

# Eigenschaften kleinster dominierender Mengen und Dominanzzahlen von Damengraphen

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität zu Köln

vorgelegt von  
**Stefan Neuhaus**  
aus Ibbenbüren

Verlag Dr. Hut, München  
2009

Berichterstatter: Prof. Dr. Rainer Schrader  
PD Dr. Stefan Porschen

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Oktober 2009

# Kurzzusammenfassung

Motiviert durch ein klassisches Schachproblem wird die Frage nach den Größen  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  einer kleinsten dominierenden Menge bzw. kleinsten unabhängigen dominierenden Menge des Damengraphen  $Q_n$  untersucht. In  $Q_n$  korrespondiert jeder Knoten  $v \in V(Q_n)$  zu einem Feld auf dem  $(n \times n)$ -Schachbrett und zwei Knoten sind genau dann benachbart, wenn die zugehörigen Felder in derselben Zeile, Spalte oder Diagonale liegen.

Im Detail wird gezeigt, dass jede  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$  mit  $n \geq 19$  beide langen Diagonalen durch zwei Eckfelder besetzt und daher diese Voraussetzung in der bekannten Charakterisierung mittels besetzter Diagonalen nicht einschränkend ist. Die Klasse der  $p$ -Überdeckungen wird zu *orthodoxen Überdeckungen* verallgemeinert und deren Relevanz durch Angabe entsprechender kleinster dominierender Mengen nachgewiesen.

Für  $n \equiv 6 \pmod{8}, n \geq 96$ , wird gezeigt, dass keine nicht-orthodoxe Überdeckung  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n}{2}$  existiert. Zusammen mit einer hergeleiteten notwendigen Bedingung für die Existenz einer orthodoxen Überdeckung der Größe  $\frac{n}{2}$  wird so in vielen Fällen die untere Schranke auf  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n}{2} + 1$  verschärft, was den Beweis einiger neuer Dominanzzahlen ermöglicht.

Durch Angabe konkreter dominierender Mengen werden die folgenden Dominanzzahlen bewiesen:  $\gamma(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 43, 55, 83, 99, 107, 133, 137, 141, 143, 145, 149, 153, 157, 161, 163, 165, 169, 173, 177, 181, 183, 185, 189, 193, 197, 213, 221$  und  $i(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 117, 121, 129, 141, 145, 157, 161, 165, 177, 185$  und  $189$ . Weiter wird ein Computerbeweis erbracht für  $\gamma(Q_n) = i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 102, 110, 118$  und  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 19, 23, 27, 31$  sowie  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, 190, 198, 214$  und  $222$ .



# Abstract

We consider the problem of determining the size  $\gamma(Q_n)$  of a minimum dominating set and the size  $i(Q_n)$  of an independent minimum dominating set of the queens graph  $Q_n$ . Every vertex  $v \in V(Q_n)$  of the graph  $Q_n$  corresponds to a square of the  $(n \times n)$  chessboard and two squares are adjacent if and only if they are in the same row, column, or diagonal.

We show that every  $p$ -cover of  $Q_n, n \geq 19$ , occupies both long diagonals that go through two corner squares and thus this condition in an alternative characterization of  $p$ -covers is nonrestrictive. We introduce a generalization of  $p$ -covers, namely *orthodox covers*, and show their relevance by stating some corresponding minimum dominating sets.

For  $n \equiv 6 \pmod{8}, n \geq 96$ , we show that there is no non-orthodox cover  $D$  of  $Q_n$  of size  $\#D = \frac{n}{2}$ . In conjunction with a necessary condition for the existence of an orthodox cover of size  $\frac{n}{2}$ , in many cases the lower bound is raised to  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n}{2} + 1$ , proving new domination numbers.

Specifying appropriate dominating sets we show:  $\gamma(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  for  $n = 43, 55, 83, 99, 107, 133, 137, 141, 143, 145, 149, 153, 157, 161, 163, 165, 169, 173, 177, 181, 183, 185, 189, 193, 197, 213, 221$ , and  $i(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  for  $n = 117, 121, 129, 141, 145, 157, 161, 165, 177, 185, 189$ . We provide a computer proof of  $\gamma(Q_n) = i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  for  $n = 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 102, 110, 118$ ,  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  for  $n = 19, 23, 27, 31$ , and  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  for  $n = 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, 190, 198, 214$ , and 222.



# Vielen Dank!

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Faigle und Herrn Prof. Dr. Schrader dafür bedanken, dass ich in ihrer Arbeitsgruppe promovieren und arbeiten durfte. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Schrader, der diese Arbeit betreute. Herrn Prof. Dr. Faigle danke ich für die Anregung zur Thematik der Damenprobleme. Für die Übernahme des Zweitgutachtens bin ich Herrn PD Dr. Porschen sehr dankbar.

Ich danke meinen ehemaligen und aktuellen Kollegen am ZAIK. Durch die gute Atmosphäre in der *Bauspargasse* haben Kirsten Albrecht, Kamel Ben-Khalifa, Dr. Thomas Chevalier, Dr. Petra Fakler, Dr. Martin Lätsch und Marcel Schwalb mich täglich zur Arbeit motiviert. Zudem danke ich Kirsten Albrecht, Dr. Petra Fakler, Dr. Martin Lätsch, Dr. Bernhard Fuchs und Maximilian Heyne für fachliche Diskussionen und vor allem für die nötige nicht-fachliche Zerstreuung, die sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Sehr wertvoll waren die Hinweise auf Fehler, die mir die fleißigen Korrekturleser Kirsten Albrecht, Meike Eysser, Dr. Bernhard Fuchs, Holger Schmidt und Benjamin Wolters durch ihre mühevollen Arbeit geliefert haben. Annika Niemeier danke ich zudem für den Hinweis auf eine *Anwendung*. :-)

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern Annette und Franz-Josef Neuhaus, die mich auf dem bisherigen Weg immer in jeder Hinsicht unterstützt haben. Vielen Dank dafür!



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Damenprobleme</b>	<b>3</b>
2.1	Problemdefinition und verwandte Probleme . . . . .	4
2.2	Bekannte Resultate . . . . .	6
2.2.1	Schranken . . . . .	7
2.2.2	Werte für $\gamma(Q_n)$ und $i(Q_n)$ . . . . .	10
2.3	Lösungsansätze . . . . .	11
2.3.1	Backtracking . . . . .	12
2.3.2	Dynamische Programmierung . . . . .	13
2.3.3	ILP-Formulierung . . . . .	15
2.4	Implementierung und Ergebnisse . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Orthodoxe Überdeckungen</b>	<b>21</b>
3.1	$p$ -Überdeckungen . . . . .	23
3.2	Relaxierte $p$ -Überdeckungen . . . . .	27
3.3	0-1-Überdeckungen . . . . .	35
3.4	Orthodoxe Überdeckungen für $n \equiv 0 \pmod{2}$ . . . . .	48
3.5	Lösungsansätze . . . . .	52
3.5.1	Mengentheoretische Formulierung . . . . .	53
3.5.2	ILP-Formulierung . . . . .	54
3.6	Implementierung und Ergebnisse . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Nicht-orthodoxe Überdeckungen</b>	<b>61</b>
4.1	Grundlegende Eigenschaften . . . . .	62
4.2	Untersuchung von $E^{pq}$ quadratisch und quasi-verlustfrei dominiert . . . . .	65
4.2.1	Zerlegung von $E^{pq}$ in $a$ -Mengen . . . . .	69
4.2.2	Bestimmung der von $D^{p \oplus q}$ besetzten Diagonalen . . . . .	76
4.3	Unterscheidung der Brettgrößen nach Restklassen modulo 8 . . . . .	88
4.4	Nicht-orthodoxe Überdeckungen für $n \equiv 6 \pmod{8}$ . . . . .	89
4.4.1	Betrachtung der Lage von $E^{\bar{p}\bar{q}}$ zu $E^{pq}$ . . . . .	89
4.4.2	Computerbeweis neuer Dominanzzahlen $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$ . . . . .	106
4.5	Auf dem Weg zu einer Verallgemeinerung . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>111</b>

<b>A Mathematica-Programm zum Computerbeweis</b>	<b>113</b>
<b>B Neue kleinste dominierende Mengen von <math>Q_n</math></b>	<b>115</b>
<b>C Stand der Dinge</b>	<b>123</b>
C.1 Werte für $\gamma(Q_n)$ . . . . .	123
C.2 Werte für $i(Q_n)$ . . . . .	123
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
<b>Index</b>	<b>131</b>

# Symbolverzeichnis

$\sigma_{d,s} := \left(\frac{s-d}{2}, \frac{s+d}{2}\right)$	Schnittfeld der Differenzdiagonale $d$ und Summendiagonale $s$
$\text{col}(\delta), \text{row}(\delta)$	Spalten- bzw. Zeilenindex der Dame $\delta$
$\text{diff}(\delta), \text{sum}(\delta)$	Differenz- bzw. Summendiagonalindex der Dame $\delta$
$I(D) := (I_C, I_R, I_D, I_S)$	Quadrupel der (Multi-)mengen der von $D$ besetzten Linien
${}^c\mathcal{D}_n^p$	Klasse der $p$ -Überdeckungen von $Q_n$ mit $e = f + c$
${}^c\tilde{\mathcal{D}}_n^p$	Klasse der relaxierten $p$ -Überdeckungen von $Q_n$ mit $e = f + c$
${}^c\mathcal{D}_n^{0-1}$	Klasse der 0-1-Überdeckungen von $Q_n$ mit $e = f + c$
$I_{\bar{C}}, I_{\bar{R}}, I_{\bar{D}}, I_{\bar{S}}$	Zwangslinien einer orthodoxen Überdeckung
$I_{\hat{C}}, I_{\hat{R}}, I_{\hat{D}}, I_{\hat{S}}$	Zusatzlinien einer orthodoxen Überdeckung
$d^{(0)}$	Referenz-Differenzdiagonale einer 0-1-Überdeckung
$s^{(0)}$	Referenz-Summendiagonale einer 0-1-Überdeckung
$\oplus$	XOR-Operator; $0 \oplus 0 := 0, 1 \oplus 1 := 0, 0 \oplus 1 := 1, 1 \oplus 0 := 1$
$\bar{p}$	Negierung der Parität $p$ ; $\bar{0} := 1, \bar{1} := 0$
$D^p$	Damen $\{(c, r) \in D \mid c + r \equiv p \pmod{2}\}$ auf Feldern einer bestimmten <i>Farbe</i> $p$
$D^{pq}$	Damen $\{(c, r) \in D \mid c \equiv p \pmod{2}, r \equiv q \pmod{2}\}$
$C^p$	unbesetzte Spalten der Parität $p$
$R^q$	unbesetzte Zeilen der Parität $q$
$c^p := \#C^p$	Anzahl unbesetzter Spalten der Parität $p$
$r^q := \#R^q$	Anzahl unbesetzter Zeilen der Parität $q$
$A^{pq} := C^p \times R^q$	ausschließlich diagonal dominierte Felder passender Parität
$E^{pq} \subseteq A^{pq}$	<i>Rand</i> der ausschließlich diagonal dominierten Felder $A^{pq}$
$E_T^{pq}, E_B^{pq}, E_L^{pq}, E_R^{pq} \subseteq E^{pq}$	obere, untere, linke bzw. rechte Kante der Randfelder $E^{pq}$
$\tilde{E}^{pq} \supseteq E^{pq}$	Felder passender Parität auf dem Rechteck durch $E^{pq}$
$\hat{C}^p \supseteq C^p$	symmetrische Abschätzung für $C^p$ : $-c \in \hat{C}^p \iff c \in \hat{C}^p$
$\hat{R}^q \supseteq R^q$	symmetrische Abschätzung für $R^q$ : $-r \in \hat{R}^q \iff r \in \hat{R}^q$



# Kapitel 1

## Einleitung

Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf einem Schachbrett acht Damen derart zu platzieren, dass sich keine zwei Damen gegenseitig schlagen können? Im Jahr 1848 veröffentlichte der deutsche Schachspieler Max Bezzel [Bez48] unter dem Pseudonym *Schachfreund* in der *Berliner Schachzeitung* diese Fragestellung. Obschon sich Carl Friedrich Gauß zur Unterhaltung mit diesem Problem beschäftigte, wird ihm dennoch fälschlicherweise oft sowohl die Aufgabenstellung als auch die Lösung zugeschrieben [Cam77]. Die Untersuchung kombinatorischer Probleme auf Schachbrettern fasziniert seit langer Zeit nicht nur Rätselfreunde sondern auch Wissenschaftler. Denn diesen sehr einfach zu formulierenden Problemen, die eben hierdurch einer breiten Masse zugänglich sind, liegen oftmals ausgesprochen komplexe Problemstrukturen zugrunde, die eine scheinbar einfache Lösung wirkungsvoll verhindern.

Wohl nicht zuletzt aus dieser Faszination heraus resultiert, dass sich erste Auseinandersetzungen mit der Thematik dominierender Mengen in Graphen auf Schachprobleme zurückführen lassen [HL90]. Bevor Mitte des 20. Jahrhunderts dieses Forschungsgebiet durch die Standardwerke von Berge [Ber62] und Ore [Ore62] auf ein formales, mathematisches Fundament gestellt wurde, erschienen viele wissenschaftliche Beiträge auf der Grundlage von Schachproblemen mit Dominanzbezug. So veröffentlichte der russische Schachmeister Carl Friedrich Jänisch [Jän62] im Jahr 1862 das Problem der Bestimmung der kleinsten Anzahl an Damen, die zur Bedrohung aller Felder eines  $(n \times n)$ -Schachbretts notwendig sind. W. W. Rouse Ball [Bal92] gab hierzu entsprechende Damenkonstellationen für  $n \leq 8$  an, Wilhelm Ahrens [Ahr01] später weitere für  $n \leq 12$  und  $n = 15$ .

In dieser Arbeit soll insbesondere das von Jänisch veröffentlichte Originalproblem untersucht werden, sowie ferner dieses Problem unter der zusätzlichen Nebenbedingung, dass sich keine zwei Damen gegenseitig schlagen können. Beide Aufgaben finden sich als Problem C18 in der Sammlung ungelöster Probleme der Zahlentheorie von Richard Kenneth Guy [Guy81] und sind bis heute noch nicht gelöst. Nachdem in der Vergangenheit zwar viele Damenkonstellationen veröffentlicht wurden, konnte deren Optimalität erst im Jahr 1990 durch eine untere Schranke für die Anzahl der Damen bewiesen werden. Bisherige Forschungsarbeiten befassten sich vor allem mit Brettern ungerader Größe  $n$ , für die oftmals Lösungen in Höhe dieser Schranke gefunden wurden. Unsere Untersuchungen liefern nun Einblicke in die Problemstruktur gerader Brettgrößen und zeigen zudem, unter welchen Bedingungen die untere Schranke verschärft werden kann.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im nachfolgenden Kapitel 2 geben wir zunächst eine formale, graphentheoretische Definition der betrachteten Probleme und grenzen diese von verwandten Problemen ab. Die Historie und der aktuelle Forschungsstand wird durch Vorstellung bekannter Resultate, insbesondere zu Schranken und in Form konkreter Lösungen, zusammengefasst. Wir skizzieren exemplarisch drei Lösungsverfahren und präsentieren anschließend die Ergebnisse eigener Implementierungen.

In Kapitel 3 werden die Vorarbeiten für das Hauptresultat durch die Betrachtung einer speziellen Klasse von Damenkonstellationen geschaffen. Hierfür stellen wir zunächst die Resultate zu den bereits gut untersuchten  $p$ -Überdeckungen vor und weisen nach, dass eine Voraussetzung in einer bekannten, alternativen Charakterisierung nicht einschränkend ist. Weiter entwickeln wir *orthodoxe Überdeckungen*, eine sich in natürlicher Weise ergebende Verallgemeinerung von  $p$ -Überdeckungen, und übertragen ein Resultat. Ein besonderes Augenmerk haben wir zudem auf der Untersuchung von orthodoxen Überdeckungen für gerade Brettgrößen. Zur Suche konkreter Überdeckungen schlagen wir zwei Verfahren vor. Durch die Ergebnisse der Implementierungen ermitteln wir neue Lösungen und weisen die Relevanz der Verallgemeinerung nach.

In Kapitel 4 wird die Komplementklasse der orthodoxen Überdeckungen untersucht. Wir fokussieren dabei auf Bretter gerader Größe und zeigen, dass die untere Schranke für eine bestimmte, unendlich große Klasse von Brettgrößen in vielen Fällen um eins verschärft werden kann. Die Voraussetzungen der Hilfssätze werden dabei so allgemein gehalten, dass sie gleichermaßen für den Beweis analoger Resultate für weitere Brettgrößenklassen verwendet werden können. Mit Hilfe des Hauptresultats und Ergebnissen der Untersuchungen aus Kapitel 3 lösen wir schließlich einige bisher ungelöste Instanzen.

Wir schließen mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick auf untersuchenswerte, offen gebliebene Probleme.

Die Notation lehnen wir eng an die von BURGER und WEAKLEY verwendete an. Grundsätzlich führen wir Definitionen an der Stelle ein, an der sie das erste Mal benötigt werden. Wir setzen voraus, dass der Leser mit den Grundbegriffen und der Standardnotation der Graphentheorie, wie auch der Theorie der linearen Programmierung vertraut ist und verweisen lediglich auf die gebräuchliche Literatur. Hierzu können beispielsweise die Bücher von DIESTEL [Die06] sowie von NEMHAUSER und WOLSEY [NW88] herangezogen werden.

# Kapitel 2

## Damenprobleme

Wir behandeln Probleme auf verallgemeinerten Schachbrettern. Zum Verständnis der hier eingeführten Begriffe vgl. auch Abbildung 2.1. Ein quadratisches *Brett* der Größe  $n$  besteht aus  $n^2$  *Feldern*, die in  $n$  vertikalen *Spalten* und  $n$  horizontalen *Zeilen* angeordnet sind. Wir indizieren die Spalten und Zeilen jeweils fortlaufend von links nach rechts bzw. unten nach oben mit ganzen Zahlen und bezeichnen mit  $(c, r) \in \{1, \dots, n\}^2$  das Feld in der Spalte  $c$  und Zeile  $r$ . Für alle Felder  $(c, r)$  einer von links-unten nach rechts-oben verlaufenden *Differenzdiagonale*  $d$  ist die Differenz  $d = r - c$  gleich, während die Summe  $s = c + r$  bei Feldern einer von links-oben nach rechts-unten verlaufenden *Summendiagonale*  $s$  gleich ist. Die Differenzdiagonalen indizieren wir mit der Differenz  $d$  und die Summendiagonalen mit der Summe  $s$ . Spalten und Zeilen werden zu *Orthogonalen*, Differenz- und Summendiagonalen zu *Diagonalen* sowie Orthogonalen und Diagonalen weiter zu *Linien* zusammengefasst. Wir interpretieren eine Linie immer als eine Menge von Feldern. Als *Hauptdiagonalen* bezeichnen wir die beiden langen Diagonalen mit jeweils  $n$  Feldern.

Wir identifizieren Damen mit Feldern und nennen ein Feld *besetzt*, wenn auf ihm eine Dame steht. Enthält eine Linie ein besetztes Feld, so heißt ebenso die Linie besetzt, andernfalls heißt sie unbesetzt. Eine Dame *bedroht* oder *dominiert* alle Felder der durch sie besetzten Linien. Diese Definition spiegelt die vom Schachspiel bekannten Zugmöglichkeiten einer Dame wider. Eine Menge von Damen, die alle Felder eines Bretts dominiert, nennen wir eine *dominierende Menge* oder *Überdeckung*.

Wir nennen eine Linie *gerade*, wenn deren Index gerade ist, andernfalls nennen wir sie *ungerade*. In analoger Weise bezeichnen wir abhängig von der Parität der Spalte  $c$  und Zeile  $r$  ein Feld bzw. eine Dame  $(c, r)$  als *gerade-gerade*, *gerade-ungerade*, *ungerade-gerade* oder *ungerade-ungerade*. Ein gerade-gerades oder ungerade-ungerades Feld nennen wir kurz *gerade* und ein gerade-ungerades oder ungerade-gerades Feld nennen wir *ungerade*.

Zu einem Feld  $\sigma$  bezeichne  $\text{col}(\sigma)$ ,  $\text{row}(\sigma)$ ,  $\text{diff}(\sigma)$  und  $\text{sum}(\sigma)$  dessen Spalten-, Zeilen-, Differenzdiagonal- bzw. Summendiagonalindex. Wir schreiben  $\sigma_{d,s} := \left(\frac{s-d}{2}, \frac{s+d}{2}\right)$  für das Schnittfeld der Differenzdiagonale  $d$  und Summendiagonale  $s$ . Als *Absolutindex* einer Linie bezeichnen wir den betragsmäßigen Wert ihres Indexes. Die Indexmultimengen der von einer Damenmenge  $D$  besetzten Spalten, Zeilen, Differenz- und Summendiagonalen bezeichnen wir mit  $I_C(D)$ ,  $I_R(D)$ ,  $I_D(D)$ ,  $I_S(D)$  und nennen sie kurz *Indexmengen*.

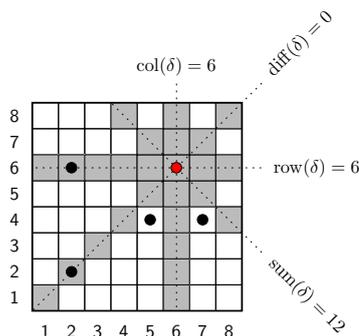


Abbildung 2.1: Eine Überdeckung  $D$  mit fünf Damen dominiert das  $(8 \times 8)$ -Schachbrett —  $D = \{(2, 2), (2, 6), (5, 4), (6, 6), (7, 4)\}$ , die Indext multimengen von  $D$  sind  $I_C(D) = \{2, 2, 5, 6, 7\}$ ,  $I_R(D) = \{2, 4, 4, 6, 6\}$ ,  $I_D(D) = \{-3, -1, 0, 0, 4\}$  und  $I_S(D) = \{4, 8, 9, 11, 12\}$ . Die Damen sind durch gefüllte Kreise gekennzeichnet. Die Dame  $\delta := \sigma_{0,12} = (6, 6)$  steht auf der Differenz-Hauptdiagonale und bedroht die grau gefüllten Felder.

In Abbildungen zeichnen wir durchgezogene (gestrichelte) Linien für besetzte (unbesetzte) Orthogonalen oder Diagonalen. Besonders hervorzuhebende Orthogonalen oder Diagonalen zeichnen wir mit gepunkteten Linien.

Nach der Definition der in der Arbeit betrachteten Probleme geben wir zunächst einen Überblick über in der Literatur behandelte verwandte Probleme. Außerdem stellen wir den aktuellen Stand der Forschung bezüglich der betrachteten Probleme vor. Dies umfasst insbesondere Ergebnisse zu oberen und unteren Schranken sowie konkrete Lösungen für bestimmte Instanzen. Abschließend stellen wir zunächst exemplarisch drei Lösungsansätze vor, bevor wir anschließend auf die Implementierung und experimentellen Ergebnisse eines ausgewählten Ansatzes näher eingehen.

## 2.1 Problemdefinition und verwandte Probleme

Die beiden folgenden Probleme  $QDS$  und  $QIDS$  werden untersucht.

**Problem:**  $QDS$

**Gegeben:** Eine natürliche Zahl  $n \geq 1$

**Frage:** Welche Anzahl an Damen auf einem  $(n \times n)$ -Schachbrett  $C$  ist minimal, so dass jedes Feld auf  $C$  von einer Dame bedroht oder besetzt ist?

**Problem:** *QIDS*

**Gegeben:** Eine natürliche Zahl  $n \geq 1$

**Frage:** Welche Anzahl an Damen auf einem  $(n \times n)$ -Schachbrett  $C$  ist minimal, so dass jedes Feld auf  $C$  von einer Dame bedroht oder besetzt ist und sich keine zwei Damen gegenseitig bedrohen?

Für eine graphentheoretische Formulierung der Probleme definieren wir den *Damengraph*  $Q_n = (V, E)$ . Dabei korrespondiert jeder Knoten  $v \in V$  zu einem Feld auf einem  $(n \times n)$ -Schachbrett und zwei Knoten sind genau dann benachbart, wenn die zugehörigen Felder in derselben Linie liegen. Die Adjazenzrelation  $E$  spiegelt somit die möglichen Züge einer Dame auf dem Brett wider. Das Problem *QDS* fragt nach der Dominanzzahl  $\gamma(Q_n)$ , d. h. der Kardinalität einer kleinsten dominierenden Menge  $V' \subseteq V$ , so dass jeder Knoten aus  $V \setminus V'$  zu einem Knoten aus  $V'$  benachbart ist. Die Antwort auf das Problem *QIDS* entspricht der Größe  $i(Q_n)$ , d. h. der Kardinalität einer kleinsten unabhängigen dominierenden Menge. Da jede unabhängige dominierende Menge von  $Q_n$  insbesondere eine dominierende Menge ist, gilt  $\gamma(Q_n) \leq i(Q_n)$ .

Aus Gründen der Anschaulichkeit und zur Vereinfachung der Formulierungen werden korrespondierende Begriffe aus den beiden Welten oft vermischt oder synonym verwendet. So suchen wir zur Lösung des Schachproblems *QDS* beispielsweise die Dominanzzahl oder sind an einer kleinsten dominierenden Menge interessiert, argumentieren in der Analyse jedoch oft mit Spalten, Zeilen oder Diagonalen. Es ist zu beachten, dass der Begriff *Überdeckung*, als eine das komplette Brett dominierende Damenmenge, durch die graphentheoretische Interpretation irreführend ist, da eine dominierende Menge eines Graphen  $G$  i. A. keine Knotenüberdeckung des Graphen ist. Dies gilt insbesondere bei der Betrachtung kleinster dominierender Mengen im Damengraph.

Als eine *Lösung* der Probleme *QDS* und *QIDS* bezeichnen wir neben der Dominanzzahl oft auch konkrete kleinste dominierende Mengen. Welche Interpretation jeweils gemeint ist, wird aus dem Kontext ersichtlich.

Die beiden vorgestellten Probleme *QDS* und *QIDS* waren der Ausgangspunkt für die Untersuchung verschiedenster Problemvarianten. Einen breiten Überblick hierüber vermitteln das Buch *Across the Board* [Wat07] von WATKINS sowie die beiden aufeinander aufbauenden Übersichtsartikel [FHH<sup>+</sup>95] und [HHS98]. Nachfolgend sind einige Resultate verwandter Probleme aufgeführt.

Neben  $\gamma$  und  $i$  wurden in der Literatur andere Graphenparameter von  $Q_n$  mit Bezug zum Thema der Dominanz untersucht. Das klassische  $n$ -Damenproblem fragt nach der Unabhängigkeitszahl  $\alpha(Q_n)$ , d. h. der Größe einer größten unabhängigen Menge, und ist gelöst. Es gilt  $\alpha(Q_n) = n, \forall n \geq 4$ . Für  $n \geq 4$  ist somit jede größte unabhängige Menge von  $Q_n$  insbesondere eine dominierende Menge, da mit  $\alpha(Q_n) = n$  in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Dame steht. Dies zeigt, dass das Problem *QIDS* für  $n \geq 4$  eine Lösung besitzt. Ein exzellenter und aktueller Übersichtsartikel zum  $n$ -Damenproblem ist [BS09]. Für Untersuchungen zur *irredundance number*  $\text{ir}(Q_n)$ , *upper domination number*  $\Gamma(Q_n)$

und *upper irredundance number*  $\text{IR}(Q_n)$  siehe [BCM97, BM00b, KG01, CM01, Bur06] und insbesondere die beiden Übersichtsartikel [FHH<sup>+</sup>95, HHS98].

Andere Forscher haben die Probleme *QDS* und *QIDS* unter Restriktionen an die Platzierung der Damen betrachtet. COCKAYNE und HEDETNIEMI [CH86] konnten einen Zusammenhang zwischen der Größe  $\text{diag}(n)$  einer kleinsten dominierenden Menge mit Damen lediglich auf einer Hauptdiagonale und einer zahlentheoretischen Funktion herstellen. Es gilt  $\text{diag}(n) = n + 1 - r_3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ , wobei  $r_3(n)$  das kleinste  $k$  ist, so dass jede  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  eine dreielementige arithmetische Reihe enthält. Einen ähnlichen Zusammenhang zu  $r_3(n)$  konnten COCKAYNE, GAMBLE und SHEPHERD [CGS85] bei der Beschränkung auf Damen in einer Spalte zeigen. SINKO und SLATER [SS08] beweisen die untere Schranke  $\text{bor}(Q_n) \geq 2n - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8n^2 - 49n + 49}$  für die Mindestzahl  $\text{bor}(Q_n)$  an Damen, die ausschließlich in den vier äußeren Orthogonalen stehen dürfen, sowie die einfache obere Schranke  $\text{bor}(Q_n) \leq n - 2, \forall n \geq 4$ . Für die spezielle Brettgrößenklasse  $Q_{3k+1}$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  konnten sie die Schranke zu  $\text{bor}(Q_{3k+1}) \leq 2k + \mathbf{1}_{3k+1 \equiv 1 \pmod{2}}$  verschärfen. Hierbei ist  $\mathbf{1}_B$  die Indikatorfunktion, die 1 liefert, falls das Prädikat  $B$  wahr ist, und 0 sonst.

Die Bestimmung der Dominanzzahl bietet sich ebenso für weitere schachbrettartige Graphen an. Durch Anpassung der Adjazenzrelation im zugrunde liegenden Graphen wurden analoge Probleme für andere Schachfiguren betrachtet. Die Dominanzzahlen  $\gamma(R_n) = n$  des Turmgraphen  $R_n$ ,  $\gamma(B_n) = n$  des Läufergraphen  $B_n$  sowie die Dominanzzahl  $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor^2$  des  $(n \times n)$ -Königsgraphen sind relativ einfach zu zeigen und wurden 1964 von den Brüdern YAGLOM [YY64] veröffentlicht. Einen deutlich eleganteren Beweis für das Ergebnis  $i(B_n) = \gamma(B_n) = n$  geben COCKAYNE, GAMBLE und SHEPHERD [CGS86] an (siehe auch [Wat07]). RAGHAVAN und VENKATESAN [RV87] zeigen im Jahr 1987 für das rechteckige  $(m \times n)$ -Brett  $Q_{m \times n}$ ,  $m \leq n$ , die Schranke  $\gamma(Q_{m \times n}) \geq \min\{m - 1, \lceil \frac{1}{4}(m + n - 2) \rceil\}$ . THERON und GELDENHUYS [TG98] beweisen Schranken für verschiedene Parameter auf einem Brett mit hexagonalen Feldern, d. h. jede Dame dominiert die Felder entlang der drei Linien durch ihr Feld. Weitere Varianten sind durch Änderung der zugrunde liegenden Bretttopologie denkbar. Der Graph  $Q_n^t$  des torusförmigen Bretts der Ordnung  $n$  ist teilweise erforscht. Für quadratische Bretter der Größe eines Vielfachen von drei gilt  $\gamma(Q_{3k}^t) = 2k - \alpha(Q_k^t)$  [BMW03, BMC01]. Da  $E(Q_n^t) \supseteq E(Q_n)$ , ist jede dominierende Menge von  $Q_n$  insbesondere eine dominierende Menge von  $Q_n^t$ , d. h. es gilt  $\gamma(Q_n^t) \leq \gamma(Q_n)$ . Trotzdem wurde für  $\gamma(Q_n^t)$  bisher keine entscheidend bessere obere Schranke entdeckt [BM03].

## 2.2 Bekannte Resultate

Während das Problem, die Dominanzzahl und die Größe einer kleinsten unabhängigen Menge zu bestimmen, auf allgemeinen Graphen  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist (siehe Problem *DOMINATING SET* in [GJ79]), ist dagegen die Komplexität der spezielleren, zu *QDS* und *QIDS* gehörenden Entscheidungsprobleme bisher unbekannt. Die theoretisch besten bekannten Algorithmen hierfür haben eine exponentielle Laufzeit  $\mathcal{O}(c^n)$  in der Größe  $n$  [Fer09b]. Die Resultate im Abschnitt 2.2.1.2 zu oberen Schranken basieren auf effizient durchführbaren

Konstruktionen, so dass sich hieraus unmittelbar Aussagen zur Güte von Approximationen ableiten lassen [Fer09b].

Die Funktionen  $\gamma(Q_n^t), i(Q_n^t)$  der Dominanzprobleme auf dem torusförmigen Brett sind *nicht* monoton, d. h. es gilt nicht für alle  $n$  die Beziehung  $\gamma(Q_{n+1}^t) \geq \gamma(Q_n^t)$  bzw.  $i(Q_{n+1}^t) \geq i(Q_n^t)$  [BMC01]. Für  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  ist die Monotonie unseres Wissens nach noch ungeklärt [BMC01].

Die folgende Proposition zeigt, dass die Funktionen nicht in großen Sprüngen steigen.

**Proposition 2.1.** *Für alle  $n$  gilt  $\gamma(Q_{n+1}) \leq \gamma(Q_n) + 1$  und  $i(Q_{n+1}) \leq i(Q_n) + 2$ .*

*Beweis.* Das Brett  $Q_{n+1}$  erhalten wir durch Anhängen einer Spalte und Zeile am Rand von  $Q_n$ . Ausgehend von einer kleinsten dominierenden Menge von  $Q_n$  lässt sich durch zusätzliche Platzierung einer Dame im Schnittfeld der angehängten Orthogonalen eine dominierende Menge von  $Q_{n+1}$  konstruieren.

Ausgehend von einer kleinsten unabhängigen dominierenden Menge von  $Q_n$  konstruieren wir folgendermaßen eine unabhängige dominierende Menge von  $Q_{n+1}$ : Falls die angehängte Spalte nicht dominiert wird, platziere eine Dame in einem nicht dominierten Feld in dieser Spalte. Verfahre analog mit der angehängten Zeile.  $\square$

Zu einer Damenmenge  $D$  lassen sich zwei einfache Beziehungen zwischen den Indexmengen der von  $D$  besetzten Orthogonalen und Diagonalen feststellen. Diese folgen direkt aus den entsprechenden Beziehungen für eine einzelne Dame.

**Proposition 2.2.** *Für eine Damenmenge  $D$  gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta) - \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta) &= \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta), \\ \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta) + \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta) &= \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta). \end{aligned}$$

Die folgende quadratische Beziehung ergibt sich durch Anwendung der ersten und zweiten Binomischen Formel auf die Quadrate der Diagonalindizes, wobei sich in der Summe die nicht-quadratischen Terme aufheben. WEAKLEY verwendet den Begriff *Parallelogrammgesetz* [Wea02a].

**Proposition 2.3** (Parallelogrammgesetz, [Wea02a]). *Für eine Damenmenge  $D$  gilt*

$$2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2.$$

### 2.2.1 Schranken

Die Beschäftigung mit Schranken für  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  begann mit der Veröffentlichung von COCKAYNE [Coc90] aus dem Jahr 1990. Die frühere Arbeit von RAGHAVAN und VENKATESAN [RV87] aus dem Jahr 1987 fand hingegen dabei offensichtlich keine Beachtung [Wea04], obschon sie viele Jahre lang die aktuell besten Schranken für  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  enthielt.

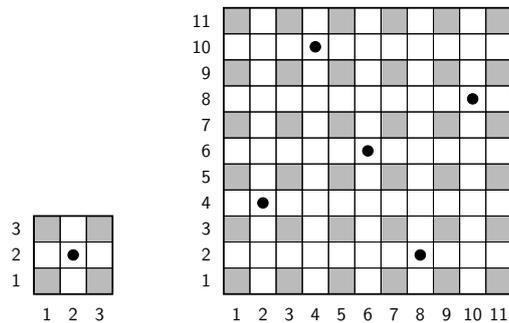


Abbildung 2.2: Kleinste dominierende Mengen von  $Q_3$  und  $Q_{11}$  — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

### 2.2.1.1 Untere Schranken

Gute untere Schranken waren und sind entscheidend für die Bestimmung konkreter Dominanzzahlen. Mit Ausnahme weniger Lösungen für kleine Bretter, die aus einer vollständigen Enumeration hervorgingen (siehe Unterabschnitt 2.2.2), wurden alle anderen Dominanzzahlen durch Angabe konkreter dominierender Mengen in der Größe einer unteren Schranke bewiesen.

Die folgende untere Schranke wurde im Jahr 1990 von COCKAYNE [Coc90] veröffentlicht und irrtümlicherweise SPENCER zugesprochen [Wea04]. In dem früheren Artikel [RV87] von RAGHAVAN und VENKATESAN aus dem Jahr 1987 geht das Resultat jedoch bereits als Korollar aus einer allgemeineren Aussage über rechteckige Bretter hervor. Dessen ungeachtet wird die Schranke in zahlreichen Veröffentlichungen als die *Spencer-Schranke* bezeichnet: Für alle  $n \geq 1$  gilt  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n-1}{2}$ .

Die Schranke ist scharf für  $n = 3$  und  $n = 11$ . Abbildung 2.2 zeigt die einzigen – nach Ausschluss von Symmetrien – kleinsten dominierenden Mengen von  $Q_3$  und  $Q_{11}$  und beweist damit die von KRAITCHIK [Kra42] vermutete Dominanzzahl  $\gamma(Q_{11}) = 5$ . Die Lösungen zeigen sogar  $i(Q_n) = \gamma(Q_n)$  für  $n = 3$  und  $n = 11$ . Lange Zeit war unklar, ob  $n = 3$  und  $n = 11$  die einzigen Werte sind, für die  $\gamma(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  gilt.

WEAKLEY [Wea95] verschärfte die Schranke für Brettgrößen aus der Restklasse von 1 modulo 4 zu  $\gamma(Q_{4k+1}) \geq 2k + 1, \forall k \geq 0$ . Diese Schranke ist scharf für  $k \leq 32$  [OW01] und es ist zudem kein  $k$  bekannt, für das sie nicht scharf ist. Die resultierende Schranke  $i(Q_{4k+1}) \geq 2k + 1$  ist für manche Brettgrößen scharf (siehe [OW01] und Unterabschnitt 2.2.2), für andere jedoch vermutlich nicht (siehe Abschnitt 3.6 und Anhang C).

Auf Vorarbeiten von BURGER, MYNHARDT und WEAKLEY [BM00a, Wea02a] aufbauend zeigten FINOZHENOK und WEAKLEY [FW07] im Jahr 2007, dass  $\gamma(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  nur für  $n = 3$  und  $n = 11$  gilt:

**Satz 2.4** ([FW07]). *Es gilt  $\gamma(Q_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für alle  $n \in \mathbb{N}^+, n \neq 3, 11$ .*

### 2.2.1.2 Obere Schranken

Eine Zusammenstellung von (nicht notwendigerweise kleinsten) unabhängigen dominierenden Mengen in [OW01] zeigt  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \forall n \leq 120$ . Im Folgenden werden jedoch ausschließlich obere Schranken für unbeschränkte Brettgrößen vorgestellt. Fast alle Schranken basieren auf konkreten generischen Konstruktionen dominierender Mengen, die nur für eine bestimmte Klasse von Brettgrößen anwendbar sind. Die zulässigen Brettgrößen der Klassen ergeben sich dabei jeweils als Glieder einer arithmetischen Folge, so dass über die Ungleichungen  $\gamma(Q_{n+1}) \leq \gamma(Q_n) + 1$  bzw.  $i(Q_{n+1}) \leq i(Q_n) + 2$  aus Proposition 2.1 eine obere Schranke für alle Brettgrößen folgt. Die additive Konstante wurde in den Beweisen nicht näher beziffert und mit  $\mathcal{O}(1)$  abgekürzt.

Die erste veröffentlichte nicht-triviale obere Schranke  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 2$  von RAGHAVAN und VENKATESAN [RV87] fand zunächst keine Beachtung. Von WELCH stammt die Schranke  $\gamma(Q_n) \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil$  [CS88, Coc90], die zwar nur konstant besser, dessen Beweis [Coc90] aber einfacher ist. COCKAYNE und SPENCER zeigten durch ein iteratives Vorgehen zur Bestimmung einer unabhängigen dominierenden Menge die Schranke  $i(Q_n) \leq 0,705n + \mathcal{O}(1)$ . Die additive Konstante wird einmal mit 2,305 [CS88] und einmal mit 0,895 [Coc90] angegeben. In [Coc90] wird für einen vollständigen Beweis jedoch lediglich auf einen eingereichten Artikel verwiesen.

Folgende Ergebnisse [GHvS90, EGHvS92, BCM97] kamen durch Konstruktionen von dominierenden Mengen nach einem sogenannten *Z-pattern* zustande, wobei die Damen vornehmlich auf Geraden mit Steigung  $\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}$  oder  $-2$  angeordnet sind. In [GHvS90] wird  $\gamma(Q_n) \leq \frac{14}{23}n + \mathcal{O}(1)$  sowie  $i(Q_n) \leq \frac{2}{3}n + \mathcal{O}(1)$  gezeigt. Fast dieselben Autoren [EGHvS92] bewiesen mit  $i(Q_n) \leq \frac{7}{12}n + \mathcal{O}(1)$  erstmals eine bessere Schranke als [RV87] für das Problem *QIDS*. Für das Problem *QDS* verschärfen [BCM97] die Schranke auf  $\gamma(Q_n) \leq \frac{31}{54}n + \mathcal{O}(1)$ . Sie räumten jedoch ein, dass mit einem ähnlichen Beweis das marginal bessere Ergebnis  $\gamma(Q_n) \leq \frac{43}{75}n + \mathcal{O}(1)$  erzielt werden kann, wie in [Wea95] ohne Beweis angemerkt wurde.

Spätere Arbeiten [BM02, Wea02b, BM03] setzten auf die geschickte Komposition einer  $p$ -Überdeckung (siehe Definition 3.1 zu Beginn von Kapitel 3) aus vorteilhaften Mustern in Unterbrettern. Mit einem eindeutig spezifizierten Muster zeigten [BM02] die Schranke  $\gamma(Q_n) \leq \frac{8}{15}n + \mathcal{O}(1)$ . Die Sätze 2.5 und 2.6 verallgemeinern die Idee auf die Verwendung generischer Muster.

**Satz 2.5** ([Wea02b]). *Sei  $p \in \{0, 1\}$  und  $D$  eine  $p$ -Überdeckung vom Typ  $A$  von  $Q_{n'}$  mit  $\#D = d$ .*

*Falls  $p = 0$  und  $n' \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $p = 1$  und  $n' \equiv 3 \pmod{4}$ , dann gilt  $\gamma(Q_n) \leq \frac{d+3}{n'+2}n + \mathcal{O}(1), \forall n$ . Falls  $D$  zudem unabhängig ist, gilt  $i(Q_n) \leq \frac{d+6}{n'+2}n + \mathcal{O}(1), \forall n$ .*

*Falls  $D$  keine Dame auf dem Rand enthält und zudem  $p = 1$  und  $n' \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $p = 0$  und  $n' \equiv 3 \pmod{4}$ , dann gilt  $\gamma(Q_n) \leq \frac{d+1}{n'}n + \mathcal{O}(1), \forall n$ . Falls  $D$  zudem unabhängig ist, gilt  $i(Q_n) \leq \frac{d+2}{n'}n + \mathcal{O}(1), \forall n$ .*

Der Satz 2.6 kann die Schranke für  $\gamma(Q_n)$  marginal verbessern, gilt allerdings nur unter deutlich eingeschränkten Bedingungen. Satz 1 und Proposition 3 aus [Wea02b] und Pro-

position 7 aus [OW01] zeigen, dass das dem Resultat aus [BM03] in Originalformulierung zugrunde liegende Muster für alle  $n > 9$  eine 0-Überdeckung ist.

**Satz 2.6** ([BM03]). *Falls eine 0-Überdeckung der Größe  $2k+1$  von  $Q_{4k+1}$  existiert, dann existiert ein  $n_0$ , so dass  $\gamma(Q_n) \leq \frac{3k+5}{6k+3}n + \mathcal{O}(1), \forall n > n_0$ .*

Mittels einer  $p$ -Überdeckung von  $Q_{n_1}$  ohne Damen auf dem Rand führt die Anwendung von Satz 2.5 oftmals zur besseren Schranke als die Anwendung von Satz 2.6 mit Hilfe einer 0-Überdeckung für ein größeres Brett  $Q_{n_2} \supset Q_{n_1}$ .

In Bezug auf  $i(Q_n)$  ist die Schranke  $i(Q_n) \leq \frac{61}{111}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0495)n + \mathcal{O}(1)$  aus [OW01] unseres Wissens die beste Veröffentlichte. In [BM03] wurde  $\gamma(Q_n) \leq \frac{69}{133}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0188)n + \mathcal{O}(1)$  durch Referenz auf ein entsprechendes Korollar aus [OW01] als die zuvor beste bekannte Schranke angegeben. Diese wurde dort mittels Satz 2.5 unter Verweis auf eine passende  $p$ -Überdeckung aus [OW01] ermittelt. Zudem wurde in Korollar 12 in [BM03] als neue beste Schranke  $\gamma(Q_n) \leq \frac{101}{195}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0179)n + \mathcal{O}(1)$  abgeleitet. Zum damaligen Zeitpunkt waren jedoch gleichermaßen bereits alle Vorarbeiten für das schärfere Korollar 2.7 getan, welches die aktuell besten uns bekannten oberen Schranken enthält.

**Korollar 2.7.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt  $\gamma(Q_n) \leq \frac{18}{35}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0143)n + \mathcal{O}(1)$  und  $i(Q_n) \leq \frac{11}{21}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0238)n + \mathcal{O}(1)$ .*

*Beweis.* Für  $n' = 105$  existiert eine 1-Überdeckung vom Typ A von  $Q_{n'}$  der Größe  $d = 53$ , die keine Damen auf dem Rand enthält [OW01]. Einsetzen in Satz 2.5 zeigt beide Schranken.  $\square$

Die Ergebnisse verbessern die Differenz des Faktors von  $n$  zu  $\frac{1}{2}$  um  $\approx 20\%$  für  $\gamma(Q_n)$  und um  $\approx 51\%$  für  $i(Q_n)$  gegenüber den vormaligen besten Schranken aus [BM03] bzw. [OW01].

### 2.2.2 Werte für $\gamma(Q_n)$ und $i(Q_n)$

Nachfolgend sind unseres Wissens alle bisher bekannten Werte für  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  aufgeführt. Die Auflistung entspricht dem Stand von [OW01], wo zudem die entsprechenden Wissenschaftler dokumentiert sind. Auf Computerbeweisen beruhende Dominanzzahlen sind *kursiv* gesetzt.

Während  $\gamma(Q_n), i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  durch konkrete dominierende Mengen in Größe der unteren Schranke gezeigt wurden, beruhen die Resultate mit  $\gamma(Q_n), i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  auf Computerbeweisen in Form einer vollständigen Enumeration.

Für  $n \leq 120$  gilt  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ , was in [OW01] durch entsprechend große Lösungen belegt ist.

### 2.2.2.1 Werte für $\gamma(Q_n)$

- $\gamma(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  für  $n = 3, 11$ .
- $\gamma(Q_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  für  $n = 1, 2, 4-7, 9, 10, 12, 13^{11}, 17^{11}, 18^8, 19^{4,7,8}, 21^{11}, 23^{10,12}, 25^{11}, 27^9, 29^6, 30^{1,5}, 31^4, 33^{11}, 37^2, 39^{12}, 41^6, 45^6, 49^2, 53^2, 57^6, 61^2, 65^7, 69^{5,7}, 71^9, 73^7, 77^{5,7}, 81^7, 85^7, 89^9, 91^9, 93^9, 97^9, 101^9, 105^9, 109^9, 113^9, 115^9, 117^9, 121^9, 125^9, 129-131^9$ .
- $\gamma(Q_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  für  $n = 8, 14-16^7$ .

### 2.2.2.2 Werte für $i(Q_n)$

- $i(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  für  $n = 3, 11$ .
- $i(Q_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  für  $n = 1, 2, 5, 7, 9^{11}, 10, 13^{11}, 17^{7,11}, 21^{11}, 25^{11}, 33^{11}, 45^5, 57^9, 61, 69^9, 73^9, 77^9, 81^9, 85^9, 89^9, 93^9, 97^9, 105^9, 109^9$ .
- $i(Q_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  für  $n = 4, 6, 8, 12^3, 14-16^6, 18^7$ .

## 2.3 Lösungsansätze

Im Folgenden werden exemplarisch drei Lösungsverfahren für die Probleme  $QDS$  und  $QIDS$  vorgestellt. Die Auswahl beinhaltet das sicherlich intuitivste Verfahren, das mit der besten bekannten theoretischen Laufzeit sowie einen sehr flexiblen und ausbaufähigen Ansatz.

Vollständige Verfahren stoßen mit steigenden Brettgrößen schnell an ihre Grenzen, so dass versucht wurde, mittels Heuristiken dominierende Mengen zu ermitteln – mit mäßigem Erfolg. Da heuristische Verfahren i. A. keine optimalen Ergebnisse liefern, lässt sich eine Lösung für das Optimierungsproblem nur dann ableiten, wenn zufällig eine dominierende Menge in der Größe der unteren Schranke gefunden wird. McRAE fand im Jahr 1991 mit einem genetischen Algorithmus eine dominierende Menge, die  $\gamma(Q_{18})$  zeigt [Wea95]. GIBBONS und WEBB [GW97] konnten mit einem *simulated annealing*-Algorithmus [KGV83] die neuen Dominanzzahlen  $\gamma(Q_{29})$ ,  $\gamma(Q_{41})$ ,  $\gamma(Q_{45})$ ,  $\gamma(Q_{57})$  und KEARSE, GIBBONS [KG01] später mittels einer lokalen Suchheuristik die Werte  $\gamma(Q_{65})$ ,

<sup>1</sup>BURGER [Bur98]

<sup>2</sup>BURGER, MYNHARDT, COCKAYNE [BMC94]

<sup>3</sup>BURGER, COCKAYNE, MYNHARDT [BCM97]

<sup>4</sup>BURGER, MYNHARDT [BM00a]

<sup>5</sup>BURGER, MYNHARDT [BM00c]

<sup>6</sup>GIBBONS, WEBB [GW97]

<sup>7</sup>KEARSE, GIBBONS [KG01]

<sup>8</sup>McRAE 1991; siehe [Wea95, FHH<sup>+</sup>95, GW97]

<sup>9</sup>ÖSTERGÅRD, WEAKLEY [OW01]

<sup>10</sup>WALDMANN 1998; siehe [KG01]

<sup>11</sup>WEAKLEY [Wea95]

<sup>12</sup>WEAKLEY [Wea02a]

$\gamma(Q_{69}), \gamma(Q_{73}), \gamma(Q_{77}), \gamma(Q_{81}), \gamma(Q_{85})$  zeigen. Der Suchraum wurde dabei vorab auf eine aussichtsreiche Konfigurationsklasse beschränkt.

COURNIA [Cou06] beschreibt ein Verfahren, das sich die parallele und spezialisierte Rechenleistung moderner Grafikkarten zu Nutze macht. Ein auf der CPU durchgeführter *backtracking*-Algorithmus bestimmt dabei potentielle dominierende Mengen und delegiert die Überprüfung auf Dominanz an den Grafikprozessor. Trotz Beschleunigung bleibt für die Komplexität des Verfahrens die teure vollständige Enumeration des Lösungsraumes maßgeblich, so dass der Algorithmus schon für  $n > 13$  nicht in annehmbarer Zeit terminierte [Cou06].

### 2.3.1 Backtracking

Der intuitivste Lösungsansatz ist eine vollständige Enumeration des Suchraumes  $\mathbb{B}^{n^2}$  aller Damenbelegungen auf dem Brett, wobei die aktuell kleinste (unabhängige) dominierende Menge zwischengespeichert wird. Durch eine rekursive Tiefensuche lässt sich die Enumeration sehr einfach implementieren. Wir strukturieren den Suchraum dabei als binären Baum der Höhe  $n^2 + 1$  in folgender Weise: Ein Knoten  $v$  in Ebene  $l$  korrespondiert zu einer Teilbelegung  $D'(v) \in \mathbb{B}^l$  von  $l$  Feldern. Die beiden Kindknoten von  $v$  korrespondieren zu einer aus  $D'(v)$  erweiterten Teilbelegung, in der zusätzlich das Feld  $l + 1$  einmal als besetzt und einmal als unbesetzt gelte. Der Wurzelknoten  $v_{root}$  sei in Ebene 0 und korrespondiert somit zur leeren Teilbelegung  $D'(v_{root}) = \emptyset$ . Die Zeitkomplexität des Verfahrens ist  $\mathcal{O}(2^{n^2})$ .

Verbesserungen dieses Basisalgorithmus zielen darauf ab, den exponentiell großen Baum derart möglichst stark zu beschneiden, dass im Restbaum mindestens eine optimale Lösung erhalten bleibt. Algorithmus 1 skizziert einen Rahmen für Verbesserungen. Die globalen Variablen `board []` und `val` speichern dabei die aktuell betrachtete Teilbelegung und ihre Größe, wobei die Felder des Bretts in diesem Beispiel eindimensional indiziert sind. `bestVal` und `bestSet []` speichern die bisher beste gefundene Teilbelegung sowie deren Größe. Mit `lowerBound` lässt sich die minimale Größe einer zu suchenden Lösung angeben, so dass die Suche ggf. vorzeitig erfolgreich abgebrochen werden kann. Teilbelegungen, die nicht zu einer optimalen Lösung erweitert werden können, müssen nicht weiter verfolgt werden. In der Funktion `quickReject(·)` lässt sich diese Prüfung realisieren. Dabei sind der durch starkes Beschneiden des Suchbaumes zu erzielende Nutzen und die Laufzeitkosten eines gründlichen Tests gegeneinander abzuwägen. Ebenfalls von entscheidender Bedeutung für die Laufzeit ist die Implementierung der Funktion `findNext(·)`. Diese liefert das nächste Feld, das die aktuelle Teilbelegung erweitern soll, und ermöglicht somit ein Lenken der Suche.

Verbesserungen können zwar die Laufzeit von lösbaren Instanzen drastisch reduzieren, nicht jedoch das exponentielle Wachstum der Laufzeit bei steigenden Brettgrößen verhindern [GW97, KG01]. FERNAU [Fer09b] beschreibt einen recht einfachen *backtracking*-Algorithmus und zeigt für diesen die Laufzeitschranke  $\mathcal{O}(c^{n \log n})$ , für ein konstantes  $c$ . Eine schärfere Analyse ist für kompliziertere Algorithmen jedoch ausgesprochen anspruchsvoll.

**Algorithmus 1** Tiefensuche

---

```

1  procedure depthFirstSearch(i)
2    board[i] ← true
3    val ← val+1
4    if quickReject(·) then
5      return // Teilbelegung nicht zu Optimum erweiterbar — backtrack
6    end if
7    if isValidSet(·) then // ist board[] dominierende Menge?
8      if val < bestVal then // neue bisher beste Belegung gefunden?
9        bestVal ← val
10       bestSet ← board
11       if bestVal = lowerBound then
12         exit // Optimalität bewiesen — Suche vorzeitig beenden
13       end if
14     end if
15   end if
16   iNext ← findNext(·) // bestimme nächstes Feld
17   depthFirstSearch(iNext);
18   board[i] ← false
19   val ← val-1
20   depthFirstSearch(iNext)
21 end procedure

```

---

GIBBONS und WEBB [GW97] entwickelten einen *backtracking*-Algorithmus für das Problem  $QIDS$ , der Teilbelegungen, die isomorph zu bereits betrachteten Teilbelegungen sind, frühzeitig erkennt und nicht weiter expandiert. Die Beschränkung auf die Betrachtung unabhängiger Mengen erlaubt im Hinblick auf die verwendeten Datenstrukturen einige Vereinfachungen. Mit ihren Experimenten liefern sie einen Computerbeweis für  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 14, 15$  und  $16$ . Weiter implementierten KEARSE und GIBBONS [KG01] eine ausgefeiltere Bestimmung des als nächstes zu betrachtenden Feldes sowie zwei zusätzliche Prüfungen auf Erweiterbarkeit zu einer optimalen Lösung. Mit dem verbesserten Algorithmus konnten sie einen Computerbeweis von  $\gamma(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 15, 16$ ,  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 18$  und  $\gamma(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für  $n = 19$  erbringen.

### 2.3.2 Dynamische Programmierung

Dynamische Programmierung bezeichnet ein Verfahrensmuster zum Lösen kombinatorischer Optimierungsprobleme. Es lässt sich anwenden, wenn sich die Lösung des Gesamtproblems aus den Lösungen kleinerer Teilprobleme berechnen lässt und die Teilprobleme sich wiederum rekursiv aus Elementar-Teilproblemen zusammensetzen lassen. Zur Lösung des Gesamtproblems wird ein *bottom-up*-Ansatz verfolgt, d. h. ausgehend von

der Lösung der Elementarprobleme werden sukzessive immer größere Teilprobleme gelöst. Zwischenergebnisse, von denen die Lösungen mehrerer Teilprobleme abhängen, werden gespeichert und wiederverwendet. Dies setzt voraus, dass sich Teilprobleme überschneiden, d. h. dass sie auf der Lösung derselben Unterprobleme aufbauen. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für dynamische Programmierung und grenzt sie vom klassischen *divide & conquer*-Paradigma ab. In diesem Zusammenhang bezeichnet *memoization* die Anwendung der *top-down*-Kontrollstruktur eines einfachen rekursiven Algorithmus zur Fortschreibung der Zwischenergebnisse. Für weitere Informationen sei auf das Buch [CLRS04] verwiesen.

FERNAU [Fer09b] beschreibt zwei auf dynamischer Programmierung beruhende Algorithmen zur Lösung des Problems *QDS*. Der erste Algorithmus berechnet für bestimmte Linienmengen  $S$  die kleinste Anzahl an Damen, die zur Dominierung aller Felder auf diesen Linien notwendig sind. Dies erfolgt auf Basis optimal dominierter Linienuntermengen  $S' \subset S$ , so dass sich die Dominanzzahl letztlich als kleinste Anzahl an Damen zur Dominierung aller Linien ergibt. Da die Anzahl der Linien eines Bretts linear in  $n$  ist, und sich die Operationen zur Pflege der Zwischenergebnisse in polynomieller Zeit realisieren lassen, führt dies zu einem einfach-exponentiellen Algorithmus. Für das dynamische Programm lässt sich die Laufzeitschranke  $\mathcal{O}(39,51^n p(n))$  zeigen [Fer09b], wobei  $p(n)$  ein Polynom in  $n$  ist.

Der zweite Algorithmus basiert auf einer Pfadzerlegung  $(\mathcal{V}, P)$ ,  $\mathcal{V} := V_1 \cup \dots \cup V_{n^2-n}$ ,  $P \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , des  $(n \times n)$ -Königsgraphen. Der Damengraph enthält für jede Orthogonale und Diagonale eine Clique und ist wegen dieser Struktur ungeeignet für ein dynamisches Programm basierend auf einer Baumzerlegung. Für jedes Feld der  $n+2$ -elementigen Knotenmengen  $V_i$  der Pfadzerlegung wird dabei als 9 Bit-Zusatzinformation gespeichert, aus welcher Richtung es dominiert wird und ob es selbst eine Dame enthält. Um die durch den Übergang von  $Q_n$  zum Königsgraph der Ordnung  $n$  verloren gegangene Struktur zu kompensieren, müssen diese Zusatzinformationen innerhalb der Knotenmengen  $V_i$  konsistent gehalten werden. Für das aktuell betrachtete  $V_i$  wird somit eine Tabelle der Größe  $2^{9(n+2)}$  verwaltet, in der jeder Tabellenindex zu einer bestimmten (ggf. inkonsistenten) Zustandsinformation korrespondiert. Ein Tabelleneintrag speichert dann die Mindestzahl an Damen, die zur Dominierung des bisher betrachteten Brettabschnitts nötig ist, unter der angenommenen Zustandsinformation. Beginnend mit einem Feld aus  $V_1$  werden sukzessive die Tabelleneinträge für alle konsistenten Zustandsinformationen der Felder aus  $V_1$  ermittelt. Diese Einträge für jedes Feld werden mit jedem Übergang von  $V_i$  zu  $V_{i+1}$  konsistent fortgeschrieben. Im so skizzierten Grundalgorithmus sind einige Informationen redundant gespeichert, so dass sich nach einigen technischen Verbesserungen eine Laufzeit in  $\mathcal{O}(27^n p(n))$  zeigen lässt [Fer09b]. Uns ist kein Algorithmus mit einer besseren Laufzeitschranke für das Problem *QDS* bekannt. Der benötigte Speicherplatz ist mit  $\mathcal{O}(18^n)$  ebenfalls exponentiell in  $n$  [Fer09b].

Experimentelle Implementierungen der Verfahren lösten beispielsweise die Instanz  $n = 16$  in wenigen Stunden, neue Dominanzzahlen konnten jedoch nicht gezeigt werden [Fer09a]. Insbesondere der exponentielle Speicherbedarf zur Speicherung des Suchbaums hat sich als ein limitierender Faktor herausgestellt.

### 2.3.3 ILP-Formulierung

Wir zeigen eine einfache Modellierung für *QIDS*. Das Problem der ganzzahligen linearen Programmierung ist im allgemeinen Fall  $\mathcal{NP}$ -vollständig [NW88]. Da noch nicht bekannt ist, ob die Probleme *QDS* und *QIDS* überhaupt effizient lösbar sind, rechtfertigt dies eine einfache Modellierung als ganzzahliges lineares Programm mit super-polynomieller Laufzeit. Auf eine Darstellung der Theorie linearer Programmierung und ganzzahliger linearer Programmierung wird hier verzichtet. Für eine ausführliche Behandlung ganzzahliger Optimierung sei auf das Buch von NEMHAUSER und WOLSEY [NW88] verwiesen.

Sei  $N := \{1, \dots, n\}$  die Indexmenge der Orthogonalen. Für eine einfache ILP-Formulierung des Problems *QIDS* siehe (*QIDS\_ILP*) in ILP 1.

---

#### ILP 1 (*QIDS\_ILP*)

---

$$\min \sum_{(c,r) \in N^2} x_{c,r} \quad (2.1)$$

s. d.

$$\sum_{r' \in N} x_{c,r'} + \sum_{c' \in N} x_{c',r} + \sum_{\substack{(c',r') \in N^2 \\ r' - c' = r - c}} x_{c',r'} + \sum_{\substack{(c',r') \in N^2 \\ c' + r' = c + r}} x_{c',r'} \geq 1, \quad \forall (c,r) \in N^2 \quad (2.2)$$

$$\sum_{r' \in N} x_{c,r'} \leq 1, \quad \forall c \in N \quad (2.3)$$

$$\sum_{c' \in N} x_{c',r} \leq 1, \quad \forall r \in N \quad (2.4)$$

$$\sum_{\substack{(c',r') \in N^2 \\ r' - c' = d}} x_{c',r'} \leq 1, \quad \forall |d| \leq n - 1 \quad (2.5)$$

$$\sum_{\substack{(c',r') \in N^2 \\ c' + r' = s}} x_{c',r'} \leq 1, \quad \forall 2 \leq s \leq 2n \quad (2.6)$$

$$x_{c,r} \in \{0, 1\}, \quad \forall (c,r) \in N^2 \quad (2.7)$$


---

Die binären Entscheidungsvariablen  $x_{c,r} \in \{0, 1\}$  aus (2.7) sind folgendermaßen zu interpretieren:  $x_{c,r} = 1$  gilt genau dann, wenn auf dem Feld  $(c, r)$  eine Dame steht. Die Zielfunktion (2.1) minimiert die Anzahl der Damen auf dem Brett. Hierbei sind folgende Restriktionen zu erfüllen. Das Brett ist genau dann vollständig dominiert, wenn die Bedingungen (2.2) erfüllt sind. Die Nebenbedingungen (2.3)–(2.6) stellen sicher, dass in keiner Linie mehr als eine Dame steht. Durch Weglassen von (2.3)–(2.6) erhalten wir somit eine Formulierung (*QDS\_ILP*) für das Problem *QDS*.

Das Programm (QIDS\_ILP) enthält  $n^2$  Variablen und  $n^2 + 6n - 4$  Nebenbedingungen und lässt sich in  $\mathcal{O}(2^{n^2}(n^4 + 6n^3 - 4n^2))$  lösen [NW88].

In der Praxis lässt sich die durchschnittliche Laufzeit mit einigen Modifikationen deutlich verbessern. Durch weitere Nebenbedingungen lassen sich Schranken für den Zielfunktionswert berücksichtigen oder Symmetrien ausschließen. Insbesondere die Erforschung von Schnittebenen des Problems bietet noch viel Potential für Laufzeitverbesserungen.

Moderne ILP-Löser bestimmen in einem ersten Schritt eine zulässige Belegung der Variablen, die alle Nebenbedingungen erfüllt. Diese Belegung korrespondiert zu einer – nicht notwendigerweise kleinsten – dominierenden Menge. Diese Belegung wird im Weiteren sukzessive verbessert, bis schließlich die kleinste dominierende Menge gefunden ist. Wenngleich sich die optimale Lösung für größere Instanzen nicht in realistischer Zeit berechnen lässt, erhalten wir so doch zumindest immer eine obere Schranke.

## 2.4 Implementierung und Ergebnisse

Die ILP (QIDS\_ILP) und (QDS\_ILP) aus Unterabschnitt 2.3.3 haben wir von dem C++-Programm `queens` generieren und von der kommerziellen Optimierungssoftware CPLEX<sup>13</sup> für verschiedene Brettgrößen lösen lassen.

Die Experimente liefen auf dem Rechner `altix330.rrz.uni-koeln.de`, einem SGI Altix 330-System mit zwei Itanium2-CPU (1,5 GHz) und 7 GB RAM unter Red Hat Enterprise Linux 4.1.2. Wir verwendeten CPLEX 11.2 zusammen mit der Concert-Bibliothek<sup>14</sup> und dem GNU Compiler<sup>15</sup> `g++` in Version 4.1.2. An den Standardeinstellungen von CPLEX wurden keine Änderungen vorgenommen.

Es zeigte sich, dass die Formulierungen sehr schlecht sind. Der Wert der LP-Relaxierung beträgt jeweils ca.  $\frac{n}{3}$ , so dass der *integrality gap*, d. h. die Differenz der optimalen Lösung und der Lösung der LP-Relaxierung, sehr groß ausfällt. Die Werte der Entscheidungsvariablen in einer Lösung der LP-Relaxierung sind alle nahe bei null (beispielsweise betrug in einem Test für  $n = 20$  das Maximum der Variablenwerte 0,04), was sich tendenziell negativ auf die Effektivität der Variablenselektionsheuristik des Löser auswirkt. Die Lösung der LP-Relaxierungen (vom Gesamtproblem, wie auch von Subproblemen im *branch & cut*-Baum) gelang CPLEX in vernachlässigbar kurzer Zeit, so dass insgesamt die Erforschung von Schnittebenen für dieses Problem großes Beschleunigungspotential verspricht.

Die in den Laufzeitergebnissen von `queens` (vgl. Tabelle 2.1) angegebene Zeit beziffert die mit `time` ermittelte reine CPU-Zeit in Sekunden. Um den Nichtdeterminismus des parallelen Löser aususchalten und so eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurde bei den Laufzeitmessungen auf Parallelität verzichtet. Als untere Schranke wurde die Nebenbedingung  $\sum_{(c,r) \in N^2} x_{c,r} \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für  $n \neq 3, 11$ , zur Formulierung hinzugefügt (siehe Satz 2.4 auf Seite 8). Insbesondere in den Fällen, in denen die Dominanzzahl größer als die untere Schranke ist, offenbarte sich die schlechte Formulierung in sprunghaft gestiegenen

<sup>13</sup><http://www.ilog.com/products/cplex/>

<sup>14</sup><http://www.ilog.com/products/optimization/tech/concert.cfm>

<sup>15</sup><http://gcc.gnu.org/>

$n$	queens		queens_lines		$\gamma(Q_n)$	$i(Q_n)$
	$\gamma$	$i$	$\gamma$	$i$		
$\leq 5$	$\leq 1$	$\leq 1$	$\leq 1$	$\leq 1$	—	—
6	$\leq 1$	$\leq 1$	$\leq 1$	2	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$
7	$\leq 1$	$\leq 1$	$\leq 1$	4	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
8	$\leq 1$	$\leq 1$	6	16	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$
9	$\leq 1$	$\leq 1$	11	1	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
10	$\leq 1$	$\leq 1$	9	4	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
11	3	13	4	9	$\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$
12	61	248	9	1 865	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$
13	5	93	18	32	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
14	1 505	3 115	45	28 445	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$

Tabelle 2.1: Laufzeiten (in Sekunden) von `queens` und `queens_lines`

Laufzeiten, die zum Beweis der Optimalität einer (oft recht früh gefundenen) optimalen Lösung notwendig sind.

Zur Reduktion der Variablenanzahl wurde das Problem dekomponiert. Wir erhalten die ganzzahligen Programme (QDS\_ILP.2) bzw. (QIDS\_ILP.2), indem wir die Summen  $\sum_{i \in L} x_i =: y_L$  der Variablen von Feldern einer Linie  $L$  in den Formulierungen durch die ganzzahligen Variablen  $y_L$  substituieren. Das resultierende ILP enthält dann lediglich  $6n - 2$  Integer-Variablen und besitzt eine Teillösung  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{6n-2}) \in \mathbb{N}^{6n-2}$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , wenn das originäre ILP eine Lösung besitzt. Zu solch einer Teillösung  $\mathbf{y}$  muss noch geprüft werden, ob tatsächlich eine Menge  $\mathbf{x} \subseteq N^2$  von Damen existiert, die genau die Linien  $i$  mit  $y_i > 0$  besetzt. Dies wird durch ein weiteres ILP bestimmt. Da als Kandidatenfelder für Damen jedoch nur die Felder in Frage kommen, in denen sich vier besetzte Linien schneiden, ist die Variablenanzahl gegenüber dem originären Programm (QIDS\_ILP) deutlich reduziert. Finden wir eine Lösung  $\mathbf{x} \neq \emptyset$  für das Unterproblem, so ist sie ebenfalls eine Lösung für das Originalproblem. Falls keine Lösung  $\mathbf{x}$  existiert, so ist die Teillösung  $\mathbf{y}$  zu verwerfen. Hierzu erweitern wir (QDS\_ILP.2) um die zusätzliche Nebenbedingung  $\sum_{L, y_L > 0} y_L \leq |\mathbf{y}| - 1$  und lösen erneut. Dabei sei  $|\mathbf{y}|$  die Anzahl der echt positiven Einträge von  $\mathbf{y}$ . Für das nach diesem Schema (siehe Algorithmus 2) vorgehende Programm `queens_lines` ermittelten wir in analoger Weise Laufzeiten für verschiedene Instanzen (vgl. Tabelle 2.1).

Mit Hilfe der Programme `queens` und `queens_lines` konnten wir die folgenden neuen Dominanzzahlen bestimmen:  $\gamma(Q_n) = i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46$  sowie  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 19, 23, 27, 31$ . Wir beschränkten die Suche durch die zusätzliche Nebenbedingung  $\sum_{(c,r) \in N^2} x_{c,r} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  direkt auf Lösungen von der Größe der unteren Schranke. Zur Beschleunigung des *branch & cut*-Verfahrens wurde dabei mit acht parallelen Threads gerechnet. Die Programme terminierten mit dem Hinweis, dass keine zulässige Lösung existiert, was einen Computerbeweis für  $\gamma(Q_n) > \frac{n}{2}$  bzw.

---

**Algorithmus 2** queens\_lines

---

```

1  y ← solve(QDS_ILP_2)
2  while y ≠ 0 then
3    x ← solve(subproblem(y))
4    if x ≠ ∅ then
5      print("Lösung x")
6      exit
7    else
8      QDS_ILP_2 ← QDS_ILP_2 ⊕ ∑L, yL>0 yL ≤ |y| - 1    // y ausschließen
9      y ← solve(QDS_ILP_2)
10   end if
11 end while
12 print("keine Lösung")

```

---

$i(Q_n) > \lceil \frac{n}{2} \rceil$  in den genannten Fällen liefert. In [OW01] wurde durch Verweis auf konkrete Mengen  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n \leq 120$  gezeigt. Wir erbringen somit einen Computerbeweis dafür, dass die entsprechenden aus [OW01] bekannten dominierenden Mengen optimal sind.

Testweise haben wir den *greedy*-Algorithmus für *DOMINATING SET* auf  $Q_n$  im Programm `queens_greedy` implementiert, der mit dem leeren Brett beginnend zufällig gleichverteilt aus den Feldern eines besetzt, welche jeweils die maximale Anzahl an zuvor undominierten Feldern bedrohen. In den Versuchen produzierte `queens_greedy` mit einer sehr geringen Spannweite dominierende Mengen der Größe  $\approx 0,63n$  und ist somit weit von einer optimalen Lösung entfernt.

Mit dem Programm `QPaint`<sup>16</sup> lassen sich über eine grafische Benutzeroberfläche (vgl. Abbildung 2.3) von Hand dominierende Mengen erstellen. Bestimmte Muster lassen sich durch Hervorhebung der dominierten Felder, sowie optional der besetzten Linien, leichter visuell erfassen. Konfigurationen können gespeichert und wieder geladen werden. Insbesondere sind alle in Anhang B aufgeführten Überdeckungen im Internet online verfügbar und können direkt aus dem Programm angewählt und geladen werden. Um die Einbindung in Dokumente zu erleichtern, lassen sich Überdeckungen in `xfig`<sup>17</sup>-Dateien exportieren.

---

<sup>16</sup><http://www.zaik.uni-koeln.de/~sneuhau/javaws/qpaint/qpaint.jnlp> — `QPaint` benötigt eine JVM ab Version J2SE 5. Es ist mittels Java Web Start realisiert, so dass es durch einen Aufruf der URL im Internet-Browser automatisch starten sollte. Funktioniert dies nicht, so ist in den Browser-Einstellungen der MIME-Typ `application/x-java-jnlp-file` mit `javaws` zu verknüpfen. Für einige Browser-Modelle geschieht dies bei Installation der JVM von Sun ab Version J2SE 1.4.2 automatisch.

<sup>17</sup><http://www.xfig.org/>

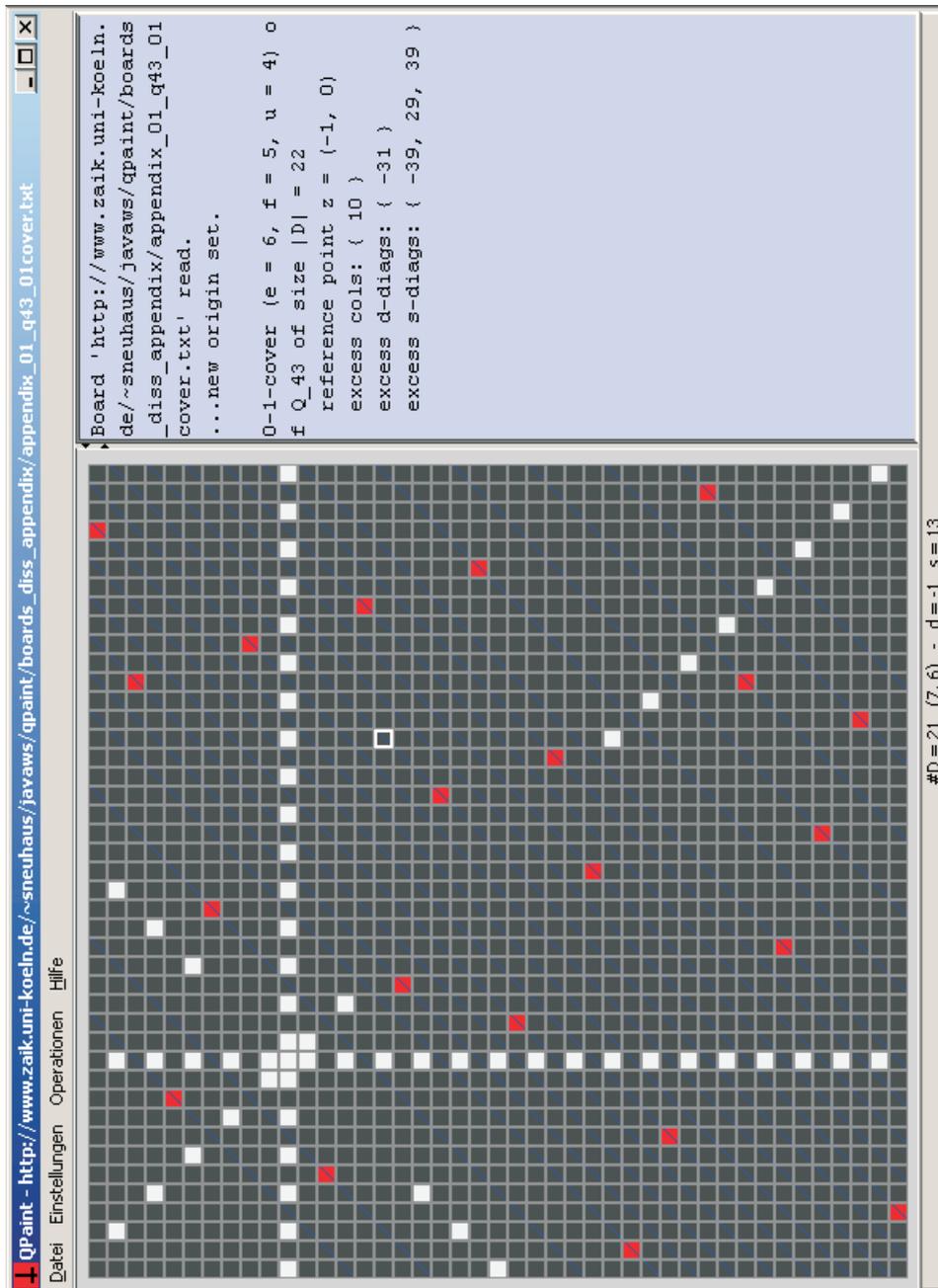


Abbildung 2.3: Bildschirmfoto von QPaint



# Kapitel 3

## Orthodoxe Überdeckungen

In diesem Kapitel untersuchen wir eine Klasse dominierender Mengen, die sich gut für die Konstruktion minimaler dominierender Mengen eignet. Sie ist eine Verallgemeinerung der bereits teilweise untersuchten  $p$ -Überdeckungen. Trotz der auf Seite 5 formulierten Vorbehalte wählen wir in Anlehnung an die von WEAKLEY [Wea02b] eingeführten Begriffe *p-orthodox set* und *p-cover* für diese Klasse die Bezeichnung *orthodoxe Überdeckungen*. Wir nehmen im Folgenden  $n \equiv 1 \pmod{2}$  an und indizieren die Orthogonalen derart, dass das Feld  $(0,0)$  in der Brettmitte liegt.

**Definition 3.1** (*p-orthodoxe Menge, p-Überdeckung, [Wea02b]*). Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  ungerade,  $D \subseteq V(Q_n)$  eine Menge von Feldern und  $p \in \{0,1\}$ . Wir nennen  $D$  eine *p-orthodoxe Menge*, falls jede Orthogonale der Parität  $p$  ein Feld aus  $D$  enthält.

Falls  $D$  eine 0-orthodoxe Menge ist und jedes ungerade-ungerade Feld von  $Q_n$  auf einer Diagonale eines Feldes aus  $D$  liegt, nennen wir  $D$  eine 0-Überdeckung. Falls  $D$  eine 1-orthodoxe Menge ist und jedes gerade-gerade Feld von  $Q_n$  auf einer Diagonale eines Feldes aus  $D$  liegt, nennen wir  $D$  eine 1-Überdeckung.

Beginnend mit den Arbeiten [Wea95] und [BMC94] wurden zahlreiche Ergebnisse veröffentlicht, welche die Tauglichkeit von  $p$ -orthodoxen Mengen zur Dominierung von  $Q_n$  mit wenigen Damen verdeutlichen. Hierzu ist vor allem ein Ergebnis von WEAKLEY [Wea02a] zu zählen, wonach jede dominierende Menge  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n-1}{2}$  eine  $p$ -orthodoxe Menge ist. Oftmals durch die Entwicklung spezialisierter Suchalgorithmen begünstigt, ließen sich neue Dominanzzahlen durch Angabe konkreter Überdeckungen in der Größe der unteren Schranke beweisen [Wea95, BMC94, GW97, BM00a, BM00c, KG01, Wea02a, OW01]. Eine alternative Charakterisierung von  $p$ -Überdeckungen durch besetzte Diagonalen [Wea02b, BMC94] vereinfachte die Analyse und führte schließlich zu verbesserten oberen Schranken [BCM97, Wea02b, BM03].

Die von WEAKLEY [Wea02b] bewiesene alternative Definition von  $p$ -Überdeckungen zeigte, dass die durch BURGER und MYNHARDT [BMC94, BM00c, BM00a, BM02, BM03] untersuchten sogenannten *(i, j)-dominating sets* ebenfalls  $p$ -Überdeckungen sind.

Für die betrachteten orthodoxen Überdeckungen  $D$  setzen wir im Folgenden  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  voraus. Unsere Notation lehnen wir an der von WEAKLEY an. Insbesondere unter der Annahme  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  ist damit eine Redundanz in den verwendeten Bezeichnern verbunden, die wir jedoch zugunsten einer intuitiveren Lesbarkeit bewusst in Kauf nehmen.

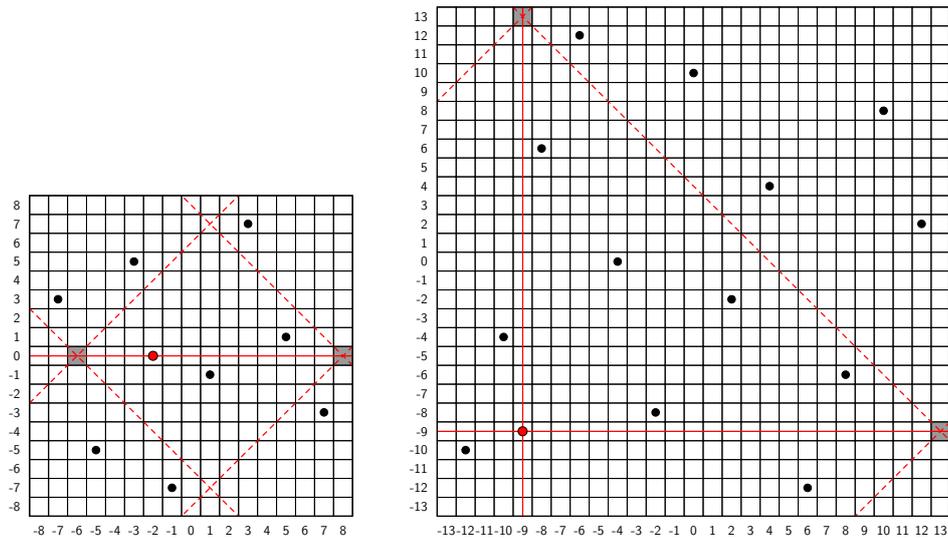


Abbildung 3.1: Relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{17}$  [Wea02b] und relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{27}$ , die jeweils keine  $p$ -Überdeckungen sind — grau gefüllte Felder liegen jeweils in Spalten und Zeilen der Parität  $\bar{p}$ , sind jedoch nicht diagonal dominiert

Wir schreiben  $\mathcal{D}_n$  für die Klasse der orthodoxen Überdeckungen von  $Q_n$  der Größe  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Aus Definition 3.1 ist unmittelbar ersichtlich, dass jede  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$  eine dominierende Menge von  $Q_n$  ist. Es ist jedoch zu beachten, dass nicht jede  $p$ -orthodoxe Menge, die dominierende Menge von  $Q_n$  ist, gleichzeitig eine  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$  ist (vgl. Abbildung 3.1). Dies motiviert unsere Verallgemeinerung:

**Definition 3.2** (Orthodoxe Überdeckung). Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Wir nennen  $D \subseteq V(Q_n)$  eine orthodoxe Überdeckung, falls  $p, q \in \{0, 1\}$  existieren, so dass jede Spalte der Parität  $p$  und jede Zeile der Parität  $q$  ein Feld aus  $D$  enthält und  $D$  eine dominierende Menge von  $Q_n$  ist.

Die Verallgemeinerung umfasst drei Aspekte: die Menge der gemäß Definition besetzten Orthogonalen, die Art der Dominierung der Felder, die auf keiner gemäß der Definition besetzten Orthogonalen liegen sowie die Parität der Brettgröße  $n$ . Als spezielle Unterklassen ergeben sich dadurch:

**Definition 3.3** (Relaxierte  $p$ -Überdeckung). Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $p \in \{0, 1\}$ . Wir nennen  $D \subseteq V(Q_n)$  eine relaxierte  $p$ -Überdeckung, falls jede Orthogonale der Parität  $p$  ein Feld aus  $D$  enthält und  $D$  eine dominierende Menge von  $Q_n$  ist.

**Definition 3.4** (0-1-Überdeckung). Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Wir nennen  $D \subseteq V(Q_n)$  eine 0-1-Überdeckung, falls ein  $p \in \{0, 1\}$  existiert, so dass jede Spalte der Parität  $p$  und jede Zeile der Parität  $\bar{p}$  ein Feld aus  $D$  enthält und  $D$  eine dominierende Menge von  $Q_n$  ist.

Zu einer  $p$ -orthodoxen Menge  $D$  nennen wir die gemäß Definition 3.1 besetzten Orthogonalen  $I_{\bar{C}}(D), I_{\bar{R}}(D)$  *Zwangorthogonalen* und ggf. weitere besetzte Orthogonalen  $I_{\bar{C}}(D) := I_C(D) \setminus I_{\bar{C}}(D), I_{\bar{R}}(D) := I_R(D) \setminus I_{\bar{R}}(D)$  nennen wir *Zusatzorthogonalen*. Wenn die Interpretation aus dem Kontext eindeutig ist, schreiben wir bei betrachteten  $p$ -orthodoxen Mengen  $D$  ebenso kurz  $I_L := I_L(D), I_{\bar{L}} := I_{\bar{L}}(D), I_{\underline{L}} := I_{\underline{L}}(D)$ , für  $L \in \{C, R\}$ .

Der übrige Teil des Kapitels gliedert sich folgendermaßen: Wir stellen zunächst die bekannten Resultate zu  $p$ -Überdeckungen vor und zeigen, dass eine Voraussetzung in einer alternativen Definition von  $p$ -Überdeckungen  $D$  von unserer Zusatzannahme  $\#D = \frac{n+1}{2}$  impliziert wird. Dieses Resultat gilt sogar ebenso für relaxierte  $p$ -Überdeckungen und in ähnlicher Form für 0-1-Überdeckungen. Vorbereitend auf die Anwendung der Ergebnisse zu nicht-orthodoxen Überdeckungen betrachten wir überdies orthodoxe Überdeckungen für gerade Brettgrößen. Zur Suche konkreter orthodoxer Überdeckungen lässt sich deren besondere Struktur gut ausnutzen, was wir durch das Vorstellen von zwei Lösungsansätzen verdeutlichen möchten. Abschließend präsentieren wir Implementierungsergebnisse, die zum einen neue Dominanzzahlen zeigen und zum anderen die Relevanz der Verallgemeinerung belegen.

### 3.1 $p$ -Überdeckungen

Wir wollen zunächst eine alternative Definition von  $p$ -Überdeckungen einführen, die sich für weiter gehende Analysen besser eignet als die aus Definition 3.1. Dazu benötigen wir vorab die folgende Definition.

**Definition 3.5** ([Wea02b]). *Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  ungerade und  $D \subseteq V(Q_n)$  eine Menge von Feldern, wobei  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen enthält.*

*$e = e(D) \in \mathbb{N}_0$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für jedes  $|i| \leq e$  ein Feld der Differenzdiagonale  $2i$  enthält.*

*$f = f(D) \in \mathbb{N}_0$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für jedes  $|i| \leq f$  ein Feld der Summendiagonale  $2i$  enthält.*

*$u = u(D) \in \mathbb{N}^+$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für jedes  $1 \leq i \leq u$  jeweils ein Feld der Differenzdiagonalen  $-(2e + 4i)$  und  $2e + 4i$  sowie der Summendiagonalen  $-(2f + 4i)$  und  $2f + 4i$  enthält.*

Damit lässt sich die alternative Charakterisierung von  $p$ -Überdeckungen formulieren. Sie ist eine Verallgemeinerung von Theorem 3 aus [BMC94].

**Satz 3.6** ( $p$ -Überdeckung, [Wea02b]). *Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  ungerade,  $p \in \{0, 1\}$  und  $D \subseteq V(Q_n)$  eine  $p$ -orthodoxe Menge von  $Q_n$ , wobei  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen enthält. Weiter sei  $e = e(D)$ ,  $f = f(D)$  und  $u = u(D)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $D$  ist eine  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$ .
2. Entweder (A)  $e + f \equiv p \pmod{2}$  und  $e + f + 2u \geq \frac{n-5}{2}$   
oder (B)  $e + f \not\equiv p \pmod{2}$  und  $e + f \geq \frac{n-3}{2}$ .

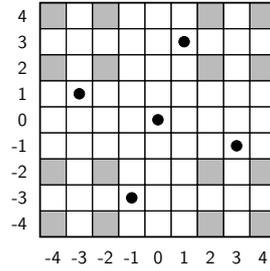


Abbildung 3.2: Die einzige  $p$ -Überdeckung vom Typ B von  $Q_n$  ist eine 1-Überdeckung von  $Q_9$  (siehe Proposition 3.7) — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

Zu einer  $p$ -Überdeckung  $D$  nennen wir die gemäß Satz 3.6 besetzten Diagonalen  $I_{\bar{L}}(D)$  *Zwangsdialagonalen* und ggf. weitere besetzte Diagonalen  $I_{\hat{L}}(D) := I_L(D) \setminus I_{\bar{L}}(D)$  nennen wir *Zusatzdiagonalen*, für  $L \in \{D, S\}$ . Wenn die Interpretation aus dem Kontext eindeutig ist, schreiben wir für betrachtete  $p$ -Überdeckungen  $D$  ebenso kurz  $e := e(D)$ ,  $f := f(D)$ ,  $u := u(D)$  sowie  $I_L := I_L(D)$ ,  $I_{\bar{L}} := I_{\bar{L}}(D)$ ,  $I_{\hat{L}} := I_{\hat{L}}(D)$ , für  $L \in \{D, S\}$ .

Abhängig davon, ob die Bedingung (A) oder (B) unter Punkt 2 in Satz 3.6 erfüllt ist, sprechen wir von  $p$ -Überdeckungen vom *Typ A* oder *Typ B*.  $p$ -Überdeckungen vom Typ B sind dichter und zentralisierter als solche vom Typ A und eignen sich nicht so gut für kleine dominierende Mengen [Wea02b]. Die folgende Proposition untermauert diese Einschätzung (vgl. auch Abbildung 3.2).

**Proposition 3.7** ([Wea02b]). *Sei  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ . Falls für ein  $p \in \{0, 1\}$  eine  $p$ -Überdeckung  $D$ ,  $\#D = \frac{n+1}{2}$ , vom Typ B von  $Q_n$  existiert, dann gilt  $n = 9$ ,  $p = 1$  und  $D$  ist isomorph zu  $\{(0, 0), \pm(1, 3), \pm(3, -1)\}$ .*

Für  $n \equiv 3 \pmod{4}$  lässt sich mit einem zu dem aus [Wea02b] analogen Beweis ein ähnliches Resultat zeigen.

**Proposition 3.8.** *Sei  $n \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $p \in \{0, 1\}$ . Es existiert keine  $p$ -Überdeckung  $D$  vom Typ B von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n+1}{2}$ .*

*Beweis.* Sei  $n = 4k + 3$ . Angenommen  $D$  ist eine  $p$ -Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  vom Typ B mit  $\#D = 2k + 2$  für ein  $p \in \{0, 1\}$ . Sei o. B. d. A.  $e \geq f$ . Gemäß Definition 3.5 sind mindestens  $2e + 1 \leq \#D = 2k + 2$  Differenzdiagonalen besetzt, die Ganzzahligkeit von  $e$  und  $k$  impliziert dann  $e \leq k$ . Zusammen mit  $e + f \geq \frac{n-3}{2} = 2k$  aus Satz 3.6 folgt dann  $e = f = k$  und weiter  $p = 1$ , da für  $p$ -Überdeckungen vom Typ B  $e + f \not\equiv p \pmod{2}$  gilt.

Neben den durch  $e = f = k$  implizierten Diagonalen besetzt  $D$  noch eine weitere Differenzdiagonale  $d_1$  und Summendiagonale  $s_1$ . Proposition 2.2 ergibt  $d_1 = s_1 = 0$ . Somit sind die Indexmengen der von  $D$  besetzten Diagonalen vollständig spezifiziert und für jede Dame  $\delta \in D$  gilt  $|\text{diff}(\delta)|, |\text{sum}(\delta)| \leq 2k \implies |\text{col}(\delta)|, |\text{row}(\delta)| \leq 2k$ .  $D$  enthält somit keine Dame in einer äußeren Orthogonale  $i$  mit  $|i| = 2k + 1 \equiv p \pmod{2}$ , im Widerspruch zur Annahme, dass  $D$  eine  $p$ -orthodoxe Menge ist.  $\square$

Die Propositionen 3.7 und 3.8 zeigen, dass  $p$ -Überdeckungen vom Typ B unter der Annahme  $\#D = \frac{n+1}{2}$  weitgehend irrelevant sind. Daher wollen wir uns im Folgenden ausschließlich mit  $p$ -Überdeckungen vom Typ A beschäftigen. Aus Symmetriegründen nehmen wir grundsätzlich o. B. d. A.  $e \geq f$  an. WEAKLEY zeigte die folgende Beziehung der Parameter  $p, e$  und  $f$  unter der Annahme  $\#D = \frac{n+1}{2}$ .

**Proposition 3.9** ([Wea02b]). *Sei  $D$  eine  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$ . Falls  $p = 0$ , dann gilt entweder  $e = f$  oder  $e = f + 2$ . Falls  $p = 1$ , dann gilt  $e = f + 1$ .*

Von den acht Symmetrien der Diedergruppe  $D_4$  abstrahierend definieren wir  ${}^c\mathcal{D}_n^p$  als die Äquivalenzklasse der orthodoxen Überdeckungen, die isomorph sind zu einer  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$  der Größe  $\frac{n+1}{2}$  mit  $e = f + c, c \in \{0, 1, 2\}$ . Es ist zu beachten, dass damit für eine Überdeckung  $D \in {}^c\mathcal{D}_n^p$  die Annahme  $e(D) \geq f(D)$  i. A. zwar nicht mehr gültig ist, jedoch erlaubt uns diese Definition aufgrund der Symmetrien andere nicht-einschränkende Annahmen zu treffen. Weiter schreiben wir  $\mathcal{D}_n^p := {}^0\mathcal{D}_n^p \cup {}^1\mathcal{D}_n^p \cup {}^2\mathcal{D}_n^p$ .

Die Klassen  ${}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0, {}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0, {}^1\mathcal{D}_{4k+1}^1$  und  ${}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  wurden in [OW01] untersucht und deren Relevanz durch konkrete Überdeckungen belegt. Wir geben kurz die wichtigsten Eigenschaften wieder und untersuchen anschließend die beiden übrigen Klassen  ${}^2\mathcal{D}_{4k+3}^0$  und  ${}^0\mathcal{D}_{4k+3}^0$ .

${}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$ : Sei  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$ . Dann gilt  $u = k - e$ . Die Anzahl der Orthogonalen der Parität  $p = 0$  ist  $2k + 1 = \#D$ , somit existieren keine Zusatzorthogonalen:  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset$ . Zählen der Zwangsdiagonalen zeigt  $I_{\hat{D}} = \emptyset$  sowie durch  $f = e - 2$  vier Zusatz-Summendiagonalen  $I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ . Einsetzen von  $I_{\hat{C}}, I_{\hat{R}}, I_{\hat{D}}$  und  $I_{\hat{S}}$  in die lineare Gleichung aus Proposition 2.2 ergibt  $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$  sowie Einsetzen in das Parallelogrammgesetz weiter  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 = 8 - 8(2k - 1)[e^2 - (2k + 1)e + \frac{2}{3}k(k - 1)]$ .

${}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0$ : Es gilt  $u \geq k - e - 1$ . Zusatzorthogonalen  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset$ . Der Fall  $u = k - e$  mit  $I_{\hat{D}} = I_{\hat{S}} = \emptyset$  ist nur möglich für  $k \in \{0, 2\}$ , ansonsten gilt  $u = k - e - 1$  mit  $I_{\hat{D}} = \{d_1, d_2\}, I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2\}, d_1 = -d_2, s_1 = -s_2$  und  $d_1^2 + s_1^2 = -4[(2k - 1)e^2 - (2k - 1)^2e + \frac{2}{3}k(2k^2 - 9k + 1)]$ .

${}^1\mathcal{D}_{4k+1}^1$ : Es gilt  $u = k - e$ . Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{c_1\}, I_{\hat{R}} = \{r_1\}, I_{\hat{D}} = \emptyset, I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2\}$  mit  $c_1 = r_1, s_1 + s_2 = 2c_1$  und  $s_1^2 + s_2^2 - 4c_1^2 = -16k[e^2 - (2k + 1)e + \frac{1}{3}(2k^2 + 3k + 1)]$ .

${}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$ : Es gilt  $u = k - e$ . Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset, I_{\hat{D}} = \{d_1\}, I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2, s_3\}$  mit  $d_1 = 0, s_1 + s_2 + s_3 = 0$  und  $s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2 = 4 - 8k[e^2 - (2k + 1)e + \frac{1}{3}(2k^2 - 3k - 5)]$ . Da die Differenz-Hauptdiagonale doppelt besetzt ist, sind die Überdeckungen nicht unabhängig.

**Proposition 3.10.**  ${}^2\mathcal{D}_{4k+3}^0 = \emptyset$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Sei  $n = 4k + 3$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Angenommen  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+3}^0$ . Gemäß Satz 3.6 gilt  $e + f + 2u \geq \frac{n-5}{2} \iff e + u \geq k + \frac{1}{2}$ . Aus der Ganzzahligkeit von  $e, u$  und  $k$  folgt dann  $e + u \geq k + 1$ .

Gleichzeitig darf die Anzahl der definitionsgemäß besetzten Differenzdiagonalen nicht größer sein als die Anzahl der Damen, d. h.  $2e + 1 + 2u \leq \#D = 2k + 2 \iff e + u \leq k + \frac{1}{2}$  und damit  $e + u \leq k$ . Dies führt zu einem Widerspruch.  $\square$

**Proposition 3.11.** *Sei  $(k_i, e_i)_1^\infty$  die Folge mit  $(k_1, e_1) = (0, 0)$ ,  $(k_2, e_2) = (2, 1)$ ,  $(k_i, e_i) = 4(k_{i-1}, e_{i-1}) - (k_{i-2}, e_{i-2}) + (1, 0)$ ,  $i \geq 3$ . Falls  ${}^0\mathcal{D}_{4k+3}^0 \neq \emptyset$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ , dann existiert ein  $i \in \mathbb{N}^+$ , so dass  $(k, e) = (k_i, e_i)$  und  $u = k - e$ .*

*Beweis.* Sei  $D \in {}^0\mathcal{D}_{4k+3}^0$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Gemäß Satz 3.6 gilt  $e + f + 2u \geq \frac{4k+3-5}{2} \iff e + u \geq k - \frac{1}{2}$ . Aus der Ganzzahligkeit von  $e, u$  und  $k$  folgt dann  $e + u \geq k$ . Gleichzeitig darf die Anzahl der definitionsgemäß besetzten Differenzdiagonalen nicht größer sein als die Anzahl der Damen, d. h.  $2e + 1 + 2u \leq \#D = 2k + 2 \iff e + u \leq k + \frac{1}{2}$  und damit  $e + u \leq k$ . Somit gilt  $u = k - e$ .

Da die Anzahl der Orthogonalen der Parität  $p = 0$  jeweils  $2k+1 = \#D-1$  ist, sind neben den Zwangorthogonalen zusätzlich noch eine Spalte  $\{c_1\} = I_C$  und eine Zeile  $\{r_1\} = I_R$  besetzt. Ebenso sind abgesehen von  $\{d_1\} = I_D$ ,  $\{s_1\} = I_S$  die besetzten Diagonalen durch Satz 3.6 abhängig von  $e$  vollständig spezifiziert.

Durch Einsetzen von  $I_C, I_R, I_D$  und  $I_S$  in das Parallelogrammgesetz (siehe Seite 7) erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \left[ 2 \sum_{i=1}^k (2i)^2 + c_1^2 \right] + 2 \left[ 2 \sum_{i=1}^k (2i)^2 + r_1^2 \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^e (2i)^2 + 2 \sum_{i=1}^u (2e + 4i)^2 + d_1^2 + 2 \sum_{i=1}^f (2i)^2 + 2 \sum_{i=1}^u (2f + 4i)^2 + s_1^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Weiter folgt durch Proposition 2.2  $d_1 = r_1 - c_1, s_1 = c_1 + r_1 \implies d_1^2 + s_1^2 = 2c_1^2 + 2r_1^2$  und die Terme der Zusatzlinien in Gleichung (3.1) heben sich gegenseitig auf:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \sum_{i=1}^k (2i)^2 = 2 \cdot 2 \left[ \sum_{i=1}^e (2i)^2 + \sum_{i=1}^{k-e} (2e + 4i)^2 \right]. \quad (3.2)$$

Der Rest des Beweises gleicht dem Beweis von Theorem 4 aus [Wea02a], in dem dieselbe Gleichung zu lösen ist. Vereinfachung von Gleichung (3.2) gibt  $(2k+1)^2 + 2 = 3(2k+1-2e)^2$ . Wir substituieren  $X := 2k+1, Y := 2k+1-2e$  und erhalten die diophantische Gleichung  $X^2 - 3Y^2 = -2$ , deren positive, ganzzahlige Lösungen  $(X_i, Y_i)_1^\infty$  durch Standardmethoden ermittelt werden können und sich rekursiv als  $(X_1, Y_1) = (1, 1), (X_2, Y_2) = (5, 3)$  und  $(X_i, Y_i) = 4(X_{i-1}, Y_{i-1}) - (X_{i-2}, Y_{i-2}), i \geq 3$ , darstellen lassen. Durch Rücksubstitution erhalten wir die Folge  $(k_i, e_i)_1^\infty$  mit  $(k_1, e_1) = (0, 0), (k_2, e_2) = (2, 1)$  und  $(k_i, e_i) = 4(k_{i-1}, e_{i-1}) - (k_{i-2}, e_{i-2}) + (1, 0), i \geq 3$ .  $\square$

Abgesehen von den vier Zusatzlinien entsprechen die besetzten Linien denen aus der bis zum Jahr 2007 [FW07] untersuchten Klasse der Überdeckungen der Größe  $\frac{n-1}{2}$ . Die ersten Glieder der Folge  $(n_i)$  mit  $n_i := 4k_i + 3$  sind 3, 11, 39, 143, 531 und 1979. Siehe [Wea02a] für eine Überdeckung  $D \in {}^0\mathcal{D}_{39}^0$  sowie Anhang B für eine Überdeckung  $D \in {}^0\mathcal{D}_{143}^0$ .

## 3.2 Relaxierte $p$ -Überdeckungen

Analog zur Notation bezüglich  $p$ -Überdeckungen definieren wir die Parameter  $e, f, u$ . Wir schreiben  $\tilde{\mathcal{D}}_n^p$  für die Klasse der relaxierten  $p$ -Überdeckungen von  $Q_n$  und genauer  ${}^c\tilde{\mathcal{D}}_n^p$ , falls  $e = f + c, c \in \{0, 1, 2\}$ . Es gelten die Beziehungen  $\mathcal{D}_{4k+1}^0 = \tilde{\mathcal{D}}_{4k+1}^0$  sowie  $\mathcal{D}_{4k+3}^1 = \tilde{\mathcal{D}}_{4k+3}^1$ , da in diesen Fällen keine Zusatzorthogonalen existieren.

Mit  $n$  ungerade nennen wir eine relaxierte  $p$ -Überdeckung *randfrei*, wenn die äußeren Orthogonalen keine Zwangsorthogonalen sind, d. h. wenn  $\frac{n-1}{2} \not\equiv p \pmod{2}$  für  $n \geq 3$ . Wir unterscheiden somit  $\tilde{\mathcal{D}}_{4k+1}^1 \supset \mathcal{D}_{4k+1}^1$  von  $\tilde{\mathcal{D}}_{4k+3}^0 \supset \mathcal{D}_{4k+3}^0$ . Die Überdeckungen in Abbildung 3.1 auf Seite 22 belegen, dass die Inklusionsbeziehungen echt sind.

Wir nennen die Zusatzorthogonalen einer Überdeckung  $\{c_1\} = I_{\bar{C}}, \{r_1\} = I_{\bar{R}}$  und betrachten zur Abgrenzung von Abschnitt 3.1 ausschließlich randfreie Überdeckungen mit  $c_1 \not\equiv p \pmod{2}$  oder  $r_1 \not\equiv p \pmod{2}$ .

Die in Satz 3.6 vorgestellte alternative Charakterisierung von  $p$ -Überdeckungen setzt voraus, dass beide Hauptdiagonalen besetzt sind. Von wenigen Ausnahmen für kleine Brettgrößen  $n$  abgesehen stellt diese Voraussetzung unter der Annahme  $\#D = \frac{n+1}{2}$  jedoch keine Einschränkung dar. Wir wollen zeigen, dass die Aussage sogar für relaxierte  $p$ -Überdeckungen gilt und betrachten hierzu die vier Fälle, die sich durch Unterscheidung nach  $p \in \{0, 1\}$  und  $n \equiv 3 \pmod{4}$  bzw.  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ergeben.

**Lemma 3.12.** *Sei  $D$  eine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit  $\#D = 2k + 2$ . Falls  $k \geq 2$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen.*

*Beweis.* Für (nicht relaxierte) 0-Überdeckungen ist die Aussage trivialerweise wahr, da die beiden (ungerade-ungeraden) Eckfelder auf einer nicht besetzten Hauptdiagonale nicht diagonal dominiert werden können, im Widerspruch zur Definition von 0-Überdeckungen.

Angenommen  $D$  ist eine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$ ,  $\#D = 2k + 2, k \geq 2$ , und  $D$  besetzt nicht beide Hauptdiagonalen. Seien  $I_C, I_R, I_D, I_S$  die Index-Multimengen der von  $D$  besetzten Spalten, Zeilen, Differenz- und Summendiagonalen. Da  $Q_{4k+3}$  jeweils  $2k + 1 = \#D - 1$  Orthogonalen der Parität  $p = 0$  enthält, gibt es eine Zusatzspalte  $c_1 \in I_C$  und eine Zusatzzeile  $r_1 \in I_R$ . Es ist zu beachten, dass  $(c_1, r_1) \in D$  i. A. nicht gilt.

Sei o. B. d. A. die Summen-Hauptdiagonale  $s = 0$  unbesetzt. Der Fall  $d = 0$  unbesetzt ist symmetrisch und geht aus der Spiegelung von  $D$  an der Zeile  $r = 0$  oder an der Spalte  $c = 0$  hervor. Dann müssen die zwei Eckfelder  $\pm(-(2k + 1), 2k + 1)$  entweder durch eine Dame auf  $(2k + 1, 2k + 1)$  bzw.  $(-(2k + 1), -(2k + 1))$  oder durch zwei Damen auf  $(\bar{c}, -(2k + 1))$  und  $(-(2k + 1), \bar{r})$  bzw.  $(\bar{c}, 2k + 1)$  und  $(2k + 1, \bar{r})$  dominiert werden (vgl. Abbildung 3.3). Es gilt  $\bar{c} \in I_{\bar{C}}, \bar{r} \in I_{\bar{R}}$ , da  $\#D = 2k + 2$ . Da  $\pm(2k + 1) \notin I_{\bar{C}}, I_{\bar{R}}$  keine Zwangsorthogonalen sind, gilt entweder  $c_1 = r_1 = 2k + 1$  oder  $c_1 = r_1 = -(2k + 1)$ . Sei o. B. d. A.  $c_1 = r_1 = 2k + 1$  (die Fälle sind symmetrisch und gehen durch Spiegelung an der Summen-Hauptdiagonale ineinander über).

Da  $c_1 = r_1 = 2k + 1$ , müssen alle  $2k$  Felder  $\{\pm(1, -1), \pm(3, -3), \dots, \pm(2k - 1, -(2k - 1))\}$  auf  $s = 0$  diagonal durch Damen auf den Differenzdiagonalen  $I'_D := \{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k - 2)\} \subset I_D$  dominiert werden. Es bleiben zwei weitere besetzte Differenzdiagonalen  $d_1, d_2 \in I_D$ . Wegen Proposition 2.2 gilt  $d_1 = -d_2$ . Des Weiteren ist die Differenz-Hauptdiagonale

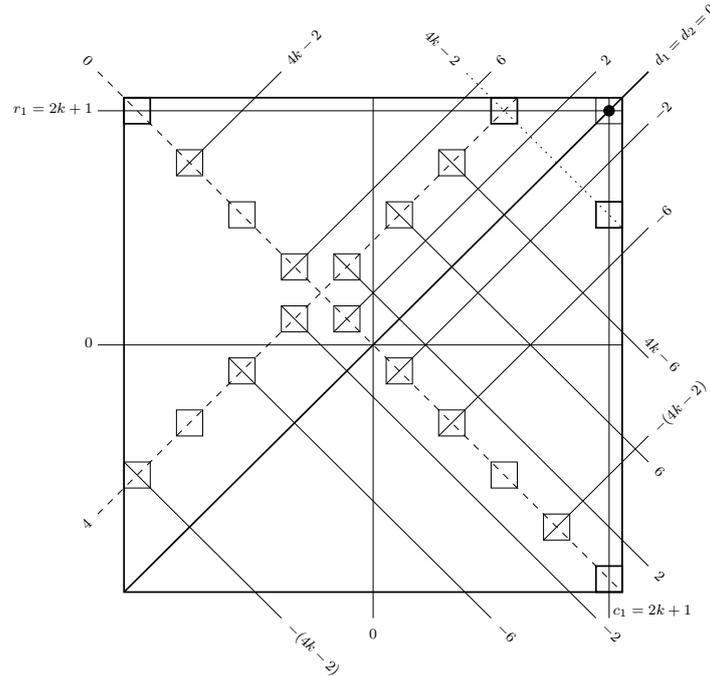


Abbildung 3.3: Konstruktionsversuch einer relaxierten 0-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — Bsp.:  $k = 4$

besetzt, da andernfalls das Feld  $(-(2k+1), -(2k+1))$  nicht dominiert wäre. Da  $0 \notin I'_D$ , gilt  $d_1 = d_2 = 0$ , d. h. die Differenz-Hauptdiagonale ist doppelt besetzt. Somit ist  $I_D = \{0, 0, \pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k-2)\}$  vollständig spezifiziert.

Angenommen die beiden äußeren Orthogonalen  $2k+1$  sind besetzt durch zwei Damen auf  $\delta_1 = (\bar{c}, 2k+1)$  und  $\delta_2 = (2k+1, \bar{r})$  mit  $\bar{c} \in I_C, \bar{r} \in I_R$ . Da  $\text{diff}(\delta_1) \equiv \text{diff}(\delta_2) \equiv 1 \pmod{2}$ , jedoch  $d \equiv 0 \pmod{2}$  für alle  $d \in I_D$ , ist dies ein Widerspruch.

Somit steht eine Dame auf  $\delta = (2k+1, 2k+1)$ . Da  $d = 4 \notin I_D$  unbesetzt ist, müssen die  $2k-1$  Summendiagonalen  $I'_S := \{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k-6), -(4k-2)\} \subset I_S$  besetzt sein. Es ist zu beachten, dass  $s = 4k-2$  nicht besetzt sein muss, da die zwei Felder  $(2k+1, 2k-3)$  und  $(2k-3, 2k+1)$  bereits durch die besetzte Zeile und Spalte  $2k+1$  dominiert werden. Neben  $\text{sum}(\delta) = 4k+2 \notin I'_S$  bleiben daher zwei weitere besetzte Summendiagonalen  $s_1, s_2 \in I_S$ .

Wir suchen nun zulässige Belegungen der Variablen  $s_1$  und  $s_2$  in Abhängigkeit von  $k$ . Einsetzen aller besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt die Beziehung

$$2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2$$

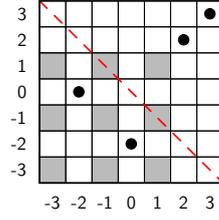


Abbildung 3.4: Relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_7$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

$$\begin{aligned}
&\implies 8 \sum_{i=1}^k (2i)^2 + 4(2k+1)^2 = s_1^2 + s_2^2 - (4k-2)^2 + (4k+2)^2 + 4 \sum_{i=1}^k (4i-2)^2 \\
&\iff 8 \left[ \frac{2}{3} k(k+1)(2k+1) \right] + (4k+2)^2 = s_1^2 + s_2^2 - (4k-2)^2 + (4k+2)^2 + 4 \sum_{i=1}^k (4i-2)^2 \\
&\iff \frac{4}{3} (8k^3 + 12k^2 + 4k) = s_1^2 + s_2^2 - (4k-2)^2 + 4 \sum_{i=1}^k (4i-2)^2 \\
&= s_1^2 + s_2^2 - (16k^2 - 16k + 4) + 4 \left[ 16 \sum_{i=1}^k i^2 - 16 \sum_{i=1}^k i + 4k \right] \\
&= s_1^2 + s_2^2 - 16k^2 + 16k - 4 + 64 \left[ \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) - \frac{1}{2} k(k+1) \right] + 16k \\
&= s_1^2 + s_2^2 - 16k^2 + 32k - 4 + 64 \left[ \frac{1}{6} ((2k^3 + 3k^2 + k) - (3k^2 + 3k)) \right] \\
&= s_1^2 + s_2^2 - 16k^2 + 32k - 4 + \frac{4}{3} (16k^3 - 16k) \\
&= s_1^2 + s_2^2 + \frac{4}{3} (16k^3 - 12k^2 + 8k - 3) \\
&\iff s_1^2 + s_2^2 = \frac{4}{3} (-8k^3 + 24k^2 - 4k + 3).
\end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle von  $p(k) := \frac{4}{3}(-8k^3 + 24k^2 - 4k + 3)$  ist  $k_0 \approx 2,87$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, ist  $k = 2$  die einzige zu untersuchende Stelle für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq 2$ .

Sei o. B. d. A.  $s_1 \leq s_2$ . Einsetzen von  $I_C, I_R, I_S$  in Proposition 2.2 ergibt die Beziehung  $s_1 + s_2 = 4k - 2 = 6$ . Aus  $s_1^2 + s_2^2 = p(2) = 36$  folgt dann schließlich  $s_1 = 0, s_2 = 6$ . Da jedoch  $s_1 = 0$  im Widerspruch zur Annahme steht, kann  $D$  für alle  $k \geq 2$  keine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.12 gilt nicht für  $k = 1$  (vgl. Abbildung 3.4). Die Einschränkung  $k \geq 2$  in der Bedingung ist somit scharf.

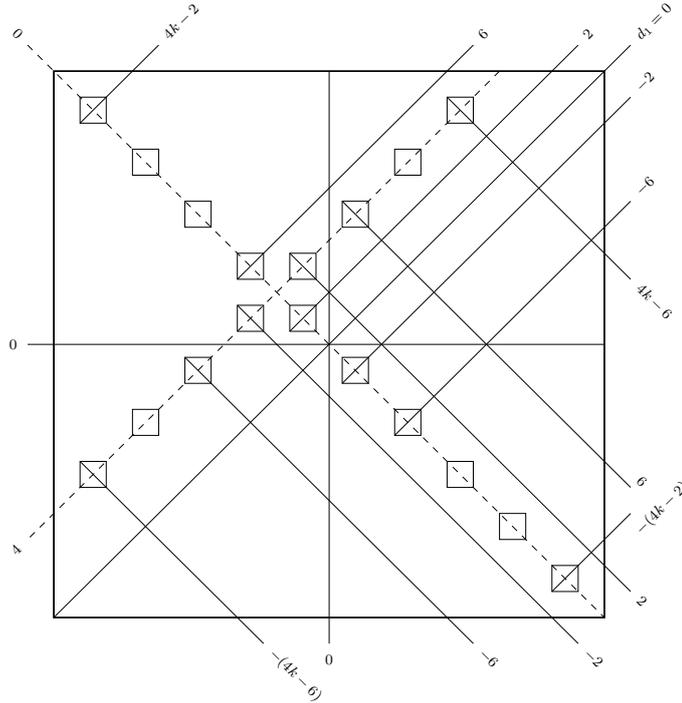


Abbildung 3.5: Konstruktionsversuch einer relaxierten 0-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — Bsp.:  $k = 5$

**Lemma 3.13.** *Sei  $D$  eine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit  $\#D = 2k + 1$ . Falls  $k \geq 2$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen.*

*Beweis.* Angenommen  $D$  ist eine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$ ,  $\#D = 2k+1$ ,  $k \geq 2$ , und  $D$  besetzt nicht beide Hauptdiagonalen. Die besetzten Orthogonalen sind  $I_C = I_R = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2k\}$ , d. h. es gibt keine Zusatzorthogonalen.

Sei o. B. d. A. die Summen-Hauptdiagonale  $s = 0$  unbesetzt. Dann müssen die  $2k$  Felder  $\{\pm(1, -1), \pm(3, -3), \dots, \pm(2k - 1, -(2k - 1))\}$  auf  $s = 0$  durch Damen auf den Differenzdiagonalen  $\{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k - 2)\} \subset I_D$  dominiert werden (vgl. Abbildung 3.5). Es bleibt eine weitere besetzte Differenzdiagonale  $d_1 \in I_D$ . Wegen Proposition 2.2 ist dies  $d_1 = 0$ . Somit ist  $I_D = \{0, \pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k - 2)\}$  vollständig spezifiziert.

Da  $d = 4 \notin I_D$  unbesetzt ist, müssen die  $2k - 2$  durch  $\{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k - 6)\} \subset I_S$  gegebenen Summendiaagonalen besetzt sein. Es bleiben drei weitere besetzte Summendiaagonalen  $s_1, s_2, s_3 \in I_S$ . Wegen Proposition 2.2 gilt  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ .

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2$$

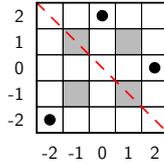


Abbildung 3.6: Relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_5$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

$$\begin{aligned} \implies 8 \sum_{i=1}^k (2i)^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(4k-2)^2 + 4 \sum_{i=1}^{k-1} (4i-2)^2 \\ \iff s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= \frac{8}{3}(-4k^3 + 18k^2 - 8k + 3). \end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle von  $p(k) := \frac{8}{3}(-4k^3 + 18k^2 - 8k + 3)$  ist  $k_0 \approx 4,05$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, sind  $k = 2, 3, 4$  die einzigen zu untersuchenden Stellen für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq 2$ .

Sei o. B. d. A.  $s_1 \leq s_2 \leq s_3$ . Betrachtung von  $p(2) = 72$ ,  $p(3) = 88$  und  $p(4) = 8$  ergibt, dass  $(k, s_1, s_2, s_3) = (2, -6, 0, 6)$  und  $(k, s_1, s_2, s_3) = (4, -2, 0, 2)$  die einzigen Lösungstupel in  $\{2, 3, 4\} \times \mathbb{Z}^3$  sind, die sowohl  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  als auch  $p(k) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  erfüllen. Da jedoch  $s_2 = 0$  im Widerspruch zur Annahme steht, kann  $D$  für alle  $k \geq 2$  keine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.13 gilt nicht für  $k = 1$  (vgl. Abbildung 3.6). Die Einschränkung  $k \geq 2$  in der Bedingung ist somit scharf.

**Lemma 3.14.** Sei  $D$  eine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit  $\#D = 2k + 2$ . Falls  $k \geq 1$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen.

*Beweis.* Angenommen  $D$  ist eine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$ ,  $\#D = 2k+2$ ,  $k \geq 1$ , und  $D$  besetzt nicht beide Hauptdiagonalen. Die besetzten Orthogonalen sind  $I_C = I_R = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k+1)\}$ , d. h. es gibt keine Zusatzorthogonalen.

Sei o. B. d. A. die Summen-Hauptdiagonale  $s = 0$  unbesetzt. Dann müssen die  $2k+1$  Felder  $\{(0,0), \pm(2,-2), \pm(4,-4), \dots, \pm(2k,-2k)\}$  auf  $s = 0$  durch Damen auf den Differenzdiagonalen  $\{0, \pm 4, \pm 8, \dots, \pm 4k\} \subset I_D$  dominiert werden (vgl. Abbildung 3.7). Es bleibt eine weitere besetzte Differenzdiagonale  $d_1 \in I_D$ . Wegen Proposition 2.2 ist dies  $d_1 = 0$ , d. h. die Differenz-Hauptdiagonale ist doppelt besetzt. Somit ist  $I_D = \{0, 0, \pm 4, \pm 8, \dots, \pm 4k\}$  vollständig spezifiziert.

Da  $d = 2 \notin I_D$  unbesetzt ist, müssen die  $2k$  durch  $\{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k-2)\} \subset I_S$  gegebenen Summendiagonalen besetzt sein. Es bleiben zwei weitere besetzte Summendiagonalen  $s_1, s_2 \in I_S$ . Wegen Proposition 2.2 gilt  $s_1 = -s_2$ .

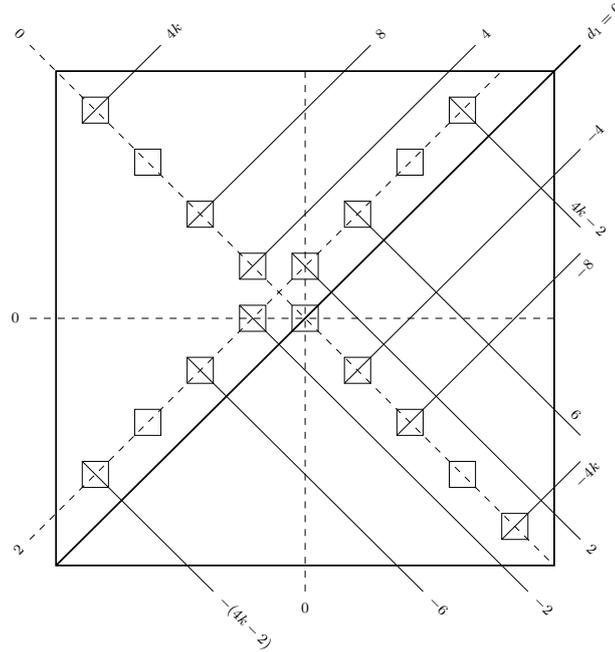


Abbildung 3.7: Konstruktionsversuch einer relaxierten 1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — Bsp.:  $k = 4$

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 &= \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2 \\
 \implies 8 \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^2 &= 2s_1^2 + 2 \sum_{i=1}^{2k} (2i)^2 \\
 \iff s_1^2 &= \frac{2}{3}(-8k^3 + 12k^2 + 20k + 6).
 \end{aligned}$$

Die größte reelle Nullstelle  $k_0 \geq 0$  von  $p(k) := \frac{2}{3}(-8k^3 + 12k^2 + 20k + 6)$  ist  $k_0 \approx 2,58$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, sind  $k = 1, 2$  die einzigen zu untersuchenden Stellen für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq 1$ .

Betrachtung von  $s_1^2 = p(1) = 20$  und  $s_1^2 = p(2) = 20$  zeigt jedoch, dass an diesen Stellen keine ganzzahligen Lösungen für  $s_1$  existieren, d. h.  $D$  kann für alle  $k \geq 1$  keine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.14 gilt nicht für  $k = 0$  (vgl. Abbildung 3.8). Die Einschränkung  $k \geq 1$  in der Bedingung ist somit scharf.

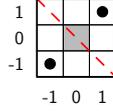


Abbildung 3.8: Relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_3$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

**Lemma 3.15.** *Sei  $D$  eine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit  $\#D = 2k + 1$ . Falls  $k \geq 5$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen.*

*Beweis.* Für (nicht relaxierte) 1-Überdeckungen ist die Aussage trivialerweise wahr, da die beiden (gerade-geraden) Eckfelder auf einer nicht besetzten Hauptdiagonale nicht diagonal dominiert werden können, im Widerspruch zur Definition von 1-Überdeckungen.

Angenommen  $D$  ist eine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$ ,  $\#D = 2k + 1$ ,  $k \geq 5$ , und  $D$  besetzt nicht beide Hauptdiagonalen. Die Zwangorthogonalen sind  $I_{\bar{C}} = I_{\bar{R}} := \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k-1)\} \subseteq I_C, I_R$ . Da  $\#I_{\bar{C}} = \#I_{\bar{R}} = \#D - 1$ , gibt es eine Zusatzspalte  $c_1 \in I_C$  und eine Zusatzzeile  $r_1 \in I_R$ . Es ist zu beachten, dass  $(c_1, r_1) \in D$  i. A. nicht gilt.

Sei o. B. d. A. die Summen-Hauptdiagonale  $s = 0$  unbesetzt. Dann müssen die zwei Eckfelder  $\pm(2k, -2k)$  entweder durch eine Dame auf  $(2k, 2k)$  bzw.  $(-2k, -2k)$  oder durch zwei Damen auf  $(\bar{c}, -2k)$  und  $(-2k, \bar{r})$  bzw.  $(\bar{c}, 2k)$  und  $(2k, \bar{r})$ ,  $\bar{c} \in I_{\bar{C}}, \bar{r} \in I_{\bar{R}}$ , dominiert werden (vgl. Abbildung 3.9). Da  $\pm 2k \notin I_{\bar{C}}, I_{\bar{R}}$ , gilt entweder  $c_1 = r_1 = 2k$  oder  $c_1 = r_1 = -2k$ . Sei o. B. d. A.  $c_1 = r_1 = 2k$ .

Da  $c_1 = r_1 = 2k$ , müssen alle  $2k - 1$  Felder  $\{(0, 0), \pm(2, -2), \pm(4, -4), \dots, \pm(2k - 2, -(2k - 2))\}$  auf  $s = 0$  diagonal durch Damen auf den Differenzdiagonalen  $I'_D := \{0, \pm 4, \pm 8, \dots, \pm(4k - 4)\} \subset I_D$  dominiert werden. Es bleiben zwei weitere besetzte Differenzdiagonalen  $d_1, d_2 \in I_D$ . Wegen Proposition 2.2 gilt  $d_1 = -d_2$ .

Da  $\pm 2 \notin I_D$  oder  $\pm 6 \notin I_D$ , sind die  $2k - 3$  durch  $I'_S := \{\pm 2, \pm 6, \dots, \pm(4k - 10), -(4k - 6)\} \subset I_S$  gegebenen Summendiagonalen besetzt. Es ist zu beachten, dass  $s = 4k - 6$  nicht besetzt sein muss, falls  $\pm 2 \in I_D$ , da die zwei Felder  $(2k, 2k - 6)$  und  $(2k - 6, 2k)$  bereits durch die besetzte Zeile und Spalte  $2k$  dominiert werden. Es bleiben vier weitere besetzte Summendiagonalen  $s_1, s_2, s_3, s_4 \in I_S$ .

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2 \\
& \implies 8 \sum_{i=1}^k (2i-1)^2 + 4(2k)^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + 2d_1^2 + 2 \sum_{i=1}^{2k-2} (2i)^2 - (4k-6)^2 \\
& \iff s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + 2d_1^2 = \frac{4}{3}(-8k^3 + 60k^2 - 64k + 33). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Angenommen die beiden äußeren Orthogonalen  $2k$  sind besetzt durch eine Dame auf  $\delta = (2k, 2k)$ . Sei o. B. d. A.  $s_4 = \text{sum}(\delta) = 4k$ . Damit vereinfacht sich Gleichung (3.3) zu

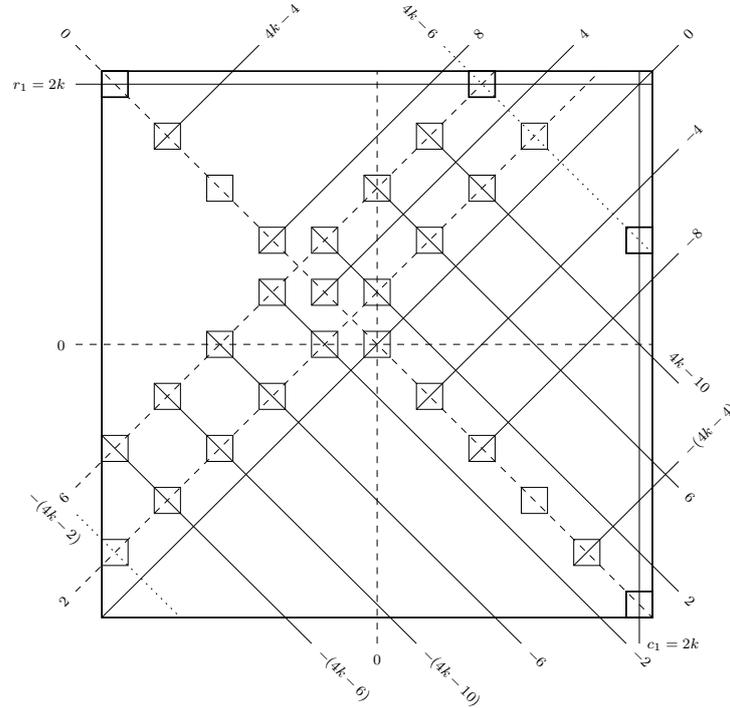


Abbildung 3.9: Konstruktionsversuch einer relaxierten 1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — Bsp.:  $k = 5$

$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2d_1^2 = \frac{4}{3}(-8k^3 + 48k^2 - 64k + 33) =: p(k)$ . Die einzige reelle Nullstelle von  $p(k)$  ist  $k_0 \approx 4,39$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, folgt für  $k \geq 5$  der Widerspruch.

Somit sind die beiden äußeren Orthogonalen  $2k$  besetzt durch zwei Damen auf  $\delta_1 = (\bar{c}, 2k)$  und  $\delta_2 = (2k, \bar{r})$  mit  $\bar{c} \in I_{\bar{C}}, \bar{r} \in I_{\bar{R}}$ . Wegen  $\bar{c} \equiv \bar{r} \equiv 1 \pmod{2}$  gilt  $\text{diff}(\delta_1), \text{diff}(\delta_2) \equiv 1 \pmod{2}$  und ferner  $\text{sum}(\delta_1) \equiv \text{sum}(\delta_2) \equiv 1 \pmod{2}$ . Da  $d \equiv 0 \pmod{2}, \forall d \in I'_D$ , sind  $\text{diff}(\delta_1)$  und  $\text{diff}(\delta_2)$  die gesuchten Diagonalen  $d_1$  und  $d_2$ . Aus  $2 \notin I_D$  folgt  $4k - 6, -(4k - 2) \in I_S$  (vgl. Abbildung 3.9). Seien  $s_1, s_2, s_3, s_4$  so angeordnet, dass  $s_3 = 4k - 6, s_4 = -(4k - 2)$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergibt  $s_1 + s_2 = 8k - 2$ . Da  $s \equiv 0 \pmod{2}, \forall s \in I'_S \cup \{4k - 6, -(4k - 2)\}$ , sind  $\text{sum}(\delta_1)$  und  $\text{sum}(\delta_2)$  die gesuchten Diagonalen  $s_1$  und  $s_2$ . Aus  $s_1, s_2 \equiv 1 \pmod{2}$  und  $s_1, s_2 \leq 4k$  folgt  $s_1 = s_2 = 4k - 1$ . Einsetzen von  $s_1 = s_2 = 4k - 1, s_3 = 4k - 6$  und  $s_4 = -(4k - 2)$  in Gleichung (3.3) ergibt  $d_1^2 = \frac{1}{3}(-16k^3 + 24k^2 - 8k + 3)$ . Diese Gleichung besitzt für  $k \geq 5$  keine reelle Lösung  $d_1$ .

$D$  kann somit für alle  $k \geq 5$  keine relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.15 gilt nicht für  $k = 4$  (vgl. Abbildung 3.10). Die Einschränkung  $k \geq 5$  in der Bedingung ist somit scharf.

Die Ergebnisse der vier Lemmata fassen wir in einem Korollar zusammen.

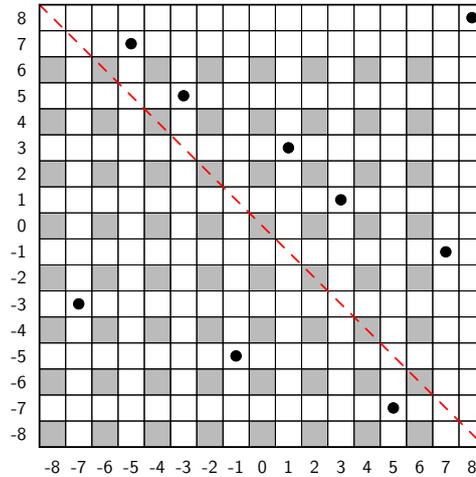


Abbildung 3.10: Relaxierte 1-Überdeckung von  $Q_{17}$  mit unbesetzter Summen-Hauptdiagonale — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

**Korollar 3.16.** Sei  $D$  eine relaxierte  $p$ -Überdeckung von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n+1}{2}$ . Falls  $n \geq 19$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von beiden Hauptdiagonalen.

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Lemma 3.12, 3.13, 3.14 und 3.15.  $\square$

Das Korollar schafft die Basis zur Definition 3.5 der Parameter  $e(D)$ ,  $f(D)$  und  $u(D)$  einer relaxierten  $p$ -Überdeckung  $D$  und ermöglicht letztlich die Herleitung analoger Bedingungen wie unter Punkt 2 in Satz 3.6. Für relaxierte  $p$ -Überdeckungen, die keine  $p$ -Überdeckungen sind, ist das Resultat jedoch vermutlich dahingehend abzuschwächen, dass sich lediglich unterschiedliche notwendige und hinreichende Bedingungen zeigen lassen.

### 3.3 0-1-Überdeckungen

Wir schreiben  $\mathcal{D}_n^{0-1}$  für die Klasse der 0-1-Überdeckungen von  $Q_n$ . Gemäß Definition 3.4 auf Seite 22 existiert für jedes  $D \in \mathcal{D}_n^{0-1}$  mit  $\#D = \frac{n+1}{2}$  genau eine Zusatzorthogonale. Aus Symmetriegründen sei dies o. B. d. A.  $\{c_1\} = I_{\hat{C}}$ , d. h. gemäß Definition 3.4 gilt dann  $p = 1$ , falls  $n \equiv 1 \pmod{4}$  und  $p = 0$ , falls  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

Aus Definition 3.4 sehen wir, dass alle geraden Felder horizontal oder vertikal dominiert werden. Bei der Analyse der besetzten Diagonalen liegt unser Augenmerk somit auf den durch die ungeraden Felder verlaufenden ungeraden Diagonalen. Wir definieren für 0-1-Überdeckungen  $D$  analoge Kennzahlen  $e(D)$ ,  $f(D)$  und  $u(D)$ , die als Referenzdiagonalen jedoch  $d^{(0)}, s^{(0)} \in \{-1, 1\}$  anstatt der geraden Hauptdiagonalen verwenden. Mit  $z := \sigma_{d^{(0)}, s^{(0)}} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$  bezeichnen wir das zugehörige Referenzfeld.

**Definition 3.17.** Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  ungerade und  $D \subseteq V(Q_n)$  eine Menge von Feldern, wobei  $D$  jeweils ein Feld auf  $d = -1$  oder  $d = 1$  sowie  $s = -1$  oder  $s = 1$  enthält.

$e = e(D) \in \mathbb{N}_0$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für ein  $d^{(0)} \in \{-1, 1\}$  und für jedes  $|i| \leq e$  ein Feld auf der Differenzdiagonale  $d^{(0)} + 2i$  enthält.

$f = f(D) \in \mathbb{N}_0$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für ein  $s^{(0)} \in \{-1, 1\}$  und für jedes  $|i| \leq f$  ein Feld auf der Summendiagonale  $s^{(0)} + 2i$  enthält.

Bezeichne  $I_{d^{(0)}}(D) = I_{d^{(0)}} \subseteq \{-1, 1\}$  bzw.  $I_{s^{(0)}}(D) = I_{s^{(0)}} \subseteq \{-1, 1\}$  die Mengen der Werte für  $d^{(0)}$  bzw.  $s^{(0)}$ , die gemäß obenstehender Definition von  $e$  bzw.  $f$  bezüglich der Maximalitätsforderung zulässig sind.

$u = u(D) \in \mathbb{N}^+$  ist die größte Zahl, so dass  $D$  für  $d^{(0)} \in I_{d^{(0)}}, s^{(0)} \in I_{s^{(0)}}$  und für jedes  $1 \leq i \leq u$  jeweils ein Feld der Differenzdiagonalen  $d^{(0)} - (2e + 4i)$  und  $d^{(0)} + 2e + 4i$  sowie der Summendiagonalen  $s^{(0)} - (2f + 4i)$  und  $s^{(0)} + 2f + 4i$  enthält.

Die vier Diagonalen mit Absolutindex 1 nennen wir *Haupt-Nebendiagonalen*. Wir unterscheiden nach  $n \equiv 3 \pmod{4}$  und  $n \equiv 1 \pmod{4}$  und zeigen jeweils, dass von kleinen Brettgrößen abgesehen jede Überdeckung  $D \in \mathcal{D}_n^{0-1}$  mit  $\#D = \frac{n+1}{2}$  alle vier Haupt-Nebendiagonalen besetzt und somit die Voraussetzung der Definition 3.17 erfüllt ist.

**Lemma 3.18.** Sei  $D$  eine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit  $\#D = 2k + 2$ . Falls  $k \geq 2$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von allen vier Haupt-Nebendiagonalen.

*Beweis.* Angenommen  $D$  ist eine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$ ,  $\#D = 2k + 2$ ,  $k \geq 2$ , und  $D$  besetzt nicht alle vier Haupt-Nebendiagonalen. Die Zwangsspalten sind  $I_{\bar{C}} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2k\} \subseteq I_C$  und die besetzten Zeilen  $I_R = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k + 1)\}$ . Da  $\#I_{\bar{C}} = \#D - 1$ , gibt es eine Zusatzspalte  $\{c_1\} = I_{\bar{C}}$ .

Sei o. B. d. A.  $d = 1$  unbesetzt. Die Fälle  $d = -1, s = -1$  oder  $s = 1$  unbesetzt sind symmetrisch und gehen aus der Spiegelung von  $D$  an der Differenz-Hauptdiagonalen, an der Zeile  $r = 0$  oder an der Spalte  $c = 0$ , hervor. Wir unterscheiden die Fälle  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$  und  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Angenommen  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ . Auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d = 1$  liegen  $2k + 1$  ungerade-gerade Felder (vgl. Abbildung 3.11). Da  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ , müssen alle diese Felder durch Summendiagonalen dominiert werden, d. h.  $I'_S := \{-(4k + 1), -(4k - 3), \dots, 4k - 5, 4k - 1\} \subseteq I_S$ . Wegen  $\#I'_S = \#D - 1$  gibt es eine weitere besetzte Summendiagonale  $s_1 \in I_S$ .

Die Diagonale  $s = -(4k + 1) \in I'_S$  enthält nur zwei Felder, von denen das eine auf der gemäß Annahme unbesetzten Haupt-Nebendiagonale liegt, so dass  $\delta := (-2k, -(2k + 1)) \in D$  gilt. Dadurch ist bereits die Zeile  $r = -(2k + 1)$  besetzt und es gilt zudem  $(2k, -(2k + 1)) \notin D$ . Das Feld  $(2k + 1, -2k)$  liegt in unbesetzten Orthogonalen und kann somit nur durch eine Dame auf der Summendiagonale  $s_1 = 1 \in I_S$  dominiert werden, da beide Felder der zugehörigen zweielementigen Differenzdiagonale  $d = -(4k + 1)$  ebenfalls in unbesetzten Orthogonalen liegen. Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergibt  $c_1 = -2k$ .

Da  $s = -3 \notin I_S$ , gilt  $I'_D := \{-(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 5, 4k - 1\} \subseteq I_D$ . Da  $\#I'_D = \#D - 2$  gibt es zwei weitere besetzte Differenzdiagonalen  $d_1, d_2 \in I_D$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_D$  in Proposition 2.2 ergibt  $d_1 = -d_2$ .

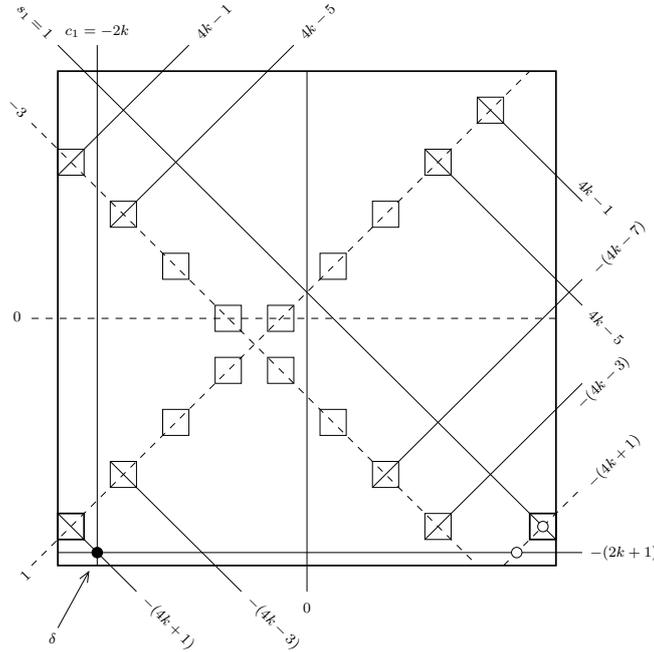


Abbildung 3.11: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$  — Bsp.:  $k = 4$

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 &= \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2 \\
 \implies 4 \sum_{i=1}^{2k+1} i^2 + 2(-2k)^2 &= 2d_1^2 + 2 \sum_{i=1}^{2k} (4i - 4k - 1)^2 + (-(4k+1))^2 + 1^2 \\
 \iff d_1^2 &= \frac{1}{3}(-16k^3 + 24k^2 + 16k + 3).
 \end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle von  $p(k) := \frac{1}{3}(-16k^3 + 24k^2 + 16k + 3)$  ist  $k_0 \approx 2,04$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, ist  $k = 2$  die einzige zu untersuchende Stelle für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq 2$ . Aus  $d_1^2 = p(2) = 1$  und  $d_1 = -d_2$  folgt dann schließlich, dass die Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$  besetzt ist, im Widerspruch zur Annahme.

Wir betrachten nun den Fall  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ . Die Struktur von  $I_C$  und  $I_R$  impliziert, dass  $D$  genau  $2k + 1$  ungerade und eine gerade Dame enthält. Somit enthalten ebenso  $I_D$  und  $I_S$  jeweils  $2k + 1$  ungerade und ein gerades Element. Wir unterscheiden die drei Fälle  $c_1 = 2k + 1$ ,  $c_1 = -(2k + 1)$  und  $|c_1| \neq 2k + 1$ . Es ist zu beachten, dass die Fälle  $c_1 = 2k + 1$  und  $c_1 = -(2k + 1)$  separat betrachtet werden müssen, da wir die Symmetrie bereits bei der Annahme ausgenutzt haben, dass von den Haupt-Nebendiagonalen  $d = 1$  unbesetzt sei.

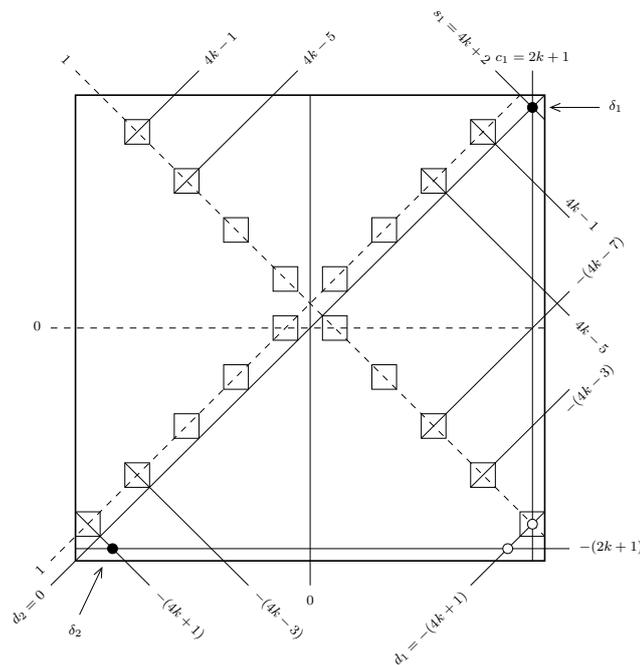


Abbildung 3.12: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 = 2k + 1$  — Bsp.:  $k = 4$

Sei  $c_1 = 2k + 1$ . Da keines der ungerade-geraden Felder auf der unbesetzten Haupt-Nebendiagonalen  $d = 1$  in der Spalte  $c_1 = 2k + 1$  liegt, ergeben sich die Summendiagonalen  $I_S = \{s_1, -(4k + 1), -(4k - 3), \dots, 4k - 5, 4k - 1\}$  wie bereits oben beschrieben (vgl. Abbildung 3.12). Die Summendiagonale  $s_1 = 4k + 2$  erhalten wir durch Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2.

Da  $s = 1 \notin I_S$ , gilt  $I'_D := \{-(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 5, 4k - 1\} \subseteq I_D$ . Wegen  $\#I'_D = \#D - 2$  gibt es zwei weitere besetzte Differenzdiagonalen  $d_1, d_2 \in I_D$ . Die besetzte Summendiagonale  $s_1 = 4k + 2$  besteht nur aus dem Feld  $\delta_1 := (2k + 1, 2k + 1) \in D$ , so dass entweder  $d_1 = 0$  oder  $d_2 = 0$ . Sei o. B. d. A.  $d_2 = 0$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_D$  in Proposition 2.2 ergibt dann  $d_1 = -(4k + 1)$ .

Nun lässt sich folgendermaßen ein Widerspruch produzieren: Wie oben festgestellt, gilt  $\delta_1 = (2k + 1, 2k + 1) \in D$ . Die Diagonale  $s = -(4k + 1) \in I_S$  enthält nur zwei Felder, von denen das eine auf der gemäß Annahme unbesetzten Haupt-Nebendiagonale liegt, so dass  $\delta_2 := (-2k, -(2k + 1)) \in D$ . Die Diagonale  $d = -(4k + 1) \in I_D$  kann somit nicht besetzt sein, ohne entweder die Spalte  $c_1 = 2k + 1$  oder die Zeile  $r = -(2k + 1)$  doppelt zu besetzen, im Widerspruch zu  $I_C$  oder  $I_R$ .

Sei nun  $c_1 = -(2k + 1)$ . Die  $2k$  ungeraden Summendiagonalen  $I'_S := \{-(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 5, 4k - 1\} \subseteq I_S$  lassen sich durch eine analoge Argumentation wie oben bestimmen. Es bleibt genau eine weitere besetzte ungerade Summendiagonale. Wir unterscheiden danach, ob  $s = 1 \notin I'_S$  eine besetzte Summendiagonale ist oder nicht.

Angenommen  $s = 1 \in I_S$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergibt die letzte besetzte Summendiagonale  $s_1 = -(4k + 2) \in I_S$ . Folglich ist  $\delta := (-(2k + 1), -(2k + 1)) \in D$  und  $d = 0 \in I_D$ . Die Diagonalen  $s = -3 \notin I_S$  und  $s = 5 \notin I_S$  implizieren  $2k - 1$  besetzte Differenzdiagonalen. Zusammen mit  $d = 0 \in I_D$  ergibt dies  $I_D = \{d_1, d_2, 0, -(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 9, 4k - 5\}$ . Es ist zu beachten, dass  $d_1$  und  $d_2$  beide ungerade sind. Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_D$  in Proposition 2.2 ergibt  $d_2 = 4k - d_1$ . Damit  $d_2$  auf dem Brett liegt, gilt insbesondere  $d_2 \leq 4k + 1 \implies d_1 \geq -1$ .

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2 \\
\implies & 4 \sum_{i=1}^{2k+1} i^2 + 2(-(2k+1))^2 = d_1^2 + (4k - d_1)^2 + 0^2 + 2 \sum_{i=1}^{2k-1} (4i - 4k - 1)^2 \\
& \quad + (-(4k+2))^2 + (-(4k-1))^2 + 1^2 \\
\iff & d_1^2 - 4kd_1 + \frac{1}{3}(16k^3 - 24k^2 - 4k - 3) = 0 \\
\implies & d_{1/2} = 2k \pm \sqrt{-\frac{1}{3}(16k^3 - 36k^2 - 4k - 3)}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Die einzige reelle Nullstelle der Diskriminante  $p(k) := -\frac{1}{3}(16k^3 - 36k^2 - 4k - 3)$  in Gleichung (3.4) ist  $k_0 \approx 2,39$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, ist  $k = 2$  die einzige zu untersuchende Stelle für  $k \in \mathbb{N}$  und  $k \geq 2$ . Betrachtung von  $p(2) = 9$  führt zu den symmetrischen Belegungen  $d_1 = 7, d_2 = 1$  und  $d_1 = 1, d_2 = 7$  und zeigt mit  $1 \in I_D$  den Widerspruch zur Annahme.

Somit ist  $s = 1 \notin I_S$ . Es gilt  $I'_D := \{-(4k+1), -(4k-3), \dots, 4k-5, 4k-1\} \subseteq I_D$  (vgl. Abbildung 3.13). Wegen  $\#I'_D = \#D - 1$  gibt es eine weitere besetzte Differenzdiagonale  $d_1 \in I_D$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_D$  in Proposition 2.2 ergibt  $d_1 = 4k + 2$ . Folglich ist  $\delta_1 := (-(2k+1), 2k+1) \in D$  und  $s = 0 \in I_S$ . Die letzte besetzte Summendiagonale  $s_1$  ergibt sich nach Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 als  $s_1 = -(4k+1)$ .

Somit sind alle besetzten Linien  $I_C, I_R, I_D$  und  $I_S$  spezifiziert. Insbesondere gilt  $d = -3 \notin I_D, d = 1 \notin I_D$  und  $s = 1 \notin I_S$ . Da  $d = -(4k+1) \in I_D$  und  $s = 1 \notin I_S$ , steht eine Dame auf  $\delta_2 := (2k, -(2k+1)) \in D$ . Wegen  $d = -3 \notin I_D, d = 1 \notin I_D$  und  $\delta_1, \delta_2 \in D$  kann kein Feld auf der Diagonale  $s = 4k - 1$  besetzt sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $s = 4k - 1 \in I_S$ .

Es gilt somit  $|c_1| \neq 2k+1$ . Von den  $2k+1$  ungerade-geraden Feldern auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d = 1$  wird genau eines von der Dame in der Spalte  $c_1$  dominiert, d. h. zumindest  $2k$  der  $2k+1$  Summendiagonalen durch diese Felder sind besetzt. Seien  $I'_S$  diese besetzten Summendiagonalen.

Das Feld  $(-(2k+1), -2k)$  kann lediglich über eine Dame auf  $\delta_1 := (-2k, -(2k+1))$  dominiert werden, da es in einer unbesetzten Spalte, Zeile und Differenzdiagonale liegt (vgl. Abbildung 3.14). Die Zeile  $-(2k+1)$  ist nur einfach besetzt, daher folgt durch eine ähnliche Argumentation, dass das Feld  $(2k+1, -2k)$  nicht durch die Differenzdiagonale  $d = -(4k+1)$ , sondern durch die Summendiagonale  $s = 1 \in I_S$  dominiert wird. Es ist

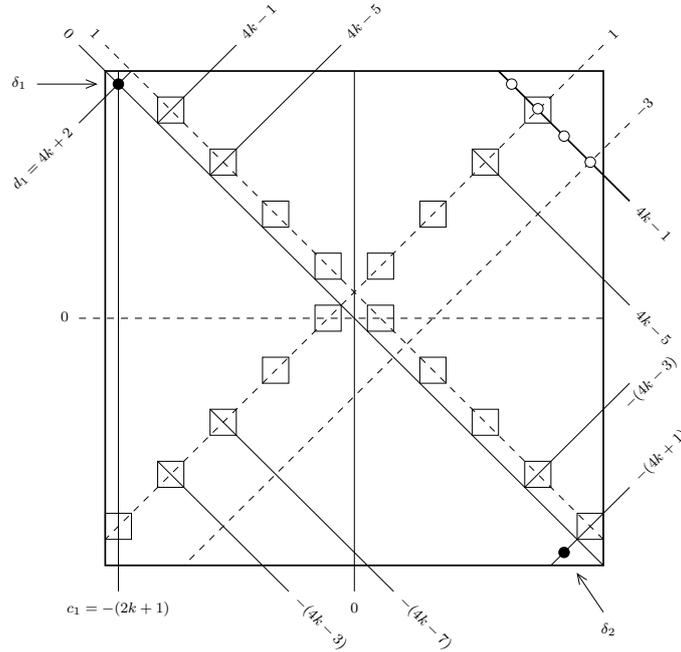


Abbildung 3.13: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 = -(2k + 1)$ ,  $s = 1 \notin I_S$  — Bsp.:  $k = 4$

zu beachten, dass  $s = 1$  die unbesetzte Diagonale  $d = 1$  nicht in einem ungerade-geraden Feld schneidet, d. h.  $s = 1 \notin I'_S$ . Die ebenfalls ungeraden Summendiagonalen  $s = -3 \notin I'_S$  und  $s = 5 \notin I'_S$  können wegen  $\#D = 2k + 2$  somit nicht besetzt sein. Folglich ist das Feld  $(-(2k + 1), 2k - 2)$  über die besetzte Differenzdiagonale  $d = 4k - 1$  dominiert, wofür nur eine Dame auf  $\delta_2 := (-(2k - 2), 2k + 1)$  in Frage kommt. Die anderen beiden Felder  $(-(2k - 1), 2k)$  und  $(-2k, 2k - 1)$  müssen unbesetzt sein, da die Zeile  $2k \notin I_R$  unbesetzt ist und weil die Spalte  $-2k$  schon durch  $\delta_1$  besetzt ist und der Fall  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$  bereits oben ausgeschlossen wurde. Da keine Zeile mehrfach besetzt ist, muss das Feld  $(2k - 2, 2k + 1)$  unbesetzt sein. Zur Dominierung des Feldes  $(2k - 1, 2k)$  ist die Spalte  $2k - 1$  oder das Feld  $(2k, 2k - 1)$  besetzt.

Angenommen die Spalte  $2k - 1$  wäre besetzt (und somit die gesuchte Spalte  $c_1$ ), so wäre  $I_S = \{s_1, 1, -(4k + 1), -(4k - 3), \dots, 4k - 5\}$  mit Ausnahme der geraden Diagonale  $s_1$  vollständig bekannt. Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergäbe  $s_1 = 8k - 2$  und  $s_1$  läge außerhalb des Bretts.

Folglich muss das Feld  $\delta_3 := (2k, 2k - 1)$  besetzt sein. Die beiden unbesetzten Summendiagonalen  $s = -3$  und  $s = 5$  sowie  $\delta_1, \delta_2$  und  $\delta_3$  implizieren  $I'_D := \{-(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 5, 4k - 1, -1\} \subseteq I_D$ , d. h.  $\#I'_D = 2k + 1$ . Es ist zu beachten, dass  $d = -1$  wegen  $\delta_1$  und  $\delta_3$  zumindest doppelt besetzt ist. Mit  $\#I'_D = 2k + 1$  sind alle ungeraden Differenzdiagonalen festgelegt, so dass  $d = 5 \notin I'_D$  somit unbesetzt ist.

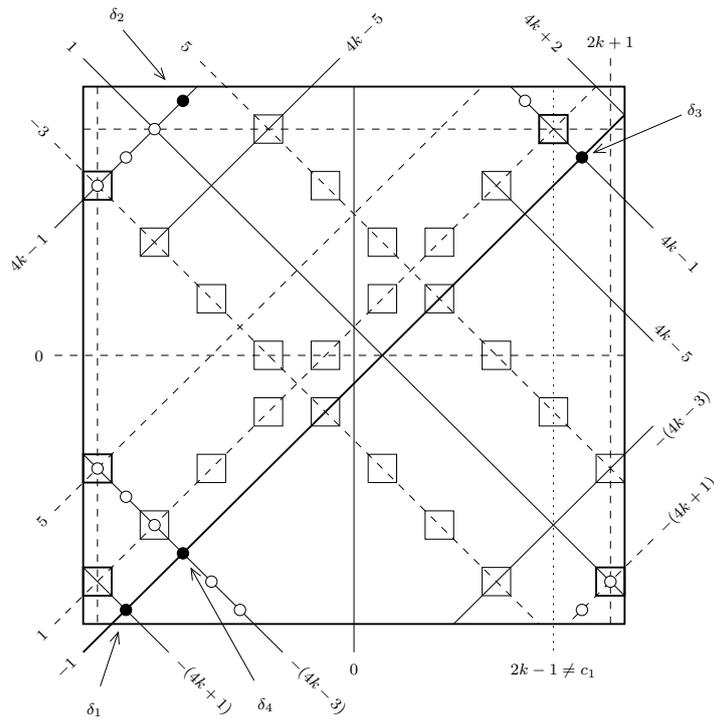


Abbildung 3.14: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $|c_1| \neq 2k + 1$  — Bsp.:  $k = 4$

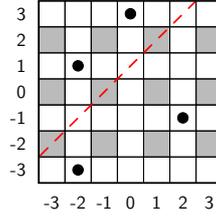


Abbildung 3.15: 0-1-Überdeckung von  $Q_7$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$   
 — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

Das Feld  $(-(2k+1), -(2k-4))$  auf  $d = 5$  muss durch eine Dame auf der Diagonale  $s = -(4k-3)$  dominiert werden. Von deren sechs Feldern muss  $\delta_4 := (-(2k-2), -(2k-1))$  besetzt sein, da eine Dame auf einem anderen Feld zusammen mit  $\delta_1$  im Widerspruch zu  $I_C, I_R$  stünde. Die Dame  $\delta_4$  wäre allerdings die dritte Dame auf der Differenzdiagonale  $d = -1$ . Damit wären dann  $\#D = 2k + 2$  ungerade Differenzdiagonalen besetzt, was den Widerspruch zeigt.

$D$  kann somit für alle  $k \geq 2$  keine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+3}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.18 gilt nicht für  $k = 1$  (vgl. Abbildung 3.15). Die Einschränkung  $k \geq 2$  in der Bedingung ist somit scharf.

**Lemma 3.19.** Sei  $D$  eine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit  $\#D = 2k + 1$ . Falls  $k \geq 2$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von allen vier Haupt-Nebendiagonalen.

*Beweis.* Angenommen  $D$  ist eine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$ ,  $\#D = 2k + 1$ ,  $k \geq 2$ , und  $D$  besetzt nicht alle vier Haupt-Nebendiagonalen. Die Zwangsspalten sind  $I_{\bar{C}} := \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k-1)\} \subseteq I_C$  und die besetzten Zeilen  $I_R = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2k\}$ . Da  $\#I_{\bar{C}} = \#D - 1$ , gibt es eine Zusatzspalte  $\{c_1\} = I_{\bar{C}}$ .

Sei o. B. d. A.  $d = 1$  unbesetzt. Die Fälle  $d = -1, s = -1$  oder  $s = 1$  unbesetzt sind symmetrisch und gehen aus der Spiegelung von  $D$  an der Differenz-Hauptdiagonalen, an der Zeile  $r = 0$  oder an der Spalte  $c = 0$  hervor. Wir unterscheiden die Fälle  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$  und  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ .

Angenommen  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ . Auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d = 1$  liegen  $2k$  gerade-ungerade Felder (vgl. Abbildung 3.16). Da  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$ , müssen alle diese Felder durch Summendiagonalen dominiert werden, d. h.  $I'_S := \{-(4k-1), -(4k-5), \dots, 4k-7, 4k-3\} \subseteq I_S$ . Wegen  $\#I'_S = \#D - 1$  gibt es eine weitere besetzte Summendiagonale  $s_1 \in I_S$ .

Die Diagonale  $s = -(4k-1) \in I'_S$  enthält nur zwei Felder, wovon eins auf der unbesetzten Diagonale  $d = 1$  liegt. Somit gilt  $\delta_1 := (-(2k-1), -2k) \in D$ . Die beiden Felder  $(2k-2, -(2k-1))$  und  $(2k, -(2k-3))$  liegen jeweils auf unbesetzten Spalten und Zeilen und jeweils auf keiner Summendiagonale aus  $I'_S$ . Somit ist  $d = -(4k-3) \in I_D$  besetzt. Da die Zeile  $-2k$  bereits durch  $\delta_1$  besetzt ist, muss  $\delta_2 := (2k-1, -(2k-2)) \in D$ .

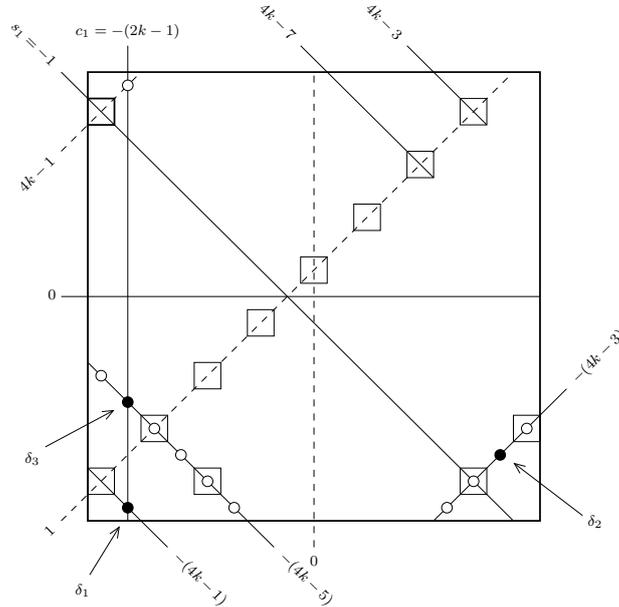


Abbildung 3.16: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$  — Bsp.:  $k = 4$

Bei Betrachtung der Summendiagonale  $s = -(4k - 5)$  lässt sich durch analoge Argumentation  $\delta_3 := (-(2k - 1), -(2k - 4)) \in D$  schließen. Es ist zu beachten, dass damit  $c_1 = -(2k - 1)$  die doppelt besetzte Spalte ist. Folglich kann in derselben Spalte nicht zudem noch  $(-(2k - 1), 2k)$  besetzt sein, wodurch das Feld  $(-2k, 2k - 1)$  durch eine Dame auf der Summendiagonale  $s_1 = -1 \notin I'_S$  dominiert wird.

Damit sind  $I_C, I_R$  und  $I_S$  vollständig spezifiziert. Einsetzen dieser Mengen in Proposition 2.2 führt jedoch zum Widerspruch.

Somit ist  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ . Die Struktur von  $I_C$  und  $I_R$  impliziert, dass  $D$  genau  $2k$  ungerade und eine gerade Dame enthält. Somit enthalten ebenso  $I_D$  und  $I_S$  jeweils  $2k$  ungerade und ein gerades Element. Wir unterscheiden die drei Fälle  $c_1 = 2k, c_1 = -2k$  und  $|c_1| \neq 2k$ . Es ist zu beachten, dass die Fälle  $c_1 = 2k$  und  $c_1 = -2k$  separat betrachtet werden müssen, da wir die Symmetrie bereits bei der Annahme ausgenutzt haben, dass von den Haupt-Nebendiagonalen die Diagonale  $d = 1$  unbesetzt sei.

Sei  $c_1 = 2k$ . Die Summendiagonalen  $I_S = \{s_1, -(4k - 1), -(4k - 5), \dots, 4k - 7, 4k - 3\}$  lassen sich durch eine analoge Argumentation wie oben bestimmen (vgl. Abbildung 3.17). Die Summendiagonale  $s_1 = 4k$  erhalten wir durch Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2.

Da das Feld  $(-2k, 2k - 1)$  auf einer unbesetzten Zeile und Spalte liegt und  $s = -1 \notin I_S$ , muss die Differenzdiagonale  $d = 4k - 1 \in I_D$  besetzt sein. Dies ist nur möglich mit  $\delta_1 := (-(2k - 1), 2k) \in D$ . Des Weiteren impliziert  $s_1 = 4k \in I_S$  eine Dame auf  $\delta_2 :=$

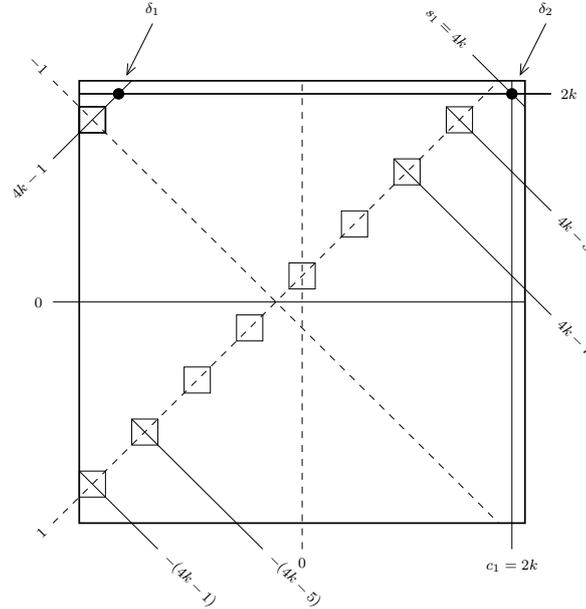


Abbildung 3.17: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 = 2k$  — Bsp.:  $k = 4$

$(2k, 2k) \in D$ . Die Damen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  stehen jedoch im Widerspruch dazu, dass die Zeile  $r = 2k$  nur einfach besetzt ist.

Sei nun  $c_1 = -2k$ . Auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d = 1$  liegen  $2k - 1$  gerade-ungerade Felder, die nicht vertikal oder horizontal dominiert werden und folglich auf einer besetzten Summendiagonale liegen (vgl. Abbildung 3.18). So erhalten wir  $I'_S := \{-(4k - 5), -(4k - 9), \dots, 4k - 7, 4k - 3\} \subset I_S$ .

Sei  $\bar{r} \in I_R$  die Zeile der geraden Dame auf  $(-2k, \bar{r})$  und  $s_1$  die noch unbekannte besetzte ungerade Summendiagonale. Die gerade Dame besetzt die Summendiagonale  $\bar{r} + (-2k)$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergibt  $s_1 = -2k + 1 - \bar{r}$ . Aus der Beschränkung  $\bar{r} \geq -2k$  folgt dann  $s_1 \leq 1$  und somit  $s = 3 \notin I_S$ , da  $s = 3 \notin I'_S$ .

Die unbesetzte Summendiagonale  $s = 3 \notin I_S$  enthält  $2k - 1$  gerade-ungerade Felder, die nicht vertikal oder horizontal dominiert werden und somit  $I'_D := \{-(4k - 3), -(4k - 7), \dots, 4k - 9, 4k - 5\} \subset I_D$  implizieren. Neben der Differenzdiagonale  $\bar{r} + 2k$  der geraden Dame bleibt eine weitere ungerade Diagonale  $d_1 \in I_D$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_D$  in Proposition 2.2 ergibt  $d_1 = 2k - \bar{r} - 1$ .

Einsetzen der besetzten Linien in das Parallelogrammgesetz ergibt:

$$2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2$$

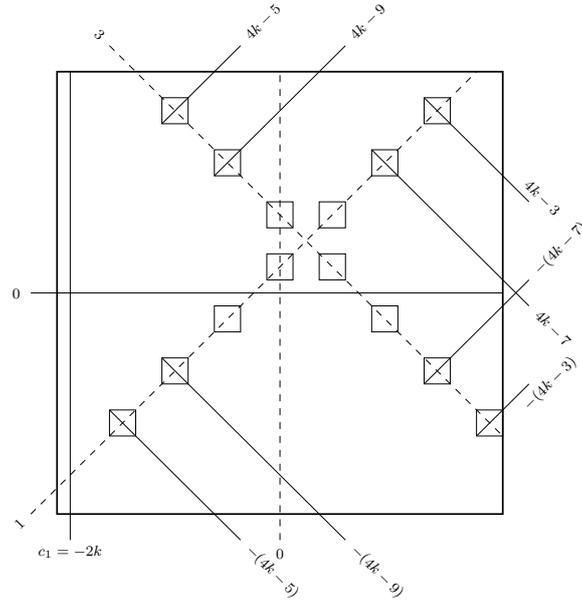


Abbildung 3.18: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 = -2k$  — Bsp.:  $k = 4$

$$\begin{aligned}
&\implies 4 \sum_{i=1}^{2k} i^2 + 2(-2k)^2 = (2k - \bar{r} - 1)^2 + (\bar{r} + 2k)^2 + (-2k + 1 - \bar{r})^2 + (\bar{r} - 2k)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{4k-2} (2i - 4k + 1)^2 \\
&\iff d_1^2 + d_1(2 - 4k) + \frac{1}{3}(8k^3 - 12k^2 - 8k + 3) = 0 \\
&\implies d_{1_{1/2}} = 2k - 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}(8k^3 - 24k^2 + 4k)}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Die größte reelle Nullstelle der Diskriminante  $p(k) := -\frac{1}{3}(8k^3 - 24k^2 + 4k)$  in Gleichung (3.5) ist  $k_0 \approx 2,82$ . Da  $p(k)$  für  $k > k_0$  monoton fallend ist, ist  $k = 2$  die einzige zu untersuchende Stelle für  $k \in \mathbb{N}$  und  $k \geq 2$ . Betrachtung von  $p(2) = 8$  führt jedoch zu nicht-ganzzahligen Lösungen für  $d_1$  und zeigt daher den Widerspruch.

Es gilt somit  $|c_1| \neq 2k$ . Von den  $2k$  gerade-ungeraden Feldern auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d = 1$  wird genau eines von der Dame in der Spalte  $c_1$  dominiert, d. h. zumindest  $2k - 1$  der  $2k$  Summendiagonalen durch diese Felder sind besetzt. Sei  $I'_S$  die Menge der Indizes der besetzten Summendiagonalen durch diese Felder.

Das Feld  $(-2k, -(2k - 1))$  liegt auf einer unbesetzten Spalte, Zeile und Differenzdiagonale. Folglich muss es durch die Dame  $\delta_1 := (-(2k-1), -2k) \in D$  dominiert werden (vgl. Abbildung 3.19). Da die Spalte  $-(2k - 1)$  nur einfach besetzt ist, gilt  $(-(2k - 1), 2k) \notin D$  und das Feld  $(-2k, 2k - 1)$  wird über die Summendiagonale  $s = -1 \notin I'_S$  besetzt. Somit

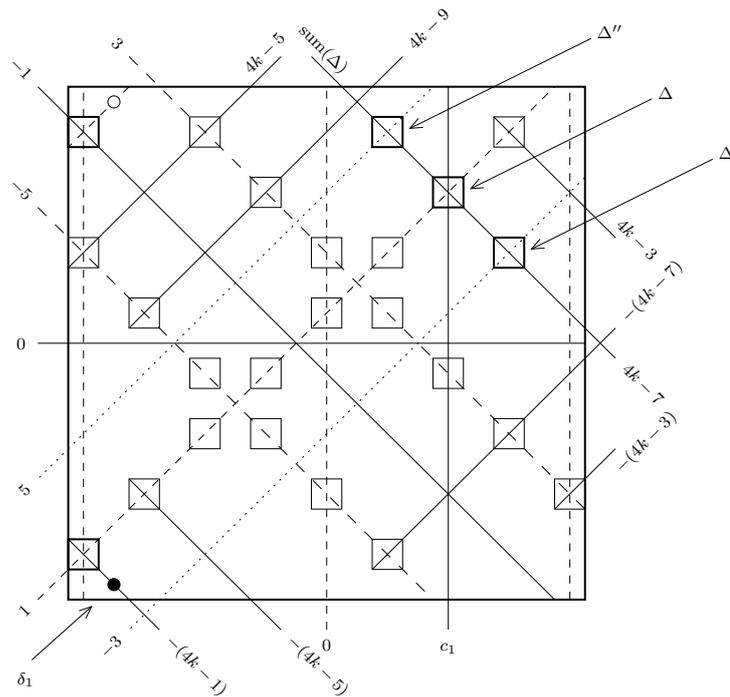


Abbildung 3.19: Konstruktionsversuch einer 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$ ; Fall  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $|c_1| \neq 2k$  — Bsp.:  $k = 4$ ,  $c_1 = 2k - 4$

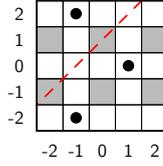


Abbildung 3.20: 0-1-Überdeckung von  $Q_5$  mit unbesetzter Haupt-Nebendiagonale  $d = 1$   
 — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

sind neben  $s = -1$  und  $I'_S$  keine weiteren ungeraden Summendiagonalen besetzt und  $s = -5 \notin I'_S$  und  $s = 3 \notin I'_S$  sind beide unbesetzt.

Die unbesetzten Linien  $s = -5 \notin I_S, s = 3 \notin I_S, c = -2k \notin I_C, c = 2k \notin I_C$  implizieren  $I'_D := \{-(4k-3), -(4k-7), \dots, 4k-9, 4k-5\} \subset I_D, \#I'_D = 2k-1$ . Da alle Diagonalen in  $I'_D$  ungerade sind, ist zumindest eine der beiden ungeraden Differenzdiagonalen  $d = -3 \notin I_D$  oder  $d = 5 \notin I_D$  unbesetzt.

Hieraus folgt, dass die  $2k-2$  Summendiagonalen  $I''_S := \{-(4k-5), -(4k-9), \dots, 4k-11, 4k-7\} \subset I_S$  alle besetzt sind. Wären nicht alle diese Diagonalen besetzt, so gäbe es zumindest eine unbesetzte Diagonale  $\text{sum}(\Delta) \in I''_S$  und das Schnittfeld  $\Delta$  von  $\text{sum}(\Delta)$  und  $d = 1$  müsste durch die besetzte Spalte  $c_1$  dominiert werden. Weiter existierten zwei Schnittfelder  $\Delta'$  und  $\Delta''$  von  $\text{sum}(\Delta)$  mit  $d = -3$  bzw.  $d = 5$ , von denen zumindest eines nicht dominiert wäre.

Wie oben gezeigt, gilt  $\delta_1 \in D$ , d. h. die Summendiagonale  $s = -(4k-1) \notin I''_S$  ist besetzt. Ebenso wurde oben gezeigt, dass  $s = -1 \notin I''_S$  besetzt ist. Sei  $\bar{r} \in I_R$  die Zeile der geraden Dame auf  $(c_1, \bar{r})$ . Zusammengefasst gilt dann  $I_S = \{\bar{r} + c_1, -1, -(4k-1)\} \dot{\cup} I''_S = \{\bar{r} + c_1, -1, -(4k-1), -(4k-5), \dots, 4k-7\}$ . Einsetzen von  $I_C, I_R$  und  $I_S$  in Proposition 2.2 ergibt  $\bar{r} = 6k-2$ . Für  $k \geq 2$  liegt diese Zeile jedoch außerhalb des Bretts, was den Widerspruch zeigt.

$D$  kann somit für alle  $k \geq 2$  keine 0-1-Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  sein.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.19 gilt nicht für  $k = 1$  (vgl. Abbildung 3.20). Die Einschränkung  $k \geq 2$  in der Bedingung ist somit scharf.

Die Ergebnisse der beiden Lemmata fassen wir in einem Korollar zusammen.

**Korollar 3.20.** Sei  $D$  eine 0-1-Überdeckung von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n+1}{2}$ . Falls  $n \geq 9$ , dann enthält  $D$  jeweils ein Feld von allen vier Haupt-Nebendiagonalen.

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Lemma 3.18 und 3.19.  $\square$

Das Korollar schafft die Basis zur Definition 3.17 der Parameter  $e(D), f(D)$  und  $u(D)$  einer 0-1-Überdeckung  $D$  und ermöglicht letztlich die Herleitung analoger Bedingungen wie unter Punkt 2 in Satz 3.6. Das Resultat ist jedoch vermutlich dahingehend abzuschwächen, dass sich lediglich unterschiedliche notwendige und hinreichende Bedingungen zeigen lassen.

### 3.4 Orthodoxe Überdeckungen für $n \equiv 0 \pmod{2}$

Im Vorgriff auf die Ergebnisse aus Kapitel 4, in denen unter gewissen hinreichenden Bedingungen die Inexistenz nicht-orthodoxer Überdeckungen der Größe  $\frac{n}{2}$  gezeigt wird, bekommen die Untersuchungen zu orthodoxen Überdeckungen der Größe  $\frac{n}{2}$  ein besonderes Gewicht. Da jede orthodoxe Überdeckung  $D \in \mathcal{D}_n$  wegen  $\#D = \frac{n}{2}$  jeweils genau eine Zeile und Spalte am Rand von  $Q_n$  unbesetzt lässt, ist  $D$  insbesondere eine orthodoxe Überdeckung des Teilgraphen  $Q_{n-1} \subset Q_n$ , den wir durch Entfernen dieser Zeile und Spalte erhalten. In diesem Abschnitt kehren wir die Konstruktionsrichtung um und untersuchen, unter welchen Bedingungen eine orthodoxe Überdeckung von  $Q_{n-1}$  ebenso den Graph  $Q_n$  dominiert.

Da orthodoxe Überdeckungen von  $Q_{n-1}$  als Ausgangspunkt im Fokus unserer Untersuchung stehen, indizieren wir die Orthogonalen zweckmäßigerweise wieder derart, dass das Feld  $(0,0)$  das mittlere Feld des betrachteten Untergraphen  $Q_{n-1}$  ist und mit  $\varphi((0,0)) = (0,0)$  die Indizierung im Zielgraph  $Q_n$  beibehalten wird. Dabei ist  $\varphi$  eine Einbettung von  $Q_{n-1}$  in  $Q_n$  als Teilgraph. Verkürzend schreiben wir zudem  $\varphi(D) := \bigcup_{\delta \in D} \varphi(\delta)$  für die Einbettung einer Knotenmenge  $D \subseteq V(Q_{n-1})$ .

ÖSTERGÅRD und WEAKLEY [OW01] zeigen, dass eine Überdeckung  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  unter gewissen hinreichenden Bedingungen an die Zusatzdiagonalen Informationen zu den Dominanzzahlen größerer Bretter liefert. Das für unsere Betrachtung relevante Ergebnis ist in der folgenden Proposition enthalten.

**Proposition 3.21** ([OW01]). *Sei  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  und  $L = \{\pm(2f+2), \pm(4k-2f-4)\}$ . Falls  $I_{\tilde{S}} \cap L$  zwei Elemente mit demselben Vorzeichen enthält, gilt  $\gamma(Q_{4k+2}) = 2k+1$ . Falls  $D$  eine unabhängige Menge ist, gilt  $i(Q_{4k+2}) = 2k+1$ .*

Die Beweisidee gleicht der oben Dargestellten: Ist die Bedingung der Proposition für eine Überdeckung  $D$  erfüllt, so lässt sich das Brett  $Q_{4k+1}$  durch Anhängen einer Spalte und Zeile zu  $Q_{4k+2}$  derart vergrößern, dass  $D$  ebenso das größere Brett dominiert.

Zur Verschärfung der unteren Schranke für  $\gamma(Q_n)$  benötigen wir eine notwendige Bedingung, unter der die Aussage  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2}$  gilt. Im Vorgriff auf die Ergebnisse aus Kapitel 4 dürfen wir die Aussage sogar dahingehend abschwächen, dass die dominierende Menge von  $Q_n$  der Größe  $\frac{n}{2}$  eine orthodoxe Überdeckung ist. Wir unterscheiden die Fälle  $n \equiv 2 \pmod{4}$  und  $n \equiv 0 \pmod{4}$  in den beiden folgenden Propositionen.

**Proposition 3.22.** *Sei  $D' \in \mathcal{D}_{4k+2}$ ,  $D \subseteq V(Q_{4k+1})$  und  $\varphi$  eine Einbettung von  $Q_{4k+1}$  in  $Q_{4k+2}$  als Teilgraph mit  $\varphi(D) = D'$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , gilt  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$ . Sei o. B. d. A.  $e(D) \geq f(D)$ , dann enthält  $I_{\tilde{S}}(D) \cap \{\pm(2f(D)+2), \pm(4k-2f(D)-4)\}$  zwei Elemente mit demselben Vorzeichen.*

*Beweis.* Sei  $D' \in \mathcal{D}_{4k+2}$ ,  $D \subseteq V(Q_{4k+1})$  und  $\varphi$  eine Einbettung von  $Q_{4k+1}$  in  $Q_{4k+2}$  als Teilgraph mit  $\varphi(D) = D'$ . Es existieren – abgesehen von den acht Symmetrien der Diedergruppe  $D_4$  – vier verschiedene Einbettungen von  $Q_{4k+1}$  in  $Q_{4k+2}$  als Teilgraph, je nachdem, welche der äußeren beiden Spalten und Zeilen von  $Q_{4k+2}$  nicht in der Bildmenge von  $\varphi$  liegen. Da  $D'$  orthodoxe Überdeckung ist mit  $\varphi(D) = D'$ , schließen wir, dass  $D$  eine

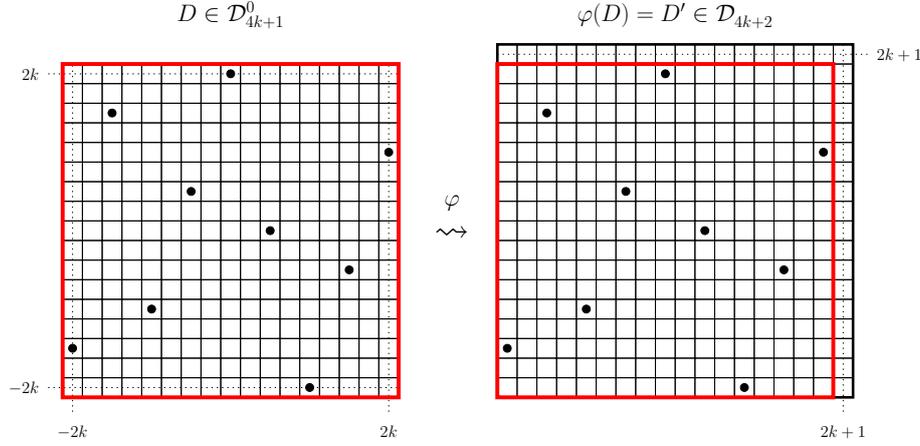


Abbildung 3.21: Das Urbild der Einbettung  $\varphi(D) = D' \in \mathcal{D}_{4k+2}$  ist eine nicht-randfreie  $p$ -Überdeckung  $D \in \mathcal{D}_{4k+1}^0$  — Bsp.:  $k = 4$

nicht-randfreie  $p$ -Überdeckung von  $Q_{4k+1}$  ist, somit gilt  $D \in \mathcal{D}_{4k+1}^0$  (vgl. Abbildung 3.21). Proposition 3.9 folgend unterscheiden wir daher  $D \in {}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0$  und  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$ . Da die Zwangslinien aller Überdeckungen in  ${}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0 \cup {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  symmetrisch zu einer Hauptdiagonale sind, dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass  $e(D) \geq f(D)$  gilt und die Spalte  $2k + 1$  auf dem Brett von  $Q_{4k+2}$  liegt und unbesetzt ist.

Angenommen  $D \in {}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0$ . Für  $k \geq 3$  gilt  $u = k - e - 1$ , es gibt keine Zusatzorthogonalen  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset$  und für die Zusatzdiagonalen gilt  $I_{\hat{D}} = \{d_1, d_2\}, I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2\}$  mit  $d_1 = -d_2, s_1 = -s_2$  (siehe Eigenschaften von  ${}^0\mathcal{D}_{4k+1}^0$  auf Seite 25). Aufgrund von  $d_1 = -d_2$  und der Maximalität von  $e$  (vgl. Definition 3.5) sind die Differenzdiagonalen mit Index  $-(2e+2)$  und  $2e+2$  beide unbesetzt. Das Schnittfeld  $\sigma_1$  der unbesetzten Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_1) = -(2e+2)$  mit der unbesetzten Spalte  $\text{col}(\sigma_1) = 2k+1$  liegt in der unbesetzten Zeile  $\text{row}(\sigma_1) = \text{diff}(\sigma_1) + \text{col}(\sigma_1) = 2k - 2e - 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$ , folglich ist es durch die besetzte Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_1) = \text{col}(\sigma_1) + \text{row}(\sigma_1) = 4k - 2e = 2e + 4u + 4 = 2f + 4u + 4 \notin I_{\hat{S}}$  dominiert. Mit  $s_1 = -s_2$  sind dann die beiden Zusatz-Summendiagonalen  $I_{\hat{S}} = \{\pm(2f + 4u + 4)\}$  spezifiziert. Wir führen eine symmetrische Argumentation für das Feld  $\sigma_2 := (\text{col}(\sigma_1), -\text{row}(\sigma_1)) = (2k+1, -(2k - 2e - 1))$ . Mit  $\text{col}(\sigma_2), \text{row}(\sigma_2) \not\equiv 0 \pmod{2}$  liegt es in unbesetzten Orthogonalen. Weiter ist  $\text{sum}(\sigma_2) = 2e + 2 = 2f + 2 \notin I_{\hat{S}}$  unbesetzt. Demzufolge ist die Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_2) = -(4k - 2e) = -(2e + 4u + 4) \notin I_{\hat{D}}$  besetzt, d. h. mit  $d_1 = -d_2$  gilt  $I_{\hat{D}} = \{\pm(2e + 4u + 4)\}$ . Zusammen mit  $I_{\hat{S}} = \{\pm(2f + 4u + 4)\}$  ist dies jedoch ein Widerspruch zur Maximalität von  $u$ .

Es gilt somit  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$ . Weiter gilt  $u = k - e$ , es gibt keine Zusatzorthogonalen  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset$ , keine Zusatz-Differenzdiagonalen  $I_{\hat{D}} = \emptyset$  und durch  $f = e - 2$  gibt es vier Zusatz-Summendiagonalen  $I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  (siehe Eigenschaften von  ${}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  auf Seite 25). Seien  $\sigma_3 := (2k+1, 2k - 2e - 1)$  und  $\sigma_4 := (2k+1, -(2k - 2e + 3))$  die Schnittfelder der unbesetzten Differenzdiagonalen  $\text{diff}(\sigma_3) = -(2e + 2), \text{diff}(\sigma_4) = -(2e + 4u + 4) \notin I_{\hat{D}}$

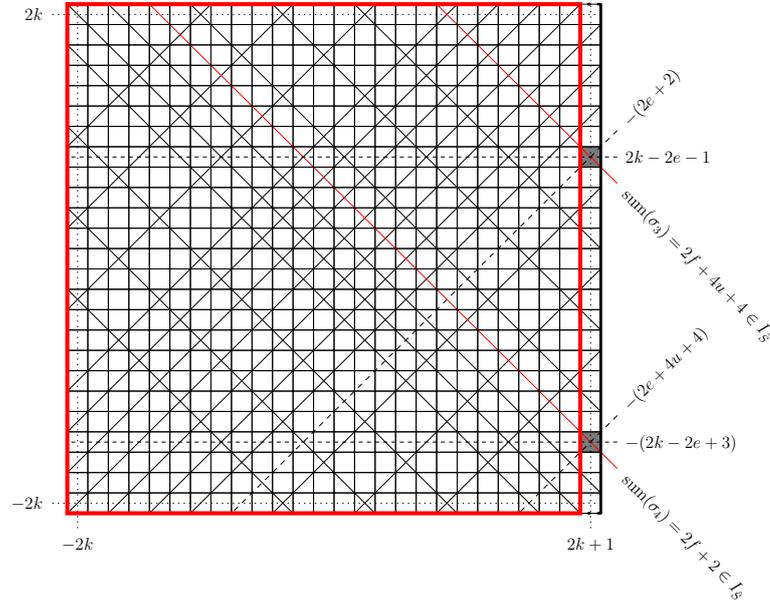


Abbildung 3.22: Betrachtung der unbesetzten Spalte  $2k+1$  in  $Q_{4k+2}$  mit der Einbettung  $\varphi(D) = D' \in \mathcal{D}_{4k+2}$  einer 0-Überdeckung  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  — Bsp.:  $k = 6$ ,  $e = 3 \implies f = 1, u = 3$

mit der unbesetzten Spalte  $\text{col}(\sigma_3) = \text{col}(\sigma_4) = 2k+1 \not\equiv 0 \pmod{2}$  (vgl. Abbildung 3.22). Die Zeilen  $\text{row}(\sigma_3) = 2k-2e-1 \not\equiv 0 \pmod{2}$  und  $\text{row}(\sigma_4) = -(2k-2e+3) \not\equiv 0 \pmod{2}$  sind ebenso unbesetzt, so dass die Summendiagonalen durch  $\sigma_3$  und  $\sigma_4$  besetzt sein müssen. Wir berechnen  $\text{sum}(\sigma_3) = \text{col}(\sigma_3) + \text{row}(\sigma_3) = 2k+1 + 2k-2e-1 = 4k-2f-4 = 2f+4u+4 \notin I_{\bar{S}} \implies 4k-2f-4 \in I_{\bar{S}}$  und  $\text{sum}(\sigma_4) = \text{col}(\sigma_4) + \text{row}(\sigma_4) = 2k+1 - (2k-2e+3) = 2f+2 \notin I_{\bar{S}} \implies 2f+2 \in I_{\bar{S}}$ .

Durch Ausnutzung der Symmetrie der Spiegelung an der Differenz-Hauptdiagonale von  $Q_{4k+1}$  haben wir o. B. d. A. angenommen, dass die Spalte  $2k+1$  auf dem Brett von  $Q_{4k+2}$  liegt und unbesetzt ist. Falls dagegen die Spalte  $-(2k+1)$  in  $Q_{4k+2}$  unbesetzt ist, schließen wir  $\{-(2f+2), -(4k-2f+4)\} \subseteq I_{\bar{S}}$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 3.23.**  $\mathcal{D}_{4k} = \emptyset$  für alle  $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$ .

*Beweis.* Angenommen  $D' \in \mathcal{D}_{4k'}$  für ein  $k' \in \mathbb{N}, k' \geq 4$ . Da  $D'$  mit  $\#D' = 2k'$  jeweils genau eine Zeile und Spalte am Rand von  $Q_{4k'}$  unbesetzt lässt, existiert eine Einbettung  $\varphi$  von  $Q_{4k'-1}$  in  $Q_{4k'}$  als Teilgraph und eine Knotenmenge  $D \subseteq V(Q_{4k'-1})$  derart, dass  $\varphi(D) = D'$ .  $D$  ist insbesondere eine nicht-randfreie  $p$ -Überdeckung von  $Q_{4k'-1}$  (vgl. auch Abbildung 3.21). Wir substituieren  $k := k' - 1$ , somit gilt  $D \in \mathcal{D}_{4k+3}^1$ . Proposition 3.9 folgend gilt speziell  $D \in {}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$ . Als Parameter der Überdeckung  $D \in {}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  ergeben sich  $u = k - e$ , es gibt keine Zusatzorthogonalen  $I_{\hat{C}} = I_{\hat{R}} = \emptyset$ , die Differenz-Hauptdiagonale ist mit  $I_{\hat{D}} = \{0\}$  doppelt besetzt und durch  $f = e - 1$  gibt es drei Zusatz-Summendiagonalen

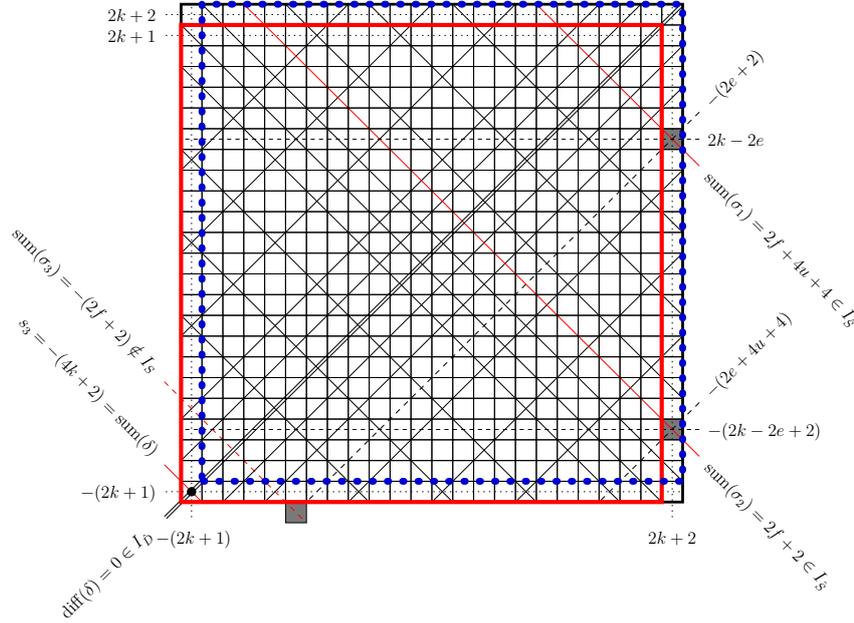


Abbildung 3.23: Konstruktionsversuch einer orthodoxen Überdeckung  $D \in {}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  derart, dass  $\varphi(D) \in \mathcal{D}_{4k+4} = \mathcal{D}_{4k'}$  — Bsp.:  $k = 5, e = 2 \implies f = 1, u = 3$

$I_{\mathcal{S}} = \{s_1, s_2, s_3\}$  mit  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  (siehe Eigenschaften von  ${}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  auf Seite 25). Da die Zwangslinien aller Überdeckungen in  ${}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  symmetrisch zu einer Hauptdiagonale sind, dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass  $e(D) \geq f(D)$  gilt und die Spalte  $2k + 2$  auf dem Brett von  $Q_{4k+4}$  liegt und unbesetzt ist.

Wir betrachten in  $Q_{4k+4}$  die zwei Schnittfelder  $\sigma_1 := (2k + 2, 2k - 2e)$  und  $\sigma_2 := (2k + 2, -(2k - 2e + 2))$  der beiden unbesetzten Differenzdiagonalen  $-(2e + 2) \notin I_D$  und  $-(2e + 4u + 4) \notin I_D$  mit der Spalte  $2k + 2$  (vgl. Abbildung 3.23). Beide Felder liegen in unbesetzten Orthogonalen und sind demnach durch besetzte Summendiagonalen dominiert. Die Diagonalen  $\text{sum}(\sigma_1) = 4k - 2e + 2 = 4k - 2f = 2f + 4u + 4$  und  $\text{sum}(\sigma_2) = 2f + 2 \notin I_{\mathcal{S}}$  sind jedoch beide keine Zwangsdiagonalen, was deshalb zusammen mit der Beziehung  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  die Zusatz-Summendiagonalen  $I_{\mathcal{S}} = \{2f + 2, 4k - 2f, -(4k + 2)\}$  festlegt.

Angenommen die Zeile  $-(2k + 2)$  liegt auf dem Brett von  $Q_{4k+4}$  und ist unbesetzt. Wir betrachten das Feld  $\sigma_3 = (2k - 2e + 2, -(2k + 2))$  in dieser Zeile und bemerken, dass es auf unbesetzten Orthogonalen liegt und ebenso die Diagonalen  $\text{diff}(\sigma_3) = -(2e + 2) \notin I_D$  und  $\text{sum}(\sigma_3) = -(2f + 2) \notin I_{\mathcal{S}}$  unbesetzt sind. Dies zeigt den Widerspruch zur impliziten Annahme, dass  $\sigma_3 \in V(Q_{4k+4})$  dominiert ist.

Folglich liegt stattdessen die Zeile  $2k + 2$  auf dem Brett von  $Q_{4k+4}$  und ist unbesetzt. Wir erkennen, dass  $\delta := (-(2k + 1), -(2k + 1)) \in V(Q_{4k+3})$  das einzige Feld auf der besetzten Summendiagonale  $-(4k + 2) \in I_{\mathcal{S}}$  ist, welches auf dem Brett  $Q_{4k+3}$  liegt. Dem-

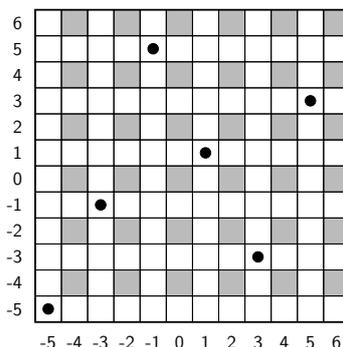


Abbildung 3.24: Überdeckung aus  $\mathcal{D}_{12}$  — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

zufolge gilt  $\delta \in D$ . Weiter bemerken wir, dass die Dame auf dem Feld  $\varphi(\delta)$ , abgesehen von Feldern in der Zeile und Spalte mit Index  $-(2k+1)$ , kein Feld aus  $Q_{4k+4}$  dominiert, da die Differenzdiagonale  $\text{diff}(\delta) = 0 \in I_{\hat{D}}$  doppelt besetzt ist. Somit existiert eine dominierende Menge der Größe  $\#(D \setminus \{\delta\}) = 2k+1$  von  $Q_{4k+3}$  (vgl. gepunktetes Quadrat in Abbildung 3.23). Mit  $k \geq 3$  ist dies jedoch ein Widerspruch zu Satz 2.4.  $\square$

**Bemerkung.** Proposition 3.23 gilt nicht für  $k = 3$  (vgl. Abbildung 3.24). Die Einschränkung  $k \geq 4$  in der Bedingung ist somit scharf. In der Abbildung erkennen wir die im Beweis hergeleitete Dame  $\delta$  in einer Ecke des Bretts sowie die eingebettete kleinste dominierende Menge von  $Q_{11}$  der Größe fünf (vgl. auch Abbildung 2.2).

## 3.5 Lösungsansätze

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.3 vorgestellten generischen Lösungsverfahren sollen hier Ansätze untersucht werden, die explizit orthodoxe Überdeckungen konstruieren. In Abschnitt 3.1 haben wir gesehen, dass sich die von einer orthodoxen Überdeckung besetzten Linien  $I := (I_C, I_R, I_D, I_S)$  durch wenige Parameter  $(p, e, f, u, I_{\hat{C}}, I_{\hat{R}}, I_{\hat{D}}, I_{\hat{S}})$  vollständig beschreiben lassen. Wir nennen das Quadrupel  $I$  zulässig, wenn es die linearen und quadratischen Beziehungen zwischen Orthogonalen und Diagonalen aus den Propositionen 2.2 und 2.3 erfüllt. Da als Kandidatenfelder  $A := \{(c, r) : c \in I_C, r \in I_R, r - c \in I_D, c + r \in I_S\}$  für Damen nur die Felder in Frage kommen, in denen sich vier Linien aus  $I$  schneiden, erlaubt das Ausnutzen dieser Struktur in der Praxis die Behandlung deutlich größerer Bretter.

Bei gegebener Brettgröße  $n$  existieren i. A. mehrere zulässige Parameterkombinationen. Mit üblichen Computeralgebrasystemen lassen sie sich für ausreichend große  $n$  mit vernachlässigbarem Zeitaufwand vollständig ermitteln (siehe auch Abschnitt 3.6). Es ist jedoch zu beachten, dass zulässige Linien keine hinreichende Bedingung für die Existenz einer entsprechenden Überdeckung sind.

BURGER, MYNHARDT und COCKAYNE [BMC94] konnten im Jahr 1994 die Dominanzzahlen  $\gamma(Q_{4k+1}) = 2k + 1$  für  $k \leq 16$  zeigen bzw. bereits bekannte Werte bestätigen. Hierfür implementierten sie eine Tiefensuche über die Kandidatenfelder, wobei die Suche derart gesteuert war, dass zuerst in einer Teilmenge dieser Felder in zulässiger Weise Damen platziert wurden. Mit einem sehr ähnlichen Algorithmus zeigten BURGER und MYNHARDT [BM00c] im Jahr 2000 die neuen Ergebnisse  $\gamma(Q_{30}) = 15$ ,  $\gamma(Q_{69}) = 35$ ,  $\gamma(Q_{77}) = 39$  und  $i(Q_{45}) = 23$ .

In Unterabschnitt 3.5.1 beschreiben wir zunächst das Verfahren, mit dem ÖSTERGÅRD und WEAKLEY [OW01] im Jahr 2001 insbesondere  $\gamma(Q_{4k+1}) = 2k + 1$  für  $k \leq 32$  zeigen konnten. In Unterabschnitt 3.5.2 schlagen wir anschließend eine Formulierung des Problems als ganzzahliges lineares Programm vor.

### 3.5.1 Mengentheoretische Formulierung

Die folgende Formulierung ist in [OW01] beschrieben und wurde dort bereits erfolgreich angewendet. Sie beruht auf dem Problem *4-DIMENSIONAL MATCHING*, welches eine natürliche Verallgemeinerung des klassischen *3-DIMENSIONAL MATCHING* [GJ79] ist.

**Problem:** *4-DIMENSIONAL MATCHING (4DM)*

**Gegeben:** Eine Menge  $M \subseteq W \times X \times Y \times Z$ , wobei  $W, X, Y$  und  $Z$  disjunkte Mengen derselben Kardinalität  $q$  sind.

**Frage:** Existiert ein Matching  $M' \subseteq M$ , so dass  $\#M' = q$  und keine zwei Elemente aus  $M'$  in einer Koordinate übereinstimmen?

Das Problem, bei gegebenem  $I$  eine unabhängige Überdeckung  $D$  zu finden, die alle Linien aus  $I$  besetzt, lässt sich einfach mengentheoretisch interpretieren. Wir konstruieren eine hierzu äquivalente Probleminstanz von *4DM*. Wir setzen  $W := I_C$ ,  $X := I_R$ ,  $Y := I_D$ ,  $Z := I_S$  und erhalten mit  $M := \{(\text{col}(\sigma), \text{row}(\sigma), \text{diff}(\sigma), \text{sum}(\sigma)) \mid \sigma \in A\}$  die gesuchte Instanz von *4DM*. Offensichtlich korrespondiert ein Matching  $M' \subseteq M$  zu einer Überdeckung  $D$ , welche die Linien aus  $I$  besetzt, und umgekehrt.

Da  $I_C, I_R, I_D$  und  $I_S$  i. A. Multimengen sind, nehmen wir bei nicht-unabhängigen Überdeckungen eine künstliche Vervielfachung der mehrfach besetzten Linien vor. Sei beispielsweise  $i \in I_C$  mit Multiplizität  $m$ . Dann setzen wir

$$\begin{aligned} W &\leftarrow W \cup \{i_1, \dots, i_m\} \setminus \{i\}, \\ M &\leftarrow M \cup \{(i_1, x, y, z), \dots, (i_m, x, y, z)\} \setminus \{(i, x, y, z)\}, \quad \forall (i, x, y, z) \in M. \end{aligned}$$

Bei weiteren mehrfach besetzten Linien verfahren wir sukzessive analog. Durch diese Konstruktion wird allerdings die 1:1-Korrespondenz zwischen Matching und Überdeckung aufgehoben. Für unsere Zwecke genügt es jedoch, dass ein Matching in eindeutiger Weise zu einer Überdeckung korrespondiert und insbesondere genau dann ein Matching existiert, wenn eine passende Überdeckung existiert.

Da bei gegebener Brettgröße i. A. mehrere zulässige Parameterkombinationen existieren und zudem Zulässigkeit keine hinreichende Bedingung für die Existenz einer entsprechenden Überdeckung ist, sind so ggf. mehrere *4DM*-Instanzen zu lösen.

### 3.5.2 ILP-Formulierung

Siehe Programm (CL\_ILP) in ILP 2 für eine einfache ILP-Formulierung zur Bestimmung einer Überdeckung bei vollständig spezifizierten besetzten Linien  $I = (I_C, I_R, I_D, I_S)$  mit den Kandidatenfeldern  $A$ .

---

#### ILP 2 (CL\_ILP)

---

$$\min \sum_{(c,r) \in A} x_{c,r} \quad (3.6)$$

s. d.

$$\sum_{(c,r) \in A, c=i} x_{c,r} = m(i), \quad \forall i \in I_C \quad (3.7)$$

$$\sum_{(c,r) \in A, r=i} x_{c,r} = m(i), \quad \forall i \in I_R \quad (3.8)$$

$$\sum_{(c,r) \in A, r-c=i} x_{c,r} = m(i), \quad \forall i \in I_D \quad (3.9)$$

$$\sum_{(c,r) \in A, c+r=i} x_{c,r} = m(i), \quad \forall i \in I_S \quad (3.10)$$

$$x_{c,r} \in \{0, 1\}, \quad \forall (c, r) \in A \quad (3.11)$$


---

Die binären Entscheidungsvariablen  $x_{c,r} \in \{0, 1\}$  aus (3.11) sind folgendermaßen zu interpretieren:  $x_{c,r} = 1$  gilt genau dann, wenn auf dem Feld  $(c, r)$  eine Dame steht. Die Zielfunktion (3.6) minimiert die Anzahl der Damen auf dem Brett. Da die besetzten Linien vollständig vorgegeben sind, ist diese Angabe lediglich technischer Natur. Die Nebenbedingungen (3.7)–(3.10) stellen sicher, dass jede Linie  $i$  mit der vorgegebenen Multiplizität  $m(i)$  besetzt wird.

Das Programm (CL\_ILP) enthält nicht mehr als  $(\#D)^2 = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)$  Variablen und  $4\#D = 2n + 2$  Nebenbedingungen.

Eine Stärke der Formulierung als ILP ist die leichte Anpassbarkeit bei veränderten Anforderungen. Durch naheliegende Modifikationen von (CL\_ILP) lässt sich der Lösungsraum weiter einschränken, beispielsweise durch vorplatzierte Damen oder bei der Suche nach symmetrischen Lösungen. Ebenso ist eine Relaxierung leicht möglich, wie z. B. bei der Suche nach Überdeckungen  $D$  mit  $\#D > \lceil \frac{n}{2} \rceil$  oder bei unvollständiger Beschreibung der besetzten Linien. Gegebenenfalls sind dann noch weitere Nebenbedingungen (siehe Nebenbedingungen (2.2) auf Seite 15) notwendig, um sicherzustellen, dass die Lösung des ILP eine dominierende Menge ist. Vor allem, da bei gegebener Brettgröße  $n$  oft mehrere zulässige Parameterkombinationen existieren, die sich nur durch wenige Zusatzdiagonalen unterscheiden, kann eine solche Relaxierung sinnvoller sein, als die Berechnung vieler speziellerer ILP.

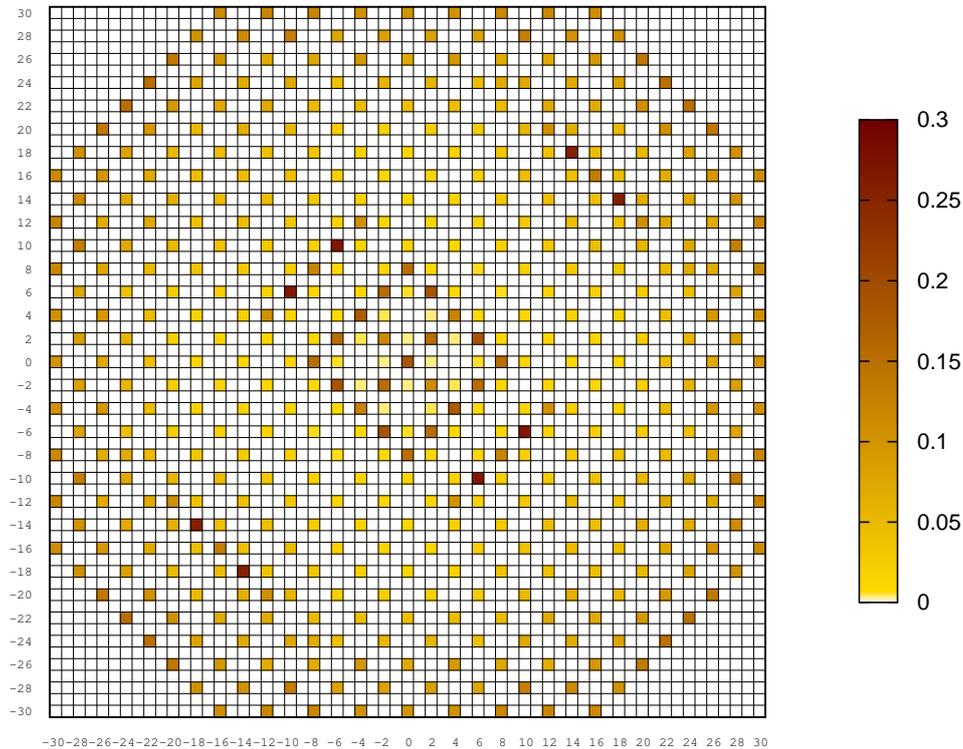


Abbildung 3.25: Relative Häufigkeiten einer Dame in den Kandidatenfeldern — Bsp.: Klasse  $\mathcal{D}'$  der 0-Überdeckungen von  $Q_{61}$  mit  $e = 5$ ,  $f = 5$ ,  $u = 9$ ,  $I_{\mathcal{D}} = \{-16, 16\}$ ,  $I_{\mathcal{S}} = \{-32, 32\}$ ; Klassengröße  $\#\mathcal{D}' = 15\,548$

Ausgehend vom Programm (CL\_ILP) bietet der ILP-Ansatz noch viel Potential für Laufzeitverbesserungen. Neben der Erforschung von Schnittebenen für dieses Problem sind hierbei z. B. Regeln zur Steuerung der Abarbeitung des *branch & cut*-Baums zu nennen. Abbildung 3.25 zeigt, dass für eine durch die besetzten Linien charakterisierte Überdeckungsklasse die relativen Häufigkeiten eines besetzten Feldes unter den Kandidatenfeldern nicht annähernd gleichverteilt sind. Die Verteilung wurde mittels des im nachfolgenden Abschnitt beschriebenen Programms `dance_mult` ermittelt. Durch ähnliche Untersuchungen für weitere Überdeckungsklassen lassen sich möglicherweise in heuristischer Weise Gesetzmäßigkeiten erkennen, auf deren Grundlage sich vielversprechende Variablenselektionsregeln ableiten lassen.

## 3.6 Implementierung und Ergebnisse

Die in Unterabschnitt 3.5.1 und 3.5.2 vorgestellten Ansätze zur Suche einer orthodoxen Überdeckung setzen beide voraus, dass die besetzten Linien  $I$  gegeben sind. Zulässige Parameterkombinationen ermittelten wir bei gegebener Brettgröße  $n$  mit Mathematica<sup>1</sup>. Für jeden Überdeckungstyp wurden dabei mit der Funktion `FindInstance` alle Werte für  $e$  und die Zusatzlinien gefunden, die im Einklang mit den linearen und quadratischen Restriktionen von Proposition 2.2 und 2.3 stehen. Zusammen mit den Propositionen 3.9, 3.10 und 3.11 konnten wir so alle zulässigen Parameterkombinationen einer  $p$ -Überdeckung bei gegebenem  $n$  ermitteln (siehe exemplarisch Anhang A). Die Betrachtung von  $p$ -Überdeckungen von  $Q_{4k+1}$  lieferte dabei für  $k \leq 50$  bereits über 1000 verschiedene Kombinationen, während für  $p$ -Überdeckungen von  $Q_{4k+3}$  mit  $k \leq 50$  nicht einmal 30 existieren.

Als Löser für die mengentheoretische Formulierung aus Unterabschnitt 3.5.1 verwendeten wir – wie auch [OW01] – einen Löser von KNUTH für *SET PARTITIONING*- bzw. *EXACT COVER*-Probleme [Kar72], welche eine Verallgemeinerung des Problems *4DM* sind. Das Programm `dance`<sup>2</sup> von KNUTHS Homepage implementiert den sogenannten *Algorithmus X* [Knu00], eine deterministische, vollständige *backtracking*-Suche. Durch eine einfache heuristische Technik zur Reduktion des Suchbaums und vor allem eine äußerst effiziente Zeigertechnik [HN79] zur Modifikation der Datenstrukturen ist es ein sehr schneller Löser für Probleme dieses Typs [OW01]. Durch wenige Änderungen konnten wir das Programm zu `dance_mult` derart anpassen, dass es explizit mehrfach besetzte Linien berücksichtigen kann. Somit konnten wir ein Aufblähen des Lösungsraums um viele äquivalente Lösungen umgehen, welches die in Unterabschnitt 3.5.1 genannte künstliche Variablenvervielfachung zur Folge gehabt hätte. Laufzeitvergleiche mit `dance` haben die Vorteilhaftigkeit bestätigt. Nach der ersten gefundenen Überdeckung haben wir jeweils die Suche abgebrochen.

Die Eingabedaten für `dance_mult` erzeugten wir mit dem Programm `queens_dl`, welches als Eingabe die Brettgröße und Parameter der gewünschten Überdeckung erhält. Aufgrund des geeigneten Rahmenprogramms implementierten wir die Berechnung der relativen Häufigkeiten aus Abbildung 3.25 ebenfalls in `queens_dl`.

Das bereits in Abschnitt 2.4 erwähnte Programm `queens` erweiterten wir um die Funktionalität, nach Eingabe der Brettgröße sowie Parameter einer Überdeckung ein ganzzahliges lineares Programm gemäß (CL-ILP) aus Unterabschnitt 3.5.2 zu erzeugen und mit CPLEX zu lösen.

Experimente zeigten, dass der Engpass bei beiden Ansätzen in der Suche konkreter orthodoxer Überdeckungen liegt. Innerhalb weniger Stunden konnten wir alle zulässigen Parameterkombinationen von  $p$ -Überdeckungen mit  $n < 500$  bestimmen, hingegen fanden wir während der wochenlangen Suchen insgesamt lediglich zwei Überdeckungen für eine Brettgröße größer als 200.

<sup>1</sup><http://www.wolfram.com/products/mathematica/>

<sup>2</sup><http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/programs.html>

Obschon bei beiden Ansätzen aufgrund der großen Schwankungen eine Prognose der Laufzeit allein abhängig von der Brettgröße kaum möglich ist, so wurde doch eine Lösung mit `dance_mult` durchschnittlich in kürzerer Zeit gefunden. Der ILP-Ansatz bietet jedoch bereits ohne weitere Verbesserungen den Vorteil, dass einige Instanzen sehr schnell als unlösbar erkannt werden können, während diese Fälle für den mengentheoretischen Ansatz den schlimmsten Fall darstellen würden, der eine Abarbeitung des kompletten Suchbaums zur Folge hätte. Einige unlösbare Probleme erkannte CPLEX daran, dass der Wert der LP-Relaxierung (in der Wurzel des *branch & cut*-Baums) bereits größer als  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  war, bei anderen Instanzen konnte die Unlösbarkeit bereits in der *presolve*-Phase festgestellt werden.

Aufgrund der speziellen Eigenschaften beider Ansätze verfolgten wir grundsätzlich folgendes Vorgehen: Die Liste zulässiger Parameterkombinationen für eine bestimmte Brettgröße  $n$  dünnten wir zunächst mit `queens` um einige unlösbare Fälle aus. Dies ließ sich sehr gut automatisieren, indem wir alle Instanzen sequentiell abarbeiteten, wobei wir jeweils für CPLEX ein geeignetes Zeitlimit festlegten, innerhalb dessen die *presolve*-Phase sowie die LP-Relaxierung realistisch abgeschlossen werden konnten. Die so nicht direkt als unlösbar identifizierten Instanzen ließen wir von `dance_mult` lösen. Da das vollständige Durchsuchen des Lösungsbaums bereits für einige  $n < 100$  dabei nicht in mehreren Tagen möglich war, testeten wir jeweils zunächst mit einem moderaten Zeitlimit, ob für manche Instanzen recht schnell eine Lösung gefunden werden konnte. War dies nicht der Fall, starteten wir einen weiteren Durchlauf, ggf. mit einem größeren Zeitlimit. Damit dabei aufgrund des Determinismus von `dance_mult` nicht dieselben Pfade durchlaufen werden, genügte es, mit einem kleinen *shell script* die Reihenfolge der überdeckenden Quadrupel in den Eingabedateien zu permutieren.

Auf diese Weise konnten wir einige  $p$ -Überdeckungen, relaxierte  $p$ -Überdeckungen sowie 0-1-Überdeckungen ermitteln, die neue Werte für  $\gamma(Q_n)$  oder  $i(Q_n)$  zeigen. In Anhang B finden sich die entsprechenden Überdeckungen, die  $\gamma(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 43, 55, 83, 99, 107, 133, 137, 141, 143, 145, 149, 153, 157, 161, 163, 165, 169, 173, 177, 181, 183, 185, 189, 193, 197, 213$  und  $221$  sowie  $i(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 117, 121, 129, 141, 145, 157, 161, 165, 177, 185$  und  $189$  zeigen.

Die neuen Überdeckungen erweitern  $\gamma(Q_{4k+1}) = 2k + 1$  von  $k \leq 32$  auf  $k \leq 49$  sowie  $k = 53, 55$ . Aus den Propositionen 3.9, 3.10 und 3.11 sehen wir, dass als  $p$ -Überdeckungen für  $Q_{4k+3}$  in den allermeisten Fällen nur Überdeckungen  $D \in {}^1\mathcal{D}_{4k+3}^1$  in Frage kommen. Die oben beschriebene Suche mit Mathematica zeigt dann, dass im Fall  $n = 43, 83$  keine und im Fall  $n = 55$  lediglich eine zulässige Parameterkombination für  $p$ -Überdeckungen von  $Q_n$  existieren. Zu letzterer existiert jedoch keine passende Überdeckung, wie wir durch eine vollständige Suche mit `dance_mult` herausfanden. Hingegen fanden wir eine relaxierte 0-Überdeckung von  $Q_{83}$  sowie 0-1-Überdeckungen von  $Q_{43}$  und  $Q_{55}$ . Weiter konnten wir erstmals die Dominanzzahl von  $Q_{99}$  durch eine 0-1-Überdeckung zeigen, wobei zudem eine 1-Überdeckung von  $Q_{99}$  existiert. Exemplarisch ist die gefundene 0-1-Überdeckung von  $Q_{55}$  (vgl. Überdeckung [1] in Anhang B) in Abbildung 3.26 abgebildet.

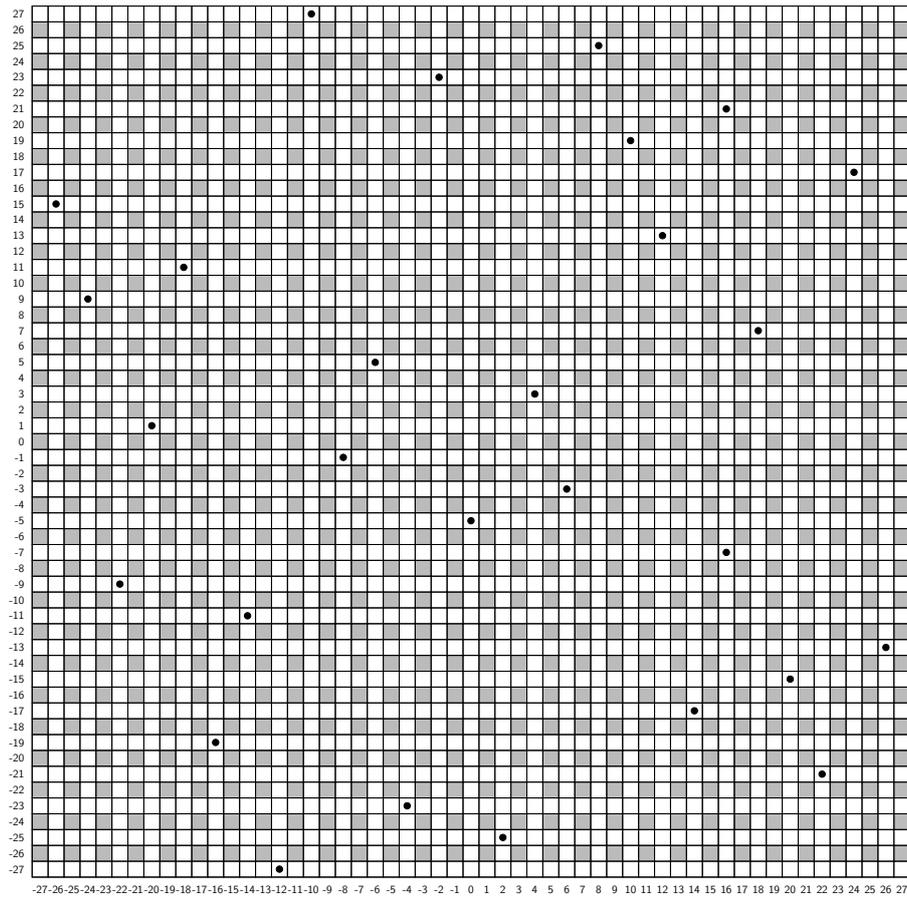


Abbildung 3.26: 0-1-Überdeckung von  $Q_{55}$  — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

Mit den gefundenen Überdeckungen können wir die bisher beste obere Schranke aus Korollar 2.7 verschärfen.

**Korollar 3.24.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt  $\gamma(Q_n) \leq \frac{30}{59}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0085)n + \mathcal{O}(1)$  und  $i(Q_n) \leq \frac{91}{177}n + \mathcal{O}(1) \approx (\frac{1}{2} + 0,0141)n + \mathcal{O}(1)$ .*

*Beweis.* Siehe Anhang B für eine 1-Überdeckung vom Typ A von  $Q_{177}$  der Größe 89, die keine Damen am Rand enthält. Dann folgen die Schranken aus Satz 2.5.  $\square$

Die Ergebnisse verbessern die Differenz des Faktors von  $n$  zu  $\frac{1}{2}$  um jeweils  $\approx 40\%$  gegenüber den Schranken aus Korollar 2.7. Es ist zu beachten, dass die gefundenen Überdeckungen für größere Bretter als  $Q_{177}$  alle nicht randfrei sind und sich mit ihnen die Schranken nicht weiter verbessern lassen (siehe Satz 2.5).

Das Programm `queens.lines` (siehe Seite 17) verwendeten wir zudem, um gezielt nach orthodoxen Überdeckungen in Größe der unteren Schranke zu suchen, ohne die zu besetzenden Diagonalen zu spezifizieren. Für  $Q_n$  der folgenden  $n \equiv 3 \pmod{4}$  fand `queens.lines` keine orthodoxe Überdeckung der Größe  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ :  $n = 35, 47, 51, 59, 63, 67, 75, 79, 87, 95, 103, 111, 119, 123, 127, 135$  und  $139$ . Ebenso erbringen wir den Computerbeweis, dass keine *unabhängigen* orthodoxen Überdeckungen der Größe  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  für  $n = 19, 20, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 37, 39, 41, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 75, 79, 87$  und  $130$  existieren.

Versuchsweise ließen wir außerdem Eingabedateien für den quelloffenen SAT-Löser MINISAT<sup>3</sup> generieren. Experimente an bekanntermaßen lösbaren Instanzen lieferten in annehmbarer Zeit jedoch nur Lösungen für kleine  $n < 100$ , so dass wir diesen Ansatz nicht weiter verfolgt haben.

Beim  $n$ -Damenproblem müssen  $n$  Damen auf einem  $(n \times n)$ -Schachbrett so platziert werden, dass sich keine zwei Damen gegenseitig bedrohen. SOSIČ und GU [SG90, SG91a, SG91b, SG94] empfehlen für dieses Problem eine auf Gradientenabstieg basierende, randomisierte, gierige Heuristik. Ausgehend von einer (nicht notwendigerweise zulässigen) Startbelegung werden randomisiert einfache Austauschschritte durchgeführt, welche die Anzahl der sich gegenseitig bedrohenden Damen verringern. Für  $n = 150\,000$  hat unsere Implementierung `nqueens` in weniger als 1 min eine Lösung für das  $n$ -Damenproblem gefunden, für  $n < 10\,000$  dauerte es weniger als 1 s. Motiviert durch die guten Laufzeiten verfolgten wir die Idee, dass sich dieses Verfahren für die Suche nach durch zu besetzende Linien  $I$  parametrisierten orthodoxen Überdeckungen geeignet anpassen lässt. Hierzu implementierten wir das Verfahren mit einer modifizierten Zielfunktion im Programm `qds`. Anstelle sich gegenseitig bedrohender Damen minimierten wir die Anzahl der nicht besetzten Linien aus  $I$ . Wir testeten das Verfahren an Instanzen, für die bereits eine Lösung bekannt ist. Mit stark schwankenden Laufzeiten konnten wir so Überdeckungen für  $n < 100$  finden, jedoch keine neuen Dominanzzahlen zeigen. Ein Grund liegt möglicherweise darin, dass die Anzahl zulässiger orthodoxer Überdeckungen von  $Q_{n'}$  deutlich geringer ist als die Anzahl [BS09] an Lösungen für das  $n$ -Damenproblem mit  $n = \frac{n'+1}{2}$ .

<sup>3</sup><http://minisat.se/>



# Kapitel 4

## Nicht-orthodoxe Überdeckungen

Die zu Beginn von Kapitel 3 dargestellten Ergebnisse bekräftigen die Einschätzung, dass orthodoxe Überdeckungen sehr vorteilhaft für die Konstruktion kleinster dominierender Mengen sind. Insbesondere sprechen dafür zum einen das Resultat von WEAKLEY [Wea02a], dass jede dominierende Menge  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n-1}{2}$  eine  $p$ -Überdeckung ist, und zum anderen die Erkenntnis, dass zumindest für  $n \geq 13$  alle Dominanzzahlen  $\gamma(Q_n)$  durch orthodoxe Überdeckungen gezeigt wurden (siehe Unterabschnitt 2.2.2). Durch die Untersuchungen in diesem Kapitel wollen wir diese Einschätzung theoretisch erhärten und zudem Einsichten liefern, wieso dies so ist.

Hierzu wollen wir uns auf gerade Brettgrößen konzentrieren, die in der Literatur weitestgehend nicht explizit untersucht wurden. Für  $n$  gerade gilt  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n}{2}$ . Die einzigen bekannten  $n$ , für welche diese Schranke scharf ist, sind  $n = 2, 4, 6, 10, 12, 18, 30, 130$  (siehe Anhang C). Auffällig ist, dass die entdeckten minimalen Überdeckungen für diese  $n \geq 6$  alle orthodoxe Überdeckungen sind. Mittels CPLEX konnten wir für  $n = 6, 10, 12, 18$  und  $30$  zeigen, dass *jede* dominierende Menge  $D$  mit  $\#D = \frac{n}{2}$  eine orthodoxe Überdeckung ist. Für  $n = 2, 4$ , gilt diese Aussage nicht und für  $n = 130$  war kein Ergebnis in annehmbarer Zeit zu erwarten. Angenommen  $D$  mit  $\#D = \frac{n}{2}$  ist keine orthodoxe Überdeckung. Offensichtlich existieren dann zwei benachbarte (zyklisch betrachtet) Spalten oder zwei benachbarte Zeilen, die jeweils keine Dame enthalten. O. B. d. A. existieren zwei benachbarte unbesetzte Spalten. Für jedes benachbarte Spaltenpaar erzeugten wir ein ILP, in welchem die Felder dieser Spalten vorab als unbesetzt gekennzeichnet wurden. Die Suche ergab dann jeweils, dass unter dieser Nebenbedingung keine dominierende Menge mit  $\frac{n}{2}$  Damen existiert. Zusammen mit den Ergebnissen von Seite 17 folgt dann, dass für alle  $6 \leq n \leq 46$  jede dominierende Menge der Größe  $\frac{n}{2}$  eine orthodoxe Überdeckung ist.

Die oben aufgeführten Argumente legen die Vermutung nahe, dass für alle  $n \geq 6$  jede dominierende Menge  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n}{2}$  eine orthodoxe Überdeckung ist. Die Implikationen dieser Vermutung werden durch die beiden Propositionen 3.22 und 3.23 unmittelbar deutlich: Die Inexistenz einer nicht-randfreien  $p$ -Überdeckung  $D \in \mathcal{D}_{n-1}$ , die ebenso  $Q_n$  dominiert, wäre gleichbedeutend mit  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n}{2} + 1$ .

Das Kapitel gliedert sich wie folgt. Auf dem Weg zum Beweis der Vermutung nehmen wir im Folgenden immer den Widerspruch an, d. h. für ein bestimmtes  $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ,  $n_0 \geq 6$ , existiere ein Gegenbeispiel  $D$ . Somit ist  $D$  eine nicht-orthodoxe Überdeckung von  $Q_n$  der Größe  $\#D = \frac{n}{2}$ . Unter dieser Annahme untersuchen wir zunächst Eigenschaften von  $D$ ,

die für alle geraden  $n$  gelten. Auf eine Unterklasse von Brettgrößen gehen wir anschließend konkreter ein und zeigen für diese, dass die Vermutung zumindest für ausreichend große Bretter  $n \geq n_0$  gilt. Den Schwellenwert  $n_0$  können wir dabei so klein halten, dass uns dieses Resultat schließlich einen Computerbeweis für einige neue Dominanzzahlen  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  liefert. Abschließend zeigen wir Ergebnisse für andere Unterklassen, die Hinweise darauf liefern, dass die Vermutung sogar für alle Bretter  $Q_n$  mit  $n$  gerade gilt.

Für einige der dem Beweis der Vermutung zugrunde liegenden Lemmata zeigen wir die jeweilige Aussage für Brettgrößen ab einem bestimmten Schwellenwert. Bei manchen dieser Lemmata hätten sich bei größer gewählten Schwellenwerten die Beweise mit derselben Beweisidee vereinfacht führen lassen. Obgleich der theoretische Wert der Aussage dadurch nicht wesentlich gesteigert wurde, haben wir mit Blick auf die Anwendung des Resultats dennoch in einigen Fällen einen komplizierteren Beweis zugunsten eines kleineren Schwellenwerts in Kauf genommen.

## 4.1 Grundlegende Eigenschaften

Wir stellen zunächst die wesentliche Notation vor. Die Überdeckung  $D$  separieren wir in vier Mengen  $D^{pq} := \{(c, r) \in D \mid c \equiv p \pmod{2}, r \equiv q \pmod{2}\}$ ,  $\forall p, q \in \{0, 1\}$ , die wir zu den geraden Damen  $D^0 := D^{00} \dot{\cup} D^{11}$  und ungeraden Damen  $D^1 := D^{01} \dot{\cup} D^{10}$  zusammenfassen. Um mit Zeilen und Spalten variabler Parität argumentieren zu können sei die innere zweistellige Verknüpfung  $\oplus : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  mit der Exklusiv-Oder-Logik (XOR) folgendermaßen definiert:  $0 \oplus 0 := 0, 1 \oplus 1 := 0, 0 \oplus 1 := 1, 1 \oplus 0 := 1$ . Die Indexmengen der unbesetzten Spalten  $C := C^0 \dot{\cup} C^1$  und Zeilen  $R := R^0 \dot{\cup} R^1$  differenzieren wir nach der Parität ihrer Elemente. Für einige Argumente ist lediglich die Kardinalität von Interesse, so dass wir kurz  $c^p := \#C^p$ ,  $r^q := \#R^q$  schreiben.

Viele Beweise konzentrieren sich auf die von den unbesetzten Orthogonalen induzierten, ausschließlich diagonal dominierten Felder  $A := C \times R$ . Da gerade (ungerade) Damen lediglich gerade (ungerade) Felder dominieren, unterscheiden wir nach der Parität der Orthogonalen  $A^{pq} := C^p \times R^q = \{(c, r) \in A \mid c \equiv p \pmod{2}, r \equiv q \pmod{2}\}$ . Abbildung 4.1 verdeutlicht, dass die Felder  $A^{pq}$  auf einem rechteckigen Gitter angeordnet sind.

Mit  $E^{pq} \subseteq A^{pq}$  bezeichnen wir die Menge der *Randfelder*, d. h. die Felder aus  $A^{pq}$  in den beiden äußersten unbesetzten Spalten der Parität  $p$  und Zeilen der Parität  $q$ . Wir nutzen oft aus, dass jede Dame höchstens vier Randfelder über ihre Diagonalen dominieren kann. Wenn  $D$  eine dominierende Menge ist, gilt somit  $4 \#D^{p \oplus q} \geq \#E^{pq}$ . Wenn  $4 \#D^{p \oplus q} - \#E^{pq} \leq 2$  nennen wir  $E^{pq}$  *quasi-verlustfrei dominiert* (*q.-v. d.*) und falls  $4 \#D^{p \oplus q} = \#E^{pq}$ , heißt  $E^{pq}$  insbesondere *verlustfrei dominiert* (*v. d.*). Weiter seien  $E_T^{pq}, E_B^{pq}, E_L^{pq}, E_R^{pq} \subseteq E^{pq}$  die entsprechenden Randfelder in der obersten, untersten, linken bzw. rechten unbesetzten Orthogonale der passenden Parität.

Die Breite  $w^p$  bzw. Höhe  $h^q$  von  $A^{pq}$  und  $E^{pq}$  definieren wir als den Abstand der beiden äußersten Spalten bzw. Zeilen der passenden Parität:  $w^p := \max\{|c_2 - c_1| : c_1, c_2 \in C^p\}$ ,  $h^q := \max\{|r_2 - r_1| : r_1, r_2 \in R^q\}$ . Wir nennen  $A^{pq}$  und  $E^{pq}$  *quadratisch*, *breiter als hoch* bzw. *höher als breit*, wenn  $w^p = h^q$ ,  $w^p > h^q$  bzw.  $w^p < h^q$ .

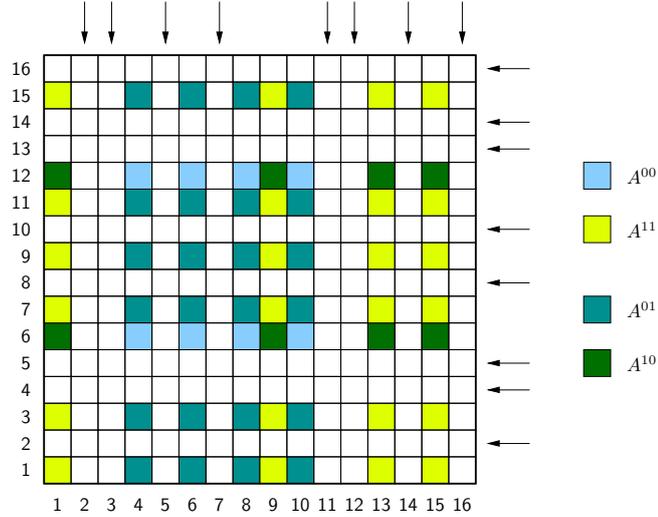


Abbildung 4.1: Unterscheidung der ausschließlich diagonal dominierten Felder  $A$  nach der Parität ihrer Spalten- und Zeilenindizes (besetzte Orthogonale sind mit Pfeil markiert) — Bsp.:  $n = 16$ ,  $C^0 = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C^1 = \{1, 9, 13, 15\}$ ,  $R^0 = \{6, 12\}$ ,  $R^1 = \{1, 3, 7, 9, 11, 15\}$

Die Damen können in maximal  $\#D = \frac{n}{2}$  unterschiedlichen Spalten stehen, so dass die triviale Schranke  $\#C \geq n - \#D \iff c^0 + c^1 \geq \frac{n}{2}$ , sowie analog  $r^0 + r^1 \geq \frac{n}{2}$ , gilt. Damit können wir leicht die Anzahl mehrfach besetzter Orthogonalen einschränken.

**Proposition 4.1.**  *$D$  besetzt keine Orthogonale mehrfach, oder höchstens zwei Orthogonalen doppelt und keine weitere mehrfach, oder höchstens eine Orthogonale dreifach und keine weitere mehrfach, d. h. es gilt  $c^0 + c^1 + r^0 + r^1 \leq n + 2$ .*

*Beweis.* Für  $n = 2$  gilt  $\#D = 1$  und  $c^0 + c^1 = r^0 + r^1 = 1$ , d. h. die Behauptung stimmt. Sei somit  $n \geq 4$ . Angenommen  $c^0 + c^1 + r^0 + r^1 > n + 2$ . Bezeichne  $E \subseteq A$  die ausschließlich diagonal dominierten Felder in den äußersten unbesetzten Orthogonalen. Da  $c^0 + c^1, r^0 + r^1 \geq \frac{n}{2} \geq 2$ , berechnet sich die Mächtigkeit von  $E$  zu  $\#E = 2(c^0 + c^1 + r^0 + r^1) - 4 > 2n$ . Jede Dame aus  $D$  dominiert über ihre beiden Diagonalen insgesamt maximal vier Felder aus  $E$ . Da jedoch  $4\#D < \#E$ , ist  $D$  keine dominierende Menge von  $Q_n$ .  $\square$

Falls keine Orthogonale mehrfach besetzt ist, lassen sich weitere Abhängigkeiten zeigen.

**Proposition 4.2.** *Falls  $D$  keine Orthogonale mehrfach besetzt, gelten für alle  $p, q \in \{0, 1\}$  folgende Äquivalenzen und Implikationen:*

$$c^p = r^q \iff c^{\bar{p}} = r^{\bar{q}} \iff \#D^{p\bar{q}} = \#D^{\bar{p}q} \implies \#D^{\bar{p}\oplus\bar{q}} \equiv 0 \pmod{2}.$$

*Beweis.* Da keine Spalte mehrfach besetzt ist, berechnet sich die Anzahl der Damen in Spalten der Parität  $p$  als die Anzahl aller Spalten der Parität  $p$  abzüglich der Anzahl

der unbesetzten Spalten dieser Parität:  $\#D^{pq} + \#D^{p\bar{q}} = \frac{n}{2} - c^p$ . Analog ergeben sich die Beziehungen  $\#D^{\bar{p}q} + \#D^{\bar{p}\bar{q}} = \frac{n}{2} - c^{\bar{p}}$ ,  $\#D^{pq} + \#D^{\bar{p}q} = \frac{n}{2} - r^q$  und  $\#D^{p\bar{q}} + \#D^{\bar{p}\bar{q}} = \frac{n}{2} - r^{\bar{q}}$ . Durch einfache Umformungen ergeben sich damit unmittelbar die beiden Äquivalenzen. Die Implikation ist durch  $D^{\overline{p\oplus q}} = D^{p\bar{q}} \cup D^{\bar{p}q}$  leicht ersichtlich.  $\square$

Wir zeigen nun, dass sowohl die Kenngrößen  $c^0, c^1, r^0, r^1$  als auch  $\#D^0, \#D^1$  jeweils ungefähr  $\frac{n}{4}$  und  $\#D^{00}, \#D^{11}, \#D^{01}, \#D^{10}$  jeweils ungefähr  $\frac{n}{8}$  groß sind.

**Lemma 4.3.** *Es gilt  $\frac{n}{4} - 2 \leq c^0, c^1, r^0, r^1 \leq \frac{n}{4} + 2$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die oberen Schranken. Die Anzahl der unbesetzten Orthogonalen einer bestimmten Parität beträgt höchstens  $\frac{n}{2}$ . Für  $n \leq 8$  gilt  $c^0, c^1, r^0, r^1 \leq \frac{n}{2} \leq \frac{n}{4} + 2$ , d. h. die Behauptung stimmt. Sei somit  $n \geq 10$ . Durch die Symmetrien der vertikalen Spiegelung und 90°-Drehung sei o. B. d. A.  $c^0 = \sup\{c^0, c^1, r^0, r^1\}$  und durch die Symmetrie der horizontalen Spiegelung sei o. B. d. A.  $r^1 \leq r^0$ . Angenommen  $c^0 > \frac{n}{4} + 2$ .

Es gilt  $c^0, r^0 \geq 2$  und die Menge der Randfelder  $E^{00}$  ist nicht-degeneriert, d. h.  $\#E^{00} = 2(c^0 + r^0) - 4$ . Die Anzahl der geraden Damen lässt sich somit durch  $\#D^0 \geq \frac{1}{4} \#E^{00} = \frac{1}{2}(c^0 + r^0) - 1$  abschätzen.

Zur Abschätzung der Anzahl der ungeraden Damen unterscheiden wir die drei Fälle  $r^1 \geq 2$ ,  $r^1 = 0$  und  $r^1 = 1$ . Falls  $r^1 \geq 2$ , ist zudem  $E^{01}$  nicht-degeneriert und es gilt  $\#D^1 \geq \frac{1}{4} \#E^{01} = \frac{1}{2}(c^0 + r^1) - 1$ . Es folgt der Widerspruch  $\#D = \#D^0 + \#D^1 \geq c^0 + \frac{1}{2}(r^0 + r^1) - 2 \geq c^0 + \frac{n}{4} - 2 > \frac{n}{2}$ .

Falls  $r^1 = 0$ , gilt  $r^0 \geq \frac{n}{2}$ , wegen der Maximalität von  $c^0$  dann  $c^0 \geq r^0 \geq \frac{n}{2}$ , und da  $D$  nicht-orthodoxe Überdeckung ist zudem  $c^1 \neq 0$ . Wir betrachten die obere Kante  $E_T^{10} \subseteq E^{10}$  der Randfelder. Durch die Beobachtung, dass jede Dame höchstens zwei Felder aus  $E_T^{10}$  dominiert, erhalten wir die Abschätzung  $\#D^1 \geq \frac{1}{2} \#E_T^{10} \geq \frac{1}{2}r^0$ . Insgesamt folgt dann aus  $\#D = \#D^0 + \#D^1 \geq r^0 + \frac{1}{2}c^0 - 1 \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - 1$  mit  $n \geq 10$  der Widerspruch  $\#D > \frac{n}{2}$ .

Falls  $r^1 = 1$ , gilt  $r^0 \geq \frac{n}{2} - 1$  und wegen der Maximalität von  $c^0$  zudem  $c^0 \geq \frac{n}{2} - 1$ . Da die Felder  $E^{01}$  alle in derselben Zeile liegen, gilt hier die schärfere Abschätzung  $\#D^1 \geq \frac{1}{2} \#E^{01} \geq \frac{1}{2}c^0$  und damit  $\#D = \#D^0 + \#D^1 \geq c^0 + \frac{1}{2}r^0 - 1 \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - \frac{5}{2}$ . Für  $n > 10$  folgt direkt der Widerspruch  $\#D > \frac{n}{2}$ . Für  $n = 10$  lässt sich  $c^0 > \frac{n}{4} + 2 = \frac{9}{2} \implies c^0 = 5 = \frac{n}{2}$  zeigen und es folgt der Widerspruch  $\#D \geq c^0 + \frac{1}{2}r^0 - 1 \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - \frac{3}{2} = 6$ .

Die unteren Schranken ergeben sich unmittelbar aus den oberen Schranken und der Beziehung  $c^0 + c^1 \geq \frac{n}{2}$  bzw.  $r^0 + r^1 \geq \frac{n}{2}$ .  $\square$

Da  $c^0, c^1, r^0, r^1 \geq 2$  sind somit die Randfeldermengen  $E^{pq}$  für  $n \geq 14$  nicht-degeneriert, d. h. die Kardinalitäten berechnen sich jeweils zu  $\#E^{pq} = 2(c^p + r^q) - 4$ .

**Lemma 4.4.** *Für alle  $n \geq 14$  gilt  $\frac{n}{4} - \frac{1}{2} \leq \#D^0, \#D^1 \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die unteren Schranken. Es gilt  $\#D^0 \geq \frac{1}{4} \sup\{\#E^{00}, \#E^{11}\} \geq \frac{1}{2} \sup\{c^0 + r^0, c^1 + r^1\} - 1$  für  $n \geq 14$ . Die beiden zur Supremumbildung herangezogenen Terme summieren sich mindestens zu  $n$  auf, so dass gemäß Schubfachprinzip  $\#D^0 \geq \frac{n}{4} - 1$  folgt. Analog gilt  $\#D^1 \geq \frac{n}{4} - 1$ .

Sei durch die Symmetrie der  $90^\circ$ -Drehung o. B. d. A.  $\#D^0 \leq \#D^1$  und durch die Symmetrien der horizontalen und vertikalen Spiegelung o. B. d. A.  $c^1 \leq c^0$ . Es ist zu beachten, dass für die letzte Forderung die Symmetrienausnutzung der vertikalen Spiegelung allein nicht ausreicht, da sich durch die Spiegelung die erste Forderung umkehrt, d. h. gerade Damen werden zu ungeraden und umgekehrt. Eine zusätzliche horizontale Spiegelung stellt ggf. die Forderung  $\#D^0 \leq \#D^1$  wieder her, wobei sie  $c^1 \leq c^0$  invariant lässt.

Angenommen die Aussagen  $\#D^0, \#D^1 \geq \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  gelten nicht. Dann ist insbesondere die oben gezeigte Schranke  $\#D^0 \geq \frac{n}{4} - 1$  mit Gleichheit erfüllt und gemäß Schubfachprinzip gilt  $c^0 + r^0 = c^1 + r^1 = \frac{n}{2}$ . Mit der Beobachtung  $n \equiv 0 \pmod{4}$  und  $c^0 \geq c^1 \implies c^0 \geq \frac{n}{4}$  folgt aus Lemma 4.3, dass ein  $k \in \{0, 1, 2\}$  existiert, so dass  $c^0 = \frac{n}{4} + k, r^0 = \frac{n}{4} - k$  und  $c^1 = \frac{n}{4} - k, r^1 = \frac{n}{4} + k$ . Da keine Orthogonale mehrfach besetzt ist und  $c^0 = r^1$  ergibt Proposition 4.2 die Gleichungen  $\#D^{00} = \#D^{11} = \frac{1}{2} \#D^0 = \frac{n}{8} - \frac{1}{2}$ . Die Implikation  $n \equiv 2 \pmod{8}$  ist dann ein Widerspruch zu  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

Die oberen Schranken ergeben sich unmittelbar aus den unteren Schranken und der Beziehung  $\#D^0 + \#D^1 = \frac{n}{2}$ .  $\square$

**Lemma 4.5.** Für alle  $n \geq 14$  gilt  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{00}, \#D^{11}, \#D^{01}, \#D^{10}$ .

*Beweis.* Sei o. B. d. A.  $\#D^{00} = \inf\{\#D^{00}, \#D^{11}, \#D^{01}, \#D^{10}\} = \frac{n}{8} - x$  für ein  $x \in \mathbb{Q}_0^+$ . Wir betrachten  $D^{00}$  und die kleinere Menge von  $D^{01}$  und  $D^{10}$  (bzw. eine beliebige von beiden, falls diese gleich groß sind) und bemerken, dass die Vereinigung alle Damen in geraden Spalten oder alle Damen in geraden Zeilen umfasst. Somit ist diese Damenmenge mindestens so groß wie die Anzahl aller besetzter gerader Spalten bzw. aller besetzter gerader Zeilen, d. h.  $\frac{n}{2} - \sup\{c^0, r^0\} \leq \#D^{00} + \inf\{\#D^{01}, \#D^{10}\} \leq \frac{n}{8} - x + \frac{1}{2} \#D^1$ .

Wir unterscheiden nach  $n \pmod{4}$  und nutzen die Ganzzahligkeit der Parameter aus. Zusammen mit Lemma 4.4 und der oberen Schranke aus Lemma 4.3 folgt im Fall  $n \equiv 0 \pmod{4}$  dann  $\frac{n}{2} - (\frac{n}{4} + 2) \leq \frac{n}{8} - x + \frac{n}{8} \iff x \leq 2$  und  $\frac{n}{2} - (\frac{n}{4} + \frac{3}{2}) \leq \frac{n}{8} - x + \frac{n}{8} + \frac{1}{4} \iff x \leq \frac{7}{4}$ , falls  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .  $\square$

## 4.2 Untersuchung von $E^{pq}$ quadratisch und quasi-verlustfrei dominiert

Im Folgenden werden wir annehmen, dass  $E^{pq}$  quadratisch und quasi-verlustfrei dominiert ist. Die Annahmen sind durch den Vorgriff auf Proposition 4.19 in Abschnitt 4.3 motiviert, wo gezeigt wird, dass  $n \not\equiv 0 \pmod{8}$  die Existenz einer quasi-verlustfrei dominierten Randfeldermenge  $E^{pq}$  impliziert. Sei o. B. d. A.  $c^p \geq r^q$ . Da die Breite und Höhe  $w := w^p = h^q \equiv 0 \pmod{2}$  gerade ist, existiert eine mittlere Spalte und Zeile in Bezug auf  $E^{pq}$ . Wir nummerieren die Orthogonalen derart, dass die mittlere Spalte und Zeile jeweils den Index 0 erhält. Im Folgenden bezeichnen wir als *Hauptdiagonalen* die beiden Diagonalen  $d = 0$  und  $s = 0$  durch die Eckfelder von  $E^{pq}$ . Durch diese Normalisierung gilt  $p \equiv q \pmod{2}$ , ergo  $D^{p \oplus q} = D^0$ . Dennoch wollen wir die allgemeine Schreibweise beibehalten, da sie an vielen Stellen für eine intuitivere Lesbarkeit sorgt.

Nachdem wir einige elementare Schlüsse aus diesen Annahmen gezogen haben, werden wir in Unterabschnitt 4.2.1 zunächst die Indexmengen  $C^p, R^q$  der unbesetzten Orthogonalen näher untersuchen. In Unterabschnitt 4.2.2 leiten wir hieraus die von  $D^{p\oplus q}$  besetzten Diagonalen fast vollständig ab. Mit der Einschränkung auf eine kleinere Klasse von Brettgrößen können wir so in Unterabschnitt 4.4.1 durch gemeinsame Betrachtung von  $A^{pq}$  und  $A^{\bar{p}\bar{q}}$  die noch fehlenden besetzten Diagonalen bestimmen und schließlich den Widerspruch zeigen.

**Lemma 4.6.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und seien  $d_+, d_-, s_+, s_-$  die Anzahlen der von  $D^{p\oplus q}$  besetzten Differenz- und Summendiagonalen oberhalb und unterhalb der jeweiligen Hauptdiagonale. Sei o. B. d. A.  $c^p \geq r^q$ . Für alle  $n \geq 14$  gilt:*

- i)  $c^p = \#D^{p\oplus q} + 1$  und  $r^q \in \{c^p - 1, c^p\}$ ,
- ii) beide Hauptdiagonalen von  $E^{pq}$  sind besetzt,
- iii) keine von  $D^{p\oplus q}$  besetzte Diagonale ist mehrfach besetzt  $\implies d_+ = s_-$  und  $d_- = s_+$ ,
- iv)  $E^{pq}$  v. d.  $\iff c^p = r^q \implies d_+ = d_- = \frac{1}{2}(\#D^{p\oplus q} - 1) \iff c^p \equiv 0 \pmod{2}$ ,
- v)  $c^p \equiv 1 \pmod{2} \implies |d_+ - d_-| = 1$  und  $\sup\{d_+, d_-\} = \frac{1}{2} \#D^{p\oplus q}$ .

*Beweis.* Seien  $d_0, s_0 \in \{0, 1\}$  Indikatorvariablen für die Besetzung der Hauptdiagonalen. Da  $E^{pq}$  q.-v. d. und  $c^p \geq r^q$ , gilt die Beschränkung  $r^q \geq c^p - 1$  und da  $E_T^{pq}, E_B^{pq}, E_L^{pq}, E_R^{pq}$  jeweils von ausreichend vielen besetzten Diagonalen gekreuzt werden, gilt zusätzlich

$$d_+ + s_+ + d_0 + s_0 \geq c^p, \quad (4.1)$$

$$d_- + s_- + d_0 + s_0 \geq c^p, \quad (4.2)$$

$$d_+ + s_- + d_0 + s_0 \geq r^q \geq c^p - 1, \quad (4.3)$$

$$d_- + s_+ + d_0 + s_0 \geq r^q \geq c^p - 1. \quad (4.4)$$

Weiter sind die Anzahlen der besetzten Differenz- und Summendiagonalen jeweils gleich der Anzahl der Damen. Da die Multiplizität der Besetzung der Hauptdiagonalen in den Indikatoren  $d_0, s_0 \in \{0, 1\}$  verloren geht, erhalten wir zumindest Schranken:

$$d_+ + d_- + d_0 + s_+ + s_- + s_0 \leq \#D^{p\oplus q}. \quad (4.5)$$

Angenommen  $c^p > \#D^{p\oplus q} + 1$ . Dann treffen zu wenige besetzte Diagonalen auf die obere und untere Kante und die Summe der Ungleichungen (4.1) und (4.2) führt mit Ungleichung (4.5) zum Widerspruch  $d_0 + s_0 + 2\#D^{p\oplus q} > 2\#D^{p\oplus q} + 2$ . Angenommen  $c^p < \#D^{p\oplus q} + 1$ . Dann gilt neben  $c^p \leq \#D^{p\oplus q}$  ebenso  $r^q \leq c^p \leq \#D^{p\oplus q}$  und somit  $\#E^{pq} = 2(c^p + r^q) - 4 \leq 4\#D^{p\oplus q} - 4$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Quasi-Verlustfreiheit von  $E^{pq}$ . Folglich gilt  $c^p = \#D^{p\oplus q} + 1$  und da  $E^{pq}$  q.-v. d. zudem  $r^q \in \{c^p - 1, c^p\}$ .

In die Summe der Ungleichungen (4.1) und (4.2) setzen wir  $c^p = \#D^{p\oplus q} + 1$  ein und erhalten  $2\#D^{p\oplus q} \geq d_+ + s_+ + d_- + s_- + 2(d_0 + s_0) \geq 2c^p - (d_0 + s_0) = 2\#D^{p\oplus q} + 2 -$

$(d_0 + s_0) \iff d_0 + s_0 \geq 2$ . Dies zeigt, dass die Felder auf der oberen und unteren Kante  $E_T^{pq}, E_B^{pq}$  liegenden Felder nur dominiert werden können, wenn  $d_0 = s_0 = 1$  gilt, d. h. wenn beide Hauptdiagonalen besetzt sind.

Keine Diagonale ist mehrfach besetzt, da ansonsten  $d_+ + d_- + s_+ + s_- < 2(\#D^{p\oplus q} - 1) = 2c^p - 4$  und damit Gleichung (4.1) oder (4.2) verletzt wäre. Ebenso dominiert jede Diagonale entweder auf der oberen Kante ein Feld aus  $E_T^{pq}$  oder auf der unteren Kante ein Feld aus  $E_B^{pq}$ . Somit lassen sich die Gleichungen (4.1), (4.2) verschärfen:

$$d_+ + s_+ = c^p - 2, \quad (4.1')$$

$$d_- + s_- = c^p - 2. \quad (4.2')$$

Zusammen mit  $d_+ + d_- = s_+ + s_- = c^p - 2$  folgen die Beziehungen  $d_+ = s_-, d_- = s_+$ .

Falls  $c^p = r^q$ , dann berechnet sich für  $n \geq 14$  die Größe von  $E^{pq}$  zu  $\#E^{pq} = 2(c^p + r^q) - 4 = 4\#D^{p\oplus q}$ , d. h.  $E^{pq}$  ist verlustfrei dominiert. Wegen  $c^p = \#D^{p\oplus q} + 1$  gilt zudem die Umkehrung. Wenn  $E^{pq}$  verlustfrei dominiert ist, dann wird jedes seiner Felder von genau einer Dame dominiert, d. h. die Ungleichungen (4.1)–(4.4) werden zu Gleichungen und es folgt  $d_+ + s_+ = d_- + s_- = d_+ + s_- = d_- + s_+ = c^p - 2$ . Gemäß Schubfachprinzip gilt dann  $d_+ = s_+ = d_- = s_- = \frac{c^p - 2}{2}$ .

Wir zeigen  $c^p \equiv 0 \pmod{2} \implies d_+ = d_- = s_+ = s_- = \frac{1}{2}(\#D^{p\oplus q} - 1)$ . Sei hierzu  $c^p \equiv 0 \pmod{2}$ . Angenommen die Implikation stimmt nicht. Sei dann o. B. d. A.  $d_- < \frac{c^p - 2}{2} \leq \frac{c^p - 2}{2} - 1 = \frac{c^p}{2} - 2$ . Aus Ungleichung (4.2) folgt  $s_- \geq \frac{c^p}{2}$  und aus Ungleichung (4.5) dann  $s_+ \leq \frac{c^p}{2} - 2$ . Dies ist ein Widerspruch zu Ungleichung (4.4). Die Umkehrung folgt direkt aus der Ganzzahligkeitsbedingung.

Falls  $c^p \equiv 1 \pmod{2}$ , sei o. B. d. A.  $d_+ > d_- \implies d_+ \geq \frac{1}{2}\#D^{p\oplus q}$ . Angenommen  $\sup\{d_+, d_-\} = d_+ > \frac{1}{2}\#D^{p\oplus q}$ . Aus  $d_- = s_+$  und Gleichung (4.1') folgt mit  $d_- = s_+ < \frac{1}{2}\#D^{p\oplus q} - 1 \implies d_- = s_+ \leq \frac{1}{2}\#D^{p\oplus q} - 2$  der Widerspruch zu Ungleichung (4.4). Die Beziehung  $|d_+ - d_-| = 1$  folgt dann direkt aus der Summierung  $d_+ + d_- + 1 = \#D^{p\oplus q}$  aller Differenzdiagonalen.  $\square$

Falls  $E^{pq}$  q.-v.d. nicht verlustfrei dominiert ist, dann sind aufgrund der Beziehung  $4\#D^{p\oplus q} - \#E^{pq} = 2$  fast alle Felder aus  $E^{pq}$  von genau einer Dame dominiert. Die Ausnahmen wollen wir nach Parität von  $\#D^{p\oplus q}$  getrennt mit den in Lemma 4.6 hergeleiteten Beziehungen näher untersuchen.

Hierfür definieren wir mit  $\tilde{E}^{pq} := \{(c, r) \mid c \equiv p \pmod{2}, r \equiv q \pmod{2}\}$ , sowie  $|c| = \frac{w}{2}$  oder  $|r| = \frac{w}{2}\} \supseteq E^{pq}$  die Menge aller Felder der passenden Parität auf dem von  $E^{pq}$  beschriebenen Quadrat. Ein Feld  $\tilde{e} \in \tilde{E}^{pq}$  heißt *Verlustfeld*, wenn  $\tilde{e}$  doppelt-diagonal dominiert wird oder wenn  $\tilde{e}$  diagonal dominiert wird, obschon  $\tilde{e} \notin E^{pq}$ . Im letzteren Fall existieren somit genau zwei Verlustfelder und im ersten Fall genau eines, ein sogenanntes *doppeltes Verlustfeld*. Weiter seien  $B_x := (\{\pm x\} \times \{\pm \frac{w}{2}\}) \cup (\{\pm \frac{w}{2}\} \times \{\pm x\})$ ,  $0 \leq x < \frac{w}{2}$ , die acht (bzw. vier, falls  $x = 0$ ) Felder aus  $\tilde{E}^{pq}$ , die in einer Orthogonale mit Index  $-x$  oder  $x$  liegen. Die Menge  $\tilde{E}^{pq} = \tilde{E}_T^{pq} \cup \tilde{E}_B^{pq} \cup \tilde{E}_L^{pq} \cup \tilde{E}_R^{pq}$  differenzieren wir nach Feldern auf der oberen, unteren, linken bzw. rechten Kante des von  $\tilde{E}^{pq}$  beschriebenen Quadrats. Wir nennen eine Kante  $\tilde{E}_v^{pq}$ ,  $v \in \{T, B, L, R\}$ , verlustfrei dominiert, wenn sie kein Verlustfeld enthält.

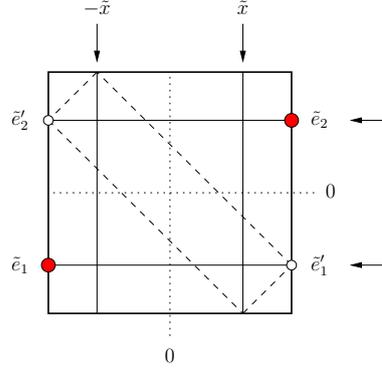


Abbildung 4.2: Fall  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ : Widerspruch unter der Annahme, dass die Verlustfelder  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in B_{\tilde{x}}$  nicht in derselben Zeile liegen

**Proposition 4.7.** Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und nicht verlustfrei dominiert. Sei o. B. d. A.  $d_+ = s_- \geq d_- = s_+$ . Für alle  $n \geq 14$  gilt:

- i)  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2} \implies \exists 0 \leq \tilde{r} < \frac{w}{2} : (-\frac{w}{2}, \tilde{r}), (\frac{w}{2}, \tilde{r})$  sind Verlustfelder,
- ii)  $\#D^{p\oplus q} \equiv 0 \pmod{2} \implies \exists 0 \leq \tilde{r} < \frac{w}{2} : \tilde{e}_1 := (-\frac{w}{2}, -\tilde{r}), \tilde{e}_2 := (-\frac{w}{2}, \tilde{r})$  sind Verlustfelder; falls  $\tilde{r} = 0$  ist  $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2$  ein doppeltes Verlustfeld.

*Beweis.* Die Felder aus  $B_x$  sind für alle  $0 \leq \tilde{x} < \frac{w}{2}$  derart angeordnet, dass jede Diagonale entweder zwei Felder oder kein Feld aus  $B_x$  schneidet. Da  $\#(B_x \cap E^{pq}) \equiv 0 \pmod{2}$  gilt, existiert kein  $x$ , so dass  $B_x$  genau ein nicht-doppeltes Verlustfeld enthält. Somit existiert ein  $0 \leq \tilde{x} < \frac{w}{2}$ , so dass alle Verlustfelder in  $B_{\tilde{x}}$  liegen.

Die in Lemma 4.6 hergeleiteten Anzahlen  $d_+, d_-, s_+, s_-$  der durch  $D^{p\oplus q}$  besetzten Differenz- und Summendiagonalen oberhalb und unterhalb der jeweiligen Hauptdiagonale zeigen, wie viele Verlustfelder jeweils auf der linken bzw. rechten Kante von  $\tilde{E}^{pq}$  liegen.

Falls  $\#D^{p\oplus q} \equiv 0 \pmod{2}$ , dann liegen beide Verlustfelder (bzw. ggf. ein doppeltes Verlustfeld) entweder auf der linken oder der rechten Kante. Unter der Annahme  $d_+ = s_- > d_- = s_+$  liegen beide auf der linken Kante. Da alle Verlustfelder in  $B_{\tilde{x}}$  liegen, folgt die Behauptung.

Falls  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ , dann liegt auf der linken und der rechten Kante jeweils ein Verlustfeld. Angenommen diese liegen nicht in derselben Zeile. Dann existiert ein  $0 < |\tilde{x}| < \frac{w}{2}$ , so dass  $\tilde{e}_1 := (-\frac{w}{2}, -\tilde{x}), \tilde{e}_2 := (\frac{w}{2}, \tilde{x})$  die beiden Verlustfelder sind und die Zeilen  $r = -\tilde{x}$  und  $r = \tilde{x}$  besetzt sind. Sei o. B. d. A.  $\tilde{x} > 0$  (vgl. Abbildung 4.2). Die Felder  $\tilde{e}'_1 := (\frac{w}{2}, -\tilde{x})$  und  $\tilde{e}'_2 := (-\frac{w}{2}, \tilde{x})$  liegen in besetzten Zeilen und sind keine Verlustfelder, somit sind die Diagonalen durch beide Felder unbesetzt. Da  $\text{sum}(\tilde{e}'_1)$  und  $\text{diff}(\tilde{e}'_2)$  sich im Feld  $(-\tilde{x}, \frac{w}{2}) \in B_{\tilde{x}}$  auf der oberen Kante, sowie  $\text{diff}(\tilde{e}'_1)$  und  $\text{sum}(\tilde{e}'_2)$  sich im Feld  $(\tilde{x}, -\frac{w}{2}) \in B_{\tilde{x}}$  auf der unteren Kante schneiden, sind beide Spalten  $c = -\tilde{x}$  und  $c = \tilde{x}$  besetzt. Jede Diagonale durch  $\tilde{e}_1$  oder  $\tilde{e}_2$  schneidet jedoch ebenso die obere oder untere Kante in einer Spalte  $c \in \{\pm\tilde{x}\}$ , was den Widerspruch zeigt.  $\square$

### 4.2.1 Zerlegung von $E^{pq}$ in $a$ -Mengen

Im Folgenden nehmen wir  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  an. Falls  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , ist dies bereits eine Implikation aus  $\#D^0 = \#D^1 = \frac{n}{4}$  aus Lemma 4.4. Weiter werden wir durch Proposition 4.19 in Abschnitt 4.3 noch sehen, dass die Annahme für  $n \equiv 6 \pmod{8}$  nicht einschränkend ist, da dann  $E^{pq}$  verlustfrei dominiert ist und die Annahme aus Lemma 4.6 folgt.

Die Zeile, in der nach Proposition 4.7 die beiden Verlustfelder liegen, bezeichnen wir als *Verlustzeile*  $\tilde{r}$ . Zwischen den Indizes der unbesetzten Spalten und Zeilen können wir schnell die folgende einfache Beziehung feststellen.

**Proposition 4.8.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ . Falls  $E^{pq}$  nicht verlustfrei dominiert ist, sei  $\tilde{r}$  die Verlustzeile. Für alle  $n \geq 14$  gilt:*

- i) *Falls  $E^{pq}$  v. d. oder  $|x| \neq |\tilde{r}|$ , dann gilt  $\#(\{\pm x\} \cap C^p) = \#(\{\pm x\} \cap R^q), \forall 0 \leq x < \frac{w}{2}$ .*
- ii) *Falls  $|x| = |\tilde{r}|$ , dann gilt  $\#(\{\pm x\} \cap C^p) - \#(\{\pm x\} \cap R^q) = 1, \forall 0 \leq x < \frac{w}{2}$ .*

*Beweis.* Für ein  $0 \leq x < \frac{w}{2}$  betrachten wir die Felder  $B_x \subset \tilde{E}^{pq}$  der Schnittpunkte aller vier (bzw. zwei, falls  $x = 0$ ) Orthogonalen mit Index aus  $\{\pm x\}$  mit dem Rand  $\tilde{E}^{pq}$ . Jede Diagonale durch ein Feld aus  $B_x$  schneidet genau zwei Felder aus  $B_x$ , wovon das eine in einer Spalte mit Absolutindex  $x$  und das andere in einer Zeile mit Absolutindex  $x$  liegt. Nach Proposition 4.7 liegen beide ggf. vorhandenen Verlustfelder in derselben Zeile, so dass die Aussage folgt.  $\square$

**Definition 4.9.** *Eine maximale Menge  $G \subseteq \tilde{E}_v^{pq}, v \in \{T, B, L, R\}$ , diagonal dominierter äquidistanter Felder mit Abstand  $a$  heißt  $a$ -Menge.*

*Eine  $a$ -Menge  $G$  heißt insbesondere  $a$ -Innenmenge, wenn  $G$  kein Eckfeld  $\sigma \in \{\pm \frac{w}{2}\}^2$  enthält und heißt  $a$ -Eckmenge sonst.*

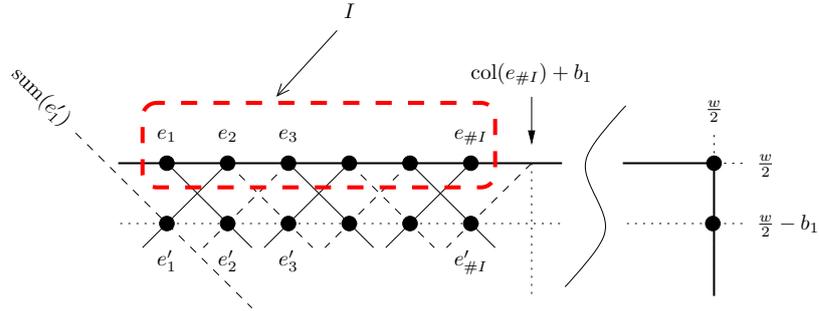
*Zwei  $a$ -Mengen  $G_1, G_2$  heißen miteinander verflochten, wenn ein Element aus einer Menge zwischen zwei Elementen der anderen Menge liegt, d. h.  $\exists \sigma_1 \in G_1, \exists \sigma'_2, \sigma''_2 \in G_2 : \text{sum}(\sigma'_2) < \text{sum}(\sigma_1) < \text{sum}(\sigma''_2)$ .*

*Eine  $a$ -Menge  $G$  heißt gerade, wenn  $\#G \equiv 0 \pmod{2}$  und heißt ungerade sonst.*

Aus der Definition ergeben sich folgende Implikationen. Da  $E^{pq}$  q.-v. d. mit  $c^p \geq r^q$  gilt  $\tilde{E}_T^{pq} = E_T^{pq}, \tilde{E}_B^{pq} = E_B^{pq}$ , d. h. insbesondere liegt jedes Feld einer  $a$ -Menge der oberen oder unteren Kante von  $E^{pq}$  in einer unbesetzten Spalte. Falls  $E^{pq}$  v. d., gilt zudem  $\tilde{E}_L^{pq} = E_L^{pq}, \tilde{E}_R^{pq} = E_R^{pq}$ . Aufgrund der Maximalität sind eine  $a$ -Innenmenge und eine  $a$ -Eckmenge immer disjunkt. Weiter existieren auf einer Kante  $\tilde{E}_v^{pq}, v \in \{T, B, L, R\}$ , entweder genau zwei  $a$ -Eckmengen oder die beiden Eckfelder liegen in derselben  $a$ -Eckmenge. Die zu  $E^{pq}$  gehörigen  $a$ -Mengen hängen von der konkreten Wahl des Parameters  $a$  ab. Später werden wir hierfür einen geeigneten Referenzabstand  $a$  definieren.

Proposition 4.7 impliziert für alle  $0 \leq x < \frac{w}{2}$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \left(-\frac{w}{2}, x\right) \in \tilde{E}_L^{pq} \text{ diagonal dominiert} &\iff \left(\frac{w}{2}, x\right) \in \tilde{E}_R^{pq} \text{ diagonal dominiert,} \\ \left(x, \frac{w}{2}\right) \in \tilde{E}_T^{pq} \text{ diagonal dominiert} &\iff \left(x, -\frac{w}{2}\right) \in \tilde{E}_B^{pq} \text{ diagonal dominiert,} \end{aligned}$$

Abbildung 4.3:  $b_1$ -Innenmenge  $I$  ist gerade und kreuzweise dominiert

d. h. insbesondere sind die  $a$ -Mengen auf gegenüberliegenden Kanten äquivalent. Vor diesem Hintergrund bezeichnen wir eine Eckmenge auf der oberen oder unteren Kante, die ein Feld aus  $(-\frac{w}{2}, \pm\frac{w}{2})$  enthält, als eine *linke Eckmenge* und wir bezeichnen sie als *rechte Eckmenge*, wenn sie ein Feld aus  $(\frac{w}{2}, \pm\frac{w}{2})$  enthält. Für analog definierte Eckmengen auf der linken oder rechten Kante verwenden wir die Begriffe *obere Eckmenge* und *untere Eckmenge*. Wir beziehen uns oft auf die entsprechenden Eckmengen auf der oberen Kante und verwenden in diesem Zusammenhang den bestimmten Artikel.

Die Abstände der beiden äußersten benachbarten Spalten aus  $C^p = \{c_i : c_1 < \dots < c_{c_p}\}$  bzw. der beiden äußersten benachbarten Zeilen aus  $R^q = \{r_i : r_1 < \dots < r_{r_q}\}$  bezeichnen wir folgendermaßen:  $a_1 := c_2 - c_1$ ,  $a_2 := c_{c_p} - c_{c_p-1}$ ,  $b_1 := r_{r_q} - r_{r_q-1}$ ,  $b_2 := r_2 - r_1$ . Wir werden später sehen, dass diese Abstände fast alle identisch sind. Zuvor zeigen wir noch eine oft benötigte einfache Eigenschaft von bestimmten Innenmengen.

**Proposition 4.10.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ . Weiter sei o. B. d. A.  $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$  und  $I = \{e_1, e_2, \dots, e_{\#I}\}, \text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \dots < \text{col}(e_{\#I})$ , eine  $b_1$ -Innenmenge auf  $E_T^{pq}$  oder  $E_B^{pq}$ . Falls  $b_1 \leq a_2$ , gilt für alle  $n \geq 14$   $\#I \equiv 0 \pmod{2}$  und  $I$  ist kreuzweise dominiert, d. h.  $e_i \in I \subset E_T^{pq}$  ( $e_i \in I \subset E_B^{pq}$ ) ist genau dann durch eine Summendiagonale (Differenzdiagonale) dominiert, wenn  $i \equiv 1 \pmod{2}$ .*

*Beweis.* Wegen der Äquivalenz von  $a$ -Mengen auf gegenüberliegenden Kanten sei  $I = \{e_1, e_2, \dots, e_{\#I}\}, \text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \dots < \text{col}(e_{\#I})$ , eine  $b_1$ -Innenmenge o. B. d. A. auf der oberen Kante  $E_T^{pq}$ . Da  $b_1 \leq a_2$  und  $I$  keine  $b_1$ -Eckmenge ist, hat  $I$  einen ausreichenden Abstand  $\text{col}(e_{\#I}) < \frac{w}{2} - b_1$  von der rechten Kante (vgl. Abbildung 4.3).

Seien  $e'_i := (\text{col}(e_i), \frac{w}{2} - b_1), i \in \{1, 2, \dots, \#I\}$ , die Felder mit Abstand  $b_1$  unterhalb von  $e_i$ . Falls  $\text{col}(e_1) > -\frac{w}{2} + b_1$ , liegt das Feld  $(\text{col}(e_1) - b_1, \frac{w}{2})$  auf der oberen Kante in einer besetzten Spalte, ist demnach nicht diagonal dominiert und folglich ist die Differenzdiagonale durch  $e'_1$  besetzt. Andernfalls gilt  $a_1 \leq b_1$  und da  $I$  keine  $b_1$ -Eckmenge ist sogar  $a_1 < b_1$ . Die Diagonale  $\text{sum}(e'_1) = \text{col}(e_1) + \frac{w}{2} - b_1$  liegt mit  $-\frac{w}{2} < \text{col}(e_1) < -\frac{w}{2} + b_1$  im Korridor  $-b_1 < \text{sum}(e'_1) < 0$  und schneidet die untere Kante in einer besetzten Spalte echt zwischen  $\frac{w}{2} - a_2 \leq \frac{w}{2} - b_1$  und  $\frac{w}{2}$ . In beiden Fällen ist somit die Differenzdiagonale durch  $e'_1$  besetzt, welche die obere Kante in der Spalte  $\text{col}(e_1) + b_1$  schneidet.

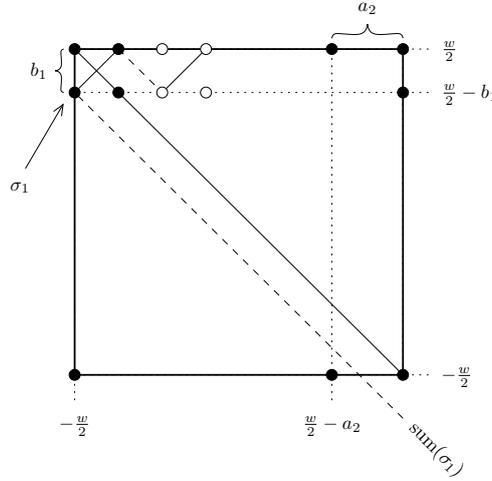


Abbildung 4.4: Die Annahme  $a_2 > b_1$  impliziert eine gerade linke  $b_1$ -Eckmenge auf  $E_T^{pq}$

Somit ist das Feld  $e_2 = (\text{col}(e_1) + b_1, \frac{w}{2}) \in I$  ebenfalls Element der Innenmenge. Falls  $\#I \geq 3$ , ist die gemeinsame Diagonale durch  $e_2$  und  $e'_3$  unbesetzt und es muss die Differenzdiagonale durch  $e'_3$  besetzt sein. Diese schneidet die obere Kante in der Spalte  $\text{col}(e_3) + b_1 < \frac{w}{2}$  und impliziert  $\#I \geq 4$ . Die Implikationskette setzt sich induktiv fort und zeigt  $\#I \equiv 0 \pmod{2}, i \equiv 0 \pmod{2} \implies e_i$  ist durch eine Differenzdiagonale dominiert.

Zum Beweis von  $i \equiv 1 \pmod{2} \implies e_i$  ist durch eine Summendiagonale dominiert entwickeln wir ausgehend von  $\text{col}(e_{\#I}) + b_1 \notin C^p$  in analoger Weise induktiv eine Folge unbesetzter Differenz- und besetzter Summendiagonalen.  $\square$

**Lemma 4.11.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ . Für alle  $n \geq 14$  gilt  $a_1 = a_2 = \inf\{b_1, b_2\}$ . Falls  $E^{pq}$  verlustfrei dominiert ist, gilt insbesondere  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$ .*

*Beweis.* Sei o. B. d. A.  $a_1 \leq a_2$  und  $b_1 \leq b_2$ . Falls  $a_1 = a_2$ , folgt aus Proposition 4.8 die Behauptung.

Angenommen  $a_1 < a_2$ . Wir zeigen  $a_2 \leq b_1$  und nehmen dafür zunächst  $a_2 > b_1$  an. Die Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_1)$  durch  $\sigma_1 := (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2} - b_1) \in E^{pq}$  ist unbesetzt, da sie die verlustfrei dominierte untere Kante in einer Spalte mit Index aus dem offenen Intervall  $]\frac{w}{2} - a_2, \frac{w}{2}[$  schneidet und somit kein Feld aus  $E_B^{pq}$  dominiert (vgl. Abbildung 4.4). Daher ist die Differenzdiagonale durch  $\sigma_1$  besetzt und die Spalte  $-\frac{w}{2} + b_1$  folglich unbesetzt. Wäre die Spalte  $-\frac{w}{2} + 2b_1$  unbesetzt, dann wäre die Differenzdiagonale durch  $(-\frac{w}{2} + 2b_1, \frac{w}{2} - b_1)$  besetzt und die Spalte  $-\frac{w}{2} + 3b_1 \leq \frac{w}{2} - a_2$  wäre zudem unbesetzt. Es folgt induktiv, dass die linke  $b_1$ -Eckmenge gerade ist. Nach Proposition 4.10 ist ggf. jede  $b_1$ -Innenmenge auf der oberen Kante gerade, so dass wir zusammen mit der einelementigen rechten  $b_1$ -Eckmenge den Widerspruch  $c^p \equiv 1 \pmod{2}$  zu Lemma 4.6 erhalten. Somit gilt  $a_2 \leq b_1$ .

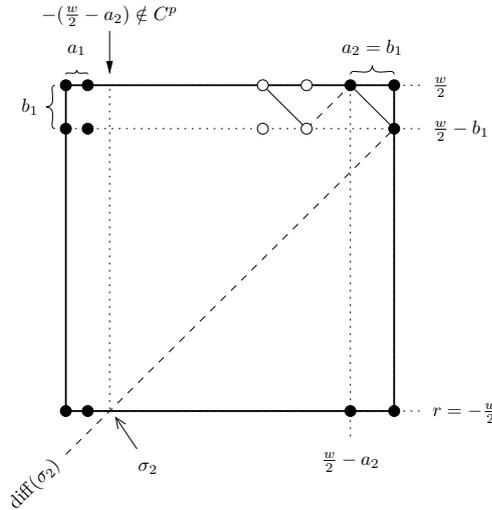


Abbildung 4.5: Falls  $-(\frac{w}{2} - a_2) \notin C^p$ , ist die rechte  $b_1$ -Eckmenge auf  $E_T^{pq}$  gerade

Aus der Beziehung  $a_1 < b_1$  und Proposition 4.8 können wir betragsmäßig die Verlustzeile zu  $|\tilde{r}| = \frac{w}{2} - a_1$  bestimmen. Aus  $\tilde{r} \neq \frac{w}{2} - a_2 \in C^p$  folgt dann wieder mit Proposition 4.8, dass  $b_1 \leq a_2$  gilt. Somit gilt  $a_2 = b_1$ .

Wir unterscheiden die Fälle  $-(\frac{w}{2} - a_2) \notin C^p$  und  $-(\frac{w}{2} - a_2) \in C^p$ . Falls  $-(\frac{w}{2} - a_2) \notin C^p$ , ist die Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_2)$  durch  $\sigma_2 := (-\frac{w}{2}, -(\frac{w}{2} - a_2)) \notin E^{pq}$  unbesetzt und es folgt induktiv durch eine analoge Argumentation wie oben, dass die rechte  $b_1$ -Eckmenge gerade ist (vgl. Abbildung 4.5). Nach Proposition 4.10 ist ggf. jede  $b_1$ -Innenmenge auf der oberen Kante gerade, so dass die nach Voraussetzung  $-(\frac{w}{2} - a_2) \notin C^p$  einelementige linke  $b_1$ -Eckmenge erneut zum Widerspruch  $c^p \equiv 1 \pmod{2}$  zu Lemma 4.6 führt.

Falls  $-(\frac{w}{2} - a_2) \in C^p$ , sind nach Proposition 4.8 die Zeilen  $\pm(\frac{w}{2} - a_2) \in R^q$  beide unbesetzt und es folgt  $b_2 \leq a_2 \implies b_1 = b_2 = a_2$ . Da somit  $b_1 \leq b_2$  immer gilt, fordern wir durch Ausnutzung der Symmetrie der horizontalen Spiegelung o. B. d. A.  $\tilde{r} \geq 0 \implies \tilde{r} = \frac{w}{2} - a_1$ .

Wir betrachten zum Feld  $e_1 := (-\frac{w}{2} + a_1, \frac{w}{2}) \in E^{pq}$  zum einen die  $b_1$ -Menge  $G_R = \{e_1, e_2, \dots, e_{\#G_R}\}$ ,  $\text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \dots < \text{col}(e_{\#G_R})$ , und zum anderen die Felder  $e'_i := (\text{col}(e_i), \frac{w}{2} - b_1)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, \#G_R\}$ , mit Abstand  $b_1$  unterhalb von  $e_i$ . Sei weiter  $\tilde{\sigma}_1 = (-\frac{w}{2}, \frac{w}{2} - a_1)$  das Verlustfeld auf der linken Kante. Die Schnittspalten der Summendiagonale  $\text{sum}(e'_1) = a_1 - b_1$  sowie  $\text{sum}(\tilde{\sigma}_1) = -a_1$  mit der unteren Kante liegen im offenen Intervall  $]\frac{w}{2} - a_2, \frac{w}{2}[$  und sind daher besetzt (vgl. Abbildung 4.6). Statt dieser beiden Summendiagonalen sind somit die Differenzdiagonalen durch  $e'_1$  und  $\tilde{\sigma}_1$  besetzt. Insbesondere impliziert die besetzte Diagonale  $\text{diff}(e'_1)$  ein weiteres Feld  $e_2 \in G_R$ . Da  $e_1$  und  $e_2$  nicht kreuzweise dominiert werden, kann  $G_R$  nach Proposition 4.10 keine  $b_1$ -Innenmenge sein und ist infolgedessen die rechte  $b_1$ -Eckmenge. Weiter schließen wir durch

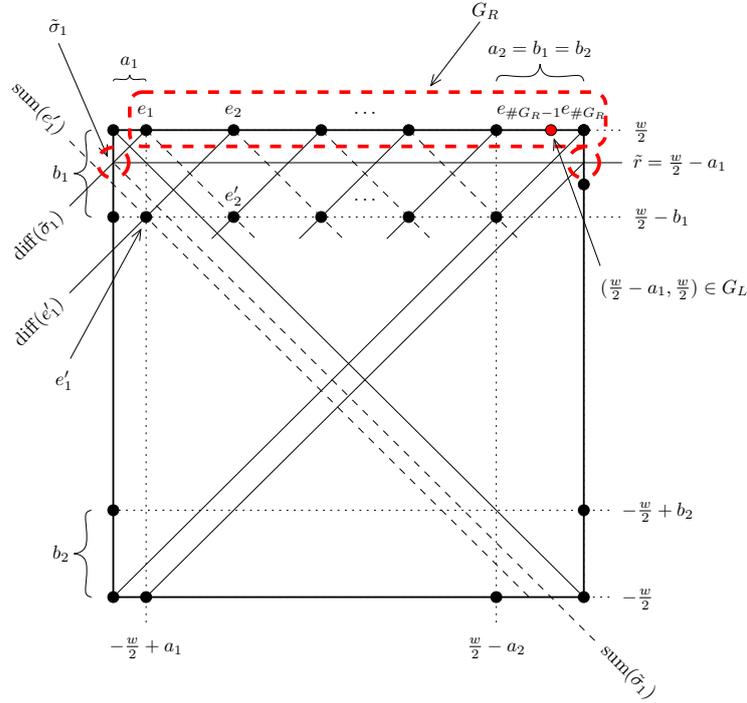


Abbildung 4.6: Die Annahme  $b_1 = b_2 = a_2$  und  $\tilde{r} = \frac{w}{2} - a_1$  impliziert eine Schar besetzter Differenzdiagonalen mit Abstand  $b_1$  durch die obere Kante

eine Implikationskette wie oben, dass alle Felder aus  $G_R$  durch Differenzdiagonalen dominiert werden.

Nach Lemma 4.6 treffen ebenso viele Differenz- wie Summendiagonalen auf die obere Kante  $\tilde{E}_T^{pq}$ . Gegebenenfalls vorhandene  $b_1$ -Innenmengen auf der oberen Kante werden gemäß Proposition 4.10 über ebenso viele Differenz- wie Summendiagonalen dominiert. In der Konsequenz heißt dies, dass in der linken  $b_1$ -Eckmenge  $G_L$  mindestens  $\#G_R$  Felder durch Summendiagonalen dominiert werden. Da die obere Kante verlustfrei dominiert ist, muss  $G_L$  daher mindestens so groß wie  $G_R$  sein. Folglich ist ebenso das Feld  $(-\frac{w}{2} + b_1(\#G_R - 1), \frac{w}{2}) = (\frac{w}{2} - a_1, \frac{w}{2})$  Element der linken  $a$ -Eckmenge, im Widerspruch zur Annahme  $a_1 < a_2$ .  $\square$

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $a := a_1 = a_2 = \inf\{b_1, b_2\}$  den *Referenzabstand* von  $E^{pq}$ , den wir bei der Betrachtung konkreter  $a$ -Mengen heranziehen wollen. Wegen der Äquivalenz von  $a$ -Mengen auf gegenüberliegenden Kanten können wir mit dem Referenzabstand nun leicht eine sinnvolle Definition für die Eckmengengrößen ableiten. Mit  $\alpha_1, \alpha_2$  bezeichnen wir Kardinalitäten von  $a$ -Eckmengen auf der oberen oder unteren Kante, wobei  $\alpha_1$  die Größe der linken Eckmenge und  $\alpha_2$  die der rechten Eckmenge angibt. Analog bezeichne  $\beta_1$  die Größe einer oberen Eckmenge und  $\beta_2$  die einer unteren Eckmenge.

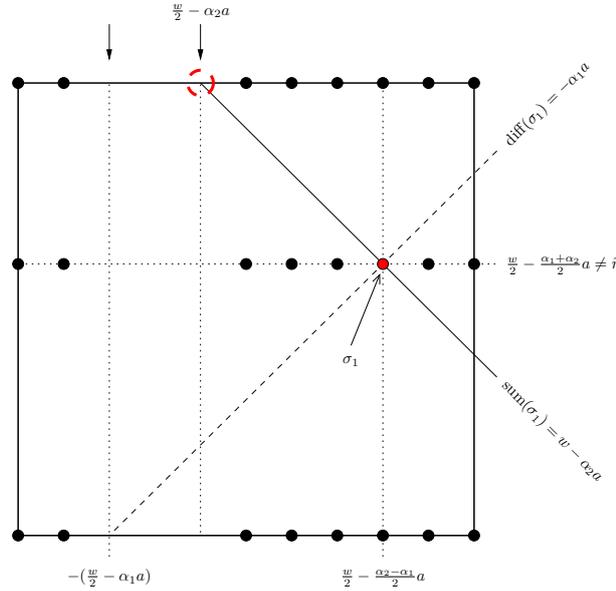


Abbildung 4.7: Fall 1:  $E^{pq}$  v. d. oder  $|\tilde{r}| \neq \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$  — Bsp.:  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 6$

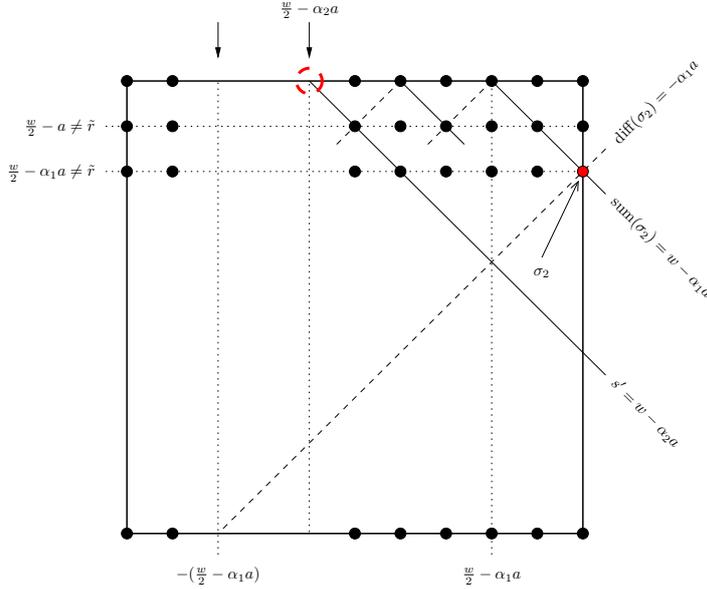
**Lemma 4.12.** Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ . Für alle  $n \geq 14$  gilt  $\alpha_1 = \alpha_2 = \sup\{\beta_1, \beta_2\} \geq 2$ . Falls  $E^{pq}$  verlustfrei dominiert ist, gilt insbesondere  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ .

*Beweis.* Angenommen  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Sei o. B. d. A.  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Da die Anzahl der unbesetzten Spalten und die  $a$ -Innenmengen jeweils gerade sind (siehe Lemma 4.6 und Proposition 4.10), ist ebenso  $\alpha_1 + \alpha_2$  gerade, daher gilt  $\alpha_2 - \alpha_1 \equiv 0 \pmod{2}$ .

Falls  $E^{pq}$  nicht verlustfrei dominiert ist, sei  $\tilde{r}$  die Verlustzeile. Wir unterscheiden die beiden Fälle  $E^{pq}$  v. d. oder  $|\tilde{r}| \neq \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$  sowie  $|\tilde{r}| = \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$ .

Falls  $E^{pq}$  v. d. oder  $|\tilde{r}| \neq \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$ , dann ist wegen  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \leq \alpha_2 - 1$  die Spalte  $c = \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$  unbesetzt und damit nach Proposition 4.8 zumindest eine der beiden Zeilen aus  $\{\pm(\frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a)\}$  unbesetzt. Sei o. B. d. A.  $r = \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a \neq \tilde{r}$  unbesetzt (vgl. Abbildung 4.7). Ebenfalls unbesetzt ist die Differenzdiagonale  $d = -\alpha_1 a$  durch das Feld  $(-\frac{w}{2} - \alpha_1 a, -\frac{w}{2}) \notin E^{pq}$ . Wir betrachten nun das Feld  $\sigma_1 := (\frac{w}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} a, \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a) \in A^{pq}$ . Da dieses auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_1) = -\alpha_1 a$  liegt, muss stattdessen die Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_1) = w - \alpha_2 a$  durch  $\sigma_1$  besetzt sein. Diese schneidet jedoch die obere Kante in der besetzten Spalte  $\frac{w}{2} - \alpha_2 a$ , ein Widerspruch.

Falls  $|\tilde{r}| = \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a$ , dann gilt insbesondere  $|\tilde{r}| \neq \frac{w}{2} - a$  und  $|\tilde{r}| \neq \frac{w}{2} - \alpha_1 a$ . Weiter ist die Spalte  $c = \frac{w}{2} - \alpha_1 a$  unbesetzt und damit nach Proposition 4.8 zumindest eine der beiden Zeilen aus  $\{\pm(\frac{w}{2} - \alpha_1 a)\}$  unbesetzt. Sei o. B. d. A.  $r = \frac{w}{2} - \alpha_1 a$  unbesetzt (vgl. Abbildung 4.8). Ebenfalls unbesetzt ist die Differenzdiagonale  $d = -\alpha_1 a$  durch das Feld  $(-\frac{w}{2} - \alpha_1 a, -\frac{w}{2})$ . Wir betrachten nun das Feld  $\sigma_2 := (\frac{w}{2}, \frac{w}{2} - \alpha_1 a) \in A^{pq}$ . Da


 Abbildung 4.8: Fall 2:  $|\tilde{r}| = \frac{w}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}a$  — Bsp.:  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 6$ 

dieses auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_2) = -\alpha_1 a$  liegt, muss stattdessen die Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_2) = w - \alpha_1 a$  durch  $\sigma_2$  besetzt sein. Diese schneidet die obere Kante in der unbesetzten Spalte  $\frac{w}{2} - \alpha_1 a$ . Da ebenfalls die Zeile  $r = \frac{w}{2} - a$  unbesetzt ist und  $(\alpha_2 - \alpha_1)a = 2ka, k \in \mathbb{N}^+$ , folgt durch eine Implikationskette über besetzte Summendiagonalen und unbesetzte Differenzdiagonalen (vgl. Abbildung 4.8), dass die Summendiagonale  $s' = w - \alpha_2 a$  besetzt ist. Diese schneidet jedoch die obere Kante in der besetzten Spalte  $\frac{w}{2} - \alpha_2 a$ , ein Widerspruch.

Der Widerspruch in beiden Fällen zeigt  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Durch den Bezug der Definition der  $a$ -Eckmengengrößen auf den Referenzabstand ergibt sich  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 2$ . Die Aussage  $\sup\{\beta_1, \beta_2\} = \alpha_1 = \alpha_2$  bzw.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ , falls  $E^{pq}$  v. d., folgt schließlich aus Proposition 4.8.  $\square$

Wir definieren  $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 = \sup\{\beta_1, \beta_2\}$  als die *Referenz-Eckmengengröße* von  $E^{pq}$  und schließen diesen Unterabschnitt mit dem Ergebnis, dass die unbesetzten Orthogonalen – ggf. mit Ausnahme der Verlustzeile – vollständig symmetrisch angeordnet sind.

**Lemma 4.13.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ . Für alle  $n \geq 14$  gilt  $0 \notin C^p, -x \in C^p \iff x \in C^p, \forall 0 < x < \frac{w}{2}$  und  $R^q \subseteq C^p$ . Falls  $E^{pq}$  verlustfrei dominiert ist, gilt insbesondere  $R^q = C^p$ .*

*Beweis.* Falls  $E^{pq}$  nicht v. d., sei  $\tilde{r}$  die Verlustzeile. Wir zeigen zunächst die Symmetrie  $-x \in C^p \iff x \in C^p, \forall 0 < x < \frac{w}{2}$ . Lemma 4.12 beweist bereits den für die  $a$ -Eckmengen relevanten Teil. Sei somit  $(x, \frac{w}{2})$  ein beliebiges Feld einer  $a$ -Innenmenge auf  $\tilde{E}_T^{pq}$  mit  $x \neq 0$ .

Da die  $a$ -Innenmengen nach Proposition 4.10 kreuzweise dominiert werden, schneiden die besetzten Diagonalen durch  $(x, \pm \frac{w}{2})$  den Rand  $\tilde{E}^{pq}$  in beiden Zeilen mit Index  $r = -x$  und  $r = x$ . Falls  $E^{pq}$  v. d. oder  $x \neq \tilde{r}$ , gilt  $\pm x \in R^q$ , ansonsten ist zumindest eine Zeile aus  $\{\pm x\}$  unbesetzt. In beiden Fällen folgt nach Proposition 4.8 dann  $-x \in C^p$ . Aus der Symmetrie für  $0 < x < \frac{w}{2}$  schließen wir mit  $c^p \equiv 0 \pmod{2}$  noch  $0 \notin C^p$ .

Die Inklusionsbeziehung  $R^q \subseteq C^p$  bzw.  $R^q = C^p$ , falls  $E^{pq}$  v. d., folgt schließlich aus Proposition 4.8.  $\square$

## 4.2.2 Bestimmung der von $D^{p \oplus q}$ besetzten Diagonalen

Im letzten Unterabschnitt haben wir mit Hilfe von  $a$ -Mengen die Symmetrie der unbesetzten Orthogonalen hergeleitet. Darauf aufbauend wollen wir nun sowohl den Referenzabstand  $a$  als auch die Konfiguration der  $a$ -Mengen konkretisieren und daraus schließlich allein von  $n$  abhängig fast alle von  $D^{p \oplus q}$  besetzten Diagonalen ableiten.

Die Untersuchung führen wir zunächst getrennt nach  $\alpha \geq 3$  und  $\alpha = 2$  durch und leiten für beide Fälle jeweils zwei zulässige Konfigurationsklassen ab. Durch Einbeziehung der in den Klassen jeweils besetzten Diagonalen lässt sich eine Gemeinsamkeit von drei dieser Klassen erkennen, über die sich diese ausschließen lassen, so dass letztendlich nur eine Konfigurationsklasse übrig bleibt.

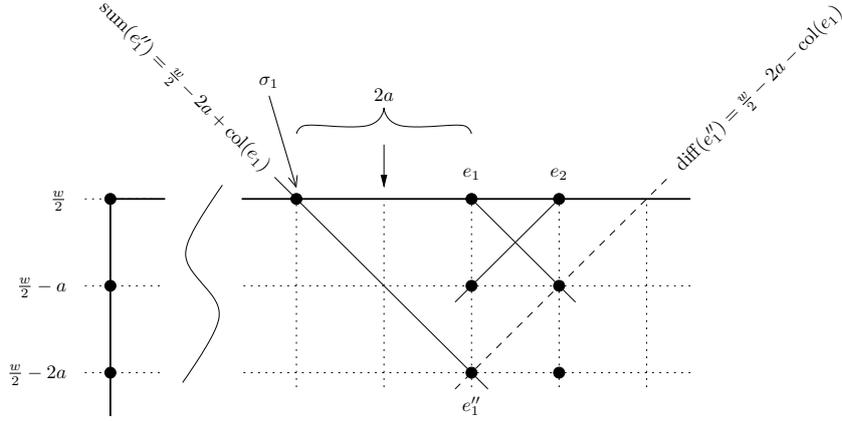
**Lemma 4.14.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $\alpha \geq 3$ . Für alle  $n \geq 74$  existiert keine  $a$ -Innenmenge auf  $E_T^{pq}$  oder  $E_B^{pq}$  und es gilt  $\alpha = \frac{c^p}{2}$  sowie  $w \geq a \frac{c^p}{2} + 2$ .*

*Beweis.* Wegen  $\alpha \geq 3$  und der Symmetrie unbesetzter Orthogonalen aus Lemma 4.13 seien o. B. d. A. die Zeilen  $r = \frac{w}{2}, \frac{w}{2} - a, \frac{w}{2} - 2a$  unbesetzt.

Wir zeigen zunächst, dass auf der oberen und unteren Kante keine  $a$ -Innenmenge existiert. Hierzu nehmen wir an, dass doch  $a$ -Innenmengen existieren und betrachten insbesondere die  $a$ -Innenmenge  $I = \{e_1, e_2, \dots, e_{\#I}\}$ ,  $\text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \dots < \text{col}(e_{\#I})$ , auf der oberen Kante  $E_T^{pq}$ , die am weitesten rechts liegt. Nach Proposition 4.10 ist  $\#I$  gerade, d. h.  $e_2 \in I$ . Wegen  $a_2 = a$  hat  $e_2$  einen Abstand größer als  $a$  von der rechten Kante, d. h.  $\text{col}(e_1) < \frac{w}{2} - 2a$ . Sei  $e_1'' := (\text{col}(e_1), \frac{w}{2} - 2a) \in A^{pq}$  das Feld mit Abstand  $2a$  unterhalb von  $e_1$  (vgl. Abbildung 4.9). Wegen  $\text{col}(e_1) < \frac{w}{2} - 2a$  schneidet die Differenzdiagonale  $\text{diff}(e_1'') = \frac{w}{2} - 2a - \text{col}(e_1)$  die obere Kante. Falls  $\#I > 2$ , ist das Schnittfeld mit der oberen Kante  $e_3 \in I$ , andernfalls liegt es in einer besetzten Spalte. Da nach Proposition 4.10 alle  $a$ -Innenmengen kreuzweise dominiert werden, ist in beiden Fällen  $\text{diff}(e_1'')$  unbesetzt und daher stattdessen  $\text{sum}(e_1'') = \frac{w}{2} - 2a + \text{col}(e_1)$  besetzt.

Um zu zeigen, dass ebenso  $\text{sum}(e_1'')$  die obere Kante schneidet, nehmen wir  $-\frac{w}{2} + a < \text{col}(e_1) < -\frac{w}{2} + 2a$  an. Wegen  $\inf\{b_1, b_2\} = a$  schneidet  $\text{sum}(e_1'')$  die linke Kante in der Verlustzeile  $\frac{w}{2} - a < \tilde{r} < \frac{w}{2}$ . Nach der Symmetrie aus Lemma 4.13 gilt dann jedoch  $-\tilde{r}, \tilde{r} \in C^p$  und folglich der Widerspruch  $a_1, a_2 < a$ . Somit hat  $e_1$  mit  $\text{col}(e_1) > -\frac{w}{2} + 2a$  einen genügend großen Abstand von der linken Kante.

Die besetzte Summendiagonale schneidet die obere Kante in der Spalte  $\text{col}(e_1) - 2a$ . Das Schnittfeld  $\sigma_1 := (\text{col}(e_1) - 2a, \frac{w}{2})$  kann nicht Element einer weiteren  $a$ -Innenmenge

Abbildung 4.9: Der Abstand einer  $a$ -Innenmenge zur  $a$ -Eckmenge beträgt  $2a$  im Fall  $\alpha \geq 3$ 

$I'$  sein, da nach Proposition 4.10 alle  $a$ -Innenmengen kreuzweise dominiert werden und somit ein weiteres Feld  $(\text{col}(\sigma_1) + a, \frac{w}{2}) = (\text{col}(e_1) - a, \frac{w}{2})$  in  $I'$  und wegen der Maximalität der  $a$ -Mengen zudem in  $I$  wäre, im Widerspruch dazu, dass  $e_1$  das linkeste Element in  $I$  ist. Somit gehört  $\sigma_1$  zur linken  $a$ -Eckmenge,  $I$  ist die einzige  $a$ -Innenmenge und der Abstand von  $e_1 \in I$  zum rechtesten Element  $\sigma_1$  der linken  $a$ -Eckmenge beträgt  $2a$ . Wegen der Symmetrie aus Lemma 4.13 beträgt ebenso der Abstand von  $e_{\#I} \in I$  zum linkesten Element der rechten  $a$ -Eckmenge  $2a$ .

Die Breite  $w$  von  $E^{pq}$  berechnet sich somit zu  $w = a(c^p + 1)$ . Mit  $\#D^{p \oplus q} \geq \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  aus Lemma 4.4 und  $c^p = \#D^{p \oplus q} + 1$  aus Lemma 4.6 gilt damit die Abschätzung  $w \geq a(\frac{n}{4} + \frac{3}{2})$ . Da der Referenzabstand gerade sein muss und  $a \geq 4$  bedeuten würde, dass  $E^{pq}$  breiter als das Brett ist, gilt  $a = 2$ .

Wegen Lemma 4.6 schneiden alle von  $D^{p \oplus q}$  besetzten Diagonalen die obere oder untere Kante von  $E^{pq}$ , d. h. es gilt  $|\text{diff}(\delta)|, |\text{sum}(\delta)| \leq w - 2, \forall \delta \in D^{p \oplus q}$ , und alle Damen aus  $D^{p \oplus q}$  stehen innerhalb der Raute in Abbildung 4.10. Die Damen  $D^{pq} \subset D^{p \oplus q}$  stehen dann notwendigerweise in einer Orthogonale mit Absolutindex  $\frac{w}{2} - 2\alpha$  oder ggf. in der Verlustzeile  $\tilde{r}$ . Nach Proposition 4.1 gilt dann die Beschränkung  $\#D^{pq} \leq 5 + 2$  und zusammen mit  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{pq}$  aus Lemma 4.5 folgt  $n \leq 72$ . Für  $n \geq 74$  erhalten wir somit einen Widerspruch, d. h. auf der oberen und unteren Kante existiert keine  $a$ -Innenmenge.

Angenommen  $\alpha \neq \frac{c^p}{2}$ . Wegen  $\alpha_1 = \alpha_2$  aus Lemma 4.12 bedeutet dies  $\alpha = c^p$ , d. h. alle unbesetzten Spalten der Parität  $p$  sind äquidistant mit Abstand  $a$ . Mit der Abschätzung  $w = a(c^p - 1) \geq a(\frac{n}{4} - \frac{1}{2})$  gilt unter der notwendigen Bedingung  $w \leq n - 2$  dann  $a \in \{2, 4\}$ . Falls  $a = 2$ , lässt sich die in Abbildung 4.10 skizzierte Abschätzung noch zu  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{pq} \leq 1 + 2 \iff n \leq 40$  verschärfen und der Widerspruch folgt bereits für  $n \geq 42$ . Falls  $a = 4$ , gilt für die Indizes der von  $D^{p \oplus q}$  besetzten Diagonalen  $\text{diff}(\delta), \text{sum}(\delta) \equiv 0 \pmod{4}, \forall \delta \in D^{p \oplus q}$ . Da die Schnittfelder dieser Diagonalen ausnahmslos in Spalten der Parität  $p$  und Zeilen der Parität  $q$  liegen, gilt somit  $D^{p \oplus q} = D^{pq}, D^{p\bar{q}} = \emptyset$ , im Widerspruch zu Lemma 4.5.

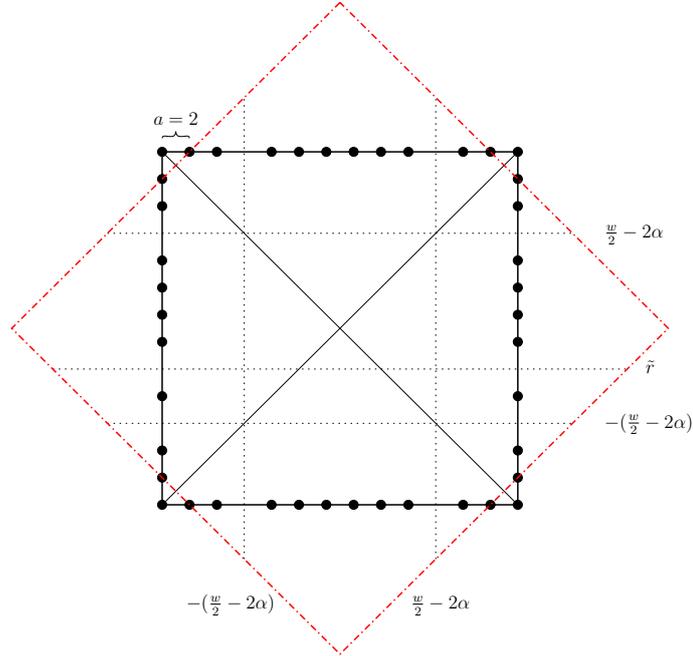


Abbildung 4.10: Die Damen  $D^{p \oplus q}$  stehen alle innerhalb der Raute, die aus  $D^{pq} \subset D^{p \oplus q}$  damit zumindest in einer von maximal fünf Orthogonalen — Bsp.:  $\alpha = 3$

Es ist nicht auszuschließen, dass die beiden  $\frac{c^p}{2}$ -elementigen  $a$ -Eckmengen auf der oberen Kante miteinander verflochten sind. Durch die Definition der Eckmengen auf Basis des Referenzabstandes ist jedoch ein minimaler Versatz von  $a + 2$  garantiert, so dass wir die Breite  $w$  von  $E^{pq}$  zumindest mit  $w \geq a(\frac{c^p}{2} - 1) + a + 2 = a\frac{c^p}{2} + 2$  abschätzen können.  $\square$

**Lemma 4.15.** Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $\alpha \geq 3$ . Für alle  $n \geq 74$  gilt  $a \in \{2, 6\}$  und die Differenz- und Summendiagonalen  $d, s = 0, \pm a, \pm 2a, \dots, \pm(\frac{c^p}{2} - 3)a, \pm(\frac{c^p}{2} - 2)a$  sind besetzt.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Behauptung, dass fast alle Felder einer  $a$ -Eckmenge durch eine Schar paralleler äquidistanter Diagonalen mit Abstand  $a$  dominiert werden. Sei o. B. d. A.  $\beta_1 = \alpha$ .

Für  $n \geq 74$  gilt nach Lemma 4.14  $\alpha = \frac{c^p}{2}$  und die Spalten mit Index  $\pm(\frac{w}{2} - \alpha a)$  sind definitionsgemäß besetzt. Wir zeigen, dass die Spalten mit Index  $\pm(\frac{w}{2} - (\alpha + 1)a)$  ebenfalls besetzt sind. Angenommen sie sind unbesetzt, dann haben das rechteste Feld der linken und das linkeste Feld der rechten  $a$ -Eckmenge den Abstand  $2a$ , es gilt  $w = c^p a$  und wegen  $c^p \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  zudem  $a = 2$ . Analog zu Abbildung 4.10 betrachten wir wieder die Damen  $D^{p \oplus q}$  innerhalb der von den Diagonalen mit Absolutindex  $w - a$  eingeschlossenen Raute. Die Damen  $D^{pq} \subset D^{p \oplus q}$  stehen dann notwendigerweise in der Hauptspalte  $c = 0$ , der Hauptzeile  $r = 0$  oder ggf. in der Verlustzeile  $\tilde{r}$ . Nach Proposition 4.1 gilt dann die

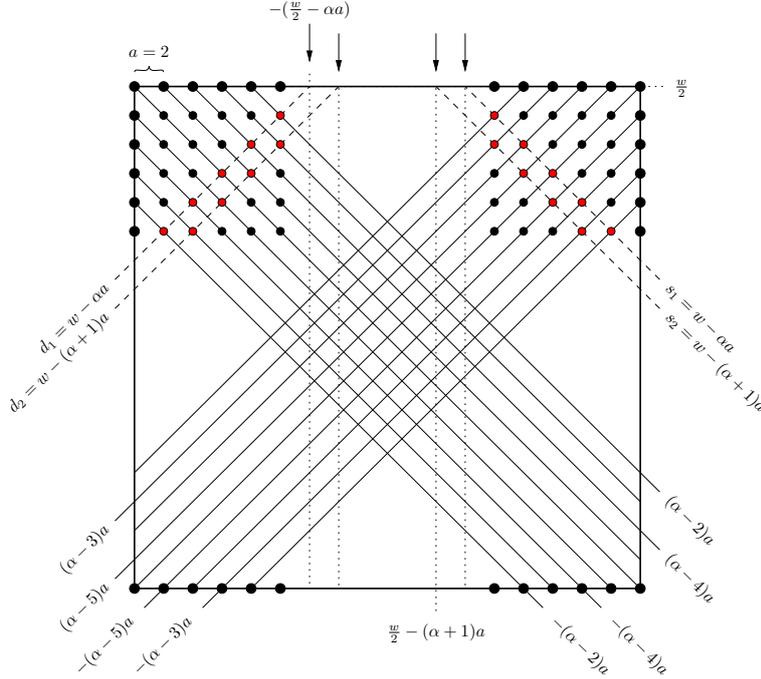


Abbildung 4.11: Fast alle Felder einer  $a$ -Eckmenge sind durch eine Schar paralleler äquidistanter Diagonalen mit Abstand  $a$  dominiert — Bsp.:  $\alpha = 6$

Beschränkung  $\#D^{pq} \leq 3 + 2$  und zusammen mit  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{pq}$  aus Lemma 4.5 folgt für  $n \geq 58$  der Widerspruch. Somit sind die Spalten mit Index mit  $\pm(\frac{w}{2} - (\alpha + 1)a)$  besetzt.

Die Diagonalen durch die Schnittfelder dieser vier besetzten Spalten mit der oberen Kante sind unbesetzt. Insbesondere sind dies  $d_1, s_1 = w - \alpha a$  und  $d_2, s_2 = w - (\alpha + 1)a$  (vgl. Abbildung 4.11). Die unbesetzte Summendiagonale  $s_1 = w - \alpha a$  schneidet alle Felder aus  $\{(\frac{w}{2} - ai, \frac{w}{2} + (\alpha - i)a) \mid i = 1, 2, \dots, \alpha - 2, \alpha - 1\} \subset A^{pq}$  sowie  $s_2 = w - (\alpha + 1)a$  die Felder  $\{(\frac{w}{2} - (i + 1)a, \frac{w}{2} + (\alpha - i)a) \mid i = 1, 2, \dots, \alpha - 3, \alpha - 2\} \subset A^{pq}$ . Dies impliziert, dass die Diagonalschar  $d = -(\alpha - 2)a, -(\alpha - 3)a, \dots, (\alpha - 3)a, (\alpha - 2)a$  besetzt ist. Eine analoge Betrachtung der unbesetzten Differenzdiagonalen  $d_1$  und  $d_2$  impliziert, dass die Summendiagonalen  $s = -(\alpha - 2)a, -(\alpha - 3)a, \dots, (\alpha - 3)a, (\alpha - 2)a$  besetzt sind.

Nach Lemma 4.14 gilt  $w \geq a\frac{c^p}{2} + 2 \geq a(\frac{n}{8} + \frac{9}{4})$ . Da der Referenzabstand gerade ist, folgt unter der Bedingung  $w \leq n - 2$ , dass  $a \in \{2, 4, 6\}$ . Angenommen  $a = 4$ . Dann sind mit dem oben gezeigten Ergebnis jeweils mindestens  $2(\frac{c^p}{2} - 2) + 1 = c^p - 3 = \#D^{p \oplus q} - 2$  Differenz- und Summendiagonalen besetzt, deren Index jeweils ein Vielfaches von vier ist. Die Schnittfelder dieser Diagonalen liegen demzufolge entweder alle in Spalten der Parität  $p$  und Zeilen der Parität  $q$  oder alle in Spalten der Parität  $\bar{p}$  und Zeilen der Parität  $\bar{q}$ . Folglich gilt entweder  $\#D^{\bar{p}\bar{q}} \leq 4$  oder  $\#D^{pq} \leq 4$ , was mit  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{pq}, \#D^{\bar{p}\bar{q}}$  aus Lemma 4.5 für  $n \geq 50$  den Widerspruch zeigt.  $\square$

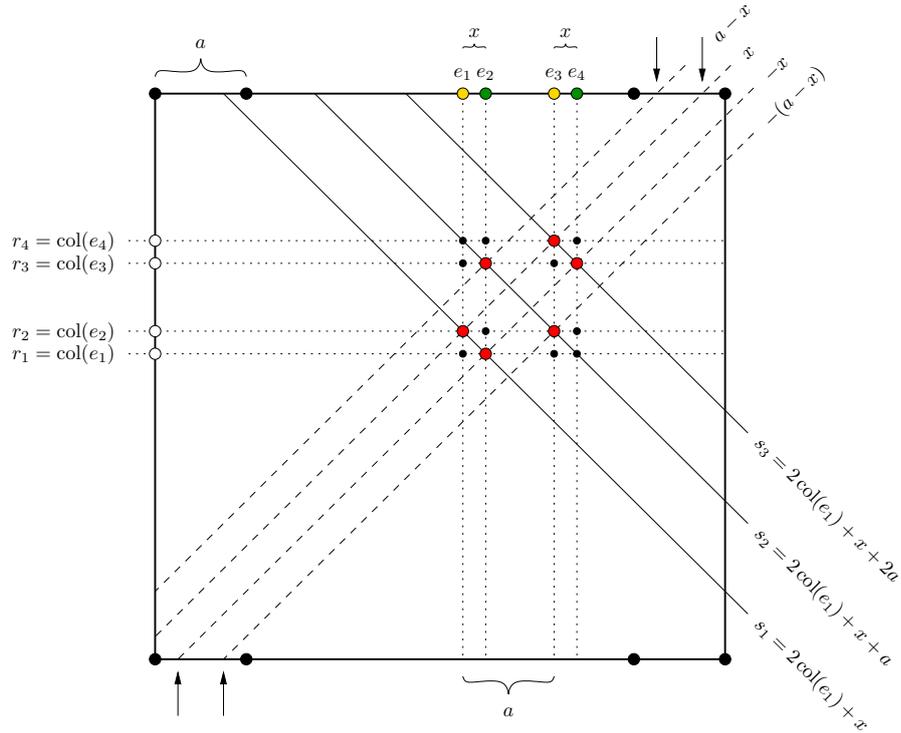


Abbildung 4.12: Zwei miteinander verflochtene  $a$ -Innenmengen induzieren drei äquidistante besetzte Diagonalen mit Abstand  $a$

Wir wollen nun den Fall  $\alpha = 2$  untersuchen.

**Lemma 4.16.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $\alpha = 2$ . Für alle  $n \geq 32$  sind keine zwei  $a$ -Mengen miteinander verflochten.*

*Beweis.* Zwei miteinander verflochtene  $a$ -Mengen implizieren durch Lemma 4.13 insbesondere zwei miteinander verflochtene  $a$ -Mengen auf  $E_T^{pq}$ , so dass wir die Aussage o. B. d. A. für die obere Kante zeigen. Durch die Definition der  $a$ -Mengen in Bezug auf den Referenzabstand sowie durch  $\alpha = 2$  folgt, dass keine  $a$ -Eckmenge mit einer anderen  $a$ -Menge verflochten ist.

Angenommen zwei  $a$ -Innenmengen  $I_1, I_2$  auf der oberen Kante sind miteinander verflochten. Dann existiert ein Tupel  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  mit  $e_1, e_3 \in I_1, \text{col}(e_3) = \text{col}(e_1) + a, e_2, e_4 \in I_2, \text{col}(e_4) = \text{col}(e_2) + a, \text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \text{col}(e_3) < \text{col}(e_4)$  (vgl. Abbildung 4.12). Aufgrund der Symmetrie der unbesetzten Orthogonalen aus Lemma 4.13 sind von den vier Zeilen  $r_i = \text{col}(e_i), i = 1, 2, 3, 4$ , mindestens drei unbesetzt. Wir betrachten die 16 Schnittfelder  $\{\text{col}(e_1), \text{col}(e_2), \text{col}(e_3), \text{col}(e_4)\} \times \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  und schreiben  $e_{i,j} := (\text{col}(e_i), r_j), i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Sei  $x := \text{col}(e_2) - \text{col}(e_1) \equiv 0 \pmod{2}$  der Versatz von  $I_1$  und  $I_2$ . Da die Mengen verflochten sind, gilt  $0 < x < a$  und wir bemerken, dass die vier Differenzdiagonalen  $d = \pm x, \pm(a-x)$  alle unbesetzt sind, da sie entweder die verlustfrei dominierte obere oder untere Kante in einer besetzten Spalte schneiden. Die beiden Felder  $e_{1,2}$  und  $e_{2,1}$  liegen beide in unterschiedlichen Zeilen, folglich zumindest eines von beiden in einer unbesetzten Zeile und damit in  $A^{pq}$ . Da beide auf unbesetzten Differenzdiagonalen mit Absolutindex  $x$  liegen, ist die gemeinsame Summendiagonale  $s_1 = \text{col}(e_1) + r_2 = 2 \text{col}(e_1) + x$  besetzt. Durch analoge Argumentationen für die beiden Felder  $e_{2,3}$  und  $e_{3,2}$  bzw.  $e_{3,4}$  und  $e_{4,3}$  folgt, dass die Summendiagonalen  $s_2 = 2 \text{col}(e_1) + x + a$  bzw.  $s_3 = 2 \text{col}(e_1) + x + 2a$  besetzt sind.

Da  $s_1, s_2, s_3$  äquidistant mit Abstand  $a$  sind, müssen sie nach Proposition 4.10 Felder aus einer  $a$ -Eckmenge dominieren. Da die Referenz-Eckmengengröße  $\alpha = 2$  ist, entspricht somit die mittlere Diagonale  $s_2 = 2 \text{col}(e_1) + x + a$  der Hauptdiagonale mit Index 0 und wir berechnen den Spaltenindex  $\text{col}(e_1) = \frac{-(x+a)}{2}$ . Die Felder  $e_1, e_2, e_3, e_4$  liegen mit  $\text{col}(e_1) = -\text{col}(e_4), \text{col}(e_2) = -\text{col}(e_3)$  somit zentriert auf der oberen Kante.

Für  $n \geq 32$  existiert mit  $c^p \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \implies c^p > 8 \implies c^p \geq 10$  eine weitere unbesetzte Zeile  $\hat{r} \notin \{\pm \frac{w}{2}, \pm(\frac{w}{2} - a), r_1, r_2, r_3, r_4\}$  mit den vier diagonal dominierten Feldern  $\sigma_i := (\text{col}(e_i), \hat{r}) \in A^{pq}, i = 1, 2, 3, 4$  (vgl. Abbildung 4.13). Sei o. B. d. A.  $\hat{r} \geq 0$ . Wir stellen fest, dass wegen  $\alpha = 2$  die Differenzdiagonale  $d' = 2a$  unbesetzt ist. Es gilt  $\hat{r} \neq r' := r_3 + a = \frac{3a-x}{2}$ , da ansonsten das Feld  $(\text{col}(e_1), r') \in A^{pq}$  auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d' = r_3 + a - \text{col}(e_1) = 2a$  und auf der unbesetzten Summendiagonale  $s' = r_3 + a + \text{col}(e_1) = 2 \text{col}(e_1) + 2a = a - x$  nicht dominiert wäre. Falls  $\hat{r} = r'' := r_4 + a = \frac{3a+x}{2}$ , dann betrachten wir das Feld  $(\text{col}(e_2), r'') \in A^{pq}$ . Da es ebenfalls auf der unbesetzten Differenzdiagonale  $d' = 2a$  liegt, ist es via Summendiagonale  $s'' = r_4 + a + \text{col}(e_2) = a + x$  dominiert. Da diese jedoch die obere Kante in der Spalte  $a + x$  schneidet und nach Lemma 4.13 dann zumindest die Zeile  $r = a + x$  oder  $r = -(a + x)$  unbesetzt ist, nehmen wir o. B. d. A.  $\hat{r} \notin \{\pm \frac{w}{2}, \pm(\frac{w}{2} - a), r_1, r_2, r_3, r_4, r', r''\}$  an.

Es gilt  $\hat{r} > r_4$ , da ansonsten die beiden Felder  $\sigma_2, \sigma_3 \in A^{pq}$  jeweils auf unbesetzten Diagonalen lägen. Da  $\hat{r} > r_4, \hat{r} \neq r', r''$ , ist keines der Felder  $\sigma_i$  durch die Hauptdiagonalen oder  $d, s = \pm a$  dominiert. Die besetzten Diagonalen durch  $\sigma_i$  induzieren somit auf der oberen Kante weitere Felder in  $a$ -Innenmengen. Nach Proposition 4.10 sind deshalb insbesondere die Felder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  durch Diagonalen unterschiedlichen Typs dominiert und damit existiert ein Paar besetzter paralleler Diagonalen durch  $\sigma_2$  und  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  mit einem Abstand kleiner als  $a$ , das weitere Felder  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$  in verflochtenen  $a$ -Innenmengen auf der oberen Kante induziert. Da das Tupel  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  nicht zentriert auf  $E_T^{pq}$  liegt, führt dies, wie oben bereits gezeigt, zum Widerspruch.  $\square$

Mit  $C^p = \{c_i : c_1 < \dots < c_{c^p}\}$  definieren wir den Abstand  $x := c_3 - c_2$  der zweiten und dritten unbesetzten Spalte der Parität  $p$  als den *Sekundärabstand*  $x$ .

**Lemma 4.17.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert,  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $\alpha = 2$ . Für alle  $n \geq 74$  gilt  $C^p = \{-\frac{w}{2} + i(a+x), -\frac{w}{2} + i(a+x) + a \mid i = 0, 1, \dots, \frac{c^p}{2} - 2, \frac{c^p}{2} - 1\}$  mit  $a = 2, x = 4$  oder  $a = 4, x = 2$ . Weiter sind die Differenz- und Summendiagonalen  $d, s = 0, \pm(a+x), \pm 2(a+x), \dots, \pm(\frac{c^p}{2} - 3)(a+x), \pm(\frac{c^p}{2} - 2)(a+x)$  besetzt.*

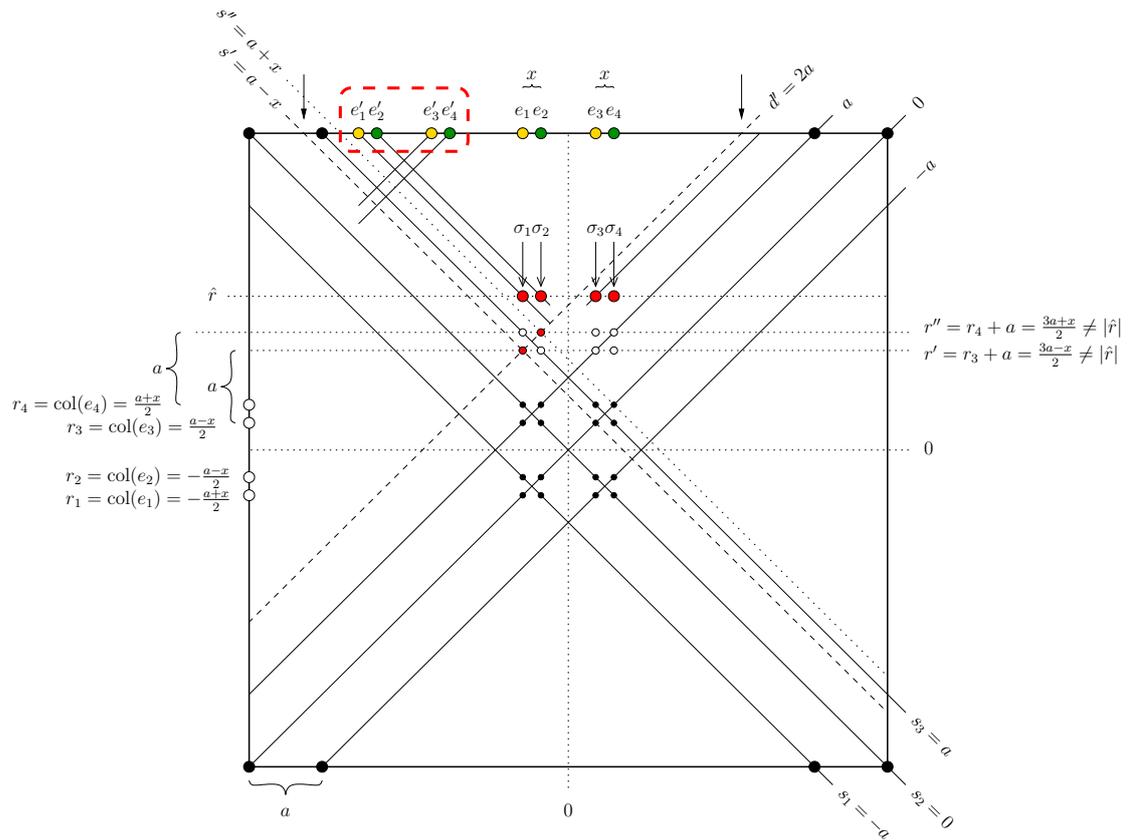
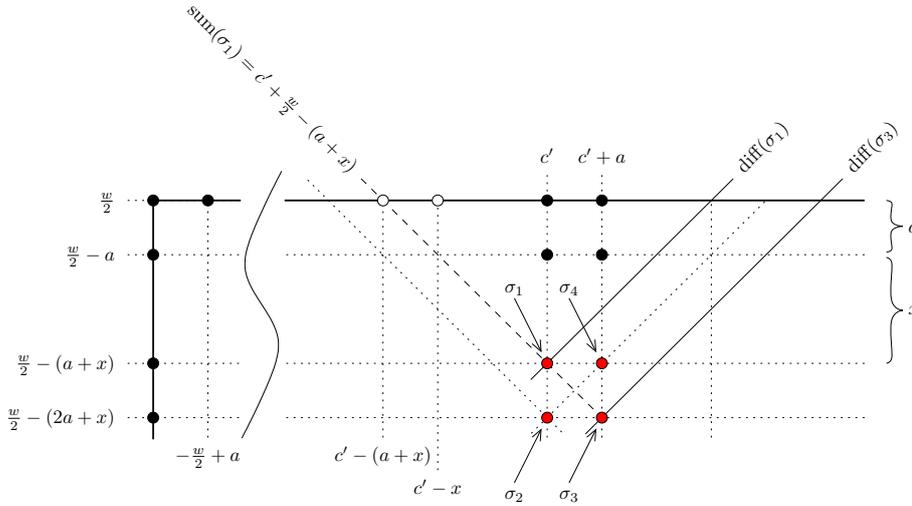


Abbildung 4.13: Die Felder  $e_1, e_2, e_3, e_4$  liegen zentriert auf  $E_T^{pq}$  und für  $n \geq 32$  existiert eine unbesetzte Zeile  $\hat{r} \in R^q$ , die weitere Felder  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$  in verflochtenen  $a$ -Innenmengen induziert

Abbildung 4.14: Die gemeinsame Summendiagonale durch  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  ist unbesetzt

*Beweis.* Falls  $E^{pq}$  nicht v. d., gelte o. B. d. A.  $\tilde{r} \leq 0$ . Nach Definition des Sekundärabstandes und Proposition 4.10 gilt dann  $\frac{w}{2}, \frac{w}{2} - a, \frac{w}{2} - (a+x), \frac{w}{2} - (2a+x) \in R^q$ . Angenommen  $C^p$  hat nicht die Struktur wie behauptet. Dann existieren zwei unbesetzte Spalten  $c', c' + a \in C^p$  mit  $c' > -\frac{w}{2} + 2a + x$  sowie  $c' - (a+x) \notin C^p$  oder  $c' - x \notin C^p$ . Sei  $c'$  kleinstmöglich gewählt. Für  $n \geq 74$  gilt mit  $c^p \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  insbesondere  $c^p \geq 10$  und damit folgt aus der Symmetrie aus Lemma 4.13, dass  $c' \leq -\frac{a}{2}$  gilt.

Wir betrachten die Felder  $\sigma_1 := (c', \frac{w}{2} - (a+x)), \sigma_2 := (c', \frac{w}{2} - (2a+x)), \sigma_3 := (c' + a, \frac{w}{2} - (2a+x)), \sigma_4 := (c' + a, \frac{w}{2} - (a+x))$ , die ausnahmslos in  $A^{pq}$  liegen. Die gemeinsame Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_1) = \text{sum}(\sigma_3) = c' + \frac{w}{2} - (a+x)$  durch  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  schneidet die obere Kante in der Spalte  $c' - (a+x) > -\frac{w}{2} + a$  (vgl. Abbildung 4.14). Falls  $c' - (a+x) \in C^p$ , dann gilt  $c' - x \notin C^p$  nach Definition von  $c'$ . Das Feld  $(c' - (a+x), \frac{w}{2})$  ist mit  $c' > -\frac{w}{2} + 2a + x$  dann das rechteste Feld einer  $a$ -Innenmenge und somit nicht durch die Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_1)$  dominiert. Andernfalls gilt  $c' - (a+x) \notin C^p$  und  $\text{sum}(\sigma_1)$  ist ebenfalls unbesetzt. In beiden Fällen sind somit die beiden Differenzdiagonalen  $\text{diff}(\sigma_1), \text{diff}(\sigma_3)$  besetzt.

Wir unterscheiden nun danach, ob das Feld  $\sigma_2$  durch  $\text{diff}(\sigma_2)$  oder  $\text{sum}(\sigma_2)$  dominiert wird. Falls die Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_2)$  besetzt ist, implizieren die drei äquidistanten besetzten Differenzdiagonalen mit Abstand  $a$  durch  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  wegen Proposition 4.10, dass die Diagonale  $\text{diff}(\sigma_2) = \frac{w}{2} - (2a+x) - c'$  die Differenz-Hauptdiagonale  $d = 0$  ist, so dass sich die Spalte  $c'$  zu  $\text{diff}(\sigma_2) = 0 \iff c' = \frac{w}{2} - (2a+x)$  berechnet. Mit  $c' \leq -\frac{a}{2}$  folgt dann  $\frac{w}{2} - (2a+x) \leq -\frac{a}{2} \iff w \leq 3a + 2x$ , was für  $c^p > 6$  den Widerspruch zeigt.

Somit ist die Diagonale  $\text{diff}(\sigma_2) = \text{diff}(\sigma_4)$  unbesetzt und stattdessen sind die Summendiagonalen  $\text{sum}(\sigma_2), \text{sum}(\sigma_4)$  besetzt (vgl. Abbildung 4.15). Die Diagonale  $\text{sum}(\sigma_4) = c' + \frac{w}{2} - x$  schneidet dabei die obere Kante in der Spalte  $c' - x \in C^p$ , so dass nach Definition von  $c'$  die Spalte  $c' - (a+x) \notin C^p$  besetzt ist. Das Schnittfeld der besetzten

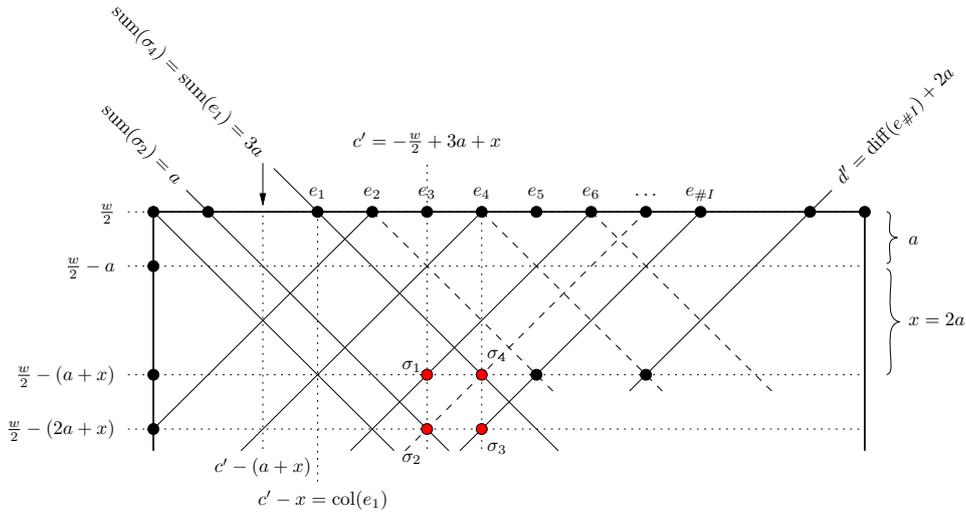


Abbildung 4.15: Die gemeinsame Differenzdiagonale durch  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  ist unbesetzt und es gilt  $x = 2a$

Summendiagonale  $\text{sum}(\sigma_2) = c' + \frac{w}{2} - (2a + x) = \text{sum}(\sigma_4) - 2a$  mit der oberen Kante ist folglich das rechteste Feld einer  $a$ -Menge und wegen Proposition 4.10 muss es folglich das Feld  $(-\frac{w}{2} + a, \frac{w}{2})$  der linken  $a$ -Eckmenge sein. Die Spalte  $c'$  berechnet sich dann zu  $\text{sum}(\sigma_2) = c' + \frac{w}{2} - (2a + x) = a \iff c' = -\frac{w}{2} + 3a + x$ .

Zur genauen Bestimmung von  $x$  bemerken wir, dass  $\text{sum}(\sigma_4)$  die obere Kante im linken Feld  $e_1 := (-\frac{w}{2} + 3a, \frac{w}{2})$  einer  $a$ -Innenmenge  $I = \{e_1, e_2, \dots, e_{\#I}\}$ ,  $\text{col}(e_1) < \text{col}(e_2) < \dots < \text{col}(e_{\#I})$ , schneidet, so dass  $e_2 = (-\frac{w}{2} + 4a, \frac{w}{2})$ . Aufgrund der Definition des Sekundärabstandes gilt  $\text{col}(e_1) = -\frac{w}{2} + 3a \geq -\frac{w}{2} + a + x \iff x \leq 2a$ . Angenommen  $x < 2a$ . Da nach Lemma 4.16 keine zwei  $a$ -Mengen miteinander verflochten sind, muss die viert-linkeste unbesetzte Spalte  $-\frac{w}{2} + a + x + a$  links von  $\text{col}(e_1) = -\frac{w}{2} + 3a$  liegen, d. h.  $-\frac{w}{2} + a + x + a < -\frac{w}{2} + 3a \iff x < a$ . Dann jedoch liegt die Spalte  $c' = -\frac{w}{2} + 3a + x$  zwischen  $\text{col}(e_1) = -\frac{w}{2} + 3a$  und  $\text{col}(e_2) = -\frac{w}{2} + 4a$  und wir erhalten einen Widerspruch zu Lemma 4.16. Somit gilt  $x = 2a$ .

Durch diese Abhängigkeit stellen wir weiter fest:  $c' = \text{col}(e_3)$  und die besetzte Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_1)$  schneidet die obere Kante in der Spalte  $\text{col}(e_4) + 2a$ , daher ist die Spalte  $\text{col}(e_4) + a = \text{col}(e_5) \in C^p$  unbesetzt. Da alle Summendiagonalen  $\text{sum}(e_i), i \equiv 0 \pmod{2}$ , unbesetzt sind und sich im Feld  $(\text{col}(e_{i+3}), \frac{w}{2} - 3a) \in A^{pq}, i \leq \#I - 4$ , schneiden, ist die Differenzdiagonale mit Index  $\text{diff}(\text{col}(e_{i+4})) + 2a$  besetzt. Somit gilt entweder  $\#I > i + 4$  oder die Differenzdiagonale  $d' := \text{diff}(\text{col}(e_{\#I})) + 2a = \text{diff}(\text{col}(e_{i+4})) + 2a$  schneidet das linkeste Feld der rechten  $a$ -Eckmenge. Da  $\#I \geq 6$ , entwickelt sich  $I$  auf diese Art induktiv, beginnend mit  $i = 2$ , bis  $\text{col}(e_{\#I}) = \frac{w}{2} - 3a$ .

Da keine  $a$ -Mengen miteinander verflochten sind, berechnet sich die Breite von  $E^{pq}$  dann zu  $w = (c^p + 1)a \geq (\frac{n}{4} + \frac{3}{2})a$  und mit  $w \leq n - 2$  folgt  $a = 2$ . Durch eine analoge

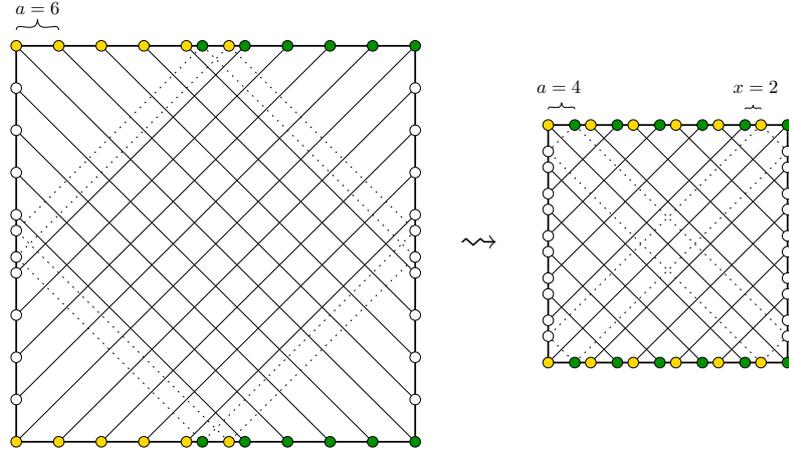


Abbildung 4.16: Der Fall  $a = 6, \alpha \geq 3$  geht durch Ineinanderschieben der  $a$ -Eckmengen in  $a + x = 6, \alpha = 2$  über — Bsp.:  $c^p = 12$

Argumentation wie auf Seite 77 im Beweis zu Lemma 4.14 (vgl. auch Abbildung 4.10) schließen wir  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{pq} \leq 5 + 2$  und erhalten für  $n \geq 74$  einen Widerspruch.

Wie oben gezeigt sind die unbesetzten Spalten der Parität  $p$  abwechselnd mit Abstand  $a$  und  $x$  angeordnet, beginnend und endend mit einem Abstand  $a$ . Durch diese Struktur von  $C^p$  bestimmen wir die Breite von  $E^{pq}$  zu  $w = \frac{c^p}{2}(a + x) - x$  und nach Einsetzen von  $c^p \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  folgt unter der Bedingung  $w \leq n - 2$  die Schranke  $a + x \leq 8$ . Angenommen es gilt nicht  $a = 2, x = 4$  oder  $a = 4, x = 2$ . Die Definition des Sekundärabstandes  $x$  und  $\alpha = 2$  implizieren  $a \neq x$ , so dass mit  $a, x \equiv 0 \pmod{2}$  dann  $a = 2, x = 6$  oder  $a = 6, x = 2$  folgt. Mittels Proposition 4.10 bemerken wir, dass in beiden Fällen jeweils mindestens  $\#D^{p \oplus q} - 2$  Differenz- und Summendiagonalen besetzt sind, deren Index jeweils ein Vielfaches von  $a + x = 8$  ist. Die Schnittfelder dieser Diagonalen liegen demzufolge ausnahmslos in Spalten der Parität  $p$  und Zeilen der Parität  $q$ . Folglich gilt  $\#D^{\bar{p}\bar{q}} \leq 4$ , was mit  $\frac{n}{8} - 2 \leq \#D^{\bar{p}\bar{q}}$  aus Lemma 4.5 für  $n \geq 50$  den Widerspruch zeigt.

Aus der hergeleiteten Struktur von  $C^p$  und der kreuzweisen Dominierung der  $a$ -Innengruppen aus Proposition 4.10 folgern wir schließlich die angegebene Menge der besetzten Diagonalen.  $\square$

Durch die Resultate aus Lemma 4.15 und 4.17 haben wir vier mögliche Konfigurationen hergeleitet. Durch Betrachtung der jeweils von  $D^{p \oplus q}$  besetzten Diagonalen zeigt sich, dass sich die drei Klassen ( $\alpha = 2, a = 2, x = 4$ ), ( $\alpha = 2, a = 4, x = 2$ ) und ( $\alpha \geq 3, a = 6$ ) insoweit ähneln, als die Damen  $D^{p \oplus q}$  jeweils eine Schar von mindestens  $\#D^{p \oplus q} - 2$  äquidistanten Diagonalen mit Abstand sechs von jedem Diagonaltyp besetzen. Bildlich gesprochen geht eine Konfiguration mit  $\alpha \geq 3, a = 6$  durch Verkleinerung von  $w$ , d. h. durch ein reißverschlussartiges Ineinanderschieben der  $a$ -Eckmengen, in eine Konfiguration mit  $\alpha = 2, a + x = 6$  über (vgl. Abbildung 4.16).

Mit dem folgenden Lemma schließen wir diese drei Konfigurationsklassen für ausreichend große Bretter aus.

**Lemma 4.18.** *Sei  $E^{p^q}$  quadratisch, quasi-verlustfrei dominiert und  $\#D^{p^{\oplus q}} \equiv 1 \pmod{2}$ . Für alle  $n \geq 96$  gilt  $a = 2$  und  $\alpha = \frac{c^p}{2}$ .*

*Beweis.* Wir schreiben  $i + m\mathbb{Z}$  für die Restklasse von  $i$  modulo  $m$  und definieren weiter  $D_{c \otimes r} := \{\delta \in D \mid \text{col}(\delta) \in c + 6\mathbb{Z}, \text{row}(\delta) \in r + 6\mathbb{Z}\}$ . Angenommen es gilt nicht  $a = 2$  und  $\alpha = \frac{c^p}{2}$ . Dann gilt nach Lemma 4.15 und 4.17 entweder  $a = 6, \alpha = \frac{c^p}{2}$  oder  $a + x = 6, \alpha = 2$ . Da die beiden Hauptdiagonalen den Index 0 haben, sind in beiden Fällen somit jeweils mindestens  $\#D^{p^{\oplus q}} - 2$  äquidistante Differenz- und Summendiagonalen mit Index aus  $0 + 6\mathbb{Z}$  besetzt. Durch Betrachtung der Schnittfelder der beiden Scharen bemerken wir, dass mindestens  $\#D^{p^{\oplus q}} - 4$  Damen auf Feldern  $(c, r)$  mit  $r - c, c + r \in 0 + 6\mathbb{Z}$  stehen, ergo  $\#D_{0 \otimes 0} + \#D_{3 \otimes 3} \geq \#D^{p^{\oplus q}} - 4$ .

Wir zeigen zunächst, dass sogar alle Orthogonalen, deren Indizes in  $0 + 3\mathbb{Z}$  liegen, besetzt sind. Dafür bemerken wir, dass  $w$  kein Vielfaches von sechs ist: Falls  $\alpha = 2$ , dann gilt  $w = \frac{c^p}{2}(a + x) - x \not\equiv 0 \pmod{6}$  und falls  $\alpha = \frac{c^p}{2}$ , dann sind die 6-Eckmengen miteinander verflochten. Somit gilt  $-\frac{w}{2} \not\equiv \frac{w}{2} \pmod{6}$ . Angenommen eine Spalte  $\hat{c} \in 0 + 3\mathbb{Z}$  ist unbesetzt. Aus der regelmäßigen Anordnung der unbesetzten Spalten  $C^p$ ,  $-\frac{w}{2} \not\equiv \frac{w}{2} \pmod{6}$  sowie der Indizierung der Hauptdiagonalen mit 0 folgt dann  $-\frac{w}{2}, \frac{w}{2} \notin 0 + 3\mathbb{Z} \implies \hat{c} \equiv \bar{p} \pmod{2}$ . Falls  $\hat{c} \equiv 3 \pmod{6}$  bzw.  $\hat{c} \equiv 0 \pmod{6}$ , schneiden sowohl die Differenz- als auch die Summendiagonalen aus der Schar die Spalte  $\hat{c}$  in einer Zeile aus der Restklasse  $3 + 6\mathbb{Z}$  bzw.  $0 + 6\mathbb{Z}$ .

Wir betrachten die Felder aus  $A^{\bar{p}q}$  in der Spalte  $\hat{c}$ . Von den nach Lemma 4.3 insgesamt  $r^{\bar{q}} \geq \frac{n}{4} - 2$  unbesetzten Zeilen der Parität  $\bar{q}$  können maximal  $\lceil \frac{n}{6} \rceil \leq \frac{n}{6} + \frac{2}{3}$  aus  $3 + 6\mathbb{Z}$  bzw.  $0 + 6\mathbb{Z}$  und somit von einer Diagonale der Schar dominiert werden. Alle anderen müssen folglich durch eine der anderen maximal vier von  $D^{p^{\oplus q}}$  besetzten Diagonalen dominiert werden. Mit  $\frac{n}{4} - 2 - (\frac{n}{6} + \frac{2}{3}) \leq r^{\bar{q}} - \lceil \frac{n}{6} \rceil \leq 4 \iff n \leq 80$  folgt der Widerspruch. Die Argumentation für die Zeilen verläuft analog, folglich sind alle Orthogonalen mit Indizes aus  $0 + 3\mathbb{Z}$  besetzt.

Wir bezeichnen mit  $D_{(d)}^{\text{diff}}, S_{(s)}^{\text{sum}}$  die Menge der besetzten Differenzdiagonalen mit Index  $i \in d + 6\mathbb{Z}$  bzw. Summendiagonalen mit Index  $i \in s + 6\mathbb{Z}$  und definieren  $A_{c \otimes r} := \{\sigma \in A \mid \text{col}(\sigma) \in c + 6\mathbb{Z}, \text{row}(\sigma) \in r + 6\mathbb{Z}\}$ . Mit  $E_{c \otimes r} \subseteq A_{c \otimes r}$  bezeichnen wir die Felder auf dem Rand von  $A_{c \otimes r}$ . Sei  $\frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{2}$  (der Fall  $\frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{2}$  lässt sich analog behandeln). Durch das obige Ergebnis lassen sich dann die von den Damen aus  $D^{\bar{p}^{\oplus q}}$  diagonal dominierten Felder  $A^{\bar{p}q}$  in die vier Mengen  $A^{\bar{p}q} = A_{2 \otimes 1} \dot{\cup} A_{2 \otimes 5} \dot{\cup} A_{4 \otimes 1} \dot{\cup} A_{4 \otimes 5}$  partitionieren. Dabei wird  $A_{2 \otimes 1}$  ausschließlich durch  $D_{(5)}^{\text{diff}}$  und  $S_{(3)}^{\text{sum}}$ ,  $A_{2 \otimes 5}$  durch  $D_{(3)}^{\text{diff}}, S_{(1)}^{\text{sum}}$ ,  $A_{4 \otimes 1}$  durch  $D_{(3)}^{\text{diff}}, S_{(5)}^{\text{sum}}$  sowie  $A_{4 \otimes 5}$  durch  $D_{(1)}^{\text{diff}}, S_{(3)}^{\text{sum}}$  dominiert. Insgesamt spielen zur Dominierung von  $A^{\bar{p}q}$  somit die Diagonalklassen  $D_{(3)}^{\text{diff}}$  und  $S_{(3)}^{\text{sum}}$  die entscheidende Rolle, was die Bestimmung einer unteren Schranke für  $\#D_{(3)}^{\text{diff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}}$  motiviert. Durch Betrachtung der Kandidatenfelder für  $D^{p^{\oplus q}}$  können wir zudem eine obere Schranke konstruieren, so dass letztlich der Widerspruch folgen wird. Wir zeigen zunächst die obere Schranke.

Die Damen aus  $D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0}$  tragen als einzige zu  $\#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}}$  doppelt bei, alle anderen Damen aus  $D^{\overline{p\oplus q}}$  bestenfalls einfach. Dabei ist  $\#(D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0})$  beschränkt durch die Anzahl an Spalten bzw. Zeilen mit Indizes aus  $0 + 3\mathbb{Z}$ , abzüglich der Damen aus  $D_{0\otimes 0}$  und  $D_{3\otimes 3}$ . Durch Proposition 4.1 kommt noch ein Korrekturterm hinzu. Dieser beträgt jedoch lediglich eins, da sich durch Mehrfachbesetzungen von Orthogonalen nie sowohl die Kandidatenspalten als auch -zeilen für  $D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0}$  erhöhen. Wir erhalten  $\#(D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0}) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil - (\#D_{0\otimes 0} + \#D_{3\otimes 3}) + 1 \leq \frac{n}{3} + \frac{2}{3} - (\#D^{\overline{p\oplus q}} - 4) + 1 \leq \frac{n}{3} + \frac{17}{3} - \#D^{\overline{p\oplus q}}$ . Die obere Schranke ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} &\leq 2\#(D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0}) + \#(D^{\overline{p\oplus q}} \setminus (D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0})) \\ &= \#D^{\overline{p\oplus q}} + \#(D_{0\otimes 3} \cup D_{3\otimes 0}) \\ &\leq \frac{n}{2} - \#D^{\overline{p\oplus q}} + \frac{n}{3} + \frac{17}{3} - \#D^{\overline{p\oplus q}} \\ &= \frac{5}{6}n + \frac{17}{3} - 2\left(\frac{n}{2} - \#D^{\overline{p\oplus q}}\right) \\ \Leftrightarrow \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} &\leq -\frac{n}{6} + \frac{17}{3} + 2\#D^{\overline{p\oplus q}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bezeichne  $C_{(c)}$ ,  $R_{(r)}$  die Menge der unbesetzten Spalten mit Index aus  $c+6\mathbb{Z}$  bzw. Zeilen mit Index aus  $r+6\mathbb{Z}$ . Zur Bestimmung der unteren Schranke betrachten wir exemplarisch  $E_{2\otimes 1}$  und bestimmen zunächst eine untere Schranke für die Anzahl der zur Dominierung notwendigen Diagonalen aus  $D_{(5)}^{\text{iff}}$  und  $S_{(3)}^{\text{sum}}$ :  $2(\#D_{(5)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}}) \geq \#E_{2\otimes 1} = 2(\#C_{(2)} + \#R_{(1)}) - 4 \Leftrightarrow \#D_{(5)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} \geq \frac{c^p}{2} + \#R_{(1)} - 2$ . Durch Betrachtung von  $E_{2\otimes 5}$ ,  $E_{4\otimes 1}$ ,  $E_{4\otimes 5}$  erhalten wir die Ungleichungen  $\#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(1)}^{\text{sum}} \geq \frac{c^p}{2} + \#R_{(5)} - 2$ ,  $\#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(5)}^{\text{sum}} \geq \frac{c^p}{2} + \#R_{(1)} - 2$  und  $\#D_{(1)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} \geq \frac{c^p}{2} + \#R_{(5)} - 2$ . Summation der vier Ungleichungen liefert dann die untere Schranke

$$\begin{aligned} \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} + (\#D_{(1)}^{\text{iff}} + \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#D_{(5)}^{\text{iff}}) + (\#S_{(1)}^{\text{sum}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} + \#S_{(5)}^{\text{sum}}) \\ \geq 4\frac{c^p}{2} + 2(\#R_{(1)} + \#R_{(5)}) - 8 \\ \Leftrightarrow \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} + 2\#D^{\overline{p\oplus q}} \geq 2c^p + 2r^{\bar{q}} - 8 \geq 2r^q + 2r^{\bar{q}} - 8 \\ \Rightarrow \#D_{(3)}^{\text{iff}} + \#S_{(3)}^{\text{sum}} \geq n - 2\#D^{\overline{p\oplus q}} - 8. \end{aligned}$$

Zusammen mit der oberen Schranke (4.6) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} n - 2\#D^{\overline{p\oplus q}} - 8 &\leq -\frac{n}{6} + \frac{17}{3} + 2\#D^{\overline{p\oplus q}} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{6}n - \frac{41}{3} &\leq 4\#D^{\overline{p\oplus q}} \leq 4\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right) = n + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{6} &\leq \frac{47}{3} \\ \Leftrightarrow n &\leq 94. \end{aligned}$$

Falls  $\frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{2}$ , betrachten wir  $A^{\overline{pq}} = A_{1\otimes 2} \dot{\cup} A_{1\otimes 4} \dot{\cup} A_{5\otimes 2} \dot{\cup} A_{5\otimes 4}$  anstatt  $A^{p\bar{q}}$  und gelangen durch analoge Argumentationen zur selben Bedingung  $n \geq 94$ . Insgesamt folgt somit für  $n \geq 96$  der Widerspruch.  $\square$

### 4.3 Unterscheidung der Brettgrößen nach Restklassen modulo 8

Die in Abschnitt 4.2 begonnene Analyse führen wir im folgenden Abschnitt 4.4 für eine bestimmte Klasse von Brettgrößen fort. Dabei werden wir speziellere Annahmen machen, die wir durch die folgende Proposition motivieren wollen.

**Proposition 4.19.** *Für alle  $n \geq 14$  existieren entweder  $p, q \in \{0, 1\}$ , so dass  $E^{pq}$  quasi-verlustfrei dominiert ist, oder es gilt  $c^0 = c^1 = r^0 = r^1 = \frac{n}{4}$ .*

*Falls  $n \equiv 6 \pmod{8}$ , existieren insbesondere  $p, q \in \{0, 1\}$ , so dass  $E^{pq}$  quadratisch und verlustfrei dominiert ist mit  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ .*

*Beweis.* Sei  $n \geq 14$ . Nach Lemma 4.3 ist dann die Menge der Randfelder  $E^{pq}$  nicht-degeneriert, d. h.  $\#E^{pq} = 2(c^p + r^q) - 4$ . Die Exklusivität der Disjunktion in der ersten Aussage ist unmittelbar aus  $\#D^0 = \#D^1 = \frac{n}{4}$  und damit  $4\#D^{p \oplus q} - \#E^{pq} = 4, \forall p, q \in \{0, 1\}$ , ersichtlich. Sei o. B. d. A.  $c^0 \geq c^1, r^0 \geq r^1$  und  $c^0 \geq r^0$ . Anhand  $c^0 = \sup\{c^0, c^1, r^0, r^1\}$  unterscheiden wir die fünf Fälle  $c^0 = \frac{n}{4} + 2, c^0 = \frac{n}{4} + \frac{3}{2}, c^0 = \frac{n}{4} + 1, c^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, c^0 = \frac{n}{4}$  und nutzen in vielen Argumenten die Ganzzahligkeit der Parameter aus. So gilt beispielsweise  $n \equiv 6 \pmod{8} \implies c^0 \in \{\frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{4} + \frac{3}{2}\}$ .

Falls  $c^0 = \frac{n}{4} + 2$ , folgt  $n \equiv 0 \pmod{4}$  aus der Ganzzahligkeit von  $c^0$  und aus demselben Grund mit Lemma 4.4 dann  $\#D^0 = \#D^1 = \frac{n}{4}$ . Die beiden notwendigen Bedingungen  $4\#D^0 \geq \#E^{00} \iff n \geq 2(\frac{n}{4} + 2 + r^0) - 4 \iff r^0 \leq \frac{n}{4}$  und  $4\#D^1 \geq \#E^{01} \iff r^1 \leq \frac{n}{4}$  zusammen mit  $r^0 + r^1 \geq \frac{n}{2}$  implizieren dann  $r^0 = r^1 = \frac{n}{4}$ . Somit sind  $E^{00}$  und  $E^{01}$  verlustfrei dominiert.

Falls  $c^0 = \frac{n}{4} + \frac{3}{2}$ , folgt  $n \equiv 2 \pmod{4}$  aus der Ganzzahligkeit von  $c^0$ . Durch  $r^0 + r^1 \geq \frac{n}{2}$  und  $r^0 \geq r^1$  schließen wir dann  $r^0 \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  und damit  $\frac{1}{4}\#E^{00} = \frac{n}{4} \implies \#D^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Falls  $r^0 = \frac{n}{4} + \frac{3}{2}$ , ist  $E^{00}$  v. d. und quadratisch und nach Lemma 4.6 gilt dann  $c^0 \equiv 0 \pmod{2} \implies n \equiv 2 \pmod{8}$ . Andernfalls gilt  $r^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, r^1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  und  $E^{01}$  ist v. d. und nicht-quadratisch. Wir zeigen, dass für diesen Fall  $n \equiv 2 \pmod{8}$  gilt. Offensichtlich ist  $E^{01}$  breiter als hoch, da andernfalls jede Diagonale maximal ein Feld aus  $E_T^{01} \cup E_B^{01}, \#E_T^{01} = \#E_B^{01} > \#D^1$ , dominieren könnte. Als Haupt-Nebendiagonalen bezeichnen wir die vier Diagonalen durch die Eckfelder von  $E^{01}$ , die zwei Felder aus  $\tilde{E}^{01}$  schneiden. Da  $E^{01}$  v. d., sind alle vier Haupt-Nebendiagonalen besetzt. Zwischen den Haupt-Nebendiagonalen sind wegen  $\#E_L^{01} = \#E_R^{01} = \#D^1$  keine Diagonalen besetzt. Seien somit  $d_+, d_-, s_+, s_-$  die Anzahlen der von  $D^1$  besetzten Differenz- und Summendiagonalen oberhalb und unterhalb der jeweiligen beiden Haupt-Nebendiagonalen. Damit alle vier Kanten verlustfrei dominiert sind, ergeben sich unter Einbezug der Haupt-Nebendiagonalen die vier Gleichungen  $d_+ + s_+ = d_- + s_- = d_+ + s_- = d_- + s_+ = r^1 - 2 = \frac{n}{4} - \frac{5}{2}$ . Gemäß Schubfachprinzip gilt dann  $d_+ = s_+ = d_- = s_- = \frac{n}{8} - \frac{5}{4} = \frac{n}{8} - 2 - \frac{2}{8}$  und wir schließen  $n \equiv 2 \pmod{8}$ .

Falls  $c^0 = \frac{n}{4} + 1$ , gilt  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Wegen  $\#D^0 = \frac{n}{4}$  und  $r^0 \geq \frac{n}{4}$  ist  $E^{00}$  quasi-verlustfrei dominiert.

Falls  $c^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ , gilt  $n \equiv 2 \pmod{4}$  und mit  $r^0 \geq r^1, r^0 \leq c^0$  dann  $r^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Falls  $\#D^0 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$ , dann ist  $E^{00}$  v. d. und quadratisch. Andernfalls gilt  $\#D^0 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \implies \#D^1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$ . Falls weiter  $c^1 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  oder  $r^1 = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ , dann ist  $E^{10}$  oder  $E^{01}$  v. d. und quadratisch. Andernfalls gilt  $c^1 = r^1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  und  $E^{10}, E^{01}$  sind beide quasi-verlustfrei dominiert. Da dann keine Orthogonale mehrfach besetzt ist, schließen wir  $\#D^1 \equiv 0 \pmod{2}$  mittels Proposition 4.2 und zeigen dadurch  $\#D^1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \implies n \equiv 2 \pmod{8}$ .

Falls  $c^0 = \frac{n}{4}$ , gilt  $\#D^0 = \#D^1 = \frac{n}{4}$ . Weiter gilt  $c^0 = c^1 = r^0 = r^1 = \frac{n}{4}$ , d. h. keine Orthogonale ist mehrfach besetzt und mit Proposition 4.2 folgt dann  $\#D^{00} = \#D^{11} = \#D^{01} = \#D^{10} = \frac{n}{8} \implies n \equiv 0 \pmod{8}$ .  $\square$

## 4.4 Nicht-orthodoxe Überdeckungen für $n \equiv 6 \pmod{8}$

Proposition 4.19 erlaubt uns für  $n \equiv 6 \pmod{8}$  die Annahmen weiter zu verschärfen. Wir nehmen daher nun  $n \equiv 6 \pmod{8}$  an, d. h.  $E^{pq}$  sei verlustfrei dominiert und quadratisch mit  $c^p = r^q = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  und  $\#D^{p\oplus q} = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$ . Dessen ungeachtet werden wir im Sinne einer intuitiveren Lesbarkeit oft weiter  $c^p$  anstatt des konkreten Wertes schreiben, um die Konstruktionsidee der Formeln anzudeuten. Wir merken an, dass wir wegen  $c^p = r^q$  im Folgenden nicht mehr von der impliziten Voraussetzung  $C^p \supseteq R^q$  ausgehen müssen, in der die Symmetrie des Bretts ausgenutzt wurde. Weiter erfordern die nachfolgenden Resultate jeweils grundsätzlich eine Mindestbrettgröße von  $n = 96$ , da sie auf dem Lemma 4.18 beruhen.

### 4.4.1 Betrachtung der Lage von $E^{\bar{p}\bar{q}}$ zu $E^{pq}$

Mit Ausnahme der Diagonalen durch die vier Felder  $(\pm(\frac{w}{2} - (\alpha - 1)a), \frac{w}{2}) \in E_T^{pq}$  und  $(\pm(\frac{w}{2} - (\alpha - 1)a), -\frac{w}{2}) \in E_B^{pq}$  (vgl. auch die gepunkteten Diagonalen in Abbildung 4.16) sind alle von  $D^{p\oplus q}$  besetzten Diagonalen spezifiziert. Unter Einbezug gewisser Parameter, welche die Form von  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  und die Lage von  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  zu  $E^{pq}$  beschreiben, erlaubt uns dies Rückschlüsse auf die Struktur von  $C^{\bar{p}}, R^{\bar{q}}$  und damit gleichermaßen auf  $A^{\bar{p}\bar{q}}, A^{\bar{p}\bar{q}}, A^{\bar{p}\bar{q}}$ .

Zur Bestimmung oberer Schranken für  $c^{\bar{p}}, r^{\bar{q}}$  ist die Lage von  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  zu  $E^{pq}$  entscheidend. Diese wollen wir durch die *Lagekennzahlen*  $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2$  beschreiben. Dabei geben die absoluten Kennzahlen  $|x'_1|, |x''_1|, |x'_2|, |x''_2| \equiv 1 \pmod{2}$  den Abstand der linken, rechten, oberen und unteren Kanten von  $E^{pq}$  und  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  zueinander an. Zusätzlich gelte  $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2 < 0 \iff E^{\bar{p}\bar{q}}$  liegt komplett innerhalb  $E^{pq}$ . Im Folgenden sei o. B. d. A.  $x'_1 \leq x''_1$  und  $x'_2 \leq x''_2$ .

Damit die gemäß Lemma 4.15 von  $D^{p\oplus q}$  besetzten Diagonalen zudem  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  dominieren, ist intuitiv klar, dass das Rechteck durch  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  zumindest annähernd quadratisch ist und zudem die beiden Rechtecke durch  $E^{pq}$  und  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  annähernd konzentrisch sind. Die Lagekennzahlen sind somit alle ungefähr gleich groß, was wir durch das folgende Lemma zeigen und quantifizieren wollen. Schließlich erlaubt uns die Beschränkung auf  $c^p = r^q = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  die Bestimmung der vier noch unbekanntenen von  $D^{p\oplus q}$  besetzten Diagonalen.

**Lemma 4.20.** Sei  $E^{pq}$  quadratisch, verlustfrei dominiert und  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Für alle  $n \geq 96$  gilt:

- i) die Diagonalen  $d, s = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm(c^p - 4), \pm(c^p - 2)$  sind besetzt,
- ii)  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$ ,
- iii)  $x''_1 = x''_2$ ,
- iv)  $|x'_1 - x''_1|, |x'_2 - x''_2| \leq 2$ .

*Beweis.* Sei  $n \geq 96$ . Mit  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  bestimmen wir die untere Schranke  $c^p + c^{\bar{p}} \geq \frac{n}{2} \iff c^{\bar{p}} \geq \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  und analog  $r^{\bar{q}} \geq \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$ . Nach Lemma 4.6 gilt  $\#D^{p\oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$  und mit Lemma 4.18 dann  $a = 2$  und  $\alpha = \frac{c^p}{2}$ . Die Diagonalen  $d, s = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm(c^p - 6), \pm(c^p - 4)$  sind gemäß Lemma 4.15 besetzt und wir nennen sie *Kerndiagonalen*. Die Differenzdiagonalen  $d = \pm(w - c^p + 2)$  und Summendiagonalen  $s = \pm(w - c^p + 2)$  sind die Diagonalen durch die vier Felder  $(\pm(\frac{w}{2} - c^p + 2), \frac{w}{2}) \in E_T^{pq}$  und  $(\pm(\frac{w}{2} - c^p + 2), -\frac{w}{2}) \in E_B^{pq}$ , welche nicht die Schar der äquidistanten Kerndiagonalen vergrößern. Wir nennen sie *Querdiagonalen*. Da  $E^{pq}$  v. d., sind entweder alle oder keine Querdiagonalen besetzt.

Wir zeigen nun, dass die Diagonalen  $d, s = \pm(c^p - 2)$  besetzt sind und nehmen dafür zunächst an, dass stattdessen alle Querdiagonalen besetzt sind. Wir bestimmen dann eine verbesserte obere Schranke für  $c^{\bar{p}} + r^{\bar{q}}$ , indem wir zunächst maximale Mengen  $\tilde{C}^{\bar{p}}, \tilde{R}^{\bar{q}}$  bestimmen, so dass die Felder  $\tilde{C}^{\bar{p}} \times \{-\frac{w}{2} - x''_2, \frac{w}{2} + x'_2\}$  auf der unteren und oberen Kante  $\tilde{E}_B^{\bar{p}\bar{q}}, \tilde{E}_T^{\bar{p}\bar{q}}$ , sowie  $\{-\frac{w}{2} - x'_1, \frac{w}{2} + x''_1\} \times \tilde{R}^{\bar{q}}$  auf der linken und rechten Kante  $\tilde{E}_L^{\bar{p}\bar{q}}, \tilde{E}_R^{\bar{p}\bar{q}}$  von Kerndiagonalen dominiert werden (vgl. Abbildung 4.17):

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{\bar{p}} = & \left\{ -\left(\frac{w}{2} + x'_1\right), -\left(\frac{w}{2} + x'_1 - 2\right), \dots, -\left(\frac{w}{2} + x''_2 - c^p + 6\right), -\left(\frac{w}{2} + x''_2 - c^p + 4\right) \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{w}{2} + x''_2 - c^p + 4, \frac{w}{2} + x''_2 - c^p + 6, \dots, \frac{w}{2} + x'_1 - 2, \frac{w}{2} + x'_1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\bar{q}} = & \left\{ -\left(\frac{w}{2} + x''_2\right), -\left(\frac{w}{2} + x''_2 - 2\right), \dots, -\left(\frac{w}{2} + x'_1 - c^p + 6\right), -\left(\frac{w}{2} + x'_1 - c^p + 4\right) \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{w}{2} + x'_1 - c^p + 4, \frac{w}{2} + x'_1 - c^p + 6, \dots, \frac{w}{2} + x'_2 - 2, \frac{w}{2} + x'_2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Zur Berücksichtigung des Beitrags der Querdiagonalen fügen wir einen Korrekturterm  $\kappa$  hinzu. Wir schätzen die Summe  $c^{\bar{p}} + r^{\bar{q}}$  ab, um den Effekt aufzufangen, dass sich ein Summand auf Kosten des anderen erhöht und erhalten so

$$c^{\bar{p}} + r^{\bar{q}} \leq \#\tilde{C}^{\bar{p}} + \#\tilde{R}^{\bar{q}} + \kappa \leq \frac{n}{2} - 3 + \frac{x'_1 - x''_1}{2} + \frac{x'_2 - x''_2}{2} + \kappa, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \kappa \leq & \begin{cases} \sup\{0, 1 - 2x''_2, 2 - 2x''_2\} & x''_2 > 0 \wedge x'_2 = x''_2 \\ \sup\{0, 1 - x''_2, 2 - x''_2\} & x''_2 > 0 \wedge x'_2 + x''_2 \leq -2 \\ 0 & \text{sonst, d. h. } x''_2 < 0 \vee (x'_2 \neq x''_2 \wedge x'_2 + x''_2 \geq 0) \end{cases} \\ & + \begin{cases} \sup\{0, 1 - 2x''_1, 2 - 2x''_1\} & x''_1 > 0 \wedge x'_1 = x''_1 \\ \sup\{0, 1 - x''_1, 2 - x''_1\} & x''_1 > 0 \wedge x'_1 + x''_1 \leq -2 \\ 0 & \text{sonst, d. h. } x''_1 < 0 \vee (x'_1 \neq x''_1 \wedge x'_1 + x''_1 \geq 0) \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

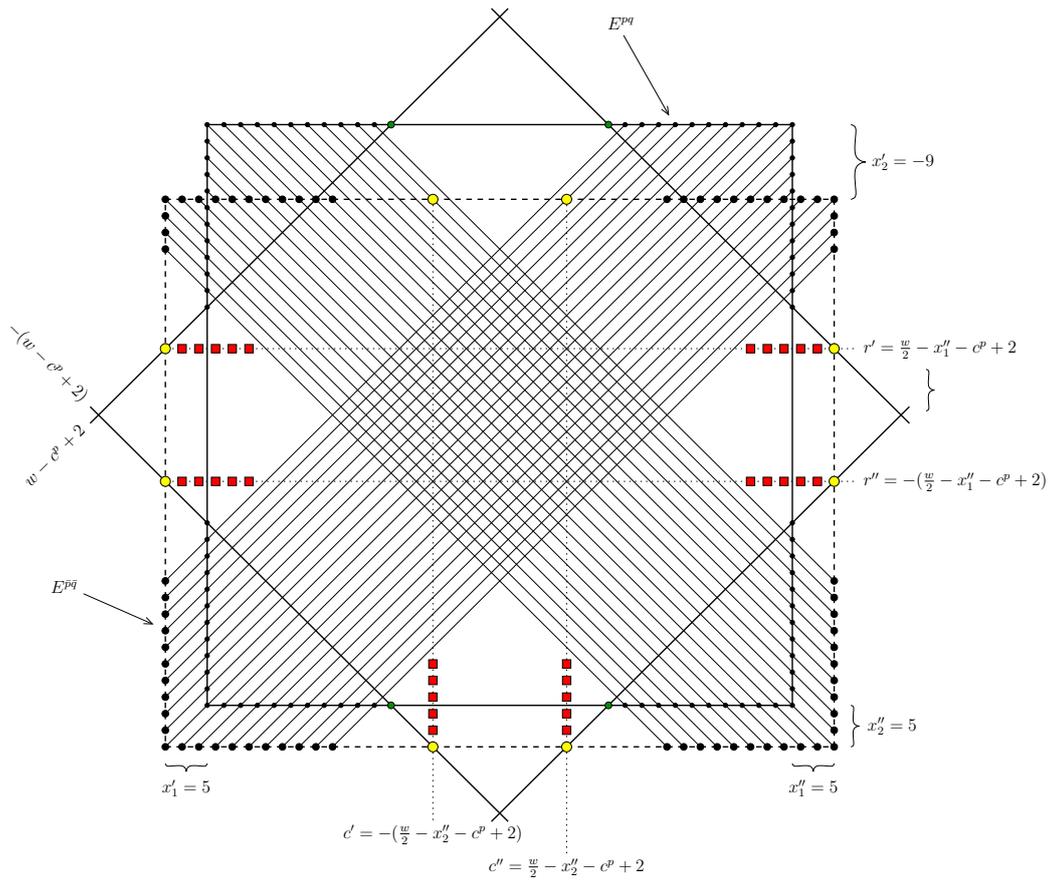


Abbildung 4.17: Einfluss der Lage von  $E^{pq}$  zu  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  auf  $C^{\bar{p}}, R^{\bar{q}}$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  mit gestrichelter Linie) — Bsp.: Alle vier Querdiagonalen besetzt und  $c^p = 24, x'_1 = 5, x''_1 = 5, x'_2 = -9, x''_2 = 5$

Anhand Abbildung 4.17 erläutern wir exemplarisch den ersten Summanden von  $\kappa$ , der den Beitrag zu  $c^{\bar{p}}$  widerspiegelt. Offensichtlich ist  $x''_2 > 0$  notwendige Voraussetzung für  $\#C^{\bar{p}} > \#\tilde{C}^{\bar{q}}$ , da andernfalls die Querdiagonalen kein Feld auf der unteren Kante  $\tilde{E}_B^{\bar{p}\bar{q}}$  dominieren, das nicht bereits durch eine Kerndiagonale dominiert wird. Falls  $x''_2 > 0$ , schneiden die Querdiagonalen  $\tilde{E}^{\bar{p}\bar{q}}$  in den Spalten  $c', c'' = \pm(\frac{w}{2} - c^p + 2 - x''_2) \notin \tilde{C}^{\bar{p}}$ . Falls nun  $c' \in C^{\bar{p}}$  oder  $c'' \in C^{\bar{p}}$ , müssen weitere Bedingungen erfüllt sein, damit die Felder  $(c', \frac{w}{2} + x'_2), (c'', \frac{w}{2} + x'_2) \in \tilde{E}_T^{\bar{p}\bar{q}}$  dominiert werden. Entweder sind die Felder ebenfalls durch Querdiagonalen dominiert, d. h.  $x'_2 = x''_2$ . Dann ist jedoch die Abschätzung für  $r^{\bar{q}}$  um  $2x''_2$  nach unten zu korrigieren, da die Felder  $\{c', c''\} \times \{-(\frac{w}{2} + x''_2 - 2), -(\frac{w}{2} + x''_2 - 4), \dots, -(\frac{w}{2} - x''_2 + 2), -(\frac{w}{2} - x''_2)\}$  und  $\{c', c''\} \times \{\frac{w}{2} + x'_2 - 2, \frac{w}{2} + x'_2 - 4, \dots, \frac{w}{2} - x'_2 + 2, \frac{w}{2} - x'_2\}$  alle nicht diagonal dominiert werden. Andernfalls sind  $(c', \frac{w}{2} + x'_2), (c'', \frac{w}{2} + x'_2)$  durch Kerndiagonalen dominiert, d. h.  $x'_2 + x''_2 \leq -2$ . In diesem Fall ist die Abschätzung für  $r^{\bar{q}}$  zumindest um  $x''_2$  nach unten zu korrigieren, da die Felder  $\{c', c''\} \times \{-(\frac{w}{2} + x''_2 - 2), -(\frac{w}{2} + x''_2 - 4), \dots, -(\frac{w}{2} - x''_2 + 2), -(\frac{w}{2} - x''_2)\}$  nicht diagonal dominiert werden.

Die Ungleichungen (4.9) und (4.10) fassen wir zusammen, wobei wir die Quotienten  $\frac{x'_1 - x''_1}{2}, \frac{x'_2 - x''_2}{2} \leq 0$  mit in die Fallunterscheidung hineinziehen:

$$c^{\bar{p}} + r^{\bar{q}} \leq \frac{n}{2} - 3 + \begin{cases} 0 & x''_2 > 0 \wedge x'_2 = x''_2 \\ -1 & x''_2 > 0 \wedge x'_2 + x''_2 \leq -2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} + \begin{cases} 0 & x'_1 > 0 \wedge x'_1 = x''_1 \\ -1 & x'_1 > 0 \wedge x'_1 + x''_1 \leq -2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zusammen mit der unteren Schranke  $\frac{n}{2} - 1 \leq c^{\bar{p}} + r^{\bar{q}}$  folgt der Widerspruch, d. h. die Querdiagonalen sind unbesetzt und stattdessen sind alle vier Diagonalen mit Absolutindex  $c^p - 2$  besetzt.

Da nun alle von  $D^{p \oplus q}$  besetzten Diagonalen bekannt sind und diese sich ausschließlich innerhalb des  $E^{pq}$  begrenzenden Quadrats schneiden, stehen alle Damen aus  $D^{p \oplus q}$  innerhalb dieses Quadrats. Die jeweils  $\frac{n}{2} - \frac{w+1}{2}$  besetzten Spalten der Parität  $p$  und besetzten Zeilen der Parität  $q$ , die komplett außerhalb des Quadrats liegen, sind somit durch die  $\frac{n}{2} - (\#D^{p \oplus q}) = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  Damen aus  $D^{p \oplus q} = D^{p\bar{q}} \cup D^{\bar{p}q}$  besetzt. Damit können wir eine Mindestgröße des Quadrats bestimmen:  $\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \geq 2^{\frac{n-(w+1)}{2}} \iff w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$ .

Zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Lagekennzahlen genügt uns eine grobe obere Schranken für  $c^{\bar{p}}$  ( $r^{\bar{q}}$ ). Hierzu zählen wir einfach die Diagonalen, die auf die obere bzw. untere (linke bzw. rechte) Kante von  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  treffen. Wegen  $x'_1 \leq x''_1, x'_2 \leq x''_2$  sind die Schranken basierend auf der unteren und rechten Kante zumindest so scharf, wie die auf der oberen und linken Kante basierenden:

$$c^{\bar{p}} \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - x''_2 + \frac{x'_1 + x''_1}{2} \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} + (x''_1 - x''_2), \quad (4.11)$$

$$r^{\bar{q}} \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - x''_1 + \frac{x'_2 + x''_2}{2} \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} + (x''_2 - x''_1). \quad (4.12)$$

Mit den unteren Schranken  $c^{\bar{p}}, r^{\bar{q}} \geq \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  folgt aus Ungleichung (4.11)  $x''_1 \geq x''_2 - 1$  und wegen  $x''_1 \equiv x''_2 \pmod{2}$  dann  $x''_1 \geq x''_2$ . Aus Ungleichung (4.12) folgt analog  $x''_2 \geq x''_1 - 1 \implies x''_2 \geq x''_1$ , ergo  $x''_1 = x''_2 =: x''$ . Einsetzen von  $x''_1 = x''_2$  in die Ungleichungen (4.11) und (4.12) zeigt mit den unteren Schranken schließlich  $|x'_1 - x''_1|, |x'_2 - x''_2| \leq 2$ .  $\square$

Die Indexmengen  $C^p, R^q$  sind nach Lemma 4.13 und 4.18 gegeben durch

$$C^p = R^q = \left\{ \pm \frac{w}{2}, \pm \left( \frac{w}{2} - 2 \right), \dots, \pm \left( \frac{w}{2} - c^p + 4 \right), \pm \left( \frac{w}{2} - c^p + 2 \right) \right\}. \quad (4.13)$$

Unter Einbezug der gemäß Lemma 4.20 zusätzlich besetzten vier Diagonalen mit Absolutindex  $c^p - 2$  können wir genauere Abschätzungen für  $C^{\bar{p}}$  und  $R^{\bar{q}}$  angeben (vgl. die Beziehungen (4.7) und (4.8)):

$$\begin{aligned} C^{\bar{p}} \subseteq & \left\{ -\left( \frac{w}{2} + x'_1 \right), -\left( \frac{w}{2} + x'_1 - 2 \right), \dots, -\left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 4 \right), -\left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2 \right) \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2, \frac{w}{2} + x'' - c^p + 4, \dots, \frac{w}{2} + x'' - 2, \frac{w}{2} + x'' \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} R^{\bar{q}} \subseteq & \left\{ -\left( \frac{w}{2} + x'' \right), -\left( \frac{w}{2} + x'' - 2 \right), \dots, -\left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 4 \right), -\left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2 \right) \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2, \frac{w}{2} + x'' - c^p + 4, \dots, \frac{w}{2} + x'_2 - 2, \frac{w}{2} + x'_2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Für unsere Zwecke genügen oft gröber abgeschätzte, dafür aber symmetrische und identische Obermengen  $\hat{C}^{\bar{p}} \supseteq C^{\bar{p}}$  und  $\hat{R}^{\bar{q}} \supseteq R^{\bar{q}}$ .

$$\hat{C}^{\bar{p}}, \hat{R}^{\bar{q}} := \left\{ \pm \left( \frac{w}{2} + x'' \right), \pm \left( \frac{w}{2} + x'' - 2 \right), \dots, \pm \left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 4 \right), \pm \left( \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2 \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Es ist zu beachten, dass  $\hat{C}^{\bar{p}}$  und  $\hat{R}^{\bar{q}}$  jeweils höchstens ein Element enthalten, das nicht in  $C^{\bar{p}}$  bzw.  $R^{\bar{q}}$  enthalten ist. Falls  $x'_1 \neq x''$  bzw.  $x'_2 \neq x''$ , ist die Inklusionsbeziehung (4.14) bzw. (4.15) somit strikt.

Wie wir durch Lemma 4.20 gesehen haben, sind die Lagekennzahlen alle ungefähr gleich groß. Um der intuitiven Vermutung nachzugehen, dass die Lagekennzahlen nicht stark von null abweichen, betrachten wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.21.** *Sei  $E^{p\bar{q}}$  quadratisch, verlustfrei dominiert und  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Für alle  $n \geq 96$  gilt  $-3 \leq x'' \leq 1$ .*

*Beweis.* Sei  $n \geq 96 \implies c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} > 24$ . Angenommen  $x'' > 1 \implies x'' \geq 3, x'_2 \geq 1$ . Aufgrund von  $x'' + x'_2 \geq 4$  ist  $E^{p\bar{q}}$  höher als breit. Mit  $|x'' - x'_2| \leq 2$  und Gleichung (4.16) gilt  $\pm \left( \frac{w}{2} + x'_2 - c^p + 4 \right) \in \hat{R}^{\bar{q}}$  und wegen  $\#(\hat{R}^{\bar{q}} \setminus R^{\bar{q}}) \leq 1$  sei o. B. d. A.  $\frac{w}{2} + x'_2 - c^p + 4 \in R^{\bar{q}}$ . Mit  $\frac{w}{2} - c^p + 6 \in C^p$  definieren wir dann das ausschließlich diagonal dominierte Feld  $\sigma := \left( \frac{w}{2} - c^p + 6, \frac{w}{2} + x'_2 - c^p + 4 \right) \in A^{p\bar{q}}$ . Da  $E^{p\bar{q}}$  höher als breit ist und  $\#D^{\bar{p}\oplus\bar{q}} = c^p$ , muss jede von einer Dame aus  $D^{\bar{p}\oplus\bar{q}}$  besetzte Diagonale genau ein Feld auf der oberen oder unteren Kante von  $E^{p\bar{q}}$  dominieren. Die Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma) = x'_2 - 2$  ist demnach nicht besetzt, da sie ausschließlich durch die langen Kanten  $\tilde{E}_L^{p\bar{q}}$  und  $\tilde{E}_R^{p\bar{q}}$  verläuft (vgl. Abbildung 4.18). Wir betrachten die Schnittspalte  $\bar{c} := \frac{w}{2} - 2c^p + 10$  der somit besetzten Summendiagonalen  $\text{sum}(\sigma) = w + x'_2 - 2c^p + 10$  mit der oberen Kante  $\tilde{E}_T^{p\bar{q}}$  in Zeile  $\frac{w}{2} + x'_2$ . Mit  $c^p > 24$  gilt  $\bar{c} < \frac{w}{2} - c^p + 2$  und mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  aus Lemma 4.20 weiter  $\bar{c} = \frac{w}{2} - 2c^p + 10 = -\left( \frac{w}{2} - c^p + 2 \right) + w - 3c^p + 12 > -\left( \frac{w}{2} - c^p + 2 \right)$ . Es folgt  $|\bar{c}| < \frac{w}{2} - c^p + 2$

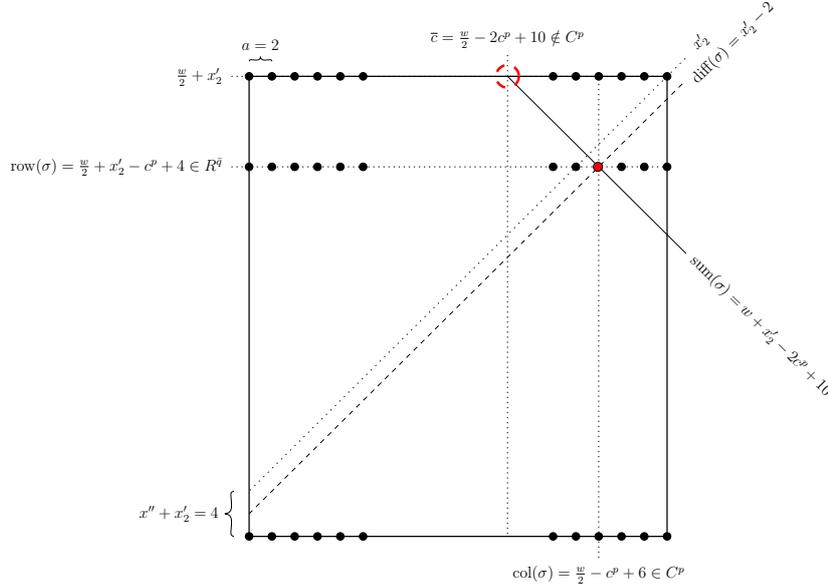
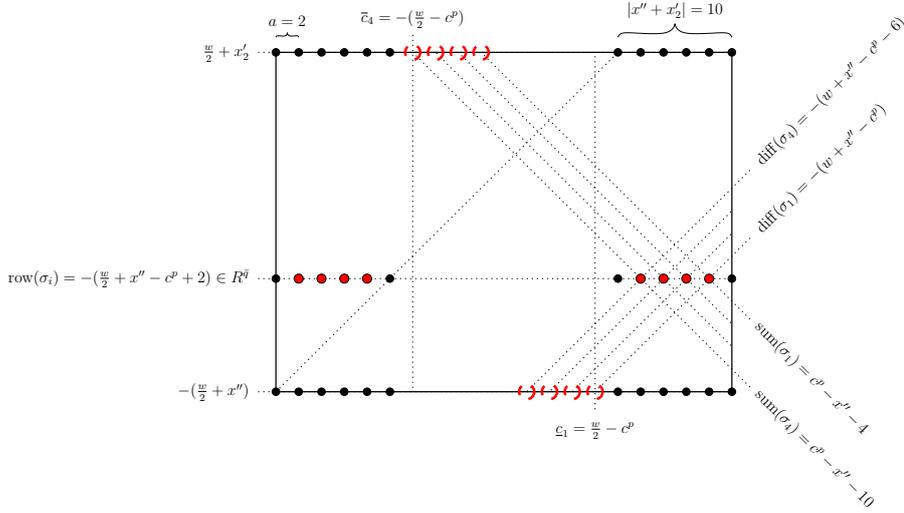


Abbildung 4.18:  $E^{p\bar{q}}$ : Widerspruch bei Annahme  $x'' > 1$  — Bsp.:  $x'' = 3, x_2' = 1, c^p = 12$

und nach Gleichung (4.13) somit  $\bar{c} \notin C^p$ , was den Widerspruch und damit die Behauptung  $x'' \leq 1$  zeigt.

Angenommen  $x'' < -3 \implies x'', x_2' \leq -5$ . Wegen  $x'' + x_2' \leq -10$  ist  $E^{p\bar{q}}$  breiter als hoch und nach Gleichung (4.16) gilt  $\pm(\frac{w}{2} + x'' - c^p + 2) \in \hat{R}^{\bar{q}}$ . Falls  $x_2' \neq x''$ , dann gilt insbesondere  $-(\frac{w}{2} + x'' - c^p + 2) \in R^{\bar{q}}$  (siehe auch Seite 93), andernfalls spiegeln wir ggf. horizontal an der Zeile  $r = 0$  und fordern wegen  $\#(\hat{R}^{\bar{q}} \setminus R^{\bar{q}}) \leq 1$  o. B. d. A.  $-(\frac{w}{2} + x'' - c^p + 2) \in R^{\bar{q}}$ . Wir definieren  $\sigma_i := (\frac{w}{2} - 2i, -(\frac{w}{2} + x'' - c^p + 2))$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (vgl. Abbildung 4.19). Mit  $c^p > 24$  gilt dann  $\text{col}(\sigma_i) \in C^p \implies \sigma_i \in A^{p\bar{q}}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Die Differenzdiagonalen  $\text{diff}(\sigma_i) = -(w + x'' - c^p + 2 - 2i)$  schneiden die untere Kante  $\tilde{E}_B^{p\bar{q}}$  in Zeile  $-(\frac{w}{2} + x'')$  in den Spalten  $\underline{c}_i = \frac{w}{2} - c^p + 2 - 2i$  und die Summendiagonalen  $\text{sum}(\sigma_i) = -x'' + c^p - 2 - 2i$  schneiden die obere Kante  $\tilde{E}_T^{p\bar{q}}$  in Zeile  $\frac{w}{2} + x_2'$  in den Spalten  $\bar{c}_i := \text{sum}(\sigma_i) - (\frac{w}{2} + x_2') = -(\frac{w}{2} - c^p + 2) - x'' - x_2' - 2i > -(\frac{w}{2} - c^p + 2)$ . Zusammen mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  gilt dann  $|\underline{c}_i|, |\bar{c}_i| < \frac{w}{2} - c^p + 2$  und somit  $\underline{c}_i, \bar{c}_i \notin C^p, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Gleiches gilt für die durch Spiegelung an der Spalte  $c = 0$  hervorgehenden Felder  $\sigma_i := (-\text{col}(\sigma_{i-4}), \text{row}(\sigma_{i-4}))$ ,  $i = 5, 6, 7, 8$ . Folglich sind mindestens acht Diagonalen besetzt, die weniger als zwei Felder aus  $E^{p\bar{q}}$  schneiden. Dies ist ein Widerspruch zu  $4\#D^{\bar{p}\oplus\bar{q}} - \#E^{p\bar{q}} \leq n + 2 - (c^p + r^{\bar{q}} - 4) \leq 6$  und zeigt die Behauptung  $x'' \geq -3$ .  $\square$

Betrachten wir nun die von  $D^{\bar{p}\oplus\bar{q}}$  dominierten Felder  $E' := E \cap (E^{p\bar{q}} \cup E^{\bar{p}q})$  in den äußersten unbesetzten Orthogonalen. Da die Felder auf einem Rechteck angeordnet sind dominiert keine Dame mehr als vier Felder aus  $E'$ . Wir bestimmen die Differenz  $4\#D^{\bar{p}\oplus\bar{q}} -$

Abbildung 4.19:  $E^{p\bar{q}}$ : Widerspruch bei Annahme  $x'' < -3$  — Bsp.:  $x'' = x'_2 = -5$ ,  $c^p = 12$ 

$\#[E \cap (E^{p\bar{q}} \cup E^{\bar{p}q})]$  in Abhängigkeit von den Lagekennzahlen:

$$4 \#D^{\bar{p}\oplus\bar{q}} - \#E' = \begin{cases} n + 2 - (2c^{\bar{p}} + 2r^{\bar{q}}) \leq 4 & x'' < 0 \\ n + 2 - (c^p + c^{\bar{p}} + r^q + r^{\bar{q}} - 2) \leq 4 & x'_1, x'_2 < 0, x'' > 0 \\ n + 2 - (2c^p + 2r^q) \leq 0 & x'_1, x'_2 > 0 \\ n + 2 - (2c^p + r^q + r^{\bar{q}} - 2) \leq 3 & \text{sgn}(x'_1) \neq \text{sgn}(x'_2) \end{cases} \quad (4.17)$$

Bildlich gesprochen reichen die Felder aus  $E'$  bis an die Ecken von  $E$ , falls die Lagekennzahlen alle ungefähr gleich null sind. Je mehr sie von null abweichen, um so mehr entfernen sich die Felder aus  $E'$  von den Ecken (vgl. Abbildung 4.20). In der Mitte jeder Kante des  $E$  begrenzenden Rechtecks befindet sich ein Bereich, der keine Felder aus  $E'$  enthält (vgl. Abbildung 4.20). Die Größe dieser Bereiche variiert zwar mit den Lagekennzahlen, trotzdem schneidet fast jede Diagonale durch solch eine Lücke die benachbarte Kante von  $E$  ebenfalls in der entsprechenden Lücke. Dieser Umstand motiviert das folgende Lemma 4.22, welches eine hinreichende Bedingung in Abhängigkeit von  $x''$  dafür liefert, dass eine bestimmte Diagonale kein Feld aus  $E'$  schneidet.

**Lemma 4.22.** *Sei  $E^{p\bar{q}}$  quadratisch, verlustfrei dominiert und  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Für alle  $n \geq 96$  gilt:*

- Jede Differenzdiagonale  $\hat{d}$  mit  $c^p - 2 + |x''| < |\hat{d}| < w - c^p + x''$  schneidet kein Feld aus  $E'$ ,
- jede Summendiaagonale  $\hat{s}$  mit  $c^p - 2 + |x''| < |\hat{s}| < w - c^p + x''$  schneidet kein Feld aus  $E'$ .

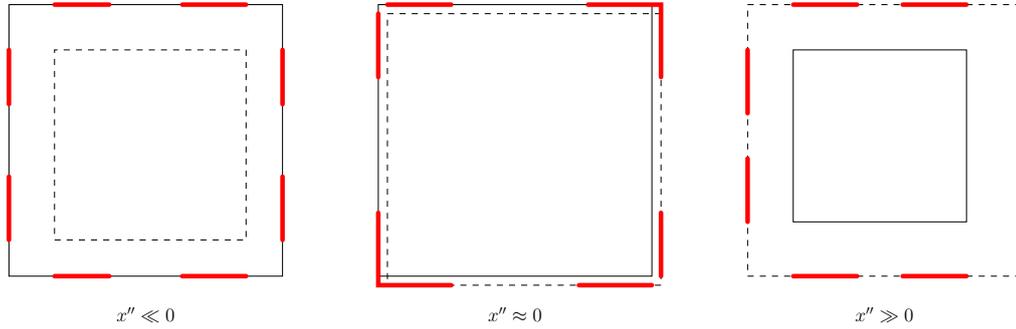


Abbildung 4.20: Lage von  $E'$  in Abhängigkeit von der Referenzlagekennzahl  $x''$  (Rechteck um  $E^{p\bar{q}}$  mit durchgezogener, das um  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  mit gestrichelter Linie; der Bereich der Felder aus  $E'$  ist dick gezeichnet)

*Beweis.* Erfülle die Differenzdiagonale  $\hat{d} > 0$  die Voraussetzungen für die Aussage. Wir bestimmen Schranken in Abhängigkeit von  $x''$  für die Spalte  $\hat{c}$  des Schnittpunktes von  $\hat{d}$  mit der obersten unbesetzten Zeile und zeigen, dass die Spalte  $\hat{c}$  besetzt ist und somit der Schnittpunkt nicht in  $E'$  liegt.

Falls  $x'_2 > 0$ , ist  $\frac{w}{2} + x'_2 \equiv \bar{q} \pmod{2}$  die oberste unbesetzte Zeile und alle Felder aus  $E'$  in dieser Zeile liegen in Spalten aus  $C^p$  (vgl. Abbildung 4.21). Wir benutzen die Voraussetzung  $\hat{d} < w - c^p + x''$  und schließen  $\hat{c} = \frac{w}{2} + x'_2 - \hat{d} > \frac{w}{2} + x'_2 - (w - c^p + x'') \geq -(\frac{w}{2} - c^p + 2)$ . Die Voraussetzung  $\hat{d} > c^p - 2 + |x''|$  liefert zudem  $\hat{c} = \frac{w}{2} + x'_2 - \hat{d} < \frac{w}{2} + x'_2 - (c^p - 2 + |x''|) \leq \frac{w}{2} - c^p + 2$ . Mit  $-(\frac{w}{2} - c^p + 2) < \hat{c} < \frac{w}{2} - c^p + 2$  gilt nach Gleichung (4.13) dann  $\hat{c} \notin C^p$ , d. h. die Diagonale  $\hat{d}$  schneidet in der obersten unbesetzten Zeile kein Feld aus  $E'$ .

Falls  $x'_2 < 0$ , ist die oberste unbesetzte Zeile  $\frac{w}{2} \equiv q \pmod{2}$  und alle Felder aus  $E'$  in dieser Zeile liegen in Spalten aus  $C^{\bar{p}} \subseteq \hat{C}^{\bar{p}}$ . Wir benutzen die Voraussetzung  $\hat{d} < w - c^p + x''$  und schließen  $\hat{c} = \frac{w}{2} - \hat{d} > \frac{w}{2} - (w - c^p + x'') \geq -(\frac{w}{2} + x'' - c^p)$ . Die Voraussetzung  $\hat{d} > c^p - 2 + |x''|$  liefert zudem  $\hat{c} = \frac{w}{2} - \hat{d} < \frac{w}{2} - (c^p - 2 + |x''|) \leq \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2$ . Mit  $-(\frac{w}{2} + x'' - c^p) < \hat{c} < \frac{w}{2} + x'' - c^p + 2$  gilt nach Gleichung (4.16) dann  $\hat{c} \notin \hat{C}^{\bar{p}} \supseteq C^{\bar{p}}$ , d. h. die Diagonale  $\hat{d}$  schneidet in der obersten unbesetzten Zeile kein Feld aus  $E'$ .

Da die vier Mengen  $C^p, R^q, \hat{C}^{\bar{p}}, \hat{R}^{\bar{q}}$  jeweils symmetrisch sind und  $C^p = R^q, \hat{C}^{\bar{p}} = \hat{R}^{\bar{q}}$  gilt, erfolgt die Bestimmung der Zeile  $\hat{r}$  des Schnittpunktes von  $\hat{d}$  mit der linkensten unbesetzten Spalte analog und zeigt  $\hat{r} \notin R^q \cup \hat{R}^{\bar{q}}$ . Ebenso gilt aufgrund der Symmetrien die Aussage für  $\hat{d} < 0$  sowie Analoges für die Summendiagonalen.  $\square$

Wir nennen eine Diagonale  $i$  *unproduktiv*, wenn  $c^p - 2 + |x''| < |i| < w - c^p + x''$ .

Bei genauerer Analyse spezieller Fälle lässt sich zeigen, dass die Bedingung in Lemma 4.22 zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist. Durch Berücksichtigung des Vorzeichens der Diagonalindizes und einiger Fallunterscheidungen ließen sich die Schranken noch verschärfen. Die etwas schwächere Abschätzung hat jedoch den Vorteil, dass sich durch

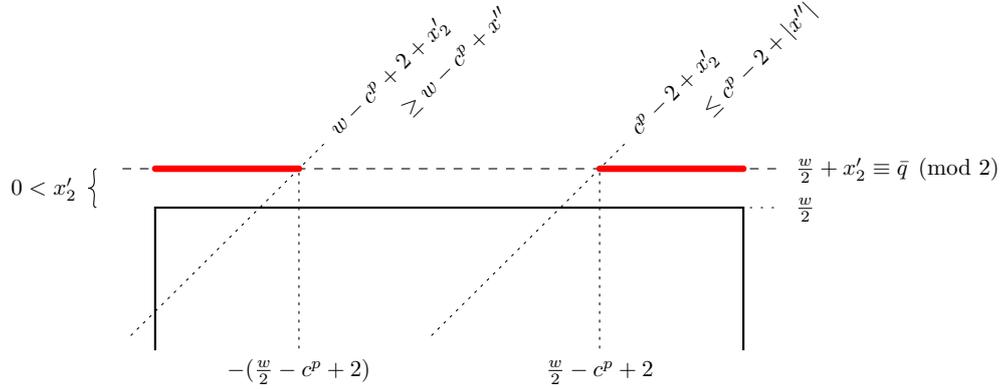


Abbildung 4.21: Lage der begrenzenden Diagonalen  $d' = w - c^p + x''$  und  $d'' = c^p - 2 + |x''|$   
 — Bsp.:  $\hat{d} > 0, x'_2 > 0$

Ausnutzung von Symmetrien die Argumentation in den folgenden Beweisen vereinfachen lässt. Hierzu stellen wir die folgende Proposition fest.

**Proposition 4.23.** *Die Eigenschaft eines Feldes, auf einer unproduktiven Diagonale zu liegen, ist invariant unter den Operationen der Diedergruppe  $D_4$ .*

*Beweis.* Sei  $\sigma := (c, r)$  ein beliebiges Feld auf der unproduktiven Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma) = r - c$ . Alle acht Symmetrien von  $D_4$  lassen sich durch Verkettung von *Spiegelung an  $r = 0$*  und *Drehung um  $90^\circ$*  erzeugen. Das durch horizontale Spiegelung an  $r = 0$  hervorgehende Feld  $(c, -r)$  liegt auf der unproduktiven Summendiagonale  $c - r = -\text{diff}(\sigma)$ . Das durch Drehung um  $90^\circ$  (im Uhrzeigersinn) hervorgehende Feld  $(r, -c)$  liegt auf der unproduktiven Summendiagonale  $r - c = \text{diff}(\sigma)$ .

Die Argumentation für ein Feld auf einer unproduktiven Summendiagonale verläuft analog und zeigt die Behauptung.  $\square$

Als letzten Hilfssatz benötigen wir noch das folgende Lemma.

**Lemma 4.24.** *Sei  $E^{pq}$  quadratisch, verlustfrei dominiert und  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ . Für alle  $n \geq 96$  sind die vier Diagonalen mit Absolutindex 1 besetzt.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Summendiagonale  $s' = 1$  besetzt ist und schließen über Symmetrien Gleiches für die übrigen drei Diagonalen mit Absolutindex 1.

Angenommen die Summendiagonale  $s' = 1$  ist unbesetzt. Wir betrachten den Bereich um die linke, obere Ecke und rechte, untere Ecke von  $E$  (vgl. Abbildung 4.22) und zeigen, dass die unbesetzte Summendiagonale  $s' = 1$  mindestens vier Felder aus  $A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$  schneidet, die auf unproduktiven Differenzdiagonalen liegen. Wir greifen dabei auf die Gleichungen (4.13) und (4.16) zurück, mit  $\#(\hat{C}^{\bar{p}} \setminus C^{\bar{p}}), \#(\hat{R}^{\bar{q}} \setminus \#R^{\bar{q}}) \leq 1$ .

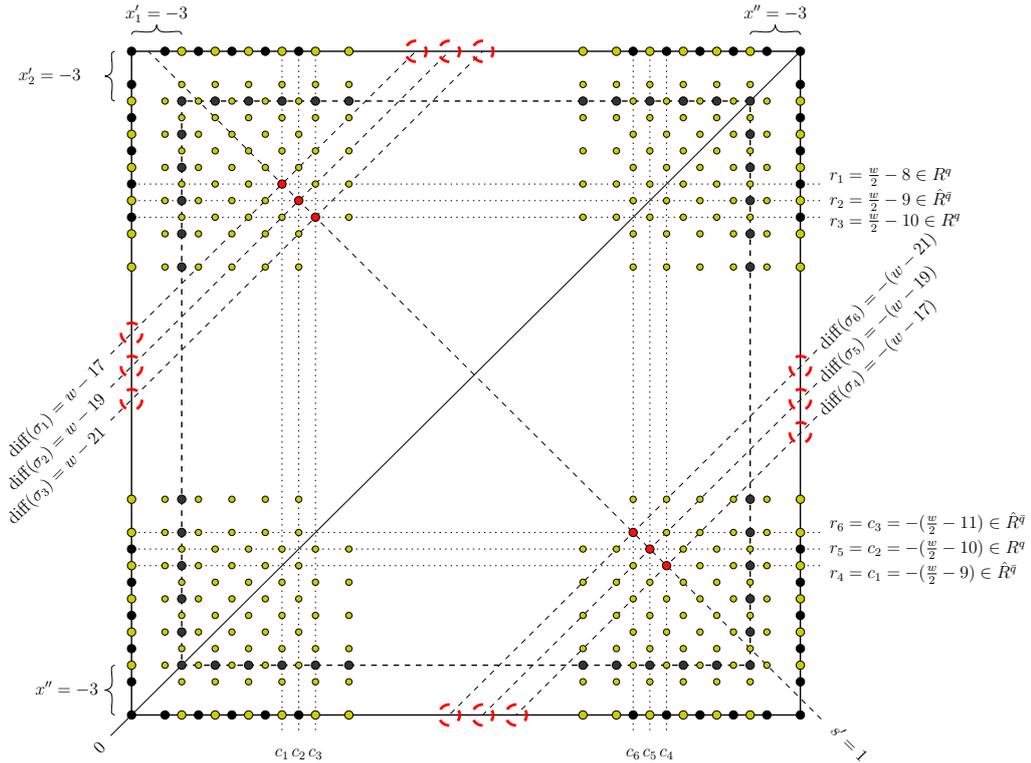


Abbildung 4.22: Von  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  liegen mindestens vier Felder in  $A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  mit gestrichelter Linie; Felder aus  $A^{pq} \cup A^{\bar{p}\bar{q}}$  dunkel gefüllt, Felder aus  $A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$  hell gefüllt) — Bsp.:  $c^p = 12$ ,  $x'_1 = x'_2 = x'' = -3$

Sei  $c_i := -(\frac{w}{2} - \frac{c^p - x'' + 1}{2} - i)$ ,  $r_i := \frac{w}{2} - \frac{c^p - x'' - 1}{2} - i$  und  $\sigma_i := (c_i, r_i)$ , für  $i = 1, 2, 3$ . Die Felder  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  liegen alle auf der Summendiagonale  $s' = c_i + r_i = 1$ , wobei das Feld  $\sigma_i$  auf der Differenzdiagonale  $\text{diff}(\sigma_i) = r_i - c_i = w - c^p + x'' - 2i$  liegt. Weiter definieren wir die entsprechenden an der Differenz-Hauptdiagonale  $d = 0$  gespiegelten Felder  $\sigma_i := (c_i, r_i)$  mit  $c_i = r_{i-3}, r_i = c_{i-3}$ , für  $i = 4, 5, 6$ . Diese liegen ebenso auf  $s' = 1$ , jedoch auf den Differenzdiagonalen  $\text{diff}(\sigma_i) = -\text{diff}(\sigma_{i-3}), i = 4, 5, 6$ .

Wir zeigen nun, dass zumindest vier Felder aus  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}$  in  $A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$  liegen. Hierzu zeigen wir  $c_i \in C^p \cup \hat{C}^{\bar{p}}$  und  $r_i \in R^q \cup \hat{R}^{\bar{q}}$ , für  $i = 1, \dots, 6$ . Da  $C^p, R^q, \hat{C}^{\bar{p}}, \hat{R}^{\bar{q}}$  jeweils symmetrisch sind und  $C^p = R^q, \hat{C}^{\bar{p}} = \hat{R}^{\bar{q}}$ , genügt es die absoluten Indizes  $|c_i|, |r_i|$  zu betrachten, die folgendermaßen beschränkt sind:

$$\frac{w}{2} - \frac{c^p - x'' + 1}{2} - 3 \leq |c_i|, |r_i| \leq \frac{w}{2} - \frac{c^p - x'' - 1}{2} - 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\}.$$

Wir zeigen  $\inf_{c \in C^p} |c|, \inf_{c \in \hat{C}^{\bar{p}}} |c| \leq |c_i| \leq \sup C^p, \sup \hat{C}^{\bar{p}}$ , für  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Durch Einsetzen der Suprema und Infima von  $C^p$  und  $\hat{C}^{\bar{p}}$  aus den Gleichungen (4.13) und (4.16) lässt sich hierfür die hinreichende Bedingung  $|x''| \leq c^p - 11 = \frac{n}{4} - \frac{21}{2}$  zeigen. Mit der Beschränkung  $|x''| \leq 3$  aus Lemma 4.21 ist die hinreichende Bedingung für alle  $n \geq 54$  erfüllt. Da die positiven Elemente in  $C^p$  und  $\hat{C}^{\bar{p}}$  äquidistant mit Abstand  $a = 2$  sind, gilt somit  $c_i \in C^p \cup \hat{C}^{\bar{p}}$  und  $r_i \in R^q \cup \hat{R}^{\bar{q}}$ , für  $i \in \{1, \dots, 6\}$ .

Da  $c_i \not\equiv r_i \pmod{2}$ , gilt  $\sigma_i \in (C^p \times \hat{R}^{\bar{q}}) \cup (\hat{C}^{\bar{p}} \times R^q)$ . Mit  $\#(\hat{C}^{\bar{p}} \setminus C^p), \#(\hat{R}^{\bar{q}} \setminus R^q) \leq 1$  sind somit mindestens vier Felder aus  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}$  in  $(C^p \times R^q) \cup (\hat{C}^{\bar{p}} \times \hat{R}^{\bar{q}}) = A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$ .

Wir zeigen, dass die Differenzdiagonalen durch  $\sigma_i$  unproduktiv sind, d. h.  $c^p - 2 + |x''| < |\text{diff}(\sigma_i)| < w - c^p + x''$ . Offensichtlich gilt  $\sup_{i=1, \dots, 6} |\text{diff}(\sigma_i)| = w - c^p + x'' - 2 < w - c^p + x''$ . Mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  aus Lemma 4.20 schätzen wir ab:  $\inf_{i=1, \dots, 6} |\text{diff}(\sigma_i)| = w - c^p + x'' - 6 \geq c^p - 2 + \frac{n}{4} - \frac{13}{2} + x''$ . Für  $|x''| - x'' < \frac{n}{4} - \frac{13}{2}$  gilt somit  $c^p - 2 + |x''| < |\text{diff}(\sigma_i)|$ . Falls  $x'' > 0$ , ist diese Bedingung für  $\frac{n}{4} - \frac{13}{2} > 0 \iff n > 26$  erfüllt. Falls  $x'' < 0$ , ergibt sich  $2|x''| < \frac{n}{4} - \frac{13}{2}$ , was wegen  $|x''| \leq 3$  aus Lemma 4.21 für  $n > 50$  gilt. Da  $n \geq 96$  sind somit alle Differenzdiagonalen  $\text{diff}(\sigma_1), \dots, \text{diff}(\sigma_6)$  unproduktiv.

Da somit mindestens vier unproduktive Diagonalen besetzt sind, lässt sich die Gleichung (4.17) verschärfen zu  $4\#D^{\bar{p}\oplus q} - \#E' \leq 4 - 8 = -4$ , d. h.  $E'$  ist nicht komplett dominiert. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Summendiagonale  $s' = 1$  besetzt ist.

Da die Mengen  $C^p, R^q, \hat{C}^{\bar{p}}, \hat{R}^{\bar{q}}$  jeweils symmetrisch sind und zudem  $C^p = R^q, \hat{C}^{\bar{p}} = \hat{R}^{\bar{q}}$ , gelten mit Proposition 4.23 die analogen Aussagen, dass die Summendiagonale  $s = -1$  sowie die Differenzdiagonalen mit Absolutindex 1 besetzt sind.  $\square$

Wir zeigen das Hauptresultat.

**Satz 4.25.** *Jede dominierende Menge  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \frac{n}{2}$  ist eine orthodoxe Überdeckung, für alle  $n \equiv 6 \pmod{8}, n \geq 96$ .*

*Beweis.* Sei  $n \equiv 6 \pmod{8}, n \geq 96$ . Angenommen die Aussage stimmt nicht. Nach Proposition 4.19 existieren  $p, q \in \{0, 1\}$ , so dass  $E^{pq}$  quadratisch und verlustfrei dominiert ist und  $c^p = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$  gilt. Die Lagekennzahlen können wir mittels der Lemmata 4.20 und 4.21 einschränken:  $x'' := x''_1 = x''_2, |x''_1 - x''|, |x''_2 - x''| \leq 2$  und  $-3 \leq x'' \leq 1$ .

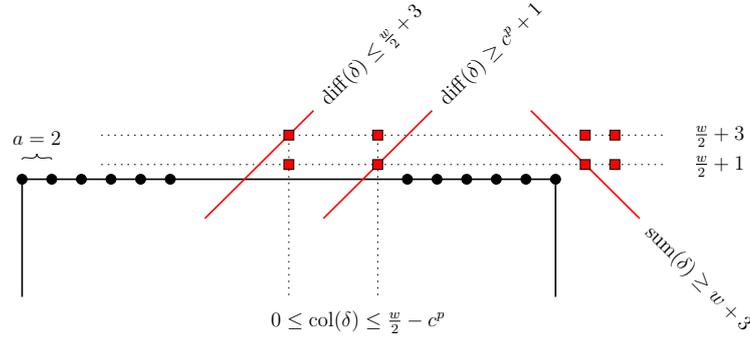


Abbildung 4.23: Eine außenstehende Dame  $\delta \in D^{p\bar{q}}$  mit  $|\text{row}(\delta)| \in \{\frac{w}{2} + 1, \frac{w}{2} + 3\}$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener Linie) — Bsp.:  $c^p = 12, \text{col}(\delta), \text{row}(\delta) \geq 0$

Angenommen  $x'' = -3$ . Dann gilt  $x'_1, x'_2 \leq -3$  und die vier gemäß Lemma 4.24 besetzten Diagonalen mit Absolutindex eins dominieren kein Feld aus  $E'$  (vgl. auch Abbildung 4.20). Die Ungleichung (4.17) können wir somit um acht verschärfen und erhalten einen Widerspruch, folglich gilt  $|x''| \leq 1$ .

Die Positionen der Damen aus  $D^{p\oplus q}$  lassen sich mittels der vollständigen Beschreibung der von ihnen besetzten Diagonalen einschränken zu  $|\text{col}(\delta)|, |\text{row}(\delta)| \leq c^p - 2 < \frac{w}{2}$  für alle  $\delta \in D^{p\oplus q}$ . Die Kandidatenfelder mit einer größten Koordinate sind die vier Schnittpunkte  $\{(0, \pm(c^p - 2)), (\pm(c^p - 2), 0)\}$  der betragsmäßig größten besetzten Diagonalen mit  $|d|, |s| = c^p - 2$ . Mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  gilt dann  $c^p - 2 < \frac{w}{2}$ , d. h. alle Damen aus  $D^{p\oplus q}$  liegen innerhalb des Quadrats durch  $E^{pq}$ .

Wir betrachten eine Dame  $\delta \in D^{p\bar{q}}$  mit  $|\text{row}(\delta)| \in \{\frac{w}{2} + 1, \frac{w}{2} + 3\}$  und zeigen, dass diese höchstens zwei Felder aus  $E'$  dominiert. Da keine Lagekennzahl größer als eins ist, steht  $\delta$  außerhalb des Rechtecks durch  $E' \subset E$ . Sei o. B. d. A.  $\text{col}(\delta), \text{row}(\delta) \geq 0$ . Falls  $\text{col}(\delta) > \frac{w}{2}$ , schneidet die von  $\delta$  besetzte Summendiagonale  $\text{sum}(\delta) \geq w + 3$  nicht einmal das Rechteck durch  $E'$  (vgl. Abbildung 4.23). Mit Lemma 4.17 und 4.18 bestimmen wir die Menge  $C^p$  der unbesetzten Spalten der Parität  $p$  (siehe Gleichung (4.13)) und schließen damit andernfalls  $0 \leq \text{col}(\delta) \leq \frac{w}{2} - c^p$ . Die Differenzdiagonale durch  $\delta$  lässt sich beschränken durch  $\text{diff}((\frac{w}{2} - c^p, \frac{w}{2} + 1)) = c^p + 1 \leq \text{diff}(\delta) \leq \frac{w}{2} + 3 = \text{diff}((0, \frac{w}{2} + 3))$ . Mit  $|x''| \leq 1$  gilt  $c^p - 2 + |x''| < c^p + 1 \leq \text{diff}(\delta)$  und mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  aus Lemma 4.20 folgt dann  $\text{diff}(\delta) \leq \frac{w}{2} + 3 < w - c^p + x''$ , für  $n \geq 96$ . Dies zeigt gemäß Lemma 4.22, dass  $\text{diff}(\delta)$  eine unproduktive Diagonale ist, d. h. kein Feld aus  $E'$  schneidet. Da  $E^{pq}$  v. d. gilt mit Lemma 4.13  $C^p = R^q$  und analog folgt, dass eine Dame  $\delta' \in D^{\bar{p}q}$  mit  $|\text{col}(\delta')| \in \{\frac{w}{2} + 1, \frac{w}{2} + 3\}$  ebenfalls höchstens zwei Felder aus  $E'$  dominiert. Damen aus  $D^{p\oplus \bar{q}}$  in Orthogonalen mit Absolutindex aus  $\{\frac{w}{2} + 1, \frac{w}{2} + 3\}$  bezeichnen wir als *außenstehende Damen*.

Wir zeigen  $x'_1, x'_2 \geq -1$ . Angenommen  $x'_1 \leq -3$ . Dann sind mit  $|x'_1 - x''|, |x'_2 - x''|$  alle Lagekennzahlen negativ. Wegen  $w \leq n - 2$  existieren somit zwei außenstehende Damen  $\delta_1 \in D^{p\bar{q}}, \delta_2 \in D^{\bar{p}q}$ . Weiter schneiden die gemäß Lemma 4.24 besetzten Diagonalen  $d = -1$

und  $s = 1$  das Rechteck durch  $E'$  in den nicht ausschließlich diagonal dominierten Feldern  $(\frac{w}{2} - 1, \pm \frac{w}{2}) \notin E'$ . Für den Spezialfall, dass eine der Diagonalen  $d = -1$  oder  $s = 1$  von einer der beiden betrachteten außenstehenden Damen besetzt wird, bemerken wir, dass diese Dame dann höchstens ein Feld aus  $E'$  dominiert. Insgesamt können wir somit die Ungleichung (4.17) um mindestens sechs verschärfen und erhalten einen Widerspruch, ergo  $x'_1 \geq -1$ . Analog beweisen wir  $x'_2 \geq -1$ .

Wir zeigen  $x'_1, x'_2 \leq -1$ . Angenommen  $\sup\{x'_1, x'_2\} > -1$ . Sei o. B. d. A.  $x'_1 \leq x'_2$ . Wegen  $x'_2 \leq x'' \leq 1$  gilt dann  $x'_2 = x'' = 1$  und  $w$  ist beschränkt durch  $w < n - 2 \implies w \leq n - 4$ . Es steht somit eine Dame  $\delta \in D^{\bar{p}q}$  mit  $|\text{row}(\delta)| = \frac{w}{2} + 2$  unmittelbar über oder unter dem Rechteck durch  $E'$ . Da  $x'_2 = x''$  nehmen wir aus Symmetriegründen o. B. d. A.  $\text{row}(\delta) > 0$  an. Betrachten wir nun  $E^{\bar{p}q}$ . Wegen  $x'_2 + x'' > 0$  ist  $E^{\bar{p}q}$  höher als breit, d. h. keine besetzte Diagonale schneidet mehr als ein Feld aus der oberen und unteren Kante  $E_T^{\bar{p}q} \cup E_B^{\bar{p}q}$ . Da  $\#(E_T^{\bar{p}q} \cup E_B^{\bar{p}q}) = 2 \#D^{\bar{p}\oplus q}$ , dominiert jede Dame aus  $D^{\bar{p}\oplus q}$  genau zwei Felder aus  $E_T^{\bar{p}q} \cup E_B^{\bar{p}q}$ . Dies ist nur möglich mit  $\text{col}(\delta) \pm 1 \in C^{\bar{p}}$  und nach Betrachtung von  $C^{\bar{p}}$  (siehe Gleichung (4.13)) lässt sich dann der zulässige Spaltenbereich von  $\delta$  auf  $\frac{w}{2} - c^{\bar{p}} + 3 \leq |\text{col}(\delta)| \leq \frac{w}{2} - 1$  einschränken (vgl. Abbildung 4.24). Damit gilt  $\text{col}(\delta) \in \hat{C}^{\bar{p}}$  (siehe Gleichung (4.16)) und  $\#\hat{C}^{\bar{p}} - \#C^{\bar{p}} \leq 1$  impliziert nach Beziehung (4.14) dann  $x'_1 = x''$  und wegen der Symmetrie von  $\hat{C}^{\bar{p}}$  ebenso  $-\text{col}(\delta) \in C^{\bar{p}}$ . Die von  $\delta$  besetzten Diagonalen  $\text{diff}(\delta) = \frac{w}{2} + 2 - \text{col}(\delta)$  und  $\text{sum}(\delta) = \frac{w}{2} + 2 + \text{col}(\delta)$  dominieren die Felder  $\sigma_1 := (-\frac{w}{2} + 1, 1 - \text{col}(\delta)) \in E'$  und  $\sigma_2 := (\frac{w}{2} + 1, 1 + \text{col}(\delta)) \in E'$ . Weiter schneiden die Diagonalen  $\text{sum}(\sigma) = -\frac{w}{2} - \text{col}(\delta) = \text{diff}(\sigma_1)$  und  $\text{diff}(\sigma) = -\frac{w}{2} + \text{col}(\delta) = \text{diff}(\sigma_2)$  durch das diagonal dominierte Feld  $\sigma := (-\text{col}(\delta), -\frac{w}{2}) \in A^{\bar{p}q}$  ebenso  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Somit ist  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  doppelt-diagonal dominiert. Da alle Lagekennzahlen positiv sind, ist dies jedoch ein Widerspruch zur Abschätzung (4.17), d. h.  $x'_1, x'_2 \leq -1$ . Zusammen mit  $x'_1, x'_2 \geq -1$  definieren wir  $x'_1 = x'_2 = -1 =: x'$ .

Wir zeigen  $w = n - 2$ . Angenommen  $w \leq n - 4$ . Falls  $x'' = -1$ , existieren mindestens vier außenstehende Damen. Die Ungleichung (4.17) lässt sich dann um acht verschärfen und wir erhalten einen Widerspruch. Andernfalls gilt  $x'' = 1$ . Wie auf Seite 93 bemerkt, gilt dann in den Beziehungen (4.14) und (4.15) Gleichheit, d. h.  $C^{\bar{p}}$  und  $R^{\bar{q}}$  sind vollständig bestimmt. Mit  $w < n - 4$  ließe sich Ungleichung (4.17) analog wie oben ebenfalls um acht verschärfen, somit gilt  $w = n - 4$ . Weiter existieren zwei außenstehende Damen  $\delta_1, \delta_2$ , so dass sich die Ungleichung (4.17) um vier verschärfen lässt. Jede andere Dame aus  $D^{\bar{p}\oplus q}$  dominiert somit genau vier Felder aus  $E'$ . Insbesondere gilt dies für die Dame  $\delta' \in D^{\bar{p}q}$  in Zeile  $|\text{row}(\delta')| = \frac{w}{2} + 2$ . Um vier Felder dominieren zu können, darf keine von  $\delta'$  besetzte Diagonale  $E'$  verfehlen, d. h.  $|\text{col}(\delta')| < \frac{w}{2}$  und  $\delta'$  dominiert somit insbesondere zwei Felder aus  $E'_T$  oder  $E'_B$ . Falls  $\text{row}(\delta') = \frac{w}{2} + 2$ , dann liegt mit  $x' = -1$  die obere Kante  $E'_T$  in Zeile  $\text{row}(\delta') - 2 = \frac{w}{2}$ . Damit  $\delta'$  zwei Felder aus  $E'_T$  dominiert, muss folglich  $\text{col}(\delta') \pm 2 \in C^{\bar{p}}$ , jedoch  $\text{col}(\delta') \notin C^{\bar{p}}$ , gelten. Mit  $w \geq \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$  ist dies nicht möglich. Falls  $\text{row}(\delta') = -(\frac{w}{2} + 2)$ , dann liegt mit  $x'' = 1$  die untere Kante  $E'_B$  in Zeile  $\text{row}(\delta') + 1$ . Damit  $\delta'$  zwei Felder aus  $E'_B$  dominiert, muss folglich  $\text{col}(\delta') \pm 1 \in C^{\bar{p}}$ , jedoch  $\text{col}(\delta') \notin C^{\bar{p}}$ , gelten. Dieses ist ebenso nicht möglich. Somit gilt  $\delta' \in \{\delta_1, \delta_2\}$ . Analog zeigen wir  $\delta'' \in \{\delta_1, \delta_2\}$  für die Dame  $\delta'' \in D^{\bar{p}q}$  in Spalte  $|\text{col}(\delta'')| = \frac{w}{2} + 2$ . Wir partitionieren  $E' = E'_I \dot{\cup} E'_{II} \dot{\cup} E'_{III} \dot{\cup} E'_{IV}$  gemäß Quadrantenzugehörigkeit und bestimmen mittels

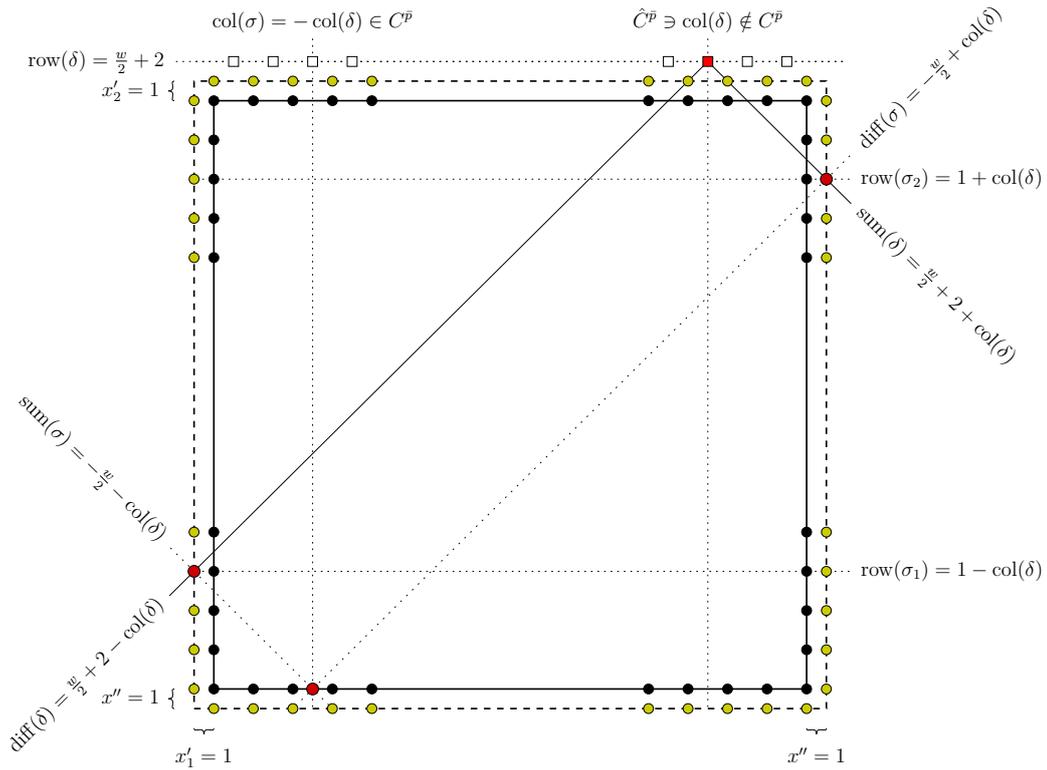


Abbildung 4.24:  $E^{p\bar{q}}$ : Widerspruch bei Annahme  $\sup\{x'_1, x'_2\} > -1$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{p\bar{q}}$  mit gestrichelter Linie; Felder aus  $E^{pq}$  dunkel, Felder aus  $A^{p\bar{q}} \cup A^{\bar{p}q}$  hell gefüllt) — Bsp.:  $x'_2 = x'' = 1, c^p = 10$

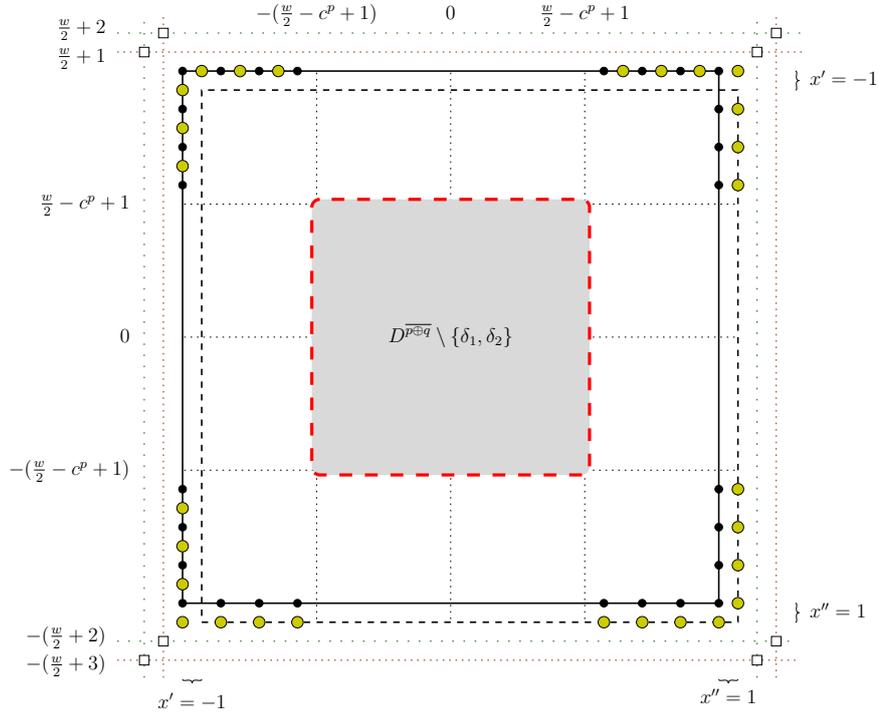


Abbildung 4.25: Widerspruch im Fall  $w = n - 4$ ,  $\{\delta', \delta''\} = \{\delta_1, \delta_2\}$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{p \oplus q}$  mit gestrichelter Linie; Felder aus  $E'$  hell gefüllt; Kandidatenfelder für  $\delta_1, \delta_2$  eckig; Damen aus  $D^{p \oplus q} \setminus \{\delta_1, \delta_2\}$  stehen im grau gefüllten Quadrat) — Bsp.:  $c^p = 8$

$C^p, C^{\bar{p}}, R^q, R^{\bar{q}}$  die Mächtigkeiten zu  $\#E'_I = c^p - 1$ ,  $\#E'_{II} = c^p - 2$ ,  $\#E'_{III} = c^p - 1$ ,  $\#E'_{IV} = c^p$  (vgl. Abbildung 4.25). Wegen  $c^{\bar{p}} = c^p - 1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  und  $r^{\bar{q}} = r^q - 1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  gilt  $c^p + c^{\bar{p}} = r^q + r^{\bar{q}} = \frac{n}{2}$ , d. h. keine Orthogonale ist mehrfach besetzt. Somit stehen alle Damen  $\delta \in D^{p \oplus q} \setminus \{\delta_1, \delta_2\}$  mit  $|\text{col}(\delta)|, |\text{row}(\delta)| \leq \frac{w}{2} - c^p + 1$  weit im Inneren des Rechtecks um  $E^{pq}$  und dominieren jeweils ein Feld aus  $E'_I, E'_{II}, E'_{III}$  und  $E'_{IV}$ . Da kein Feld aus  $E'$  mehrfach dominiert wird, lässt sich über die Mächtigkeiten von  $E'_I, E'_{II}, E'_{III}, E'_{IV}$  schließen, dass  $\delta_1$  und  $\delta_2$  zusammen zwei Felder aus  $E'_{IV}$  und jeweils ein Feld aus  $E'_I$  und  $E'_{III}$  dominieren. Betrachtung der acht Kandidatenfelder  $(\frac{w}{2} + 3, \frac{w}{2} + 2)$ ,  $(\frac{w}{2} + 2, \frac{w}{2} + 1)$ ,  $(-\frac{w}{2} + 1, \frac{w}{2} + 2)$ ,  $(-\frac{w}{2} + 2, \frac{w}{2} + 1)$ ,  $(-\frac{w}{2} + 2, -(\frac{w}{2} + 3))$ ,  $(-\frac{w}{2} + 1, -(\frac{w}{2} + 2))$ ,  $(\frac{w}{2} + 2, -(\frac{w}{2} + 3))$ ,  $(\frac{w}{2} + 3, -(\frac{w}{2} + 2))$  für  $\delta_1, \delta_2$  zeigt, dass dies nicht möglich ist. Es folgt der Widerspruch und damit  $w = n - 2$ .

Wir unterscheiden die beiden Fälle  $x'' = -1$  und  $x'' = 1$ .

Falls  $x'' = -1$ , sind alle Lagekennzahlen negativ und mit  $w = n - 2$  existieren genau zwei außenstehende Damen  $\delta_1 \in D^{\bar{p}q}$  und  $\delta_2 \in D^{p\bar{q}}$ . Die Ungleichung (4.17) lässt sich somit um vier verschärfen, folglich ist zum einen keine Orthogonale mehrfach besetzt und zum

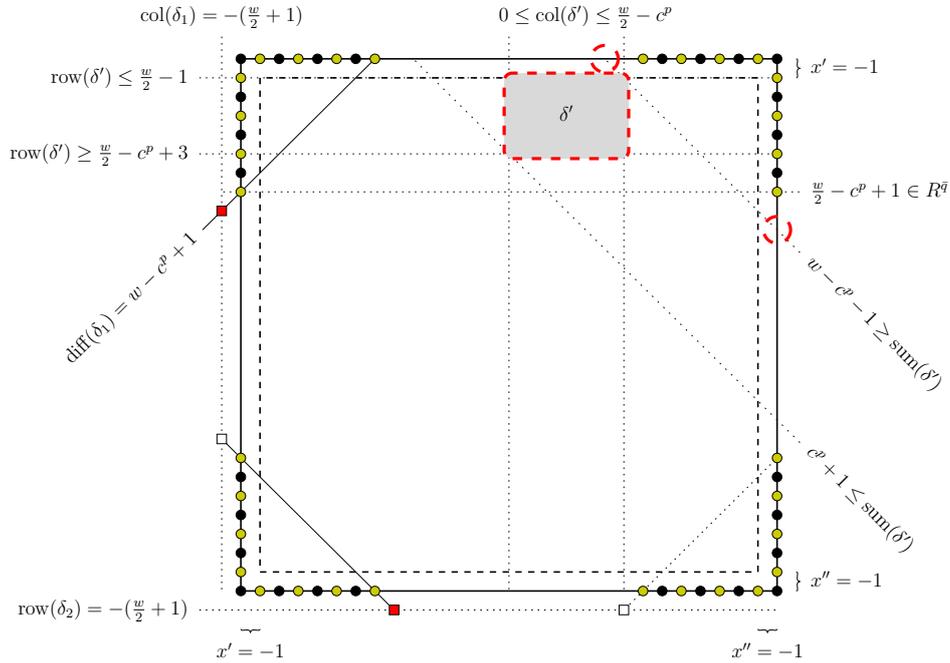


Abbildung 4.26: Widerspruch im Fall  $x'' = -1$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{\bar{p}\bar{q}}$  mit gestrichelter Linie; Felder aus  $E'$  hell gefüllt; Kandidatenfelder für  $\delta_1, \delta_2$  eckig; Bereich der Kandidatenfelder für  $\delta'$  grau gefüllt) — Bsp.:  $c^p = 8$ ,  $\text{col}(\delta_1), \text{row}(\delta_2) < 0$ ,  $\text{col}(\delta'), \text{row}(\delta') \geq 0$

anderen dominieren  $\delta_1$  und  $\delta_2$  jeweils genau zwei Felder aus  $E'$ , d. h. die Kandidatenfelder sind durch  $\delta_1 \in \{(\pm(\frac{w}{2} + 1), \pm(\frac{w}{2} - c^p))\}$  und  $\delta_2 \in \{(\pm(\frac{w}{2} - c^p), \pm(\frac{w}{2} + 1))\}$  gegeben (vgl. Abbildung 4.26). Weiter ist kein Feld aus  $E'$  mehrfach dominiert, so dass durch Fallunterscheidungen bezüglich der genauen Positionen von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  sowie einfache Implikationsketten folgt, dass  $\pm(\frac{w}{2} - c^p + 1) \in C^{\bar{p}}, R^{\bar{q}}$  gilt. Mit  $\#\hat{R}^{\bar{q}} - \#R^{\bar{q}} = 1$  steht dann eine weitere Dame  $\delta'$  in Zeile  $|\text{row}(\delta')| \in \hat{R}^{\bar{q}} \setminus \{\pm(\frac{w}{2} - c^p + 1)\}$ , d. h.  $\frac{w}{2} - c^p + 3 \leq |\text{row}(\delta')| \leq \frac{w}{2} - 1$ . Wir zeigen den Widerspruch, dass  $\delta'$  nicht vier Felder aus  $E'$  dominiert. Wegen  $x' = x''$  sei aus Symmetriegründen o. B. d. A.  $\text{col}(\delta'), \text{row}(\delta') \geq 0$ . Mit  $w = n - 2$  gilt  $\text{row}(\delta') \geq c^p + 1$  und  $\delta'$  kann wie bereits auf Seite 100 gezeigt nicht aus  $D^{p \oplus q}$  sein, ergo  $\delta' \in D^{p\bar{q}}$ . Damit lassen sich dann die Kandidatenspalten zu  $0 \leq \text{col}(\delta') \leq \frac{w}{2} - c^p$  einschränken. Wir bemerken, dass die von  $\delta'$  besetzte Summendiagonale  $\frac{w}{2} - c^p + 3 = c^p + 1 \leq \text{sum}(\delta') \leq w - c^p - 1$  unproduktiv ist, falls  $\text{sum}(\delta') \neq w - c^p - 1$ . Ebenso schneidet  $\text{sum}(\delta') = w - c^p - 1$  in den äußersten unbesetzten Orthogonalen mit  $(\frac{w}{2} - c^p - 1, \frac{w}{2}), (\frac{w}{2}, \frac{w}{2} - c^p - 1) \notin E'$  keine Felder aus  $E'$ . Dies zeigt den Widerspruch und damit  $x'' \neq -1$ .

Falls  $x'' = 1$ , gilt wegen  $x' \neq x''$  in den Beziehungen (4.14) und (4.15) Gleichheit, d. h.  $c^{\bar{p}} = c^p - 1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  und  $r^{\bar{q}} = r^q - 1 = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$ . Somit gilt  $c^p + c^{\bar{p}} = r^q + r^{\bar{q}} = \frac{n}{2}$ , d. h.

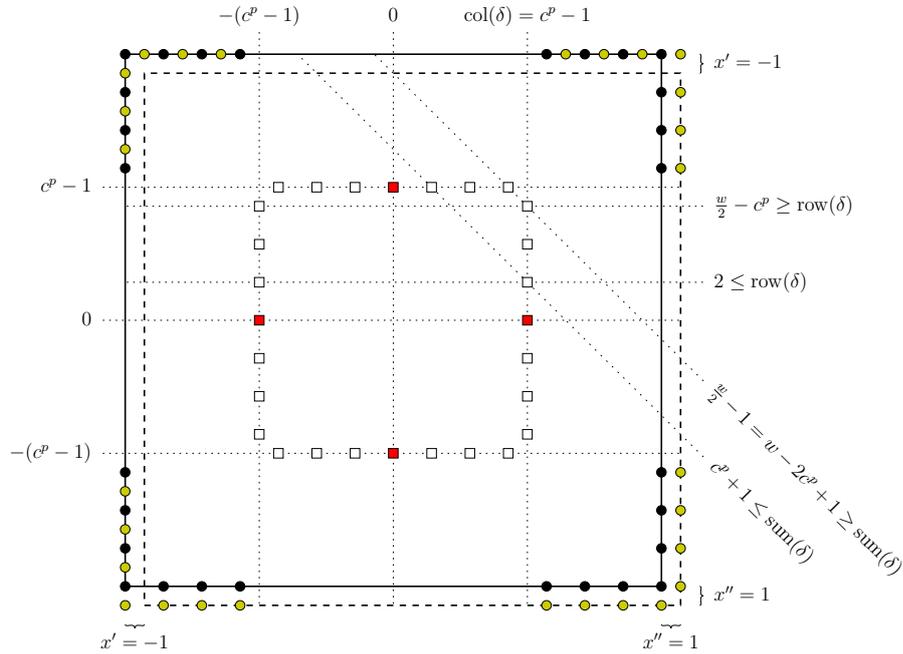


Abbildung 4.27: Widerspruch im Fall  $x'' = 1$  (Rechteck um  $E^{pq}$  mit durchgezogener, das um  $E^{\overline{pq}}$  mit gestrichelter Linie; Felder aus  $E'$  hell gefüllt; Kandidatenfelder für die vier Damen in den Orthogonalen mit Absolutindex  $c^p - 1$  eckig, davon die Felder aus  $B$  dunkel gefüllt) — Bsp.:  $c^p = 8$ ,  $\text{col}(\delta) = c^p - 1$ ,  $\text{row}(\delta) \geq 0$

keine Orthogonale ist mehrfach besetzt. Die Damen in den Orthogonalen mit Absolutindex  $\frac{w}{2} - c^p + 1 = c^p - 1 > c^p - 2$  können, wie auf Seite 100 gezeigt, nicht aus  $D^{p \oplus q}$  sein. Wir betrachten daher mögliche Positionen der vier Damen aus  $D^{p \oplus q}$  in den vier Orthogonalen. Hierzu definieren wir  $B := \{(0, \pm(c^p - 1)), (\pm(c^p - 1), 0)\}$  und zeigen, dass eine Dame  $\delta \notin B$  in den betreffenden Orthogonalen auf einer unproduktiven Diagonale steht. Wegen Proposition 4.23 sei o. B. d. A.  $\text{col}(\delta) = c^p - 1, \text{row}(\delta) \geq 0 \implies 2 \leq \text{row}(\delta) \leq \frac{w}{2} - c^p$  (vgl. Abbildung 4.27). Dann ist die Summendiagonale  $c^p + 1 \leq \text{sum}(\delta) \leq \frac{w}{2} - 1 = w - 2c^p + 1$  nach Lemma 4.22 unproduktiv. Wir betrachten die vier Damen aus  $D^{\overline{pq}}$  in den vier Orthogonalen mit Absolutindex  $c^p - 1$  und unterscheiden danach, wie viele von ihnen auf einem Feld aus  $B$  stehen. Sei  $\theta := \#(B \cap D^{\overline{pq}})$ . Falls  $\theta \leq 1$ , sind drei unproduktive Diagonalen besetzt und wir erhalten den Widerspruch zur Abschätzung (4.17). Falls  $\theta \geq 3$ , stehen zwei Damen in derselben Orthogonale, im Widerspruch zum oben Gezeigten. Falls  $\theta = 2$ , stehen zwei Damen auf einer unproduktiven Diagonale, sowie die beiden Damen in  $B$  entweder auf derselben nicht-unproduktiven Diagonale oder in derselben Orthogonale. In beiden Fällen folgt der Widerspruch. Dies zeigt  $x'' \neq 1$  und damit die Behauptung.  $\square$

### 4.4.2 Computerbeweis neuer Dominanzzahlen $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$

Das Hauptresultat ermöglicht einen einfachen Computerbeweis, um weitere Dominanzzahlen zu zeigen.

**Satz 4.26.** *Für  $n = 102, 110, 118, 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, 190, 198, 214$  und  $222$  gilt  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$ . Für  $n = 102, 110$  und  $118$  gilt zudem  $i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$ .*

*Beweis.* Sei  $n \in \{102, 110, 118, 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, 190, 198, 214, 222\}$  beliebig gewählt und  $D'$  eine beliebige kleinste dominierende Menge von  $Q_n$ . Angenommen  $\gamma(Q_n) < \frac{n}{2} + 1$ . Durch die untere Schranke aus Satz 2.4 gilt  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2}$  und wegen  $n \equiv 6 \pmod{8}, n \geq 96$ , impliziert Satz 4.25, dass  $D'$  eine orthodoxe Überdeckung von  $Q_n$  ist. Sei  $k := \frac{n-2}{4}$ . Wir schließen aus Proposition 3.22, dass eine Überdeckung  $D \in {}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  existiert. Sei o. B. d. A.  $e \geq f$  und  $I_{\hat{S}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  (siehe Eigenschaften von  ${}^2\mathcal{D}_{4k+1}^0$  auf Seite 25). Aus Proposition 3.22 folgt dann weiter, dass uns zwei Zusatz-Summendiagonalen  $I_{\hat{S}} \cap \{\pm(2f+2), \pm(4k-2f-4)\}$  mit gleichem Vorzeichen betragsmäßig festgelegt sind (seien dies  $s_3$  und  $s_4$ ). Durch Symmetrie der Zwangslinien bei Spiegelung an der Summen-Hauptdiagonale seien o. B. d. A.  $s_3, s_4 \leq 0$ , d. h.  $s_3 = -(2f+2) = -(2e-2)$  und  $s_4 = -(4k-2f-4) = -(4k-2e)$ . Über die lineare Beziehung  $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$  bestimmen wir  $s_2 = -(s_3 + s_4) - s_1 = 4k - 2 - s_1$  in Abhängigkeit von  $s_1$ . Durch Einsetzen der besetzten Linien  $I_C, I_R, I_D$  und  $I_S$  in das Parallelogrammgesetz erhalten wir die ganzzahlig zu lösende Gleichung

$$16k^3 + k^2(24 - 48e) + 4k(-4 - 6e + 6e^2 - 3s_1) + 3s_1(2 + s_1) = 0. \quad (4.18)$$

Unter den Nebenbedingungen  $|s_1| \leq 4k$  und o. B. d. A.  $s_1 \leq s_2$  bestimmen wir mit der Mathematica-Funktion `FindInstance` die ganzzahligen Lösungen  $(k, e, s_1) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$  der Gleichung (4.18) (siehe Anhang A). Für  $k = 25, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 53$  und  $55$  berechnete Mathematica jeweils eine leere Lösungsmenge und für  $k = 35$  lediglich die Lösungen  $(35, 15, 28)$  und  $(35, 15, 110)$ . Aus der Abhängigkeit  $s_2 = 4k - 2 - s_1$  folgt, dass beide Lösungen zu identischen Überdeckungsparametern führen, so dass wir exemplarisch  $(35, 15, 28)$  betrachten. Mit  $s_1 = -s_3 = 2f + 2$  sind dann zwei Summendiagonalen besetzt, die im Widerspruch zur Maximalität von  $f$  stehen. Dies zeigt  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n}{2} + 1$ .

Falls  $n \in \{102, 110, 118, 126\}$ , siehe [OW01], andernfalls siehe Anhang B für eine dominierende Menge  $D$  von  $Q_{n-1}$  der Größe  $\#D = \frac{n}{2}$ . Die Behauptung  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  folgt schließlich aus Proposition 2.1.

Aus  $\gamma(Q_n) \leq i(Q_n)$  und  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für alle  $n \leq 120$  [OW01] folgt schließlich  $i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 102, 110$  und  $118$ .  $\square$

Die Korrektheit von Satz 4.26 beruht auf der Korrektheit und Vollständigkeit der Mathematica-Suchroutine zur Bestimmung der Überdeckungsparameter. Die Korrektheit der berechneten Parameter kann durch Nachrechnen leicht überprüft werden, wohingegen die Ergebnisse bezüglich Vollständigkeit – ungeachtet der symbolischen Verarbeitung durch Mathematica – mit den üblichen Vorbehalten gegen Computerbeweise betrachtet werden müssen.

## 4.5 Auf dem Weg zu einer Verallgemeinerung

Wir vermuten, aufgrund der strukturellen Eigenarten nicht-orthodoxer Überdeckungen gilt ein zu Satz 4.25 analoges Resultat für alle ausreichend großen Bretter  $Q_n, n > n_0$ . Ein Beweis des Resultats für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  wäre besonders wertvoll, da es aufgrund Proposition 3.23 unmittelbar die verschärfte untere Schranke  $\gamma(Q_{4k}) \geq 2k + 1$  implizierte. In diesem Abschnitt wollen wir die Vermutung fundieren und skizzieren die Idee eines möglichen Beweises. Oftmals vereinfachen wir die Analysen durch Abschätzungen mittels einer additiven Konstante der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  und abstrahieren somit von einer konkreten Ausprägung des Schwellenwerts  $n_0$ .

Wir indizieren die Orthogonalen derart, dass das Feld  $(0, 0)$  in der Brettmitte liegt bzw. bei Brettern gerader Ordnung  $n$  eines der vier mittleren Felder ist. Weiter nehmen wir wieder an, dass  $D$  mit  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  nicht-orthodoxe Überdeckung von  $Q_n$  ist. Analog zu den Lemmata 4.3, 4.4 und 4.5 zeigen wir  $c^p, r^q = \frac{n}{4} - \mathcal{O}(1) \approx \frac{n}{4}, \#D^0, \#D^1 = \frac{n}{4} - \mathcal{O}(1) \approx \frac{n}{4}$  und  $\#D^{pq} = \frac{n}{8} - \mathcal{O}(1) \approx \frac{n}{8}, \forall p, q \in \{0, 1\}$ .

Wir betrachten die von  $D^{p \oplus q}$  diagonal dominierten Felder  $A^{pq}$  für bestimmte  $p, q \in \{0, 1\}$  und zeigen dadurch, dass  $D^{p \oplus q}$  Differenzdiagonal- und Summendiagonalscharen  $\mathcal{B}_D$  und  $\mathcal{B}_S$  besetzt, die jeweils äquidistant mit Abstand  $a$  sind, und  $\#\mathcal{B}_D, \#\mathcal{B}_S = \#D^{p \oplus q} - \mathcal{O}(1) \approx \frac{n}{4}$  gilt. Für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  mit  $\sup\{c^0, c^1, r^0, r^1\} > \frac{n}{4}$  legt Proposition 4.19 nahe,  $E^{pq}$  q.-v. d. zu betrachten. Falls  $E^{pq}$  quadratisch und  $\#D^{p \oplus q} \equiv 1 \pmod{2}$ , ist die Behauptung durch die allgemein gehaltenen Ergebnisse aus Unterabschnitt 4.2.2 bereits gezeigt. Wir vermuten, dass sich das Ergebnis für  $E^{pq}$  quadratisch mit  $\#D^{p \oplus q} \equiv 0 \pmod{2}$  sowie  $E^{pq}$  nicht-quadratisch auf gleichem Wege zeigen lässt. Falls  $\sup\{c^0, c^1, r^0, r^1\} = \frac{n}{4}$ , gilt  $c^0 + c^1 = r^0 + r^1 = \frac{n}{2}$ , d. h. keine Orthogonale ist mehrfach besetzt und nach Proposition 4.2 gilt  $\#D^{00} = \#D^{11} = \#D^{01} = \#D^{10} = \frac{n}{8}$ . Aus der Ganzzahligkeit von  $\#D^{pq}$  schließen wir, dass dieser Fall lediglich für  $n \equiv 0 \pmod{8}$  auftritt. Obschon  $\nexists p, q : E^{pq}$  q.-v. d. vermuten wir, dass sich dennoch alle Beweisideen direkt übertragen lassen. Die Analyse wird jedoch durch den größeren Spielraum von  $4\#D^{p \oplus q} - \#E^{pq} = 4, \forall p, q \in \{0, 1\}$ , komplizierter ausfallen und eine größere kritische Brettgröße  $n_0$  zur Folge haben. Bei ungeraden Brettgrößen  $n \equiv 1 \pmod{2}$  gilt  $\#D = \frac{n+1}{2}$  und die Differenzen  $4\#D^{p \oplus q} - \#E^{pq}$  werden tendenziell nochmals größer ausfallen, so dass die Analyse auf dem bisher verfolgten Weg über die Betrachtung von  $a'$ -Mengen aus  $E^{pq}$  abermals komplizierter wird. Eine weniger lokale Untersuchung durch stärkere Berücksichtigung der inneren Felder  $A^{pq} \setminus E^{pq}$  erscheint hier vielversprechend.

Eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Diagonalschar  $\mathcal{B}_D$  aufs Brett passt, ist  $a(\#\mathcal{B}_D - 1) \leq 2n - 1$ , so dass wir deren charakteristischen Abstand auf  $a \in \{2, 4, 6, 8\}$  einschränken können. Da maximal eine konstante Anzahl Damen aus  $D^{p \oplus q}$  auf einer Diagonale steht, die nicht zu den Scharen  $\mathcal{B}_D$  oder  $\mathcal{B}_S$  gehört, stehen  $\#D^{p \oplus q} - \mathcal{O}(1) \approx \frac{n}{4}$  Damen auf den Schnittfeldern  $B := \{\sigma_{d,s} \mid d \in \mathcal{B}_D, s \in \mathcal{B}_S\}$  der beiden Scharen. Falls  $a = 4$  oder  $a = 8$ , dann gilt  $\exists c, r : \text{col}(\sigma) \equiv c \pmod{2}, \text{row}(\sigma) \equiv r \pmod{2}, \forall \sigma \in B$ , und wir erhalten einen Widerspruch zu  $\#D^{pq} \approx \frac{n}{8}, \forall p, q$ . Falls  $a = 6$ , gilt  $\exists c, r : \text{col}(\sigma) \equiv c \pmod{3}, \text{row}(\sigma) \equiv r \pmod{3}, \forall \sigma \in B$ , und wir zeigen den Widerspruch analog wie im Beweis von Lemma 4.18. Somit gilt  $a = 2$ .

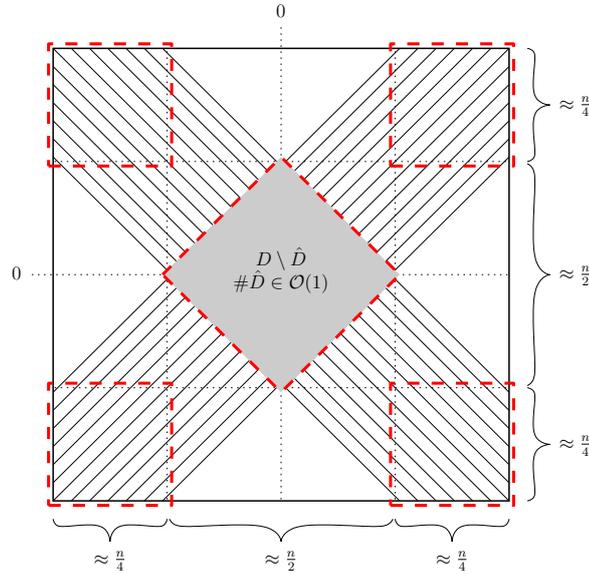


Abbildung 4.28: Schematische Darstellung einer kleinsten dominierenden Menge  $D$  von  $Q_n$ , die keine orthodoxe Menge ist; *fast alle* Damen stehen innerhalb einer Raute in der Mitte des Bretts

Durch dieselbe Argumentation wie oben zeigen wir, dass die Damen aus  $D^{\overline{p \oplus q}}$  ebenso *fast alle* auf Scharen  $\mathcal{B}'_D, \mathcal{B}'_S$  äquidistanter Diagonalen mit Abstand  $a = 2$  stehen. Alternativ können wir dies über die Betrachtung der Lage von  $E^{pq}$  zu  $E^{\overline{p \oplus q}}$  zeigen (vgl. Unterabschnitt 4.4.1), falls damit das Ergebnis für eine kleinere kritische Brettgröße  $n_0$  zu zeigen ist.

Da die Schnittpunkte der vier Diagonalscharen alle innerhalb des Rechtecks durch  $E$  liegen, stehen dann, abgesehen von einer konstanten Anzahl von Damen  $\hat{D} \subset D$ ,  $\#\hat{D} \in \mathcal{O}(1)$ , alle Damen innerhalb einer Raute in der Mitte des Bretts und die unbesetzten Spalten  $C$  und unbesetzten Zeilen  $R$  liegen in den äußeren Vierteln am Brettrand. Demzufolge gilt  $|\text{col}(\delta)|, |\text{row}(\delta)| \leq \frac{n}{4} + \mathcal{O}(1), \forall \delta \in D \setminus \hat{D}$  und  $|c| - \frac{n}{4}, |r| - \frac{n}{4} \leq \frac{n}{4} + \mathcal{O}(1), \forall c \in C, r \in R$  (vgl. Abbildung 4.28). Da  $c^0, c^1, r^0, r^1 \approx \frac{n}{4}$  und  $4\#D - \#E \approx 0$ , wissen wir, dass die Anzahl mehrfach besetzter Linien durch eine Konstante beschränkt ist. Die intuitive Vorstellung, dass dies bei der sehr kompakten Stellung der Damen  $D \setminus \hat{D}$  jedoch nicht möglich ist, zeigen wir mittels des Parallelogrammgesetzes. Da jeweils *fast alle* der  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  Spalten und Zeilen in der Mitte des Bretts und jeweils *fast alle* der  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  inneren Differenz- und Summendiagonalen besetzt sind, erhalten wir die Abschätzung:

$$2 \sum_{\delta \in D} \text{col}(\delta)^2 + 2 \sum_{\delta \in D} \text{row}(\delta)^2 = \sum_{\delta \in D} \text{sum}(\delta)^2 + \sum_{\delta \in D} \text{diff}(\delta)^2$$

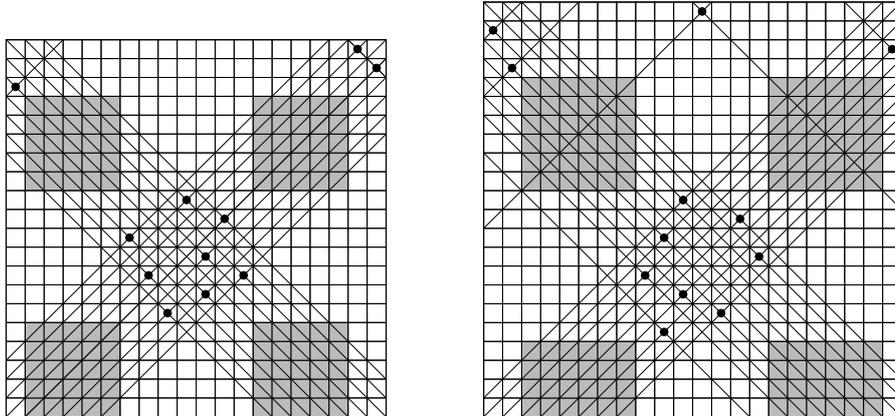


Abbildung 4.29: Kleinste nicht-orthodoxe Überdeckungen von  $Q_{20}$  und  $Q_{22}$  — ausschließlich diagonal dominierte Felder sind grau gefüllt

$$\begin{aligned} &\implies 8 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} i^2 + 4(\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(n))^2 = 4 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} i^2 + 2(\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(n))^2 \\ &\implies \frac{1}{24}n^3 + \mathcal{O}(n^2) = \frac{1}{48}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

Somit existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n > n_0$  der Widerspruch folgt.

Experimente mit CPLEX, bei denen kleinste, nicht-orthodoxe Überdeckungen von  $Q_{20}$  und  $Q_{22}$  berechnet wurden (Ergebnisse für größere Bretter waren nicht in annehmbarer Zeit zu erwarten), deuten ebenso auf das hergeleitete Anordnungsmuster hin (vgl. Abbildung 4.29). Diese experimentellen Ergebnisse stützen unsere Einschätzung, dass unter der Prämisse  $\#D = \frac{n}{2} + \mathcal{O}(1)$  jede nicht-orthodoxe Überdeckung von  $Q_n$  die in Abbildung 4.28 angedeutete Struktur besitzt.



# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Eigenschaften optimaler Lösungen eines kombinatorischen Schachproblems untersucht. Von einer Voraussetzung in einer alternativen Charakterisierung der zur Erzeugung optimaler Lösungen oftmals sehr geeigneten  $p$ -Überdeckungen wurde nachgewiesen, dass sie für ausreichend große Bretter nicht einschränkend ist.  $p$ -Überdeckungen wurden zu *orthodoxen Überdeckungen* verallgemeinert und ein Resultat zu  $p$ -Überdeckung hierauf übertragen.

Zur Untermauerung der Einschätzung, dass kleinste dominierende Mengen oftmals orthodoxe Überdeckungen sind, wurde die Komplementklasse untersucht. Dabei lag der Fokus auf den bisher nicht explizit untersuchten Instanzen mit gerader Brettgröße  $n$ . Für die Klasse der Brettgrößen  $n \equiv 6 \pmod{8}$  mit  $n \geq 96$  konnte nachgewiesen werden, dass keine nicht-orthodoxe Überdeckung von  $Q_n$  von der Mächtigkeit der unteren Schranke  $\frac{n}{2}$  existiert. Weiter wurde für diese Brettgrößenklasse eine notwendige Bedingung für die Existenz einer orthodoxen Überdeckung der Mächtigkeit  $\frac{n}{2}$  hergeleitet und gezeigt, dass diese in vielen Fällen nicht erfüllt ist.

Ergänzend zu den theoretischen Ausführungen wurden verschiedene Lösungsverfahren implementiert. Auf Basis von CPLEX wurde ein ganzzahliges lineares Programm zur Bestimmung von  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  umgesetzt, das in Form eines Computerbeweises die neuen Dominanzzahlen  $\gamma(Q_n) = i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44$  und  $46$ , sowie  $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 19, 23, 27$  und  $31$ , gezeigt hat. Optimale orthodoxe Überdeckungen wurden ermittelt durch ein Mathematica-Programm zur Parameterbestimmung, sowie dem anschließenden kombinierten Einsatz eines ILP-basierten Programms und einer Implementierung des mengentheoretischen Ansatzes zur Suche konkreter Überdeckungen. Die Ergebnisse haben  $\gamma(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 43, 55, 83, 99, 107, 133, 137, 141, 143, 145, 149, 153, 157, 161, 163, 165, 169, 173, 177, 181, 183, 185, 189, 193, 197, 213$  und  $221$ , sowie  $i(Q_n) = \frac{n+1}{2}$  für  $n = 117, 121, 129, 141, 145, 157, 161, 165, 177, 185$  und  $189$  bewiesen. Durch einige dieser Überdeckungen konnte die Relevanz der Verallgemeinerung bewiesen werden. Zusammen mit einer Aussage über orthodoxe Überdeckungen hat die Anwendung des Hauptresultats schließlich einen Computerbeweis ermöglicht, der die neuen Dominanzzahlen  $\gamma(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 102, 110, 118, 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, 190, 198, 214$  und  $222$ , sowie zudem  $i(Q_n) = \frac{n}{2} + 1$  für  $n = 102, 110$  und  $118$  zeigt. Mit QPaint wurde zudem ein graphisches Programm zum Experimentieren, zur Analyse und zur Weiterverarbeitung von Überdeckungen entwickelt.

Offen bleibt eine Vielzahl interessanter Fragestellungen. Ungeklärt bleibt weiterhin beispielsweise die Komplexität der Grundprobleme sowie die Frage nach der Monotonie von  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$ .

Die Analysen zum Beweis des Hauptresultats lieferten Einblicke in die Problemstruktur, welche die Übertragbarkeit des Resultats auf weitere Brettgrößenklassen mit geradem  $n$  nahelegen. Motiviert durch die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5 erscheint hierfür ein Beweis auf ähnlichem Wege aussichtsreich. Weiter vermuten wir, dass die strukturellen Probleme nicht-orthodoxer Überdeckungen nicht auf gerade Brettgrößen beschränkt sind und somit ebenso eine analoge Aussage für ungerade Brettgrößen gilt. Auf dem bisher verfolgten Weg wäre ein Beweis jedoch sicherlich mit deutlich mehr Aufwand verbunden, da die Schranke  $\gamma(Q_n) \geq \frac{n+1}{2}$  für ungerade Brettgrößen mehr Spielraum lässt und der Begriff der Quasi-Verlustfreiheit noch weiter aufgeweicht werden müsste. Mit dem Beweis des Hauptresultats ist jedoch ein Machbarkeitsnachweis gelungen, der zur Erforschung alternativer, einfacherer Beweise anspornt, die möglicherweise direkt auf die anderen Brettgrößenklassen übertragbar sind.

Die gesammelten Erfahrungen bei der Analyse nicht-orthodoxer Überdeckungen veranlassen uns zu den beiden folgenden Vermutungen:

**Vermutung 5.1.** *Es existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  jede dominierende Menge  $D$  von  $Q_n$  mit  $\#D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  eine orthodoxe Überdeckung ist.*

**Vermutung 5.2.** *Es existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  jede kleinste dominierende Menge von  $Q_n$  eine orthodoxe Überdeckung ist.*

Zum Beweis weiterer Dominanzzahlen sollten die Methoden zur Suche orthodoxer Überdeckungen weiterentwickelt werden. Die Erforschung von Schnittebenen sowie von Variablenselektionsregeln zur Steuerung des *branch & cut*-Algorithmus bietet großes Potential zur Beschleunigung des vorgeschlagenen Lösungsansatzes mittels ganzzahliger linearer Programmierung. Insbesondere wenn als Dominanzzahl die untere Schranke vermutet wird, können spezialisierte Heuristiken hilfreich sein. Für die Parameterkombinationen bzw. zu besetzenden Linien orthodoxer Überdeckungen sind lediglich notwendige Bedingungen bekannt. Weitere Bedingungen können die Suche kanalisieren.

Von diversen Forschern entdeckte Überdeckungen haben bereits  $i(Q_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n \leq 120$  gezeigt (siehe [OW01]), zudem konnte durch unsere Ergebnisse die Gültigkeit von  $\gamma(Q_{4k+1}) = 2k + 1$  auf  $k \leq 49$  erweitert werden. Mit Proposition 2.1 im Hinterkopf möchten wir daher mit einer letzten Vermutung schließen:

**Vermutung 5.3.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n \neq 3, 11$ , gilt  $\gamma(Q_n) \in \{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\}$ .*

# Anhang A

## Mathematica-Programm zum Computerbeweis

```
(* ===== *)
(* computer proof of \gamma(Q_n) == n/2 + 1 for *)
(* n == 102, 110, 118, 126, 134, 142, 150, 158, 166, 174, 182, *)
(* 190, 198, 214, 222 *)
(* *)
(* if \gamma(Q_n) == n/2, n == 2 (mod 4), then there is a 0-cover of *)
(* cardinality n/2 of Q_{n-1}, with e == f+2, *)
(* s1 == ?, s2 == 4k-2-s1, s3 == -(2e-2), s4 == -(4k-2e), *)
(* s1^2 + s2^2 + s3^2 + s4^2 == 8 - 8(2k-1)[e^2-(2k+1)e+2k(k-1)/3] *)
(* ===== *)

params[kk_] := FindInstance[k == kk &&
    e >= 0 && e <= k &&
    e == f + 2 &&
    f >= 0 &&
    p == 0 &&
    u == k - e &&
    s4 == -(4k-2e) &&
    s3 == -(2e-2) &&
    s2 == -s1 - s3 - s4 &&
    s2 >= -4k && s2 <= 4k &&
    s1 >= -4k && s1 <= 4k &&
    s1 <= s2 &&
    16k^3+k^2(24-48e)+4k(-4-6e+6e^2-3s1)+3s1(2+s1) == 0,
    {k, p, e, f, u, s1, s2, s3, s4},
    Integers,
    2^31 - 1
]
```

```
Outer[params, {25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 53, 55}]
```



# Anhang B

## Neue kleinste dominierende Mengen von $Q_n$

Die im Folgenden aufgeführten dominierenden Mengen von  $Q_n$  sind jeweils von der Mächtigkeit der unteren Schranke  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  und zeigen neue Dominanzzahlen. Zu jeder dominierenden Menge geben wir den Typ der Überdeckung und die zugehörigen Parameter an.

Alle aufgeführten Überdeckungen sind ebenfalls im Internet als Textdatei in einer intuitiv lesbaren Form verfügbar.<sup>1</sup> Die Dateien können insbesondere automatisch von QPaint<sup>2</sup> (siehe Abschnitt 2.4) über den Menüpunkt *Datei* → *Lade Bretter aus Anhang der Diss* eingelesen werden.

- [1]  $\gamma(Q_{43}) = 22$     0-1-Überdeckung  $D$  (Referenzzentrum  $z = (-1, 0)$ ) mit  $e = 6$ ,  $f = 5$ ,  $u = 4$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{10\}$ ,  $I_{\hat{D}} = \{-31\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-39, 29, 39\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -21, -19, \dots, 19, 21$  und  $(c_i) = -18, 8, 2, -4, 10, 20, -14, -20, 0, 6, -8, 16, 4, -6, 14, -16, -10, 12, -2, -12, 10, 18$ .
- [2]  $\gamma(Q_{55}) = 28$     0-1-Überdeckung  $D$  (Referenzzentrum  $z = (-1, 0)$ ) mit  $e = 6$ ,  $f = 5$ ,  $u = 7$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{16\}$ ,  $I_{\hat{D}} = \{-43\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-25, 25, 41\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -27, -25, \dots, 25, 27$  und  $(c_i) = -12, 2, -4, 22, -16, 14, 20, 26, -14, -22, 16, 0, 6, -8, -20, 4, -6, 18, -24, -18, 12, -26, 24, 10, 16, -2, 8, -10$ .
- [3]  $\gamma(Q_{83}) = 42$     relaxierte 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 9$ ,  $f = 7$ ,  $u = 11$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{25\}$ ,  $I_{\hat{R}} = \{25\}$ ,  $I_{\hat{D}} = \{0\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-62, -32, 16, 62, 66\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -40, -38, \dots, 22, 24, 25, 26, 28, \dots, 38, 40$  und  $(c_i) = 22, 16, -14, 24, 18, -4, -34, -28, -22, -36, 26, 20, -16, 28, -30, -2, 8, -32, 30, 10, 4, -6, -12, 36, -38, 6, 0, -40, -18, -24, 38, 32, 14, 25, 40, 34, -8, 2, 12, -26, -20, -10$ .
- [4]  $\gamma(Q_{99}) = 50$     0-1-Überdeckung  $D$  (Referenzzentrum  $z = (-1, 0)$ ) mit  $e = 11$ ,  $f = 10$ ,  $u = 13$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{28\}$ ,  $I_{\hat{D}} = \{-77\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-63, 63, 75\}$ ;

<sup>1</sup>[http://www.zaik.uni-koeln.de/~sneuhaus/javaws/qpaint/boards\\_diss\\_appendix/](http://www.zaik.uni-koeln.de/~sneuhaus/javaws/qpaint/boards_diss_appendix/)

<sup>2</sup><http://www.zaik.uni-koeln.de/~sneuhaus/javaws/qpaint/qpaint.jnlp>

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -49, -47, \dots, 47, 49$  und  $(c_i) = 20, 30, 12, 22, -20, 14, 36, -6, -24, -32, -40, -22, -48, -42, 28, 42, 28, -30, -2, 8, -44, -4, -14, 38, 6, 16, 40, -12, 2, -46, -10, 0, 48, -26, 32, 46, 24, -38, 44, 26, -36, -18, 4, -34, -8, 34, -16, 18, -28, 10$ .

- [5]  $\gamma(Q_{99}) = 50$  1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 10, f = 9, u = 14$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{0\}, I_{\hat{S}} = \{-48, -42, 90\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -49, -47, \dots, 47, 49$  und  $(c_i) = 15, 21, -5, 29, 35, -3, 19, -27, -33, -43, 31, -15, 23, -23, -49, -29, 27, -39, -45, 7, 43, -1, -11, 11, 1, -13, 13, -35, 5, -47, -7, 45, -37, 37, 47, 25, 39, 49, -21, 9, -41, 17, -9, 33, 3, -19, -25, -31, -17, 41$ .

- [6]  $\gamma(Q_{107}) = 54$  1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 11, f = 10, u = 15$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{0\}, I_{\hat{S}} = \{-104, 50, 54\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -53, -51, \dots, 51, 53$  und  $(c_i) = -23, -53, -31, 15, 5, 23, 17, 39, 1, -33, 49, -17, -35, 47, -19, 31, -51, 51, -39, -3, -47, 35, 11, -45, -5, 13, 41, -15, -9, 9, -1, -11, 7, -41, 37, 43, 53, 29, -27, -21, 27, -37, -43, -49, 45, 19, 25, -29, 33, 3, 21, -13, -7, -25$ .

- [7]  $i(Q_{117}) = \gamma(Q_{117}) = 59$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 13, f = 11, u = 16$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-102, -52, 56, 98\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -58, -56, \dots, 56, 58$  und  $(c_i) = -44, -30, 32, 38, -12, 2, -36, -22, 0, 42, -40, 34, 24, 46, 36, -46, -32, -28, -48, 54, 28, -38, -2, 4, 52, -4, 14, 50, -18, -50, 10, -42, -6, 8, -14, -8, 6, 40, 48, -54, 56, 30, -56, -34, 20, -58, -52, 22, -16, 58, 44, -26, -20, -10, 12, 18, -24, 26, 16$ .

- [8]  $i(Q_{121}) = \gamma(Q_{121}) = 61$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 13, f = 11, u = 17$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-98, -28, 28, 98\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -60, -58, \dots, 58, 60$  und  $(c_i) = -30, 20, -18, -28, 34, 40, -6, 4, 18, -20, -58, 56, -42, -32, -26, 44, 30, -60, -46, 60, 46, 52, 8, 2, -16, 10, -8, -14, 50, -48, 12, 48, -50, 14, -12, -2, 16, -10, 0, -52, 54, 36, -38, -56, 38, -36, -54, -24, 26, -40, 58, 28, 42, -4, 6, -44, -22, 24, -34, 32, 22$ .

- [9]  $i(Q_{129}) = \gamma(Q_{129}) = 65$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 14, f = 14, u = 17$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{-82, 82\}, I_{\hat{S}} = \{-126, 126\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -64, -62, \dots, 62, 64$  und  $(c_i) = -20, -64, 32, -30, 24, -42, -4, 10, -44, 26, 44, 40, 16, -22, 60, 42, -32, -46, 56, 38, 2, -14, -60, -54, -36, 54, -6, 4, -18, -62, 14, 50, 22, 12, -2, -16, -56, 46, 52, -58, -10, 0, 6, -26, 48, 18, -40, 62, -28, -48, -52, 58, 36, -50, -8, 34, 20, -34, 8, 30, -24, -38, 28, 64, -12$ .

- [10]  $\gamma(Q_{133}) = 67$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 14, f = 12, u = 19$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-70, -62, 32, 100\}$ ;

- $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -66, -64, \dots, 64, 66$  und  $(c_i) = -30, -12, -22, 4, -10, 20, 38, 28, 50, -24, -14, 12, 62, 48, -54, -16, -66, 36, 66, -34, 58, -64, -48, 2, -62, 56, 0, 14, 8, -56, 54, -6, -20, 6, -8, -52, 16, 10, -50, -2, -58, 60, -4, 32, -42, -28, 42, -40, 34, -60, 22, 64, -46, 40, 18, 52, 26, 44, -26, -36, 46, -44, 30, 24, -18, -32, -38$ .
- [11]  $\gamma(Q_{137}) = 69$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 14, f = 12, u = 20$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-88, 4, 26, 58\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -68, -66, \dots, 66, 68$  und  $(c_i) = -28, 38, -40, 14, 0, -30, -20, 34, -32, 42, -44, 6, 52, 66, 60, 26, -64, 46, 36, -42, -60, 30, 2, -46, -36, -62, 68, -50, -2, 8, 64, 16, -14, -8, 48, -54, 18, -12, 10, -4, -10, 12, -48, 62, -6, 54, -68, 32, -52, -66, 40, -34, 28, -22, 56, -58, 24, 58, 44, 50, -56, -18, 4, -26, -16, 22, -24, -38, 20$ .
- [12]  $i(Q_{141}) = \gamma(Q_{141}) = 71$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 17, f = 15, u = 18$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-140, -122, 128, 134\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -70, -68, \dots, 68, 70$  und  $(c_i) = -70, 30, -24, 42, -32, -26, 32, -66, 24, -2, 8, -34, 28, 58, -60, 26, 44, -62, 60, -46, 40, -30, -48, 62, 6, -8, -52, 16, 10, -54, 52, -12, -18, -58, 14, 20, 56, -16, -56, 0, 18, -20, -10, 54, -64, 4, -6, 70, 48, 38, -40, 50, -68, -42, 64, 46, 36, -22, -44, -50, 12, 2, -4, -38, -28, -14, 66, 34, 68, 22, -36$ .
- [13]  $\gamma(Q_{143}) = 72$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 15, f = 15, u = 20$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{6\}, I_{\hat{R}} = \{12\}, I_{\hat{D}} = \{6\}, I_{\hat{S}} = \{18\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -70, -68, \dots, 10, 12, 12, 14, \dots, 68, 70$  und  $(c_i) = 32, -22, -40, 2, 8, 38, 52, -14, 36, -30, 24, -62, -48, -34, 64, 42, 48, 26, -64, -70, 28, -46, -32, 70, 56, -66, -6, 0, 10, -54, -10, 20, 14, -24, 6, 54, -2, -12, -18, -58, -52, 4, 16, -60, 66, 6, 58, -56, -4, 40, 34, 60, -26, 68, -50, -68, 18, 44, 62, -8, 22, -20, 46, -36, -38, -44, 50, 12, 30, -16, -42, -28$ .
- [14]  $i(Q_{145}) = \gamma(Q_{145}) = 73$  unabhängige 1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 16, f = 15, u = 20$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{2\}, I_{\hat{R}} = \{2\}, I_{\hat{S}} = \{-56, 60\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -71, -69, \dots, -1, 1, 2, 3, 5, \dots, 69, 71$  und  $(c_i) = -31, -13, -43, 39, -27, 23, 1, 35, -51, 59, -23, 3, -39, -33, 65, -57, 25, 31, 53, -37, 69, -65, -29, 71, 7, 51, 61, 5, 11, 63, -9, -19, -55, -61, -21, -7, 19, 2, 13, -59, 21, 57, -3, 45, -15, -5, -69, -63, 67, -1, 33, 49, -49, -67, -25, -35, 55, -71, -53, -47, 15, 37, -17, 29, 47, 17, -45, 9, 43, -11, -41, 41, 27$ .
- [15]  $\gamma(Q_{149}) = 75$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 15, f = 13, u = 22$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-72, 18, 22, 32\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -74, -72, \dots, 72, 74$  und  $(c_i) = -40, -34, -28, -22, -12, 6, -32, -10, 4, 54, 60, 34, 28, 18, 72, 46, 32, 58, -24, -74, 68, 74, -72, -38, -56, 70, -50, 0, -68, 66, -2, 12, -64, -4, 22, -20, 14, -8, 2, 62, -52, 16, -14, 8, -6, -66$ .

44, -54, 10, -62, 48, -70, -36, 38, -60, -26, 20, 50, 36, -58, 64, -30, 52, 30, -16, 42, 56, 26, -48, -42, 40, -46, 24, -18, -44.

- [16]  $\gamma(Q_{153}) = 77$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 16$ ,  $f = 14$ ,  $u = 22$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-122, 0, 40, 82\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -76, -74, \dots, 74, 76$  und  $(c_i) = 16, 22, -36, 46, 20, -34, -24, -60, -56, 62, -40, -58, -52, -42, 64, -22, 24, -30, 32, -46, 48, 74, -48, 70, 76, -38, 52, 0, 44, 26, 10, 66, -6, -66, 6, -20, 14, -8, 60, -16, 2, -62, 18, 58, 68, 4, -14, -4, 72, 50, -2, 56, -68, -74, -32, 54, -72, -54, -44, -70, -76, -26, -12, -50, -64, 30, 8, 38, -28, -18, 12, -10, 40, 34, 28, 42, 36$ .

- [17]  $i(Q_{157}) = \gamma(Q_{157}) = 79$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 17$ ,  $f = 17$ ,  $u = 21$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{-116, 116\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-144, 144\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -78, -76, \dots, 76, 78$  und  $(c_i) = 32, -68, 42, -18, -24, 38, -40, 54, 24, -22, -52, 22, -12, 30, -36, -30, 44, -70, 52, -78, 76, 62, 68, -66, -72, 0, -32, -38, 40, 12, 48, 4, -2, -62, 60, 66, -64, 20, 14, -20, -6, -28, -56, -8, 10, 16, -10, 74, 6, -46, -76, 46, 56, 78, 2, -74, -48, -42, 72, -34, -60, 34, 28, 18, -4, 50, 64, 58, 36, -58, -54, -50, -44, -26, -16, 26, 70, -14, 8$ .

- [18]  $i(Q_{161}) = \gamma(Q_{161}) = 81$  unabhängige 1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 18$ ,  $f = 17$ ,  $u = 22$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{14\}$ ,  $I_{\hat{R}} = \{14\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-80, 108\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -79, -77, \dots, 11, 13, 14, 15, 17, \dots, 77, 79$  und  $(c_i) = 45, 23, 29, -33, -27, 39, 9, -53, -11, 11, 61, -65, 37, -37, -19, -61, 65, 43, -35, -39, 77, 47, -79, -29, -51, 1, -75, 71, 3, 13, -5, -77, -71, 55, 69, -23, 57, 5, 15, 21, -17, -69, -1, 67, -21, -15, 19, 14, 51, 7, -3, -13, 79, 73, -49, -67, -73, -59, 59, 33, -25, -47, 63, -55, 75, -63, 27, -31, 53, 25, 31, -7, -57, 49, -41, 17, -9, -43, 35, 41, -45$ .

- [19]  $\gamma(Q_{163}) = 82$  1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 17$ ,  $f = 16$ ,  $u = 23$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{0\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-142, 0, 142\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -81, -79, \dots, 79, 81$  und  $(c_i) = -35, -63, 21, -33, -19, 39, 17, -37, -31, -25, 65, 59, 45, 27, 53, -69, 25, -77, -27, 79, -39, -45, -75, 31, 81, 47, 3, -3, 69, 5, -47, -81, -59, 55, 77, 1, -5, -15, 15, -57, 61, -65, 11, 63, -13, -7, 7, 13, -17, -11, -67, 9, -1, 75, -71, 43, -51, -73, 57, -53, 37, -29, -79, 51, 73, 35, 29, -61, -23, 67, 49, -41, -55, -9, -43, 19, 71, -21, 41, -49, 33, 23$ .

- [20]  $i(Q_{165}) = \gamma(Q_{165}) = 83$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 17$ ,  $f = 17$ ,  $u = 23$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{-88, 88\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-132, 132\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -82, -80, \dots, 80, 82$  und  $(c_i) = -16, 14, -28, 30, -12, -30, 28, 50, -66, 6, -64, -14, 24, -38, 72, -70, 36, 62, -72, 70, 80, 38, -44, -74, 54, -82, -40, 74, 48, -54, -68, 4, -6, 12, 44, 78, -18, -24, 10, 16, 2, 32, -10, 58, -26, -20, 18, -62, -76, -8, -2, 34, -48, -34, -80, -58, 40, 66, 56, -42, -60, -78, 68, 82, 76, 26, 52, -50, 60, -32, -52, 46, -4, 22, -56, 64, 8, -22, 20, 42, -36, -46, 0$ .

- [21]  $\gamma(Q_{169}) = 85$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 18$ ,  $f = 16$ ,  $u = 24$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-146, -32, 76, 102\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -84, -82, \dots, 82, 84$  und  $(c_i) = -44, 42, -66, 26, -48, -10, -16, 46, 40, -30, 32, 70, -52, -42, -4, 22, 36, 30, 44, 74, 84, -78, -40, 62, -80, -38, -60, 82, -76, 8, -84, -46, -2, -58, 10, 16, -14, 0, 76, 66, -26, -12, -64, 24, 6, 12, 68, 78, -6, -70, -18, 4, 64, -8, 56, 38, 2, -74, 80, -82, -72, -50, 60, 34, -28, -34, 72, 54, 20, 48, -20, -54, -68, -62, -32, 50, -24, 58, 52, 18, -56, -22, 28, 14, -36$ .
- [22]  $\gamma(Q_{173}) = 87$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 18$ ,  $f = 16$ ,  $u = 25$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-138, 32, 44, 62\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -86, -84, \dots, 84, 86$  und  $(c_i) = -42, -16, 54, 32, -26, -48, 34, -60, -10, -4, -30, -56, -14, 40, 70, 60, -84, 20, 82, 72, 42, 52, -46, 84, -70, -76, 50, -52, -86, -36, 0, -6, 58, -72, 86, 14, 78, 22, 4, 68, -12, 18, -66, 6, -24, -18, 16, 10, -8, -22, 12, -68, -78, 76, 8, -80, -62, -44, 62, 48, -58, 26, -82, 80, 46, 64, -54, -28, 74, 24, 30, 44, -2, -20, -74, -64, 66, -40, 2, 56, 38, 28, -34, 36, -50, -32, -38$ .
- [23]  $i(Q_{177}) = \gamma(Q_{177}) = 89$  unabhängige 1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 20$ ,  $f = 19$ ,  $u = 24$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{C}} = \{6\}$ ,  $I_{\hat{R}} = \{6\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-120, 132\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -87, -85, \dots, 3, 5, 6, 7, 9, \dots, 85, 87$  und  $(c_i) = -35, 23, 45, 31, -51, -17, 61, -53, 5, 63, -19, -9, 9, 39, 29, -63, -59, 71, -47, 55, -87, -33, -75, 51, -67, -45, 81, 87, 53, -73, 3, -85, 57, -11, 77, 17, 11, -77, 27, -27, -1, -15, 65, 21, -29, -49, -21, 6, 25, -5, -81, -25, 13, 19, 83, -13, 1, -83, -61, 69, 75, 41, 59, -79, -57, -39, -69, 33, 79, 85, 67, -23, 35, -43, 73, -71, -65, 49, 43, -3, 15, -31, 7, -7, -41, -55, 47, 37, -37$ .
- [24]  $\gamma(Q_{181}) = 91$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 19$ ,  $f = 17$ ,  $u = 26$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-144, 2, 30, 112\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -90, -88, \dots, 88, 90$  und  $(c_i) = 44, 34, -20, 46, -8, -38, -44, 42, 12, -72, 72, -14, 40, -46, -40, -74, 56, 26, -84, 38, -48, 90, 80, -86, -28, 30, -56, -90, -80, 78, 68, -50, -60, 54, 14, -12, 84, -4, 10, 20, -6, 8, 88, 16, -26, 28, -76, 0, -30, 70, -22, 58, 6, -66, -2, 4, -88, -82, 76, 86, 2, -54, 64, -78, 36, -34, 52, 82, -16, 74, -68, -42, -36, 62, 32, -10, 50, -70, -64, 18, 60, 66, -52, -62, -24, -18, 24, -58, 48, 22, -32$ .
- [25]  $\gamma(Q_{183}) = 92$  1-Überdeckung  $D$  mit  $e = 18$ ,  $f = 17$ ,  $u = 27$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{0\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-70, 22, 48\}$ ;  
 $D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -91, -89, \dots, 89, 91$  und  $(c_i) = 25, -25, -35, 27, 49, -53, 29, 59, 5, -33, -55, -1, -71, 35, -19, 63, 81, 87, -87, 75, -43, 39, 57, -41, 41, 55, -91, 83, -83, -69, 3, -45, -51, -85, -67, 71, 11, -81, -5, -11, -21, 67, 15, 1, 23, 17, 73, -15, 19, -23, -63, -73, -9, 13, -17, -7, 77, 9, 85, 21, -75, -57, 53$ .

-77, -59, 51, 65, 91, 33, 79, -31, -89, 89, 47, 37, -65, 61, -37, -79, -61, 69, 43, -3, 7, -39, -13, -27, -49, 45, 31, -47, -29.

- [26]  $i(Q_{185}) = \gamma(Q_{185}) = 93$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 18$ ,  $f = 18$ ,  $u = 27$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{D}} = \{-66, 66\}$ ,  $I_{\hat{S}} = \{-74, 74\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -92, -90, \dots, 90, 92$  und  $(c_i) = -48, -54, 48, 58, -8, 30, -52, 14, 8, 54, -16, -46, -36, -70, 60, -22, 28, 50, 64, 86, 80, -50, -72, -34, 22, -86, 40, 78, -38, 70, -92, -78, -44, 0, 76, -90, -10, 16, -80, -20, 6, 20, 88, -4, 10, -74, -18, 24, 72, 12, -6, -24, 84, -62, 68, 82, -64, -82, -2, 4, -84, 90, 2, 38, -60, 26, -26, 32, 92, 66, -32, 42, -88, 62, -68, 74, -76, -58, 44, -42, 36, 18, -28, -14, -56, -66, -12, 46, 56, -30, -40, 34, 52.$

- [27]  $i(Q_{189}) = \gamma(Q_{189}) = 95$  unabhängige 0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 22$ ,  $f = 20$ ,  $u = 25$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-178, -172, 174, 176\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -94, -92, \dots, 92, 94$  und  $(c_i) = -42, -86, -82, 48, -26, 24, -58, 36, 26, 0, 6, 56, 70, -12, -30, 80, 50, -32, 62, -68, -62, -48, -70, -80, 42, 88, -46, 52, -94, -72, -50, 92, -74, 14, 74, -14, -8, 76, 20, 68, 12, -22, -16, 22, 16, 30, 66, 72, -20, -76, -28, -18, 28, -6, -78, 18, -24, 84, 8, 64, -4, -10, 78, -52, -90, -64, 54, 60, -66, -92, 90, -84, 82, -60, -34, -88, 58, -36, 34, -56, -38, 44, -2, 4, 10, -40, 2, 40, 94, -44, -54, 86, 38, 32, 46.$

- [28]  $\gamma(Q_{193}) = 97$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 20$ ,  $f = 18$ ,  $u = 28$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-126, -8, 32, 102\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -96, -94, \dots, 94, 96$  und  $(c_i) = -12, 26, -24, 10, 52, 38, 32, 22, -68, 54, -28, 78, 64, -62, 80, -74, -32, -58, 28, -78, -70, -38, -76, 94, -96, 46, -56, -22, 72, 90, -52, 42, 48, -94, 2, 8, -60, -90, 76, 4, -14, 24, 96, 16, -2, -16, -30, -4, 18, 66, -80, 20, 68, -66, -10, -86, 88, -20, 14, -8, 6, 70, -6, 58, 84, 74, 92, -42, -84, -50, -64, 56, 44, 86, -92, -34, -72, 82, -88, 62, -40, 34, 12, -82, 0, -46, -36, -18, 40, 30, -48, -54, 60, -26, -44, 50, 36.$

- [29]  $\gamma(Q_{197}) = 99$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 21$ ,  $f = 19$ ,  $u = 28$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-188, 10, 50, 128\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -98, -96, \dots, 96, 98$  und  $(c_i) = -90, 22, 44, 30, 56, -6, 28, 42, 72, -18, 32, 54, 60, 70, 80, -14, -24, 34, -40, -86, -28, 38, -88, -98, -80, -58, -68, -94, -84, -78, -96, -34, 52, 58, -92, -82, 76, 46, 14, 20, 88, 0, 10, -20, 18, 12, 26, -74, -22, -12, -38, -32, -26, 4, -76, 24, 92, 16, -72, -4, 6, 98, -2, 74, 96, -70, 84, 94, -44, -66, 68, 50, 40, 86, 48, 62, 36, 90, -52, 78, 66, -50, -64, 82, -8, -62, 8, 2, 64, -46, -16, -10, -36, -30, -60, -54, -48, -42, -56.$

- [30]  $\gamma(Q_{213}) = 107$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 22$ ,  $f = 20$ ,  $u = 31$  und Zusatzlinien  $I_{\hat{S}} = \{-122, -8, 20, 110\}$ ;

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -106, -104, \dots, 104, 106$  und  $(c_i) = -58, -52, -46, -60, 26, -36, -30, 24, -10, -20, -54, 28, 46, -4, -34, 32, 86, 76, 66, -48, 98, 104, -26,$

$-44, -62, 100, 78, 88, 102, 96, -106, -100, 42, -82, 4, 52, -102, 6, -66, -2, 94,$   
 $-104, 12, 80, 0, 14, -24, 92, -12, -84, 90, -76, 8, 22, -16, 10, 20, -6, 82, -18,$   
 $106, 18, -94, -80, 16, -14, -8, 2, -78, -72, -98, -56, -50, 64, -74, -96, 54, 40,$   
 $62, -32, -70, 84, -38, 36, -90, 68, 44, -92, 38, 56, 74, -68, -86, -88, 34, 72, 58,$   
 $48, 70, -64, 30, -40, -22, -28, 50, 60, -42.$

[31]  $\gamma(Q_{221}) = 111$  0-Überdeckung  $D$  mit  $e = 23, f = 21, u = 32$  und Zusatzlinien  
 $I_{\mathcal{S}} = \{-132, -42, 42, 132\};$

$D = (c_i, r_i)$  mit  $(r_i) = -110, -108, \dots, 108, 110$  und  $(c_i) = 36, 54, 8, 26, 52, -58,$   
 $-52, -14, -20, -74, -80, -38, 20, -70, 44, 58, -8, 90, -44, 78, 28, 102, 108, -68,$   
 $-40, -102, -76, -90, 80, 50, 40, 110, 48, -46, -96, -66, -84, 106, -108, 86, 6, 16,$   
 $-10, 98, 88, -110, 2, -4, -26, -82, 22, 0, 34, -28, 84, 24, 30, -32, -2, 12, -92,$   
 $-16, -6, 94, 72, -78, -22, -94, 10, -12, 96, -50, 60, 4, 100, -86, 76, -106, 104,$   
 $-62, -56, -34, 92, 46, -88, 62, -104, -98, 66, 74, -24, 42, -100, -54, -36, 18,$   
 $-72, 70, -48, 82, 68, 14, -64, 38, 32, -42, 64, -18, 56, -30, -60.$



# Anhang C

## Stand der Dinge

Nachfolgend sind unseres Wissens alle bekannten Werte für  $\gamma(Q_n)$  und  $i(Q_n)$  aufgeführt. Grundlage der Auflistung sind die Werte aus Unterabschnitt 2.2.2. Die in dieser Arbeit erstmals gezeigten Dominanzzahlen sind **fett**, auf Computerbeweisen beruhende Dominanzzahlen *kursiv* gesetzt.

### C.1 Werte für $\gamma(Q_n)$

- $\gamma(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  für  $n = 3, 11$ .
- $\gamma(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für  $n = 1, 2, 4-7, 9, 10, 12, 13, 17-19, 21, 23, 25, 27, 29-31, 33, 37, 39, 41, \mathbf{43}, 45, 49, 53, \mathbf{55}, 57, 61, 65, 69, 71, 73, 77, 81, \mathbf{83}, 85, 89, 91, 93, 97, \mathbf{99}, 101, 105, \mathbf{107}, 109, 113, 115, 117, 121, 125, 129-131, \mathbf{133}, \mathbf{137}, \mathbf{141}, \mathbf{143}, \mathbf{145}, \mathbf{149}, \mathbf{153}, \mathbf{157}, \mathbf{161}, \mathbf{163}, \mathbf{165}, \mathbf{169}, \mathbf{173}, \mathbf{177}, \mathbf{181}, \mathbf{183}, \mathbf{185}, \mathbf{189}, \mathbf{193}, \mathbf{197}, \mathbf{213}, \mathbf{221}$ .
- $\gamma(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 8, 14-16, \mathbf{20}, \mathbf{22}, \mathbf{24}, \mathbf{26}, \mathbf{28}, \mathbf{32}, \mathbf{34}, \mathbf{36}, \mathbf{38}, \mathbf{40}, \mathbf{42}, \mathbf{44}, \mathbf{46}, \mathbf{102}, \mathbf{110}, \mathbf{118}, \mathbf{126}, \mathbf{134}, \mathbf{142}, \mathbf{150}, \mathbf{158}, \mathbf{166}, \mathbf{174}, \mathbf{182}, \mathbf{190}, \mathbf{198}, \mathbf{214}, \mathbf{222}$ .

### C.2 Werte für $i(Q_n)$

- $i(Q_n) = \frac{n-1}{2}$  für  $n = 3, 11$ .
- $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für  $n = 1, 2, 5, 7, 9, 10, 13, 17, 21, 25, 33, 45, 57, 61, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 105, 109, \mathbf{117}, \mathbf{121}, \mathbf{129}, \mathbf{141}, \mathbf{145}, \mathbf{157}, \mathbf{161}, \mathbf{165}, \mathbf{177}, \mathbf{185}, \mathbf{189}$ .
- $i(Q_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  für  $n = 4, 6, 8, 12, 14-16, 18, \mathbf{19}, \mathbf{20}, \mathbf{22-24}, \mathbf{26-28}, \mathbf{31}, \mathbf{32}, \mathbf{34}, \mathbf{36}, \mathbf{38}, \mathbf{40}, \mathbf{42}, \mathbf{44}, \mathbf{46}, \mathbf{102}, \mathbf{110}, \mathbf{118}$ .



# Literaturverzeichnis

- [Ahr01] AHRENS, W.: *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. B. G. Teubner, Leipzig, 1901.
- [AS95] ALAVI, Y. und A. J. SCHWENK (Herausgeber): *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms: Proceedings of the Seventh Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, MI 1992)*, Band 1–2, New York, 1995. Wiley.
- [Bal92] BALL, W. W. R.: *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times*. Macmillan, London, 1892.
- [BCM97] BURGER, A. P., E. J. COCKAYNE und C. M. MYNHARDT: *Domination and irredundance in the queen's graph*. Discrete Mathematics, 163:47–66, 1997.
- [Ber62] BERGE, C.: *The Theory of Graphs and its Applications*. Methuen, London, 1962.
- [Bez48] BEZZEL, M. Berliner Schachzeitung, 3:363, 1848. veröffentlicht unter dem Pseudonym "Schachfreund".
- [BM00a] BURGER, A. P. und C. M. MYNHARDT: *Properties of dominating sets of the queens graph  $Q_{4k+3}$* . Utilitas Mathematica, 57:237–253, 2000.
- [BM00b] BURGER, A. P. und C. M. MYNHARDT: *Small irredundance numbers for queens graphs*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 33:33–43, 2000.
- [BM00c] BURGER, A. P. und C. M. MYNHARDT: *Symmetry and Domination in Queens Graphs*. Bulletin of the ICA, 29:11–24, 2000.
- [BM02] BURGER, A. P. und C. M. MYNHARDT: *An upper bound for the minimum number of queens covering the  $n \times n$  chessboard*. Discrete Applied Mathematics, 121(1–3):51–60, 2002.
- [BM03] BURGER, A. P. und C. M. MYNHARDT: *An improved upper bound for queens domination numbers*. Discrete Mathematics, 266(1–3):119–131, 2003.
- [BMC94] BURGER, A. P., C. M. MYNHARDT und E. J. COCKAYNE: *Domination numbers for the Queen's Graph*. Bulletin of the ICA, 10:73–82, 1994.

- [BMC01] BURGER, A. P., C. M. MYNHARDT und E. J. COCKAYNE: *Queens graphs for chessboards on the torus*. Australasian Journal of Combinatorics, 24:231–246, 2001.
- [BMW03] BURGER, A. P., C. M. MYNHARDT und W. D. WEAKLEY: *The domination number of the toroidal queens graph of size  $3k \times 3k$* . Australasian Journal of Combinatorics, 28:137–148, 2003.
- [BS09] BELL, J. und B. STEVENS: *A Survey of Known Results and Research Areas for  $n$ -Queens*. Discrete Mathematics, 309(1):1–31, 2009.
- [Bur98] BURGER, A. P.: *The Queens Domination Problem*. Doktorarbeit, University of South Africa, 1998.
- [Bur06] BURCHETT, P. A.: *Paired, total, and connected domination on the queen's graph*. Congressus Numerantium, 178:207–222, 2006.
- [Cam77] CAMPBELL, P. J.: *Gauss and the eight queens problem: A study in miniature of the propagation of historical error*. Historia Mathematica, 4(4):397–404, 1977.
- [CGS85] COCKAYNE, E. J., B. GAMBLE und B. SHEPHERD: *Domination of chessboards by queens on a column*. Ars Combinatoria, 19:105–118, 1985.
- [CGS86] COCKAYNE, E. J., B. GAMBLE und B. SHEPHERD: *Domination parameters for the bishops graph*. Discrete Mathematics, 58(3):221–227, 1986.
- [CH86] COCKAYNE, E. J. und S. T. HEDETNIEMI: *On the diagonal queens domination problem*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 42(1):137–139, 1986.
- [CLRS04] CORMEN, T. H., C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST und C. STEIN: *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, 2. Auflage, 2004.
- [CM01] COCKAYNE, E. J. und C. M. MYNHARDT: *Properties of queens graphs and the irredundance number of  $Q_7$* . Australasian Journal of Combinatorics, 23:285–299, 2001.
- [Coc90] COCKAYNE, E. J.: *Chessboard domination problems*. Discrete Mathematics, 86(1–3):13–20, 1990.
- [Cou06] COURNIA, N.: *Chessboard Domination on Programmable Graphics Hardware*. In: *ACM-SE 44: Proceedings of the 44th annual Southeast regional conference*, Seiten 62–67, New York, 2006. ACM.
- [CS88] COCKAYNE, E. J. und P. H. SPENCER: *On the independent queens covering problem*. Graphs and Combinatorics, 4(1):101–110, 1988.
- [Die06] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*. Springer, Heidelberg, 3. Auflage, 2006.

- [EGHvS92] EISENSTEIN, M., C. M. GRINSTEAD, B. HAHNE und D. VAN STONE: *The queen domination problem*. In: *Proceedings of the twenty-third Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Band 91 der Reihe *Congressus Numerantium*, Seiten 189–193. Utilitas Mathematica Publishing Inc., 1992.
- [Fer09a] FERNAU, H. Private Kommunikation, 2009.
- [Fer09b] FERNAU, H.: *Minimum Dominating Set of Queens: A trivial programming exercise?* Discrete Applied Mathematics, 2009. DOI: 10.1016/j.dam.2009.09.019.
- [FHH<sup>+</sup>95] FRICKE, G. H., S. M. HEDETNIEMI, S. T. HEDETNIEMI, A. A. MCRAE, C. K. WALLIS, M. S. JACOBSON, H. W. MARTIN und W. D. WEAKLEY: *Combinatorial problems on chessboards: a brief survey*. In: ALAVI, Y. und A. J. SCHWENK [AS95], Seiten 507–528.
- [FW07] FINOZHENOK, D. und W. D. WEAKLEY: *An improved lower bound for domination numbers of the queen's graph*. Australasian Journal of Combinatorics, 37:295–300, 2007.
- [GHvS90] GRINSTEAD, C. M., B. HAHNE und D. VAN STONE: *On the queen domination problem*. Discrete Mathematics, 86(1–3):21–26, 1990.
- [GJ79] GAREY, M. R. und D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979.
- [Guy81] GUY, R. K.: *Unsolved Problems in Number Theory*. Springer, Heidelberg, 1981.
- [GW97] GIBBONS, P. B. und J. A. WEBB: *Some New Results for the Queens Domination Problem*. Australasian Journal of Combinatorics, 15:145–160, 1997.
- [HHS98] HAYNES, T. W., S. T. HEDETNIEMI und P. J. SLATER (Herausgeber): *Domination in Graphs*, Kapitel 6 – Combinatorial problems on chessboards: II, Seiten 133–162. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [HL90] HEDETNIEMI, S. T. und R. C. LASKAR: *Introduction*. Discrete Mathematics, 86(1–3):3–9, 1990.
- [HN79] HITOTUMATU, H. und K. NOSHITA: *A technique for implementing backtrack algorithms and its application*. Information Processing Letters, 8(4):174–175, 1979.
- [Jän62] JÄNISCH, C. F.: *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*. Sankt Petersburg, 1862.

- [Kar72] KARP, R. M.: *Reducibility among combinatorial problems*. In: MILLER, R. E. und J. W. THATCHER (Herausgeber): *Complexity of Computer Computations*, Seiten 85–103. Plenum Press, 1972.
- [KG01] KEARSE, M. D. und P. B. GIBBONS: *Computational Methods and New Results for Chessboard Problems*. Australasian Journal of Combinatorics, 23:253–284, 2001.
- [KGV83] KIRKPATRICK, S., C. D. GELATT und M. P. VECCHI: *Optimization by Simulated Annealing*. Science, 220(4598):671–680, 1983.
- [Knu00] KNUTH, D. E.: *Dancing Links*. In: DAVIES, JIM, BILL ROSCOE und JIM WOODCOCK (Herausgeber): *Millennial Perspectives in Computer Science*, Seiten 187–214. Palgrave Macmillan, Houndmills, 2000.
- [Kra42] KRAITCHIK, M.: *Mathematical Recreations*. Norton, New York, 1942.
- [NW88] NEMHAUSER, G. L. und L. A. WOLSEY: *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, New York, 1988.
- [Ore62] ORE, O.: *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, Providence, 1962.
- [OW01] ÖSTERGÅRD, P. R. J. und W. D. WEAKLEY: *Values of Domination Numbers of the Queen's Graph*. The Electronic Journal of Combinatorics, 8(1):1–19, 2001.
- [RV87] RAGHAVAN, V. und S. M. VENKATESAN: *On bounds for a board covering problem*. Information Processing Letters, 25(5):281–284, 1987.
- [SG90] SOSIČ, R. und J. GU: *A Polynomial Time Algorithm for the N-Queens Problem*. SIGART Bulletin, 1:7–11, 1990.
- [SG91a] SOSIČ, R. und J. GU: *Fast Search Algorithms for the N-Queens Problem*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 21:1572–1576, 1991.
- [SG91b] SOSIČ, R. und J. GU: *3,000,000 Queens in Less Than One Minute*. SIGART Bulletin, 2:22–24, 1991.
- [SG94] SOSIČ, R. und J. GU: *Efficient Local Search with Conflict Minimization: A Case Study of the N-Queens Problem*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 6:661–668, 1994.
- [SS08] SINKO, A. und P. J. SLATER: *Queen's domination using border squares and (A,B)-restricted domination*. Discrete Mathematics, 308(20):4822–4828, 2008.
- [TG98] THERON, W. F. D. und G. GELDENHUYS: *Domination by queens on a square beehive*. Discrete Mathematics, 178(1–3):213–220, 1998.

- 
- [Wat07] WATKINS, J. J.: *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*. Princeton University Press, 2007.
- [Wea95] WEAKLEY, W. D.: *Domination In The Queen's Graph*. In: ALAVI, Y. und A. J. SCHWENK [AS95], Seiten 1223–1232.
- [Wea02a] WEAKLEY, W. D.: *A Lower Bound For Domination Numbers Of The Queen's Graph*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 43:231–254, 2002.
- [Wea02b] WEAKLEY, W. D.: *Upper bounds for domination numbers of the queen's graph*. Discrete Mathematics, 242(1–3):229–243, 2002.
- [Wea04] WEAKLEY, W. D.: *Erratum to "Upper bounds for domination numbers of the queen's graph" [Discrete Mathematics 242 (2002) 229–243]*. Discrete Mathematics, 277(1–3):321–321, 2004.
- [YY64] YAGLOM, A. M. und I. M. YAGLOM: *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Band I: Combinatorial Analysis and Probability Theory. Holden-Day, San Francisco, 1964.



# Index

- $\gamma(Q_n)$ , 5
  - bekannte Werte, 11
  - neue Werte, 17, 57, 59, 106, 115–121, **123**
- 0-1-Überdeckung, **22**, 35
  - Haupt-Nebendiagonalen besetzt, 36, **47**
- $a$ -Eckmengen, 69
  - linke, rechte, obere, untere, 70
- $a$ -Innenmengen, 69
  - kreuzweise dominiert, **70**, 72, 76, 77
  - verflochten, **69**, 78, 80, 81, 84, 86
- $a$ -Mengen, 69
  - Eckmengen, *siehe*  $a$ -Eckmengen
  - gerade, ungerade, 69
  - Innenmengen, *siehe*  $a$ -Innenmengen
- Absolutindex, 3
- Adjazenzrelation, 5
- alternative Definition von  $p$ -Überdeckungen, 23
- Approximationen, 7
- außenstehende Dame, **100**, 101, 103
- backtracking*, **12**, 56
- Brett, 3
- Computerbeweis, 10, **106**, 123
  - neue Werte für  $\gamma(Q_n)$ , 17, 59, 106
  - neue Werte für  $i(Q_n)$ , 17, 59
- Dame, 3
  - außenstehend, **100**, 101, 103
  - gerade, ungerade, 3
  - gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade, ungerade-ungerade, 3
  - Zugmöglichkeiten, 3
- Damengraph, 5
- dance, 56
- dance\_mult, 56, 57
- Diagonale, 3
  - Differenz-, 3
  - Haupt-, *siehe* Hauptdiagonale
  - Summen-, 3
  - unproduktiv, 96
- Differenzdiagonale, 3
- Dominanzzahl, *siehe*  $\gamma(Q_n), i(Q_n)$
- dominierende Menge, *siehe* Überdeckung
  - kleinste, *siehe*  $\gamma(Q_n)$
  - kleinste unabhängige, *siehe*  $i(Q_n)$
- dynamische Programmierung, 13
- $e(D)$ , **23**, 36
- Eckmengen, *siehe*  $a$ -Eckmengen
- Einbettung  $\varphi$ , **48**, 49, 50
- $f(D)$ , **23**, 36
- Feld, 3
  - gerade, ungerade, 3
  - gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade, ungerade-ungerade, 3
- ganzzahliges lineares Programm, *siehe* *ILP*
- Hauptdiagonale, 3, 65
- Hauptresultat, 99
  - Verallgemeinerung, 107
- Heuristiken, **11**, 59

- $i(Q_n)$ , 5  
 bekannte Werte, 11  
 neue Werte, 17, 57, 59, 115–121, **123**
- ILP  
 für orthodoxe Überdeckungen, **54**, 55, 56  
 für QDS und QIDS, 15–17  
 Variablenselektionsheuristik, *siehe* Variablenselektionsheuristik
- Indexmenge, 3  
 Indexmultimenge, *siehe* Indexmenge  
 Indizierung der Orthogonalen, 3, 21, 48, 65  
 Innenmengen, *siehe*  $a$ -Innenmengen
- Kandidatenfelder, 17, **52**, 54  
 Kerndiagonalen, **90**, 92  
 Komplexität, 6
- Lagekennzahlen, 89  
 lineares Programm, *siehe* ILP  
 Linie, 3  
 gerade, ungerade, 3  
 in Abbildungen, 4  
 Interpretation, 3
- Lösung, 5  
 Lösungsalgorithmen, **11**, 52  
*backtracking*, 12  
 dynamische Programmierung, 13  
 für orthodoxe Überdeckungen, 52  
 ganzzahlige lineare Programmierung (ILP), 54  
 mengentheoretische Formulierung, 53  
 für QDS und QIDS, 11  
 ganzzahlige lineare Programmierung (ILP), **15**, 54  
*greedy*, 18  
 Heuristiken, **11**, 59  
 SAT-Formulierung, 59  
 theoretisch beste bekannte, 6
- Lösungsansätze, *siehe* Lösungsalgorithmen
- Mathematica, **56**, 57, 106, 113
- mengentheoretische Formulierung, 53  
 Monotonie, 7
- nicht-orthodoxe Überdeckung, **61**, 99  
 nqueens, 59
- orthodoxe Überdeckung, 21, **22**, 99  
 für gerade Brettgrößen, 48  
 Indizierung der Orthogonalen, 48  
 Indizierung der Orthogonalen, 21  
 Lösungsalgorithmen, 52  
 randfrei, 27
- Orthogonale, 3  
 Indizierung, *siehe* Indizierung der Orthogonalen
- $p$ -cover, *siehe*  $p$ -Überdeckung  
 $p$ -orthodox set, *siehe*  $p$ -orthodoxe Menge  
 $p$ -orthodoxe Menge, 21  
 $p$ -Überdeckung, **21**, 23  
 alternative Definition durch besetzte Diagonalen, 23  
 Eigenschaften spezieller Klassen, 25–26  
 Hauptdiagonalen besetzt, 27, **34**  
 Lösungsalgorithmen, *siehe* Lösungsalgorithmen für orthodoxe Überdeckungen  
 randfrei, 27  
 relaxiert, *siehe* relaxierte  $p$ -Überdeckung  
 Typ A und B, 24  
 Verallgemeinerung, *siehe* orthodoxe Überdeckung
- Parallelogrammgesetz, 7  
 Problemdefinition, 4  
 Problemvarianten, 5–6
- qds, 59  
 QDS, **4**, 6  
 QIDS, **5**, 6  
 QPaint, **18**, 111, 115  
 quasi-verlustfrei dominiert (q.-v. d.), 62  
 queens, **16**, 17

- queens\_dl, 56  
 queens\_greedy, 18  
 queens\_lines, 17, 59  
 Querdiagonalen, 90, 92  
 Randfelder  $E^{pq}$ , 62
  - Bestimmung besetzter Diagonalen, 76
  - Indizierung der Orthogonalen, 65
  - quadratisch, 62
  - quasi-verlustfrei dominiert (q.-v. d.), 62
  - verlustfrei dominiert (v. d.), 62
  - Zerlegung in  $a$ -Mengen, 69
 Referenz-Eckmengengröße  $\alpha$ , 75  
 Referenzabstand  $a$ , 73  
 Referenzfeld, 35  
 relaxierte  $p$ -Überdeckung, 22, 27
  - Hauptdiagonalen besetzt, 27, 34
  - randfrei, 27
 Schachbrett, 3  
 Schnittfeld  $\sigma_{d,s}$ , 3  
 Schranken, 7
  - obere, 9
    - beste, 59
    - generische Konstruktion, 9–10
  - untere, 8
 Sekundärabstand, 81  
 Spalte, 3  
 Summendiagonale, 3  
 $u(D)$ , 23, 36  
 Überdeckung, 3
  - nicht-orthodox, *siehe* nicht-orthodoxe Überdeckung
  - orthodox, *siehe* orthodoxe Überdeckung
 unproduktive Diagonale, 96  
 Variablenselektionsheuristik, 16, 55, 112  
 Varianten, 5–6  
 Verallgemeinerung
  - Hauptresultat, 107
  - $p$ -Überdeckung, *siehe* orthodoxe Überdeckung
 Verlustfeld, 67, 68, 69, 72
  - doppeltes, 67, 68
 verlustfrei dominiert (v. d.), 62  
 Verlustzeile, 69, 72, 74, 75, 77, 78  
 verwandte Probleme, 5–6  
 XOR-Operator  $\oplus$ , 62  
 Zeile, 3  
 Zusatzdiagonale, 24  
 Zusatzorthogonale, 23  
 Zwangsdiagonale, 24  
 Zwangsorthogonale, 23



# Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Rainer Schrader betreut worden.

**Teilpublikationen:** keine

Stefan Neubaus