' : M \rightarrow \iota^* J_n N$ entlang \mathcal{F} , für die gilt:*

$$\begin{aligned}\forall_{m \in M} : \iota^* \pi_{n,n-1}(s'(m)) &= \iota^* \pi_{n,n-1}(s(m)) \\ \forall_{m \in M} : s(m) - s'(m) &= \mu(m)\end{aligned}$$

3. *Seien $s, s' : M \rightarrow \iota^* J_n N$ infinitesimale Deformationen entlang \mathcal{F} , so dass für alle $m \in M$*

$$\forall_{m \in M} : \iota^* \pi_{n,n-1}(s'(m)) = \iota^* \pi_{n,n-1}(s(m))$$

gilt. Dann liegt die Differenz $s - s'$ in \mathcal{F} .

Beweis:

1. Betrachte die Deformation $s^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_n \tilde{N}$. Diese liegt nach Voraussetzung in $\tilde{\mathcal{F}} := \pi_1^* \mathcal{F} \oplus \pi_2^* T\mathbb{C}$. Wir haben bereits gezeigt, dass eine offene Menge $W \subset \tilde{N}$ und ein Lift $s_{n+1}^{tr} : (\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W) \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_{n+1} \tilde{N}$ entlang $\tilde{\mathcal{F}}$ existiert.
Mit Lemma 3.4 folgt sofort, dass $\pi_{1*} s_{n+1}^{tr} : (\iota_0 \circ \iota)^{-1}(W) \rightarrow \iota^* J_{n+1} N$ ein lokaler Lift von s entlang \mathcal{F} ist.
2. Betrachte $\iota_{0*} \mu : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_1 \tilde{N}$. Wir wenden Lemma 3.1 an und erhalten $s^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_n \tilde{N}$, das die geforderten Eigenschaften erfüllt. Mit Lemma 3.4 folgt, dass $\pi_{1*} s^{tr} : M \rightarrow \iota^* J_n N$ in \mathcal{F} liegt und das Gewünschte erfüllt.
3. Wir betrachten $s^{tr} - s^{tr} : M \rightarrow (\iota_0 \circ \iota)^* J_n \tilde{N}$.
Wie wir gezeigt haben, ist die Differenz lokal durch die iterierte Lie-Klammer $[X, Y]^{(n)}$ von Vektorfeldern $X, Y \in \tilde{\mathcal{F}}(W)$ gegeben.
Da $\tilde{\mathcal{F}}$ integrel ist, ist somit die Differenz in $\tilde{\mathcal{F}}$, womit die Behauptung folgt.

□

Damit folgt:

Satz 3.7. *Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $s : M \rightarrow \iota^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung, die in \mathcal{F} liegt. Falls $H^1(\iota^* \mathcal{F}) = 0$ ist, lässt sich s beliebig oft liften.*

Beweis: Wir finden eine Überdeckung $\iota(M) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset N$ und für jedes $i \in I$ eine Liftung $s^i : \iota^{-1}(U_i) \rightarrow \iota^* J_{n+1} N$ von s entlang \mathcal{F} .

Für jedes $i, j \in I$ setzen wir $\mu_{i,j} := s^i - s^j$, was uns einen Kozykel $(\mu_{i,j})_{i,j \in I} \in Z^1(\iota^* \mathcal{F})$ liefert. Da nach Voraussetzung $H^1(\iota^* \mathcal{F}) = 0$ ist, ist $(\mu_{i,j})_{i,j \in I} = \bar{0} \in H^1(\iota^* \mathcal{F})$.

Also ist $(\mu_{i,j})_{i,j \in I} \in B^1(\iota^* \mathcal{F})$ ein Korand. Wir finden daher eine Kokette $(\mu_i)_i \in C^0(\iota^* \mathcal{F})$, deren Bild unter der Randabbildung $(\mu_{i,j})$ ist.

Es existieren also nach Satz 3.6 für alle $i \in I$ Deformationen

$$s^i : \iota^{-1}(U_i) \rightarrow \iota^* J_{n+1} N$$

entlang \mathcal{F} , welche lokale Liftungen von s sind und deren Differenzen zu s^i durch μ_i gegeben sind.

Diese Deformationen verkleben, wie folgende Rechnung für $m \in \iota^{-1}(U_{i,j})$

zeigt:

$$\begin{aligned}
(s'^j - s'^i)(m) &= (s'^j - s'^i)(m) + (s^i - s^i)(m) + (s^j - s^j)(m) \\
&= (s^i - s'^i)(m) - (s^j - s'^j)(m) - (s^i - s^j)(m) \\
&= \mu_i(m) - \mu_j(m) - \mu_{i,j}(m) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit verkleben die s'^i zu einer Liftung von s entlang \mathcal{F} . Da wir dieses Argument beliebig oft wiederholen können, folgt die Behauptung. \square

3.4 Deformation beliebiger Morphismen

In diesem letzten Schritt befreien wir uns von der Voraussetzung, dass $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu gehen wir einfach über den Graphen von f .

Satz 3.8. *Es sei $f : M \rightarrow N$ holomorph und $s : M \rightarrow f^*J_nN$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung. Wir definieren:*

$$\begin{aligned}
\iota_f : M &\rightarrow M \times N \\
m &\mapsto (m, f(m))
\end{aligned}$$

Dann existiert eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung $s_\iota : M \rightarrow \iota_f^*J_n(M \times N)$, für die gilt:

$$\pi_{2*}s_\iota = s \quad \text{und} \quad \pi_{1*}s_\iota = 0$$

Beweis: Wir gehen wie im Beweis von Satz 3.5 vor. Zunächst betrachten wir den Null-Schnitt:

$$\begin{aligned}
s_0 : M &\rightarrow J_nM \\
m &\mapsto 0_m
\end{aligned}$$

Das liefert uns mit der Projektion $\text{pr} : f^*J_nN \rightarrow J_nN$ eine holomorphe Abbildung:

$$\begin{aligned}
\varphi : M &\rightarrow J_n(M \times N) \\
m &\mapsto (J_n\pi_1, J_n\pi_2)^{-1}(s_0(m), \text{pr} \circ s(m))
\end{aligned}$$

Um daraus eine infinitesimale Deformation zu gewinnen, muss das folgende Diagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 & J_n(M \times N) & \\
 \nearrow \varphi & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\iota_f} & M \times N
 \end{array}$$

Mit der Definition von $(J_n\pi_1, J_n\pi_2)$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \pi_{n,0}^{M \times N}(\varphi(m)) &= (\pi_{n,0}^M(s_0(m)), \pi_{n,0}^N(\text{pr} \circ s(m))) \\
 &= (m, f(m))
 \end{aligned}$$

ist, also kommutiert das Diagramm tatsächlich.

Das liefert uns mit der universellen Eigenschaft des Faserprodukts eine Deformation $s_\iota : M \rightarrow \iota_f^* J_n(M \times N)$.

Aus der Konstruktion folgt weiter, dass

$$J_n\pi_2 \circ \varphi = \text{pr} \circ s$$

ist, womit $\pi_{2*}s_\iota = s$ folgt. \square

Wir erklären ein letztes Mal, was eine Deformation entlang einer integralen Untergarbe ist.

Definition 3.6. *Es sei $s : M \rightarrow f^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung und $\mathcal{F} \subset TN$ integral.*

s ist eine Deformation entlang \mathcal{F} , falls die induzierte Deformation s_ι im Sinne von Definition 3.5 in $0 \oplus \pi_2^ \mathcal{F}$ liegt.*

Dass diese Definition sinnvoll ist, besagt der folgende Satz.

Satz 3.9. *Sei $s : M \rightarrow f^* J_1 N$ eine infinitesimale Deformation erster Ordnung und $\mathcal{F} \subset TN$ integral. s deformiert genau dann entlang \mathcal{F} , wenn $s \in f^* \mathcal{F}$ ist.*

Beweis: Der Beweis läuft analog zum Beweis von Lemma 3.3, weshalb wir an dieser Stelle auf ihn verzichten. \square

Satz 3.10. *Sei $\mathcal{F} \subset TN$ integral, sei $f : M \rightarrow N$ ein Morphismus und $s : M \rightarrow f^* J_n N$ eine infinitesimale Deformation n -ter Ordnung entlang \mathcal{F} . Wenn $H^1(f^* \mathcal{F}) = 0$ ist, lässt sich s beliebig oft liften.*

Beweis: f faktorisiert über den Graphen Γ_f . Wir erhalten eine Einbettung

$$\begin{aligned}\iota_f : M &\rightarrow M \times N \\ m &\mapsto (m, f(m))\end{aligned}$$

Damit ist $f = \pi_2 \circ \iota_f$.

Wir erhalten eine Deformation s_ι , auf die wir Satz 3.5 anwenden. Es existiert also eine offene Überdeckung

$$\iota_f(M) = \Gamma_f \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset M \times N$$

und für jedes $i \in I$ Liftungen

$$s_\iota^i : \iota_f^{-1}(U_i) \rightarrow \iota_f^* J_{n+1}(M \times N)$$

von s_ι entlang \mathcal{F} .

Mit Satz 3.5 folgt weiter, dass die Differenzen $s_\iota^i - s_\iota^j$ für alle $i, j \in I$ in $\iota_f^*(0 \oplus \pi_2^* \mathcal{F})$ liegen.

Wir setzen $(\mu_{i,j})_{i,j} := (\pi_{2*}(s_\iota^i - s_\iota^j))_{i,j} = (\pi_{2*} s_\iota^i - \pi_{2*} s_\iota^j)_{i,j}$.

Damit ist $(\mu_{i,j})_{i,j} \in Z^1(f^* \mathcal{F})$ ein Kozykel und, da $H^1(f^* \mathcal{F}) = 0$ ist, sogar ein Korand.

Wir finden also eine Kokette $(\mu_i)_{i \in I} \in C^0(f^* \mathcal{F})$, deren Bild unter der Randabbildung durch $(\mu_{i,j})_{i,j \in I}$ gegeben ist.

Erneutes Anwenden von Satz 3.5 auf $\mu_{i,\iota} : \iota_f^{-1}(U_i) \rightarrow \iota_f^* J_1(M \times N)$ für jedes $i \in I$ liefert Deformationen

$$s_\iota^{i'} : \iota_f^{-1}(U_i) \rightarrow \iota_f^* J_{n+1}(M \times N)$$

entlang $0 \oplus \pi_2^* \mathcal{F}$. Diese sind lokale Liftungen von s_ι und die Differenzen sind durch

$$s_\iota^i - s_\iota^{i'} = \mu_{i,\iota}$$

gegeben. Die gleiche Rechnung wie in Satz 3.7 impliziert, dass diese lokalen Liftungen verkleben, was uns den gesuchten Lift $s' : M \rightarrow f^* J_n N$ entlang \mathcal{F} liefert.

Dieses Argument können wir beliebig oft wiederholen, womit die Behauptung folgt. \square

Literaturverzeichnis

- [Eis99] David Eisenbud. *Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150. Springer-Verlag, 1999.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52. Springer Science+Business Media, Inc., 1977.
- [Hol72] Harald Holmann. *Alternierende Differentialformen*. Bibliographisches Institut, 1972.
- [Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry - An Introduction*. Universitext. Springer-Verlag, 2005.
- [Jän91] Klaus Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1991.
- [Kou07] Stavros Kousidis. *Extensionsprobleme für Jets und Deformationstheorie*. Universität zu Köln, 2007.
- [Wal72] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 1972.
- [War71] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 94. Scott, Foresman and Co. / Springer-Verlag, 1971.