Abstract

We consider the initial-boundary-value problem for the one-dimensional fast diffusion equation $u_t = [\text{sign}(u_x) \log |u_x|]_x$ on $Q_T = [0,T] \times [0,l]$. For monotone initial data the existence of classical solutions is known. The case of non-monotone initial data is delicate since the equation is singular at $u_x = 0$. We explicitly construct infinitely many weak Lipschitz solutions to non-monotone initial data.
The key ingredient for the existence result is to rephrase the problem as a differential inclusion which enables us to use methods from the description of material microstructures. The Lipschitz solutions are constructed iteratively by adding ever finer structures to an approximate solution.
These fine structures account for the fact that solutions are not continuously differentiable in any open subset of Q_T and that the derivative u_x is not of bounded variation in any such open set. We derive a characterization of the derivative, namely $u_x = d^+ \mathbb{1}_A + d^- \mathbb{1}_B$ with continuous functions $d^+ > 0$ and $d^- < 0$ and dense sets A and B, both of positive measure but with infinite perimeter. The singular set $Q_T \backslash (A \cup B)$ acts as an interface between well behaved parts of the solution. We describe it partially and estimate its Hausdorff-dimension.
Finally, we translate the structural results to Lipschitz solutions of the Perona-Malik equation which have been constructed with the same method.

Kurzzusammenfassung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem der eindimensionalen schnellen Diffusionsgleichung $u_t = [\text{sign}(u_x) \log |u_x|]_x$ auf $Q_T = [0,T] \times [0,l]$. Für monotone Anfangswerte ist die Existenz klassischer Lösungen bekannt. Der Fall nicht-monotoner Anfangswerte ist heikel, da die Gleichung bei $u_x = 0$ eine Singularität aufweist. Wir konstruieren explizit unendlich viele schwache Lipschitz Lösungen für nicht-monotone Anfangswerte.
Der Schlüssel zum Beweis ist die Umformulierung des Problems in eine Differentialinklusion, welche die Anwendung von Methoden aus der Beschreibung von Materialien mit Mikrostrukturen ermöglicht. Die Lipschitz Lösungen werden iterativ durch die Addition immer feinerer Strukturen zu einer Startlösung konstruiert.
Diese Strukturen bedingen, dass die Lösungen in keiner offenen Teilmenge von Q_T stetig differenzierbar sind und die Albeitungen u_x in keiner solchen offenen Menge beschränkte Variation aufweisen. Wir leiten eine Charakterisierung der Ableitung her, und zwar $u_x = d^+ \mathbb{1}_A + d^- \mathbb{1}_B$, wobei $d^+ > 0$ und $d^- < 0$ stetige Funktionen sind und A, B dichte Mengen mit nicht-endlichem Perimeter. Die singuläre Restmenge $Q_T \backslash (A \cup B)$ agiert als Interface zwischen gutartigen Teilen der Lösung. Wir beschreiben sie teilweise und schätzen ihre Hausdorff-dimension ab.
Zum Abschluss übertragen wir die strukturellen Eigenschaften auf Lipschitz Lösungen der Perona-Malik Gleichung, die mit der gleichen Methode konstruiert wurden.