Effizientes Schätzen von Erwartungswerten im nichtparametrischen Regressionsmodell mit fehlenden Zielvariablen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Markus Schulz

aus Frechen

Hundt Druck GmbH, Köln

Köln 2010

Berichterstatter: Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Prof. Dr. J. Steinebach

Tag der mündlichen Prüfung: 21. April 2010

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein nichtparametrisches Regressionsmodell mit zentrierten Fehlern und Zielvariablen, die zufällig fehlen (MAR), untersucht. Unser Hauptziel ist es, einen Schätzer für den Erwartungswert einer Funktion der Beobachtungen zu finden, der im Hájek-Le Cam-Sinne effizient ist. In einigen ähnlichen Modellen wie einem linearen oder einem parametrischen Regressionsmodell haben andere Autoren effiziente Schätzer für den gleichen Erwartungswert konstruiert. Das hier betrachtete Problem wurde noch nicht behandelt, selbst im Fall nicht fehlender Daten. Daher muss man in einem ersten Schritt lokale asymptotische Normalität (LAN) des Modells nachgewiesen. Da der kanonische Gradient eines geeigneten Funktionals wesentlich für die Effizienz ist, wird er als nächstes berechnet. Dann wird mit vollständiger Imputation der Zielvariablen durch nichtparametrische Schätzer bedingter Erwartungswerte ein Schätzer konstruiert. Dafür wird die Regressionsfunktion durch eine beschränkte Version des Nadaraya-Watson-Schätzers geschätzt. Um zu untersuchen, ob der so konstruierte Schätzer effizient ist, wird die asymptotische Linearität des Schätzers und seine Einflussfunktion hergeleitet und mit dem kanonischen Gradienten verglichen. Es zeigt sich, dass der Schätzer nicht effizient ist. Dies unterscheidet sich vom Ergebnis im linearen und im parametrischen Regressionsmodell. Dennoch passt die bestimmte Einflussfunktion ganz gut zur gewünschten. Nach Addition eines Korrekturtermes erhalten wir schließlich einen effizienten Schätzer. Der letzte Schritt kann auch als zweiter Teil dieser Arbeit angesehen werden. Er enthält Argumente, die zuvor im Fall fehlender Daten noch nicht benutzt worden sind.

Abstract

In this work, we study a nonparametric regression model with centered errors and with response variables that are missing at random (MAR). Our main goal is to find an estimator for the expectation of a function of the observations which is efficient in the Hájek-Le Cam-sense. In some similar models such as a linear or a parametric regression model, other authors constructed efficient estimators for the same expectation value. The problem considered here has not yet been dealed with even in the case of non-missing response variables. Therefore, in a first step, we have to prove local asymptotic normality (LAN) of the model. As the canonical gradient of a suitable functional is essential for efficiency, it is calculated next. Then an estimator is constructed via full imputation of response variables with nonparametric estimators of conditional expectations. To do so the regression function is estimated by a truncated version of the Nadaraya-Watson estimator. In order to examine whether the estimator constructed above is efficient, asymptotic linearity of the estimator and its influence function are derived and compared with the canonical gradient. It turns out, however, that the resulting estimator is not efficient. This differs from the result in the linear and the parametric regression model. Nevertheless the determined influence function matches the desired one quite well. After adding a correction term we finally obtain an efficient estimator. The last step may also be regarded as second part of this work. It contains arguments which had not been used in the case of missing data before.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Wefelmeyer für die Betreuung dieser Arbeit. Für Probleme hatte er stets ein offenes Ohr. Auch erhielt ich durch ihn den ein oder anderen Denkanstoß. Ferner bin ich Herrn Steinebach dankbar, dass er sich bereit erklärt hat, Zweitgutachter dieser Arbeit zu sein. Weiterhin möchte ich Herrn Schick dafür danken, dass er es in Erwägung gezogen hat, Zweitgutachter meiner Arbeit zu werden. Zudem danke ich ihm für seinen sehr hilfreichen Artikel [Sch93], auf dem der Großteil des vierten Kapitels dieser Arbeit beruht. Des Weiteren bin ich Julia Eisenberg dankbar, dass ich mit ihr über ein paar Probleme diskutieren konnte. Dadurch wurden mir zum Teil neue Sichtweisen eröffnet. Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern, dass sie mir den Rücken freigehalten und meine Launen ausgehalten haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Für einen Zufallsvektor (X, Y) kann der Wert $E[h(X, Y)]$ z.B. durch den empirischen Schätzer $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i, Y_i)$ geschätzt werden. Ist $h(X, Y)$ quadrat-integrierbar, dann ist der empirische Schätzer erwartungstreu, konsistent und asymptotisch normal. Anders muss man jedoch vorgehen, wenn die Zielvariable Y nicht immer beobachtet werden kann. Dieses Problem der fehlenden Daten tritt beispielsweise bei schriftlichen Meinungsumfragen oder klinischen Studien auf. In derartigen Modellen könnte man theoretisch auch fehlende oder unvollständige Daten ersatzlos streichen und für Schätzungen nur die vollständigen Daten verwenden. Ein so gebildeter Schätzer wird jedoch wahrscheinlich nicht effizient sein, da er nicht alle bekannten Informationen benutzt. Unter zusätzlichen Modellannahmen gibt es hingegen weitere Möglichkeiten, den Erwartungswert $E[h(X, Y)]$ zu schätzen. Konkret sei X eine (eindimensionale) Zufallsvariable, die immer beobachtet werden kann. Eine weitere (eindimensionale) Zufallsvariable Y sei jedoch nur beobachtbar, wenn eine Indikatorfunktion Z den Wert 1 annimmt. Y wird auch als Zielvariable und X als Kovariable bezeichnet. Zusätzlich seien Z und Y unabhängig gegeben X, d.h. es gelte $P(Z = 1|X, Y) = P(Z = 1|X)$. Dieses Modell nennt man auch *MAR-Modell*, wobei MAR für „missing at random“ steht. Zu diesem Thema wurden schon viele Arbeiten verfasst. So haben z.B. [WR02] Schätzer für EY im MAR-Modell betrachtet und asymptotische Normalität nachgewiesen. Dabei kommt auch das Mittel der Imputation zum Einsatz. Der von dem englischen Wort „to impute - unterstellen“ stammende Begriff bezeichnet Schätzverfahren, in denen Schätzwerte benutzt werden, um den eigentlichen Schätzer zu bilden. Besonders hervorheben möchte ich den „partially imputed estimator“ und den „fully imputed estimator“. Im „partially imputed estimator“ werden, wie der Name schon andeutet, die fehlenden Daten durch Schätzwerte ersetzt. Im konkreten Modell hat er die Form

$$\hat{H}_{PI} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i h(X_i, Y_i) + (1 - Z_i)\hat{\chi}(X_i),$$

wobei $\chi(x)$ für den bedingten Erwartungswert $E(h(X, Y)|X = x)$ steht und $\hat{\chi}(x)$ einen geeigneten Schätzer für $\chi(x)$ bezeichnet. Man beachte, dass unter geeigneten Voraussetzungen $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(X_i)$ aufgrund des schwachen Gesetzes der großen Zahlen stochastisch gegen $E[E(h(X, Y)|X)] = E[h(X, Y)]$ konvergiert. Dieser Schätzer wird in [MSW06] bzw. [WR02] benutzt, um $E[h(X, Y)]$ bzw. EY zu schätzen. Der „fully imputed estimator“ verzichtet dagegen ganz auf die genauen Werte und verwendet stattdessen ausschließlich Schätzwerte. Im vorliegenden Modell hat er die Form

$$\hat{H}_{FI} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{\chi}(X_i)$$

mit $\hat{\chi}(x)$ wie oben. Dieser Schätzer wird in [MSW06] dem „partially imputed estimator" hinsichtlich der Effizienz (im Hájek-Le Cam-Sinn; eine Definition wird in Kapitel 2 angegeben) gegenübergestellt. Dabei werden vier verschiedene Fälle betrachtet, die sich im Wissen um die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ unterscheiden: Im ersten Fall sei die Übergangsverteilung komplett unbekannt, im zweiten sei sie parametrisch. Als nächstes wird im dritten Fall das lineare Regressionsmodell $Y = \vartheta X + \varepsilon$ mit von X unabhängigen Fehlern ε untersucht. Schließlich fordert man im vierten Fall anstelle der Unabhängigkeit nur $E(\varepsilon|X) = 0$. Ergebnis des Vergleichs ist, dass der „fully imputed estimator" in den ersten drei behandelten Fällen effizient ist, der „partially imputed estimator" dagegen nur im ersten. Im vierten Fall muss bei beiden Schätzern ein Korrekturterm hinzuaddiert werden, um effiziente Schätzer zu erhalten. Eine Verallgemeinerung wird in [Mue09] vorgenommen. Dort ist ein parametrisches Regressionsmodell $Y = r_\vartheta(X) + \varepsilon$ Gegenstand der Untersuchungen. Auch dort ist der „fully imputed estimator" effizient, wenn man für ϑ einen effizienten Schätzer $\hat{\vartheta}$ wählt.

In dieser Arbeit soll nun anknüpfend an [MSW06] als weitere Verallgemeinerung das nichtparametrische Regressionsmodell $Y = r(X) + \varepsilon$ mit von X unabhängigen Fehlern ε und einer unbekannten Regressionsfunktion r den Betrachtungen zugrunde gelegt werden. ε habe dabei eine (unbekannte) differenzierbare Dichte f, und es gelte $E\varepsilon = 0$. Letzteres sorgt dafür, dass die Regressionsfunktion r als bedingter Erwartungswert von Y gegeben $X = x$ aufgefasst und daher vernünftig geschätzt werden kann. Wie in [MSW06] möchte ich einen effizienten Schätzer für $E[h(X, Y)]$ konstruieren. Dazu wird zunächst im zweiten Abschnitt die effiziente Einflussfunktion berechnet. In Abschnitt 3 definiere ich anschließend den „fully imputed estimator" für dieses Modell und berechne seine Einflussfunktion. Ich mache diesen Ansatz, weil sich ein solcher Schätzer in [MSW06] oft als effizient entpuppt hat. Leider ist er diesmal nicht effizient, so dass er noch korrigiert werden muss, um einen effizienten Schätzer zu erhalten. Daher suche ich im vierten Abschnitt einen Korrekturterm wie in [MSW06], der den nötigen Beitrag zur Einflussfunktion liefert. [Sch93] wird dabei eine nicht unerhebliche Rolle spielen.

Kapitel 2

Die effiziente Einflussfunktion

In diesem Abschnitt werde ich die effiziente Einflussfunktion des in der Einleitung vorgestellten Modells berechnen. Die zugrunde liegende Theorie geht dabei zurück auf Hájek und Le Cam. Die folgenden Argumentationen basieren auf [MSW06] oder sind der besagten Arbeit sogar entnommen.
Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $G(dx)$, gegeben $X = x$ seien Y gemäß $Q(x, dy)$ und Z Bernoulli-verteilt mit Parameter

$$\pi(X) := P(Z = 1|X = x) = E(Z|X = x).$$

Die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y, Z) ist also

$$\tilde{P}(dx, dy, dz) = G(dx)B_{\pi(x)}(dz)Q(x, dy)$$

mit $B_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0$, wobei δ_t das Dirac-Maß im Punkt t bezeichne. Die gemeinsame Verteilung der Beobachtungen (X, ZY, Z) ist andererseits gegeben durch

$$P(dx, dy, dz) = G(dx)B_{\pi(x)}(dz)\big(zQ(x, dy) + (1 - z)\delta_0(dy)\big).$$

In unserem Modell der nichtparametrischen Regression erhält $Q(x, dy)$ die konkrete Gestalt

$$Q(x, dy) = f(y - r(x))dy.$$

Die hier auftretende Dichte f sei positiv und zweimal stetig differenzierbar mit Lipschitz-stetiger zweiter Ableitung und $\int uf''(u)du < \infty$.
Betrachte nun die lokalen Modelle für G, f, r und π. Man setzt an:

$$r_{ns} = r + n^{-1/2}s$$

mit $s \in S := \{f \in L_2(G) : \int f^2(x)G(dx) < \infty, f \text{ beschränkt}\}$,

$$G_{nu} = G \cdot (1 + n^{-1/2}u)$$

mit $u \in U := \{f \in L_{2,0}(G) : f \text{ beschränkt}\}$ und
$L_{2,0}(G) = \{f \in L_2(G) : \int f(x)G(dx) = 0\}$,

$$f_{nv} = f \cdot (1 + n^{-1/2}v)$$

mit $v \in \tilde{W} := \{v \in L_{2,0}(F) : \int tv(t)f(t)dt = 0, v \text{ beschränkt}\}$ und

$$\pi_{nw}(x) = \pi(x)\big(1 + n^{-1/2}w(x)(1 - \pi(x))\big)$$

mit $w \in \{a \in L_2(G_\pi) : a \text{ beschränkt}\}$, $G_\pi(dx) := \pi(x)(1-\pi(x))G(dx)$. Durch diese Wahl von π_{nw} folgt für die bedingte Verteilung von Z gegeben $X = x$

$$B_{\pi_{nw}(x)}(dz) \doteq B_{\pi(x)}(dz)\big(1 + n^{-1/2}w(x)(z - w(x))\big).$$

Die Notation $\doteq$ soll dabei „gleich bis auf Terme höherer Ordnung“ bedeuten. f_{nv} und r_{ns} kann man mit $\ell := -f'/f$ zu einer Störung von Q zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
Q_{nvs}(x, dy) &= f_{nv}(y - r_{ns}(x))dy \\
&= f(y - r_{ns}(x))(1 + n^{-1/2}v(y - r_{ns}(x)))dy \\
&\doteq f(y - r(x))(1 + n^{-1/2}v(y - r_{ns}(x))) \\
&\quad + f'(y - r(x))(-n^{-1/2}s(x))(1 + n^{-1/2}v(y - r_{ns}(x)))dy \\
&\doteq f(y - r(x))\left(1 + n^{-1/2}\left[v(y - r(x)) - \frac{f'(y - r(x))}{f(y - r(x))}s(x)\right]\right)dy \\
&= f(y - r(x))(1 + n^{-1/2}[v(y - r(x)) + \ell(y - r(x))s(x)])dy \\
&= Q(x, dy)(1 + n^{-1/2}\tilde{v}(x, y))
\end{aligned}$$

mit $\tilde{v}(x, y) := v(y - r(x)) + \ell(y - r(x))s(x)$. Wegen $v \in \tilde{W}$ und $s \in S$ muss $\tilde{v}$ demnach aus der Menge

$$V := \{\tilde{v} \in L_2(M) : \tilde{v}(x, y) = v(y - r(x)) + \ell(y - r(x))s(x), v \in \tilde{W}, s \in S\}$$

mit $M(dx, dy) := Q(x, dy)G(dx)$ gewählt werden. Ferner lässt sich die Menge $\tilde{V} := \{v(X, Y) : v \in V\}$ auch schreiben als

$$\tilde{V} = \{v(\varepsilon) + \ell(\varepsilon)s(X) : s \in S, v \in \tilde{W}\}.$$

Für die Störungen gilt zudem

$$\begin{aligned}
&\int \left(n^{1/2}(dG_{nu}^{1/2} - dG^{1/2}) - \frac{1}{2}u\,dG^{1/2}\right)^2 \to 0, \\
&\iint \left(n^{1/2}(dQ_{n\tilde{v}}^{1/2}(x, .) - dQ^{1/2}(x, .)) - \frac{1}{2}\tilde{v}(x, .)dQ^{1/2}(x, .)\right)^2 G(dx) \to 0 \text{ und} \\
&\iint \left(n^{1/2}(dB_{\pi_{nw}(x)}^{1/2} - dB_{\pi(x)}^{1/2}) - \frac{1}{2}(. - \pi(x))w(x)dB_{\pi(x)}^{1/2}\right)^2 G(dx) \to 0.
\end{aligned}$$

Man sagt auch, die Störungen seien *Hellinger-differenzierbar* mit Ableitungen u, $\tilde{v}$ und $(z - \pi(x))w(x)$. Ähnlich wie wir oben f_{nv} und r_{ns} zu einer Störung von Q zusammengefasst haben, lassen sich nun alle Störungen zu einer Störung $P_{nu\tilde{v}w}$ der gemeinsamen Verteilung der Beobachtungen P zusammenfassen. Dafür rechnet man wie folgt

$$\begin{aligned}
P_{nu\tilde{v}w}(dx, dy, dz) &= G_{nu}(dx)B_{\pi_{nw}(x)}(dz)\big(zQ_{n\tilde{v}}(x, dy) + (1 - z)\delta_0(dy)\big) \\
&\doteq G(dx)B_{\pi(x)}(dz)\big(1 + n^{-1/2}[u(x) + (z - \pi(x))w(x)]\big) \\
&\quad \cdot\big(zQ(x, dy)(1 + n^{-1/2}\tilde{v}(x, y)) + (1 - z)\delta_0(dy)\big) \\
&\doteq G(dx)B_{\pi(x)}(dz)\big(zQ(x, dy) + (1 - z)\delta_0(dy)\big) \\
&\quad \cdot\big(1 + n^{-1/2}[u(x) + z\tilde{v}(x, y) + (z - \pi(x))w(x)]\big) \\
&= P(dx, dy, dz)\big(1 + n^{-1/2}[u(x) + z\tilde{v}(x, y) + (z - \pi(x))w(x)]\big).
\end{aligned}$$

Setze

$$t_{u\tilde{v}w}(x, zy, z) := u(x) + z\tilde{v}(x, y) + (z - \pi(x))w(x).$$

Bezeichne R den Restterm höherer Ordnung, den wir oben an den Stellen mit $\doteq$ weggelassen haben. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung von $(1 + x)^{1/2}$ und der Beschränktheit von s, u, v und w erhält man

$$\begin{aligned}
&\iiint \Big[n^{1/2}\big(dP_{nu\tilde{v}w}^{1/2} - dP^{1/2}\big) - \frac{1}{2}t_{u\tilde{v}w}dP^{1/2}\Big]^2 \\
= &\iiint \Big[n^{1/2}dP^{1/2}\big((1 + n^{-1/2}t_{u\tilde{v}w} + R)^{1/2} - 1\big) - \frac{1}{2}t_{u\tilde{v}w}dP^{1/2}\Big]^2 \\
= &\iiint \Big[n^{1/2}\Big(1 + \frac{1}{2}n^{-1/2}t_{u\tilde{v}w} + \frac{1}{2}R - 1\Big) - \frac{1}{2}t_{u\tilde{v}w}\Big]^2 dP + O(n^{-1/2}) = o(1),
\end{aligned}$$

sofern $E[\ell^2(\varepsilon)]$ endlich ist. Daraus liest man ab, dass $P_{nu\tilde{v}w}$ ebenfalls Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $t_{u\tilde{v}w}(x, zy, z)$ ist. Für die Störung $P_{nu\tilde{v}w}$ haben wir also *lokale asymptotische Normalität*, kurz LAN, in dem Sinne, dass gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log \frac{dP_{nu\tilde{v}w}}{dP}(X_i, Z_iY_i, Z_i) \quad = \quad & n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} t_{u\tilde{v}w}(X_i, Z_iY_i, Z_i) \\
& -\frac{1}{2}E[t_{u\tilde{v}w}^2(X, ZY, Z)] + o_p(1).
\end{aligned}$$

Im Beweis verwendet man im Wesentlichen eine Taylor-Entwicklung der Funktion $\log(1 + x)$ um $x = 0$. Für den Fall eines parametrischen Modells ist ein Beweis im Anhang von [BKRW93] zu finden.
Die nun folgenden Definitionen sind bereits auf den vorliegenden Fall spezialisiert.

Definition 2.1. Ein Funktional κ von G, Q und π heißt *differenzierbar* mit *Gradient* $g \in L_2(P)$, wenn für alle $u \in L_{2,0}(G)$, $\tilde{v} \in V$ und $w \in L_2(G_\pi)$ gilt

$$n^{1/2}\big(\kappa(G_{nu}, Q_{n\tilde{v}}, \pi_{nw}) - \kappa(G, Q, \pi)\big) \to E[g(X, ZY, Z)t_{u\tilde{v}w}(X, ZY, Z)].$$

g_* heißt *kanonischer Gradient*, wenn $g_*(X, ZY, Z)$ die Projektion auf den *Tangentialraum*

$$T = \{t_{u\tilde{v}w}(X, ZY, Z) : u \in L_{2,0}(G), \tilde{v} \in V^-, w \in L_2(G_\pi)\}$$

ist.

Dabei bezeichnet V^- den Abschluss von V, der gerade gegeben ist durch

$$V^- = \{\tilde{v} \in L_2(M) : \tilde{v}(x, y) = v(y - r(x)) + \ell(y - r(x))s(x), v \in W, s \in L_2(G)\}$$

mit $W = \{v \in L_{2,0}(F) : \int tv(t)f(t)dt = 0\}$. In dem vorliegenden Modell zerfällt der Tangentialraum in eine orthogonale Summe der Räume

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{u(X) : u \in L_{2,0}(G)\}, \\
T_2 &= \{Z\tilde{v}(X, Y) : \tilde{v} \in V^-\} \quad \text{und} \\
T_3 &= \{(Z - \pi(X))w(X) : w \in L_2(G_\pi)\},
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
E[u(X)Z\tilde{v}(X, Y)] &= E[u(X)Zv(\varepsilon)] + E[u(X)Z\ell(\varepsilon)s(X)] \\
&= E[u(X)Z]E[v(\varepsilon)] + E[u(X)Zs(X)]E[\ell(\varepsilon)] = 0
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&E[Z\tilde{v}(X,Y)(Z-\pi(X))w(X)]\\
=&E[Zv(\varepsilon)(Z-\pi(X))w(X)]+E[Z\ell(\varepsilon)s(X)(Z-\pi(X))w(X)]\\
=&E[Z(Z-\pi(X))w(X)]E[v(\varepsilon)]+E[Zs(X)(Z-\pi(X))w(X)]E[\ell(\varepsilon)]=0,
\end{aligned}
$$

da ε von X und Z unabhängig und nach Voraussetzung $E[v(\varepsilon)]$ gleich Null ist. Ferner hat man

$$
\begin{aligned}
E[u(X)(Z-\pi(X))w(X)] &= E[u(X)Zw(X)]-E[u(X)\pi(X)w(X)]\\
&= E[u(X)w(X)E(Z|X)]-E[u(X)\pi(X)w(X)]=0.
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle zeigt sich nun, warum es sinnvoll war, das lokale Modell für π wie oben vorgestellt zu wählen. Andernfalls wären nämlich die Räume T_1 und T_3 nicht orthogonal zueinander.
Aufgrund der Orthogonalität gilt zudem

$$
E[t^2_{u\tilde{v},w}(X,ZY,Z)]=E[u^2(X)]+E[Z\tilde{v}^2(X,Y)]+E[(Z-\pi(X))^2w^2(X)].
$$

Ab jetzt betrachten wir speziell das Funktional

$$
\kappa(G,Q,\pi)=\kappa(G,Q)=E[h(X,Y)]=\iint h(x,y)Q(x,dy)G(dx)=\int hdM
$$

mit $M(dx,dy)=Q(x,dy)G(dx)$. Wie oben setzt man

$$
M_{nu\tilde{v}}(dx,dy)=Q_{n\tilde{v}}(x,dy)G_{nu}(dx).
$$

Hierfür erhält man die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
M_{nu\tilde{v}}(dx,dy) &= Q_{n\tilde{v}}(x,dy)G_{nu}(dx)\\
&\doteq Q(x,dy)G(dx)(1+n^{-1/2}[\tilde{v}(x,y)+u(x)])\\
&= M(dx,dy)(1+n^{-1/2}[\tilde{v}(x,y)+u(x)]).
\end{aligned}
$$

Daher ist $M_{nu\tilde{v}}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $t(x,y)=u(x)+\tilde{v}(x,y)$, denn durch eine Taylor-Entwicklung mit Restglied R folgt

$$
\begin{aligned}
&\int \big(n^{1/2}(dM^{1/2}_{nu\tilde{v}}-dM^{1/2})-\frac{1}{2}tdM^{1/2}\big)^2\\
\doteq&\int \big(n^{1/2}((1+n^{-1/2}t)^{1/2}-1)-\frac{1}{2}t\big)^2dM=n^{-1}\int R^2dM=o(1).
\end{aligned}
$$

Falls nun die Bedingung $\limsup_{n\to\infty}\int h^2dM_{nu\tilde{v}}<\infty$ erfüllt ist, dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&n^{1/2}(\kappa(G_{nu},Q_{n\tilde{v}},\pi_{nw})-\kappa(G,Q,\pi))\\
=&\ n^{1/2}\Big(\int hdM_{nu\tilde{v}}-\int hdM\Big)\to E\big[h(X,Y)(u(X)+\tilde{v}(X,Y))\big].
\end{aligned}
$$

Nach Definition 2.1 ist κ also differenzierbar mit Gradient $g\in L_2(P)$, wobei g für alle $u\in L_{2,0}(G)$, $\tilde{v}\in V^-$ und $w\in L_2(G_\pi)$ die Gleichung

$$
E[g(X,ZY,Z)t_{u\tilde{v}w}(X,ZY,Z)]=E[h(X,Y)(u(X)+\tilde{v}(X,Y))]
$$

erfüllen muss. Für den kanonischen Gradienten g_* lässt sich also schreiben

$$g_*(X, ZY, Z) = u_*(X) + Z\tilde{v}_*(X, Y) + (Z - \pi(X))w_*(X),$$

wobei $u_*(X)$ die Projektion von $g(X, ZY, Z)$ auf T_1, $Z\tilde{v}_*(X, Y)$ die Projektion von $g(X, ZY, Z)$ auf T_2 und $(Z - \pi(X))w_*(X)$ die Projektion von $g(X, ZY, Z)$ auf T_3 bezeichnet. Zusammen mit der vorhergehenden Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & E[u_*(X)u(X)] + E[Z\tilde{v}_*(X, Y)\tilde{v}(X, Y)] + E[(Z - \pi(X))^2 w_*(X)w(X)] \\ = \; & E[h(X, Y)(u(X) + \tilde{v}(X, Y))] \end{aligned}$$

für alle $u \in L_{2,0}(G)$, $\tilde{v} \in V^-$ und $w \in L_2(G_\pi)$. Setzt man darin $u = 0$ und $\tilde{v} = 0$, so folgt $w_* = 0$. Für $\tilde{v} = 0$ erhält man anschließend

$$E[u_*(X)u(X)] = E[h(X, Y)u(X)].$$

Das bedeutet, dass $u_*(X)$ gleich der Projektion von $h(X, Y)$ auf T_1 ist, also $u_*(X) = \chi(X) - E[\chi(X)]$ mit $\chi(X) := E(h(X, Y)|X)$.
Es bleibt noch $\tilde{v}_*$ zu bestimmen.

Proposition 2.1. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \tilde{v}_*(X, Y) &= \frac{1}{J}\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X, Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{1}{EZ}E[h(X, Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon) - E[\bar{h}(\varepsilon)]) \end{aligned}$$

mit $\bar{h}(\varepsilon) = E(h(X, Y)|\varepsilon)$ *und* $J = E[\ell^2(\varepsilon)]$.

Beweis. Es gilt $E[\varepsilon\ell(\varepsilon)] = 1$. Betrachte dazu

$$0 = E\varepsilon = \int uf(u)du = \int (u + s)f(u + s)du.$$

Bilde den Differenzenquotienten an der Stelle Null und führe den Grenzübergang $s \to 0$ durch. Das liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \to 0} s^{-1}\Big(\int (u + s)f(u + s)du - \int uf(u)du\Big) \\ &= \lim_{s \to 0} s^{-1}\Big(s\int f(u + s)du + \int u(f(u + s) - f(u))du\Big) \\ &= \int f(u)du + \lim_{s \to 0}\int us^{-1}(f(u + s) - f(u))du \\ &= 1 + \int uf'(u)du + \lim_{s \to 0} s\int uf''(u)du + \lim_{s \to 0} s\int u\int_0^1 (f''(u + ts) - f''(u))dt \\ &= 1 - \int u\ell(u)f(u)du. \end{aligned}$$

Somit hat man auch $E[\varepsilon\ell(\varepsilon)] - \sigma^{-2}E[\varepsilon^2] = 1 - 1 = 0$. $\ell_0(\varepsilon) := \ell(\varepsilon) - \sigma^{-2}\varepsilon$ ist also orthogonal zu ε. Man erhält

$$\int (\ell(u) - \ell_0(u))v(u)f(u)du = \sigma^{-2}E[\varepsilon v(\varepsilon)] = 0.$$

Daher ist ℓ_0 die Projektion von ℓ auf $W = \{v \in L_{2,0}(F) : \int tv(t)f(t)dt = 0\}$.
Das folgende Vorgehen basiert auf einer Idee aus [Mue09].
Ein Element $\tilde{v}(X,Y)$ aus $\tilde{\overline{V}}$ lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(X,Y) &= v(\varepsilon) + s(X)\ell(\varepsilon) \\
&= v(\varepsilon) + E(s(X)|Z=1)(\ell(\varepsilon) - \sigma^{-2}\varepsilon) + (s(X) - E(s(X)|Z=1))\ell(\varepsilon) \\
&\quad + E(s(X)|Z=1)\frac{\varepsilon}{\sigma^2} \\
&= v(\varepsilon) + E(s(X)|Z=1)\ell_0(\varepsilon) + (s(X) - E(s(X)|Z=1))\ell(\varepsilon) \\
&\quad + E(s(X)|Z=1)\frac{\varepsilon}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Setze $\beta(\varepsilon) := v(\varepsilon) + E(s(X)|Z=1)\ell_0(\varepsilon)$ und $\xi(s) := s(X) - E(s(X)|Z=1)$. Es gilt $\beta(\varepsilon) \in \tilde{V}_1 := \{\alpha(\varepsilon) : \alpha \in W\}$. $\tilde{v}_*$ ist also bestimmt durch

$$\begin{aligned}
&E[Z\tilde{v}_*(X,Y)(\beta(\varepsilon) + \xi(s)\ell(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)] \\
=&E[h(X,Y)(\beta(\varepsilon) + \xi(s)\ell(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)]
\end{aligned}$$

für alle $\beta \in W$ und $s \in L_2(G)$. Insbesondere ergibt sich für $s = 0$

$$E[Z\tilde{v}_*(X,Y)\beta(\varepsilon)] = E[h(X,Y)\beta(\varepsilon)] \quad \forall \beta \in W$$

und für $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
&E[Z\tilde{v}_*(X,Y)(\xi(s)\ell(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)] \\
=&E[h(X,Y)(\xi(s)\ell(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)] \quad \forall s \in L_2(G).
\end{aligned}$$

Setze $\tilde{V}_2 := \{(s(X) - E(s(X)|Z=1))\ell(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon : s \in L_2(G)\}$.
Schreibe $\tilde{v}_*(X,Y)$ als

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_*(X,Y) &= (s_*(X) - E(s_*(X)|Z=1))\ell(\varepsilon) + E(s_*(X)|Z=1)\frac{\varepsilon}{\sigma^2} + \beta_*(\varepsilon) \\
&= \xi(s_*)\ell(\varepsilon) + E(s_*(X)|Z=1)\frac{\varepsilon}{\sigma^2} + \beta_*(\varepsilon)
\end{aligned}$$

mit $\xi(s_*) = s_*(X) - E(s_*(X)|Z=1)$, $s_* \in L_2(G)$ und $\beta_* \in W$. Es gilt

$$E(s(X)|Z=1) = \frac{1}{P(Z=1)}E[1_{\{Z=1\}}s(X)] = \frac{1}{EZ}E[Zs(X)].$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&E[Z\xi(s_*)\ell(\varepsilon)\beta(\varepsilon)] + E[Z\sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)\varepsilon\beta(\varepsilon)] \\
=&E[Z\xi(s_*)]E[\ell(\varepsilon)\beta(\varepsilon)] + \sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)EZE[\varepsilon\beta(\varepsilon)] = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&E[Z\beta_*(\varepsilon)\xi(s)\ell(\varepsilon)] + E[Z\beta_*(\varepsilon)\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon] \\
=&E[Z\xi(s)]E[\beta_*(\varepsilon)\ell(\varepsilon)] + \sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)EZE[\beta_*(\varepsilon)\varepsilon] = 0
\end{aligned}$$

reduzieren sich daher die geforderten Gleichungen auf

$$E[Z\beta_*(\varepsilon)\beta(\varepsilon)] = E[h(X,Y)\beta(\varepsilon)] \quad \forall \beta \in W$$

und

$$\begin{aligned}&E[Z(\xi(s_*)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)\varepsilon)(\xi(s)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)]\\=&E[h(X,Y)(\xi(s)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)]\quad\forall s\in L_2(G).\end{aligned}$$

Die Projektion von $Z\beta_*(\varepsilon)$ auf $\tilde{V}_1$ muss also gleich der Projektion von $h(X,Y)$ auf $\tilde{V}_1$ sein. Ebenso müssen die Projektionen von $Z(\xi(s_*)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)$ und $h(X,Y)$ auf $\tilde{V}_2$ übereinstimmen.
Wegen

$$E[Z\beta_*(\varepsilon)\beta(\varepsilon)]=EZE[\beta_*(\varepsilon)\beta(\varepsilon)]=E[EZ\beta_*(\varepsilon)\beta(\varepsilon)]$$

und $EZ\beta_*(\varepsilon)\in\tilde{V}_1$ gilt

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{V}_1}(Z\beta_*(\varepsilon))=EZ\beta_*(\varepsilon).$$

Andererseits hat man mit $\bar{h}(\varepsilon):=E(h(X,Y)|\varepsilon)$

$$E[h(X,Y)\beta(\varepsilon)]=E[\bar{h}(\varepsilon)\beta(\varepsilon)].$$

Da $E[\beta(\varepsilon)]$ und $E[\varepsilon\beta(\varepsilon)]$ nach Voraussetzung gleich Null sind, kann man in diesem Erwartungswert Vielfache von ε und Konstanten ergänzen, ohne den Wert des Erwartungswertes zu ändern. Damit es sich bei der entstehenden Zufallsvariable um die Projektion von $h(X,Y)$ auf $\tilde{V}_1$ handelt, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned}E[\bar{h}(\varepsilon)+c_1\varepsilon]+c_2 &= 0 \qquad \text{und}\\ E[\varepsilon(\bar{h}(\varepsilon)+c_1\varepsilon+c_2)] &= 0\end{aligned}$$

mit Konstanten c_1 und c_2 erfüllt sein. Aus der ersten Gleichung erhält man direkt $c_2=-E[\bar{h}(\varepsilon)]$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$E[\varepsilon\bar{h}(\varepsilon)]+c_1\sigma^2=0\Leftrightarrow c_1=E[\varepsilon\bar{h}(\varepsilon)]\frac{\varepsilon}{\sigma^2}.$$

Also ist die Projektion von $h(X,Y)$ auf $\tilde{V}_1$ gegeben durch

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{V}_1}(h(X,Y))=\bar{h}(\varepsilon)-E[\bar{h}(\varepsilon)]-E[\varepsilon\bar{h}(\varepsilon)]\frac{\varepsilon}{\sigma^2}.$$

Gleichsetzen liefert daher

$$\beta_*(\varepsilon)=\frac{1}{EZ}\big(\bar{h}(\varepsilon)-E[\bar{h}(\varepsilon)]-\sigma^{-2}E[\varepsilon\bar{h}(\varepsilon)]\varepsilon\big).$$

Zur Bestimmung von $s_*(X)$ rechnet man

$$\begin{aligned}&E[Z(\xi(s_*)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)\varepsilon)(\xi(s)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)]\\=&E[Z\xi(s_*)\ell(\varepsilon)\xi(s)\ell(\varepsilon)]+E[Z\xi(s_*)]\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)E[\ell(\varepsilon)\varepsilon]\\&+E[Z\xi(s)]\sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)E[\varepsilon\ell(\varepsilon)]+\sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)E(s(X)|Z=1)EZ\\=&E[\pi(X)\xi(s_*)\xi(s)]J+\sigma^{-2}EZE(s_*(X)|Z=1)E(s(X)|Z=1)\\=&E[\pi(X)s_*(X)\xi(s)]J+\sigma^{-2}EZE(s_*(X)|Z=1)E(s(X)|Z=1).\end{aligned}$$

Nach obiger Gleichung muss dies für alle $s\in L_2(G)$ mit

$$\begin{aligned}&E[h(X,Y)(\xi(s)\ell(\varepsilon)+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)\varepsilon)]\\=&E[h(X,Y)\xi(s)\ell(\varepsilon)]+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)E[h(X,Y)\varepsilon]\\=&E[E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)\xi(s)]+\sigma^{-2}E(s(X)|Z=1)E[h(X,Y)\varepsilon]\end{aligned}$$

übereinstimmen. Offensichtlich gilt

$$E[E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)\xi(s)] = E\Big[\pi(X)\frac{1}{J\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)\xi(s)\Big]J$$

und

$$\begin{aligned} E\Big[\frac{1}{J^2\pi^2(X)}(E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X))^2\Big] &\leq \frac{1}{J^2c_\pi^2}E[E(h^2(X,Y)|X)E(\ell^2(\varepsilon)|X)] \\ &= \frac{1}{Jc_\pi^2}E[h^2(X,Y)] < \infty, \end{aligned}$$

sofern (B.π)(ii) aus Abschnitt 3.1 erfüllt und $E[h^2(X,Y)]$ endlich ist. Daher würden für $t(X) = \frac{1}{J\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)$ zumindest die jeweils ersten Erwartungswerte übereinstimmen. Wegen $E[\pi(X)\xi(s)] = E[Zs(X)] - EZE(s(X)|Z=1) = 0$ kann man $t(X)$ durch Addition einer Konstanten c so anpassen, dass außerdem gilt $EZE((t(X)+c)|Z=1) = E[h(X,Y)\varepsilon]$, ohne die Gleichheit der ersten Erwartungswerte zu verlieren. Man erhält

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{EZ}\big(EZE((t(X)+c)|Z=1)\big) - E(t(X)|Z=1) \\ &= \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\varepsilon] - \frac{1}{J}E\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)\Big|Z=1\Big) \\ &= \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\varepsilon] - \frac{1}{J\cdot EZ}E\Big[\frac{Z}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)\Big] \\ &= \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\varepsilon] - \frac{1}{J\cdot EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Für $s_*(X)$ ergibt sich also

$$s_*(X) = \frac{1}{J\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{1}{J\cdot EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)] + \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\varepsilon].$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \tilde{v}_*(X,Y) &= \beta_*(\varepsilon) + \sigma^{-2}E(s_*(X)|Z=1)\varepsilon + \xi(s_*)\ell(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{EZ}\big(\bar{h}(\varepsilon) - E[\bar{h}(\varepsilon)] - \sigma^{-2}E[\varepsilon\bar{h}(\varepsilon)]\varepsilon\big) + \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\varepsilon]\frac{\varepsilon}{\sigma^2} \\ &\quad + \frac{1}{J}\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{EZ}\big(\bar{h}(\varepsilon) - E[\bar{h}(\varepsilon)]\big) \\ &\quad + \frac{1}{J}\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon), \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Fasst man nun alle Teilergebnisse dieses Abschnittes zusammen, so erhält man den kanonischen Gradienten

$$\begin{aligned} g_*(X,ZY,Z) &= u_*(X) + Z\tilde{v}_*(X,Y) + (Z-\pi(X))w_*(X) \\ &= \chi(X) - E[\chi(X)] + \frac{Z}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon) - E[\bar{h}(\varepsilon)]) \\ &\quad + \frac{1}{J}\Big(\frac{Z}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{Z}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon). \end{aligned}$$

Definition 2.2. Ein Schätzer $\hat{\kappa}$ von κ heißt *regulär* mit *Limes* L, wenn L eine Zufallsvariable ist, so dass für alle $u \in L_{2,0}(G)$, $\tilde{v} \in V$ und $w \in L_2(G_\pi)$ gilt

$$n^{1/2}\big(\hat{\kappa} - \kappa(G_{nu}, Q_{n\tilde{v}}, \pi_{nw})\big) \Rightarrow L \quad \text{unter } P_{nu\tilde{v}w}.$$

Nach dem Faltungssatz von Hájek-Le Cam (vgl. z.B. [BKRW93]) ist der Limes L verteilt wie eine Summe aus einer normalverteilten Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz $E[g_*^2(X, ZY, Z)]$ und einer davon unabhängigen Zufallsvariable. Bezeichne N_{μ,σ^2} die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2.

Definition 2.3. Ein Schätzer $\hat{\kappa}$ von κ heißt *effizient*, wenn er regulär mit einer $N_{0,E[g_*^2(X,ZY,Z)]}$-verteilten Zufallsvariable als Limes ist.

Definition 2.4. Ein Schätzer $\hat{\kappa}$ von κ heißt *asymptotisch linear* mit *Einflussfunktion* $\psi \in L_{2,0}(P)$, wenn

$$n^{1/2}\big(\hat{\kappa} - \kappa(G, Q, \pi)\big) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, Z_i Y_i, Z_i) + o_p(1).$$

Aus dem Faltungssatz kann man folgern, dass ein Schätzer genau dann regulär und effizient ist, wenn er asymptotisch linear mit Einflussfunktion g_* ist. Diese Aussage ist auch in [BKRW93] zu finden. Daher genügt es, die Einflussfunktion eines asymptotisch linearen Schätzers für $E[h(X, Y)]$ auszurechnen und mit der effizienten Einflussfunktion g_* zu vergleichen, wenn man den Schätzer auf Effizienz untersuchen will.

Kapitel 3

Der fully imputed estimator

3.1 Voraussetzungen und Diskussion

Setze voraus, dass X eine Dichte p besitzt, und schreibe $\pi(X) := E(Z|X)$ und $g = \pi \cdot p$. Die Dichte p kann durch den Kernschätzer $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_b(x - X_i)$, die Funktion g durch

$$\hat{g}(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j k_b(x - X_j)$$

und die Funktion π durch $\hat{\pi}(x) = \frac{\hat{g}(x)}{\hat{p}(x)}$ geschätzt werden. Dabei ist die Funktion k ein sogenannter Kern, für den die Kurzschreibweise $k_b(x) = k(x/b)/b$ eingeführt wird. Im vorliegenden Modell ist nun wegen $E\varepsilon = 0$ die Regressionsfunktion r gleich $E(Y|X = .)$. Aus der Literatur (vgl. z.B. [HMSW04] und [WJ95]) ist bekannt, dass ein bedingter Erwartungswert durch den sog. Nadaraya-Watson Schätzer geschätzt werden kann. Auch in [Pra83] wird dieser Schätzer vorgestellt, auch wenn er dort nicht so genannt wird. Definiere also

$$\hat{r}_{ni} := \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} Z_j Y_j k_b(X_i - X_j)}{\hat{g}(X_i)}.$$

Um das Problem kleiner Nenner zu vermeiden, führe man für eine positive Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Notationen $g_{a_n}(x) := \max\{a_n, g(x)\}$, $\hat{g}_{a_n}(x) := \max\{a_n, \hat{g}(x)\}$, $\hat{\pi}_{a_n}(X_i) = \frac{\hat{g}_{a_n}(X_i)}{\hat{p}(X_i)}$,

$$\hat{r}_{ni}^{(a)} := \frac{\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} Z_j Y_j k_b(X_i - X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}$$

und $r_{a_n}(X_i) := \frac{r(X_i)g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}$ ein. Die Idee, eine derartige Nullfolge zu benutzen, entstammt [WR02]. In Analogie zum parametrischen Fall von [MSW06] schätze man $\chi(x) = E(h(X,Y)|X = x)$ durch

$$\hat{\chi}_{a_n}(X_i) := \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h(X_i, \hat{r}_{ni}^{(a)} + Y_j - \hat{r}_{nj}^{(a)})}{\bar{Z}_n}$$

mit $\bar{Z}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$ und definiere damit den „fully imputed estimator“

$$\hat{H} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\chi}_{a_n}(X_i).$$

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(B.p) (i) Die Dichte p besitze einen kompakten Träger.

(ii) p sei stetig differenzierbar mit beschränkter erster Ableitung. Die erste Ableitung erfülle zudem eine Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}$, d.h. es gebe positive Konstanten C'_p und $L_{p'}$ mit $|p'(x)| \leq C'_p$ und $|p'(x) - p'(y)| \leq L_{p'}|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Ferner sei p beschränkt durch eine Konstante C_p.

(B.Z) Der Erwartungswert EZ sei positiv.

(B.π) (i) π sei einmal stetig differenzierbar mit durch eine positive Konstante C'_π beschränkter erster Ableitung. Die erste Ableitung erfülle eine Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante $L_{\pi'}$.

(ii) π sei von 0 weg beschränkt durch eine positive Konstante c_π.

(B.f) Die Dichte $f > 0$ sei differenzierbar, so dass $\ell := -f'/f$ existiert. Ferner sei $J := E[\ell^2(\varepsilon)] \in (0, \infty)$.

(B.k) (i) $k \geq 0$ sei eine symmetrische und durch eine Konstante K beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Lebesgue-Maßes mit kompaktem Träger.

(ii) Es gelte $\int u^2 k(u) du < \infty$.

(iii) k sei Hölder-stetig auf $\mathbb{R}$ mit Exponent κ, d.h. $\exists L_k > 0 \forall u, v \in \mathbb{R} : |k(u) - k(v)| \leq L_k |u - v|^\kappa$.

(B.h) (i) Es gelte $E[h^2(X, Y)] < \infty$.

(ii) Die Funktion h sei einmal stetig partiell nach der zweiten Komponente differenzierbar. Bezeichne die erste partielle Ableitung nach der zweiten Komponente abkürzend als h_y. Ferner existiere eine Konstante $H_1 > 0$, so dass $|h_y(x, y)| \leq H_1$. Die Funktion h_y erfülle zudem folgende Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}^2$:
$\exists L'_h > 0 : |h_y(u_1, u_2) - h_y(v_1, v_2)| \leq L'_h \|u - v\|$ für alle $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ aus $\mathbb{R}^2$, wobei $\|.\|$ für die euklidische Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^2$ steht. Zudem gelte $E[h_y^2(X, Y)] < \infty$.

(iii) Die Funktion $x \mapsto E(h^2(X, Y)|X = x)$ sei beschränkt durch eine Konstante C_h.

(iv) Die Funktion h erfülle die Bedingung $h(x, r(x) + u) f(u)\big|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

(B.hε) (i) $E[h^2(X, Y)\varepsilon^2] < \infty$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto E(\varepsilon^2 h^2(X, Y)|X = x)$ sei beschränkt durch eine Konstante C_ε.

(B.hℓ) (i) $E[h^2(X, Y)\ell^2(\varepsilon)] < \infty$ und $E[h^2(X, Y)\ell^2(\varepsilon) r^2(X)] < \infty$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto E(\ell^2(\varepsilon) h^2(X, Y)|X = x)$ sei beschränkt durch eine Konstante C_ℓ.

(B.h$\ell\varepsilon$) (i) $E[h^2(X, Y)\ell^2(\varepsilon)\varepsilon^2] < \infty$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto E(h^2(X, Y)\ell^2(\varepsilon)\varepsilon^2|X = x)$ sei beschränkt durch eine Konstante $C_{\ell,\varepsilon}$.

(B.b) (i) $\frac{nb^2}{(\log n)^2} \to \infty$ für $n \to \infty$.

(ii) nb^3 ist beschränkt.

(B.a) (i) $nb^{5/2} a_n^{5/2} \to \infty$ für $n \to \infty$.

(ii) $n \frac{b^4}{a_n^2} \to 0$ für $n \to \infty$.

(iii) $nb^2 a_n^4 \to \infty$ für $n \to \infty$.

(iv) $\frac{n^{2/5} b a_n^2}{\log n} \to \infty$ für $n \to \infty$.

(B.r) (i) Die Funktion r sei einmal stetig differenzierbar mit beschränkter erster Ableitung, d.h. es existiere eine Konstante $C_r > 0$ mit $|r'(x)| \leq C_r$. Zudem sei die erste Ableitung Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L_{r'}$.

(ii) $E[r^2(X)]$ sei endlich.

(B.agr) $n^{1/2}E[|r(X_1)|1_{\{g(X_1)<2a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $n^{3/5}E[r^2(X_1)1_{\{g(X_1)<2a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(B.aghr) $n^{1/2}E[|h_y(X,Y)||r(X)|1_{\{g(X)<2a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Eine Diskussion dieser Bedingungen erfolgt nun in

Bemerkung 3.1. a) Statt wie in [Sch07] die zweimalige stetige Differenzierbarkeit und die Beschränktheit der zweiten Ableitung zu fordern, setze ich in (B.p)(ii) und (B.π)(i) wie in [Mue09] nur stetige Differenzierbarkeit mit Lipschitz-stetiger erster Ableitung voraus. Aus der Beschränktheit der ersten Ableitung folgt die Lipschitz-Stetigkeit von π mit Lipschitz-Konstante C'_π. Die Kompaktheit des Trägers wird gebraucht, um Korollar 4.2 aus [MSW07] anwenden zu können.

b) Die Positivität von EZ ist notwendig, da in der effizienten Einflußfunktion EZ im Nenner vorkommt.

c) Die ersten beiden Teile von Bedingung (B.k) werden häufig vorausgesetzt. Die Hölder-Stetigkeit wird nur benötigt, um die Aussagen

$$a_n^{-1} \max_{1\leq i\leq n} |\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)| = o_p(n^{-1/4})$$

und

$$a_n^{-1} \max_{1\leq i\leq n} |\hat{p}(X_i) - p(X_i)| = o_p(n^{-1/4})$$

mit Hilfe von Korollar 4.2 aus [MSW07] zu beweisen.

d) Der erste Teil der Bedingung (B.h) ist kanonisch. Aufgrund des zweiten Teils kann h nicht als Indikatorfunktion gewählt werden. Die direkte Schätzung der Verteilungsfunktion von Y ist also nicht möglich.
Bedingung (B.h)(ii) ist z.B. erfüllt für die Funktion $h : (x, y) \mapsto y$.
Da nach (B.p)(i) p einen kompakten Träger besitzt, ist (B.h)(iii) schon dann erfüllt, wenn die Funktion $x \mapsto E(h^2(X_j, Y_j)|X_j = x)$ stetig ist. Hieraus folgt schon (B.h)(i). Dennoch gebe ich beide Bedingungen an, um zu unterscheiden, wann die stärkere Bedingung (B.h)(iii) benötigt wird.
Wegen der Äquivalenz der Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ kann anstelle der euklidischen Norm auch jede andere Norm auf $\mathbb{R}^2$ verwendet werden.

e) Aufgrund von (B.p)(i) ist (B.hε)(ii) schon erfüllt, wenn die Funktion $x \mapsto E(\varepsilon^2 h^2(X, Y)|X = x)$ stetig ist. Obwohl aus (B.hε)(ii) die Bedingung (B.hε)(i) folgt, gebe ich beide an, um zu verdeutlichen, wo die stärkere Bedingung (B.hε)(ii) benötigt wird. Gleiches gilt für (B.hℓ) mit $\ell(\varepsilon)$ statt ε und für (B.$\ell\varepsilon$) mit $\ell(\varepsilon)\varepsilon$ statt ε.

f) Beispielsweise erfüllt $b = n^{-1/3}$ die Bedingung (B.b).

g) Aus (B.a)(ii) folgt $nb^4 \to 0$ für $n \to \infty$. Durch Division von (B.a)(ii) und (B.a)(i) erhält man $\frac{b^{3/2}}{a_n^{9/2}} \to 0$. Die Folge b konvergiert also schneller gegen Null als die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

h) Bedingungen (B.agr) und (B.aghr) rühren daher, dass man die „Abschneidetechnik“ aus [WR02] benutzt. Der zweite Teil von (B.agr) enthält dabei eine schärfere Rate als üblich, weil sich dies in Proposition 3.6 als nützlich erweisen wird.

i) Aus (B.r)(i) folgt, dass r Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit einer positiven Lipschitz-Konstante L_r ist. Nach (B.p)(i) ist (B.r)(ii) also schon automatisch erfüllt. Dennoch gebe ich beide Bedingungen an.

Hieran möchte ich noch eine generelle Bemerkung anschließen.

Bemerkung 3.2. An manchen Stellen dieser Arbeit verwende ich das schwache Gesetz der großen Zahlen, obwohl die Existenz eines zweiten Moments nicht gesichert ist. In solchen Fällen verstehe ich unter dem schwachen Gesetz der großen Zahlen dasjenige, das aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für integrierbare Zufallsvariablen folgt. Dieses wiederum ist in diversen Lehrbüchern, wie z.B. in [Dur05] oder [AD-D00], zu finden. Ein eleganter Beweis lässt sich mit Hilfe der Aussagen über Rückwärtsmartingale führen (vgl. die soeben genannten Bücher).

3.2 Abkürzungen und Hilfsaussagen

In diesem Abschnitt sollen Abkürzungen definiert und Aussagen zusammengefasst werden, die im folgenden Abschnitt 3.3 verwendet werden. So lassen sich aus den Bedingungen an p und π Aussagen über $g = p \cdot \pi$ gewinnen, die im folgenden Lemma zusammengestellt sind.

Lemma 3.1. *Wegen (B.p) und (B.π) besitzt auch g eine beschränkte erste Ableitung. Daher ist g Lipschitz-stetig mit einer positiven Lipschitz-Konstante L_g. Ferner ist auch g' Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $L_{g'}$.*

Beweis. Es gilt

$$|g'(x)| = |p'(x)\pi(x) + p(x)\pi'(x)| \le |p'(x)| + |p(x)||\pi'(x)| \le C'_p + C_p C'_\pi.$$

Die Lipschitz-Stetigkeit folgt dann aus dem Mittelwertsatz. Zudem hat man nach (B.p) und (B.π)

$$\begin{aligned}
|g'(x) - g'(y)| &= |p'(x)\pi(x) + p(x)\pi'(x) - p'(y)\pi(y) - p(y)\pi'(y)| \\
&= |(p'(x) - p'(y))\pi(x) + p(x)(\pi'(x) - \pi'(y)) \\
&\quad + p'(y)(\pi(x) - \pi(y)) + \pi'(y)(p(x) - p(y))| \\
&\le |p'(x) - p'(y)| + |p(x)| \cdot |\pi'(x) - \pi'(y)| \\
&\quad + |p'(y)| \cdot |\pi(x) - \pi(y)| + |\pi'(y)| \cdot |p(x) - p(y)| \\
&\le L_{p'}|x-y| + C_p L_\pi |x-y| + C'_p C'_\pi |x-y| + C'_\pi C'_p |x-y| \\
&= (L_{p'} + C_p L_\pi + 2C'_p C'_\pi)|x-y|,
\end{aligned}$$

also die behauptete Lipschitz-Stetigkeit mit $L_{g'} := L_{p'} + C_p L_\pi + 2C'_p C'_\pi$. □

Grundlegend ist auch die Aussage

Lemma 3.2. *Für reelle Zahlen a_j, $j = 1, \ldots, k$, gilt die Ungleichung*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 \leq k \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Hölder-Ungleichung für Summen, denn mit dieser gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |1 \cdot a_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k} 1 \sum_{j=1}^{k} a_j^2 = k \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

□

Führe nun die Notationen $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ und $\mathbf{Y}_{-j} = (Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$ ein. Definiere damit

$$\hat{r}_{nij}^{(a)} := E(\hat{r}_{ni}^{(a)} | \mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-j}, \mathbf{Z}).$$

Offensichtlich gilt nach Definition von $\hat{r}_{ni}^{(a)}$

$$\hat{r}_{nii}^{(a)} = \hat{r}_{ni}^{(a)}.$$

Nach einer Idee aus [MSW04] formuliere ich nun das folgende Lemma, das uns später noch gute Dienste leisten wird.

Lemma 3.3. *Wenn $E(T_n^2|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = o_p(1)$, dann auch $T_n = o_p(1)$. Wenn $E(T_n^2|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = O_p(1)$, dann auch $T_n = O_p(1)$.*

Beweis. Schreibe

$$\begin{aligned}
P(|T_n| > \eta) &= P(|T_n| > \eta, E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) + P(|T_n| > \eta, E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq c) \\
&\leq P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) + E[1_{\{|T_n| > \eta\}} 1_{\{E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq c\}}] \\
&\leq P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) + \frac{1}{\eta^2} E[T_n^2 1_{\{E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq c\}}] \\
&\leq P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) + \frac{1}{\eta^2} E[E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) 1_{\{E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq c\}}] \\
&\leq P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) + \frac{c}{\eta^2}.
\end{aligned}$$

Um den ersten Teil der Aussage zu beweisen, wähle man für jedes $\varrho, \eta > 0$ zunächst $c > 0$ so klein, dass $c/\eta^2 < \varrho/2$. Wegen der vorausgesetzten Konvergenz existiert zu dieser Konstante c ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ der Term $P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c)$ kleiner als $\varrho/2$ ist. Insgesamt folgt daraus die stochastische Konvergenz gegen Null. In der Situation des zweiten Teils der Aussage existiert aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit in Wahrscheinlichkeit zu jedem $\varrho > 0$ eine Konstante $c > 0$, so dass gilt $P(E(T_n^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) > c) < \varrho/2$. Wähle dann η so groß, dass c/η^2 kleiner als $\varrho/2$ ist. Damit folgt, dass T_n beschränkt in Wahrscheinlichkeit ist. □

Eine weitere Aussage bezieht sich auf das Supremum über den Betrag der Abweichung des Schätzers $\hat{g}_{a_n}$ von g_{a_n}.

Lemma 3.4. *Sind die Bedingungen (B.p), (B.π), (B.k) und (B.a) erfüllt, so gilt*

$$a_n^{-1} \sup_{1\leq i\leq n} |\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)| \leq a_n^{-1} \sup_{i\in\mathbb{N}} |\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)| = o_p(n^{-1/4})$$

und

$$a_n^{-1} \sup_{1\leq i\leq n} |\hat{g}(X_i) - g(X_i)| \leq a_n^{-1} \sup_{i\in\mathbb{N}} |\hat{g}(X_i) - g(X_i)| = o_p(n^{-1/4}).$$

Beweis. Die jeweils erste Ungleichung ist offensichtlich. Wegen

$$P(X_i \notin \{p > 0\}) = P(X_i \in \{p = 0\}) = \int_\Omega 1_{\{f=0\}}(X_i)dP = \int_{\{f=0\}} p(x)dx = 0$$

ist auch $\{\exists i \in \mathbb{N} : X_i \notin \{p > 0\}\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{X_i \notin \{p > 0\}\}$ eine P-Nullmenge. Daher gelten die Abschätzungen

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)| \leq \sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)| \quad P\text{-f.s.}$$

und

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\hat{g}(X_i) - g(X_i)| \leq \sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}(x) - g(x)| \quad P\text{-f.s.}$$

Wie in [Sch07] schätzt man weiter ab

$$\sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)| \leq 4 \cdot \sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}(x) - g(x)|,$$

indem man unter dem Supremum aufteilt

$$1 = 1_{\{g<a_n,\hat{g}<a_n\}}(x) + 1_{\{g<a_n,\hat{g}\geq a_n\}}(x) + 1_{\{g\geq a_n,\hat{g}<a_n\}}(x) + 1_{\{g\geq a_n,\hat{g}\geq a_n\}}(x)$$

und auf jeder dieser Mengen abschätzt. Es genügt also, die Aussage

$$a_n^{-1} \sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}(x) - g(x)| \stackrel{!}{=} o_p(n^{-1/4})$$

nachzuweisen.
Ergänze dazu $E[\hat{g}(x)] = E[Zk_b(x - X)]$. Das liefert

$$\sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in\{p>0\}} |\hat{g}(x) - E[Zk_b(x-X)]| + \sup_{x\in\{p>0\}} |E[Zk_b(x-X)] - g(x)|.$$

Betrachte zuerst den zweiten Summanden. Schreibt man den Erwartungswert als Integral und verwendet Lemma 3.1 und (B.k), so erhält man mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung für $x \in \{p > 0\}$

$$\begin{aligned}
&|E[Zk_b(x - X)] - g(x)| \\
=&\left|\int g(y)k_b(x - y)du - g(x)\right| = \left|\int (g(x - bu) - g(x))k(u)du\right| \\
\leq& b\left|g'(x)\int uk(u)du\right| + b\left|\int\int_0^1 (g'(x - sbu) - g'(x))ds(-u)k(u)du\right| \\
\leq& b\int\int_0^1 |g'(x - sbu) - g'(x)|ds|u|k(u)du \leq L_{g'}b^2 \int u^2k(u)du.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Lipschitz-Bedingung aus Lemma 3.1 angewendet. Mit (B.a)(ii) und (B.k) folgt also

$$a_n^{-1} \sup_{x \in \{p>0\}} |E[Zk_b(x-X)] - g(x)| \leq L_{g'} \frac{b^2}{a_n} \int u^2 k(u) du = o_p(n^{-1/2}).$$

Für den anderen Summanden ziehe man Korollar 4.2 aus [MSW07] heran. Analog zu besagtem Korollar zeigt man

$$\sup_{x \in \{p>0\}} |\hat{g}(x) - E[Zk_b(x-X)]| \leq \sup_{x \in \operatorname{supp} p} |\hat{g}(x) - E[Zk_b(x-X)]| = O_p\Big(\frac{(\log n)^{1/2}}{n^{1/2} b^{1/2}}\Big).$$

Wegen $n^{1/4} a_n^{-1} = \frac{(\log n)^{1/2}}{n^{1/4} b^{1/2} a_n} \frac{n^{1/2} b^{1/2}}{(\log n)^{1/2}}$ und (B.a)(iv) ergibt sich

$$a_n^{-1} \sup_{x \in \{p>0\}} |\hat{g}(x) - E[Zk_b(x-X)]| = o_p(n^{-1/4}).$$

Insgesamt folgt also die Behauptung. □

Abkürzend setze ich oft $\Delta_n(x) := \hat{g}(x) - g(x)$ und $\Delta_{a_n}(x) := \hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)$. Eine zu Lemma 3.4 analoge Aussage lässt sich auch für das Supremum über den Abstand von $\hat{p}_{a_n}$ und p_{a_n} formulieren:

Lemma 3.5. *Sind die Bedingungen (B.p), (B.k) und (B.a) erfüllt, dann gilt*

$$a_n^{-1} \sup_{1 \leq i \leq n} |\hat{p}_{a_n}(X_i) - p_{a_n}(X_i)| \leq a_n^{-1} \sup_{i \in \mathbb{N}} |\hat{p}_{a_n}(X_i) - p_{a_n}(X_i)| = o_p(n^{-1/4})$$

und

$$a_n^{-1} \sup_{1 \leq i \leq n} |\hat{p}(X_i) - p(X_i)| \leq a_n^{-1} \sup_{i \in \mathbb{N}} |\hat{p}(X_i) - p(X_i)| = o_p(n^{-1/4}).$$

Beweis. Setzt man 1 anstatt Z im Beweis von Lemma 3.4, so ergibt sich die Behauptung. □

Die soeben formulierten Lemmas finden ihre erste Anwendung in

Proposition 3.6. *Zusätzlich zu den angegebenen Voraussetzungen gelte*

$$E[|M(X)| r^2(X)] < \infty, E[M^2(X)] < \infty$$

und

$$E[|M(X)| r^2(X) 1_{\{g(X) < a_n\}}] = o(n^{-3/5})$$

für eine $\sigma(X)$-messbare Funktion $M(X)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |M(X_i)| (\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2 = o_p(n^{-3/5}).$$

Beweis. Mit den gleichen Argumenten wie in Lemma 3.3 erkennt man, dass es genügt,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |M(X_i)| E((\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = o_p(n^{-3/5})$$

nachzuweisen. Man rechnet

$$
\begin{aligned}
E((\hat{r}_{ni}^{(a)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} E\bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j Y_j k_b(X_i-X_j)\Big)^2 |\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&= \frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\bigg(\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i} Z_j E(Y_j^2|X_j) k_b^2(X_i-X_j) \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j,l:j\neq l\\ j\neq i, l\neq i}} Z_j Z_l k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)r(X_j)r(X_l)\bigg)
\end{aligned}
$$

und

$$
E(\hat{r}_{ni}^{(a)}|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j r(X_j) k_b(X_i-X_j).
$$

Da X und ε unabhängig sind, gilt

$$
\begin{aligned}
E(Y_j^2|X_j) &= r^2(X_j) + 2r(X_j)E(\varepsilon_j|X_j) + E(\varepsilon_j^2|X_j) = r^2(X_j) + 2r(X_j)E\varepsilon + E[\varepsilon^2] \\
&= r^2(X_j) + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Also erhält man

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |M(X_i)| E((\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |M(X_i)|\bigg(\frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j r(X_j)k_b(X_i-X_j) - r(X_i)\bigg)^2 \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}|M(X_i)|\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j).
\end{aligned}
$$

Den Betrag des zweiten Terms kann man mittels (B.k) und der Definition von $\hat{g}_{a_n}(X_i)$ abschätzen durch

$$
\begin{aligned}
\frac{K\sigma^2}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{|M(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j) &\leq \frac{K\sigma^2}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{|M(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}|\hat{g}(X_i)| \\
&\leq \frac{K\sigma^2}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |M(X_i)|.
\end{aligned}
$$

Nach den Voraussetzungen an $M(X)$ liefert das schwache Gesetz der großen Zahlen $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |M(X_i)| = E[|M(X)|] + o_p(1) = O_p(1)$. Nach (B.a)(i) gilt also

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}|M(X_i)|\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j) = o_p(n^{-3/5}).
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|E((\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|\Big(\frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)-r(X_i)\Big)^2+o_p(n^{-3/5})\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|\Big(\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\quad-\frac{\hat{g}_{a_n}(X_i)-g_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\quad-\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}r(X_i)+\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)r(X_i)\Big)^2+o_p(n^{-3/5})
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 3.2 und der Abkürzung $\Delta_{a_n}(x)=\hat{g}_{a_n}(x)-g_{a_n}(x)$ kann man den zuletzt erhaltenen Term abschätzen durch

$$
\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)-g(X_i)r(X_i)\Big)^2 \tag{3.2.1}
$$

$$
+\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)\Big)^2 \tag{3.2.2}
$$

$$
+\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2r^2(X_i)|M(X_i)|. \tag{3.2.3}
$$

Betrachte zunächst Term (3.2.3). Mittels der Voraussetzungen und der Markov-Ungleichung zeigt man

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{3/5}\Big|\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2r^2(X_i)|M(X_i)|\Big|>\eta\Big)\\
\leq&\frac{n^{3/5}}{\eta}E\Big[\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2r^2(X_i)|M(X_i)|\Big]\\
=&\frac{3n^{3/5}}{\eta}E\Big[\Big(\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)}-1\Big)^2r^2(X)|M(X_i)|1_{\{g(X)<a_n\}}\Big]\\
\leq&\frac{12n^{3/5}}{\eta}E[r^2(X)|M(X_i)|1_{\{g(X)<a_n\}}]\xrightarrow{n\to\infty}0.
\end{aligned}
$$

Untersuche nun den Term (3.2.1) auf stochastische Konvergenz. Lemma 3.2 liefert

$$
\begin{aligned}
&(3.2.1)\\
\leq&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)-E(Z_0r(X_0)k_b(X_i-X_0)|X_i)\Big)^2
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

$$
+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\big(E(Z_0r(X_0)k_b(X_i-X_0)|X_i)-g(X_i)r(X_i)\big)^2. \tag{3.2.5}
$$

(3.2.5) schreibe man zunächst als

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\big(E(Z_0 r(X_0)k_b(X_i-X_0)|X_i)-g(X_i)r(X_i)\big)^2\\
=&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\int(g(X_i+bu)r(X_i+bu)-g(X_i)r(X_i))k(u)du\Big)^2\\
=&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\int(g(X_i+bu)-g(X_i))(r(X_i+bu)-r(X_i))k(u)du+g(X_i)\\
&\cdot\int(r(X_i+bu)-r(X_i))k(u)du+r(X_i)\int(g(X_i+bu)-g(X_i))k(u)du\Big)^2.
\end{aligned}$$

Entwickelt man nun r und g um X_i, so kann man dies nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\big(E(Z_0 r(X_0)k_b(X_i-X_0)|X_i)-g(X_i)r(X_i)\big)^2\\
\leq&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\int|g(X_i+bu)-g(X_i)||r(X_i+bu)-r(X_i)|k(u)du\\
&+|g(X_i)|\Big|\int\Big(r'(X_i)bu+bu\int_0^1(r'(X_i+tbu)-r'(X_i))dt\Big)k(u)du\Big|\\
&+|r(X_i)|\Big|\int\Big(g'(X_i)bu+bu\int_0^1(g'(X_i+tbu)-g'(X_i))dt\Big)k(u)du\Big|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Verwende nun $\int uk(u)du=0$ und greife auf Lemma 3.1, Lemma 3.2, (B.r) und Bemerkung 3.1i) zurück. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\big(E(Z_0 r(X_0)k_b(X_i-X_0)|X_i)-g(X_i)r(X_i)\big)^2\\
\leq&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(L_gL_rb^2\int u^2k(u)du+L_{r'}|g(X_i)|b^2\int u^2k(u)du\\
&+|r(X_i)|\frac{L_{g'}}{2}b^2\int u^2k(u)du\Big)^2\\
\leq&18\Big(L_g^2L_r^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|+\frac{L_{g'}^2}{4}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r^2(X_i)|M(X_i)|\Big)\Big(\int u^2k(u)du\Big)^2\frac{b^4}{a_n^2}\\
&+18L_{r'}^2b^4\Big(\int u^2k(u)du\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|.
\end{aligned}$$

Beachte dabei, dass nach Definition gilt $\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\leq 1$. Wegen der Voraussetzungen folgt mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|M(X_i)|=E[|M(X)|]+o_p(1)=O_p(1)$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r^2(X_i)|M(X_i)|=E[r^2(X)|M(X)|]+o_p(1)=O_p(1).$$

Nach Bedingung (B.a)(ii) und Bemerkung 3.1g) hat man $\frac{b^4}{a_n^2} = o(n^{-1})$ und $b^4 = o(n^{-1})$. Daraus folgt

$$(3.2.5) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\big(E(Z_j r(X_j)k_b(X_i - X_j)|X_i) - g(X_i)r(X_i)\big)^2 = o_p(n^{-1}).$$

Es hätte auch gereicht, nur die Lipschitz-Stetigkeit von r auszunutzen. Dann wäre in einem Summanden der obigen Abschätzung nur ein b^2 vorgekommen. Wegen $n^{3/5}b^2 = \frac{nb^3}{n^{2/5}ba_n}a_n \to 0$ hätte man jedoch für (3.2.5) immerhin noch die Rate $o_p(n^{-3/5})$ erhalten.
Für (3.2.4) schätze man mit Lemma 3.2 ab

$$\begin{aligned}
&n^{3/5}E\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|M(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j r(X_j)k_b(X_i - X_j) - E(Z_0 r(X_0)k_b(X_i - X_0)|X_i)\Big)^2\Big]\\
=&n^{3/5}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}^2(X_1)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j>1}\big[Z_j r(X_j)k_b(X_1 - X_j) - E(Z_j r(X_j)k_b(X_1 - X_j)|X_1)\big]\\
&\quad - \frac{1}{n}E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1)\Big)^2\Big]\\
\le&2n^{-2/5}\frac{n-1}{n}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}^2(X_1)}(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2) - E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))^2\Big]\\
&+ 2n^{3/5}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}^2(X_1)}(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2) - E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))\\
&\cdot (Z_3 r(X_3)k_b(X_1 - X_3) - E(Z_3 r(X_3)k_b(X_1 - X_3)|X_1))\Big]\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\\
&+ 2\frac{n^{3/5}}{n^2}E\Big[\frac{(E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))^2}{g_{a_n}^2(X_1)}|M(X_1)|\Big].
\end{aligned}$$

Wegen Unabhängigkeit der X_i ist der vorletzte Term gleich Null.
Mit (B.a)(i) folgt für den letzten Term

$$\begin{aligned}
&n^{3/5}\frac{2}{n^2}E\Big[\frac{(E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))^2}{g_{a_n}^2(X_1)}|M(X_1)|\Big]\\
\le&2n^{-2/5}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}E[r^2(X_1)|M(X_1)|] \to 0.
\end{aligned}$$

Der erste Term kann abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n^{2/5}a_n}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}(Z_2 r(X_2)k_b(X_2 - X_1) - E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))^2\Big]\\
=&\frac{2}{n^{2/5}a_n}\Big(E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}Z_2 r^2(X_2)k_b^2(X_1 - X_2)\Big]\\
&\quad - E\Big[\frac{(E(Z_2 r(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1))^2}{g_{a_n}(X_1)}|M(X_1)|\Big]\Big)\\
\le&\frac{2K}{n^{2/5}ba_n}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}Z_2 r^2(X_2)k_b(X_1 - X_2)\Big]\\
=&\frac{2K}{n^{2/5}ba_n}\Big(E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}(E(Z_2 r^2(X_2)k_b(X_1 - X_2)|X_1) - g(X_1)r^2(X_1))\Big]\\
&+ 2E\Big[\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}r^2(X_1)|M(X_1)|\Big]\Big).
\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei (3.2.5) rechnet man mit $\int uk(u)du = 0$

$$
\begin{aligned}
&\Big|E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}(E(Z_2r^2(X_2)k_b(X_1-X_2)|X_1) - g(X_1)r^2(X_1))\Big]\Big| \\
\leq& E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big|\int(g(X_1+bu)r^2(X_1+bu) - g(X_1)r^2(X_1))k(u)du\Big|\Big] \\
=& E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big|\int(g(X_1+bu)(r(X_1+bu)-r(X_1))^2 + 2r(X_1)(r(X_1+bu)-r(X_1)) \\
&\cdot(g(X_1+bu)-g(X_1)) + r^2(X_1)(g(X_1+bu)-g(X_1)) \\
&+ 2r(X_1)g(X_1)(r(X_1+bu)-r(X_1)))k(u)du\Big|\Big] \\
\leq& E\Big[\frac{|M(X_1)|}{a_n}\int|g(X_1+bu)|(r(X_1+bu)-r(X_1))^2k(u)du \\
&+ 2\frac{|M(X_1)|}{a_n}|r(X_1)|\int|g(X_1+bu)-g(X_1)||r(X_1+bu)-r(X_1)|k(u)du \\
&+ \frac{r^2(X_1)}{a_n}|M(X_1)|\Big|\int\Big(g'(X_1)bu + bu\int_0^1(g'(X_1+tbu)-g'(X_1))dt\Big)k(u)du\Big| \\
&+ 2\frac{|r(X_1)|g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}|M(X_1)|\int|r(X_1+bu)-r(X_1)|k(u)du\Big] \\
\leq& C_pL_r^2E[|M(X_1)|]\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)du + 2L_gL_r\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)duE[|r(X_1)||M(X_1)|] \\
&+ \frac{L_{g'}}{2}\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)duE[r^2(X_1)|M(X_1)|] + 2L_rb\int|u|k(u)duE[|r(X_1)||M(X_1)|].
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Hölder-Ungleichung gilt nach Voraussetzung und (B.r)(ii)

$$E[|r(X_1)||M(X_1)|] \leq \big(E[M^2(X_1)]\big)^{1/2}\big(E[r^2(X_1)]\big)^{1/2} < \infty.$$

Mit (B.a) zeigt man

$$
\begin{aligned}
&C_pL_r^2E[|M(X_1)|]\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)du + 2L_gL_r\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)duE[|r(X_1)||M(X_1)|] \\
&+ \frac{L_{g'}}{2}\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)duE[r^2(X_1)|M(X_1)|] + 2L_rb\int|u|k(u)duE[|r(X_1)||M(X_1)|] \\
=& o(n^{-1/4}).
\end{aligned}
$$

Es wäre auch eine bessere Rate möglich gewesen, wenn man im Summanden mit $r(X_1+bu)-r(X_1)$ wie oben eine Taylor-Entwicklung gemacht und die in (B.r) vorausgesetzte Lipschitz-Stetigkeit von r' benutzt hätte. Dadurch hätte sich die Rate $o(n^{-1/2})$ ergeben. Da jedoch aufgrund des hier weggelassenen Vorfaktors nur $o(1)$ benötigt wird, habe ich den Spielraum nicht völlig ausgereizt, zumal sich für den im Folgenden behandelten Term keine bessere Rate erzielen lässt.
Wegen $E\Big[\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}r^2(X_1)|M(X_1)|\Big] \leq E[r^2(X_1)|M(X_1)|] < \infty$ folgt mit (B.a)(i) insgesamt

$$\frac{1}{n^{2/5}ba_n}E\Big[\frac{|M(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}(Z_2r(X_2)k_b(X_2-X_1) - E(Z_2r(X_2)k_b(X_1-X_2)|X_1))^2\Big] = o(1).$$

Daher ergibt sich (3.2.4) $= o_p(n^{-3/5})$. Mit (3.2.5) $= o_p(n^{-3/5})$ folgt schließlich (3.2.1) $= o_p(n^{-3/5})$.
In (3.2.2) ergänze man $g(X_i)r(X_i)$ und schätze mit Lemma 3.2 ab

$$\begin{aligned}
|(3.2.2)| &\leq \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}|M(X_i)| \\
&\quad \cdot\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j r(X_j)k_b(X_i-X_j) - g(X_i)r(X_i)\Big)^2 + g^2(X_i)r^2(X_i)\Big] \\
&\leq \frac{2}{a_n^2}\big(\max_{1\leq j\leq n}|\Delta_{a_n}(X_j)|\big)^2\Big[(3.2.1) + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g^2(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}r^2(X_i)|M(X_i)|\Big] \\
&\leq \frac{2}{a_n^2}\big(\max_{1\leq j\leq n}|\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)|\big)^2 \cdot \Big(|(3.2.1)| + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} r^2(X_i)|M(X_i)|\Big).
\end{aligned}$$

In Erweiterung der Aussage von Lemma 3.4 gilt

$$a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{g}_{a_n}(X_i) - g_{a_n}(X_i)| \leq a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)| = o_p(n^{-3/10}).$$

Mit Hilfe von Korollar 4.2 in [MSW07] zeigt man dafür zunächst

$$\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}(x) - E[\hat{g}(x)]| = O_p\Big(\Big(\frac{\log n}{nb}\Big)^{1/2}\Big).$$

Wegen (B.a)(iv) folgt daraus

$$a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}(x) - E[\hat{g}(x)]| = o_p(n^{-3/10}).$$

Nach dem Beweis von Lemma 3.4 gilt

$$a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|E[\hat{g}(x)] - g(x)| \leq \frac{b^2}{a_n}L_g'\int u^2k(u)du.$$

Wegen $n^{3/5}\frac{b^2}{a_n} = \frac{nb^3}{n^{2/5}ba_n} \to 0$ bedeutet dies aber

$$a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|E[\hat{g}(x)] - g(x)| = o_p(n^{-3/5}),$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{a_n}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}(x) - E[\hat{g}(x)]| + \frac{1}{a_n}\sup_{x\in\{p>0\}}|E[\hat{g}(x)] - g(x)| \\
&= o_p(n^{-3/10}).
\end{aligned}$$

Wie in [Sch07] folgt daraus

$$a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)| \leq a_n^{-1}\sup_{x\in\{p>0\}}|\hat{g}(x) - g(x)| = o_p(n^{-3/10}).$$

Ferner ist schon bekannt, dass (3.2.1) $= o_p(n^{-3/5})$. Aufgrund des schwachen Gesetzes der großen Zahlen ist zudem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^2(X_i)|M(X_i)|$ beschränkt in Wahrscheinlichkeit. Man erhält also

$$(3.2.2) \leq o_p(n^{-3/5}) \cdot (o_p(n^{-3/5}) + O_p(1)) = o_p(n^{-3/5}).$$

Somit ergibt sich die Behauptung. □

3.3 Die Einflussfunktion des Schätzers

In diesem Abschnitt berechne ich die Einflussfunktion des in Abschnitt 3.1 definierten Schätzers $\hat{H}$. Die Vorgehensweise ähnelt einerseits derjenigen aus Kapitel 3 von [MSW06] (vertieft durch [Sch07]) und andererseits dem ersten Fall aus [Sch07]. Ich betrachte diesen Schätzer, da er in manchen Fällen ein effizienter Schätzer für $E[h(X,Y)]$ ist (vgl. [Mue09] und die ersten drei Fälle aus [MSW06]). Leider wird sich herausstellen, dass er diesmal nicht effizient ist.

Proposition 3.7. *Unter den angegebenen Bedingungen gilt*

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h(X_i, \hat{r}_{ni}^{(a)} + Y_j - \hat{r}_{nj}^{(a)}) \\
&= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \\
&\quad + \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)\big) + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichheit ist klar nach Definition von $\hat{H}$. Schreibe nun den Schätzer als

$$\hat{H} = \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j + \hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)).$$

Eine Taylor-Entwicklung um $(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)$ mit Integralrestglied liefert

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \\
&\quad + \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) \\
&\quad + \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j \int_0^1 \big(h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j + t(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j))) \\
&\quad\quad - h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\big)dt \cdot (\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von h_y gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j \int_0^1 \big(h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j + t(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j))) \\
&\quad - h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\big)dt \cdot (\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j))\Big| \\
\le& \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j \int_0^1 \big|h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j + t(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j))) \\
&\quad - h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\big|dt \cdot |\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)| \\
\le& \frac{1}{\bar{Z}_n} L_{h_y} \int_0^1 t dt \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)\big)^2 \le L_{h_y}\frac{2}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2.
\end{aligned}$$

Aufgrund des schwachen Gesetztes der großen Zahlen konvergiert $(\bar{Z}_n)^{-1}$ stochastisch gegen $\frac{1}{EZ}$, also gilt $(\bar{Z}_n)^{-1} = O_p(1)$. Nach Proposition 3.6 mit $M(X_1) = 1$ hat man außerdem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2 = o_p(n^{-3/5})$. Daher folgt

$$\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j \int_0^1 \big(h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j + t(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j))) \\ - h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\big)dt \cdot (\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) = o_p(n^{-1/2})$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \\ &\quad + \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

□

Mittels einer Hoeffding-Zerlegung des ersten Terms analog zu [Sch07] erhält man

$$\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \chi(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon_j) - E[\bar{h}(\varepsilon)]) + o_p(n^{-1/2})$$

mit $\bar{h}(\varepsilon) = E(h(X, Y)|\varepsilon)$. Hieraus liest man schon einen Beitrag zur Einflussfunktion von $\hat{H}$ ab. Dieser Teil der Einflussfunktion kommt auch im kanonischen Gradienten vor, der in Abschnitt 2 berechnet wurde. Es bleibt noch der Beitrag des zweiten Terms zur Einflussfunktion zu bestimmen.

Proposition 3.8. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) \\ = &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\Big(\frac{1}{\pi(X_j)}E(h(X_j, Y_j)\ell(\varepsilon_j)|X_j) - \frac{1}{EZ}E[h(X, Y)\ell(\varepsilon)]\Big) + o_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Beweis. Ergänze den entsprechenden Term mit $\frac{1}{EZ}$. Die Differenz lässt sich mit der Hölder-Ungleichung für Summen betraglich abschätzen durch

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{1}{\bar{Z}_n} - \frac{1}{EZ}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j|h_y(X_i, r(X_i), \varepsilon_j)|(|\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)| + |\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)|) \\ \leq &\Big|\frac{1}{\bar{Z}_n} - \frac{1}{EZ}\Big|\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\Big)^{1/2} \\ &\cdot\bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2\Big)^{1/2} + \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j))^2\Big)^{1/2}\bigg) \\ = &\Big|\frac{1}{\bar{Z}_n} - \frac{1}{EZ}\Big|\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\Big)^{1/2} 2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat{r}_{ni}^{(a)}(X_i) - r(X_i))^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 3.6 mit $M(X_1) = 1$ gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))^2 = o_p(n^{-3/5})$. Das schwache Gesetz der großen Zahlen und der Zentrale Grenzwertsatz liefern ferner $\bar{Z}_n^{-1} - (EZ)^{-1} = O_p(n^{-1/2})$. Aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt außerdem

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) &\xrightarrow{P} E[h_y^2(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)] = E[h_y^2(X_1, r(X_1) + \varepsilon_1)] \\ &= E[h_y^2(X_1, Y_1)] < \infty.\end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$\Big(\frac{1}{\bar{Z}_n} - \frac{1}{EZ}\Big)\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i), \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) = o_p(n^{-1/2}),$$

also

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) \\ =&\frac{1}{EZ}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i) - \hat{r}_{nj}^{(a)} + r(X_j)) + o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Betrachte zunächst

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)).$$

Mit den Abkürzungen $\Delta_n(x) = \hat{g}(x) - g(x)$ und $\Delta_{a_n}(x) = \hat{g}_{a_n}(x) - g_{a_n}(x)$ lässt sich der Term wie in [WR02] und [Sch07] schreiben als

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)) \\ =&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_j)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq j}^n Z_l(Y_l - r(X_l))k_b(X_j - X_l) \\ &+ \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_j)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq j}^n Z_l(r(X_l) - r(X_j))k_b(X_j - X_l) \\ &+ \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)r(X_j)\Big(\frac{\Delta_n(X_j)}{g_{a_n}(X_j)} - \frac{g(X_j)\Delta_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}\Big) \\ &- \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\frac{(\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j) - r(X_j)g(X_j))\Delta_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)} \\ &+ \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\frac{\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j)\Delta_{a_n}^2(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)} \\ &- \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)r(X_j)\frac{1}{n}\frac{Z_j k_b(0)}{g_{a_n}(X_j)} \\ &+ \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)\Big(\frac{r(X_j)g(X_j)}{g_{a_n}(X_j)} - r(X_j)\Big) =: \sum_{\nu=1}^7 A_\nu^{(n)}.\end{aligned}$$

Im Vergleich zu den oben angegebenen Arbeiten kommt der Term $A_6^{(n)}$ neu hinzu, da bei der Summation im Zähler von $\hat{r}_{nj}^{(a)}$ der j-te Term ausgelassen wird. Den Betrag von $A_6^{(n)}$ kann man direkt mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen abschätzen durch

$$\begin{aligned}
|A_6^{(n)}| &\leq \frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)| \\
&\leq \frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r^2(X_j)\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{K}{nba_n}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r^2(X_j)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aufgrund des schwachen Gesetzes der großen Zahlen ist $\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r^2(X_j)\big)^{1/2}$ gleich $O_p(1)$. Mit der Chebyshev-Ungleichung zeigt man

$$\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2} = O_p(1).$$

Nach (B.a) gilt zudem $\frac{K}{nba_n} = o(n^{-1/2})$. Daher folgt $A_6^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Für $A_7^{(n)}$ rechnet man

$$\begin{aligned}
& P(n^{1/2}|A_7^{(n)}| > \varrho) \\
\leq\ & \frac{n^{1/2}}{\varrho}E\Big[\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)|\Big|\frac{g(X_j)}{g_{a_n}(X_j)}-1\Big|\Big] \\
=\ & \frac{n^{1/2}}{\varrho}\frac{n-1}{n}E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_2)|\Big|\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}-1\Big|1_{\{g(X_2)<a_n\}}\Big] \\
& +\frac{n^{1/2}}{\varrho}\frac{1}{n}E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_1)||r(X_1)|\Big|\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}-1\Big|\Big] \\
\leq\ & \frac{2}{\varrho}n^{1/2}E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|]E[|r(X_2)|1_{\{g(X_2)<a_n\}}] \\
& +\frac{2}{\varrho}n^{-1/2}E[|h_y(X_1, Y_1)||r(X_1)|] \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Methoden wie in [Sch07] bzw. [WR02] zeigt man außerdem

$$\sum_{\nu=2}^{5}A_\nu^{(n)} = o_p(n^{-1/2}).$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Beweis dieser Aussage in Proposition A.6 im Anhang nachgeholt. Interessant ist der Term $A_1^{(n)}$, da dieser einen Beitrag liefert, der nicht von der Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ ist. Forme also wie folgt um

$$\begin{aligned}
A_1^{(n)} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_j)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq j}^{n} Z_l\varepsilon_l k_b(X_j - X_l) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j - X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j - X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&\quad - \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(z - X_l)}{g_{a_n}(z)} p(x)p(z)f(u)dxdzdu\Big) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(z - X_l)}{g_{a_n}(z)} p(x)p(z)f(u)dxdzdu.
\end{aligned}$$

Im Anhang werde ich in Lemma A.7 nachweisen, dass gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j - X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&- \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(z - X_l)}{g_{a_n}(z)} p(x)p(z)f(u)dxdzdu\Big) = o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Für den verbleibenden Term ergibt sich aufgrund von (B.h)(iv) mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(z - X_l)}{g_{a_n}(z)} p(x)p(z)f(u)dxdzdu \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int g(z)\frac{k_b(z - X_l)}{g_{a_n}(z)}dz \iint h_y(x, r(x)+u)p(x)f(u)dxdu \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z - X_l)dz\Big(\int (h(x, r(x)+u)f(u))\big|_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \\
&- \iint h(x, r(x)+u)p(x)f'(u)dxdu\Big) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z - X_l)dz \iint h(x, r(x)+u)\ell(u)p(x)f(u)dxdu \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z - X_l)dz E[h(X, r(X)+\varepsilon)\ell(\varepsilon)] \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \Big(\int k_b(z - X_l)dz + \int \frac{g(z)-g_{a_n}(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z - X_l)dz\Big)E[h(X, Y)\ell(\varepsilon)] \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l E[h(X, Y)\ell(\varepsilon)] + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)-g_{a_n}(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z - X_l)dz E[h(X, Y)\ell(\varepsilon)].
\end{aligned}$$

Der erste Term liefert den erwarteten Beitrag. Es bleibt zu zeigen, dass der zweite Term gleich $o_p(n^{-1/2})$ ist. Beachte dabei, dass X und Z unabhängig von ε sind. Man erhält

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)-g_{a_n}(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z-X_l)dz\Big| > \varrho\Big)\\
\leq&\frac{n}{\varrho^2}E\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)-g_{a_n}(z)}{g_{a_n}(z)}k_b(z-X_l)dz\Big)^2\Big]\\
=&\frac{1}{\varrho^2}E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big]\\
&+\frac{n-1}{\varrho^2}E\Big[Z_1\varepsilon_1\int \frac{g(X_1+bu)-g_{a_n}(X_1+bu)}{g_{a_n}(X_1+bu)}k(u)du\\
&\quad\cdot Z_2\varepsilon_2\int \frac{g(X_2+bu)-g_{a_n}(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}k(u)du\Big]\\
=&\frac{1}{\varrho^2}\sigma^2E\Big[Z\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big]\\
&+\frac{n-1}{\varrho^2}\Big(E[\varepsilon]E\Big[Z\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}\Big]\Big)^2\\
\leq&\frac{1}{\varrho^2}\sigma^2E\Big[\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big].
\end{aligned}
$$

Verwende nun die Darstellung

$$\frac{1}{g_{a_n}(y)} = \frac{1}{g_{a_n}(x)} + \frac{g_{a_n}(x)-g_{a_n}(y)}{g_{a_n}(x)g_{a_n}(y)}.$$

Zudem ist g nach Lemma 3.1 Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante L_g. Aus [Sch07] entnimmt man, dass dann auch g_{a_n} Lipschitz-stetig ist mit der gleichen Lipschitz-Konstante L_g. Hiermit folgt

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big]\\
=&E\Big[\Big(\int \frac{g(X+bu)-g(X)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du + (g(X)-g_{a_n}(X))\int \frac{1}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\\
&+\int \frac{g_{a_n}(X)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big]\\
\leq&E\Big[\Big(2L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du + 1_{\{g(X)<a_n\}}\frac{|g(X)-g_{a_n}(X)|}{g_{a_n}(X)}\Big|\int k(u)du\Big|\\
&+|g(X)-g_{a_n}(X)|\Big|\int \frac{g_{a_n}(X)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X)g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big|\Big)^2\Big]\\
\leq&E\Big[\Big(2L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du + 2\cdot 1_{\{g(X)<a_n\}} + 2L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du\Big)^2\Big]\\
=&E\Big[\Big(4L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du + 2\cdot 1_{\{g(X)<a_n\}}\Big)^2\Big]\\
=&16L_g^2\frac{b^2}{a_n^2}\Big(\int |u|k(u)du\Big)^2 + 4E[1_{\{g(X)<a_n\}}] + 16L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)duE[1_{\{g(X)<a_n\}}]\\
\leq&16L_g^2\frac{b^2}{a_n^2}\int u^2k(u)du + 4P(g(X)<a_n) + 16L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du.
\end{aligned}
$$

Wegen (B.a) konvergieren der erste und der letzte Term gegen Null. Wie in [Sch07] erläutert, konvergiert außerdem $P(g(X) < a_n)$ gegen Null. Also ergibt sich

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \frac{g(z)-g_{a_n}(z)}{g_{a_n}(z)} k_b(z-X_l)dz = o_p(n^{-1/2}).$$

Insgesamt erhält man demnach

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)] + o_p(n^{-1/2}).$$

Betrachte nun

$$\frac{1}{EZ}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)).$$

Mit $\Delta_n(x)$ und $\Delta_{a_n}(x)$ wie oben erhält man analog zu [WR02] und [Sch07] die Darstellung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i))\\
=&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{n} Z_l(Y_l - r(X_l))k_b(X_i - X_l)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_Y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{n} Z_l(r(X_l) - r(X_i))k_b(X_i - X_l)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big(\frac{r(X_i)\Delta_n(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - \frac{r(X_i)g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big)\\
&-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{(\hat{r}(X_i)\hat{g}(X_i) - r(X_i)g(X_i))\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{\hat{r}(X_i)\hat{g}(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)r(X_i)\frac{1}{n}\frac{Z_i k_b(0)}{g_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big(\frac{r(X_i)g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - r(X_i)\Big) =: \sum_{\nu=1}^{7} B_\nu^{(n)}.
\end{aligned}$$

Wie oben folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
|B_6^{(n)}| &\leq \frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)|\\
&\leq \frac{K}{nba_n}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^2(X_i)\Big)^{1/2} = o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Für $B_7^{(n)}$ rechnet man

$$
\begin{aligned}
& P(n^{1/2}|B_7^{(n)}| > \varrho) \\
\leq\ & \frac{n^{1/2}}{\varrho} E\Big[\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)|\Big|\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big|\Big] \\
=\ & \frac{n^{1/2}}{\varrho}\frac{n-1}{n} E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_1)|\Big|\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} - 1\Big| 1_{\{g(X_1)<a_n\}}\Big] \\
& + \frac{n^{1/2}}{\varrho}\frac{1}{n} E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_1)||r(X_1)|\Big|\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} - 1\Big|\Big] \\
\leq\ & \frac{2}{\varrho} n^{1/2} E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_1)| 1_{\{g(X_1)<a_n\}}] \\
& + \frac{2}{\varrho} n^{-1/2} E[|h_y(X_1, Y_1)||r(X_1)|] \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie in [Sch07] bzw. [WR02] kann man zeigen

$$\sum_{\nu=2}^{5} B_\nu^{(n)} = o_p(n^{-1/2}).$$

Um die Übersichtlichkeit nicht allzu sehr zu beeinträchtigen, beweise ich diese Aussage erst in Proposition A.8 im Anhang. Lediglich den interessanten Term $B_1^{(n)}$ möchte ich hier untersuchen. Diesen ergänze man durch

$$\iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u) \frac{k_b(x - X_l)}{g_{a_n}(x)} p(x)p(z)f(u)\,dx\,dz\,du.$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
B_1^{(n)} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{n} Z_l(Y_l - r(X_l))k_b(X_i - X_l) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i - X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i - X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&\quad - \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(x - X_l)}{g_{a_n}(x)} p(x)p(z)f(u)\,dx\,dz\,du\Big) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(x - X_l)}{g_{a_n}(x)} p(x)p(z)f(u)\,dx\,dz\,du.
\end{aligned}
$$

Auch den Beweis für die Aussage

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i - X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
& - \iiint \pi(z) h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(x - X_l)}{g_{a_n}(x)} p(x)p(z)f(u)\,dx\,dz\,du\Big) = o_p(n^{-1/2})
\end{aligned}
$$

werde ich erst in Lemma A.9 im Anhang ausführen. Den verbleibenden Term forme man wie folgt um

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iiint \pi(z)h_y(x,r(x)+u)\frac{k_b(x-X_l)}{g_{a_n}(x)}p(x)p(z)f(u)dxdzdu\\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \int \pi(z)p(z)dz \iint h_y(x,r(x)+u)\frac{g(x)}{g_{a_n}(x)\pi(x)}k_b(x-X_l)f(u)dxdu\\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l EZ \iint h_y(x,r(x)+u)\frac{g(x)-g_{a_n}(x)}{g_{a_n}(x)\pi(x)}k_b(x-X_l)f(u)dxdu \qquad (3.3.1)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l EZ \iint \frac{h_y(x,r(x)+u)}{\pi(x)}k_b(x-X_l)f(u)dxdu. \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

Aus dem Term (3.3.2)$/EZ$ ergibt sich durch Substitution und Ergänzen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iint \frac{h_y(x,r(x)+u)}{\pi(x)}k_b(x-X_l)f(u)dxdu\\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iint \frac{h_y(X_l,r(X_l)+u)}{\pi(X_l)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.3)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iint h_y(X_l,r(X_l)+u)\frac{\pi(X_l)-\pi(X_l+bv)}{\pi(X_l)\pi(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.4)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l \iint \frac{h_y(X_l+bv,r(X_l+bv)+u)-h_y(X_l,r(X_l)+u)}{\pi(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu. \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
&n\cdot E\big[\big((3.3.4)+(3.3.5)\big)^2\big]\\
=&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\iint h_y(X,r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\\
&\quad+\iint \frac{h_y(X+bv,r(X+bv)+u)-h_y(X,r(X)+u)}{\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
&+(n-1)E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\iint h_y(X_1,r(X_1)+u)\frac{\pi(X_1)-\pi(X_1+bv)}{\pi(X_1)\pi(X_1+bv)}k(v)f(u)dvdu\\
&\quad+\iint \frac{h_y(X_1+bv,r(X_1+bv)+u)-h_y(X_1,r(X_1)+u)}{\pi(X_1+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)\\
&\quad\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\iint h_y(X_2,r(X_2)+u)\frac{\pi(X_2)-\pi(X_2+bv)}{\pi(X_2)\pi(X_2+bv)}k(v)f(u)dvdu\\
&\quad+\iint \frac{h_y(X_2+bv,r(X_2+bv)+u)-h_y(X_2,r(X_2)+u)}{\pi(X_2+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Wie in [Sch07] zeigt man mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass die Integrale

$$\iint h_y(X_1,r(X_1)+u)\frac{\pi(X_1)-\pi(X_1+bv)}{\pi(X_1)\pi(X_1+bv)}k(v)f(u)dvdu$$

und

$$\iint \frac{h_y(X_1+bv, r(X_1+bv)+u) - h_y(X_1, r(X_1)+u)}{\pi(X_1+bv)} k(v)f(u)dvdu$$

$\sigma(X_1)$-messbar sind. Da die Zufallsvektoren (X_i, Y_i, Z_i) unabhängig und identisch verteilt sind und ε unabhängig von X bzw. Z mit $E\varepsilon = 0$ ist, wird die gemischte Summe zu

$$\begin{aligned}
&(n-1)\Bigg(E\Big[Z\varepsilon\Big(\iint h_y(X, r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu \\
&\quad+\iint \frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u) - h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)\Big]\Bigg)^2 \\
=&(n-1)\Bigg(E\varepsilon\, E\Big[Z\Big(\iint h_y(X, r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu \\
&\quad+\iint \frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u) - h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)\Big]\Bigg)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Aus den gleichen Gründen lässt sich die erste Summe schreiben als

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 E\Big[Z\Big(\iint h_y(X, r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu \\
&\quad+\iint \frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u) - h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big].
\end{aligned}$$

Aufgrund von (B.h)(ii) und (B.r) bzw. Bemerkung i) kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
&|h_y((X+bv), r(X+bv)+u) - h_y(X, r(X)+u)| \\
\le& L_h'\|(X+bv, r(X+bv)+u)^\top - (X, r(X)+u)^\top\| \\
=& L_h'\|(bv, r(X+bv)-r(X))^\top\| = L_h'\sqrt{b^2v^2 + (r(X+bv)-r(X))^2} \\
\le& L_h'\sqrt{b^2v^2 + L_r^2 b^2 v^2} = L_h' b|v|\sqrt{1+L_r^2}.
\end{aligned}$$

Hiermit und mit (B.π) folgt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E\Big[Z\Big(\iint h_y(X, r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu \\
&\quad+\iint \frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u) - h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big] \\
\le& E\Big[\Big(b\frac{C_\pi'}{c_\pi^2}\int |h_y(X, r(X)+u)|f(u)du \int |v|k(v)dv + b\frac{L_h'}{c_\pi}\sqrt{1+L_r^2}\int |v|k(v)dv\Big)^2\Big] \\
\le& 2b^2\int v^2k(v)dv\Big(\frac{(C_\pi')^2}{c_\pi^4}E[h_y^2(X,Y)] + \frac{(L_h')^2}{c_\pi^2}(1+L_r^2)\Big).
\end{aligned}$$

Dies konvergiert aber gegen Null. Mit der Chebyshev-Ungleichung erhält man also (3.3.4) + (3.3.5) $= o_p(n^{-1/2})$.
Mit partieller Integration und (B.h)(iv) folgt außerdem

$$\begin{aligned}
\int h_y(X, r(X)+u)f(u)du &= h(X, r(X)+u)f(u)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int h(X, r(X)+u)f'(u)du \\
&= \int h(X, r(X)+u)\ell(u)f(u)du = E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X).
\end{aligned}$$

Für den Term (3.3.3) ergibt sich also

$$\begin{aligned}
(3.3.3) &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{Z_l}{\pi(X_l)}\varepsilon_l\int h_y(X_l, r(X_l)+u)f(u)du\int k(v)dv\\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{Z_l}{\pi(X_l)}\varepsilon_l E(h(X_l, r(X_l)+\varepsilon_l)\ell(\varepsilon_l)|X_l).
\end{aligned}$$

Substituieren und Ergänzen liefern für (3.3.1)$/EZ$ ähnlich wie für den Term $A_1^{(n)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint\frac{h_y(X_l+bv, r(X_l+bv)+u)}{\pi(X_l+bv)}\\
&\qquad\cdot\frac{g(X_l+bv)-g_{a_n}(X_l+bv)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu\\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint\frac{h_y(X_l+bv, r(X_l+bv)+u)-h_y(X_l, r(X_l)+u)}{\pi(X_l+bv)}\\
&\qquad\cdot\frac{g(X_l+bv)-g_{a_n}(X_l+bv)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.6)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint h_y(X_l, r(X_l)+u)\frac{\pi(X_l)-\pi(X_l+bv)}{\pi(X_l)\pi(X_l+bv)}\\
&\qquad\cdot\frac{g(X_l+bv)-g_{a_n}(X_l+bv)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.7)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint\frac{h_y(X_l, r(X_l)+u)}{\pi(X_l)}\frac{g(X_l+bv)-g(X_l)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.8)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint\frac{h_y(X_l, r(X_l)+u)}{\pi(X_l)}\frac{g(X_l)-g_{a_n}(X_l)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu \qquad (3.3.9)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\iint\frac{h_y(X_l, r(X_l)+u)}{\pi(X_l)}\frac{g_{a_n}(X_l)-g_{a_n}(X_l+bv)}{g_{a_n}(X_l+bv)}k(v)f(u)dvdu. \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

Wie oben rechnet man wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeiten

$$\begin{aligned}
&n\cdot E\big[\big((3.3.6)\big)^2\big]\\
=&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\iint\frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u)-h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}\\
&\qquad\cdot\frac{g(X+bv)-g_{a_n}(X+bv)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
=&\sigma^2E\Big[Z\Big(\iint\frac{h_y(X+bv, r(X+bv)+u)-h_y(X, r(X)+u)}{\pi(X+bv)}\\
&\cdot\frac{g(X+bv)-g_{a_n}(X+bv)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\le b^2\sigma^2\int v^2k(v)dv\frac{4(L_h')^2}{c_\pi^2}(1+L_r^2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\big[\big((3.3.7)\big)^2\big] \\
=&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\iint h_y(X,r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)} \\
&\qquad\cdot\frac{g(X+bv)-g_{a_n}(X+bv)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big] \\
=&\sigma^2 E\Big[Z\Big(\iint h_y(X,r(X)+u)\frac{\pi(X)-\pi(X+bv)}{\pi(X)\pi(X+bv)} \\
&\cdot\frac{g(X+bv)-g_{a_n}(X+bv)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big] \\
\le&\sigma^2\frac{4(C'_\pi)^2}{c_\pi^4}b^2E[h_y^2(X,Y)]\int v^2k(v)dv.
\end{aligned}$$

Die $\sigma(X)$-Messbarkeit der entsprechenden Integrale zeigt man dabei wie in [Sch07] mit Hilfe des Satzes von Fubini. Da die zuletzt erhaltenen Ausdrücke gegen Null konvergieren, folgt mit der Chebyshev-Ungleichung (3.3.6) + (3.3.7) $= o_p(n^{-1/2})$. Für (3.3.8) erhält man mit Lemma 3.1

$$\begin{aligned}
&n\cdot E\Big[\big((3.3.8)\big)^2\Big] \\
=&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\iint\frac{h_y(X,r(X)+u)}{\pi(X)}\frac{g(X+bv)-g(X)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big] \\
&+(n-1)\cdot E\Big[Z_1\varepsilon_1\iint\frac{h_y(X_1,r(X_1)+u)}{\pi(X_1)}\frac{g(X_1+bv)-g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}k(v)f(u)dvdu \\
&\quad\cdot Z_2\varepsilon_2\iint\frac{h_y(X_2,r(X_2)+u)}{\pi(X_2)}\frac{g(X_2+bv)-g(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big] \\
=&\sigma^2E\Big[Z\Big(\iint\frac{h_y(X,r(X)+u)}{\pi(X)}\frac{g(X+bv)-g(X)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big] \\
\le&\frac{b^2}{a_n^2}\sigma^2\frac{L_g^2}{c_\pi^2}\int v^2k(v)dvE[h_y^2(X,Y)]\to 0,
\end{aligned}$$

also (3.3.8) $= o_p(n^{-1/2})$. Da mit g auch g_{a_n} Lipschitz-stetig mit der gleichen Lipschitz-Konstante L_g ist (vgl. [Sch07]), folgt mit der gleichen Rechnung (3.3.10) $= o_p(n^{-1/2})$. Für den noch verbleibenden Term (3.3.9) verwende man die aus den zu $A_1^{(n)}$ angestellten Überlegungen bekannte Darstellung

$$\frac{1}{g_{a_n}(y)}=\frac{1}{g_{a_n}(x)}+\frac{g_{a_n}(x)-g_{a_n}(y)}{g_{a_n}(x)g_{a_n}(y)}.$$

Mit ihr, Lemma 3.2 und

$$\int h_y(X,r(X)+u)f(u)du=E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&n \cdot E\Big[\big((3.3.9)\big)^2\Big]\\
=&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\iint \frac{h_y(X,r(X)+u)}{\pi(X)}\frac{g(X)-g_{a_n}(X)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
&+(n-1)\cdot E\Big[Z_1\varepsilon_1\iint \frac{h_y(X_1,r(X_1)+u)}{\pi(X_1)}\frac{g(X_1)-g_{a_n}(X_1)}{g_{a_n}(X_1+bv)}k(v)f(u)dvdu\\
&\quad\cdot Z_2\varepsilon_2\iint \frac{h_y(X_2,r(X_2)+u)}{\pi(X_2)}\frac{g(X_2)-g_{a_n}(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big]\\
=&\sigma^2E\Big[Z\Big(\iint \frac{h_y(X,r(X)+u)}{\pi(X)}\frac{g(X)-g_{a_n}(X)}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
\leq&\sigma^2E\Big[\Big(\Big|\frac{g(X)-g_{a_n}(X)}{g_{a_n}(X)\pi(X)}\Big|\Big|\int h_y(X,r(X)+u)f(u)du\Big|\\
&+\Big|\frac{g(X)-g_{a_n}(X)}{g_{a_n}(X)\pi(X)}\Big|\iint |h_y(X,r(X)+u)|\frac{|g_{a_n}(X)-g_{a_n}(X+bv)|}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
\leq&\frac{\sigma^2}{c_\pi^2}E\Big[\Big(\Big|\frac{g(X)-g_{a_n}(X)}{g_{a_n}(X)}\Big||E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)|1_{\{g(X)<a_n\}}\\
&+2\iint |h_y(X,r(X)+u)|\frac{|g_{a_n}(X)-g_{a_n}(X+bv)|}{g_{a_n}(X+bv)}k(v)f(u)dvdu\Big)^2\Big]\\
\leq&\frac{8\sigma^2}{c_\pi^2}\Big(E[(E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X))^2 1_{\{g(X)<a_n\}}]+L_g^2\frac{b^2}{a_n^2}\int v^2k(v)dvE[h_y^2(X,Y)]\Big)\to 0,
\end{aligned}
$$

da $(E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X))^2$ integrierbar ist und $P(g(X)<a_n)$ gegen Null konvergiert. Aufgrund der Chebyshev-Ungleichung gilt also auch $(3.3.9)=o_p(n^{-1/2})$.
Nimmt man alle den Term $B_1^{(n)}$ betreffenden Ergebnisse zusammen, so erhält man

$$B_1^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n Z_l\varepsilon_l\frac{E(h(X_l,Y_l)\ell(\varepsilon_l)|X_l)}{\pi(X_l)}+o_p(n^{-1/2}).$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Satz 3.9. *Der Schätzer $\hat{H}$ ist unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 asymptotisch linear mit Einflussfunktion φ gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
\varphi(X,ZY,Z) &= \chi(X)-E[\chi(X)]+\frac{Z}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon)-E[\bar{h}(\varepsilon)]\\
&\quad+Z\varepsilon\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)-\frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big).
\end{aligned}
$$

Beweis. Fasse die Ergebnisse aus Proposition 3.7 und Proposition 3.8 zusammen. Das liefert

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\chi(X_i)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{Z_j}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon_j)-E[\bar{h}(\varepsilon)])\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\Big(\frac{1}{\pi(X_i)}E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)|X_i)-\frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)+o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Daraus liest man die behauptete Einflussfunktion ab. □

Ein Vergleich der hier erhaltenen Einflussfunktion mit der effizienten Einflussfunktion

$$\begin{aligned}\chi(X_i) - E[\chi(X)] + \frac{Z_i}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon_i) - E[\bar{h}(\varepsilon)] \\ + \frac{Z_i}{J}\Big(\frac{1}{\pi(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X) - \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon_i)\end{aligned}$$

aus Abschnitt 2 zeigt, dass $\hat{H}$ im Allgemeinen nicht effizient ist, da sich ein Teil der Einflussfunktion von der effizienten Einflussfunktion unterscheidet. Jedoch besteht der Unterschied nur darin, dass im dritten Summanden ε_i anstelle des gewünschten $\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)$ steht. Im folgenden Abschnitt werde ich also den Schätzer durch Addition eines Korrekturtermes so abwandeln, dass er effizient wird. Ein Blick in den Beweis von Proposition 3.8 zeigt, dass der Teil der Einflussfunktion, der sich von der effizienten Einflussfunktion unterscheidet, gerade durch die Wahl des Schätzers für r beeinflusst wird. Alternativ könnte man daher auch versuchen, den Schätzer $\hat{r}_{ni}^{(a)}$ so abzuändern, dass er den gewünschten Beitrag zur Einflussfunktion liefert. Diese Idee möchte ich hier jedoch nicht weiter verfolgen.

Bemerkenswert ist außerdem, dass für $\varepsilon_i \sim N_{0,\sigma^2}$ der konstruierte Schätzer auch ohne Korrektur schon effizient ist, denn es gilt

$$\ell(\varepsilon) = -\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\varepsilon^2/(2\sigma^2)}\sqrt{2\pi\sigma^2}e^{\varepsilon^2/(2\sigma^2)} = \frac{\varepsilon}{\sigma^2}$$

und

$$J = E[\ell^2(\varepsilon)] = \frac{1}{\sigma^4}E[\varepsilon^2] = \frac{1}{\sigma^2},$$

also auch

$$\frac{1}{J}\ell(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Kapitel 4

Ein effizienter Schätzer

4.1 Weitere Voraussetzungen

Inspiriert von den Betrachtungen zum vierten Fall in [MSW06] versuche ich nun einen Korrekturterm zu finden, der den zur Effizienz fehlenden Beitrag zur Einflussfunktion liefert. Gesucht ist also ein Term $\hat{T}$ mit $\hat{T} = o_p(1)$ und

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\frac{1}{\pi(X_i)}E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)|X_i) - \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\Big(\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i) - \varepsilon_i\Big)\\ &\quad + o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Nach [Sch93] erscheint der Ansatz

$$\hat{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\frac{\hat{\varkappa}_{ni}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_i)} - \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\frac{\hat{\varkappa}_{nj}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_j)}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\varepsilon}_i\Big)$$

sinnvoll. Die auftauchenden Schätzer seien definiert durch:
$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{r}_{ni}^{(a)}$, $\bar{Z}_n$ und $\hat{\pi}_{a_n}(X_j)$ wie in Abschnitt 3.1,
$\hat{f}(u) = \frac{1}{n\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j}{\bar{Z}_n}W\big(\frac{u-\hat{\varepsilon}_j}{\beta}\big)$ mit geeignetem Kern W und passender Bandweite β,
$\hat{f}_{\alpha_n}(u) = \alpha_n + \hat{f}(u)$ mit einer geeigneten Nullfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$\hat{f}'(u) = \frac{1}{n\beta^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j}{\bar{Z}_n}W'\big(\frac{u-\hat{\varepsilon}_j}{\beta}\big)$, $\hat{\ell}(u) = -\frac{\hat{f}'(u)}{\hat{f}_{\alpha_n}(u)}$, $\hat{J} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\hat{\ell}'(\hat{\varepsilon}_i)$ und

$$\hat{\varkappa}_{ni} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)k_b(X_i - X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}$$

der Schätzer für $\varkappa(X_i) := E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)|X_i)$.
Führe weiterhin die Notationen $B(X_i) := \frac{1}{\pi(X_i)}E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)|X_i)$ und $E := \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]$ ein. Schätze diese Größen durch $\hat{B}_{ni} := \frac{\hat{\varkappa}_{ni}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_i)}$ und $\hat{E} := \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\frac{\hat{\varkappa}_{nj}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_j)} = \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\hat{B}_{nj}$. Damit erhält $\hat{T}$ die Gestalt

$$\hat{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni} - \hat{E})\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\varepsilon}_i\Big).$$

Es wäre auch möglich, E durch $\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j}{\hat{\pi}_{a_n}(X_j)}h(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)$ zu schätzen. Warum ich jedoch den Schätzer $\hat{E}$ wähle, wird sich erst später zeigen.
Ergänze nun die Voraussetzung (B.f) in Abschnitt 3.1 durch

(B.f) (ii) Die Dichte f sei zweimal stetig differenzierbar mit beschränkter erster und Lipschitz-stetiger zweiter Ableitung, d.h. es gibt Konstanten $C_f^{(1)}, L_f' > 0$ mit $|f'(u)| \leq C_f^{(1)}$ und $|f''(u) - f''(v)| \leq L_f'|u - v|$. Zudem sei f beschränkt durch eine Konstante $C_f^{(0)} > 0$.

(iii) Es gelte $\int u^4 f(u)du < \infty$, d.h. ε habe ein endliches viertes Moment.

(iv) Es gelte $f'(x)\big|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

Ergänze ferner (B.r) durch

(B.r) (iii) $E[r^4(X)] < \infty$

und (B.agr) durch

(B.agr) (ii) $n^{3/5} E[r^4(X) 1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Beide Bedingungen folgen schon aus Voraussetzungen in Abschnitt 3.1. So ist wegen (B.p)(i) und (B.r)(i) die neue Bedingung (B.r)(iii) automatisch erfüllt, und (B.agr)(ii) ergibt sich mit (B.p)(i) und (B.r)(i) aus der Bedingung (B.agr)(i). Dennoch gebe ich beide Bedingungen an, um besser darauf verweisen zu können.
Für die neu eingeführten Größen seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(B.W) $W \geq 0$ sei eine symmetrische und durch $C_W^{(0)}$ beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte mit $\int t^2 W(t)dt < \infty$. Sie sei dreimal differenzierbar mit $|W^{(i)}(x)| \leq C_W W(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ und eine positive Konstante C_W.

(B.$\varkappa$) (i) Die Funktion $\varkappa$ sei einmal stetig differenzierbar mit $\exists C'_\varkappa > 0 : |\varkappa'(x)| \leq C'_\varkappa$ und $\exists L'_\varkappa > 0 : |\varkappa'(y) - \varkappa'(x)| \leq L'_\varkappa |y - x|$.

(ii) Es gelte $E[\varkappa^2(X)] < \infty$.

(B.β) (i) $n^{1/10}\beta^2 \to \infty$ für $n \to \infty$.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} n^{1/10}\beta^3 > 0$.

(B.α) $n^{1/5}\beta^5\alpha_n \to \infty$ und $n\beta^4\alpha_n^2 \to \infty$ für $n \to \infty$.

(B.ag$\varkappa$) $n^{1/2}E[\varkappa^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $n^{1/2}E[|\varkappa(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

(B.ag$\varkappa$r) $n^{1/2}E[|\varkappa(X)||r(X)|1_{\{g(X)<2a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0,$
$n^{3/5}E[\varkappa^2(X)r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Bemerkung 4.1 (Diskussion).

a) Gegenüber (B.p) aus Abschnitt 3.1 wird in (B.f) die Existenz einer weiteren Ableitung gefordert. Statt der ersten soll nun die zweite Ableitung Lipschitz-stetig sein. Das erklärt sich dadurch, dass in die Untersuchungen auch $\hat{f}'$ einfließt. Dafür möchte ich aber ähnlich vorgehen wie für eine Dichte.

b) Der Kern W muss im Gegensatz zu k differenzierbar sein, da W' für die Schätzung von f' herangezogen wird. W ist zudem so gewählt, dass Bedingung K aus [Sch93] erfüllt wird. Ferner folgt aus Bedingung (B.W) mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass W, W' und W'' Lipschitz-stetig sind, denn

$$|W^{(i)}(x) - W^{(i)}(y)| \leq |W^{(i+1)}(z)||x - y| \leq C_W|W(z)||x - y| \leq C_W C_W^{(0)}|x - y|$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ und eine Stelle z zwischen x und y.

c) Die an $\varkappa$ gemachten Voraussetzungen sind die gleichen wie für r in Abschnitt 3.1. Es folgt, dass auch $\varkappa$ selber Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstante $L_\varkappa$. Zudem folgt (B.$\varkappa$)(ii) mit der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte schon aus Bedingung (B.hℓ)(i) in Abschnitt 3.1:

$$E[\varkappa^2(X)] = E[(E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X))^2] \leq E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)] < \infty.$$

Dennoch habe ich aufgrund besserer Zitierbarkeit beide Bedingungen angegeben. Ferner ist $\varkappa^2(X)$ wegen (B.hℓ)(ii) durch C_ℓ beschränkt. Zudem ergibt sich

$$E[B^2(X)] = E\Big[\frac{1}{\pi^2(X)}E(h(X,Y)\ell(\varepsilon)|X)^2\Big] c_\pi^{-2} E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)] < \infty.$$

d) Die Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert deutlich langsamer gegen Null als b. Aus (B.β)(i) folgt zunächst, dass β langsamer gegen Null konvergieren muss als $n^{-1/20}$. Wegen der ersten Bedingung in (B.α) muss β zudem langsamer als $n^{-1/25}$ gegen Null konvergieren. (B.β)(ii) wiederum fordert, dass β höchstens so schnell wie $n^{-1/30}$ gegen Null konvergieren darf, da dann gilt $\liminf_{n\to\infty} n^{1/10}\beta^3 = 1$. Bedingung (B.$\beta$)(ii) impliziert, dass die gesamte Folge $n^{1/10}\beta^3$ von Null weg beschränkt ist. Dies wird nur an einer Stelle im Beweis von Satz 4.19 benutzt. Wählt man nun $\beta = n^{-1/30}$ und möchte man auch für α_n den Ansatz $\alpha_n = n^{-\gamma}$ machen, so muss $\gamma < 1/30$ sein, um gleichzeitig Bedingung (B.α) zu erfüllen.

e) Die Bedingungen (B.ag$\varkappa$) und (B.ag$\varkappa$r) rühren wieder von der Abschneidetechnik aus [WR02] her. Der zweite Teil von (B.ag$\varkappa$r) wird dabei benötigt, um in Satz 4.14 Proposition 3.6 mit $M(X) = \varkappa^2(X)$ anwenden zu können.

Proposition 4.1. *Unter den in den Abschnitten 3.1 und 4.1 angegebenen Voraussetzungen gilt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Nach Definition ergibt sich

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big).$$

Benutze nun Lemma 3.6, um zu zeigen, dass gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) = o_p(n^{-1/2})$. Nach Lemma 3.3 genügt es,

$$n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) = o_p(1)$$

nachzuweisen. Betrachte also

$$\begin{aligned} & n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\ = \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E\big(\varepsilon_i^2\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\ & + \frac{1}{n}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big). \end{aligned}$$

Da in dem Schätzer $\hat{r}_{ni}$ gerade der Summand mit Index i weggelassen wurde und dadurch kein Y_i vorkommt, ist ε_i unabhängig von $\hat{r}_{ni}$. Aufgrund der Definition von $\hat{r}_{ni}^{(a)}$ als $\frac{\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}$ ist auch $\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2$ unabhängig von ε_i. Das liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E\big(\varepsilon_i^2\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E[\varepsilon^2] E\big(\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ &\leq \sigma^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\big(\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Dies ist aber nach Proposition 3.6 gleich $o_p(n^{-1/2})$.
Durch Ergänzen erhält man für verschiedene i und j

$$\begin{aligned}&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ =&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)} - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ &+ E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nji}^{(a)} - r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Wegen Unabhängigkeit wird aus dem zweiten Term

$$E\varepsilon \cdot E\big(\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nji}^{(a)} - r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = 0.$$

Mit der Definition von $\hat{r}_{nji}^{(a)}$ errechnet man

$$\begin{aligned}\hat{r}_{nj}^{(a)} - \hat{r}_{nji}^{(a)} &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq j,i}^n Z_l Y_l k_b(X_j - X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)} + \frac{\frac{1}{n}Z_i Y_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\\ &\quad -E\bigg(\frac{\frac{1}{n}\sum_{l=1,l\neq j}^n Z_l Y_l k_b(X_j - X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\bigg)\\ &\quad -E\bigg(\frac{\frac{1}{n}Z_i Y_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\bigg)\\ &= \frac{1}{n}\frac{Z_i Y_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)} - \frac{1}{n}\frac{Z_i r(X_i) k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\\ &= \frac{1}{n}\frac{Z_i \varepsilon_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)} - r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ =&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)} - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ =&\frac{1}{n}E\big(\varepsilon_i^2\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\frac{Z_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\\ =&\frac{1}{n}\Big(E\big(\varepsilon_i^2\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - \hat{r}_{nij}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) + E\big(\varepsilon_i^2\varepsilon_j\big(\hat{r}_{nij}^{(a)} - r(X_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)\frac{Z_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\\ =&\frac{1}{n}\Big(\frac{Z_j k_b(X_i - X_j)}{n\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\big(\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) + E\varepsilon_j E\big(\varepsilon_i^2\big(\hat{r}_{nij}^{(a)} - r(X_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)\frac{Z_i k_b(X_j - X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_j)}\\ =&\frac{(\sigma^2)^2}{n^2}\frac{Z_i Z_j k_b^2(X_i - X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_j)}.\end{aligned}$$

Einsetzen in den zu untersuchenden Term liefert

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_jE\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = \frac{(\sigma^2)^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_iZ_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_j)}.$$

Wegen

$$\Big|\frac{(\sigma^2)^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_iZ_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_j)}\Big| \leq \frac{K^2(\sigma^2)^2}{nb^2a_n^2} \to 0$$

folgt schließlich

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_jE\big(\varepsilon_i\varepsilon_j\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = o_p(1),$$

also insgesamt die Behauptung. □

Bei den weiteren Untersuchungen verwende ich einige der Aussagen aus [Sch93]. Dort hat man es zwar nicht mit fehlenden Daten zu tun, dennoch kann man die dortigen Abschätzungen auch auf die hier vorliegende Situation anwenden. Fasse dazu die in den Definitionen von $\hat{f}$, $\hat{f}'$ und $\hat{\ell}$ vorkommenden Zufallsvariablen $Z_i \in \{0,1\}$ als Gewichte $\hat{w}_i$ auf. Für N_n aus [Sch93] erhält man nun $N_n = \sum_{i=1}^n Z_i = n\bar{Z}_n$. Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert $N_n/n = \bar{Z}_n$ stochastisch gegen EZ. Da im Allgemeinen gilt $EZ \neq 1$, ist Bedingung W aus [Sch93] in der Regel nicht erfüllt. Diese Bedingung wird jedoch in den Abschätzungen nicht benutzt, so dass die Abschätzungen aus Lemma 10.1 und dem Beweis zu Proposition 5.5 aus [Sch93] auch hier gelten. Die Aussage von Lemma 10.2 bleibt ebenfalls erhalten.
Der Vollständigkeit halber will ich die entsprechenden Aussagen hier noch einmal in der von mir benutzten Form angeben. Definiere dazu wie in [Sch93]

$$\ell_n(x,\mathbf{y},w) := -\frac{\frac{1}{n\beta^2}\sum_{j=1}^n w_jW'\big(\frac{x-y_j}{\beta}\big)}{\alpha_n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_j + \frac{1}{n\beta}\sum_{j=1}^n w_jW\big(\frac{x-y_i}{\beta}\big)}$$

für $x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ und $w\in\{0,1\}^n$. Per Definitionem gilt

$$\hat{\ell}(u) = \ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}},\mathbf{Z}),\ u\in\mathbb{R}$$

mit $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\hat{\varepsilon}_1,\ldots,\hat{\varepsilon}_n)^\top$. Schreibe kürzer $\ell_n(u,y) := \ell_n(u,y,\mathbf{Z})$. Wie in [Sch93] sei $\ell_n^{(i)}$ die i-te Ableitung von ℓ_n bezüglich des ersten Argumentes. Setze weiterhin

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j} = E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}) = (E(\hat{\varepsilon}_1|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}),\ldots,E(\hat{\varepsilon}_n|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}))^\top$$

und $\hat{\ell}_{-j}^{(\mu)}(u) = \ell_n^{(\mu)}(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})$ für $\mu = 0,1,2$. Ferner bezeichne $\boldsymbol{\varepsilon}$ den Vektor $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)^\top$.

Lemma 4.2. *(entspricht Lemma 10.1 aus [Sch93])*
Ist Bedingung (B.W) erfüllt, dann existiert eine positive Konstante c_0, so dass die folgenden Ungleichungen für $x\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^n$, $w\in\{0,1\}^n$ und $i=0,1,2$ gelten:

$$\big|\ell_n^{(i)}(x,\boldsymbol{y},w)\big| \leq \frac{c_0}{\beta^{i+1}}\,, \tag{L1}$$

$$\big|\ell_n^{(i)}(x,\boldsymbol{y},w)-\ell_n^{(i)}(x,\tilde{\boldsymbol{y}},w)\big| \leq \frac{c_0}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_j\beta^{3+i}\alpha_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_j\min\{\beta,|\tilde{y}_j-y_j|\}, \tag{L2}$$

$$\big|\ell_n^{(i)}(x,\boldsymbol{y},w)-\ell_n^{(i)}(x,\tilde{\boldsymbol{y}},w)\big|^2 \leq \frac{c_0}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_j\beta^{5+2i}\alpha_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_j(\tilde{y}_j-y_j)^2. \tag{L3}$$

Beweis. Da die Aussage ein Zitat aus [Sch93] ist, verzichte ich auf den Beweis. □

Lemma 4.3. *Die Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 seien erfüllt. Sei* $f_n(x) = \int f(x-\beta t)W(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\Sigma_{n,1} = E\bigg(\int \Big(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{f_n'(u)}{\alpha_n + f_n(u)}\Big)^2 f(u)du \bigg| \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}\bigg) = o_p(1)$$

und

$$\Sigma_{n,2} = \int \Big(\frac{f_n'(u)}{\alpha_n + f_n(u)} - \frac{f'(u)}{f(u)}\Big)^2 f(u)du \to 0.$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus einer allgemeineren Version von Lemma 10.2 in [Sch93]. Gegenüber [Sch93] ersetze man $E(\cdot|\mathbf{X})$ durch $E(\cdot|\mathbf{X},\mathbf{Z})$ und ziehe für den Beweis [Sch87] heran. □

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist

Lemma 4.4. *(analog Lemma 10.3 aus [Sch93])*
Für jedes Paar (n,j) *positiver ganzer Zahlen,* $1 \le j \le n$, *sei* $h_{n,j}$ *eine messbare Funktion von* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \{0,1\}^n$ *nach* $\mathbb{R}$ *und* $H_{n,j}$ *eine messbare Funktion von* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \times \{0,1\}^n$ *nach* $\mathbb{R}$. *Setze* $\hat{h}_{n,j} = h_{n,j}(\cdot, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ *und* $\tilde{h}_{n,j} = H_{n,j}(\cdot, \boldsymbol{Y}_{-j}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$. *Für ein* $\delta \ge 0$ *seien folgende Bedingungen erfüllt:*

$$C_{n,1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{h}_{n,j}(Y_j) - \tilde{h}_{n,j}(Y_j) = o_p(n^{-\delta}), \tag{C1}$$

$$C_{n,2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \int \big(\hat{h}_{n,j}(u+r(X_j)) - \tilde{h}_{n,j}(u+r(X_j))\big) f(u)du = o_p(n^{-\delta}), \tag{C2}$$

$$C_{n,3} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E\bigg(\int |\hat{h}_{n,j}(u+r(X_j))|^2 f(u)du \bigg| \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}\bigg) = o_p(n^{-2\delta}), \tag{C3}$$

$$C_{n,4} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} E\big(|\tilde{h}_{n,j}(Y_j) - E(\tilde{h}_{n,j}(Y_j)|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_{-i}, \boldsymbol{Z})|^2 \big| \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}\big) = o_p(n^{-2\delta}). \tag{C4}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{h}_{n,j}(Y_j) - \int \hat{h}_{n,j}(u+r(X_j))f(u)du = o_p(n^{-\delta}).$$

Beweis. Diese Aussage ist eine Verallgemeinerung von Lemma 10.3 aus [Sch93]. Ersetze im zugehörigen Beweis $E(\cdot|\mathbf{X})$ durch $E(\cdot|\mathbf{X},\mathbf{Z})$. □

Sei $\mathbf{Y}_{-\{i,j\}}$ derjenige $(n-2)$-dimensionale Zufallsvektor, der durch Streichen von Y_i und Y_j aus dem Vektor $(Y_1,\ldots,Y_n)^\top$ entsteht. Setze

$$\hat{r}_{nji}^{(a)} = E\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}\big|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-i}, \mathbf{Z}\big) = E\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}\big|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,j\}}, \mathbf{Z}\big)$$

und

$$\hat{r}_{nj\{i,l\}}^{(a)} = E\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}\big|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,l\}}, \mathbf{Z}\big) = E\big(\hat{r}_{nji}^{(a)}\big|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,l\}}, \mathbf{Z}\big).$$

Definiere außerdem

$$(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}})_\nu = E(\hat{\varepsilon}_\nu|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,l\}}, \mathbf{Z}) = E((\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})_\nu|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,l\}}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} Y_\nu - \hat{r}^{(a)}_{n\nu\{i,l\}} & ,\nu \neq i,l \\ r(X_l) - \hat{r}^{(a)}_{nli} & ,\nu = l \\ r(X_i) - \hat{r}^{(a)}_{nil} & ,\nu = i \end{cases}.$$

Dieses Vorgehen fortsetzend bezeichne $\mathbf{Y}_{-\{i,j,l\}}$ denjenigen $(n-3)$-dimensionalen Vektor, der entsteht, wenn man aus $(Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ die Komponenten Y_i, Y_j und Y_l herausstreicht. Setze hiermit

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}} = E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,j,l\}}, \mathbf{Z}) = E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j\}}|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-\{i,j,l\}}, \mathbf{Z}).$$

Das nun folgende Lemma, in dessen Beweis Lemma 4.2 benutzt wird, wird später dazu führen, dass einige Beweise ein wenig kompakter notiert werden können. Beispielsweise verkürzt sich dadurch oft der Nachweis der Bedingungen (C1) bis (C4) aus Lemma 4.4.

Lemma 4.5. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt für* $\mu \in \{0,1\}$

$$|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})| \leq \frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_j| + \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}, u \in \mathbb{R}$$

und

$$|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| \leq \frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i| + \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}, u \in \mathbb{R}.$$

Ferner gilt für $\mu \in \{0,1\}$

$$\left|\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}, \boldsymbol{y}\big) - \ell_n^{(\mu)}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj}, \boldsymbol{y}\big)\right| \leq \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i|, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\left|\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \boldsymbol{y}\big) - \ell_n^{(\mu)}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}, \boldsymbol{y}\big)\right| \leq \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_l|, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Ergänze in der ersten Differenz $\ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})$ mit

$$(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_l = \begin{cases} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_l & ,\text{für } l \neq j \\ \hat{\varepsilon}_j & ,\text{für } l = j \end{cases} = \begin{cases} Y_l - \hat{r}^{(a)}_{nlj} & ,\text{für } l \neq j \\ Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj} & ,\text{für } l = j \end{cases}.$$

Mit (L3) aus Lemma 4.2 und (B.k) folgt

$$\begin{aligned}
&|\ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})| = \left(|\ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})|^2\right)^{1/2} \\
\leq& \left(\frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{5+2\mu}\alpha_n} \sum_{\nu=1}^n Z_\nu((\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_\nu - \hat{\varepsilon}_\nu)^2\right)^{1/2} \\
=& \frac{c_0^{1/2}}{n^{1/2}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \left(\sum_{\nu:\nu\neq j} Z_\nu\big(\hat{r}^{(a)}_{n\nu} - \hat{r}^{(a)}_{n\nu j}\big)^2\right)^{1/2} \\
=& \frac{c_0^{1/2}}{n^{1/2}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \left(\sum_{\nu:\nu\neq j} Z_\nu \frac{Z_j\varepsilon_j^2}{n^2\hat{g}^2_{a_n}(X_\nu)} k_b^2(X_\nu - X_j)\right)^{1/2} \\
\leq& \frac{c_0^{1/2}}{\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}\bar{Z}_n^{1/2}|\varepsilon_j| = \frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_j|.
\end{aligned}$$

Außerdem liefern (L2) aus Lemma 4.2 und (B.k)

$$\begin{aligned} |\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| &\leq \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{3+\mu}\alpha_n} \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu(\beta \wedge |(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_\nu - (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_\nu|) \\ &= \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{3+\mu}\alpha_n} Z_j(\beta \wedge |\varepsilon_j|) \leq \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} &|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})| \\ \leq &|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| + |\ell_n^{(\mu)}(u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})| \\ \leq &\frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_j| + \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}. \end{aligned}$$

Setze nun

$$(\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}})_l := \begin{cases} Y_l - \hat{r}_{nl\{i,j\}}^{(a)} & ,\text{für } l \neq i, j \\ r(X_j) - \hat{r}_{nji}^{(a)} & ,\text{für } l = j \\ Y_i - \hat{r}_{nij}^{(a)} & ,\text{für } l = i \end{cases}.$$

Mit (L3) aus Lemma 4.2 und (B.k) folgt dann

$$\begin{aligned} &|\ell_n^{(\mu)}(u, \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| = \left(|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})|^2\right)^{1/2} \\ \leq &\left(\frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{5+2\mu}\alpha_n} \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu((\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}})_\nu - (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})_\nu)^2\right)^{1/2} \\ = &\frac{c_0^{1/2}}{n^{1/2}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \left(\sum_{\nu \neq j,i} Z_\nu\left(\hat{r}_{n\nu j}^{(a)} - \hat{r}_{n\nu\{j,i\}}^{(a)}\right)^2 + Z_j\left(\hat{r}_{nji}^{(a)} - \hat{r}_{nj}^{(a)}\right)^2\right)^{1/2} \\ = &\frac{c_0^{1/2}}{n^{1/2}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \left(\sum_{\nu \neq i} Z_\nu \frac{Z_i\varepsilon_i^2}{n^2\hat{g}_{a_n}^2(X_\nu)} k_b^2(X_\nu - X_i)\right)^{1/2} \\ \leq &\frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i|. \end{aligned}$$

Zudem erhält man mit (L2) aus Lemma 4.2

$$|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}})| \leq \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{3+\mu}\alpha_n} Z_i(\beta \wedge |\varepsilon_i|) \leq \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}.$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} &|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| \\ \leq &|\ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}})| + |\ell_n^{(\mu)}(u, \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}) - \ell_n^{(\mu)}(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})| \\ \leq &\frac{c_0^{1/2}}{\beta^{5/2+\mu}\alpha_n^{1/2}} \frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i| + \frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^{2+\mu}\alpha_n}. \end{aligned}$$

In den letzten beiden behaupteten Ungleichungen verwende man eine Taylor-Entwicklung mit Lagrange-Restglied. Das Restglied schätze man mit Hilfe von (L1) aus

Lemma 4.2 ab. Das liefert mit (B.k)

$$\begin{aligned}\left|\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\mathbf{y}\big)-\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\mathbf{y}\big)\right| &\le \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\left|\hat r_{nj}^{(a)}-\hat r_{nji}^{(a)}\right|\\ &= \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\frac{Z_i|\varepsilon_i|}{n\hat g_{a_n}(X_j)}k_b(X_i-X_j)\\ &\le \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left|\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j-\hat r_{nj\{i,l\}}^{(a)},\mathbf{y}\big)-\ell_n^{(\mu)}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\mathbf{y}\big)\right| &\le \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\left|\hat r_{nji}^{(a)}-\hat r_{nj\{i,l\}}^{(a)}\right|\\ &= \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\frac{Z_l|\varepsilon_l|}{n\hat g_{a_n}(X_j)}k_b(X_j-X_l)\\ &\le \frac{c_0}{\beta^{2+\mu}}\frac{K}{nba_n}|\varepsilon_l|.\end{aligned}$$

□

Setze abkürzend $s_n^{(1,1)} := \frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}$, $s_n^{(1,2)} := \frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}$ und $s_n^{(2)} := \frac{c_0}{n^{1/2}\bar Z_n\beta^2\alpha_n}$. Damit erhält man aus Lemma 4.5

$$|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})\ ,u\in\mathbb{R}$$

und

$$|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})\ ,u\in\mathbb{R}$$

sowie

$$\left|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\mathbf{y}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\mathbf{y}\big)\right| \le n^{-1/2}s_n^{(1,1)}|\varepsilon_i|\ ,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

und

$$\left|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj\{i,l\}}^{(a)},\mathbf{y}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\mathbf{y}\big)\right| \le n^{-1/2}s_n^{(1,1)}|\varepsilon_l|\ ,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Nach (B.a), (B.α) und (B.β) konvergieren $s_n^{(1,1)}$ und $s_n^{(1,2)}$ gegen Null. Nach (B.α) und den schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert zudem $s_n^{(2)}$ stochastisch gegen Null. Setze ferner $s_n^{(1)} := s_n^{(1,1)} + s_n^{(1,2)}$. Definiere außerdem die Abkürzung $\delta_{ni} = \hat r_{ni}^{(a)} - r(X_i)$. Ein weiteres wichtiges Hilfsresultat ist

Lemma 4.6. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$U_n := E\left(\int (\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\,\middle|\,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}\right) = o_p(1).$$

Beweis. Seien $\Sigma_{n,1}$ und $\Sigma_{n,2}$ wie in Lemma 4.3 definiert. Schreibe dann mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned}U_n &= E\left(\int \big(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell(u)\big)^2 f(u)du\,\middle|\,\mathbf{X},\mathbf{Z}\right)\\ &\le 3E\left(\int \big(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n(u,\boldsymbol\varepsilon)\big)^2 f(u)du\,\middle|\,\mathbf{X},\mathbf{Z}\right)+3\Sigma_{n,1}+3\Sigma_{n,2}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 gilt

$$U_n \leq 3E\Big(\int \big(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})\big)^2 f(u)du \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) + o_p(1).$$

Mit Abschätzung (L3) aus Lemma 4.2 ergibt sich zudem

$$\begin{aligned}
&E\Big(\int \big(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})\big)^2 f(u)du \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big)\\
\leq &\frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^5\alpha_n}\sum_{l=1}^n Z_l E\big((\hat{\varepsilon}_l-\varepsilon_l)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \leq \frac{c_0}{n^{1/5}\bar{Z}_n\beta^5\alpha_n} n^{-4/5}\sum_{l=1}^n E(\delta_{nl}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Nach (B.α) und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert dies stochastisch gegen Null.

□

Proposition 4.7. *Unter den in den Abschnitten 3.1 und 4.1 angegebenen Voraussetzungen gilt:*

$$\hat{J} = J + o_p(1).$$

Daraus folgt $\frac{1}{\hat{J}} = \frac{1}{J} + o_p(1)$.

Beweis. Der Beweis von $\hat{J} = J + o_p(1)$ basiert auf [Sch93]. Schreibe zunächst $\hat{J}$ als

$$\begin{aligned}
\hat{J} \;=\; &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\Big(\hat{\ell}'(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}'\big(u - \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big) f(u)du\Big)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\int\Big(\hat{\ell}'\big(u - \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big) - \hat{\ell}'(u)\Big) f(u)du\\
&+\int \hat{\ell}'(u) f(u)du.
\end{aligned}$$

Beachte, dass die Abschätzungen aus dem Beweis von Proposition 5.5 aus [Sch93] erhalten bleiben, wenn man die hier auftauchenden $Z_i \in \{0,1\}$ als Gewichte $\hat{w}_i$ auffasst. Wie im Beweis von Proposition 5.5 aus [Sch93] schätzt man daher ab

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\int\Big(\hat{\ell}'\big(u - \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big) - \hat{\ell}'(u)\Big) f(u)du\Big|\\
\leq &\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\Big|\hat{\ell}'\big(u - \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big) - \hat{\ell}'(u)\Big| f(u)du\\
\leq &\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int |\hat{\ell}'(u)|\big|f\big(u - \big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\big) - f(u)\big|du\\
\leq &\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{c_0}{\beta^2}\big|\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big|\sqrt{J}\\
\leq &\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{c_0\sqrt{J}}{n^{1/4}\beta^2}\Big(n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach Proposition 3.6 und (B.β) und wegen $1/\bar{Z}_n = O_p(1)$ konvergiert dies stochastisch gegen Null. Somit ergibt sich

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\int\Big(\hat{\ell}\,'\big(u-\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\big)-\hat{\ell}\,'(u)\Big)f(u)du=o_p(1).$$

Eigentlich kann man auch eine bessere Konvergenzrate ablesen. Diese wird jedoch im weiteren Verlauf nicht benötigt.
Man zeige nun

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\bar{Z}_n}\Big(\hat{\ell}\,'(\hat{\varepsilon}_i)-\int\hat{\ell}\,'\big(u-\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\big)f(u)du\Big)=o_p(1).$$

Verfahre dazu wie im Beweis von Proposition 5.7 aus [Sch93]. Um Lemma 4.4 auf $\hat{h}_{n,j}(y)=Z_j\hat{\ell}\,'\big(y-\hat{r}_{nj}^{(a)}\big)$ und $\tilde{h}_{n,j}(y)=Z_j\hat{\ell}\,'_{-j}\big(y-\hat{r}_{nj}^{(a)}\big)$ anwenden zu können, sind die Gleichungen (C1) bis (C4) aus diesem Lemma für ein $\delta\geq 0$ nachzuweisen. Da der Schätzer $\hat{r}_{ni}^{(a)}$ nicht von Y_i abhängt, erhält man durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
&E(C_{n,1}^2+C_{n,2}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Z_iE\Big(\big(\hat{\ell}\,'(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}\,'_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_jE\Big(\big(\hat{\ell}\,'(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}\,'_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)\big(\hat{\ell}\,'(\hat{\varepsilon}_j)-\hat{\ell}\,'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Z_iE\Big(\Big(\int\big(\hat{\ell}\,'(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}\,'_{-i}(u-\delta_{ni})\big)f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_jE\Big(\Big(\int\big(\hat{\ell}\,'(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}\,'_{-i}(u-\delta_{ni})\big)f(u)du\Big)\\
&\qquad\cdot\Big(\int\big(\hat{\ell}\,'(u-\delta_{nj})-\hat{\ell}\,'_{-j}(u-\delta_{nj})\big)f(u)du\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Substituieren und Benutzen der Hölder-Ungleichung liefern die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&E(C_{n,1}^2+C_{n,2}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\Big(\frac{1}{n}+1\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_iE\Big(\big(\hat{\ell}\,'(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}\,'_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\Big(\frac{1}{n}+1\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_iE\Big(\int\big(\hat{\ell}\,'\big(y-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\hat{\ell}\,'_{-i}\big(y-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)\big)^2f(y-r(X_i))dy\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&2\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_iE\Big(\Big(\sup_{u\in\mathbb{R}}\big|\hat{\ell}\,'\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\hat{\ell}\,'_{-i}\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)\big|\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 und Lemma 3.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E\Big(\Big(\sup_{u\in\mathbb{R}}\big|\hat{\ell}'\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\hat{\ell}'_{-i}\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)\big|\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E\Big(\Big(\frac{c_0^{1/2}}{\beta^{7/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i|+\frac{c_0}{n\bar{Z}_n\beta^3\alpha_n}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\frac{c_0}{\beta^7\alpha_n}\frac{K^2}{n^2b^2a_n^2}E[\varepsilon_i^2]+\frac{c_0^2}{n^2\bar{Z}_n^2\beta^6\alpha_n^2}\Big)\\
\le&\frac{c_0\sigma^2}{n^{6/5}\beta^7\alpha_n}\frac{K^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}+\frac{c_0^2}{n^2\bar{Z}_n\beta^6\alpha_n^2}.
\end{aligned}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\bar{Z}_n^{-1}$ stochastisch gegen $(EZ)^{-1}$. Außerdem hat man wegen (B.α) und (B.β) $n^2\beta^6\alpha_n^2 = n^{2/5}\beta^{10}\alpha_n^2\frac{n^{8/5}}{\beta^4}\to\infty$ und $n^{6/5}\beta^7\alpha_n = n^{1/5}\beta^5\alpha_n\cdot n\beta^2\to\infty$. Mit (B.a) ergibt sich also

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E\Big(\sup_{u\in\mathbb{R}}\big(\ell'_n\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i\big)-\ell'_n\big(u-\hat{r}_{ni}^{(a)},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)=o_p(1).$$

Man erhält $E(C_{n,1}^2+C_{n,2}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})=o_p(1)$. Daher gilt auch $C_{n,1}=o_p(1)$ und $C_{n,2}=o_p(1)$. Mit (L1) aus Lemma 4.2 und (B.β) folgt außerdem

$$C_{n,3}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i E\Big(\int\big(\hat{\ell}'(u-\delta_{ni})\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\le\frac{c_0^2}{n\beta^4}=o_p(1).$$

Schließlich schreibe man $C_{n,4}$ mit Hilfe von Lemma 3.2 und der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte als

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)-E(\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z})\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)-E(\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z})\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|E\big(\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)-\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(E\big(\big|\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)-\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell'_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j) - E(\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z})\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j) - \ell'_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{8}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\ell'_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell'_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}})\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{8}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\ell'_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}) - \ell'_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Lemma 4.5 mit $\mu=1$ und Lemma 3.2 liefern dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j) - E(\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z})\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{8}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\Big(\frac{c_0^{1/2}}{\beta^{7/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{nba_n}|\varepsilon_i| + \frac{c_0}{n\bar Z_n\beta^3\alpha_n}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{c_0^2}{\beta^6}\frac{K^2}{n^2b^2a_n^2}\frac{8}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E(\varepsilon_i^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{c_0}{\beta^7\alpha_n}\frac{K^2}{n^2b^2a_n^2}\frac{16}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E(\varepsilon_i^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) + \frac{c_0^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^6\alpha_n^2}\frac{16(n-1)}{n}\bar Z_n + \frac{c_0^2}{\beta^6}\frac{8K^2\sigma^2}{n^2b^2a_n^2}\frac{n-1}{n}\\
\leq&\frac{c_0}{n^{6/5}\beta^7\alpha_n}\frac{16K^2\sigma^2}{n^{4/5}b^2a_n^2} + \frac{16c_0^2}{n^2\bar Z_n\beta^6\alpha_n^2} + \frac{c_0^2}{n^{6/5}\beta^6}\frac{8K^2\sigma^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}.
\end{aligned}$$

Wegen (B.β) gilt $n^{6/5}\beta^6 = n^{3/10}\beta^6\cdot n^{9/10}\to\infty$. Zudem erhält man aufgrund von (B.α) $n^{6/5}\beta^7\alpha_n = n^{1/5}\beta^5\alpha_n\cdot n\beta^2\to\infty$ und $n^2\beta^6\alpha_n^2 = n\beta^4\alpha_n^2\cdot n\beta^2\to\infty$. Mit (B.a) und $\bar Z_n = O_p(1)$ folgt also

$$C_{n,4}\leq\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big|\hat{\ell}'_{-j}(\hat\varepsilon_j) - \ell'_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big|^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) = o_p(1).$$

Mit Lemma 4.4 und $\frac{1}{\bar Z_n} = O_p(1)$ ergibt sich daher

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\bar Z_n}\left(\hat\ell'(\hat\varepsilon_i) - \int\hat\ell'\big(u-\hat r^{(a)}_{ni}+r(X_i)\big)f(u)du\right) = o_p(1).$$

Mit partieller Integration und (B.f)(iv) formt man nun um

$$\begin{aligned}
\int\hat\ell'(u)f(u)du &= \hat\ell(u)f(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\hat\ell(u)\frac{f'(u)}{f(u)}f(u)du\\
&= \int\hat\ell(u)\ell(u)f(u)du\\
&= \int\Big(\hat\ell(u)-\ell(u)\Big)\ell(u)f(u)du + \int\ell^2(u)f(u)du.
\end{aligned}$$

Das zweite Integral ist gleich $E[\ell^2(\varepsilon)] = J$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale und Lemma 4.6 liefern für das erste Integral

$$\begin{aligned}
&\left|\int \Big(\hat{\ell}(u) - \ell(u)\Big)\ell(u)f(u)du\right| \\
\leq&\left(\int \Big(\hat{\ell}(u) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du\right)^{1/2}\left(\int \ell^2(u)f(u)du\right)^{1/2} \\
=&J^{1/2}\left(\int \Big(\hat{\ell}(u) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du\right)^{1/2} = J^{1/2}U_n^{1/2} = o_p(1).
\end{aligned}$$

Also gilt auch $\int \hat{\ell}\,'(u)f(u)du = J + o_p(1)$ und somit $\hat{J} = J + o_p(1)$. Wegen $J > 0$ folgt daraus sofort $\frac{1}{\hat{J}} = \frac{1}{J} + o_p(1)$. □

Proposition 4.8. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 und Abschnitt 4.1 gilt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j(B(X_j) - E)\varepsilon_j + o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Zerlege den zu untersuchenden Term ähnlich wie in [WR02] bzw. [Sch07] mit Δ_n wie in Proposition 3.8:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1,j\neq i}^n Z_j\varepsilon_j k_b(X_i - X_j)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1,j\neq i}^n Z_j(r(X_j) - r(X_i))k_b(X_i - X_j)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)r(X_i)\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}k_b(0) \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)r(X_i)\Big(\frac{\Delta_n(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - \frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big) \\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\frac{(\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i) - r(X_i)g(X_i))\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)} \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\frac{\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}^2(X_i)} \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)(r_{a_n}(X_i) - r(X_i)) =: \sum_{\nu=1}^7 R_\nu^{(n)}.
\end{aligned}$$

Schreibe wie üblich

$$\begin{aligned}
P(n^{1/2}|R_7^{(n)}| > \eta) &\leq \frac{n^{1/2}}{\eta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\Big[Z_i|B(X_i)-E||r(X_i)|\Big|\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big|\Big] \\
&= \frac{n^{1/2}}{\eta}E\Big[Z|B(X)-E||r(X)|\Big|\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)}-1\Big|1_{\{g(X)<a_n\}}\Big] \\
&\leq \frac{n^{1/2}}{\eta}2E[|B(X)-E||r(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}] \\
&\leq \frac{2}{c_\pi\eta}n^{1/2}E[|\varkappa(X)||r(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}] \\
&\quad + \frac{2|E|}{\eta}n^{1/2}E[|r(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}].
\end{aligned}$$

Nach (B.ag$\varkappa$) und (B.agr) konvergiert dies gegen Null.
$R_6^{(n)}$ schätzt man betraglich ab durch

$$\begin{aligned}
|R_6^{(n)}| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i|B(X_i)-E|\frac{|\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta_{a_n}^2}{g_{a_n}^2(X_i)} \\
&\leq \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|B(X_i)-E|\Big|\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\Big| \\
&\quad + \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|B(X_i)-E||r(X_i)| \\
&\leq \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2} \\
&\quad + \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r^2(X_i)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 gilt $\frac{1}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| = o_p(n^{-1/4})$. Nach Bemerkung 4.1c) gilt ferner

$$E[B^2(X_1)] \leq \frac{1}{c_\pi^2}E[h^2(X_1,Y_1)\ell^2(\varepsilon_1)] < \infty.$$

Daher ergibt sich $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^2(X_i) = O_p(1)$ und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B(X_i)-E)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(X_i)^2 - 2E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(X_i)+E^2 = O_p(1)$$

mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen. Benutzt man zusätzlich noch Proposition 3.6, so erhält man $R_6^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.

Ergänze $R_5^{(n)}$ auf folgende Weise

$$\begin{aligned}
R_5^{(n)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\frac{\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i) && (4.1.1)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\frac{\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Delta_{a_n}(X_i) && (4.1.2)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)r(X_i)\frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)} && (4.1.3)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)r(X_i)\frac{g_{a_n}(X_i)-g(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\Delta_{a_n}(X_i). && (4.1.4)
\end{aligned}$$

Für (4.1.1) rechnet man mit Hilfe von Proposition 3.6, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2 = O_p(1)$ und Lemma 3.4

$$\begin{aligned}
|(4.1.1)| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |B(X_i)-E|\frac{\left|\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\right|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i)\\
&\leq \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |B(X_i)-E|\left|\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\right|\\
&\leq \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\\
&= o_p(n^{-3/4}).
\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned}
|(4.1.2)| &\leq \frac{1}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\\
&= o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Den Betrag von (4.1.3) schätze man ebenfalls nach oben ab durch

$$\frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)\Big)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}.$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt $(4.1.3) = o_p(n^{-1/2})$.
Schätze auch den Betrag von (4.1.4) auf ähnliche Weise ab:

$$\begin{aligned}
&|(4.1.4)|\\
\leq&\frac{1}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)\Big(1-\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big)^{1/2}\\
=&\frac{1}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wegen (B.agr) gilt nun

$$P\Big(n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}} > \eta\Big) \leq \frac{n^{1/2}}{\eta}E\Big[r^2(X_1)1_{\{g(X_1)<a_n\}}\Big] \to 0.$$

Damit erhält man (4.1.4) $= o_p(n^{-1/2})$, insgesamt also $R_5^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Schreibe $R_4^{(n)}$ als

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)r(X_i)\frac{\hat{g}(X_i)g_{a_n}(X_i)-\hat{g}_{a_n}(X_i)g(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}.$$

Wie in Proposition A.6 in Anhang A folgt mit (B.agr) aus Abschnitt 3.1 und (B.ag$\varkappa$r) aus Abschnitt 4.1 $R_4^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Weiterhin ergibt sich mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen

$$\begin{aligned} |R_3^{(n)}| &\leq \frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i|B(X_i)-E||r(X_i)| \\ &\leq \frac{K}{nba_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (B(X_i)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nach (B.$\varkappa$) gilt $E[B^2(X)] \leq c_\pi^{-2}E[\varkappa^2(X)] < \infty$. Daher liefern (B.a) und das schwache Gesetz der großen Zahlen $R_3^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Untersuche als nächstes

$$\begin{aligned} &n\cdot E[(R_2^{(n)})^2] \\ =&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} E\Big[\frac{Z_i}{g_{a_n}^2(X_i)}(B(X_i)-E)^2 Z_j(r(X_j)-r(X_i))^2 k_b^2(X_i-X_j)\Big] \\ &+\frac{1}{n^3}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ i_1\neq j_1, i_2\neq j_2}} E\Big[\frac{Z_{i_1}Z_{j_1}}{g_{a_n}(X_{i_1})}(B(X_{i_1})-E)(r(X_{j_1})-r(X_{i_1}))k_b(X_{i_1}-X_{j_1}) \\ &\qquad\cdot\frac{Z_{i_2}Z_{j_2}}{g_{a_n}(X_{i_2})}(B(X_{i_2})-E)(r(X_{j_2})-r(X_{i_2}))k_b(X_{i_2}-x_{j_2})\Big] \end{aligned}$$

auf Konvergenz gegen Null. Wegen identischer Verteilung wird aus der Summe über die quadratischen Terme

$$\frac{n-1}{n^2}E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}(B(X_1)-E)^2\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))^2k_b^2(X_1-X_2)\Big].$$

Mit (B.k), (B.r)(i) und (B.p) schätzt man dies nach oben ab durch

$$\begin{aligned} &\frac{K}{nba_n^2}E\Big[(B(X_1)-E)^2E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))^2k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big] \\ =&\frac{K}{nba_n^2}E\Big[(B(X_1)-E)^2\int g(X_1+bu)(r(X_1+bu)-r(X_1))^2k(u)du\Big] \\ \leq&\frac{KC_pL_r^2}{na_n^2}b\int u^2k(u)duE[(B(X)-E)^2]. \end{aligned}$$

Dies konvergiert wegen (B.a)(i) gegen Null.
Der Anteil der gemischten Summe mit vier verschiedenen Indices wird aufgrund der unabhängigen und identischen Verteilung zu

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}\Bigg(&n^{1/2}E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(B(X_1)-E) \\ &\cdot E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big]\Bigg)^2. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.1 und (B.r) formt man um

$$\begin{aligned}
&|E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)|\\
=&\Big|\int g(X_1+bu)(r(X_1+bu)-r(X_1))k(u)du\Big|\\
\leq&\int |g(X_1+bu)-g(X_1)||r(X_1+bu)-r(X_1)|k(u)du\\
&+|g(X_1)|b|r'(X_1)|\Big|\int uk(u)du\Big|+|g(X_1)|b\int\int_0^1 |r'(X_1+tbu)-r'(X_1)|dt|u|k(u)du\\
\leq& L_gL_rb^2\int u^2k(u)du+|g(X_1)|L_r'b^2\int u^2k(u)du.
\end{aligned}$$

Also erhält man wegen (B.a)(ii)

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}\bigg(n^{1/2}E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(B(X_1)-E)\\
&\qquad\cdot E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big]\bigg)^2\\
&\leq\bigg(n^{1/2}E\Big[\frac{1}{g_{a_n}(X_1)}|B(X_1)-E||E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)|\Big]\bigg)^2\\
&\leq\frac{nb^4}{a_n^2}\bigg(L_gL_rE[|B(X_1)-E|]+L_r'a_nE\Big[|B(X_1)-E|\Big|\frac{g(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}\Big|\Big]\bigg)^2\bigg(\int u^2k(u)du\bigg)^2\\
&\leq\frac{nb^4}{a_n^2}\bigg(L_gL_r+L_r'a_n\bigg)^2E[(B(X_1)-E)^2]\bigg(\int u^2k(u)du\bigg)^2\to 0.
\end{aligned}$$

Nach (B.$\varkappa$)(i) und (B.π) aus Abschnitt 3.1 gilt

$$\begin{aligned}
|B(X_j+bu)-B(X_j)| &= \Big|\frac{\varkappa(X_j+bu)}{\pi(X_j+bu)}-\frac{\varkappa(X_j)}{\pi(X_j)}\Big|\\
&= \Big|\frac{\varkappa(X_j+bu)\pi(X_j)-\varkappa(X_j)\pi(X_j+bu)}{\pi(X_j+bu)\pi(X_j)}\Big|\\
&\leq \Big|\frac{\varkappa(X_j+bu)-\varkappa(X_j)}{\pi(X_j+bu)}\Big|+\Big|\frac{\varkappa(X_j)(\pi(X_j)-\pi(X_j+bu))}{\pi(X_j+bu)\pi(X_j)}\Big|\\
&\leq \frac{L_\varkappa}{c_\pi}b|u|+\frac{C_\pi'}{c_\pi^2}|\varkappa(X_j)|b|u| =: c_B^{(1)}b|u|+c_B^{(2)}|\varkappa(X_j)|b|u|.
\end{aligned}$$

Benutze dies, um wie folgt abzuschätzen

$$\begin{aligned}
&\Big|E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(B(X_1)-E)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_2)\Big)\Big|\\
=&\Big|\int\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}(B(X_2+bu)-E)(r(X_2)-r(X_2+bu))k(u)du\Big|\\
\leq&\int\Big|\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||B(X_2+bu)-B(X_2)||r(X_2)-r(X_2+bu)|k(u)du\\
&+|B(X_2)-E|\int\Big|\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||r(X_2)-r(X_2+bu)|k(u)du\\
\leq& L_rb^2\int u^2k(u)du\big(c_B^{(1)}+c_B^{(2)}|\varkappa(X_2)|\big)+|B(X_2)-E|L_rb\int|u|k(u)du.
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Methoden wie in Anhang A ergibt sich hiermit und mit Lemma A.2, dass der Anteil der gemischten Summe mit drei verschiedenen Indices gegen Null konvergiert.
Es bleibt noch der Anteil der gemischten Summe mit $i_1 = j_2$ und $i_2 = j_1$ zu betrachten. Wegen identischer Verteilung wird dieser zu

$$-\frac{n-1}{n^2}E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(B(X_1)-E)\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}(B(X_2)-E)(r(X_2)-r(X_1))^2k_b^2(X_1-X_2)\Big].$$

Betraglich kann man diesen Ausdruck abschätzen durch

$$\frac{K^2}{nb^2a_n^2}E[|B(X_1)-E||B(X_2)-E|(r(X_2)-r(X_1))^2].$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&E[|B(X_1)-E||B(X_2)-E|(r(X_2)-r(X_1))^2]\\
=&E[|B(X_1)-E|]E[|B(X_2)-E|r^2(X_2)]-2E[|B(X_1)-E||B(X_2)-E|r(X_1)r(X_2)]\\
&+E[|B(X_2)-E|]E[|B(X_1)-E|r^2(X_1)]\\
\leq&2E[|B(X)-E|]\Big(E[(B(X)-E)^2r^2(X)]\Big)^{1/2}\Big(E[r^2(X)]\Big)^{1/2}\\
&+2E[(B(X)-E)^2]E[r^2(X)]<\infty
\end{aligned}$$

und (B.a)(i) ist der Anteil der gemischten Summe mit zwei verschiedenen Indices gleich $o(1)$. Es folgt also $R_2^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Vertausche in $R_1^{(n)}$ die Summationsreihenfolge und ergänze einen Term, der ein bedingter Erwartungswert ist:

$$\begin{aligned}
R_1^{(n)} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\frac{1}{n}\sum_{i=1,i\neq j}^n\frac{Z_i(B(X_i)-E)}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\int\frac{\pi(x)(B(x)-E)}{g_{a_n}(x)}k_b(x-X_j)p(x)dx\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\Big(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}\frac{Z_i(B(X_i)-E)}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad-\int\frac{\pi(x)(B(x)-E)}{g_{a_n}(x)}k_b(x-X_j)p(x)dx\Big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\int(B(x)-E)k_b(x-X_j)dx && (4.1.5)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\int\frac{g(x)-g_{a_n}(x)}{g_{a_n}(x)}(B(x)-E)k_b(x-X_j)dx && (4.1.6)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_j\Big(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}Z_i\frac{B(X_i)-E}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad-\int\frac{g(x)}{g_{a_n}(x)}(B(x)-E)k_b(x-X_j)dx\Big). && (4.1.7)
\end{aligned}$$

Durch Substitution formt man (4.1.5) um in

$$\begin{aligned}(4.1.5) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j\Big(\int B(X_j+bu)k(u)du - E\int k(u)du\Big)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j(B(X_j)-E) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j\int (B(X_j+bu)-B(X_j))k(u)du.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der oben nachgewiesenen Lipschitz-Stetigkeit von B rechnet man wegen der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}& n\cdot E\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j\int (B(X_j+bu)-B(X_j))k(u)du\Big)^2\Big]\\ =&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\int (B(X+bu)-B(X))k(u)du\Big)^2\Big]\\ &+(n-1)\cdot E\Big[Z_1\varepsilon_1\int (B(X_1+bu)-B(X_1))k(u)du\\ &\qquad\cdot Z_2\varepsilon_2\int (B(X_2+bu)-B(X_2))k(u)du\Big]\\ =&\sigma^2E\Big[Z\Big(\int (B(X+bu)-B(X))k(u)du\Big)^2\Big]\\ \le&\sigma^2E\Big[\Big(\frac{L_\varkappa}{c_\pi}b\int |u|k(u)du + \frac{C'_\pi}{c_\pi^2}|\varkappa(X_j)|b\int |u|k(u)du\Big)^2\Big]\\ \le&\sigma^2\Big(\frac{L_\varkappa^2}{c_\pi^2}+2\frac{L_\varkappa C'_\pi}{c_\pi^3}E[|\varkappa(X_j)|]+\frac{(C'_\pi)^2}{c_\pi^4}E[\varkappa^2(X_j)]\Big)b^2\int u^2k(u)du\end{aligned}$$

Dies konvergiert jedoch gegen Null. Man erhält also

$$(4.1.5) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j(B(X_j)-E) + o_p(n^{-1/2}).$$

Für (4.1.6) folgt mit der Unabhängigkeit zunächst

$$\begin{aligned}& n\cdot E[(4.1.6)^2]\\ =&E\Big[Z\varepsilon^2\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}(B(X+bu)-E)k(u)du\Big)^2\Big]\\ &+(n-1)\cdot E\Big[Z_1\varepsilon_1\int \frac{g(X_1+bu)-g_{a_n}(X_1+bu)}{g_{a_n}(X_1+bu)}(B(X_1+bu)-E)k(u)du\\ &\qquad\cdot Z_2\varepsilon_2\int \frac{g(X_2+bu)-g_{a_n}(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}(B(X_2+bu)-E)k(u)du\Big]\\ =&E\Big[Z\varepsilon^2\Big((B(X)-E)\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\\ &+\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}(B(X+bu)-B(X))k(u)du\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

Wie in Proposition 3.8 begründet gilt

$$\Big|\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big| \le 2\cdot 1_{\{g(X)<a_n\}} + 4L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du.$$

Schätze damit den oben erhaltenen Ausdruck für $n \cdot E[(4.1.6)^2]$ nach oben ab durch

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2 E\Big[Z(B(X)-E)^2\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big)^2\Big]\\
&+2\sigma^2 E\Big[Z|B(X)-E|\Big|\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}k(u)du\Big|\\
&\quad\cdot\Big|\int \frac{g(X+bv)-g_{a_n}(X+bv)}{g_{a_n}(X+bv)}(B(X+bv)-B(X))k(v)dv\Big|\Big]\\
&+\sigma^2 E\Big[Z\Big(\int \frac{g(X+bu)-g_{a_n}(X+bu)}{g_{a_n}(X+bu)}(B(X+bu)-B(X))k(u)du\Big)^2\Big]\\
\le& 4\sigma^2\Big(E[(B(X)-E)^2 1_{\{g(X)<a_n\}}]+8L_g\frac{b}{a_n}\int |u|k(u)du E[(B(X)-E)^2 1_{\{g(X)<a_n\}}]\\
&+16L_g^2\frac{b^2}{a_n^2}\int u^2k(u)duE[(B(X)-E)^2]\Big)\\
&+8\sigma^2\Big(\frac{L_\varkappa}{c_\pi}b\int|u|k(u)duE[|B(X)-E|]+\frac{C'_\pi}{c_\pi^2}b\int|u|k(u)duE[|B(X)-E||\varkappa(X)|]\Big)\\
&+4\sigma^2\Big(\frac{L_\varkappa^2}{c_\pi^2}+2\frac{L_\varkappa C'_\pi}{c_\pi^3}E[|\varkappa(X)|]+\frac{(C'_\pi)^2}{c_\pi^4}E[\varkappa^2(X)]\Big)b^2\int u^2k(u)du.
\end{aligned}
$$

Wegen Bemerkung 4.1c) und

$$
\begin{aligned}
&E[(B(X)-E)^2 1_{\{g(X)<a_n\}}]\\
\le& E[B^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]+2E\cdot E[|B(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}]+E^2\cdot E[1_{\{g(X)<a_n\}}]\\
\le& \frac{1}{c_\pi^2}E[\varkappa^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]+\frac{2}{c_\pi}E[|\varkappa(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}]+E^2P(g(X)<a_n)
\end{aligned}
$$

folgt $(4.1.6) = o_p(n^{-1/2})$.
Schreibe schließlich (4.1.7) als

$$
\begin{aligned}
(4.1.7) \;=\; & \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n\sum_{i:i\neq j} Z_j\varepsilon_j\Big(\frac{Z_i}{g_{a_n}(X_i)}(B(X_i)-E)k_b(X_i-X_j)\\
&-E\Big(\frac{Z_0}{g_{a_n}(X_0)}(B(X_0)-E)k_b(X_0-X_j)\Big|X_j\Big)\Big) && (4.1.8)\\
&-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n Z_j\varepsilon_jE\Big(\frac{Z_0}{g_{a_n}(X_0)}(B(X_0)-E)k_b(X_0-X_j)\Big|X_j\Big). && (4.1.9)
\end{aligned}
$$

Abschätzen liefert zusammen mit (B.a)(i) und $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n|\varepsilon_j| \xrightarrow{P} E[|\varepsilon|]$

$$
\begin{aligned}
n^{1/2}|(4.1.9)| \;\le\; & \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n|\varepsilon_j|E(|B(X_0)-E||X_j)\\
=\; & \frac{K}{n^{1/2}ba_n}E[|B(X)-E|]\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n|\varepsilon_j| \xrightarrow{P} 0,
\end{aligned}
$$

also $(4.1.9) = o_p(n^{-1/2})$. Für (4.1.8) verfahre man im Prinzip wie in Lemma A.7 bzw. Lemma A.9. Definiere zunächst die Abkürzung

$$\Lambda_{i,j} := \frac{Z_i}{g_{a_n}(X_i)}(B(X_i)-E)k_b(X_i-X_j)-E\Big(\frac{Z_0}{g_{a_n}(X_0)}(B(X_0)-E)k_b(X_0-X_j)\Big|X_j\Big).$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
n \cdot E[(4.1.8)^2] &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j:i \neq j} E[Z_j \varepsilon_j^2 \Lambda_{i,j}^2] \\
&\quad + \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2) \\ j_1 \neq i_1, j_2 \neq i_2}} E[Z_{j_1}\varepsilon_{j_1}\Lambda_{i_1,j_1} Z_{j_2}\varepsilon_{j_2}\Lambda_{i_2,j_2}].
\end{aligned}
$$

Für den ersten Term rechnet man mit (B.a)(i)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n^3} \sum_{i,j:i \neq j} E[Z_j \varepsilon_j^2 \Lambda_{i,j}^2] &= \frac{n-1}{n^2} \sigma^2 E[Z_2 \Lambda_{1,2}^2] \\
&\leq \frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2} E[(|B(X_1) - E| + E(|B(X_1) - E||X_2))^2] \\
&\leq \frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2} 4E[(B(X) - E)^2] \to 0.
\end{aligned}
$$

Der Anteil der gemischten Summe mit vier verschiedenen Indices ist gleich Null, da

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3} \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2 \text{ versch.}} E[Z_{j_1}\varepsilon_{j_1}\Lambda_{i_1,j_1} Z_{j_2}\varepsilon_{j_2}\Lambda_{i_2,j_2}] \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \cdot n \cdot E[Z_2 Z_4 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \Lambda_{1,2}\Lambda_{3,4}] \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \cdot n \cdot (E\varepsilon)^2 (E[Z_2\Lambda_{1,2}])^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Für drei verschiedene Indices ergibt sich ebenfalls Null, denn:
$\underline{i_1 = i_2}$: Wegen identischer Verteilung und Unabhängigkeit ist der entsprechende Anteil der gemischten Summe gleich

$$
\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E[Z_2\varepsilon_2\Lambda_{1,2}Z_3\varepsilon_3\Lambda_{1,3}] = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E\varepsilon_2 E\varepsilon_3 E[Z_2\Lambda_{1,2}Z_3\Lambda 1_3] = 0.
$$

$\underline{i_1 = j_2 \text{ bzw. } i_2 = j_1}$: Aus den gleichen Gründen ergibt sich

$$
\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E[Z_2\varepsilon_2\Lambda_{1,2}Z_1\varepsilon_1\Lambda_{3,1}] = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E\varepsilon_2 E\varepsilon_1 E[Z_2\Lambda_{1,2}Z_1\Lambda_{3,1}] = 0.
$$

$\underline{j_1 = j_2}$: Hier erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E[Z_2\varepsilon_2^2\Lambda_{1,2}\Lambda_{3,2}] &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \sigma^2 E[\pi(X_2) E(\Lambda_{1,2}\Lambda_{3,2}|X_2)] \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \sigma^2 E[\pi(X_2)(E(\Lambda_{1,2}|X_2))^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Für den Term mit $i_1 = j_2$ und $i_2 = j_1$ zeigt man auf die gleiche Weise, dass er gleich Null ist. □

Im Beweis von Satz 4.19 werde ich außerdem noch die folgende Verschärfung von Lemma 10.2 aus [Sch93] benötigen:

Proposition 4.9. *Die Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 seien erfüllt. Dann gilt für* $f_n(x) = \int f(x-\beta t)W(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$,

$$E\Big(\Big(\int\Big(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}\Big)^2 f(u)du\Big)^2\Big|\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}\Big) = o_p(1)$$

und

$$\int\Big(\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n} - \frac{f'(u)}{f(u)}\Big)^2 f(u)du \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daraus folgt

$$E\Big(\Big(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u))^2 f(u)du\Big)^2\Big|\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}\Big) = o_p(1).$$

Beweis. Der zweite Teil der Aussage ist identisch zum zweiten Teil von Lemma 10.2 in [Sch93]. Ein Beweis ist in [Sch87] zu finden.
In den Beweis des ersten Teils der Aussage fließen Ideen aus [FHPS03] ein. Setze

$$\bar{f}_n(x) := \frac{1}{n\beta}\sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{\bar{Z}_n} W\Big(\frac{x-\varepsilon_j}{\beta}\Big)$$

und

$$\bar{f}_n'(x) := \frac{1}{n\beta^2}\sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{\bar{Z}_n} W'\Big(\frac{x-\varepsilon_j}{\beta}\Big).$$

Damit schreibe man

$$\begin{aligned}\Big|\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}\Big| &= \Big|\frac{\bar{f}_n'(u)}{\alpha_n+\bar{f}_n(u)} - \frac{f_n'(u)}{\alpha_n+f_n(u)}\Big| \\ &\le \frac{|\bar{f}_n'(u)-f_n'(u)|}{\alpha_n+\bar{f}_n(u)} + \frac{|f_n'(u)|}{\alpha_n+f_n(u)}\cdot\frac{|\bar{f}_n(u)-f_n(u)|}{\alpha_n+\bar{f}_n(u)}.\end{aligned}$$

Beachte, dass gilt

$$\begin{aligned}E(\bar{f}_n(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n\beta\bar{Z}_n}\sum_{j=1}^n Z_j E\Big(W\Big(\frac{x-\varepsilon_j}{\beta}\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\ &= \frac{1}{\beta}\int W\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)f(u)du = \int W(t)f(x-t\beta)dt = f_n(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}E(\bar{f}_n'(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n\beta^2\bar{Z}_n}\sum_{j=1}^n Z_j E\Big(W'\Big(\frac{x-\varepsilon_j}{\beta}\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\ &= \frac{1}{\beta^2}\int W'\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)f(u)du = \frac{1}{\beta}\int W'(t)f(x-t\beta)dt \\ &= \frac{1}{\beta}W(t)f(x-t\beta)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int W(t)f'(x-t\beta)dt = f_n'(x).\end{aligned}$$

Zudem ergibt sich

$$\frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j = \frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_iZ_j - \frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\sum_{i=1}^n Z_i = 1 - \frac{1}{n\bar{Z}_n}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l &= \frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i,j,l=1}^{n} Z_iZ_jZ_l - \frac{3}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j - \frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i=1}^{n} Z_i \\ &= 1-\frac{3}{n\bar{Z}_n}\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)-\frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2} = 1-\frac{3}{n\bar{Z}_n}+\frac{2}{n^2\bar{Z}_n^2}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j,l,\nu \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_lZ_\nu &= \frac{1}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j,l,\nu=1}^{n} Z_iZ_jZ_lZ_\nu - \frac{6}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l \\ &\quad -\frac{7}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j - \frac{1}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i=1}^{n} Z_i \\ &= 1-\frac{6}{n\bar{Z}_n}\Big(1-\frac{3}{n\bar{Z}_n}+\frac{2}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big) \\ &\quad -\frac{7}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)-\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3} \\ &= 1-\frac{6}{n\bar{Z}_n}+\frac{11}{n^2\bar{Z}_n^2}-\frac{6}{n^3\bar{Z}_n^3}.\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}E(\bar{f}_n^2(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j}{\bar{Z}_n^2}E\big[(W_\beta(x-\varepsilon_j))^2\big] \\ &\quad +\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_iZ_j}{\bar{Z}_n^2}E\big[W_\beta(x-\varepsilon_i)W_\beta(x-\varepsilon_j)\big] \\ &= \frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\sum_{j=1}^{n} Z_jE\big[(W_\beta(x-\varepsilon))^2\big] + f_n^2(x)\frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j \\ &= \frac{1}{n\bar{Z}_n}\int (W_\beta(x-u))^2 f(u)du + f_n^2(x)\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&E(\bar{f}_n^3(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\ =&\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i=1}^{n} Z_iE\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^3\big] \\ &+\frac{3}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_jE\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^2\big]E[W_\beta(x-\varepsilon_j)] \\ &+\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_lE[W_\beta(x-\varepsilon_i)]E[W_\beta(x-\varepsilon_j)]E[W_\beta(x-\varepsilon_l)] \\ =&\frac{1}{n^2\bar{Z}_n^2}\int (W_\beta(x-u))^3 f(u)du + 3f_n(x)\int (W_\beta(x-u))^2 f(u)du\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big) \\ &+f_n^3(x)\Big(1-\frac{3}{n\bar{Z}_n}+\frac{2}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big)\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&E(\bar{f}_n^4(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i=1}^n Z_i E\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^4\big]\\
&+\frac{3}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_jE\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^2\big]E\big[(W_\beta(x-\varepsilon_j))^2\big]\\
&+\frac{4}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_jE\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^3\big]E[W_\beta(x-\varepsilon_j)]\\
&+\frac{6}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}} Z_iZ_jZ_lE\big[(W_\beta(x-\varepsilon_i))^2\big]E[W_\beta(x-\varepsilon_j)]E[W_\beta(x-\varepsilon_l)]\\
&+\frac{1}{n^4\bar{Z}_n^4}\sum_{i,j,l,\nu\text{ versch.}} Z_iZ_jZ_lZ_\nu E[W_\beta(x-\varepsilon_i)]E[W_\beta(x-\varepsilon_j)]\\
&\qquad\cdot E[W_\beta(x-\varepsilon_l)]E[W_\beta(x-\varepsilon_\nu)]\\
=&\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\int(W_\beta(x-u))^4f(u)du+\frac{3}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)\Big(\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\Big)^2\\
&+\frac{4}{n^2\bar{Z}_n^2}f_n(x)\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)\int(W_\beta(x-u))^3f(u)du\\
&+\frac{6}{n\bar{Z}_n}f_n^2(x)\Big(1-\frac{3}{n\bar{Z}_n}+\frac{2}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big)\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\\
&+f_n^4(x)\Big(1-\frac{6}{n\bar{Z}_n}+\frac{11}{n^2\bar{Z}_n^2}-\frac{6}{n^3\bar{Z}_n^3}\Big).
\end{aligned}
$$

Setze dies nun in

$$
\begin{aligned}
&E\big((\hat{f}_n(x)-f_n(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E(\hat{f}_n^4(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})-4f_n(x)E(\hat{f}_n^3(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})+6f_n^2(x)E(\hat{f}_n^2(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&-4f_n^3(x)E(\hat{f}_n(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})+f_n^4(x)\\
=&E(\hat{f}_n^4(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})-4f_n(x)E(\hat{f}_n^3(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})+6f_n^2(x)E(\hat{f}_n^2(x)|\mathbf{X},\mathbf{Z})-3f_n^4(x)
\end{aligned}
$$

ein und sortiere die Terme nach dem Exponenten von $f_n(x)$. Das liefert

$$
\begin{aligned}
&E\big((\bar{f}_n(x)-f_n(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\int(W_\beta(x-u))^4f(u)du+\frac{3}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(1-\frac{1}{n\bar{Z}_n}\Big)\Big(\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\Big)^2\\
&-f_n(x)\int(W_\beta(x-u))^3f(u)du\frac{4}{n^3\bar{Z}_n^3}+f_n^4(x)\frac{3}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(1-\frac{2}{n\bar{Z}_n}\Big)\\
&+f_n^2(x)\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\frac{6}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(\frac{2}{n\bar{Z}_n}-1\Big)\\
\le&\frac{1}{n^3\bar{Z}_n^3}\int(W_\beta(x-u))^4f(u)du+\frac{3}{n^2\bar{Z}_n^2}\Big(\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\Big)^2\\
&+f_n^4(x)\frac{3}{n^2\bar{Z}_n^2}+f_n^2(x)\int(W_\beta(x-u))^2f(u)du\frac{12}{n^3\bar{Z}_n^3}.
\end{aligned}
$$

Mit (B.W) schätzt man das weiter ab durch

$$E\big((\bar f_n(x)-f_n(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \le \frac{(C_W^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta^3}f_n(x)+\frac{3(C_W^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^2}f_n^2(x)+f_n^4(x)\frac{3}{n^2\bar Z_n^2}+f_n^3(x)\frac{12C_W^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta}.$$

Wegen (B.f)(ii) gilt

$$f_n(x)=\int f(x-t\beta)W(t)dt \le C_f^{(0)}\int W(t)=C_f^{(0)}$$

und somit auch

$$E\big((\bar f_n(x)-f_n(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \le \frac{(C_W^{(0)})^3C_f^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta^3}+\frac{3(C_W^{(0)})^2(C_f^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^2}+\frac{3(C_f^{(0)})^4}{n^2\bar Z_n^2}+\frac{12C_W^{(0)}(C_f^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta}.$$

Analog erhält man mit (B.W)

$$\begin{aligned}
&E\big((\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&\frac{1}{n^3\bar Z_n^3}\int\Big(\frac{1}{\beta^2}W'\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)\Big)^4f(u)du+\frac{3}{n^2\bar Z_n^2}\bigg(\int\Big(\frac{1}{\beta^2}W'\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)\Big)^2f(u)du\bigg)^2\\
&+(f_n'(x))^4\frac{3}{n^2\bar Z_n^2}+(f_n'(x))^2\int\Big(\frac{1}{\beta^2}W'\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)\Big)^2f(u)du\frac{12}{n^3\bar Z_n^3}\\
&-f_n'(x)\int\Big(\frac{1}{\beta^2}W'\Big(\frac{x-u}{\beta}\Big)\Big)^3f(u)du\frac{4}{n^3\bar Z_n^3}\\
\le&\frac{C_W^4(C_W^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta^7}\int W_\beta(x-u)f(u)du+\frac{3C_W^4(C_W^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^6}\bigg(\int W_\beta(x-u)f(u)du\bigg)^2\\
&+(f_n'(x))^4\frac{3}{n^2\bar Z_n^2}+(f_n'(x))^2\int W_\beta(x-u)f(u)du\frac{12C_W^2C_W^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta^3}\\
&+|f_n'(x)|\frac{4C_W^3(C_W^{(0)})^2}{n^3\bar Z_n^3\beta^5}\int W_\beta(x-u)f(u)du\\
=&\frac{C_W^4(C_W^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta^7}f_n(x)+\frac{3C_W^4(C_W^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^6}f_n^2(x)+(f_n'(x))^4\frac{3}{n^2\bar Z_n^2}+(f_n'(x))^2f_n(x)\frac{12C_W^2C_W^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta^3}\\
&+|f_n'(x)|\frac{4C_W^3(C_W^{(0)})^2}{n^3\bar Z_n^3\beta^5}f_n(x).
\end{aligned}$$

Wegen

$$|f_n'(x)|\le\frac{1}{\beta}\int f(x-t\beta)|W'(t)|dt\le\frac{C_W}{\beta}\int f(x-t\beta)W(t)dt=\frac{C_W}{\beta}f_n(x)$$

und (B.f)(ii) folgt also die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E\big((\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \le\ & \frac{C_W^4(C_W^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta^7}f_n(x)+\frac{3C_W^4(C_W^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^6}f_n^2(x)+f_n^4(x)\frac{3C_W^4}{n^2\bar Z_n^2\beta^4}\\
&+f_n^3(x)\frac{12C_W^4C_W^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta^5}+f_n^2(x)\frac{4C_W^4(C_W^{(0)})^2}{n^3\bar Z_n^3\beta^6}\\
\le\ & \frac{C_W^4(C_W^{(0)})^3C_f^{(0)}}{n^3\bar Z_n^3\beta^7}+\frac{3C_W^4(C_W^{(0)})^2(C_f^{(0)})^2}{n^2\bar Z_n^2\beta^6}+\frac{3C_W^4(C_f^{(0)})^4}{n^2\bar Z_n^2\beta^4}\\
&+\frac{12C_W^4C_W^{(0)}(C_f^{(0)})^3}{n^3\bar Z_n^3\beta^5}+\frac{4C_W^4(C_W^{(0)})^2(C_f^{(0)})^2}{n^3\bar Z_n^3\beta^6}.
\end{aligned}$$

Mit (B.W) erhält man ferner

$$\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n + f_n(x)} \le \frac{C_W}{\beta} \frac{f_n(x)}{\alpha_n + f_n(x)} \le \frac{C_W}{\beta}.$$

Also ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
E\Big(\Big(\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n + f_n(x)} \frac{|\bar f_n(x) - f_n(x)|}{\alpha_n + \bar f_n(x)}\Big)^4 \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) &\le \frac{C_W^4}{\beta^4 \alpha_n^4} E\big((\bar f_n(x) - f_n(x))^4 \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big) \\
&\le \frac{C_W^4 (C_W^{(0)})^3 C_f^{(0)}}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^7 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^6 \alpha_n^4} \\
&\quad + \frac{3 C_W^4 (C_f^{(0)})^4}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^4 \alpha_n^4} + \frac{12 C_W^4 C_W^{(0)} (C_f^{(0)})^3}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^5 \alpha_n^4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E\Big(\Big(\frac{|\bar f_n'(x) - f_n'(x)|}{\alpha_n + \bar f_n(x)}\Big)^4 \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) &\le \frac{1}{\alpha_n^4} E\big((\bar f_n'(x) - f_n'(x))^4 \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big) \\
&\le \frac{C_W^4 (C_W^{(0)})^3 C_f^{(0)}}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^7 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^6 \alpha_n^4} \\
&\quad + \frac{3 C_W^4 (C_f^{(0)})^4}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^4 \alpha_n^4} + \frac{12 C_W^4 C_W^{(0)} (C_f^{(0)})^3}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^5 \alpha_n^4} \\
&\quad + \frac{4 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^6 \alpha_n^4}.
\end{aligned}$$

Nach (B.α) gilt

$$n^3 \beta^7 \alpha_n^4 = n\beta^{-1} \cdot (n\beta^4 \alpha_n^2)^2 \to \infty\ ,\ n^2 \beta^6 \alpha_n^4 = \beta^{-2} (n\beta^4 \alpha_n^2)^2 \to \infty$$

und

$$n^2 \beta^4 \alpha_n^4 = \beta^{-4} (n\beta^4 \alpha_n^2)^2 \to \infty$$

sowie

$$n^3 \beta^6 \alpha_n^4 = n\beta^{-2} (n\beta^4 \alpha_n^2)^2 \to \infty.$$

Wegen $\bar Z_n^{-1} = (EZ)^{-1} + o_p(1)$ konvergieren die beiden soeben erhaltenen Schranken stochastisch gegen Null. Zudem hängen beide Schranken nicht mehr von x ab. Mit den Abkürzungen

$$\Xi_n := \frac{C_W^4 (C_W^{(0)})^3 C_f^{(0)}}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^7 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^6 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_f^{(0)})^4}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^4 \alpha_n^4} + \frac{12 C_W^4 C_W^{(0)} (C_f^{(0)})^3}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^5 \alpha_n^4}$$

und

$$\begin{aligned}
\Upsilon_n &:= \frac{C_W^4 (C_W^{(0)})^3 C_f^{(0)}}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^7 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^6 \alpha_n^4} + \frac{3 C_W^4 (C_f^{(0)})^4}{n^2 \bar Z_n^2 \beta^4 \alpha_n^4} \\
&\quad + \frac{12 C_W^4 C_W^{(0)} (C_f^{(0)})^3}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^5 \alpha_n^4} + \frac{4 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^6 \alpha_n^4} \\
&= \Xi_n + \frac{4 C_W^4 (C_W^{(0)})^2 (C_f^{(0)})^2}{n^3 \bar Z_n^3 \beta^6 \alpha_n^4}
\end{aligned}$$

folgt also mit dem Satz von Tonelli und der Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int\Big(\ell(u,\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{f_n'(u)}{\alpha_n+f_n(u)}\Big)^4 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\int E\Big(\Big(\frac{|\bar f_n'(u)-f_n'(u)|}{\alpha_n+\bar f_n(u)}+\frac{|f_n'(u)|}{\alpha_n+f_n(u)}\cdot\frac{|\bar f_n(u)-f_n(u)|}{\alpha_n+\bar f_n(u)}\Big)^4\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)f(u)du\\
\leq&\sup_{x\in\mathbb{R}}E\Big(\frac{|\bar f_n'(x)-f_n'(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}+\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n+f_n(x)}\cdot\frac{|\bar f_n(x)-f_n(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big)^4\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(E\Big(\frac{(\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+E\Big(\frac{(f_n'(x))^4}{(\alpha_n+f_n(x))^4}\frac{(\bar f_n(x)-f_n(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad+4E\Big(\Big(\frac{|\bar f_n'(x)-f_n'(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big)^3\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n+f_n(x)}\frac{|\bar f_n(x)-f_n(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad+6E\Big(\Big(\frac{|\bar f_n'(x)-f_n'(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big)^2\Big(\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n+f_n(x)}\frac{|\bar f_n(x)-f_n(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad+4E\Big(\frac{|\bar f_n'(x)-f_n'(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big(\frac{|f_n'(x)|}{\alpha_n+f_n(x)}\frac{|\bar f_n(x)-f_n(x)|}{\alpha_n+\bar f_n(x)}\Big)^3\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)\\
\leq&\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(E\Big(\frac{(\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+E\Big(\frac{(f_n'(x))^4}{(\alpha_n+f_n(x))^4}\frac{(\bar f_n(x)-f_n(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad+4\Big(E\Big(\frac{(\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{3/4}\Big(E\Big(\frac{(f_n'(x))^4}{(\alpha_n+f_n(x))^4}\frac{(\bar f_n(x)-f_n(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/4}\\
&\quad+6\Big(E\Big(\frac{(\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\Big(E\Big(\frac{(f_n'(x))^4}{(\alpha_n+f_n(x))^4}\frac{(\bar f_n(x)-f_n(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\\
&\quad+4\Big(E\Big(\frac{(\bar f_n'(x)-f_n'(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/4}\Big(E\Big(\frac{(f_n'(x))^4}{(\alpha_n+f_n(x))^4}\frac{(\bar f_n(x)-f_n(x))^4}{(\alpha_n+\bar f_n(x))^4}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{3/4}\Big)\\
\leq&\Upsilon_n+\Xi_n+4\Upsilon_n^{3/4}\Xi_n^{1/4}+6\Upsilon_n^{1/2}\Xi_n^{1/2}+4\Upsilon_n^{1/4}\Xi_n^{3/4}=o_p(1).
\end{aligned}
$$

Zusammen mit Lemma 3.2 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\Big(\int(\ell(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&E\Big(\Big(\int\Big(\Big|\ell(u,\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}\Big|+\Big|-\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}-\ell(u)\Big|\Big)^2f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&E\Big(\Big(2\int\Big(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}\Big)^2f(u)\\
&\qquad+2\int\Big(\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}-\frac{f'(u)}{f(u)}\Big)^2f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&8E\Big(\int\Big(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}\Big)^4f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad+8\Big(\int\Big(\frac{f_n'(u)}{f_n(u)+\alpha_n}-\frac{f'(u)}{f(u)}\Big)^2f(u)du\Big)^2=o_p(1).
\end{aligned}
$$

Somit ist die Behauptung gezeigt. □

4.2 Nachweis der Effizienz

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des Theorems

Theorem 4.10. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 lässt sich der Schätzer $\hat{H} + \hat{T}$ schreiben als*

$$\begin{aligned}
\hat{H} + \hat{T} \;=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j}{EZ}(\bar{h}(\varepsilon_j) - E[\bar{h}(\varepsilon)]) \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{1}{J}\Big(\frac{1}{\pi(X_i)}E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)|X_i) - \frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)\ell(\varepsilon_i) \\
&+o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Er ist ein effizienter Schätzer für $E[h(X,Y)]$.

Da der Schätzer $\hat{H}$ bereits in Abschnitt 3 betrachtet wurde, reicht es, sich mit $\hat{T}$ zu beschäftigen. Teile dazu $\hat{T}$ auf in eine Summe von Summen und untersuche die einzelnen Summen getrennt.

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_i - \hat{E})\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\varepsilon}_i\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_i - \hat{E})\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du - \hat{\varepsilon}_i\Big) \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_i - \hat{E})\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du
\end{aligned}$$

An dieser Stelle erklärt sich auch, warum ich $\hat{E}$ in Abschnitt 4.1 so definiert habe. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_i - \hat{E})\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du \\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\hat{B}_i - \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\hat{B}_j\Big)\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du \\
=&\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\hat{B}_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\hat{B}_j\Big)\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du = 0.
\end{aligned}$$

Das hat jedoch den Preis, dass die Untersuchungen von $\hat{E}$ komplizierter werden als bei dem naiven Schätzer. Dort hätte andererseits der Term mit $\int \hat{\ell}(u)f(u)du$ Probleme bereitet, da für ihn keine bessere Konvergenzrate als $o_p(1)$ zu erwarten ist.

Zerlege nun $\hat{T}$ weiter.

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni}-\hat{E})\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du-\hat{\varepsilon}_i\Big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du-\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\Big)\\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_i-B(X_i))(\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)\\
&\quad -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\varepsilon_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)(\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)\\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du-\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\Big)\\
&\quad -(\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du-\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\Big)\\
&\quad +(\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)-(\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\\
&\quad +(\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\Big(\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)-\varepsilon_i\Big) =: \sum_{\nu=1}^{11} S_\nu^{(n)}
\end{aligned}$$

Der Term $S_{11}^{(n)}$ ist gerade derjenige, der den gewünschten Beitrag zur Einflußfunktion liefert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass gilt $\sum_{\nu=1}^{10} S_\nu^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.

Satz 4.11. *Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt*

$$S_9^{(n)} = -(\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i) = o_p(n^{-1/2})$$

und

$$S_{10}^{(n)} = (\hat{E}-E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i = o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Da die Zufallsvariablen ε_i unabhängig von den X_i sind, gilt dies auch für ε_i und Z_i. Ein Beweis dazu steht z.B. in [Sch07]. Da die ε_i zudem zentriert sind, erhält man $E[Z\varepsilon] = EZE\varepsilon = 0$. Der Zentrale Grenzwertsatz liefert nun

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i = O_p(n^{-1/2}).$$

Mit Proposition B.4 folgt also $S_{10}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Ebenso sind Z_i und $\ell(\varepsilon_i)$ unabhängig voneinander. Auch $\ell(\varepsilon_i)$ hat Erwartungswert Null, so dass aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes wieder gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\ell(\varepsilon_i) = O_p(n^{-1/2}).$$

Mit Proposition B.4 folgt schließlich $S_9^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$. □

Satz 4.12. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_8^{(n)} = (\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Wie in Proposition 4.8 zeigt man, dass gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) = O_p(n^{-1/2}).$$

Mit Proposition B.4 folgt daraus

$$(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = o_p(n^{-1/2}).$$

□

Satz 4.13. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_7^{(n)} = -(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\left(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du - \frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\right) = o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Definiere $\delta_{ni} := \hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)$. Damit lässt sich $S_7^{(n)}$ schreiben als

$$\begin{aligned}
S_7^{(n)} \;=\; & -(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\left(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}(u - \delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right)\frac{1}{\hat{J}} \\
& -(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\ell(\varepsilon_i)\left(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J}\right) \\
& -(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\left(\int \hat{\ell}(u - \delta_{ni})f(u)du - \int \hat{\ell}(u)f(u)du\right. \\
& \qquad \left. + \int \hat{\ell}'(u)f(u)du\delta_{ni}\right)\frac{1}{\hat{J}} \\
& +\frac{1}{\hat{J}}(\hat{E} - E)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\int \hat{\ell}'(u)f(u)du =: \sum_{\nu=1}^{4} S_{7,\nu}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Analog zu Proposition 4.8 zeigt man

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i + o_p(n^{-1/2}).$$

Wegen $E[Z\varepsilon] = EZE\varepsilon = 0$ bedeutet das nach dem Zentralen Grenzwertsatz aber auch $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) = O_p(n^{-1/2})$. Mit Proposition B.4 und $\int \hat{\ell}'(u)f(u)du = J + o_p(1)$ sowie $\frac{1}{\hat{J}} = \frac{1}{J} + o_p(1) = O_p(1)$ aus Proposition 4.7 ergibt sich also $S_{7,4}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Wegen $E[Z\ell(\varepsilon)] = E\ell(\varepsilon)EZ = 0$ gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\ell(\varepsilon_i) = O_p(n^{-1/2})$ aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes. Mit Proposition B.4 und $\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J} = o_p(1)$ erhält man also $S_{7,2}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.

Im Term $S_{7,3}^{(n)}$ führe man eine Taylor-Entwicklung durch und wende die Abschätzung aus dem Beweis von Proposition 5.5 in [Sch93] mit „Gewichten“ Z_i an. Das ergibt

$$\left|\int\Big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}(u)+\hat{\ell}'(u)\delta_{ni}\Big)f(u)du\right|\le c_0\beta^{-2}\delta_{ni}^2\sqrt{J}$$

mit einer Konstante c_0. Es folgt also

$$\begin{aligned}&n^{1/2}E\bigg(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\int\Big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}(u)+\hat{\ell}'(u)\delta_{ni}\Big)f(u)du\Big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\ \le&n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\bigg(\Big|\int\Big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}(u)+\hat{\ell}'(u)\delta_{ni}\Big)f(u)du\Big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\bigg)\\ \le&\frac{c_0\sqrt{J}}{n^{1/10}\beta^2}\cdot n^{3/5}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\big(\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(1)\end{aligned}$$

nach Bedingung (B.β) und Proposition 3.6. Proposition 4.7 und Proposition B.4 liefern also $S_{7,3}^{(n)}=o_p(n^{-1/2})$.
Zeige abschließend

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\bigg(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\int\hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\bigg)=o_p(n^{-1/2}).$$

Mit Proposition B.4 und Proposition 4.7 folgt dann $S_{7,1}^{(n)}=o_p(n^{-1/2})$. Der Beweis verläuft ähnlich wie derjenige von Proposition 5.6 aus [Sch93]. Mit den in Abschnitt 4.1 definierten Abkürzungen zeige man, dass die Gleichungen (C1) bis (C4) für $\delta=\frac{1}{2}$, $\hat{h}_{n,j}(y)=Z_j\big(\hat{\ell}\big(y-\hat{r}_{nj}^{(a)}\big)-\ell(y-r(X_j))\big)$ und $\tilde{h}_{n,j}(y)=Z_j\big(\hat{\ell}_{-j}\big(y-\hat{r}_{nj}^{(a)}\big)-\ell(y-r(X_j))\big)$ erfüllt sind. Wende dann Lemma 4.4 an, um die behauptete Aussage zu folgern.
Man erhält mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned}E(C_{n,1}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})&=E\bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\big(\hat{\ell}\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\hat{\ell}_{-i}\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\ &\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\big(\big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Lemma 4.5 liefert mit den dahinter eingeführten Abkürzungen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\big(\big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\big(\big(\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ \le&n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\big((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ =&n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\big((s_n^{(1,2)})^2E[\varepsilon_i^2]+2s_n^{(1,2)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon_i|]+(s_n^{(2)})^2\big)\\ \le&n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2\bar{Z}_n\le n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2=o_p(n^{-1}).\end{aligned}$$

Daher folgt mit Lemma 3.3 $C_{n,1} = o_p(n^{-1/2})$.
Auf ähnliche Weise erhält man

$$\begin{aligned}
&E(C_{n,2}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&E\bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni})\big)f(u)du\Big)^2\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\Big(\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni})\big)f(u)du\Big)^2\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\hat\ell\big(u+r(X_i)-\hat r_{ni}^{(a)}\big)-\hat\ell_{-i}\big(u+r(X_i)-\hat r_{ni}^{(a)}\big)\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 kann man wieder abschätzen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
=&n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iE\big((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\le n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.3 ergibt sich nun $C_{n,2} = o_p(n^{-1/2})$.
Schätze ferner mit Hilfe von Lemma 3.2 ab

$$\begin{aligned}
C_{n,3} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u)\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&\quad+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\hat\ell(u)-\ell(u)\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)+2n^{-1}U_n.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.6 gilt $U_n = o_p(1)$. Mit (L1) aus Lemma 4.2 erhält man also

$$\begin{aligned}
C_{n,3} &\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni}),\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)+o_p(n^{-1})\\
&\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_iE\bigg(\int\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)+o_p(n^{-1})\\
&\le n^{-1}\frac{2c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Mit (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6 folgt somit $C_{n,3} = o_p(n^{-1})$.
Ähnlich wie in Proposition 4.7 kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
C_{n,4} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big(\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j) - E(\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j)|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-i}, \mathbf{Z})\big)^2 \big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) \\
&\leq \frac{4}{n^2} \sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big)^2 \big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Lemma 4.5 liefert mit den dahinter eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
C_{n,4} &\leq \frac{4}{n^2} \sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big(\ell_n(\hat{\varepsilon}_j, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big)^2 \big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) \\
&\leq \frac{4}{n^2} \sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\Big(\big(\big|\ell_n(\hat{\varepsilon}_j, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(\hat{\varepsilon}_j, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})\big| \\
&\qquad + \big|\ell_n(\hat{\varepsilon}_j, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big|\big)\big)^2 \big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) \\
&\leq n^{-1} \frac{4}{n^2} \sum_{i,j:j\neq i} Z_j E\big((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)} + s_n^{(1,1)}|\varepsilon_i|)^2 \big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\big) \\
&\leq 4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)})^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $C_{n,4} = o_p(n^{-1})$. Mit Lemma 4.4 erhält man also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\left(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int (\hat{\ell}(u - \delta_{ni}) - \ell(u))f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\left(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}(u - \delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right) = o_p(n^{-1/2})
\end{aligned}$$

und somit $S_{7,1}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$. □

Satz 4.14. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$\begin{aligned}
S_6^{(n)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\left(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}(u)f(u)du - \frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\right) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i) - E)\varepsilon_i + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Beweis. Setze abkürzend $\delta_{ni} := \hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)$ und ergänze $S_6^{(n)}$ zu

$$\begin{aligned}
S_6^{(n)} &= \frac{1}{\hat{J}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\Big) \\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\ell(\varepsilon_i)\Big(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J}\Big) \\
&+\frac{1}{\hat{J}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\Big(\int \hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du - \int \hat{\ell}(u)f(u)du \\
&\qquad + \int \hat{\ell}'(u)f(u)du\delta_{ni}\Big) \\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\big(r_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\Big(\frac{1}{\hat{J}}\int \hat{\ell}'(u)f(u)du - 1\Big) \\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big) =: \sum_{\nu=1}^5 S_{6,\nu}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Nach Proposition 4.8 gilt

$$S_{6,5}^{(n)} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j(B(X_j)-E)\varepsilon_j + o_p(n^{-1/2}).$$

Zu zeigen ist also $\sum_{\nu=1}^4 S_{6,\nu}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Aus dem Beweis von Proposition 4.7 liest man ab, dass $\int \hat{\ell}'(u)f(u)du$ stochastisch gegen J konvergiert. Da $\frac{1}{\hat{J}}$ zudem nach Proposition 4.7 in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{J}$ konvergiert, folgt mit Proposition 4.8 $S_{6,4}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Wegen $E[Z(B(X)-E)\ell(\varepsilon)] = E\ell(\varepsilon)E[Z(B(X)-E)] = 0$ liefert der Zentrale Grenzwertsatz

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(B(X_i)-E)\ell(\varepsilon_i) = O_p(n^{-1/2}).$$

Mit $\frac{1}{\hat{J}} = \frac{1}{J} + o_p(1)$ erhält man also $S_{6,2}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Für $S_{6,3}^{(n)}$ schätzt man mit Hilfe des Beweises von Proposition 5.5 aus [Sch93] (Z_i fasse man dabei als $\hat{w}_i$ auf) ab

$$\begin{aligned}
&n^{1/2}|S_{6,3}^{(n)}| \\
\le&\frac{1}{|\hat{J}|}n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Z_i|B(X_i)-E|\left|\int \big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}(u) + \hat{\ell}'(u)\delta_{ni}\big)f(u)du\right| \\
\le&\frac{1}{|\hat{J}|}\frac{c_0\sqrt{J}}{\beta^2}n^{-1/2}\sum_{i=1}^n |B(X_i)-E|\delta_{ni}^2 \\
\le&\frac{1}{|\hat{J}|}\frac{c_0\sqrt{J}}{n^{1/10}\beta^2}n^{3/5}\Big(\frac{1}{C_\pi n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)|\delta_{ni}^2 + \frac{|E|}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{ni}^2\Big)
\end{aligned}$$

Proposition 3.6 für $M(X) = |\varkappa(X)|$ bzw. $M(X) = 1$ liefert also

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)|\delta_{ni}^2 = o_p(n^{-3/5})$$

und
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ni}^2 = o_p(n^{-3/5}).$$
Die in besagter Proposition geforderte Eigenschaft $E[|\varkappa(X)|r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] = o(n^{-3/5})$ ergibt sich dabei durch die Abschätzung
$$E[|\varkappa(X)|r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] \leq \big(E[\varkappa^2(X)r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]\big)^{1/2}\big(E[r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]\big)^{1/2}$$
aus den Bedingungen (B.ag$\varkappa$r) und (B.agr). Mit (B.β) und Proposition 4.7 folgt daraus $S_{6,3}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$. Zeige nun, dass gilt
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\bigg(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\bigg) = o_p(n^{-1/2}).$$
Dann folgt mit Proposition 4.7 unmittelbar $S_{6,1}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$. Verwende dazu erneut Lemma 4.4 mit $\hat h_{n,j}(y) = Z_j(B(X_j)-E)(\hat\ell\big(y-\hat r_{nj}^{(a)}\big) - \ell(y-r(X_j)))$ und $\tilde h_{n,j}(y) = Z_j(B(X_j)-E)(\hat\ell_{-j}\big(y-\hat r_{nj}^{(a)}\big) - \ell(y-r(X_j))$. Nachzuweisen sind also die Gleichungen (C1) bis (C4) aus Lemma 4.4 für $\delta = \frac{1}{2}$.
Mit der Hölder-Ungleichung für Summen und der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte schätzt man ab
$$\begin{aligned}
&E(|C_{n,1}||\mathbf{X},\mathbf{Z})^2\\
\leq& E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i|B(X_i)-E|\big|\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)\big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)^2\\
\leq& E\bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B(X_j)-E)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)\big)^2\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)^2\\
\leq& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B(X_j)-E)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_iE\big(\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$
Aus dem Beweis von Satz 4.13 entnimmt man
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_iE\big(\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = o_p(n^{-1}).$$
Außerdem gilt nach den schwachen Gesetz der großen Zahlen
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B(X_j)-E)^2 = E[(B(X)-E)^2] + o_p(1) = E[B^2(X)] - E^2 + o_p(1) = O_p(1).$$
Daraus folgt $C_{n,1} = o_p(n^{-1/2})$. Ein ähnliches Vorgehen liefert
$$\begin{aligned}
&E(|C_{n,2}||\mathbf{X},\mathbf{Z})^2\\
\leq& E\bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i|B(X_i)-E|\bigg|\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni}\big)f(u)du\bigg|\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)^2\\
\leq& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B(X_j)-E)^2E\bigg(\bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni})\big)^2f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)^2\\
\leq& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B(X_j)-E)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_iE\bigg(\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \hat\ell_{-i}(u-\delta_{ni})\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 4.13 wurde bereits gezeigt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E\bigg(\int \big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}_{-i}(u-\delta_{ni})\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) = o_p(n^{-1}).$$

Daher erhält man $C_{n,2} = o_p(n^{-1/2})$. Ergänzen liefert für $C_{n,3}$ wie im Beweis von Satz 4.13

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u)\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\le& \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \big(\ell_n(u-\delta_{ni}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
&+ \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \big(\hat{\ell}(u) - \ell(u)\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\le& \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \big(\ell_n(u-\delta_{ni}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
&+ n^{-1} U_n \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2.
\end{aligned}$$

Aufgrund des schwachen Gesetzes der großen Zahlen gilt

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2 = O_p(1).$$

Da U_n nach Lemma 4.6 stochastisch gegen Null konvergiert, folgt

$$n^{-1} U_n \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2 = o_p(n^{-1}).$$

Ferner schätze man mit (L1) aus Lemma 4.2 ab

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \big(\ell_n(u-\delta_{ni}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\big)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\le& \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2 E\bigg(\int \frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
=& \frac{2}{n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2 E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.1c) ist $\varkappa^2(X)$ beschränkt durch C_ℓ, also erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^{n} (B(X_i)-E)^2 E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
\le& \frac{2}{n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^{n} \big(c_\pi^{-2}\varkappa^2(X_i) + 2c_\pi^{-1}|E||\varkappa(X_i)| + E^2\big) E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
\le& \frac{2}{n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\big(c_\pi^{-2}C_\ell + 2c_\pi^{-1}C_\ell^{1/2}|E| + E^2\big)\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Mit dem Beweis von Proposition 3.6 und (B.β) ergibt sich also insbesondere

$$\frac{2}{n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^n (B(X_i)-E)^2 E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = o_p(n^{-1})$$

und somit $C_{n,3} = o_p(n^{-1})$. Abschließend bleibt zu zeigen

$$C_{n,4} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)-E\big(\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) = o_p(n^{-1}).$$

Durch Ergänzen von $\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)$ erhält man mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big|\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)-E\big(\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big|^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)-E\big(\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(E\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)-\hat\ell_{-j}(\hat\varepsilon_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 und den dahinter eingeführten Abkürzungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)\big|\\
&\qquad+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big|\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 n^{-1}E\big((s_n^{(1,1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&n^{-1}\frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2\big((s_n^{(1)})^2E[\varepsilon_i^2]+2s_n^{(1)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon_i|]+(s_n^{(2)})^2\big)\\
\leq&n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{4}{n}\sum_{j=1}^n(B(X_j)-E)^2.
\end{aligned}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\frac{4}{n}\sum_{j=1}^n(B(X_j)-E)^2$ stochastisch gegen $4E[(B(X)-E)^2]$. Da zudem $s_n^{(1)}$ und $s_n^{(2)}$ stochastisch gegen Null konvergieren, folgt

$$\begin{aligned}
C_{n,4} &\leq \frac{4}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(B(X_j)-E)^2 E\Big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i\}}\big)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&= o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.4 gilt daher

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\int \hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\Big)=o_p(n^{-1/2})$$

und damit die Behauptung. □

Satz 4.15. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_5^{(n)}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)(\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\varepsilon_i+o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Aus Proposition 4.8 folgt direkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)(\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i)-E)\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\\ &= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\varepsilon_j(B(X_j)-E)+o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

□

Satz 4.16. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_4^{(n)}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\varepsilon_i=o_p(n^{-1/2})$$

Beweis. Schreibe $-S_4^{(n)}$ als

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\left(\frac{\hat{\varkappa}_{ni}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_i)}-\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\right)\varepsilon_i\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)k_b(X_i-X_j)\\ &+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))k_b(X_i-X_j)\\ &-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}=:\sum_{\nu=1}^{3}\tilde{S}_{4,\nu}.\end{aligned}$$

Betrachte zunächst $\tilde{S}_{4,1}$. Zerlege den Term weiter in

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{4,1}=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))k_b(X_i-X_j) &(4.2.1)\\ &+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j) &(4.2.2)\\ &-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\varkappa(X_i)\frac{1}{n}k_b(0) &(4.2.3)\\ &+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\varkappa(X_i)\hat{g}(X_i). &(4.2.4)\end{aligned}$$

Da ε unabhängig von X und Z und $E\varepsilon$ gleich Null ist, erhält man

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i\varepsilon_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)}E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)k_b^2(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^3}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ j_1\neq i_1, j_2\neq i_2}} Z_{i_1}Z_{j_1}\frac{\hat{p}(X_{i_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})Z_{i_2}Z_{j_2}\frac{\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}(h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})-\varkappa(X_{j_2}))|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)}E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)k_b^2(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat{p}(X_i)\hat{p}(X_j)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)\hat{g}^2_{a_n}(X_j)}k_b^2(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot E(\varepsilon_i(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)-\varkappa(X_i))\varepsilon_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))|X_i,X_j).
\end{aligned}$$

Den ersten Term schätze man ab durch

$$\frac{\sigma^2K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j).$$

Über die Entwicklungen

$$\frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}=\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}-\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}$$

und

$$\hat{p}(X_i)=p(X_i)+\hat{p}(X_i)-p(X_i)$$

folgt mit $|p(X_i)/g_{a_n}(X_i)|\leq c_\pi^{-1}$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big| &= \Big|\frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}+\frac{\hat{p}(X_i)-p(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}-\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\Big|\\
&\leq \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}+\frac{|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}+\frac{p(X_i)|\Delta_{a_n}(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\\
&\leq c_\pi^{-1}+a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|+c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| =: c_\pi^{-1}+R.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 und Lemma 3.5 gilt

$$R=a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|+c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|=o_p(n^{-1/4}).$$

Mit (B.a)(i) erhält man also

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)}E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)k_b^2(X_i-X_j)\\
\leq&\frac{\sigma^2K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)\\
\leq&\frac{\sigma^2K^2}{nb^2a_n^2}(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)=o_p(1).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Summen schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat p(X_i)\hat p(X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)\hat g_{a_n}^2(X_j)}k_b^2(X_i-X_j)\\
&\qquad\qquad\cdot E(\varepsilon_i(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)-\varkappa(X_i))\varepsilon_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))|X_i,X_j)\Big|\\
\leq&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}(c_\pi^{-1}+R)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|E(\varepsilon_i(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)-\varkappa(X_i))|X_i)|\Big)^2\\
\leq&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(E(|h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)||\varepsilon_j||X_j))^2.
\end{aligned}$$

Es gilt $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(E(|h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)||\varepsilon_j||X_j))^2\leq\sigma^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)$. Also folgt mit (B.a)(i) und (B.hε)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat p(X_i)\hat p(X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)\hat g_{a_n}^2(X_j)}k_b^2(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot E(\varepsilon_i(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)-\varkappa(X_i))\varepsilon_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))|X_i,X_j)=o_p(1)
\end{aligned}$$

und somit (4.2.1) $=o_p(n^{-1/2})$.
Schreibe nun $\hat p(X_i)=(\hat p(X_i)-p(X_i))+p(X_i)$ und entwickle $\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}$. Das liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
=&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{\hat p(X_i)-p(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{p(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&-\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^3(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&-\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{\hat p(X_i)-p(X_i)}{g_{a_n}^3(X_i)}\Delta_{a_n}(X_i)(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{\hat p(X_i)-p(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)g_{a_n}^3(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i)(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{2}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)g_{a_n}^3(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{\hat p(X_i)-p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)g_{a_n}^2(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i)(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\varepsilon_i\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)g_{a_n}^2(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j).
\end{aligned}$$

Da ε unabhängig von X und Z ist mit $E\varepsilon = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \varepsilon_i V_{i,j}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j V_{i,j}^2(\mathbf{X},\mathbf{Z}) + \frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_j Z_l V_{i,j}(\mathbf{X},\mathbf{Z}) V_{i,l}(\mathbf{X},\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Mit den üblichen Abschätzungen und Aussagen folgt für die entsprechenden V aus der obigen Zerlegung

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j V_{i,j}^2(\mathbf{X},\mathbf{Z}) \leq \frac{K^2}{nb^2a_n^2}\bar{V}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))^2,$$

wobei $\bar{V}$ für $a_n^{-2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|\Big)^2$, c_π^{-2}, $c_\pi^{-2}a_n^{-2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2$, $a_n^{-2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|\Big)^2 a_n^{-2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2$, $a_n^{-2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|\Big)^2 a_n^{-4}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^4$ bzw. $c_\pi^{-2}a_n^{-4}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^4$ steht. Wegen (B.a)(i) ergibt sich mit Lemma 3.4 und Lemma 3.5 sowie

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))^2\\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i) - 2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa(X_i)\Big)^2 = O_p(1)
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \varepsilon_i V_{i,j}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_j Z_l V_{i,j}(\mathbf{X},\mathbf{Z}) V_{i,l}(\mathbf{X},\mathbf{Z}) + o_p(1).
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Abschätzungen erhält man ferner

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \varepsilon_i V_{i,j}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\bar{V}\frac{\sigma^2}{n^3}\frac{1}{a_n^2}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_j Z_l|\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i)||\varkappa(X_l)-\varkappa(X_i)|k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&+ o_p(1),
\end{aligned}$$

wobei $\bar{V}$ für die gleichen Ausdrücke wie oben steht. Man rechnet nun

$$\begin{aligned}
&E\Big[a_n^{-2}\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_j Z_l |\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i)||\varkappa(X_l)-\varkappa(X_i)|k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\Big|\Big]\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2 a_n^2}E[Z_2 Z_3|\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1)||\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1)|k_b(X_1-X_2)k_b(X_1-X_3)]\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}a_n^{-2}E\big[\big(E(\pi(X_2)|\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1)|k_b(X_1-X_2)|X_1)|\big)^2\big]\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}a_n^{-2}E\Big[\Big(\int g(X_1+bu)|\varkappa(X_1+bu)-\varkappa(X_1)|k(u)du\Big)^2\Big]\\
\le& C_p^2 L_\varkappa^2\frac{b^2}{a_n^2}\Big(\int |u|k(u)du\Big)^2 \le C_p^2 L_\varkappa^2\frac{b^2}{a_n^2}\int u^2 k(u)du \to 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also (4.2.2) $= o_p(n^{-1/2})$.
In (4.2.3) schätze man wie üblich ab

$$\begin{aligned}
n^{1/2}|(4.2.3)| &\le \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i|\varepsilon_i||\varkappa(X_i)|\Big|\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big|\\
&\le \frac{K}{n^{1/2}ba_n}(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i|\varepsilon_i||\varkappa(X_i)|\\
&\le \frac{K}{n^{1/2}ba_n}(c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sigma^2 + o_p(1) = O_p(1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i) = E[\varkappa^2(X)] + o_p(1) = O_p(1).$$

Mit (B.a)(i) und Lemma 3.4 sowie Lemma 3.5 erhält man also (4.2.3) $= o_p(n^{-1/2})$.
Schreibe den Term (4.2.4) als

$$\begin{aligned}
(4.2.4) \;=\; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\varkappa(X_i)\frac{\hat{p}(X_i)-p(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\varkappa(X_i)\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\varkappa(X_i)\Big(\frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-\frac{1}{\pi(X_i)}\Big)\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} =: \sum_{j=1}^4 \tau_j.
\end{aligned}$$

Da ε zentriert und unabhängig von X und Z ist, erhält man

$$
\begin{aligned}
n \cdot E(\tau_3^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E[\varepsilon_i^2]\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i)\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2 1_{\{g(X_i)<a_n\}} \\
&\leq \frac{4\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}} > \eta\Big) \leq \frac{1}{\eta}E[\varkappa^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] \to 0
$$

liefert Lemma 3.3 $\tau_3 = o_p(n^{-1/2})$.
Für τ_1 ergibt sich mit Lemma 3.5

$$
\begin{aligned}
n \cdot E(\tau_1^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E[\varepsilon_i^2]\varkappa^2(X_i)\frac{(\hat{p}(X_i)-p(X_i))^2}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i) \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 3.3 ist dann aber auch τ_1 gleich $o_p(n^{-1/2})$.
Ebenso folgt $\tau_2 = o_p(n^{-1/2})$ aus

$$
\begin{aligned}
n \cdot E(\tau_2^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E[\varepsilon_i^2]\varkappa^2(X_i)\frac{p^2(X_i)}{g^2_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta^2_{a_n}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i) \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}
$$

Den Term τ_4 zerlege man weiter in

$$
\begin{aligned}
\tau_4 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{\Delta(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)} \\
&\quad - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{\Delta(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{\Delta(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i E[\varepsilon_i^2]\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}\frac{\Delta^2(X_i)}{g^2_{a_n}(X_i)} \\
&\leq \frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta(X_i)|\Big)^2\frac{\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i)
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i \frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E[\varepsilon_i^2]\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}\frac{g^2(X_i)}{g^2_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta^2_{a_n}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\\
\le&\frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&n \cdot E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i \frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\frac{\Delta(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i E[\varepsilon_i^2]\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}\frac{\Delta^2(X_i)}{g^2_{a_n}(X_i)}\frac{\Delta^2_{a_n}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\\
\le&\frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\le i\le n}|\Delta(X_i)|\Big)^2\frac{1}{a_n^2}\Big(\sup_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{\sigma^2}{c_\pi^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i).
\end{aligned}$$

Daher folgt mit Lemma 3.4, Lemma 3.5 und Lemma 3.3

$$\tau_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big) + o_p(n^{-1/2}).$$

Zudem erhält man wegen der schon benutzten Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big)\Big| > \eta\Big)\\
\le&\frac{1}{\eta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\Big[Z_i\varepsilon_i^2\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big)^2 1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big]\\
\le&\frac{4\sigma^2}{\eta^2 c_\pi^2}E[\varkappa^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] \to 0,
\end{aligned}$$

also auch

$$\tau_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\varepsilon_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)} + o_p(n^{-1/2}).$$

Es gilt also $\tilde{S}_{4,1} + \tilde{S}_{4,3} = o_p(n^{-1/2})$.
Den verbleibenden Term $\tilde{S}_{4,2}$ schreibe man als

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_j\varepsilon_i\frac{Z_i\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i - X_j)h(X_j,Y_j)\big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)\big)\\
+&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_j\varepsilon_i\frac{Z_i\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i - X_j)h(X_j,Y_j)\big(\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big)\\
+&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_j\varepsilon_i\frac{Z_i\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i - X_j)h(X_j,Y_j)\big(\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big) =: \sum_{\nu=1}^{3}\mu_\nu
\end{aligned}$$

Verwende in den folgenden Rechnungen erneut die Abschätzung

$$\Big|\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big| \leq c_\pi^{-1} + a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)| + c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| = c_\pi^{-1}+R.$$

Nach Lemma 3.4 und Lemma 3.5 gilt

$$R = a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)| + c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| = o_p(n^{-1/4}).$$

Beachte, dass $\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)$ auch als $\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nj}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)$ geschrieben werden kann. Lemma 4.5 liefert daher

$$\begin{aligned}
&E(|\mu_1||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_j\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)E\big(|\varepsilon_i||h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}s_n^{(1,1)}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_j\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)E\big(\varepsilon_i^2|h(X_j,Y_j)|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}s_n^{(1,1)}\sigma^2(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)E(|h(X_j,Y_j)||X_j)\\
\leq&n^{-1/2}s_n^{(1,1)}\sigma^2(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
\leq&n^{-1/2}s_n^{(1,1)}\sigma^2(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 erhält man außerdem

$$\begin{aligned}
&E(|\mu_2||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_j\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot E\big(|\varepsilon_i||h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_j\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)E\big(|h(X_j,Y_j)|(s_n^{(1,2)}\varepsilon_i^2+s_n^{(2)}|\varepsilon_i|)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)E(|h(X_j,Y_j)||X_j)\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.3 bleibt also nur $\tilde{S}_{4,2}=\mu_4+o_p(n^{-1/2})$.

Betrachte nun

$$
\begin{aligned}
&nE(\mu_3^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat p^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^4(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)E\big(\varepsilon_i^2h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{1}{n^3}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ j_1\neq i_1,j_2\neq i_2}} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}\frac{\hat p(X_{i_1})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})}\frac{\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r_{nj_1i_1}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r_{nj_2i_2}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Den ersten Term schätzt man ab durch

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_iZ_j}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)E\big(h^2(X_j,Y_j)\big(\ell_n^2\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big)\\
&\quad+2|\ell(\varepsilon_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big)\big|+\ell^2(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&\sigma^2(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}\Big(\frac{c_0^2C_h}{n^{1/5}\beta^2}+\frac{2c_0}{n^{1/5}\beta}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)|\ell(\varepsilon_j)||X_j)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)\Big).
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
E(h^2(X_j,Y_j)|\ell(\varepsilon_j)||X_j) &\leq (E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j))^{1/2}(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j))^{1/2}\\
&\leq C_h^{1/2}(E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)))^{1/2}
\end{aligned}
$$

und (B.hℓ) liefert das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)|\ell(\varepsilon_j)||X_j) &\leq \frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{j=1}^n(E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j))^{1/2}\\
&\leq C_h^{1/2}\big(E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)]\big)^{1/2}+o_p(1)=O_p(1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)=E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)]+o_p(1)=O_p(1).
$$

Mit (B.a) und (B.β) folgt also

$$
\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_iZ_j\frac{\hat p^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^4(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)E\big(\varepsilon_i^2h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(1).
$$

Unterscheide nun für die gemischte Summe folgende Fälle:
<u>vier verschiedene Indices:</u> Der entsprechende Anteil der zweiten Summe hat die Form

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\text{ versch.}} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}\frac{\hat p(X_{i_1})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})}\frac{\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r_{nj_1i_1}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r_{nj_2i_2}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

$\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)\big)$ ist nach Definition unabhängig von $\varepsilon_{i_2}\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)\big)$ gegeben $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Y}_{-\{i_1,i_2\}}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&E\big(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\quad\cdot\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\big(h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})E\big(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\quad\cdot\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_1,i_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\big(h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_1,i_2\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{i_2}\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_1,i_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Durch Ergänzen erhält man

$$\begin{aligned}
&E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_1,i_2\}},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\\
&+E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Da $\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})$ bezüglich der von $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}}$ und $\mathbf{Z}$ erzeugten σ-Algebra messbar und ε_{i_1} zentriert ist, folgt

$$\begin{aligned}
&E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\\
=&E[\varepsilon]\cdot\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)=0.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 schätzt man zudem ab

$$\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\le&E\big(|\varepsilon_{i_1}|\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i_2}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i_2}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\\
&+E\big(|\varepsilon_{i_1}|\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i_2}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i_2,i_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i_2,i_1\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\\
\le&n^{-1/2}((s_n^{(1,1)}+s_n^{(1,2)})E[\varepsilon_{i_1}^2]+s_n^{(2)}E[|\varepsilon_{i_1}|])\le n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)=:n^{-1/2}s_n.
\end{aligned}$$

Das bedeutet für den Anteil der gemischten Summe mit vier verschiedenen Indices

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}\frac{\hat p(X_{i_1})}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_1})}\frac{\hat p(X_{i_2})}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}(X_{i_1})\hat g_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|E\big(\varepsilon_{i_1}\big(\hat\ell_{-i_2}\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\big|E\big(\varepsilon_{i_2}\big(\hat\ell_{-i_1}\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i_2,i_1\}},\mathbf{Z}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2s_n^2\frac{1}{n^4}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}(X_{i_1})\hat g_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||X_{j_1})E(|h(X_{j_2},Y_{j_2})||X_{j_2})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2s_n^2C_h\Big(\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2=o_p(1).
\end{aligned}$$

drei verschiedene Indices:
Seien zunächst $i_1 = i_2$. Der entsprechende Anteil der gemischten Summe hat die Form

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_j Z_l \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^4(X_i)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_i - X_l)$$
$$\cdot E\big(\varepsilon_i^2 h(X_j, Y_j) h(X_l, Y_l) \big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big) \big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l - \hat{r}_{nli}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_l)\big) \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big).$$

Setze abkürzend

$$D_j^{\{i,l\}} := \ell_n\big(Y_j - \hat{r}_{nj\{i,l\}}^{(a)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big) - \ell(\varepsilon_j).$$

Mit Lemma 4.5 schätzt man ab

$$\Big| \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_j Z_l \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^4(X_i)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_i - X_l)$$
$$\cdot E\big(\varepsilon_i^2 h(X_j, Y_j) h(X_l, Y_l) \big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big) \big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l - \hat{r}_{nli}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_l)\big) \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big) \Big|$$
$$\leq \sigma^2 (c_\pi^{-1} + R)^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{Z_i Z_j Z_l}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_i - X_l)$$
$$\cdot E\big(|h(X_j, Y_j)| |h(X_l, Y_l)| \big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big| \big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l - \hat{r}_{nli}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_l)\big| \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big)$$
$$\leq \sigma^2 (c_\pi^{-1} + R)^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{Z_j Z_l}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_i - X_l) E(|h(X_j, Y_j)| |h(X_l, Y_l)|$$
$$\cdot (n^{-1/2}(s_n^{(1)} |\varepsilon_l| + s_n^{(2)}) + |D_j^{\{i,l\}}|)(n^{-1/2}(s_n^{(1)} |\varepsilon_j| + s_n^{(2)}) + |D_l^{\{i,j\}}|) | \mathbf{X}, \mathbf{Z}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & E(|h(X_j, Y_j)| |\varepsilon_j| |h(X_l, Y_l)| |\varepsilon_l| | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\ = & E(|h(X_j, Y_j)| |\varepsilon_j| | X_j) E(|h(X_l, Y_l)| |\varepsilon_l| | X_l) \\ \leq & (E(h^2(X_j, Y_j) | X_j))^{1/2} E(h^2(X_l, Y_l) | X_l))^{1/2} \sigma^2 \leq C_h \sigma^2 \end{aligned}$$

und

$$E(|h(X_j, Y_j)| |h(X_l, Y_l)| | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = E(|h(X_j, Y_j)| | X_j) E(|h(X_l, Y_l)| | X_l) \leq C_h$$

sowie

$$\begin{aligned} E(|h(X_j, Y_j)| |h(X_l, Y_l)| |\varepsilon_l| | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) &= E(|h(X_j, Y_j)| | X_i) E(|h(X_l, Y_l)| |\varepsilon_l| | X_l) \\ &\leq (E(h^2(X_j, Y_j) | X_j))^{1/2} (E(h^2(X_l, Y_l) | X_l))^{1/2} \sigma \\ &\leq C_h \sigma. \end{aligned}$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} & E(|h(X_j, Y_j)| |h(X_l, Y_l)| |D_l^{\{i,j\}}| |D_j^{\{i,l\}}| | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\ \leq & (E(h^2(X_j, Y_j) (D_l^{\{i,j\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z}))^{1/2} (E(h^2(X_l, Y_l) (D_j^{\{i,l\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z}))^{1/2} \\ = & \big(E(h^2(X_j, Y_j) | X_j) E((D_l^{\{i,j\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z})\big)^{1/2} \big(E(h^2(X_l, Y_l) | X_l) E((D_j^{\{i,l\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z})\big)^{1/2} \\ \leq & C_h \big(E((D_j^{\{i,l\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) E((D_l^{\{i,j\}})^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z})\big)^{1/2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&E(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)||D_l^{\{i,j\}}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\=&E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||D_l^{\{i,j\}}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\leq C_h\big(E((D_l^{\{i,j\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}&E(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)||\varepsilon_l||D_l^{\{i,j\}}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\=&E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||\varepsilon_l||D_l^{\{i,j\}}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\leq C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\big(E((D_l^{\{i,j\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Man erhält also die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)E(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\\&\quad\cdot(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})+|D_j^{\{i,l\}}|)(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})+|D_l^{\{i,j\}}|)|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\\leq&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\big(n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\\&\quad+C_h\big(E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})E((D_l^{\{i,j\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h)\big(E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h)\big(E((D_l^{\{i,j\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\\\leq&n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\leq n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})=o_p(n^{-1}).\end{aligned}$$

Die anderen Terme erfordern ein wenig mehr Anstrengung. Schreibe dazu

$$\begin{aligned}|D_j^{\{i,l\}}|\ \leq\ &\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\\&+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big)\big|\\&+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)\big|\\&+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)\big|\\&+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)\big|+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big|.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.5 gilt

$$\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\leq n^{-1/2}s_n^{(1,1)}|\varepsilon_l|$$

und

$$\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)\big|\leq n^{-1/2}s_n^{(1,1)}|\varepsilon_i|.$$

Ferner liest man aus dem gleichen Lemma die Abschätzungen

$$\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nji},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big)\big|\leq n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})$$

und

$$\big|\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}\big) - \ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)\big| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})$$

sowie

$$\big|\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}\big) - \ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)\big| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})$$

ab. Es folgt also

$$|D_j^{\{i,l\}}| \le n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + 3s_n^{(2)}) + \big|\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big|.$$

Man erhält daher

$$\begin{aligned}
&E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& E\Big(\big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + 3s_n^{(2)}) + \big|\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big|\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=& n^{-1}\big((s_n^{(1)})^2E[\varepsilon_l^2] + (s_n^{(1)})^2E[\varepsilon_i^2] + (s_n^{(1,2)})^2E[\varepsilon_j^2] + 9(s_n^{(2)})^2 + 2(s_n^{(1)})^2E[|\varepsilon_l||\varepsilon_i|]\\
&+ 2s_n^{(1)}s_n^{(1,2)}E[|\varepsilon_l||\varepsilon_j|] + 2s_n^{(1)}s_n^{(1,2)}E[|\varepsilon_i||\varepsilon_j|] + 6s_n^{(1)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon_l|] + 6s_n^{(1)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon_i|]\\
&+ 6s_n^{(1,2)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon_j|]\big) + E\big(\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+ 2n^{-1/2}E\big((s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + 3s_n^{(2)})\big|\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le& n^{-1}\big(4(s_n^{(1)})^2\sigma^2 + (s_n^{(1,2)})^2\sigma^2 + 9(s_n^{(2)})^2 + 4s_n^{(1)}s_n^{(1,2)}\sigma^2 + 12s_n^{(1)}s_n^{(2)}\sigma + 6s_n^{(1,2)}s_n^{(2)}\sigma\big)\\
&+ E\big(\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+ 2n^{-1/2}(2s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(1,2)}\sigma + 3s_n^{(2)})\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\\
=& \Big(n^{-1/2}(2s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(1,2)}\sigma + 3s_n^{(2)}) + \Big(E\big(\big(\ell_n(\hat\varepsilon_j, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Schreibe

$$E\big(\big(\ell_n(\hat\varepsilon_j, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = E\bigg(\int\big(\ell_n\big(u - \hat r^{(a)}_{nj} + r(X_j), \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).$$

Ergänzen liefert nun

$$\begin{aligned}
&\big|\ell_n\big(u - \hat r^{(a)}_{nj} + r(X_j), \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big) - \ell(u)\big|\\
\le& |\ell_n(u - \delta_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})| + |\ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon})| + |\ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon}) - \ell(u)|.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung mit Lagrange-Restglied und (L1) aus Lemma 4.2 schätzt man ab

$$|\ell_n(u - \delta_{nj}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})| = |\ell'_n(\tilde Z_j(u), \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})||\delta_{nj}| \le \frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|,$$

wobei $\tilde Z_j(u)$ für die entsprechende Zwischenstelle zwischen u und $u - \delta_{nj}$ steht. Lemma 4.5 liefert zudem

$$|\ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}) - \ell_n(u, \hat{\boldsymbol\varepsilon})| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)}).$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E\Big(\int \big(\ell_n(u-\delta_{nj},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq &E\Big(\int \Big(\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+n^{-1/2}s_n^{(2)}+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u)|\Big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
= &\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+n^{-1}(s_n^{(2)})^2+n^{-1}(s_n^{(1,2)})^2E[\varepsilon_j^2]\\
&+E\Big(\int \big(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+2\frac{c_0}{\beta^2}E\Big(|\delta_{nj}|\int \big|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u)\big| f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+2\frac{c_0}{\beta^2}n^{-1/2}s_n^{(1,2)}E(|\delta_{nj}||\varepsilon_j||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2n^{-1/2}s_n^{(2)}E\Big(\int \big|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u)\big| f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+2\frac{c_0}{\beta^2}n^{-1/2}s_n^{(2)}E(|\delta_{nj}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2n^{-1/2}s_n^{(1,2)}E\Big(|\varepsilon_j|\int \big|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u)\big| f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+2n^{-1}s_n^{(2)}s_n^{(1,2)}E[|\varepsilon_j|].
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $U_n = E\big(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u))^2 f(u)du\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)$ wird daraus mittels der Hölder- und der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
&E\Big(\int \big(\ell_n(u-\delta_{nj},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq &\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+n^{-1}(s_n^{(2)})^2+n^{-1}(s_n^{(1,2)})^2\sigma^2+U_n+2\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}U_n^{1/2}\\
&+2\frac{c_0}{\beta^2}n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+2n^{-1/2}s_n^{(2)}U_n^{1/2}\\
&+2\frac{c_0}{\beta^2}n^{-1/2}s_n^{(2)}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+2n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma U_n^{1/2}+2n^{-1}s_n^{(2)}s_n^{(1,2)}\sigma\\
= &\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+n^{-1/2}s_n^{(2)}+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma+U_n^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Mit dem zuvor Gesagten erhält man also

$$\begin{aligned}
&E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq &\Big(n^{-1/2}(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})+\Big(E\Big(\big(\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\Big)^2\\
\leq &\Big(n^{-1/2}(2s_n^{(1)}\sigma+2s_n^{(1,2)}\sigma+4s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.6 konvergiert U_n stochastisch gegen Null. Setze nun abkürzend $t_n^{(1)} :=$

$2s_n^{(1)}\sigma + 2s_n^{(1,2)}\sigma + 4s_n^{(2)}$ und $t_n^{(2)} := s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2} + s_n^{(2)}C_h$. Damit schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{Z_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)n^{-1/2}t_n^{(2)}\big(E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq& n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_j\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)} + \frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + U_n^{1/2}\Big)\\
\leq& n^{-1/2}t_n^{(2)}(n^{-1/2}t_n^{(1)} + U_n^{1/2})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&+ n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq& n^{-1/2}t_n^{(2)}(n^{-1/2}t_n^{(1)} + U_n^{1/2})\\
&+ n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\leq& n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\Big)^{1/2}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2} + o_p(n^{-1/2})\\
\leq& n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2} + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Proposition 3.6, (B.a), (B.β) und den Konvergenzeigenschaften von $s_n^{(1)}$ und $s_n^{(2)}$ ist dies gleich $o_p(n^{-1/2})$. Außerdem rechnet man

$$\begin{aligned}
&\frac{C_h}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\big(E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})E((D_l^{\{i,j\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq& \frac{C_h}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E((D_j^{\{i,l\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)^2\\
\leq& \frac{C_h}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
&+ \big(n^{-1/2}t_n^{(1)} + U_n^{1/2}\big)\hat{g}(X_i)\Big)^2\\
\leq& \frac{C_h}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\frac{K^{1/2}}{b^{1/2}\hat{g}_{a_n}^{1/2}(X_i)}\frac{\hat{g}^{1/2}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^{1/2}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
&+ \big(n^{-1/2}t_n^{(1)} + U_n^{1/2}\big)\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2\\
\leq& C_h\Big(\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2} + \big(n^{-1/2}t_n^{(1)} + U_n^{1/2}\big)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Wieder folgt mit dem Beweis von Proposition 3.6, (B.a), (B.β) und den Konvergenzeigenschaften von $s_n^{(1,2)}$, $s_n^{(2)}$ und U_n, dass dies stochastisch gegen Null konvergiert.

Insgesamt erhält man also

$$\frac{\sigma^2}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat p^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^4(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)E\big(h(X_j,Y_j)h(X_l,Y_l)$$
$$\cdot\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_l-\hat r_{nli}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_l)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(1).$$

<u>$j_1=j_2$:</u> Der zu untersuchende Term hat die Form

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{\hat p(X_l)}{\hat g_{a_n}^2(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_j)$$
$$\cdot E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).$$

Wie im Fall von vier verschiedenen Indices gilt

$$\begin{aligned}&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\big(h^2(X_j,Y_j)E\big(\varepsilon_i\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{nli}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\cdot E\big(\varepsilon_l\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Analog zum besagten Fall rechnet man

$$\begin{aligned}&\big|E\big(\varepsilon_i\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
=&\big|E\big(\varepsilon_i\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj\{l,i\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{l,i\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
&+E\big(\varepsilon_i\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj\{l,i\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{l,i\}}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\le&E\big(|\varepsilon_i|\big|\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{nj\{l,i\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{l,i\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
\le&n^{-1/2}(s_n^{(1)}E[\varepsilon_i^2]+s_n^{(2)}E[|\varepsilon_i|])\le n^{-1/2}s_n\end{aligned}$$

mit den hinter Lemma 4.5 eingeführten Abkürzungen $s_n^{(1)}$ und $s_n^{(2)}$ sowie dem Term s_n aus dem Fall mit vier verschiedenen Indices. Man erhält also

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{\hat p(X_l)}{\hat g_{a_n}^2(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_j)\\
&\cdot E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat g_{a_n}(X_i)\hat g_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_j)\\
&\cdot E\big(h^2(X_j,Y_j)\big|E\big(\varepsilon_i\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
&\quad\cdot\big|E\big(\varepsilon_l\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2s_n^2\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat g_{a_n}(X_i)\hat g_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_j)E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2s_n^2C_h\frac{K^2}{nb^2a_n^2}=o_p(n^{-1/5}).\end{aligned}$$

<u>$i_1=j_2$ bzw. $i_2=j_1$:</u> Zu untersuchen ist der Term

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{\hat p(X_l)}{\hat g_{a_n}^2(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)$$
$$\cdot E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_i-\hat r_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).$$

Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt

$$
\begin{aligned}
&E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\big(h(X_j,Y_j)E\big(\varepsilon_l\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\cdot E\big(\varepsilon_i h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Wie im Falle vierer verschiedener Indices hat man

$$
\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_l\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
=&\big|E\big(\varepsilon_l\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nj\{l,i\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{l,i\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\leq&E\big(|\varepsilon_l|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nj\{l,i\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{l,i\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1)}E[\varepsilon_l^2]+s_n^{(2)}E[|\varepsilon_l|])\leq n^{-1/2}s_n
\end{aligned}
$$

mit den gleichen Abkürzungen $s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ und s_n wie oben. Daher ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$
\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\leq&E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|E\big(\varepsilon_l\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
&\cdot\big|E\big(\varepsilon_i h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&n^{-1/2}s_nE\big(|h(X_j,Y_j)|E\big(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)|\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-l}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Aus dem Fall $i_1=i_2$ kennen wir die Abschätzung

$$
\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-l}\big)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)\big|\leq n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+2s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|).
$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\leq&n^{-1/2}s_n\Big(n^{-1/2}s_n^{(1)}E(|h(X_j,Y_j)|E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||\varepsilon_l||\mathbf{X},\mathbf{Z})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2n^{-1/2}s_n^{(2)}E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||X_i)|\\
&+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(\varepsilon_i^2|h(X_i,Y_i)||X_i)\\
&+E\big(|h(X_j,Y_j)|E\big(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)|\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)\\
\leq&n^{-1}s_ns_n^{(1)}C_h\sigma^2+2n^{-1}s_ns_n^{(2)}C_h\sigma+n^{-1}s_ns_n^{(1,2)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\sigma\\
&+n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\Big(E\big(\big(E\big(\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,l\}},\mathbf{Z}\big)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\\
\leq&n^{-1}s_nC_h^{1/2}\big(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma^2+2s_n^{(2)}C_h^{1/2}\sigma+s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2}\sigma\big)\\
&+n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ferner entnimmt man dem Fall $i_1=i_2$

$$
\begin{aligned}
&E\big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})-\ell(u)\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\leq&\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+n^{-1/2}s_n^{(2)}+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma+U_n^{1/2}\Big)^2
\end{aligned}
$$

mit $U_n = E\big(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell(u))^2 f(u)du\big)$. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{p}(X_l)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)\\
&\quad\cdot\big|E\big(\varepsilon_i\varepsilon_l h(X_j,Y_j)h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}\sigma(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma+2s_n^{(2)}C_h^{1/2}+s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2})\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&+(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)\\
&\quad\cdot\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{ni},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)\\
&\quad\cdot\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+n^{-1/2}s_n^{(2)}+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma+U_n^{1/2}\Big)+o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Hier ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_lk_b(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_l-X_i)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man

$$\begin{aligned}
&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_nC_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}U_n^{1/2}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2s_nC_h^{1/2}c_\varepsilon^{1/2}U_n^{1/2}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}=o_p(1).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wäre auch eine bessere Rate möglich, wenn man zeigt, dass gilt

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_iZ_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_i)=O_p(1).$$

Da dadurch die Rate insgesamt nicht verbessert wird, verzichte ich darauf.

Schließlich erhält man

$$
\begin{aligned}
&(c_\pi^{-1}+R)^2 n^{-1/2} s_n C_h^{1/2} C_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{Z_i Z_j Z_l}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)} k_b(X_i-X_j) k_b(X_l-X_i) \\
&\quad \cdot \frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} \\
\leq &(c_\pi^{-1}+R)^2 s_n C_h^{1/2} C_\varepsilon^{1/2} \frac{K}{n^{1/2} b a_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} \frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} \\
\leq &(c_\pi^{-1}+R)^2 s_n C_h^{1/2} C_\varepsilon^{1/2} \frac{K}{n^{2/5} b a_n} n^{-3/10} \frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Big(n^{-2/5}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Nach Proposition 3.6 ist dies gleich $o_p(n^{-3/10})$. Daraus folgt, dass der zu untersuchende Term

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_j Z_l \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} \frac{\hat{p}(X_l)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_l)} k_b(X_i-X_j) k_b(X_l-X_i) \\
&\quad \cdot E\big(\varepsilon_i \varepsilon_l h(X_j,Y_j) h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)
\end{aligned}
$$

stochastisch gegen Null konvergiert.
<u>zwei verschiedene Indices:</u> Wegen $(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)$ ist der einzige Fall mit zwei verschiedenen Indices, der auftreten kann, derjenige mit $i_1=j_2, i_2=j_1$. In ihm schätzt man mit (L1) aus Lemma 4.2 ab

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} \frac{\hat{p}(X_j)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_j)} k_b^2(X_i-X_j) \\
&\quad \cdot E\big(\varepsilon_i \varepsilon_j h(X_j,Y_j) h(X_i,Y_i)\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-j}\big(Y_i-\hat{r}_{nij}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big| \\
\leq &\frac{K^2}{nb^2a_n^2}(c_\pi^{-1}+R)^2 \frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} E\big(|\varepsilon_i||\varepsilon_j||h(X_i,Y_i)||h(X_j,Y_j)| \\
&\quad \cdot \big|\ell_n\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big|\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nij}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\leq &\frac{K^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}(c_\pi^{-1}+R)^2\bigg(\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||X_i)\Big)^2 \\
&+2\frac{c_0}{n^{1/5}\beta}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||X_i)\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(|\varepsilon_j||h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)||X_j)\Big) \\
&+\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||\ell(\varepsilon_i)||X_i)\Big)^2\bigg).
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
E[(E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||X_i))^2] \leq E[E(\varepsilon_i^2|X_i)E(h^2(X_i,Y_i)|X_i)] = \sigma^2 E[h^2(X,Y)] < \infty
$$

und

$$
\begin{aligned}
E[(E(|\varepsilon_i||h(X_i,Y_i)||\ell(\varepsilon_i)||X_i))^2] &\leq E[E(\varepsilon_i^2|X_i)E(\ell^2(\varepsilon_i)h^2(X_i,Y_i)|X_i)] \\
&= \sigma^2 E[\ell^2(\varepsilon)h^2(X,Y)] < \infty
\end{aligned}
$$

ist das schwache Gesetz der großen Zahlen anwendbar. Es liefert zusammen mit (B.a), $R = o_p(1)$ und (B.β) schließlich

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{p}(X_j)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_j)} k_b^2(X_i - X_j)$$
$$\cdot E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-j}\big(Y_i - \hat{r}^{(a)}_{nij}\big) - \ell(\varepsilon_i)\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) = o_p(1).$$

Damit ist also $nE(\mu_3^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = o_p(1)$ gezeigt. Daher gilt nach Lemma 3.3 $\mu_3 = o_p(n^{-1/2})$ und somit auch $\tilde{S}_{4,2} = o_p(n^{-1/2})$. □

Satz 4.17. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_3^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Schreibe $S_3^{(n)}$ als

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big(\frac{\hat{\varkappa}_{ni}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_i)} - \frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big)\big(r(X_i) - \hat{r}^{(a)}_{ni}\big)\\
=& -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)k_b(X_i - X_j)\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))k_b(X_i - X_j)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)} =: \sum_{\nu=1}^{3} S_{3,\nu}.
\end{aligned}$$

Für $-S_{3,1}$ verwende man die Zerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))k_b(X_i - X_j)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(\varkappa(X_j) - \varkappa(X_i))k_b(X_i - X_j)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\hat{g}(X_i)\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}^{(a)}_{ni} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\frac{1}{n}k_b(0) =: \sum_{\nu=1}^{4}\zeta_\nu.
\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} &= \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - \frac{p(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)} + \frac{\hat{p}(X_i) - p(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&\leq \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} + c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| + a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i) - p(X_i)|\\
&=: \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} + R \leq c_\pi^{-1} + R
\end{aligned}$$

erhält man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen

$$\begin{aligned}
|\zeta_4| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big|\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big|\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}|\varkappa(X_i)|\frac{1}{n}k_b(0) \\
&\leq \frac{K}{nba_n}(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big|\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big||\varkappa(X_i)| \\
&\leq \frac{K}{nba_n}(c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (B.a) gilt $\frac{K}{nba_n} = o(n^{-1/2})$. Nach Lemma 3.4 und Lemma 3.5 gilt außerdem $R = o_p(n^{-1/4})$. Wegen (B.$\varkappa$) liefert das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i) = E[\varkappa^2(X)] + o_p(1) = O_p(1).$$

Nach Proposition 3.6 gilt zudem

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2 = o_p(n^{-3/5}).$$

Zusammen folgt also $\zeta_4 = o_p(n^{-9/10})$.
Setze $\delta_{ni} = \hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)$. Verwende erneut die Hölder-Ungleichung für die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\zeta_1| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}|\delta_{ni}|\Big|\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))k_b(X_i - X_j)\Big| \\
&\leq (c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}|\delta_{ni}|\Big|\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))k_b(X_i - X_j)\Big| \\
&\leq (c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ni}^2\Big)^{1/2} \\
&\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))k_b(X_i - X_j)\Big)^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit kann man schreiben

$$\begin{aligned}
&E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))k_b(X_i - X_j)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\
=&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}Z_jk_b^2(X_i - X_j)E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\
&+\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}Z_jZ_lk_b(X_i - X_j)k_b(X_i - X_l) \\
&\quad\cdot E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))(h(X_l,Y_l)\ell(\varepsilon_l) - \varkappa(X_l))|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\
=&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}Z_jk_b^2(X_i - X_j)E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j) - \varkappa(X_j))^2|X_j).
\end{aligned}$$

Dies lässt sich abschätzen durch

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_i}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}Z_jk_b^2(X_i-X_j)E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)\\
\leq&\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{g_{a_n}(X_i)}\Big(1-\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)k_b(X_i-X_j)\\
\leq&\frac{K}{nba_n}\Big(1+a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_ik_b(X_i-X_j)}{g_{a_n}(X_i)}.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
&\Big|E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big)-\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\Big|\\
=&\Big|\int\Big(\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}-\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\Big)k(u)du\Big|\\
=&\Big|\int\Big(\frac{g(X_2+bu)-g(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bu)}+g(X_2)\Big(\frac{1}{g_{a_n}(X_2+bu)}-\frac{1}{g_{a_n}(X_2)}\Big)\Big)k(u)du\Big|\\
\leq&\int\frac{|g(X_2+bu)-g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2+bu)}k(u)du+\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\int\frac{g_{a_n}(X_2)-g_{a_n}(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}k(u)du\\
\leq&2L_g\frac{b}{a_n}\int|u|k(u)du=o(1)
\end{aligned}
$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\Big]\\
=&E\Big[E(h^2(X_2,Y_2)\ell^2(\varepsilon_2)|X_2)E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big)\Big]\\
=&E\Big[E(h^2(X_2,Y_2)\ell^2(\varepsilon_2)|X_2)\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\Big]\\
&+E\Big[E(h^2(X_2,Y_2)\ell^2(\varepsilon_2)|X_2)\Big(E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big)-\frac{g(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\Big)\Big]\\
\leq&E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)]+2L_g\frac{b}{a_n}\int|u|k(u)duE[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)]\\
=&E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)]+o(1)=O(1)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j)\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_ik_b(X_i-X_j)}{g_{a_n}(X_i)}=O_p(1).
$$

Mit (B.a) und Lemma 3.4 folgt also

$$
E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)=o_p(n^{-1/2}),
$$

wegen Lemma 3.3 also auch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)^2=o_p(n^{-1/2}).$$

Zudem gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{ni}^2=o_p(n^{-3/5})$ nach Proposition 3.6 und $R=o_p(n^{-1/4})$ nach Lemma 3.4 und Lemma 3.5. Daher ergibt sich $\zeta_1=o_p(n^{-1/2})$.
Schätze weiterhin ab

$$\begin{aligned}|\zeta_2| \;&\leq\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\big|\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big|\Big|\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big|\\ &\leq\; (c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\\ &\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Mit der Darstellung

$$\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}=\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}-2\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^3(X_i)}+\frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)g_{a_n}^2(X_i)}+2\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}^3(X_i)}$$

erhält man

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(1-2\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}+\frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}+2\frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\Big)\\ &\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\\ \leq&\Big(1+a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+3a_n^{-2}\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{g_{a_n}^2(X_i)}\\ &\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2.\end{aligned}$$

Lemma 3.4 liefert

$$1+a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+3a_n^{-2}\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2=1+o_p(n^{-1/4}).$$

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big|\Big]\\
=&E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_j)\Big)^2\Big]\\
=&E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}\frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_1))^2k_b^2(X_1-X_j)\Big]\\
&+E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l>1:j\neq l}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_j)\\
&\qquad\cdot Z_l(\varkappa(X_l)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_l)\Big]\\
=&\frac{n-1}{n^2}E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}Z_2(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2k_b^2(X_1-X_2)\Big]\\
&+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}Z_2(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)\\
&\qquad\cdot Z_3(\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big].
\end{aligned}
$$

Im ersten Term schätzt man ab

$$
\begin{aligned}
&\frac{n-1}{n^2}E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}Z_2(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2k_b^2(X_1-X_2)\Big]\\
\leq&\frac{K}{nba_n}E\Big[\frac{1}{g_{a_n}(X_1)}E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big]\\
=&\frac{K}{nba_n}E\Big[\frac{1}{g_{a_n}(X_1)}\int g(X_1+bu)(\varkappa(X_1+bu)-\varkappa(X_1))^2k(u)du\Big]\\
\leq&\frac{K}{nba_n}\frac{C_pL_\varkappa^2b^2}{a_n}\int u^2k(u)du=o(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Ferner liefern Lemma B.1 und (B.a)(ii)

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}E\Big[\frac{Z_1}{g_{a_n}^2(X_1)}Z_2(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)\\
&\qquad\cdot Z_3(\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big]\Big|\\
\leq&E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}|E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)|\\
&\quad\cdot|E(\pi(X_3)(\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1)|\Big]\leq c_\varkappa^2\frac{b^4}{a_n^2}=o(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Chebyshev-Ungleichung hat man also

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2=o_p(n^{-1}).
$$

Mit Proposition 3.6 und $R=o_p(n^{-1/4})$ folgt daraus $\zeta_2=o_p(n^{-1/2})$ (bzw. sogar $\zeta_2=o_p(n^{-4/5})$).

Es bleibt also $-S_{3,1} = \zeta_3 + o_p(n^{-1/2})$. Zerlege nun weiter in

$$\begin{aligned}
\zeta_3 \quad = \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\Delta(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} - \frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\Big)\varkappa(X_i) \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big)\varkappa(X_i) \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\hat{p}(X_i) - p(X_i)}{\hat{g}(X_i)} - \frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)\varkappa(X_i) \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} - 1\Big) \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}.
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist gerade $S_{3,3}$. Die anderen Terme schätze man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung ab, um zu zeigen, dass sie von der Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ sind. Für den ersten Term erhält man

$$\begin{aligned}
& \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\Delta(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} - \frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\Big)\varkappa(X_i)\Big| \\
\le & (c_\pi^{-1} + R)\Big(a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta(X_i)| + a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2} \\
& \cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 gilt

$$(c_\pi^{-1} + R)\Big(a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta(X_i)| + a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big) = o_p(n^{-1/4}).$$

Mit Proposition 3.6 und (B.$\varkappa$) folgt also

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\Delta(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} - \frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_i)}\Big)\varkappa(X_i) = o_p(n^{-11/20}).$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)\frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\hat{p}(X_i) - p(X_i)}{\hat{g}(X_i)} - \frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)\varkappa(X_i)\Big| \\
\le & c_\pi^{-1}\Big(a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\hat{p}(X_i) - p(X_i)| + c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2} \\
& \cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)\Big)^{1/2} = o_p(n^{-11/20}).
\end{aligned}$$

Außerdem hat man

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)\varkappa(X_i)\Big|\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)^2\varkappa^2(X_i)\Big)^{1/2}\\
\leq&2(c_\pi^{-1}+R)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Mit (B.ag$\varkappa$) folgt

$$
P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big|>\varrho\Big)\leq\varrho^{-1}n^{1/2}E\Big[\varkappa^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}\Big]\to 0,
$$

also mit Proposition 3.6 auch

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)\varkappa(X_i)=o_p(n^{-11/20}).
$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)\Big|\\
\leq&2c_\pi^{-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\hat{r}_{ni}^{(a)}-r(X_i)\big)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varkappa^2(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big)^{1/2}=o_p(n^{-11/20}).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also $S_{3,1}+S_{3,3}=o_p(n^{-1/2})$.
Schreibe nun $-S_{3,2}$ als

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^3(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i} Z_l\varepsilon_l k_b(X_i-X_l)\Big)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)) \qquad (4.2.5)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^3(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i} Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)) \qquad (4.2.6)\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^3(X_i)}r(X_i)\frac{k_b(0)}{n}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))\\
&\qquad (4.2.7)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}r(X_i)\Big(\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}-1\Big)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)). \qquad (4.2.8)
\end{aligned}
$$

Man schätzt nun ab

$$
\begin{aligned}
&E(|(4.2.7)||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)E\big(|h(X_j,Y_j)||\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j)|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E\big((\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 4.5 gilt die Abschätzung

$$
\big|\ell_n\big(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)-\ell_n\big(\hat\varepsilon_j,\tilde{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)+\ell_n\big(\hat\varepsilon_j,\tilde{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)-\ell_n\big(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j}\big)\big|\le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})
$$

mit den Abkürzungen

$$
s_n^{(1,2)}=\frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\quad\text{und}\quad s_n^{(2)}=\frac{c_0}{n^{1/2}\bar Z_n\beta^2\alpha_n}.
$$

Aus dem Beweis von Satz 4.16 entnimmt man zudem

$$
\begin{aligned}
&E\big((\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&E\bigg(\int\big(\ell_n(u-\delta_{nj},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(u)\big)^2f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2}\Big)^2
\end{aligned}
$$

mit $U_n=E\big(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell(u))^2f(u)du\big)$ und $s_n^{(1,2)}$ und $s_n^{(2)}$ wie oben. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&E\big((\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&n^{-1}\big((s_n^{(1,2)})^2E[\varepsilon^2]+(s_n^{(2)})^2+2s_n^{(1,2)}s_n^{(2)}E[|\varepsilon|]\big)+E\big((\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+2n^{-1/2}s_n^{(1,2)}E\big(|\varepsilon_j||\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(\varepsilon_j)|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+2n^{-1/2}s_n^{(2)}E\big(|\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(\varepsilon_j)|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&\big(n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+\big(E\big((\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}\big)^2\\
\le&\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Damit und mit (B.a), (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6 erhält man

$$
\begin{aligned}
&E(|(4.2.7)||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\\
&\cdot\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)\\
\leq&(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2})(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}|r(X_i)|\\
&+(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\\
&\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\leq&(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2})(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{1}{n}|r(X_i)|\\
&+(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{c_0}{\beta^2}\frac{K^{1/2}}{b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^{1/2}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^{1/2}(X_i)}|r(X_i)|\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_h^{1/2}}{nba_n}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|\cdot o_p(1)+o_p(n^{-1/2})=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Wegen Lemma 3.3 gilt also $(4.2.7)=o_p(n^{-1/2})$.
Ferner schätze man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen ab

$$
\begin{aligned}
&E(|(4.2.6)||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big|\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big|\\
&\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j))^{1/2}\big(E((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)E\big((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Mit obiger Abschätzung, (B.a), (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6 ergibt sich für den zweiten Term

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)E\big((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big((2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2})\hat{g}(X_i)\\
&\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)^2\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big((2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2})\hat{g}(X_i)\\
&\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}\frac{K^{1/2}}{b^{1/2}}\hat{g}^{1/2}(X_i)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)^2\\
\leq&\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^{n}E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Wegen (B.a), (B.β) und den Beweisen von Proposition 3.6 und Satz 4.16 konvergiert dies stochastisch gegen Null.
Benutze nun die Entwicklung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} &= \frac{1}{g^2_{a_n}(X_i)}-2\frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{g^3_{a_n}(X_i)}+2\frac{\Delta^2_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g^3_{a_n}(X_i)}+\frac{\Delta^2_{a_n}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)g^2_{a_n}(X_i)}\\
&\leq \frac{1}{g^2_{a_n}(X_i)}\Big(1+2a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+3a_n^{-2}\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big).
\end{aligned}$$

Diese liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2\\
\leq&\Big(1+2a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+3a_n^{-2}\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big)\\
&\quad\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Man rechnet weiterhin

$$\begin{aligned}
&n\cdot E\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2\Big|\Big]\\
=&\frac{1}{n}\sum_{l>1}E\Big[\frac{1}{g^2_{a_n}(X_1)}Z_l(r(X_l)-r(X_1))^2k_b^2(X_1-X_l)\Big]\\
&+\frac{1}{n}\sum_{j,l>1:j\neq l}E\Big[\frac{Z_jZ_l}{g^2_{a_n}(X_1)}(r(X_j)-r(X_1))k_b(X_1-X_j)(r(X_l)-r(X_1))k_b(X_1-X_l)\Big]\\
\leq&\frac{K}{n^{1/2}ba_n}n^{1/2}E\Big[\frac{1}{g_{a_n}(X_1)}E((r(X_2)-r(X_1))^2k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big]\\
&+nE\Big[\frac{1}{g^2_{a_n}(X_1)}\big(E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\big)^2\Big].
\end{aligned}$$

Mit Lemma A.2, Lemma A.4 und (B.a) folgt

$$\begin{aligned}
& n\cdot E\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2\Big|\Big] \\
\leq & \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\,\tilde{c}\frac{n^{1/2}b^2}{a_n}+n\Big(c_1^2b^4E\Big[\frac{g^2(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}\Big]+2c_1c_2\frac{b^4}{a_n}E\Big[\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big]+c_2^2\frac{b^4}{a_n^2}\Big) \\
\leq & \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\,\tilde{c}\frac{n^{1/2}b^2}{a_n}+c_1^2nb^4+2c_1c_2\frac{nb^4}{a_n}+c_2^2\frac{nb^4}{a_n^2}=o(1).
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l(r(X_l)-r(X_i))k_b(X_i-X_l)\Big)^2=o(n^{-1}).$$

Zusammen mit dem zuvor Gesagten ergibt sich also (4.2.6) $= o_p(n^{-1/2})$.
Für den Term (4.2.8) verwende man die Entwicklung

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} = & \frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}+\frac{\hat{g}(X_i)g_{a_n}(X_i)-g(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)} \\
& -\frac{\Delta(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}+\frac{\hat{g}(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}^2(X_i)}.
\end{aligned}$$

Damit kann man weiter aufteilen

$$\begin{aligned}
(4.2.8) = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}r(X_i)\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big) \\
& \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)) \\
& +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}r(X_i)\frac{\hat{g}(X_i)g_{a_n}(X_i)-g(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)} \\
& \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)) \\
& +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}r(X_i)\Big(\frac{\hat{g}(X_i)\Delta_{a_n}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)g_{a_n}^2(X_i)}-\frac{\Delta(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big) \\
& \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)) =: \sum_{\nu=1}^{3}\xi_\nu.
\end{aligned}$$

Man erhält ähnlich wie bei (4.2.7)

$$
\begin{aligned}
&E(|\xi_3||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{\Delta_{a_n}^2(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}+\frac{|\Delta(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)E\big(|h(X_j,Y_j)||\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j)||\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&\Big(a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta(X_i)|a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+a_n^{-2}\Big(\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big)(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}\\
&\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big((2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2})\hat g(X_i)\\
&\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j k_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)\\
\le&\Big(a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta(X_i)|a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+a_n^{-2}\Big(\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big)(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}\\
&\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma+U_n^{1/2}\\
&\qquad+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

Mit (B.a), (B.β), Lemma 3.4 und dem Beweis von Proposition 3.6 folgt also $E(|\xi_3||\mathbf{X},\mathbf{Z})=o_p(n^{-1/2})$. Ferner schätzt man wie zuvor ab

$$
\begin{aligned}
&E(|\xi_1||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big|\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big|\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_j k_b(X_i-X_j)\big(E\big((\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}\\
\le&2(c_\pi^{-1}+R)\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|1_{\{g(X_i)<a_n\}}\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2}\\
&\qquad+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

Wegen (B.agr) gilt

$$
P\Big(n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|1_{\{g(X_i)<a_n\}}>\varrho\Big)\le\frac{n^{1/2}}{\varrho}E\Big[|r(X_1)|1_{\{g(X_1)<a_n\}}\Big]\xrightarrow{n\to\infty}0.
$$

(B.a), (B.β), der Beweis von Proposition 3.6 und Lemma 3.3 liefern also $\xi_1=$

$o_p(n^{-1/2})$. Auch ξ_2 schätze man zunächst auf ähnliche Weise ab:

$$
\begin{aligned}
&E(|\xi_2||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|r(X_i)|}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{|\hat g(X_i)g_{a_n}(X_i)-g(X_i)\hat g_{a_n}(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\\
&\cdot\Big((n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2})\hat g(X_i)+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\\
&\qquad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|\frac{|\hat g(X_i)g_{a_n}(X_i)-g(X_i)\hat g_{a_n}(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}\\
&\cdot\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2}+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

Man hat wie oben

$$
(2n^{-1/2}(s_n^{(2)}+s_n^{(1,2)}\sigma)+U_n^{1/2})+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}=o_p(1).
$$

Mit der gleichen Argumentation wie für Term $A_3^{(n)}$ in Proposition A.6 mit 1 anstatt $Z_jh_y(X_i,X_i+\varepsilon_j)$ folgt zudem

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|r(X_i)|\frac{|\hat g(X_i)g_{a_n}(X_i)-g(X_i)\hat g_{a_n}(X_i)|}{g_{a_n}^2(X_i)}=o_p(n^{-1/2}).
$$

Also erhält man mit Lemma 3.3 die Aussage $\xi_2=o_p(n^{-1/2})$. Insgesamt ergibt sich daher (4.2.8) $=o_p(n^{-1/2})$.
Zu zeigen bleibt jetzt nur noch, dass auch der Term (4.2.5) von der Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ ist. Schreibe ihn dazu als

$$
\begin{aligned}
(4.2.5)\quad=\quad&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^3(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l\varepsilon_lk_b(X_i-X_l)\\
&\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jk_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^3(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\varepsilon_jh(X_j,Y_j)(\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j))\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^3(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{l:l\neq i}Z_l\varepsilon_lk_b(X_i-X_l)\\
&\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jk_b(X_i-X_j)h(X_j,Y_j)\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)\big)=:\sum_{\nu=1}^3\zeta_\nu^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Wie gewohnt schätzt man ab

$$
\begin{aligned}
&E(|\zeta_2^{(1)}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j)E\big(|\varepsilon_j||h(X_j,Y_j)||\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j)|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{K}{nba_n}\frac{C_\ell^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)\Big(E\big((\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_\ell^{1/2}}{nba_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2})\\
&\quad+\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{KC_\ell^{1/2}}{nba_n}\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}\\
&\quad+\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

Nach (B.a) ist $\frac{K}{nba_n}$ gleich $o(n^{-3/5})$. Da der Term in der Klammer stochastisch gegen Null konvergiert, folgt mit Lemma 3.3 $\zeta_2^{(1)}=o_p(n^{-1/2})$. Ferner gilt nach Lemma 4.5 die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\big|\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)\big|\\
\le&\big|\ell_n(\hat\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol\varepsilon})-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)\big|+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-l}\big)\big|\\
\le&n^{-1/2}((s_n^{(1,1)}+s_n^{(1,2)})|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})=n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)}).
\end{aligned}
$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
&E(|\zeta_3^{(1)}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot E\big(|\varepsilon_l||h(X_j,Y_j)|\big|\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\hat\ell_{-l}\big(Y_j-\hat r_{njl}^{(a)}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot\big(n^{-1/2}s_n^{(1)}E(\varepsilon_l^2|h(X_j,Y_j)||X_j)+n^{-1/2}s_n^{(2)}E(|\varepsilon_l||h(X_j,Y_j)||X_j)\big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)C_h^{1/2}n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Also gilt (4.2.5) $= \zeta_1^{(1)} + o_p(n^{-1/2})$. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
&nE((\zeta_1^{(1)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n^5}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^6(X_i)} Z_i Z_j k_b^2(X_i-X_j)k_b^2(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_l^2 h^2(X_j,Y_j)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_j-\hat{r}_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{1}{n^5}\sum_{\substack{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2,l_2:(i_1,j_1,l_1)\neq(i_2,j_2,l_2)\\ i_1,j_1,l_1 \text{ versch.},i_2,j_2,l_2 \text{ versch.}}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}^3(X_{i_1})\hat{g}_{a_n}^3(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_1l_1}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}_{nj_2l_2}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Die erste Summe lässt sich mit (B.hℓ) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l \text{ versch.}}\frac{Z_jZ_l}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot E\Big(h^2(X_j,Y_j)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_j-\hat{r}_{njl}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}C_h^{1/2}+C_\ell^{1/2}\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K^2\sigma^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}\Big(\frac{c_0C_h^{1/2}}{n^{1/10}\beta}+n^{-1/10}C_\ell^{1/2}\Big)^2=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Unterscheide nun die folgenden Fälle:
<u>sechs verschiedene Indices:</u> Aus dem Beweis von Satz 4.16 liest man ab

$$\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_1l_1}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\quad\cdot\big(\hat{\ell}_{l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}_{nj_2l_2}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
=&\big|E\big(h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}_{nj_2l_2}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{l_2}\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_1l_1}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
=&\big|E\big(h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_1},Y_{j_1})\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{l_1}\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}_{nj_2l_2}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_2\{l_2,l_1\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{l_2,l_1\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{l_2}\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_1l_1}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat{r}_{nj_1\{l_1,l_2\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{l_1,l_2\}}\big)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\le&n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\cdot E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\le n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2,l_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2,l_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\qquad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})\cdot n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2:i_1\neq i_2}\frac{\hat{g}^2(X_{i_1})\hat{g}^2(X_{i_2})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)=o_p(1).
\end{aligned}$$

<u>fünf verschiedene Indices:</u>

<u>$i_1=i_2$</u>: Der zu untersuchende Anteil der gemischten Summe hat die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i,j_1,l_1,j_2,l_2 \text{ versch.}}\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^6_{a_n}(X_i)}Z_iZ_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{l_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\quad\cdot k_b(X_i-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Mit der soeben verwendeten Abschätzung

$$\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\le n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)$$

ergibt sich analog zum Fall sechs verschiedener Indices

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i,j_1,l_1,j_2,l_2 \text{ versch.}}\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^6_{a_n}(X_i)}Z_iZ_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{l_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\quad\cdot k_b(X_i-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^5}\sum_{i,j_1,l_1,j_2,l_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{l_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\quad\cdot k_b(X_i-X_{l_2})\cdot n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2C_hn^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^4(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)n^{-1}=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

<u>$j_1=j_2$</u>: Der entsprechende Anteil der gemischten Summe hat die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j,l_1,i_2,l_2 \text{ versch.}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_jZ_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-X_j)k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_j)k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h^2(X_j,Y_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Aus dem Fall $j_1 = j_2$ im Beweis von Satz 4.16 entnimmt man

$$\begin{aligned}
&\Big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h^2(X_j,Y_j)\big(\hat\ell_{-l_1}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell_{-l_2}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
=&\Big|E\big(h^2(X_j,Y_j)E\big(\varepsilon_{l_1}\big(\hat\ell_{-l_2}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad\cdot E\big(\varepsilon_{l_2}\big(\hat\ell_{-l_1}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&E\big(h^2(X_j,Y_j)\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\big(\hat\ell_{-l_2}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\\
&\quad\cdot\big|E\big(\varepsilon_{l_2}\big(\hat\ell_{-l_1}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,l_2\}},\mathbf{Z}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)^2\le n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)^2C_h.
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j,l_1,i_2,l_2\text{ versch.}}\frac{\hat p(X_{i_1})\hat p(X_{i_2})}{\hat g^3_{a_n}(X_{i_1})\hat g^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_jZ_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-X_j)k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_j)k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h^2(X_j,Y_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-l_1}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat\ell_{-l_2}\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)^2C_h(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j,l_1,i_2,l_2\text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_jZ_{l_1}Z_{l_2}}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_1})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_j)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_j)k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})\\
\le&n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)^2C_h(c_\pi^{-1}+R)^2\\
&\quad\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,i_2,j\text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_j\frac{\hat g(X_{i_1})\hat g(X_{i_2})}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_1})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_j)k_b(X_{i_2}-X_j)\\
\le&n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)^2C_h(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Um hier stochastische Konvergenz gegen Null zu erhalten, genügt es, zu zeigen, dass der Term

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_l)\Big)^2$$

beschränkt in Wahrscheinlichkeit ist. Betrachte dazu

$$\begin{aligned}
&E\Big[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big]=E\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{i>1}Z_i\frac{k_b(X_i-X_1)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big]\\
=&\frac{1}{n^2}\sum_{i>1}E\Big[Z_i\frac{k_b^2(X_i-X_1)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\Big]+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j>1:i\neq j}E\Big[Z_iZ_j\frac{k_b(X_i-X_1)k_b(X_j-X_1)}{\hat g_{a_n}(X_i)\hat g_{a_n}(X_j)}\Big]\\
\le&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j>1:i\neq j}E\Big[E\Big(\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_1)\Big|X_1\Big)E\Big(\frac{Z_j}{\hat g_{a_n}(X_j)}k_b(X_j-X_1)\Big|X_1\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert wegen (B.a) gegen Null, er ist also insbesondere beschränkt durch eine Konstante $\bar K$. Der zweite Summand ist wegen

$$E\Big(\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_1)\Big|X_1\Big)=\int\frac{g(X_1+bu)}{\hat g_{a_n}(X_1+bu)}k(u)du\le 1$$

beschränkt. Mit der Chebyshev-Ungleichung folgt also

$$\begin{aligned}
&P\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l} Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2 > c\Big)\\
\leq & c^{-1}E\Big[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l} Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2\Big] \leq c^{-1}\Big(1+\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\Big) \leq \frac{1+\bar{K}}{c}.
\end{aligned}$$

Für jedes $\varrho > 0$ existiert daher eine Konstante $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$P\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l} Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2 > c\Big) < \varrho \quad \forall n \geq n_0,$$

d.h. es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l} Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2 = O_p(1).$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j,l_1,i_2,l_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_jZ_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-X_j)k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_j)k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}h^2(X_j,Y_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{njl_1}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{njl_2}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

<u>$l_1 = l_2$</u>: Zu untersuchen ist der Term

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_lk_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)E\big(\varepsilon_l^2h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 4.16 entnimmt man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big|E\big(\varepsilon_l^2h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\qquad\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\leq&\sigma^2E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_{j_2}|+s_n^{(2)})+|D_{j_1}^{\{l,j_2\}}|)\\
&\qquad\cdot(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_{j_1}|+s_n^{(2)})+|D_{j_2}^{\{l,j_1\}}|)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&\sigma^2\big(n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+C_h\big(E((D_{j_1}^{\{l,j_2\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})E((D_{j_2}^{\{l,j_1\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h)\big(E((D_{j_1}^{\{l,j_2\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h)\big(E((D_{j_2}^{\{l,j_1\}})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big)\\
\leq&\sigma^2\Big(n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+C_h\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\\
&\qquad\cdot\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\\
&\quad+n^{-1/2}t_n^{(2)}\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\\
&\quad+n^{-1/2}t_n^{(2)}\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$D_j^{\{l,i\}} := \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{l,i\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{l,i\}}\big) - \ell(\varepsilon_j),$$

$s_n^{(1)} = \frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K}{n^{2/5}ba_n} + \frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}$, $s_n^{(2)} = \frac{c_0}{n^{1/2}\bar{Z}_n\beta^2\alpha_n}$,
$s_n^{(1,2)} = \frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\bar{Z}_n^{1/2}$, $t_n^{(1)} = 2s_n^{(1)}\sigma + 2s_n^{(1,2)}\sigma + 4s_n^{(2)}$,
$t_n^{(2)} = s_n^{(1)}C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2} + s_n^{(2)}C_h$ und $U_n = E\big(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell(u))^2 f(u)du\big)$. Also erhält man

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)E\big(\varepsilon_l^2 h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\sigma^2\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)\Big(n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\\
&\quad+C_h\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\\
&\qquad\cdot\Big(n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+U_n^{1/2}\Big)\\
&\quad+n^{-1/2}t_n^{(2)}\Big(2n^{-1/2}t_n^{(1)}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+2U_n^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\\
\le&C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,l \text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
\le&C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{i_1=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_{i_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}=o_p(1).
\end{aligned}$$

Zudem ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)n^{-1/2}t_n^{(2)}2(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\\
\le&t_n^{(2)}2(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,l \text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{j_2}}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
\le&t_n^{(2)}2(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i_1=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_{i_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}\frac{1}{n}\sum_{i_2=1}^n\frac{\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})}=o_p(1)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})^2\\
\leq&(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})^2\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,i_2,l \text{ versch.}} Z_l\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}\hat{g}(X_{i_1})\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_l)k_b(X_{i_2}-X_l)\\
\leq&(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})^2\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_l)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Nach den Überlegungen im Fall $j_1 = j_2$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l} Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^2 = O_p(1),$$

also folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})^2 = o_p(1).
\end{aligned}$$

Man rechnet ferner mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)n^{-1/2}t_n^{(2)}\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq&t_n^{(2)}\frac{K}{n^{-1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{j_2}}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,l \text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_l}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq&t_n^{(2)}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i_2=1}^{n}\frac{\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})}\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_jk_b(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq&t_n^{(2)}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\leq&t_n^{(2)}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^{n}E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wegen (B.a), (B.β), $\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} \leq 1$ und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert dies stochastisch gegen Null. Außerdem schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_i})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\le&(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^4}\sum_{i_1,i_2,j_2,l \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_2}Z_l\frac{k_b(X_{i_1}-X_l)k_b(X_{i_2}-X_l)}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_1})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\Big(\frac{1}{n}\sum_{j_1 \text{ versch. von } i_1,i_2,j_2,l}Z_{j_1}k_b^2(X_{i_1}-X_{j_1})\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\le&(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{K^{1/2}}{b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,i_2,l \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_l\frac{\hat g(X_{i_2})\hat g^{1/2}(X_{i_1})}{\hat g^{3/2}_{a_n}(X_{i_1})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_l)k_b(X_{i_2}-X_l)\\
\le&(n^{-1/2}t_n^{(1)}+U_n^{1/2})\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Nach (B.a), (B.β), dem Beweis von Proposition 3.6 und der in Fall $j_1=j_2$ bewiesenen Aussage

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}Z_i\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2=O_p(1)$$

konvergiert dies stochastisch gegen Null. Schließlich rechnet man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_l}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_i})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_l)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_l)\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\le&\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,i_2,l \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_l\frac{k_b(X_{i_1}-X_l)k_b(X_{i_2}-X_l)}{\hat g^2_{a_n}(X_{i_1})\hat g^2_{a_n}(X_{i_2})}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j_1:j_1\neq i_1}Z_{j_1}k_b^2(X_{i_1}-X_{j_1})\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j_2:j_2\neq i_2}Z_{j_2}k_b^2(X_{i_2}-X_{j_2})\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)\\
\le&\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)\\
&\quad\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,i_2,l \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_l\frac{\hat g^{1/2}(X_{i_1})\hat g^{1/2}(X_{i_2})}{\hat g^{3/2}_{a_n}(X_{i_1})\hat g^{3/2}_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_l)k_b(X_{i_2}-X_l)\\
\le&\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^n E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_l)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Wie soeben gezeigt ist der letzte Term beschränkt in Wahrscheinlichkeit. Nach (B.a), (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert der untersuchte Term also stochastisch gegen Null.

$i_1 = j_2$ bzw. $i_2 = j_1$: Der entsprechende Anteil der gemischten Summe hat die Form

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^5} \sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,l_2 \text{ versch.}} & \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{l_1}Z_{l_2} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1}) \\ &\cdot k_b(X_{i_2}-X_{i_1})k_b(X_{i_2}-X_{l_2}) E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2} h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{i_1},Y_{i_1}) \\ &\quad \cdot \big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{i_1}-\hat{r}^{(a)}_{ni_1l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{i_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Wie im Fall sechs verschiedener Indices hat man

$$\begin{aligned}&\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2} h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{i_1},Y_{i_1})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big) \\ &\quad \cdot \big(\hat{\ell}_{l_2}\big(Y_{i_1}-\hat{r}^{(a)}_{ni_1l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{i_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big| \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma).\end{aligned}$$

Das liefert

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{n^5} \sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,l_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{l_1}Z_{l_2} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1}) \\ &\quad \cdot k_b(X_{i_2}-X_{i_1})k_b(X_{i_2}-X_{l_2}) E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2} h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{i_1},Y_{i_1}) \\ &\qquad \cdot \big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{i_1}-\hat{r}^{(a)}_{ni_1l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{i_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big| \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2 \frac{1}{n^5} \sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,l_2 \text{ versch.}} \frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{l_1}Z_{l_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_1}-X_{j_1}) \\ &\quad \cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{i_1})k_b(X_{i_2}-X_{l_2}) \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i_1,i_2:i_2\ne i_1} Z_{i_1} \frac{\hat{g}^2(X_{i_1})\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_2}-X_{i_1}) \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2 \frac{1}{n}\sum_{i_2=1}^n \frac{\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})} \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2 = o_p(n^{-1}).\end{aligned}$$

$i_1 = l_2$ bzw. $i_2 = l_1$: Der zu untersuchende Anteil der gemischten Summe ist von der Form

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^5} \sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}} & \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1} k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1}) \\ &\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{i_1}) E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{i_1} h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2}) \\ &\quad \cdot \big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-i_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).\end{aligned}$$

Aus dem Fall sechs verschiedener Indices liest man ab

$$\begin{aligned}&\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{i_1} h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big) \\ &\quad \cdot \big(\hat{\ell}_{i_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big| \\ \le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma).\end{aligned}$$

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{i_1})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{i_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-i_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2i_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big|\\
\le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{i_1})\\
\le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2:i_2\neq i_1}Z_{i_1}Z_{i_2}\frac{\hat{g}^2(X_{i_1})\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_2}-X_{i_1})\\
\le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n}\sum_{i_2=1}^{n}\frac{\hat{g}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}(X_{i_2})}\\
\le& n^{-1}C_h(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)(c_\pi^{-1}+R)^2=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

<u>$j_1=l_2$ bzw. $j_2=l_1$:</u> Der zu betrachtende Anteil der gemischten Summe hat die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}} \frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})} Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{j_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-j_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2j_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Aus dem Fall $i_1=j_2$ (bzw. $i_2=j_1$) im Beweis von Satz 4.16 entnimmt man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\big|E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{j_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-j_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2j_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
=&\big|E\big(h(X_{j_2},Y_{j_2})E\big(\varepsilon_{l_1}\big(\hat{\ell}_{-j_1}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2j_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,j_1\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\qquad\cdot E\big(\varepsilon_{j_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,j_1\}},\mathbf{Z}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big|\\
\le& n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)E\big(|h(X_{j_2},Y_{j_2})|\\
&\quad\cdot\big|E\big(\varepsilon_{j_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{l_1,j_1\}},\mathbf{Z}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le& n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}\big(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma^2+2s_n^{(2)}C_h^{1/2}\sigma+s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2}\sigma\big)\\
&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2}\\
\le& n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}\big(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma^2+2s_n^{(2)}C_h^{1/2}\sigma+s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2}\sigma\big)\\
&\quad+n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\Big(n^{-1/2}s_n^{(2)}+n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma+U_n^{1/2}\\
&\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)\\
=& n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}\big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma^2+s_n^{(2)}(2C_h^{1/2}\sigma+C_\varepsilon^{1/2})+2s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2}\sigma)\\
&\quad+C_\varepsilon^{1/2}U_n^{1/2}\big)+n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Setze

$$\gamma_n := (s_n^{(1)}\sigma^2+s_n^{(2)}\sigma)\big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}C_h^{1/2}\sigma^2+s_n^{(2)}(2C_h^{1/2}\sigma+C_\varepsilon^{1/2})+2s_n^{(1,2)}C_\varepsilon^{1/2}\sigma)+C_\varepsilon^{1/2}U_n^{1/2}\big).$$

Einerseits rechnet man nun

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{\hat p(X_{i_1})\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^3(X_{i_1})\hat g_{a_n}^3(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})n^{-1/2}\gamma_n\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}\gamma_n\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}\gamma_n\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,i_2 \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}\frac{\hat g(X_{i_1})\hat g(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}\gamma_n\frac{1}{n}\sum_{j_1=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j_1}\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})\Big)^2.
\end{aligned}$$

Wie in Fall $j_1 = j_2$ nachgewiesen ist die auftretende Summe gleich $O_p(1)$. Daher erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{\hat p(X_{i_1})\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^3(X_{i_1})\hat g_{a_n}^3(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})n^{-1/2}\gamma_nC_h^{1/2}=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung für Summen und der Abkürzung $s_n := s_n^{(1)}\sigma^2 + s_n^{(2)}\sigma$

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{\hat p(X_{i_1})\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^3(X_{i_1})\hat g_{a_n}^3(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})n^{-1/2}s_n\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj_1}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big|\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1/2}s_n\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{j_1})\big(E(\delta_{nj_1}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K}{n^{1/2}ba_n}s_n\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,i_2 \text{ versch.}}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}\frac{\hat g(X_{i_1})\hat g(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})\hat g_{a_n}(X_{i_2})}\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\big(E(\delta_{nj_1}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K}{n^{1/2}ba_n}s_n\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\Big)\\
\le&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{K}{n^{2/5}ba_n}s_n\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}n^{-3/10}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{\hat g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach (B.a),(B.β), dem Beweis von Proposition 3.6 und der im Fall $j_1 = j_2$ bewiesenen Aussage

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{Z_i}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}k_b(X_i - X_j)\Big)^2 = O_p(1)$$

folgt

$$\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1} - X_{j_1})k_b(X_{i_1} - X_{l_1})$$
$$\cdot\, k_b(X_{i_2} - X_{j_2})k_b(X_{i_2} - X_{j_1})n^{-1/2}s_n C_h^{1/2}C_\varepsilon^{1/2}\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} = o_p(n^{-3/10}).$$

Hier hätte man möglicherweise auch eine etwas bessere Rate erzielen können. Da das jedoch keinen Einfluss auf die in der Behauptung angegebene Rate hätte und der Beweis ein wenig länger geworden wäre, habe ich darauf verzichten. Zusammen erhält man also

$$\frac{1}{n^5}\sum_{i_1,j_1,l_1,i_2,j_2 \text{ versch.}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}k_b(X_{i_1} - X_{j_1})k_b(X_{i_1} - X_{l_1})$$
$$\cdot\, k_b(X_{i_2} - X_{j_2})k_b(X_{i_2} - X_{j_1})E\big(\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{j_1}h(X_{j_1},Y_{j_1})h(X_{j_2},Y_{j_2})$$
$$\cdot\,\big(\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1} - \hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big) - \ell(\varepsilon_{j_1})\big)\big(\hat{\ell}_{-j_1}\big(Y_{j_2} - \hat{r}^{(a)}_{nj_2j_1}\big) - \ell(\varepsilon_{j_2})\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) = o_p(n^{-3/10}).$$

<u>vier verschiedene Indices:</u> Der Betrag des entsprechenden Anteils lässt sich mit Hilfe von (L1) aus Lemma 4.2 abschätzen durch

$$\frac{1}{n^5}\sum_{4 \text{ versch. Indices}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1} - X_{j_1})$$
$$\cdot\, k_b(X_{i_1} - X_{l_1})k_b(X_{i_2} - X_{j_2})k_b(X_{i_2} - X_{l_2})E\big(|\varepsilon_{l_1}||\varepsilon_{l_2}||h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|$$
$$\cdot\,\big|\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1} - \hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big) - \ell(\varepsilon_{j_1})\big|\big|\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2} - \hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big) - \ell(\varepsilon_{j_2})\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)$$
$$\leq (c_\pi^{-1} + R)^2\frac{1}{n^5}\sum_{4 \text{ versch. Indices}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_2})}k_b(X_{i_1} - X_{j_1})k_b(X_{i_1} - X_{l_1})$$
$$\cdot\, k_b(X_{i_2} - X_{j_1})k_b(X_{i_2} - X_{l_2})E\Big(|\varepsilon_{l_1}||\varepsilon_{l_2}||h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|$$
$$\cdot\,\Big(\frac{c_0}{\beta} + |\ell(\varepsilon_{j_1})|\Big)\Big(\frac{c_0}{\beta} + |\ell(\varepsilon_{j_2})|\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).$$

Den auftretenden bedingten Erwartungswert schätze man mit der Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte und (B.hℓ) wie folgt ab

$$E\Big(|\varepsilon_{l_1}||\varepsilon_{l_2}||h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\Big(\frac{c_0}{\beta} + |\ell(\varepsilon_{j_1})|\Big)\Big(\frac{c_0}{\beta} + |\ell(\varepsilon_{j_2})|\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)$$
$$\leq \frac{c_0^2}{\beta^2}\big(E(\varepsilon^2_{l_1}h^2(X_{j_1},Y_{j_1})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E(\varepsilon^2_{l_2}h^2(X_{j_2},Y_{j_2})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}$$
$$+ \frac{c_0}{\beta}\big(E(\varepsilon^2_{l_1}h^2(X_{j_1},Y_{j_1})\ell^2(\varepsilon_{j_1})\big)^{1/2}\big(E(\varepsilon^2_{l_2}h^2(X_{j_2},Y_{j_2})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}$$
$$+ \frac{c_0}{\beta}\big(E(\varepsilon^2_{l_1}h^2(X_{j_1},Y_{j_1})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E(\varepsilon^2_{l_2}h^2(X_{j_2},Y_{j_2})\ell^2(\varepsilon_{j_2})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}$$
$$+ \big(E(\varepsilon^2_{l_1}h^2(X_{j_1},Y_{j_1})\ell^2(\varepsilon_{j_1})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E(\varepsilon^2_{l_2}h^2(X_{j_2},Y_{j_2})\ell^2(\varepsilon_{j_2})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}$$
$$\leq \frac{c_0^2}{\beta^2}\sigma^2 C_h + 2\frac{c_0}{\beta}\sigma^2 C_h^{1/2}C_\ell^{1/2} + \sigma^2 C_\ell = \sigma^2\Big(\frac{c_0}{\beta}C_h^{1/2} + C_\ell^{1/2}\Big)^2.$$

Beachte dabei, dass gilt $l_1 \neq j_1$ und $l_2 \neq j_2$. Damit schätzt man weiter ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{\text{4 versch. Indices}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-j_1)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(|\varepsilon_{l_1}||\varepsilon_{l_2}||h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\\
&\qquad\cdot\big|\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big|\big|\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)^2\Big(\frac{c_0}{\beta}C_h^{1/2}+C_\ell^{1/2}\Big)^2\frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^3}\sum_{i_1,j_1,l_1\text{ versch.}}Z_{j_1}Z_{l_1}\frac{k_b(X_{i_1}-X_{j_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)^2\Big(\frac{c_0}{n^{1/10}\beta}C_h^{1/2}+n^{-1/10}C_\ell^{1/2}\Big)^2\frac{K^2\sigma^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\hat{g}^2(X_{i_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}.
\end{aligned}$$

Dies konvergiert wegen (B.β) und (B.a) stochastisch gegen Null.
<u>drei verschiedene Indices:</u> Auf ähnliche Weise schätzt man den Betrag des zu untersuchenden Anteils der gemischten Summe ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^5}\sum_{\text{3 versch. Indices}}\frac{\hat{p}(X_{i_1})\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_1})\hat{g}^3_{a_n}(X_{i_2})}Z_{i_1}Z_{i_2}Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{l_1}Z_{l_2}k_b(X_{i_1}-j_1)\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_1}-X_{l_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2})k_b(X_{i_2}-X_{l_2})E\big(|\varepsilon_{l_1}||\varepsilon_{l_2}||h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\\
&\qquad\cdot\big|\hat{\ell}_{-l_1}\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1l_1}\big)-\ell(\varepsilon_{j_1})\big|\big|\hat{\ell}_{-l_2}\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2l_2}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)^2\Big(\frac{c_0}{\beta}C_h^{1/2}+C_\ell^{1/2}\Big)^2\frac{K^2\sigma^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^4}\sum_{i_1,j_1,l_1\text{ versch.}}Z_{j_1}Z_{l_1}\frac{k_b(X_{i_1}-X_{j_1})}{\hat{g}^2_{a_n}(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{l_1})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)^2\Big(\frac{c_0}{n^{1/10}\beta}C_h^{1/2}+n^{-1/10}C_\ell^{1/2}\Big)^2\frac{K^2\sigma^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also $\zeta_1^{(1)}=o_p(n^{-1/2})$ und somit (4.2.5) $=o_p(n^{-1/2})$. Daher ergibt sich die Behauptung. □

Satz 4.18. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_2^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)=o_p(n^{-1/2})$$

Beweis. Die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 4.16, indem man ε_i durch $\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)$ ersetzt. □

Satz 4.19. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$S_1^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i(\hat{B}_{ni}-B(X_i))\Big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\frac{1}{\hat{J}}\int\hat{\ell}(u)f(u)du-\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i)\Big)=o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Schreibe $S_1^{(n)}$ als

$$\begin{aligned}
S_1^{(n)} &= \frac{1}{\hat{J}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\Big) \\
&+ \frac{1}{\hat{J}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i)) \int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}(u) + \hat{\ell}\,'(u)\delta_{ni})f(u)du \\
&+ \Big(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J}\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))\ell(\varepsilon_i) \\
&- \frac{1}{\hat{J}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))\delta_{ni} \int \hat{\ell}\,'(u)f(u)du =: \sum_{\nu=1}^4 S_{1,\nu}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.17 gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))\delta_{ni} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni} - B(X_i))(\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) = S_3^{(n)} = o_p(n^{-1/2}).$$

Mit $\hat{J}^{-1} = J^{-1} + o_p(1) = O_p(1)$ und $\int \hat{\ell}\,'(u)f(u)du = J + o_p(1) = O_p(1)$ aus Proposition 4.7 folgt also $S_{1,4} = o_p(n^{-1/2})$.
Ferner liefern Satz 4.18 und Proposition 4.7

$$S_{1,3} = J\Big(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J}\Big)S_2^{(n)} = o_p(n^{-1/2}).$$

Den Term $\hat{J}S_{1,2}$ zerlege man in

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} \int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}(u) + \hat{\ell}\,'(u)\delta_{ni})f(u)du \\
&\quad \cdot \frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)k_b(X_i - X_j) \qquad (4.2.9) \\
&- \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)} \int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}(u) + \hat{\ell}\,'(u)\delta_{ni})f(u)du. \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|(4.2.10)| &\leq c_\pi^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)| \Big|\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}(u) + \hat{\ell}\,'(u)\delta_{ni})f(u)du\Big| \\
&= c_\pi^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)||\delta_{ni}| \Big|\int\int_0^1 \hat{\ell}\,'(u - t\delta_{ni})dt f(u)du - \int \hat{\ell}\,'(u)f(u)du\Big| \\
&= c_\pi^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)||\delta_{ni}| \Big|\int_0^1 \int \hat{\ell}\,'(v)(f(v+t\delta_{ni}) - f(v))dvdt\Big| \\
&\leq c_\pi^{-1}\frac{c_0}{\beta^2}C_f^{(1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\varkappa(X_i)|\delta_{ni}^2.
\end{aligned}$$

Aus (B.$\varkappa$) und (B.r)(ii) aus 4.1 folgt

$$E[|\varkappa(X)|r^2(X)] \leq \big(E[\varkappa^2(X)]\big)^{1/2}\big(E[r^4(X)]\big)^{1/2} < \infty.$$

Zudem liefern (B.ag$\varkappa$r) und (B.agr)

$$\begin{aligned} E[|\varkappa(X)|r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}] &\le \big(E[\varkappa^2(X)r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]\big)^{1/2}\big(E[r^2(X)1_{\{g(X)<a_n\}}]\big)^{1/2} \\ &= o(n^{-3/5}). \end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Proposition 3.6 für $M(X) = |\varkappa(X)|$ erfüllt. Also ergibt sich mit besagter Proposition

$$|(4.2.10)| \le n^{-1/2}c_\pi^{-1}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}C_f^{(1)}n^{-2/5}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|\delta_{ni}^2 = o_p(n^{-1/2}).$$

Ferner schätzt man mit (L1) aus Lemma 4.2 und

$$R = a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\hat p(X_i) - p(X_i)| + c_\pi^{-1}a_n^{-1}\max_{1\le i\le n}|\Delta_{a_n}(X_i)|$$

ab

$$\begin{aligned} E(|(4.2.9)||\mathbf{X},\mathbf{Z}) \;\le\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\bigg(\bigg|\int(\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \hat\ell(u) + \hat\ell\,'(u)\delta_{ni})f(u)du\bigg| \\ &\cdot\bigg|\frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\hat\ell(\hat\varepsilon_j)\bigg|\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\ \le\;& (c_\pi^{-1}+R)\frac{c_0}{\beta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i}Z_jk_b(X_i-X_j) \\ &\cdot E\bigg(|h(X_j,Y_j)|\int|\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \hat\ell(u) + \hat\ell\,'(u)\delta_{ni}|f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\ \le\;& (c_\pi^{-1}+R)\frac{c_0^2C_f^{(1)}}{\beta^3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i}Z_jk_b(X_i-X_j) \\ &\cdot E\big(|h(X_j,Y_j)|\delta_{ni}^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big). \end{aligned}$$

Mit (B.h)(iii) und Lemma 3.2 erhält man

$$\begin{aligned} &E\big(|h(X_j,Y_j)|\delta_{ni}^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\ \le& 2E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E\Big(\big(\hat r_{nij}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) + 2E\Big(|h(X_j,Y_j)|\big(\hat r_{ni}^{(a)} - \hat r_{nij}^{(a)}\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\ \le& 2C_h^{1/2}E\Big(\big(\hat r_{nij}^{(a)} - r(X_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) + 2\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{n^2\hat g_{a_n}^2(X_i)}E(|h(X_j,Y_j)|\varepsilon_j^2|X_j) \\ \le& 2C_h^{1/2}\Big(2E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) + 2\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)\sigma^2}{n^2\hat g_{a_n}^2(X_i)}\Big) + 2\frac{K^2}{n^2b^2a_n^2}C_\varepsilon^{1/2}\sigma \\ \le& 4C_h^{1/2}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) + \frac{2K^2}{n^2b^2a_n^2}(2C_h^{1/2}\sigma^2 + C_\varepsilon^{1/2}\sigma). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
E(|(4.2.9)||\mathbf{X},\mathbf{Z}) &\leq (c_\pi^{-1}+R)\frac{4c_0^2C_f^{(1)}C_h^{1/2}}{\beta^3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\
&\quad +(c_\pi^{-1}+R)\frac{c_0^2C_f^{(1)}}{\beta^3}\frac{2K^2}{n^2b^2a_n^2}(C_h^{1/2}\sigma^2+C_\varepsilon^{1/2}\sigma)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} \\
&\leq (c_\pi^{-1}+R)n^{-1/2}\frac{4c_0^2C_f^{(1)}C_h^{1/2}}{n^{1/10}\beta^3}\frac{n^{3/5}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) \\
&\quad +(c_\pi^{-1}+R)n^{-1}\frac{c_0^2C_f^{(1)}}{n^{1/5}\beta^3}\frac{2K^2}{n^{4/5}b^2a_n^2}(C_h^{1/2}\sigma^2+C_\varepsilon^{1/2}\sigma).
\end{aligned}$$

Wegen (B.a), (B.β), Lemma 3.3 und dem Beweis von Proposition 3.6 folgt (4.2.9) $= o_p(n^{-1/2})$.
Schließlich zerlege man den Term $\hat{J}S_{1,1}$ in

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\int\hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\Big) \\
&\qquad\cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jh(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)k_b(X_i-X_j) \qquad (4.2.11)\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\int\hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\Big). \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

Ziehe nun Lemma 4.4 heran, um die gewünschte Konvergenzrate $o_p(n^{-1/2})$ nachzuweisen. Betrachte zunächst (4.2.12). Prüfe, ob die Voraussetzungen (C1) bis (C4) aus dem besagten Lemma für

$$\hat{h}_{n,i}(y)=Z_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\big(\hat{\ell}\big(y-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\ell(y-r(X_i))\big)$$

und

$$\tilde{h}_{n,i}(y)=Z_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}\big(\hat{\ell}_{-i}\big(y-\hat{r}_{ni}^{(a)}\big)-\ell(y-r(X_i))\big)$$

erfüllt sind. Man erhält

$$\begin{aligned}
E(|C_{n,1}||\mathbf{X},\mathbf{Z}) &= E\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i))\Big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\
&\leq c_\pi^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|E\big(|\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.5 gilt die Abschätzung

$$E(|\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})||\mathbf{X},\mathbf{Z})\leq n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}E[|\varepsilon_i|]+s_n^{(2)})\leq n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)}).$$

Mit ihr ergibt sich

$$E(|C_{n,1}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\leq c_\pi^{-1}n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|=o_p(n^{-1/2}).$$

Auf ähnliche Weise folgt

$$
\begin{aligned}
&E(|C_{n,2}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&E\Big(\Big|\int\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}_{-i}(u-\delta_{ni}))\Big)f(u)du\Big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&c_\pi^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|E\Big(\int|\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}_{-i}(u-\delta_{ni})|f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&c_\pi^{-1}n^{-1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|E\Big(\int(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&c_\pi^{-1}n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\varkappa(X_i)|=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Zudem schätzt man ab

$$
\begin{aligned}
C_{n,3} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}E\Big(\int(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\le c_\pi^{-2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\varkappa^2(X_i)E\Big(\int(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}
$$

Eine Taylor-Entwicklung, (L1) aus Lemma 4.2 und Lemma 3.2 liefern

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&E\Big(\int(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}(u)+\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(\int\Big(\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|\Big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+2U_n
\end{aligned}
$$

mit $U_n := E\big(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)$. Man erhält damit und mit der Abschätzung $\varkappa^2(X)\le C_\ell$ aus Bemerkung 4.1c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\varkappa^2(X_i)E\Big(\int(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2\frac{c_0^2C_\ell}{\beta^4}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+2C_\ell U_n n^{-1}.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 4.6 und dem Beweis von Proposition 3.6 ist dies gleich $o_p(n^{-1})$. Daher gilt $C_{n,3}=o_p(n^{-1})$. Schließlich schätzt man ab

$$
\begin{aligned}
C_{n,4} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}Z_i\frac{\varkappa^2(X_i)}{\pi^2(X_i)}E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-E(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z})\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\le c_\pi^{-2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\varkappa^2(X_i)E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-E(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 4.5 gilt die Abschätzung

$$\big|\ell_n(\hat\varepsilon_i, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}) - \ell_n\big(Y_i - \hat r^{(a)}_{nij}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big| \le n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})$$

ab. Mit ihr ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E\big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i) - E(\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-j}, \mathbf{Z}))^2\big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\big)\\
\le& E\big((\big|\ell_n(\hat\varepsilon_i, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i}) - \ell_n\big(Y_i - \hat r^{(a)}_{nij}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big|\\
&\qquad + E\big(\big|\ell_n\big(Y_i - \hat r^{(a)}_{nij}, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big) - \ell_n(\hat\varepsilon_i, \hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-i})\big|\big|\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-j}, \mathbf{Z}\big)))^2\big|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\big)\\
\le& n^{-1}E((s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)} + E((|s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{-j}, \mathbf{Z}))^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z})\\
\le& n^{-1}E((s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + 2s_n^{(2)} + s_n^{(1)}\sigma)^2|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \le 4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)})^2.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$C_{n,4} \le c_\pi^{-2} 4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)})^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa^2(X_i) = o_p(n^{-1}).$$

Man kann also Lemma 4.4 anwenden. Das liefert (4.2.12) $= o_p(n^{-1/2})$.
Den verbleibenden Term (4.2.11) schreibe man als

$$\begin{aligned}
(4.2.11) \quad = \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat p(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\left(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right)\\
&\cdot \frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i} Z_j h(X_j, Y_j)\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_j) - \hat\ell_{-i}\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}\big)\big)k_b(X_i - X_j)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\hat p(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\left(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right)\\
&\cdot \frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i} Z_j h(X_j, Y_j)\hat\ell_{-i}\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}\big)k_b(X_i - X_j).
\end{aligned}$$

Beachte, dass gilt $\int \ell(u)f(u)du = 0$. Schätze damit und mit Lemma 4.5 ab

$$\begin{aligned}
&E\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat p(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\left(\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot \frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i} Z_j h(X_j, Y_j)\big(\hat\ell(\hat\varepsilon_j) - \hat\ell_{-i}\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}\big)\big)k_b(X_i - X_j)\right|\,\middle|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\right)\\
\le& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\hat p(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)} \frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i} Z_j k_b(X_i - X_j)\\
&\quad\cdot E\left(\left|\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\right| |h(X_j, Y_j)| \big|\hat\ell(\hat\varepsilon_j) - \hat\ell_{-i}\big(Y_j - \hat r^{(a)}_{nji}\big)\big|\,\middle|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\right)\\
\le& (c_\pi^{-1} + R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\ne i} Z_j k_b(X_i - X_j) n^{-1/2}\\
&\quad\cdot\Bigg(E(|h(X_j, Y_j)||\hat\ell(\hat\varepsilon_i) - \ell(\varepsilon_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X}, \mathbf{Z})\\
&\quad+ E\left(|h(X_j, Y_j)|\left|\int (\hat\ell(u-\delta_{ni}) - \ell(u))f(u)du\right|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})\,\middle|\mathbf{X}, \mathbf{Z}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Einerseits gilt wegen (B.h)(iii) und der in Lemma 4.5 gezeigten Ungleichung

$$|\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})| \le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& n^{-1/2}E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E\big((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le& n^{-1/2}C_h^{1/2}(s_n^{(1,2)}s_n^{(1)}\sigma^2 + (s_n^{(1,2)} + s_n^{(1)})s_n^{(2)}\sigma + (s_n^{(2)})^2)\\
=& n^{-1/2}C_h^{1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)})(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)}).
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned}
&E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i) - \ell(\varepsilon_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le&\big(E(h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i) - \ell(\varepsilon_i))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\le&\big(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)E((s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&\cdot\left(E\left(\int(\hat{\ell}_{-i}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\middle|\mathbf{X},\mathbf{Z}\right)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 4.16 entnimmt man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E\left(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}) - \ell(u)\big)^2 f(u)du\middle|\mathbf{X},\mathbf{Z}\right)\\
\le&\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + n^{-1/2}s_n^{(2)} + n^{-1/2}s_n^{(1,2)}\sigma + U_n^{1/2}\Big)^2
\end{aligned}$$

mit $U_n = E\big(\int(\hat{\ell}(u) - \ell(u))^2 f(u)du\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i) - \ell(\varepsilon_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& C_h^{1/2}(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)})\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)}) + U_n^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}
&E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \ell(\varepsilon_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+ E(|h(X_j,Y_j)||\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i) - \ell(\varepsilon_i)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& C_h^{1/2}(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)})\Big(2n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)}) + \frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + U_n^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

Ferner folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (L1) aus Lemma 4.2

$$
\begin{aligned}
& E\biggl(|h(X_j,Y_j)|\biggl|\int (\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))f(u)du\biggr|(s_n^{(1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})\biggr|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)\\
\le & E\biggl(|h(X_j,Y_j)|\int |\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell(u)|f(u)du\,(s_n^{(1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})\biggr|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)\\
& + E\biggl(|h(X_j,Y_j)|\int |\hat\ell(u)-\ell(u)|f(u)du\,(s_n^{(1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})\biggr|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)\\
\le & \bigl(E(h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2|\mathbf{X})\bigr)^{1/2}\frac{c_0}{\beta^2}\bigl(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\bigr)^{1/2}\\
& + \bigl(E(h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)})^2|\mathbf{X})\bigr)^{1/2}\biggl(E\biggl(\int (\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\biggr|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)\biggr)^{1/2}\\
\le & C_h^{1/2}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})\Bigl(\frac{c_0}{\beta^2}\bigl(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\bigr)^{1/2}+U_n^{1/2}\Bigr).
\end{aligned}
$$

Also kann man abschätzen

$$
\begin{aligned}
& n^{1/2}E\biggl(\biggl|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\biggl(\hat\ell(\hat\varepsilon_i)-\int \hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\biggr)\\
& \qquad \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\bigl(\hat\ell(\hat\varepsilon_j)-\hat\ell_{-i}\bigl(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\bigr)\bigr)k_b(X_i-X_j)\biggr|\biggr|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)\\
\le & (c_\pi^{-1}+R)2C_h^{1/2}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\\
& \qquad \cdot\Bigl(\frac{c_0}{\beta^2}\bigl(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\bigr)^{1/2}+n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}\Bigr)\\
\le & (c_\pi^{-1}+R)2C_h^{1/2}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})\Bigl(\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\Bigl(\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Bigr)^{1/2}\\
& \qquad + n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}\Bigr).
\end{aligned}
$$

Nach (B.β), Lemma 4.6, dem Beweis von Proposition 3.6 und den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 konvergiert dies stochastisch gegen Null. Es gilt also

$$
\begin{aligned}
(4.2.11) \quad = \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\biggl(\hat\ell(\hat\varepsilon_i)-\int\hat\ell(u-\delta_{ni})f(u)du-\ell(\varepsilon_i)\biggr)\\
& \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\hat\ell_{-i}\bigl(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\bigr)k_b(X_i-X_j)+o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle möchte ich nun Lemma 4.4 mit

$$
\begin{aligned}
\hat h_{n,i}(y) \quad = \quad & Z_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\bigl(\hat\ell\bigl(y-\hat r_{ni}^{(a)}\bigr)-\ell(y-r(X_i))\bigr)\\
& \cdot\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\hat\ell_{-i}\bigl(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\bigr)k_b(X_i-X_j)
\end{aligned}
$$

und

$$\tilde{h}_{n,i}(y) = Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} \big(\hat{\ell}_{-i}\big((y - \hat{r}^{(a)}_{ni}\big) - \ell(y - r(X_i))\big) \cdot \frac{1}{n} \sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j, Y_j) \hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) k_b(X_i - X_j)$$

anwenden. Dazu sind die entsprechenden Voraussetzungen (C1) bis (C4) auf ihre Gültigkeit zu prüfen. Mit Lemma 4.5 rechnet man

$$\begin{aligned}
&E(|C_{n,1}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} E\Big(|\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\\
&\cdot\Big|\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j) k_b(X_i - X_j)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\Big|\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1} + R)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i - X_j) E(n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&\cdot\big(E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) + E\big(|h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)|\big|X_j\big)\big)\\
\leq&(c_\pi^{-1} + R) n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i - X_j)\\
&\cdot\big(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\big)^{1/2}\Big(\Big(E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2} + J^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) + E\big((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+ E\big((\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) + \text{gemischte Terme.}
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 4.16 liest man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E\big((\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) &= E\Big(\int\big(\ell_n(u - \delta_{nj}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}) - \ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\leq \Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)}) + U_n^{1/2}\Big)^2
\end{aligned}$$

ab. Zusammen mit der Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte und Lemma 4.5 liefert dies

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&n^{-1}E((s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) + n^{-1}E((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+ \Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)}) + U_n^{1/2}\Big)^2\\
&+ 2n^{-1}\big(E((s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&+ 2n^{-1/2}\big(E((s_n^{(1)}|\varepsilon_i| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E\big((\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}\\
&+ 2n^{-1/2}\big(E((s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E\big((\hat{\ell}_{-j}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}\\
\leq&\Big(n^{-1/2}((s_n^{(1)} + 2s_n(1,2))\sigma + 3s_n^{(2)}) + \frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2} + U_n^{1/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Das ergibt mit (B.a), (B.β), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6

$$
\begin{aligned}
&E(|C_{n,1}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\\
&\quad\cdot\big(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\big)^{1/2}\Big(\big(E\big(\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2}+J^{1/2}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})C_h^{1/2}\\
&\cdot\Big((n^{-1/2}((s_n^{(1)}+2s_n^{(1,2)})\sigma+3s_n^{(2)})+U_n^{1/2}+J^{1/2})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\\
&\quad+\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})C_h^{1/2}\Big(n^{-1/2}((s_n^{(1)}+2s_n^{(1,2)})\sigma+3s_n^{(2)})+U_n^{1/2}+J^{1/2}\\
&\quad+\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{c_0}{n^{1/10}\beta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^{1/2}(X_i)}{\hat g_{a_n}^{1/2}(X_i)}\Big(n^{-2/5}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\Big)=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Wegen Lemma 3.3 gilt also $C_{n,1}=o_p(n^{-1/2})$. Auf ähnliche Weise erhält man

$$
\begin{aligned}
&E(|C_{n,2}||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nZ_i\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jh(X_j,Y_j)\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)k_b(X_i-X_j)\Big|\\
&\quad\cdot\int|\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell_{-i}(u-\delta ni)|f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)n^{-1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)E(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_i|+s_n^{(2)}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&\quad\cdot\big(E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)+E\big(|h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)|\big|X_j\big)\big).
\end{aligned}
$$

Von diesem Term habe ich jedoch soeben schon gezeigt, dass er gleich $o_p(n^{-1/2})$ ist.

Betrachte nun

$$\begin{aligned}
C_{n,3} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Z_i \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)} E\bigg(\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du \\
&\quad \cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\Big)^2\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&\leq (c_\pi^{-1}+R)^2 n^{-1}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j)E\bigg(h^2(X_j,Y_j) \\
&\quad \cdot\hat{\ell}^2_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_j Z_l k_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)E\bigg(|h(X_j,Y_j)| \\
&\quad \cdot|h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big| \\
&\quad \cdot\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\bigg).
\end{aligned}$$

Mit (L1) aus Lemma 4.2 schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j)E\bigg(h^2(X_j,Y_j)\hat{\ell}^2_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big) \\
&\quad \cdot\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&\leq \frac{K}{nba_n}\frac{c_0^2}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)E\bigg(h^2(X_j,Y_j) \\
&\quad \cdot\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}_{-j}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big)\big| \\
&\leq \big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big)\big| + \big|\hat{\ell}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big) - \hat{\ell}_{-j}(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big| \\
&\leq \frac{c_0}{\beta^2}\big|\hat{r}^{(a)}_{ni}-\hat{r}^{(a)}_{nij}\big| + s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)} \leq s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
&E\bigg(h^2(X_j,Y_j)\int (\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&\leq E\bigg(h^2(X_j,Y_j)\int \Big(\big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni}) - \hat{\ell}_{-j}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big)\big| \\
&\qquad + \big|\hat{\ell}_{-j}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big) - \ell(u)\big|\Big)^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg) \\
&\leq E\bigg(h^2(X_j,Y_j)\int \Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)}) \\
&\qquad + \big|\hat{\ell}_{-j}\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nij}+r(X_i)\big) - \ell(u)\big|\Big)^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Benutze nun die MAR-Annahme und Lemma 3.2. Das ergibt

$$
\begin{aligned}
&E\Big(h^2(X_j,Y_j)\int(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}E\Big(h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})^2\Big|X_j\Big)\\
&+2E\big(h^2(X_j,Y_j)\big|X_j\big)E\Big(\int\big(\hat\ell_{-j}\big(u-\hat r_{nij}^{(a)}+r(X_i)\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}
$$

Nach (B.h) und (B.ε) gilt $E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\le C_h$ und

$$
\begin{aligned}
&E\Big(h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})^2\Big|X_j\Big)\\
=&(s_n^{(1)})^2E(h^2(X_j,Y_j)\varepsilon_j^2|X_j)+2s_n^{(1)}s_n^{(2)}E(h^2(X_j,Y_j)|\varepsilon_j||X_j)\\
&+(s_n^{(2)})^2E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\\
\le&(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von Lemma 3.2, Lemma 4.5 und (L1) aus Lemma 4.2 leitet man her

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int\big(\hat\ell_{-j}\big(u-\hat r_{nij}^{(a)}+r(X_i)\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(\int\big(\big|\hat\ell_{-j}\big(u-\hat r_{nij}^{(a)}+r(X_i)\big)-\hat\ell(u-\delta_{ni})\big|\\
&\quad+|\hat\ell(u-\delta_{ni})-\hat\ell(u)|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(\int\Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|\Big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(3n^{-1}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})^2+3\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+3U_n\\
\le&3n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+3\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+3U_n.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Ungleichungen ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
&E\Big(h^2(X_j,Y_j)\int(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2+6C_h\Big(n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big).
\end{aligned}
$$

Setze abkürzend

$$\bar s_n := n^{-1}\frac{c_0^2}{\beta^2}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2.$$

Nach (B.β) und den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 konvergiert $\bar s_n$ stochastisch gegen Null. Mit der zusätzlichen Abkürzung $\tilde s_n := s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)}$ und Lemma 3.2 erhält man also

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{nba_n}\frac{c_0^2}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)E\Big(h^2(X_j,Y_j)\\
&\qquad\cdot\int(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot 2\Big(\bar s_n+\frac{3c_0^2}{\beta^2}C_h\Big(n^{-1}\tilde s_n^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big)\Big)\\
\leq&\frac{2K}{nba_n}\bar s_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{6K}{n^{4/5}ba_n}(n^{-1}\tilde s_n^2+U_n)n^{-1/5}\frac{c_0^2}{\beta^2}C_h\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{6K}{nba_n}\frac{c_0^4}{\beta^6}C_h\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq&\frac{2K}{nba_n}\bar s_n+\frac{6K}{n^{4/5}ba_n}(n^{-1}\tilde s_n^2+U_n)n^{-1/5}\frac{c_0^2}{\beta^2}C_h\\
&+\frac{6K}{n^{4/5}ba_n}\frac{c_0^4}{n^{2/5}\beta^6}C_h\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^nE(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Wegen (B.a), (B.β), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert dies stochastisch gegen Null. Daher gilt

$$\begin{aligned}
C_{n,3}\ \leq\ &(c_\pi^{-1}+R)^2n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\cdot E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_l-\hat r_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Ergänzen und Lemma 3.2 liefern zunächst

$$\begin{aligned}
&E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_l-\hat r_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)\\
\leq&2E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_l-\hat r_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int\big(\hat\ell(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat r_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+2E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat\ell_{-i}\big(Y_l-\hat r_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int\big(\ell_n\big(u-\hat r_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Wie oben gilt

$$\big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat{r}_{nij}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}\big)\big|\le n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})$$

und analog dazu

$$\big|\ell_n\big(u-\hat{r}_{nij}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}\big)-\ell_n\big(u-\hat{r}_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)\big|\le n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)}).$$

Daher hat man

$$\begin{aligned}
&\big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat{r}_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)\big|\\
\le&\big|\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat{r}_{nij}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}\big)\big|\\
&+\big|\ell_n\big(u-\hat{r}_{nij}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}\big)-\ell_n\big(u-\hat{r}_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)\big|\\
\le&n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)}).
\end{aligned}$$

Damit und mit (L1) aus Lemma 4.2 erhält man

$$\begin{aligned}
&E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int\big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat{r}_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&n^{-1}E\big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&n^{-1}\frac{c_0^2}{\beta^2}E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

(B.h) und (B.hε) liefern mit der MAR-Annahme die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E\big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&(s_n^{(1)})^2\big(E(|h(X_j,Y_j)|\varepsilon_j^2|X_j)E(|h(X_l,Y_l)||X_l)+E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|h(X_l,Y_l)|\varepsilon_l^2|X_l)\\
&\qquad+2E(|h(X_j,Y_j)||\varepsilon_j||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||\varepsilon_l||X_l)\big)\\
&+4s_n^{(1)}s_n^{(2)}\big(E(|h(X_j,Y_j)||\varepsilon_j||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||X_l)\\
&\qquad+E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||\varepsilon_l||X_l)\big)\\
&+4(s_n^{(2)})^2E(|h(X_j,Y_j)||X_j)E(|h(X_l,Y_l)||X_l)\\
\le&2(s_n^{(1)})^2(C_\varepsilon^{1/2}C_h^{1/2}\sigma+C_h\sigma^2)+8s_n^{(1)}s_n^{(2)}C_h\sigma+4(s_n^{(2)})^2C_h=:\bar{t}_n.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit (B.β)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot2E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}_{nji}^{(a)}\big)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int\big(\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\ell_n\big(u-\hat{r}_{ni\{j,l\}}^{(a)}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2\frac{c_0^2}{n\beta^2}\bar{t}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
\le&2\frac{c_0^2}{n\beta^2}\bar{t}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\le2\frac{c_0^2}{n\beta^2}\bar{t}_n=o_p(1).
\end{aligned}$$

Im verbleibenden Term benutze man die mit Lemma 4.5 herzuleitende Ungleichung

$$\begin{aligned}
\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\big| &\leq \big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big) - \ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big| \\
&\quad + \big|\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big| \\
&\leq n^{-1/2}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(2)}) + \big|\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big|.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E\Bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l - \hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big| \\
&\qquad \cdot \int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg) \\
\leq& n^{-1/2} E\Bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(2)})\frac{c_0}{\beta} \\
&\qquad \cdot \int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg) \\
&+ n^{-1/2} E\Bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big|(s_n^{(1)}|\varepsilon_j| + s_n^{(2)}) \\
&\qquad \cdot \int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg) \\
&+ E\Bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big| \\
&\quad \cdot \big|\ell_n\big(Y_l - \hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j\}}\big)\big| \\
&\qquad \cdot \int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg).
\end{aligned}$$

Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt

$$\begin{aligned}
&E\Bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(2)}) \\
&\qquad \cdot \int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg) \\
=& E(|h(X_j,Y_j)||X_j) E(|h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l| + s_n^{(2)})|X_l) \\
&\quad \cdot E\Bigg(\int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg) \\
\leq& C_h(s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)}) E\Bigg(\int \Big(\ell_n\big(u - \hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}} + r(X_i), \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big) - \ell(u)\Big)^2 f(u)du \Bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Bigg).
\end{aligned}$$

Analog wie oben leitet man her

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq & E\Big(\int \big(\big|\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\hat{\ell}(u-\delta_{ni})\big|\\
&\qquad +|\hat{\ell}(u-\delta_{ni})-\hat{\ell}(u)|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq & E\Big(\int \Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|\Big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq & 3n^{-1}E((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+3\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+3U_n\\
\leq & 3\Big(4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big).
\end{aligned}
$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
&E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})\\
&\qquad\cdot\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq & C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})3\Big(4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big).
\end{aligned}
$$

Daher folgt mit (B.β), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6 für $\tilde{s}_n = s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\qquad\cdot 2n^{-1/2}\frac{c_0}{\beta}E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})\\
&\qquad\qquad\cdot\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\qquad\cdot 6n^{-1/2}\frac{c_0}{\beta}C_h\tilde{s}_n\Big(4n^{-1}\tilde{s}_n^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big)\\
\leq & 6n^{-1/2}\frac{c_0}{\beta}C_h\tilde{s}_n\big(4n^{-1}\tilde{s}_n^2+U_n\big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\\
&+6n^{-1/2}\frac{c_0^3}{\beta^5}C_h\tilde{s}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\leq & 6n^{-1/2}\frac{c_0}{\beta}C_h\tilde{s}_n\big(4n^{-1}\tilde{s}_n^2+U_n\big)\\
&+6n^{-1/2}\frac{c_0^3}{n^{3/10}\beta^5}C_h\tilde{s}_n\frac{n^{3/10}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Ferner schätzt man mit (L1) aus Lemma 4.2 ab

$$
\begin{aligned}
&E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&\frac{c_0}{\beta}E(|h(X_l,Y_l)||X_l)E\Big(|h(X_j,Y_j)|(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})\Big|X_j\Big)\\
&\qquad\cdot E\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&C_h^{1/2}\frac{c_0C_h^{1/2}}{\beta}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})\cdot 3\Big(4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich unter Benutzung der Abkürzung $\tilde s_n=s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
&\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot 2n^{-1/2}E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|(s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})\\
&\qquad\cdot\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2C_h^{1/2}n^{-1/2}\frac{c_0C_h^{1/2}}{\beta}\tilde s_n\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)\\
&\quad\cdot k_b(X_i-X_l)3\Big(4n^{-1}\tilde s_n^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+U_n\Big)\\
\le&6C_h^{1/2}n^{-1/2}\frac{c_0C_h^{1/2}}{\beta}\tilde s_n\Big(\big(4n^{-1}\tilde s_n^2+U_n\big)\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\\
&\quad+\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)\\
\le&6C_h^{1/2}n^{-1/2}\frac{c_0C_h^{1/2}}{\beta}\tilde s_n\Big(\big(4n^{-1}\tilde s_n^2+U_n\big)+\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^nE(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big).
\end{aligned}
$$

Nach (B.β), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert dies stochastisch gegen Null.
In dem verbleibenden Term nutze man die vorausgesetzten Unabhängigkeiten und

erhält auf diese Weise

$$
\begin{aligned}
&E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\big|\ell_n\big(Y_l-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\
=&E\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du \\
&\quad\cdot E\big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_l-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big) \\
=&E\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du \\
&\quad\cdot E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big) \\
&\quad\cdot E\big(|h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_l-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}
$$

Verwendet man die analog zu Lemma 4.5 zu beweisende Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big| &\le \big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)\big| \\
&\quad+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)\big| \\
&\le n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})+\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)\big|,
\end{aligned}
$$

so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big) \\
\le&E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big) \\
&+E(|h(X_j,Y_j)||\ell(\varepsilon_j)||\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}) \\
\le&n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}E(|h(X_j,Y_j)||\varepsilon_j||X_j)+s_n^{(2)}E(|h(X_j,Y_j)||X_j)) \\
&+\big(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\big)^{1/2}\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_j)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big)\Big)^{1/2} \\
&+\big(E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\big)^{1/2}\big(E[\ell^2(\varepsilon)]\big)^{1/2} \\
\le&C_h^{1/2}\big(n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+J^{1/2}\big) \\
&+C_h^{1/2}\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert mit $s_n = s_n^{(1,2)}\sigma + s_n^{(2)}$

$$\begin{aligned}
&E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du \\
&\qquad\cdot E\big(|h(X_j,Y_j)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big)\\
&\qquad\cdot E\big(|h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_l-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{j,l\}},\mathbf{Z}\big)\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le& E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\cdot C_h\bigg(n^{-1/2}s_n+J^{1/2}\\
&+\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg)\cdot\bigg(n^{-1/2}s_n+J^{1/2}\\
&+\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg)\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le& C_h(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})^2 E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+C_h^{1/2}(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
&\qquad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+C_h^{1/2}(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
&\qquad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
&\qquad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\\
&\qquad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\big|\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big|\\
\le& n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\big|\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big|\\
\le& n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_j|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_l|+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nl}|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|
\end{aligned}$$

sowie $\big(\sum_{j=1}^k a_j\big)^2\le k\sum_{j=1}^k a_j^2$ und

$$\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\le\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2$$

erhält man die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
&\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
\le&\int \big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|\big)^2 f(u)du\\
\le&3\bigg(n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2+\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
\le&\int \big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+|\hat\ell(u)-\ell(u)|\big)^2 f(u)du\\
=&n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{nj}^2+\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\\
&+2n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\int|\hat\ell(u)-\ell(u)|f(u)du\\
&+2\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|\int|\hat\ell(u)-\ell(u)|f(u)du\\
&+2n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|\\
\le&\bigg(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\\
&\quad+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^{1/2}\bigg)^2.
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
&E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\bigg)\\
\le&3\bigg(n^{-1}E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\\
&+E\bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\bigg)\bigg)\\
\le&3\bigg(n^{-1}4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+U_n\bigg)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
&\qquad\cdot\Big(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&3E\Big(\Big(n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2+\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big)\\
&\qquad\cdot\Big(\int \big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&3\big(n^{-1}E((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2|\mathbf X,\mathbf Z)+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)\\
&+3E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\\
&\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big)\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&3\big(4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)\\
&+3\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\Big(n^{-1/2}(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}\Big)\\
&+3E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big).
\end{aligned}
$$

Mit $s_n=s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)}$ und $\tilde s_n=s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)}$ folgt also wegen (B.β), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6

$$
\begin{aligned}
&\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)2C_h\big(n^{-1/2}s_n+J^{1/2}\big)^2\\
&\qquad\cdot E\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&6C_h\big(n^{-1/2}s_n+J^{1/2}\big)^2(4n^{-1}\tilde s_n^2+U_n)\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\\
&+6C_h\big(n^{-1}s_n+J^{1/2}\big)^2\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\\
\le&6C_h\big(n^{-1/2}s_n+J^{1/2}\big)^2\Big((4n^{-1}\tilde s_n^2+U_n)+\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^nE(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\Big)=o_p(1).
\end{aligned}
$$

Außerdem schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)2C_h^{1/2}(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})\\
&\qquad\cdot E\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\\
&\qquad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\biggr)\\
\le&6C_h^{1/2}(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})\biggl(4n^{-1}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)\tilde s_n^2\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\\
&+n^{-1/2}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)^2(2\tilde s_n+s_n)\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\\
&+\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\\
&+\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)^2\frac{c_0}{\beta^2}\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac1n\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\bigl(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\bigr)^{1/2}\\
&+\frac1n\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggr)^{1/2}\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\biggr)\biggr)\\
\le&6C_h^{1/2}(n^{-1/2}s_n+J^{1/2})\biggl(4n^{-1}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)\tilde s_n^2+n^{-1/2}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)^2(2\tilde s_n+s_n)\\
&+n^{-1/10}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{3/10}}{n}\sum_{i=1}^nE(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+n^{-1/10}\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)^2\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\\
&\cdot\Bigl(\frac1n\sum_{j=1}^n\Bigl(\frac1n\sum_{i:i\neq j}\frac{k_b(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Bigr)^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\frac{n^{2/5}}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\Bigr)^{1/2}\\
&+E\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggr)^{1/2}\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\biggr)\biggr).
\end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 4.17 wurde bereits gezeigt, dass gilt

$$\frac1n\sum_{j=1}^n\Bigl(\frac1n\sum_{i:i\neq j}\frac{k_b(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Bigr)^2=O_p(1).$$

Daher folgt mit (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\qquad\cdot E\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat r^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\\
&\qquad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\biggr)\\
\le&3E\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggl(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggr)^{1/2}\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\biggr)+o_p(1).
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen (L3) aus Lemma 4.2 und

$$\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du \leq \Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2, \int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du \leq \Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2$$

sowie Lemma 3.2 liefern

$$\begin{aligned}
&E\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\leq& E\bigg(\int(|\hat{\ell}(u)-\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})|+|\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u)|)^2 f(u)du\\
&\quad\cdot\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\leq& 2\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)E\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+2E\bigg(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du\\
&\quad\cdot\bigg(\int(|\hat{\ell}(u)-\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})|+|\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u)|)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\leq& 2\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)E\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+2\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2 E\bigg(\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}))^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+2E\bigg(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\leq& 2\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)\frac{c_0}{\bar{Z}_n\beta^5\alpha_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E((\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\frac{c_0^{1/2}}{\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\Big((\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\bigg)^{1/2}\\
&+2\bigg(E\bigg(\bigg(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)^2\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\bigg(E\bigg(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nach (B.α), (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)\frac{c_0}{\bar{Z}_n\beta^5\alpha_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E((\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&n^{-1/10}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)\frac{c_0}{n^{1/5}\bar{Z}_n\beta^5\alpha_n}\frac{n^{3/10}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})
\end{aligned}$$

stochastisch gegen Null. Mit den gleichen Argumenten folgt

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\frac{c_0^{1/2}}{\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\Big((\hat{\varepsilon}_i-\varepsilon_i)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\\
=&n^{-1/5}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\bar{Z}_n^{1/2}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\Big(n^{-2/5}\sum_{i=1}^n E\Big(\delta_{ni}^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}=o_p(1).
\end{aligned}$$

Ferner konvergiert

$$\Big(E\Big(\Big(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)E\Big(\int(\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})-\ell(u))^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}$$

aufgrund von Proposition 4.9 und Lemma 4.3 stochastisch gegen Null. Also erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot 2E\Big(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big|\big|\ell_n\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j\}}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\int\big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)\\
\leq&\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot E\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\\
&\quad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+o_p(1).
\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\big|\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big|\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{ni}|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|
\end{aligned}$$

und

$$\int\big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\leq\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2$$

sowie Lemma 3.2 folgt

$$
\begin{aligned}
&E\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le& E\bigg(3\bigg(n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{ni}^2+\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\bigg)\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le& 3n^{-1}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2 E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+3\frac{c_0^2}{\beta^4}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2 E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+3E\bigg(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\bigg(\int \big(\ell_n\big(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\bigg)^{1/2}\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}
$$

Wegen $E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\le 4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2 E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&\quad\cdot n^{-1}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2 E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\Big)\\
\le& 24n^{-1}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\\
&+6\frac{c_0^2}{\beta^4}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
\le& 24n^{-1}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6\frac{c_0^2}{n^{3/10}\beta^4}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2\frac{n^{3/10}}{n}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}).
\end{aligned}
$$

Nach (B.β) und den Beweisen von Proposition 3.6 und Satz 4.16 konvergiert dies stochastisch gegen Null. Daher vereinfacht sich der zu betrachtende Term in

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot E\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{ni\{j,l\}}+r(X_i),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\\
&\quad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\\
&\quad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\biggm|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)+o_p(1)\\
\leq&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)E\biggl(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\\
&\quad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\\
&\quad\cdot\biggl(\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j,l\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\biggr)^{1/2}\biggm|\mathbf{X},\mathbf{Z}\biggr)+o_p(1).
\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\bigl|\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\bigr)-\ell(u)\bigr|\\
\leq&n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
&\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\\
\leq&\int\Bigl(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|\Bigr)^2f(u)du\\
=&n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})^2+\frac{c_0^2}{\beta^4}\delta_{nj}^2+\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\\
&+2n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\int|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|f(u)du\\
&+2\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|\int|\hat{\ell}(u)-\ell(u)|f(u)du\\
&+2n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|\\
\leq&\biggl(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\\
&\quad+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+\biggl(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\biggr)^{1/2}\biggr)^2.
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert zusammen mit den Ungleichungen

$$\int\bigl(\ell_n\bigl(u-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\bigr)-\ell(u)\bigr)^2f(u)du\leq\Bigl(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Bigr)^2$$

und $\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du \le \big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\big)^2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E\Bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\\
&\quad\cdot\Bigg(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Bigg(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\Bigg|\mathbf X,\mathbf Z\Bigg)\\
\le&E\Bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Bigg(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\\
&\quad\cdot+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nj}|+\Bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\Bigg)\\
&\quad\cdot\Bigg(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\Bigg|\mathbf X,\mathbf Z\Bigg)\\
\le&n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
&+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}\\
&+E\Bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Bigg(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Bigg(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Bigg)^{1/2}\Bigg|\mathbf X,\mathbf Z\Bigg).
\end{aligned}$$

Also schätzt man mit

$$E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\le(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})$$

weiter ab

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\quad\cdot\Bigg(n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
&+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}\Bigg)\\
\le&6n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\\
&+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}\\
\le&6n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})\\
&+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{k_b(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}(X_i)}.
\end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 4.17 wurde bereits gezeigt, dass gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j}\frac{k_b(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\Big)^2 = O_p(1).$$

Daher folgt mit (B.β) und dem Beweis von Proposition 3.6

$$\begin{aligned}&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\ &\quad\cdot\Big(n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_l|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_j|+3s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\ &\quad+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)=o_p(1)\end{aligned}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\\ &\qquad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}}+r(X_j),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big)^{1/2}\\ &\qquad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\ \leq&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j} Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\ &\qquad\cdot E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big)^{1/2}\\ &\qquad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+o_p(1).\end{aligned}$$

Analog zu oben leitet man die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2f(u)du\\ \leq&\Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_j|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_l|+3s_n^{(2)})\\ &\qquad+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nl}|+\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\Big)^{1/2}\Big)^2\end{aligned}$$

her. Mit

$$\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2f(u)du\leq\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^2$$

erhält man also

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^{1/2}\\
&\qquad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^{1/2}\\
&\qquad\cdot\Big(n^{-1/2}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_i|+|\varepsilon_j|)+s_n^{(1,2)}|\varepsilon_l|+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}|\delta_{nl}|\\
&\qquad+\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^{1/2}\Big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\big(E(\delta_{nl}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&+E\Big(\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}
$$

Wie oben ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\cdot\Big(n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\big(E(\delta_{nl}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)\\
\le&6n^{-1/2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3(2s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(1,2)}\sigma+3s_n^{(2)})\\
&+\frac{c_0}{\beta^2}\Big(\frac{c_0}{\beta}+J^{1/2}\Big)^3\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\big(E(\delta_{nl}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq l}\frac{k_b(X_i-X_l)}{\hat g_{a_n}(X_i)}=o_p(1)
\end{aligned}
$$

und somit auch

$$
\begin{aligned}
&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\qquad\cdot E\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^{1/2}\\
&\qquad\cdot\Big(\int\big(\ell_n\big(u-\hat r^{(a)}_{nl\{i,j\}}+r(X_l),\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,j,l\}}\big)-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big)^{1/2}\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&\frac{6}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l\neq i:l\neq j}Z_jZ_lk_b(X_i-X_j)k_b(X_i-X_l)\\
&\qquad\cdot E\Big(\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+o_p(1)\\
\le&6E\Big(\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g^2_{a_n}(X_i)}+o_p(1)\\
\le&6E\Big(\Big(\int(\hat\ell(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+o_p(1).
\end{aligned}
$$

Die Abschätzungen (L3) aus Lemma 4.2 und

$$\int (\hat{\ell}(u) - \ell(u))^2 f(u)du \leq \Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2, \int (\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u))^2 f(u)du \leq \Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2$$

sowie Lemma 3.2 liefern

$$\begin{aligned}
& E\bigg(\Big(\int (\hat{\ell}(u) - \ell(u))^2 f(u)du\Big)^2 \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\leq & E\bigg(\int (|\hat{\ell}(u) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})| + |\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u)|)^2 f(u)du \int (\hat{\ell}(u) - \ell(u))^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\leq & \Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2 E\bigg(2\int (\hat{\ell}(u) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}))^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
& + 2E\bigg(\int (\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u))^2 f(u)du \\
& \qquad \cdot \int (|\hat{\ell}(u) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon})| + |\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u)|)^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\leq & 2\Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2 \frac{c_0}{\bar{Z}_n \alpha_n \beta^5} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\big((\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i)^2 \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\big) \\
& + 4\Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2 E\bigg(\int (\hat{\ell}(u) - \ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}))^2 f(u)du \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
& + 4E\bigg(\Big(\int (\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u))^2\Big)^2 \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) \\
\leq & 6n^{-1/5}\Big(\frac{c_0}{\beta} + J^{1/2}\Big)^2 \frac{c_0}{n^{2/5}\bar{Z}_n \alpha_n \beta^5} n^{-2/5} \sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
& + 4E\bigg(\Big(\int (\ell_n(u,\boldsymbol{\varepsilon}) - \ell(u))^2 f(u)du\Big)^2 \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Nach (B.α), (B.β), Proposition 4.9 und dem Beweis von Proposition 3.6 konvergiert dies aber stochastisch gegen Null. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
C_{n,3} \leq \; & (c_\pi^{-1} + R)^2 n^{-1} \bigg(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} \frac{1}{n^2} \sum_{j,l \neq i: l \neq j} Z_j Z_l k_b(X_i - X_j) k_b(X_i - X_l) \\
& \cdot E\bigg(|h(X_j,Y_j)||h(X_l,Y_l)|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}_{nji}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_j)\big|\big|\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l - \hat{r}_{nli}^{(a)}\big) - \ell(\varepsilon_l)\big| \\
& \cdot \int (\hat{\ell}(u - \delta_{ni}) - \ell(u))^2 f(u)du \big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg)\bigg) + o_p(n^{-1}) \\
\leq \; & 6(c_\pi^{-1} + R)^2 n^{-1} E\bigg(\Big(\int (\hat{\ell}(u) - \ell(u))^2 f(u)du\Big)^2 \bigg| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\bigg) + o_p(n^{-1}) \\
= \; & o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Schließlich untersuche man $C_{n,4}$. Diesen Term kann man schreiben als

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i} Z_i \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)} E\Big(\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot \hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))\\
&\qquad\cdot h(X_j,Y_j)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&(c_\pi^{-1}+R)^2\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}E\Big(\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)\\
&\quad+\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-E(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z})\big)\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\\
&\quad+\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)\frac{1}{n}Z_l h(X_l,Y_l)k_b(X_i-X_l)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\\
&\quad+\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\frac{1}{n}Z_l h(X_l,Y_l)k_b(X_i-X_l)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\\
&\quad-E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad-\frac{1}{n}Z_l k_b(X_i-X_l)E\big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)h(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad-\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)\frac{1}{n}Z_l k_b(X_i-X_l)E\big(h(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 3.2 muss man nur die quadratischen Terme betrachten. Die üblichen Abschätzungen liefern

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nji}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_j k_b^2(X_i-X_j)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2h^2(X_j,Y_j)n^{-1}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad+\frac{1}{n^4}\sum_{i,j_1,j_2,l\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\qquad\cdot E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|n^{-1}(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\le&2E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}E((s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\\
&+2E((s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}C_hE((s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Den verbliebenen bedingten Erwartungswert schätzt man weiter ab durch

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)^2h^2(X_j,Y_j)\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2h^2(X_j,Y_j)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}E((s_n^{(1)}|\varepsilon_j|+s_n^{(2)})^2h^2(X_j,Y_j)|X_j)\\
&+2C_hE\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2+2C_hE\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man wie im Beweis von Satz 4.16

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&+2E\left(\int(\hat{\ell}_{-i}(u-\delta_{ni})-\ell(u))^2f(u)du\middle|\mathbf{X},\mathbf{Z}\right)\\
\le&2n^{-1}E((s_n^{(1)}(|\varepsilon_j|+|\varepsilon_l|)+2s_n^{(2)})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}\Big)^2\\
\le&8n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+6n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6U_n.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt also

$$\begin{aligned}
&E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2 h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}C_h E((s_n^{(1)}|\varepsilon|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+2(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 E\Big(\Big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\Big)^2 h^2(X_j,Y_j)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}C_h E((s_n^{(1)}|\varepsilon|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})+4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 n^{-1}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2\\
&+4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 C_h E\Big(\Big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{ni\{l,j\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l,j\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}C_h E((s_n^{(1)}|\varepsilon|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})+4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 n^{-1}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2\\
&+4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 C_h\Big(8n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&\qquad+6n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6U_n\Big)\\
=&2n^{-1}C_h E((s_n^{(1)}|\varepsilon|+s_n^{(2)})^4|\mathbf{X},\mathbf{Z})+4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 n^{-1}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2\\
&+32C_h n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^4+24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+24C_h n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2+24(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 C_h U_n\\
=:&24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+T_n.
\end{aligned}$$

Mit der Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte erhält man zudem

$$\begin{aligned}
&E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&\Big(E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2 h^2(X_{j_1},Y_{j_1})(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\\
&\cdot\Big(E\Big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2 h^2(X_{j_2},Y_{j_2})(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\Big)^{1/2}\\
\le&24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+T_n.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big)^2\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le& n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))^2h^2(X_j,Y_j)(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
&+n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j_1,j_2,l\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\qquad\cdot E\big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))^2|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|(s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
\le& n^{-1}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\Big(24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+T_n\Big)\\
&+n^{-1}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j_1,j_2\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\qquad\cdot\Big(24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+T_n\Big)\\
\le& n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{K}{nba_n}\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}+\frac{\hat g^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\Big)\Big(24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+T_n\Big)\\
\le& n^{-1}\Big(\frac{K}{nba_n}+1\Big)\Big(24C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{n^{1/5}}{n}\sum_{i=1}^nE(\delta_{ni}^2|\mathbf X,\mathbf Z)+T_n\Big).
\end{aligned}
$$

Nach (B.a), (B.β), (B.f)(iii), Lemma 4.6, den Bemerkungen hinter Lemma 4.5 und dem Beweis von Proposition 3.6 ist dies gleich $o_p(n^{-1})$. Ebenso gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\Big(E\Big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big|\mathbf X,\mathbf Y_{-l},\mathbf Z\Big)\Big)^2\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(E\Big(\Big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big)^2\Big|\mathbf X,\mathbf Y_{-l},\mathbf Z\Big)\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
=&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\Big((\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-\ell(\varepsilon_i))\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\\
&\qquad\cdot\big(\hat\ell_{-i}\big(Y_j-\hat r_{nji}^{(a)}\big)-\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\big)\Big)^2\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Mit der mehrfach benutzten Ungleichung

$$\big|\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-E(\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)|\mathbf X,\mathbf Y_{-l},\mathbf Z)\big|\le n^{-1}(s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})$$

schätzt man zudem ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\big(\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)-E(\hat\ell_{-i}(\hat\varepsilon_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z})\big)^2\\
&\qquad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\ell_n\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{i,l\}}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq& n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2h^2(X_j,Y_j)\\
&\quad\cdot\ell_n^2\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i,l\}}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j_1,j_2,l\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2\\
&\quad\cdot|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)E\big(h^2(X_j,Y_j)\\
&\quad\cdot\ell_n^2\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i,l\}}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j_1,j_2,l\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&\quad\cdot E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)\big|\\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\leq 4(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2.$$

Zudem folgt mit (L1) aus Lemma 4.2

$$E\big(h^2(X_j,Y_j)\ell_n^2\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i,l\}}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\leq\frac{c_0^2}{\beta^2}E\Big(h^2(X_j,Y_j)\Big|X_j\Big)\leq\frac{c_0^2}{\beta^2}C_h.$$

Mit der Abkürzung $\tilde s_n=s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)}$ erhält man aufgrund von (B.a) und (B.β)

$$\begin{aligned}
&n^{-1}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}}\frac{Z_jk_b^2(X_i-X_j)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+\sigma)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)E\big(h^2(X_j,Y_j)\\
&\quad\cdot\ell_n^2\big(Y_j-\hat r^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j,i,l\}}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
\leq&4n^{-1}\tilde s_n^2\frac{c_0^2}{\beta^2}C_h\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat g(X_i)}{\hat g_{a_n}(X_i)}\leq 4n^{-1}\tilde s_n^2\frac{c_0^2}{n^{1/2}\beta^2}C_h\frac{K}{n^{1/2}ba_n}=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Ergänzen liefert

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\le&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Mit den Abschätzungen aus dem Beweis von Satz 4.16 und (L1) aus Lemma 4.2 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r_{nj_1i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\le&\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|(s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+|\varepsilon_{j_2}|)+2s_n^{(2)})\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\le&\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}C_h\big(E\big((s_n^{(1)}(|\varepsilon_l|+|\varepsilon_{j_2}|)+2s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\big)^{1/2} \\
\le&4\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2.
\end{aligned}
$$

Mit den gleichen Argumenten schätzt man ab

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\le&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2i},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i\}}\big)-\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) \\
\le&4\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2 \\
&+E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big| \\
&\qquad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Außerdem liefert die Hölder-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big|\\
&\quad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
\le&\Big(E\big(h^2(X_{j_1},Y_{j_1})\ell_n^2\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\Big)^{1/2}\\
&\quad\cdot\Big(E\big(h^2(X_{j_2},Y_{j_2})\ell_n^2\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,j_2\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,j_2\}}\big)\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Man kann nun abschätzen

$$
\begin{aligned}
&E\big(h^2(X_{j_1},Y_{j_1})\ell_n^2\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
=&E(h^2(X_{j_1},Y_{j_1})|X_{j_1})E\Big(\ell_n^2\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big)\\
\le&C_hE\Big(\ell_n^2\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\Big|\mathbf X,\mathbf Z\Big).
\end{aligned}
$$

Mit den Abschätzungen aus dem Beweis von Satz 4.16 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&E\big(\ell_n^2\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
\le&E\big(\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)+E[\ell^2(\varepsilon_{j_2})]\\
&+2\big(E[\ell^2(\varepsilon_{j_2})]\big)^{1/2}\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\Big)^{1/2}\\
\le&\Big(J^{1/2}+\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)-\ell(\varepsilon_{j_2})\big)^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\Big)^{1/2}\Big)^2\\
\le&\bigg(J^{1/2}+\Big(E\big(\big(\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,j_1\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,j_1\}}\big)-\hat\ell_{-j_2}(\hat\varepsilon_{j_2})\big)^2\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\Big)^{1/2}\\
&+\bigg(E\bigg(\int(\hat\ell_{-j_2}(u-\delta_{nj_2})-\ell(u))f(u)du\bigg|\mathbf X,\mathbf Z\bigg)\bigg)^{1/2}\bigg)^2\\
\le&\big(J^{1/2}+2n^{-1/2}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})+\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}+n^{-1/2}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})+U_n^{1/2}\big)^2\\
=:&\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}+\tilde T_n\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
&E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat r^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_1,i,l\}}\big)\big|\\
&\quad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat r^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol\varepsilon}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf X,\mathbf Z\big)\\
\le&8\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}C_h(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2\\
&+C_h\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}+\tilde T_n\Big)\cdot\Big(\frac{c_0}{\beta^2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf X,\mathbf Z)\big)^{1/2}+\tilde T_n\Big).
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert mit der Abkürzung $\tilde{s}_n := s_n^{(1)}\sigma + s_n^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-E(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z})\big)^2\\
&\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l}Z_jh(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&4n^{-1}\tilde{s}_n^2\frac{1}{n^4}\sum_{i,j_1,j_2,l\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\cdot E\big(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||h(X_{j_2},Y_{j_2})|\big|\ell_n\big(Y_{j_1}-\hat{r}^{(a)}_{nj_1\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j_1,i,l\}}\big)\big|\\
&\quad\cdot\big|\ell_n\big(Y_{j_2}-\hat{r}^{(a)}_{nj_2\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{j_2,i,l\}}\big)\big|\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)+o_p(n^{-1})\\
\leq&32n^{-1}\frac{c_0}{\beta}n^{-1/2}C_h\tilde{s}_n^4\frac{1}{n^3}\sum_{i,j_1,j_2\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&+4n^{-1}\tilde{s}_n^2\frac{1}{n^3}\sum_{i,j_1,j_2\text{ versch.}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_{j_1})k_b(X_i-X_{j_2})\\
&\cdot C_h\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+\frac{c_0}{\beta^2}\tilde{T}_n\big(E(\delta^2_{nj_2}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&\quad+\frac{c_0}{\beta^2}\tilde{T}_n\big(E(\delta^2_{nj_1}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}+\tilde{T}_n^2\Big)+o_p(n^{-1})\\
\leq&32n^{-1}\frac{c_0}{n^{1/2}\beta}C_h\tilde{s}_n^4\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\\
&+4n^{-1}\tilde{s}_n^2C_h\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)^2\\
&\quad+2\tilde{T}_n\frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
&\quad+\tilde{T}_n^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big)+o_p(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen leitet man her

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\big(E(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\Big)^2\\
\leq&\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i}Z_jk_b^2(X_i-X_j)\Big)\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)\\
\leq&\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{n^{3/5}}{n}\sum_{j=1}^nE(\delta^2_{nj}|\mathbf{X},\mathbf{Z})=o_p(1)
\end{aligned}
$$

sowie

$$\begin{aligned}
&2\tilde{T}_n \frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b(X_i-X_j)\big(E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\big)^{1/2}\\
\leq &2\tilde{T}_n \frac{c_0}{\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j k_b^2(X_i-X_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}\\
\leq &2\tilde{T}_n \frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat{g}^{1/2}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^{1/2}}\Big(\frac{n^{3/5}}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2} = o_p(1).
\end{aligned}$$

Ferner gilt nach (B.β)

$$32n^{-1}\frac{c_0}{n^{1/2}\beta}C_h\tilde{s}_n^4\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} \leq 32n^{-1}\frac{c_0}{n^{1/2}\beta}C_h\tilde{s}_n^4 = o_p(n^{-1}).$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-E(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z})\big)^2\\
&\quad\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i,l} Z_j h(X_j,Y_j)k_b(X_i-X_j)\ell_n^2\big(Y_j-\hat{r}_{nj\{i,l\}}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq &4n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2C_h\Big(\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}\frac{n^{3/5}}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&\quad+2\tilde{T}_n\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K^{1/2}}{n^{1/5}b^{1/2}a_n^{1/2}}\Big(\frac{n^{3/5}}{n}\sum_{j=1}^n E(\delta_{nj}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big)^{1/2}+\tilde{T}_n^2\Big)+o_p(n^{-1})\\
= &o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Des Weiteren erhält man mit (L1) aus Lemma 4.2

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)E\Big(\Big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\Big)^2h^2(X_l,Y_l)\\
&\quad\cdot\hat{\ell}_{-i}^2\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq &n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_lk_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}n^{-1}\frac{c_0^2}{\beta^2}E\Big((s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2h^2(X_l,Y_l)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq &n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_lk_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{c_0^2}{n\beta^2}(s_n^{(1)})^2E(\varepsilon_l^2h^2(X_l,Y_l)|X_l)\\
&\quad+2\frac{c_0^2}{n\beta^2}s_n^{(1)}s_n^{(2)}E(|\varepsilon_l|h^2(X_l,Y_l)|X_l)+\frac{c_0^2}{n\beta^2}(s_n^{(2)})^2E(h^2(X_l,Y_l)|X_l)\Big)\\
\leq &n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{c_0^2}{n\beta^2}(s_n^{(1)}C_\varepsilon^{1/2}+s_n^{(2)}C_h^{1/2})^2 = o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)E\Big(\Big(E\big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)h(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\Big(E\big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2h^2(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}^2_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\big(\big(\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2h^2(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}^2_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Ferner ergibt sich mit (L1) aus Lemma 4.2

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\\
&\qquad\cdot h^2(X_l,Y_l)\hat{\ell}^2_{-i}\big(Y_l-\hat{r}^{(a)}_{nli}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{c_0^2}{\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&\qquad\cdot E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2h^2(X_l,Y_l)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&n^{-1}\frac{K}{nba_n}\frac{c_0^2}{\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\Big(h^2(X_l,Y_l)\Big|X_l\Big)\\
&\qquad\cdot E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&n^{-1}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{C_hc_0^2}{n^{1/2}\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.16 rechnet man

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&E\Big(\big(\big|\ell_n\big(Y_i-\hat{r}^{(a)}_{nil},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)\big|+|\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i)|\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&2n^{-1}E\big((s_n^{(1)}|\varepsilon_l|+s_n^{(2)})^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)+2E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}
$$

Aus dem Beweis von Satz 4.16 liest man ab

$$\begin{aligned}
E\big((\hat{\ell}_{-i}(\hat{\varepsilon}_i)-\ell(\varepsilon_i))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big) &= E\Big(\int\big(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})-\ell(u)\big)^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\le 3E\Big(\int(\ell_n(u-\delta_{ni},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i}))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad +3E\Big(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})-\hat{\ell}(u))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\quad +3E\Big(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2 f(u)du\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
&\le 3\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2+U_n\Big).
\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)+2E\Big(\big(\ell_n(\hat{\varepsilon}_i,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-i})-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&2n^{-1}(s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)})^2+6\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+n^{-1}(s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)})^2+U_n\Big).
\end{aligned}$$

Hiermit folgt mit $\tilde{s}_n=s_n^{(1)}\sigma+s_n^{(2)}$ und $s_n=s_n^{(1,2)}\sigma+s_n^{(2)}$ wiederum

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{1}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\\
&\qquad\cdot h^2(X_l,Y_l)\hat{\ell}_{-i}^2\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&n^{-1}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{C_h c_0^2}{n^{1/2}\beta^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,l:l\neq i}\frac{Z_l k_b(X_i-X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_i)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&n^{-1}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{C_h c_0^2}{n^{1/2}\beta^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Big(2n^{-1}\tilde{s}_n^2+6\Big(\frac{c_0^2}{\beta^4}E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})+n^{-1}s_n^2+U_n\Big)\Big)\\
\le&n^{-1}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{C_h c_0^2}{n^{1/2}\beta^2}\Big(2n^{-1}\tilde{s}_n^2+6n^{-1}s_n^2+6U_n+\frac{c_0^2}{n^{1/5}\beta^4}\frac{6}{n^{4/5}}\sum_{i=1}^n E(\delta_{ni}^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Big).
\end{aligned}$$

Nach (B.a), (B.β) und den Beweisen von Proposition 3.6 und Lemma 3.3 ist dies gleich $o_p(n^{-1})$. Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)\Big(E\big(h(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}_{-i}\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\le&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)E\big(h^2(X_l,Y_l)\\
&\qquad\cdot\hat{\ell}_{-i}^2\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\big|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-l},\mathbf{Z}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&E\Big(\big(\ell_n\big(Y_i-\hat{r}_{nil}^{(a)},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)\big)^2\frac{1}{n^2}Z_l k_b^2(X_i-X_l)h^2(X_l,Y_l)\hat{\ell}_{-i}^2\big(Y_l-\hat{r}_{nli}^{(a)}\big)\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also $C_{n,4} = o_p(n^{-1})$. Somit ist Lemma 4.4 anwendbar. Es liefert wie gewünscht

$$
\begin{aligned}
(4.2.11) \quad = \quad & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\Big(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i) - \int \hat{\ell}(u-\delta_{ni})f(u)du - \ell(\varepsilon_i)\Big) \\
& \cdot \frac{1}{n}\sum_{j:j\neq i} Z_j h(X_j,Y_j)\hat{\ell}_{-i}\big(Y_j - \hat{r}^{(a)}_{nji}\big)k_b(X_i - X_j) + o_p(n^{-1/2}) \\
= \quad & o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Da $\frac{1}{\hat{J}}$ nach Proposition 4.7 beschränkt in Wahrscheinlichkeit ist, folgt die Behauptung. □

Nun steht uns das Handwerkszeug zur Verfügung, um Theorem 4.10 zu beweisen:

Beweis von Theorem 4.10. Aus den Sätzen 4.14 und 4.15 folgt

$$S_6^{(n)} + S_5^{(n)} = o_p(n^{-1/2}).$$

Fasst man also die Ergebnisse aus den Sätzen 4.11 bis 4.19 zusammen, so liefert dies

$$\hat{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(B(X_i) - E)\Big(\frac{1}{J}\ell(\varepsilon_i) - \varepsilon_i\Big) + o_p(n^{-1/2}).$$

Mit der Entwicklung von $\hat{H}$ aus Satz 3.9 folgt die in Theorem 4.10 behauptete Darstellung von $\hat{H} + \hat{T}$. Nach Abschnitt 2 ist dieser Schätzer also effizient für $E[h(X,Y)]$. □

Anhang A

Ergänzungen zu Abschnitt 3.3

Zunächst stelle ich einige Hilfsaussagen zusammen.

Lemma A.1. *Mit den Notationen und Voraussetzungen aus Abschnitt 3 gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}(\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)-r(X_i)g(X_i))^2=o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Der zu betrachtende Term ist per Definitionem gleich

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jY_jk_b(X_i-X_j)-r(X_i)g(X_i)\Big)^2.$$

Ergänzen liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jY_jk_b(X_i-X_j)-r(X_i)g(X_i)\Big)^2\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j(Y_j-r(X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)^2 &\text{(A.1)}\\
&+2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j(Y_j-r(X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)\\
&\qquad\cdot\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)-r(X_i)g(X_i)\Big) &\text{(A.2)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jr(X_j)k_b(X_i-X_j)-r(X_i)g(X_i)\Big)^2. &\text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Im Beweis von Proposition 3.6 habe ich bereits gezeigt, dass gilt

$$\text{(A.3)}=o_p(n^{-1/2}).$$

Da man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen die Abschätzung

$$|\text{(A.2)}|\leq 2\text{(A.1)}^{1/2}\text{(A.3)}^{1/2}$$

erhält, genügt es zu zeigen, dass gilt (A.1) $= o_p(n^{-1/2})$.
Aufgrund des vorausgesetzten nichtparametrischen Regressionsmodells kann man schreiben

$$(\mathrm{A}.1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j\varepsilon_j k_b(X_i - X_j)\Big)^2.$$

Nach Lemma 3.3 reicht es nachzuweisen, dass $n^{1/2}E(|(\mathrm{A}.1)||\mathbf{X},\mathbf{Z})$ stochastisch gegen Null konvergiert. Rechne also

$$\begin{aligned}
&n^{1/2}E(|(\mathrm{A}.1)||\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j\varepsilon_j k_b(X_i - X_j)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&n^{1/2}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:j\neq i}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}Z_jE(\varepsilon_j^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})k_b^2(X_i - X_j)\\
&+n^{1/2}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:j\neq i}\sum_{l:l\neq i,l\neq j}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}Z_jZ_lE(\varepsilon_j\varepsilon_l|\mathbf{X},\mathbf{Z})k_b(X_i - X_j)k_b(X_i - X_l).
\end{aligned}$$

Wegen Unabhängigkeit wird daraus

$$n^{-1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j k_b^2(X_i - X_j).$$

Abschätzen und Ergänzen liefert mit (B.a) und Lemma 3.4

$$\begin{aligned}
&n^{-1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{g_{a_n}^2(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j k_b^2(X_i - X_j)\\
\leq&\frac{K\sigma^2}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} Z_j k_b(X_i - X_j)\\
=&\frac{K\sigma^2}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}(\hat{g}(X_i) - g(X_i)) - \frac{K\sigma^2}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}Z_ik_b(0)\\
&+\frac{K\sigma^2}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\\
\leq&\frac{K\sigma^2}{n^{1/2}ba_n}\Big(\frac{1}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{g}(X_i) - g(X_i)| + \frac{K}{nba_n} + 1\Big) = o_p(1).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma A.2. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$|E(\pi(X_1)(r(X_2) - r(X_1))k_b(X_1 - X_2)|X_2)| \leq |g(X_2)|c_1b^2 + c_2b^2$$

mit positiven Konstanten c_1 und c_2.

Beweis. Schreibe den bedingten Erwartungswert als Integral und substituiere. Entwickle dann die entstehenden Ausdrücke gemäß Taylor und wende die Lipschitz-Stetigkeit von g (aus Lemma 3.1), r (aus (B.r)(i)) und r' (vgl. Bemerkung) an. Man erhält

$$
\begin{aligned}
& |E(\pi(X_1)(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_2)| \\
= \; & \left| \int g(X_2+bu)(r(X_2)-r(X_2+bu))k(u)du \right| \\
\leq \; & \int |g(X_2+bu)-g(X_2)||r(X_1+bu)-r(X_2)|k(u)du \\
& + |g(X_2)| \left| \int (r(X_2)-r(X_2+bu))k(u)du \right| \\
\leq \; & b^2 L_g L_r \int u^2 k(u)du + |g(X_2)| \left| r'(X_2) b \underbrace{\int uk(u)du}_{=0} \right| \\
& + |g(X_2)| b \left| \int\int_0^1 (r'(X_2)-r'(X_2+tbu))dtuk(u)du \right| \\
\leq \; & b^2 L_g L_r \int u^2 k(u)du + |g(X_2)| b^2 \frac{L_r'}{2} \int u^2 k(u)du.
\end{aligned}
$$

Mit $c_1 := \frac{L_r'}{2} \int u^2 k(u)du$ und $c_2 := L_g L_r \int u^2 k(u)du$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma A.3. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$
\left| E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} (r(X_1)-r(X_2))k_b(X_1-X_2) \Big| X_2 \Big) \right| \leq Cb
$$

mit einer positiven Konstante C.

Beweis. Die Vorgehensweise in diesem Beweis ähnelt derjenigen aus dem Beweis zu Lemma A.2.

$$
\begin{aligned}
& \left| E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} (r(X_1)-r(X_2))k_b(X_1-X_2) \Big| X_2 \Big) \right| \\
= \; & \left| \int \frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)} (r(X_2+bu)-r(X_2))k(u)du \right| \\
\leq \; & \int \left| \frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)} \right| |r(X_2+bu)-r(X_2)|k(u)du \leq b \cdot L_r \int |u|k(u)du.
\end{aligned}
$$

Mit $C := L_r \int |u|k(u)du$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma A.4. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$
|E((r(X_2)-r(X_1))^2 k_b(X_1-X_2)|X_1)| \leq \tilde{c} b^2
$$

mit einer positiven Konstante $\tilde{c}$.

Beweis. Schreibe den bedingten Erwartungswert wie in Lemma A.2 als Integral und mache eine Taylor-Entwicklung. Benutze die Lipschitz-Stetigkeit von r und $|p(x)| \leq C_p$. Das liefert

$$
\begin{aligned}
& |E((r(X_2)-r(X_1))^2 k_b(X_1-X_2)|X_1)| \\
= \; & \left| \int (r(X_1+bu)-r(X_1))^2 p(X_1+bu)k(u)du \right| \\
\leq \; & \int (r(X_1+bu)-r(X_1))^2 |p(X_1+bu)|k(u)du \leq L_r^2 b^2 C_p \int u^2 k(u)du.
\end{aligned}
$$

Mit $\tilde{c} := L_r^2 C_p \int u^2 k(u)du$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma A.5. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$\begin{aligned}&\Big|E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3,\varepsilon_2\Big)\Big|\\ \leq&\bar{c}_1 b|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|+\bar{c}_2 b^2\end{aligned}$$

mit positiven Konstanten $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$.

Beweis. Schreibe wie schon so häufig den bedingten Erwartungswert als Integral und nutze die Voraussetzungen (B.r), (B.h) und (B.π). Das ergibt

$$\begin{aligned}&\Big|E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3,\varepsilon_2\Big)\Big|\\ =&\Big|\int\frac{p(X_3+bu)}{g_{a_n}(X_3+bu)}h_y(X_3+bu, r(X_3+bu)+\varepsilon_2)(r(X_3)-r(X_3+bu))k(u)du\Big|\\ \leq&|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|\int\frac{1}{\pi(X_3+bu)}\frac{|g(X_3+bu)|}{g_{a_n}(X_3+bu)}|r(X_3)-r(X_3+bu)|k(u)du\\ &+\int\frac{1}{\pi(X_3+bu)}\frac{|g(X_3+bu)|}{g_{a_n}(X_3+bu)}|h_y(X_3+bu, r(X_3+bu)+\varepsilon_2)-h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|\\ &\quad\cdot|r(X_3)-r(X_3+bu)|k(u)du\\ \leq&|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|\frac{1}{c_\pi}L_r b\int|u|k(u)du\\ &+\frac{1}{c_\pi}L_{h_y}L_r b\int\|(X_3+bu, r(X_3+bu)+\varepsilon_2)^\top-(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)^\top\||u|k(u)du\\ =&|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|b\frac{L_r}{c_\pi}\int|u|k(u)du\\ &+\frac{L_r}{c_\pi}L_{h_y}b\int\sqrt{b^2u^2+(r(X_3+bu)-r(X_3))^2}\,|u|k(u)du\\ \leq&|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)|b\frac{L_r}{c_\pi}\int|u|k(u)du+\frac{L_r}{c_\pi}L_{h_y}b^2\sqrt{1+L_r^2}\int u^2k(u)du.\end{aligned}$$

Mit $\bar{c}_1 := \frac{L_r}{c_\pi}\int|u|k(u)du$ und $\bar{c}_2 := \frac{L_r}{c_\pi}L_{h_y}\sqrt{1+L_r^2}\int u^2k(u)du$ folgt die Behauptung. □

Proposition A.6. *Mit den Notationen aus Proposition 3.8 gilt unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1*

$$\sum_{\nu=2}^{5}A_\nu^{(n)}=o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Der Beweis benutzt Methoden, die bereits in [Sch07] bzw. [WR02] entwickelt wurden.
Schreibe $A_5^{(n)}$ als

$$\begin{aligned}A_5^{(n)} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}Z_jh_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j)-r(X_j)g(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}\Delta_{a_n}^2(X_j)\\ &\quad+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}Z_jh_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{r(X_j)g(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}\Delta_{a_n}^2(X_j)\\ &=: A_{5,1}^{(n)}+A_{5,2}^{(n)}.\end{aligned}$$

Man schätzt ab

$$\begin{aligned} n^{1/2}|A_{5,2}^{(n)}| &\leq n^{1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j|h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)|\frac{|r(X_j)|}{g_{a_n}(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}\frac{g(X_j)}{g_{a_n}(X_j)}\Delta_{a_n}^2(X_j) \\ &\leq \frac{n^{1/2}}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)|. \end{aligned}$$

Mit der Hölder-Ungleichung für Summen erhält man die Abschätzung

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)| \leq \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r^2(X_j)\Big)^{1/2}.$$

Wegen (B.r) liefert das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r^2(X_j) = E[r^2(X)] + o_p(1) = O_p(1).$$

Ferner zeigt man, dass wegen (B.h)(ii) außerdem gilt

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j) = E[h_y^2(X,r(X)+\varepsilon)]+o_p(1) = E[h_y^2(X,Y)]+o_p(1) = O_p(1).$$

Nach Lemma 3.4 gilt

$$\frac{n^{1/4}}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| = o_p(1).$$

Insgesamt folgt also $A_{5,2}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Für $A_{5,1}^{(n)}$ schätze man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Summen ab

$$\begin{aligned} n^{1/2}|A_{5,1}^{(n)}| &\leq \frac{n^{1/2}}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(|h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)| \\ &\qquad \cdot\frac{|\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j)-r(X_j)g(X_j)|}{g_{a_n}(X_j)}\Big) \\ &\leq \frac{n^{1/2}}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2} \\ &\qquad \cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_j)}(\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j)-r(X_j)g(X_j))^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nach Lemma A.1 gilt

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}^2(X_j)}(\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j)-r(X_j)g(X_j))^2\Big)^{1/2} = o_p(n^{-1/4}).$$

Zudem habe ich schon für $A_{5,2}^{(n)}$ die Aussage

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j) = O_p(1)$$

gezeigt. Zusammen mit Lemma 3.4 liefert dies $A_{5,1}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Betrachte als nächstes den Term $A_4^{(n)}$. Er lässt sich auf die gleiche Weise abschätzen:

$$\begin{aligned} n^{1/2}|A_4^{(n)}| &\leq \frac{n^{1/4}}{a_n} \sup_{1\leq i\leq n} |\Delta_{a_n}(X_i)| n^{1/4} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(|h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)| \\ &\quad \cdot \frac{|\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j) - r(X_j)g(X_j)|}{g_{a_n}(X_j)} \Big) \\ &\leq \frac{n^{1/4}}{a_n} \sup_{1\leq i\leq n} |\Delta_{a_n}(X_i)| \Big(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \Big)^{1/2} \\ &\quad \cdot \Big(n^{1/2} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\hat{r}_{nj}\hat{g}(X_j) - r(X_j)g(X_j))^2}{g_{a_n}^2(X_j)} \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit den soeben schon benutzten Aussagen folgt auch hier $A_4^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Den Term $A_3^{(n)}$ forme man zunächst um:

$$\begin{aligned} A_3^{(n)} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) r(X_j) \Big(\frac{\Delta_n(X_j)}{g_{a_n}(X_j)} - \frac{g(X_j)\Delta_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)} \Big) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) r(X_j) \frac{\hat{g}(X_j) g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}. \end{aligned}$$

Wie in [Sch07] bzw. [WR02] teile man auf

$$1 = 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)<a_n\}} + 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)\geq a_n\}} + 1_{\{g(X_j)\geq a_n, \hat{g}(X_j)<a_n\}} + 1_{\{g(X_j)\geq a_n, \hat{g}(X_j)\geq a_n\}}.$$

Auf der Menge $\{g(X_j) \geq a_n, \hat{g} \geq a_n\}$ gilt $g_{a_n}(X_j) = g(X_j)$ und $\hat{g}_{a_n}(X_j) = \hat{g}(X_j)$, also auch

$$\frac{\hat{g}(X_j) g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)} = \frac{\hat{g}(X_j) g(X_j) - g(X_j)\hat{g}(X_j)}{g^2(X_j)} = 0.$$

Schreibe die Menge $\{g(X_j) < a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}$ als

$$\{g(X_j) < a_n, -a_n \leq \hat{g}(X_j) < a_n\} \cup \{g(X_j) < a_n, \hat{g}(X_j) < -a_n\}.$$

Nach Definition hat man

$$\begin{aligned} &\frac{|\hat{g}(X_j) g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)|}{g_{a_n}^2(X_j)} 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\leq \hat{g}(X_j)<a_n\}} \\ =& \frac{1}{a_n} |\hat{g}(X_j) - g(X_j)| 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\leq \hat{g}(X_j)<a_n\}} \leq 2 \cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\leq \hat{g}(X_j)<a_n\}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Markov-Ungleichung erhält man

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j) r(X_j)\frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j)-g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}\\
&\qquad \cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\le \hat{g}(X_j)<a_n\}}\Big| > \varrho\Big)\\
\le& P\Big(n^{1/2}\frac{2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\le \hat{g}(X_j)<a_n\}} > \varrho\Big)\\
\le& \frac{2}{\varrho} n^{1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j)<a_n, -a_n\le \hat{g}(X_j)<a_n\}}]\\
\le& \frac{2}{\varrho} n^{1/2}\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i,j:i\ne j} E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j)<a_n\}}]\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n} E[|h_y(X_j, Y_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j)<a_n\}}]\Big)\\
\le& \frac{2}{\varrho}\Big(\frac{n-1}{n} n^{1/2} E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_2)| 1_{\{g(X_2)<a_n\}}]\\
&\qquad + n^{-1/2}(E[h_y^2(X,Y)])^{1/2}(E[r^2(X)])^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

Der zweite Term konvergiert wegen (B.r)(ii) und (B.h)(ii) gegen Null. Da ε und X unabhängig sind, gilt

$$
n^{1/2}E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_2)|1_{\{g(X_2)<a_n\}}] = E[|h_y(X,Y)|]n^{1/2}E[|r(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}].
$$

Aufgrund von (B.h)(ii) und (B.agr) konvergiert dies aber gegen Null.
Auf der Menge $\{g(X_j) < a_n, \hat{g}(X_j) < -a_n\}$ gilt gemäß [Sch07] bzw. [WR02] die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j) r(X_j)\frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j)-g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}\\
&\qquad \cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)<-a_n\}}\Big| > \varrho\Big)\\
\le& P\Big(n^{1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)|\frac{|\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j)-g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)|}{g_{a_n}^2(X_j)}\\
&\qquad \cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)<-a_n\}} > \varrho\Big)\\
\le& P(\{\exists j : 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)<-a_n\}} = 1\}) \le P(\{\exists j : |\hat{g}(X_j)-g(X_j)| > a_n\})\\
=& P(\sup_{1\le j\le n} |\hat{g}(X_j)-g(X_j)| > a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Auch die Menge $\{g(X_j) \ge a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}$ schreibe man als

$$
\{g(X_j) \ge 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\} \cup \{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}.
$$

Schätze ab

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)|}{g^2_{a_n}(X_j)} 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}} \\
=&\frac{|\hat{g}(X_j) - a_n|}{g(X_j)} 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}} \\
\le&\frac{a_n}{g(X_j)} 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}} \le \cdot 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}}.
\end{aligned}
$$

Also folgt mit (B.h)(ii), (B.r)(ii) und (B.agr) wie oben

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) r(X_j) \frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g^2_{a_n}(X_j)} \\
&\qquad \cdot 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}}\Big| > \varrho\Big) \\
\le&\frac{1}{\varrho} n^{1/2} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} E[|h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)||r(X_j)| 1_{\{a_n \le g(X_j) < 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}}] \\
\le&\frac{1}{\varrho} n^{1/2} \frac{1}{n^2} \Big(\sum_{i,j: i \ne j} E[|h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j) < 2a_n\}}] \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n} E[|h_y(X_j, Y_j)||r(X_j)| 1_{\{g(X_j) < 2a_n\}}]\Big) \\
\le&\frac{1}{\varrho}\Big(\frac{n-1}{n} n^{1/2} E[|h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)||r(X_2)| 1_{\{g(X_j) < 2a_n\}} \\
&\qquad + n^{-1/2}(E[h^2_y(X, Y)])^{1/2}(E[r^2(X)])^{1/2}\Big) \to 0.
\end{aligned}
$$

Analog zu oben erhält man zudem

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) r(X_j) \frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g^2_{a_n}(X_j)} \\
&\qquad \cdot 1_{\{g(X_j) \ge 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}}\Big| > \varrho\Big) \\
\le&P(\{\exists j : 1_{\{g(X_j) \ge 2a_n, \hat{g}(X_j) < a_n\}} = 1\}) \le P(\{\exists j : |\hat{g}(X_j) - g(X_j)| > a_n\}) \\
=&P(\sup_{1 \le j \le n} |\hat{g}(X_j) - g(X_j)| > a_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}
$$

Teile die Menge $\{g(X_j) < a_n, \hat{g}(X_j) \ge a_n\}$ schließlich auf in

$$
\{g(X_j) < a_n, a_n \le \hat{g}(X_j) < 2a_n\} \cup \{g(X_j) < a_n, \hat{g} \ge 2a_n\}.
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j) - g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)|}{g^2_{a_n}(X_j)} 1_{\{g(X_j) < a_n, a_n \le \hat{g}(X_j) < 2a_n\}} \\
=&\frac{\hat{g}(X_j)}{a_n}\frac{|a_n - g(X_j)|}{a_n} 1_{\{g(X_j) < a_n, a_n \le \hat{g}(X_j) < 2a_n\}} \le 4 \cdot 1_{\{g(X_j) < a_n, a_n \le \hat{g}(X_j) < 2a_n\}}.
\end{aligned}
$$

Wie oben folgt

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j) r(X_j)\frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j)-g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}\\
&\qquad\cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, a_n\le\hat{g}(X_j)<2a_n\}}\Big| > \varrho\Big)\\
\le&\frac{4}{\varrho}n^{1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)|1_{\{g(X_j)<a_n, a_n\le\hat{g}(X_j)<2a_n\}}]\\
\le&\frac{4}{\varrho}n^{1/2}\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i,j:i\neq j}E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_j)|1_{\{g(X_j)<a_n\}}]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}E[|h_y(X_j, Y_j)||r(X_j)|1_{\{g(X_j)<a_n\}}]\Big)\\
\le&\frac{4}{\varrho}\Big(\frac{n-1}{n}n^{1/2}E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||r(X_2)|1_{\{g(X_2)<a_n\}}]\\
&\quad+n^{-1/2}(E[h_y^2(X,Y)])^{1/2}(E[r^2(X)])^{1/2}\Big)\to 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso analog zu oben ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j) r(X_j)\frac{\hat{g}(X_j)g_{a_n}(X_j)-g(X_j)\hat{g}_{a_n}(X_j)}{g_{a_n}^2(X_j)}\\
&\qquad\cdot 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)\ge 2a_n\}}\Big| > \varrho\Big)\\
\le&P(\{\exists j : 1_{\{g(X_j)<a_n, \hat{g}(X_j)\ge 2a_n\}}=1\})\le P(\{\exists j : |\hat{g}(X_j)-g(X_j)|>a_n\})\\
=&P(\sup_{1\le j\le n}|\hat{g}(X_j)-g(X_j)|>a_n)\xrightarrow{n\to\infty}0.
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also $A_3^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Die Untersuchung des verbleibenden Terms $A_2^{(n)}$ ist die vielleicht umfangreichste. Zur Erinnerung:

$$
A_2^{(n)} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{1}{n}\sum_{l\neq j}\frac{Z_l(r(X_l)-r(X_j))}{g_{a_n}(X_j)}k_b(X_j-X_l).
$$

Betrachte zunächst den Anteil mit $i = j$:

$$
\begin{aligned}
&n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{j,l=1}^{n} Z_j h_y(X_j, r(X_j)+\varepsilon_j)\frac{Z_l(r(X_l)-r(X_j))}{g_{a_n}(X_j)}k_b(X_j-X_l)\Big|\\
\le&\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l=1}^{n}|h_y(X_j, Y_j)||r(X_l)-r(X_j)|\\
\le&\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}h_y^2(X_j, Y_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{j,l=1}^{n}(r(X_l)-r(X_j))^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Wie schon mehrfach verwendet gilt $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n h_y^2(X_j,Y_j)=O_p(1)$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{j,l=1}^n (r(X_l)-r(X_j))^2 &= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n r^2(X_j)-\frac{2}{n^2}\sum_{j,l=1}^n r(X_j)r(X_l)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n r^2(X_j)-2\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n r(X_j)\Big)^2.\end{aligned}$$

Nach (B.r) ist dies jedoch beschränkt in Wahrscheinlichkeit. Mit (B.a)(i) folgt

$$\frac{1}{n^3}\sum_{j,l=1}^n Z_j h_y(X_j,Y_j)\frac{Z_l(r(X_l)-r(X_j))}{g_{a_n}(X_j)}k_b(X_j-X_l)=o_p(n^{-1/2}).$$

Für $i=l$ schätzt man ab

$$\begin{aligned}&n^{1/2}\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{Z_i(r(X_i)-r(X_j))}{g_{a_n}(X_j)}k_b(X_i-X_j)\Big|\\ \le&\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n |h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)-r(X_j)|\\ \le&\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n (r(X_i)-r(X_j))^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Wir haben bereits erkannt, dass gilt $\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n (r(X_i)-r(X_j))^2=O_p(1)$. Aus einem früheren Beweis wissen wir zudem, dass $\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)$ beschränkt in Wahrscheinlichkeit ist. Mit (B.a)(i) folgt also auch hier

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{Z_i(r(X_i)-r(X_j))}{g_{a_n}(X_j)}k_b(X_i-X_j)=o_p(n^{-1/2}).$$

Es bleibt demnach nur derjenige Anteil $\tilde{A}_2^{(n)}$ von $A_2^{(n)}$ mit drei verschiedenen Summationsindices zu betrachten. Nach der Markov-Ungleichung genügt zu zeigen, dass gilt $n\cdot E[(\tilde{A}_2^{(n)})^2]=o(1)$. Schreibe dazu

$$\begin{aligned}&nE[(\tilde{A}_2^{(n)})^2]\\ =&\frac{1}{n^5}\sum_{i,j,l\text{ versch.}} E\Big[Z_j h_y^2(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{Z_l(r(X_l)-r(X_j))^2}{g_{a_n}^2(X_j)}k_b^2(X_j-X_l)\Big]\\ &+\frac{1}{n^5}\sum E\Big[Z_{j_1}h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_{j_1})\frac{Z_{l_1}(r(X_{l_1})-r(X_{j_1}))}{g_{a_n}(X_{j_1})}k_b(X_{j_1}-X_{l_1})\\ &\quad\cdot Z_{j_2}h_y(X_{i_2},r(X_{i_2})+\varepsilon_{j_2})\frac{Z_{l_2}(r(X_{l_2})-r(X_{j_2}))}{g_{a_n}(X_{j_2})}k_b(X_{j_2}-X_{l_2})\Big],\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Summe über alle (i_1,j_1,l_1) und (i_2,j_2,l_2) mit $(i_1,j_1,l_1)\ne(i_2,j_2,l_2)$, i_1,j_1,l_1 verschieden und i_2,j_2,l_2 verschieden summiert wird. Die erste

Summme schätze man wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{i,j,l\text{ verschieden}} E\Big[Z_j h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{Z_l(r(X_l)-r(X_j))^2}{g_{a_n}^2(X_j)}k_b^2(X_j-X_l)\Big]\Big| \\
\leq &\frac{K^2}{nb^2a_n^2}n^{-1}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}E[h_y^2(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)(r(X_3)-r(X_2))^2] \\
\leq &\frac{K^2}{nb^2a_n^2}n^{-1}E[h_y^2(X,Y)]E[(r(X_1)-r(X_2))^2].
\end{aligned}
$$

Der zuletzt erhaltene Term konvergiert aufgrund von (B.h)(ii), (B.r)(ii) und (B.a)(i) gegen Null.
Unterscheide für die Summe über die gemischten Terme verschiedene Fälle:
6 verschiedene Indices:
Der entsprechende Anteil der gemischten Summe lässt sich wegen Unabhängigkeit schreiben als

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5}n\Big(E\Big[Z_2 h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2) \\
&\quad\cdot\frac{Z_3(r(X_3)-r(X_2))}{g_{a_n}(X_2)}k_b(X_2-X_3)\Big]\Big)^2 \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5}\Big(n^{1/2}E[h_y(X,Y)] \\
&\quad\cdot E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}E(\pi(X_1)(r(X_1)-r(X_2))k_b(X_2-X_1)|X_2)\Big]\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von Lemma A.2 schätzt man nun ab

$$
\begin{aligned}
&n^{1/2}\Big|E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}E(\pi(X_1)(r(X_1)-r(X_2))k_b(X_2-X_1)|X_2)\Big]\Big| \\
\leq &n^{1/2}E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}|E(\pi(X_1)(r(X_1)-r(X_2))k_b(X_2-X_1)|X_2)|\Big] \\
\leq &n^{1/2}b^2c_1E\Big[\frac{|g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2)}\Big]+n^{1/2}\frac{b^2}{a_n}c_2 \leq n^{1/2}b^2c_1+n^{1/2}\frac{b^2}{a_n}c_2.
\end{aligned}
$$

Wegen (B.a)(ii) konvergiert dies gegen Null.
5 verschiedene Indices:
Wegen $(i_1, j_1, l_1) \neq (i_2, j_2, l_2)$, i_1, j_1, l_1 verschieden sowie i_2, j_2, l_2 verschieden sind folgende Fälle zu betrachten:
$i_1 = i_2$:
Mit Hilfe der Unabhängigkeit und Lemma A.2 wird aus dem Betrag des entspre-

chenden Anteils der gemischten Summe

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}|E[h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_4)]| \\
&\quad\cdot\Big|E\Big[Z_2Z_3\frac{r(X_3)-r(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}k_b(X_2-X_3)Z_4Z_5\frac{r(X_5)-r(X_4)}{g_{a_n}(X_4)}k_b(X_4-X_5)\Big]\Big| \\
\leq& E[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_4)|] \\
&\quad\cdot\Big(E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}|E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_2))k_b(X_2-X_3)|X_2)|\Big]\Big)^2 \\
\leq& E[h_y^2(X,Y)]\Big(b^2c_1E\Big[\frac{|g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2)}\Big]+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)^2\leq E[h_y^2(X,Y)]\Big(b^2c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)^2.
\end{aligned}$$

Dies konvergiert jedoch wegen (B.a)(ii) gegen Null.

$\underline{j_1=j_2}$:

Benutze für den Betrag des entsprechenden Teils der gemischten Summe erneut Lemma A.2. Dies liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}|E[h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)h_y(X_4,r(X_4)+\varepsilon_2)]| \\
&\quad\cdot\Big|E\Big[Z_2Z_3\frac{r(X_3)-r(X_2)}{g_{a_n}^2(X_2)}Z_5(r(X_5)-r(X_2))k_b(X_2-X_5)k_b(X_2-X_3)\Big]\Big| \\
\leq& E[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_4,r(X_4)+\varepsilon_2)|] \\
&\quad\cdot E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}(E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_2))k_b(X_2-X_3)|X_2))^2\Big] \\
\leq& E[h_y^2(X,Y)]\Big(b^2c_1E\Big[\frac{|g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2)}\Big]+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)^2\to 0.
\end{aligned}$$

$\underline{l_1=l_2}$:

Die Vorgehensweise ähnelt den anderen Fällen. Es wird jedoch Lemma A.3 verwendet. Man erhält für den Betrag des entsprechenden Teils der gemischten Summe

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E[h_y(X,Y)])^2 \\
&\quad\cdot\Big|E\Big[\pi(X_2)\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2) \\
&\qquad\cdot\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}(r(X_2)-r(X_3))k_b(X_3-X_2)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E[h_y(X,Y)])^2 \\
&\quad\cdot\Big|E\Big[\pi(X_2)E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big) \\
&\qquad\cdot E\Big(\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}(r(X_2)-r(X_3))k_b(X_3-X_2)\Big|X_2\Big)\Big]\Big| \\
\leq&(E[h_y(X,Y)])^2\cdot E\Big[\pi(X_2)E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_2)-r(X_1))k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big)^2 \\
\leq& E[h_y^2(X,Y)]\cdot C^2b^2\to 0.
\end{aligned}$$

$j_1 = l_2$ bzw. $j_2 = l_1$:
Wieder betrachtet man den Betrag des entsprechenden Teils der gemischten Summe. In diesem Fall werden nun Lemma A.2 und Lemma A.3 benötigt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E[h_y(X,Y)])^2 \\
&\cdot \Big| E\Big[\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_3))k_b(X_3-X_2) \\
&\qquad \cdot \frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E[h_y(X,Y)])^2 \\
&\cdot \Big| E\Big[\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_3))k_b(X_3-X_2)|X_3) \\
&\qquad \cdot E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3\Big)\Big]\Big| \\
\le& E[h_y^2(X,Y)]\cdot E\Big[\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}|E(\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_3))k_b(X_3-X_2)|X_3)| \\
&\qquad \cdot |E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3\Big)|\Big] \\
\le& E[h_y^2(X,Y)]\cdot \Big(b^2c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)\cdot Cb \to 0.
\end{aligned}$$

$i_1 = j_2$ bzw. $j_1 = i_2$:
Den Betrag des entsprechenden Anteils der gemischten Summe formt man mit Hilfe von Lemma A.2 wie folgt um

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}|E[h_y(X,Y)]| \\
&\cdot \Big|E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_2))k_b(X_2-X_3)\Big]\Big| \\
&\cdot \Big|E\Big[h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}\pi(X_4)(r(X_4)-r(X_1))k_b(X_1-X_4)\Big]\Big| \\
\le& E[|h_y(X,Y)|]\cdot E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}|E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_2))k_b(X_2-X_3)|X_2)|\Big] \\
&\cdot E\Big[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)}|E(\pi(X_4)(r(X_4)-r(X_1))k_b(X_1-X_4)|X_1)\Big] \\
\le& E[|h_y(X,Y)|]\cdot\Big(b^2E\Big[\frac{|g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2)}\Big]c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big) \\
&\cdot\Big(b^2E\Big[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big]c_1+\frac{b^2}{a_n}E[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|]c_2\Big) \\
\le& E[|h_y(X,Y)|]\cdot\Big(b^2c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)\cdot E[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|]\Big(b^2c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)\to 0.
\end{aligned}$$

$i_1 = l_2$ bzw. $l_1 = i_2$:
Mit Lemma A.2 und Lemma A.3 erhält man für den Betrag des entsprechenden

Anteils der gemischten Summe

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}|E[h_y(X,Y)]| \\
&\quad\cdot \Big|E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}\pi(X_4)(r(X_4)-r(X_2))k_b(X_2-X_4)\Big]\Big| \\
&\quad\cdot \Big|E\Big[h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)\pi(X_1)\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}(r(X_1)-r(X_3))k_b(X_3-X_1)\Big]\Big| \\
\le& E[|h_y(X,Y)|]\cdot E\Big[\frac{\pi(X_2)}{g_{a_n}(X_2)}|E(\pi(X_4)(r(X_4)-r(X_2))k_b(X_2-X_4)|X_2)|\Big] \\
&\quad\cdot E\Big[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|\Big|E\Big(\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)}(r(X_1)-r(X_3))k_b(X_3-X_1)\Big|X_1\Big)\Big|\Big] \\
\le& E[|h_y(X,Y)|]\cdot\Big(b^2\frac{|g(X_2)|}{g_{a_n}(X_2)}c_1+\frac{b^2}{a_n}c_2\Big)\cdot CbE[|h_y(X_1,r(X_1)+\varepsilon_2)|]\to 0.
\end{aligned}$$

Die noch verbleibenden Fälle mit vier bzw. drei verschiedenen Indices werde ich nicht so ausführlich untersuchen. Benutze auch hier Lemma A.2 und Lemma A.3. Zusätzlich zu den Fällen mit fünf bzw. sechs verschiedenen Indices ist für einen Teil der Summanden auch eine Abschätzung wie bei der Summe über die quadratischen Terme möglich. □

Lemma A.7. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n}Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&-\iiint\pi(z)h_y(x,r(x)+u)\frac{k_b(z-X_l)}{g_{a_n}(z)}p(x)p(z)f(u)dxdzdu\Big)=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich lässt sich das auftretende Dreifachintegral als bedingter Erwartungswert $E\big(Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)}\big|X_l\big)$ mit i, j und l verschieden auffassen. Schreibe also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n}Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&-\iiint\pi(z)h_y(x,r(x)+u)\frac{k_b(z-X_l)}{g_{a_n}(z)}p(x)p(z)f(u)dxdzdu\Big) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n}Z_ih_y(X_i,Y_i)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} && \text{(A.4)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{j=1,j\neq l}^{n}Z_jh_y(X_l,r(X_l)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_l)} && \text{(A.5)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j:i\neq j,\\ j\neq l,i\neq l}}\Big(Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)} \\
&\qquad-E\Big(Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)}\Big|X_l\Big)\Big) && \text{(A.6)}\\
&-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\frac{3n-2}{n^2}E\Big(Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)}\Big|X_l\Big). && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Für (A.4) erhält man

$$\begin{aligned} n^{1/2}|(\text{A.4})| &\leq \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{l,i:i\neq l}|\varepsilon_l||h_y(X_i,Y_i)| \\ &\leq \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|\varepsilon_l|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|h_y(X_i,Y_i)|. \end{aligned}$$

Wegen (B.h)(ii) und $E[\varepsilon^2]=\sigma^2$ gilt nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|h_y(X_l,Y_l)| = O_p(1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|\varepsilon_l| = O_p(1).$$

Mit (B.a)(i) folgt also $(\text{A.4}) = o_p(n^{-1/2})$.
Auch der letzte Term (A.7) lässt sich mit Hilfe der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte einfach abschätzen durch

$$\begin{aligned} n^{1/2}|(\text{A.7})| &\leq \frac{3n-2}{n}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|\varepsilon_l|E(|h_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)||X_l) \\ &= \frac{3n-2}{n}\frac{K}{n^{1/2}ba_n}E[|h_y(X,Y)|]\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|\varepsilon_l|. \end{aligned}$$

Wegen (B.h)(ii), $E[\varepsilon^2]=\sigma^2$ und (B.a)(i) konvergiert dies stochastisch gegen Null.
Für (A.5) rechnet man

$$\begin{aligned} n^{1/2}|(\text{A.5})| &\leq \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n}|\varepsilon_l||h_y(X_l,r(X_l)+\varepsilon_j)| \\ &\leq \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\frac{1}{n^2}\sum_{l,j=1}^{n}|\varepsilon_l||h_y(X_l,r(X_l)+\varepsilon_j)| \\ &\leq \frac{K}{n^{1/2}ba_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{l,j=1}^{n}h_y^2(X_l,r(X_l)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^2 = O_p(1)$. Ferner ist nach dem früher Gesagten $\frac{1}{n^2}\sum_{l,j=1}^{n}h_y^2(X_l,r(X_l)+\varepsilon_j)$ ebenfalls beschränkt in Wahrscheinlichkeit. Mit (B.a)(i) folgt also $(\text{A.5}) = o_p(n^{-1/2})$.
Zeige nun, dass $n\cdot E[(\text{A.6})^2]$ gegen Null konvergiert. Dann folgt mittels der Markov-Ungleichung $(\text{A.6}) = o_p(n^{-1/2})$.
Setze zunächst abkürzend

$$\Gamma_{i,j,l} := Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)} - E\Big(Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)}\Big|X_l\Big).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} &n\cdot E[(\text{A.6})^2] \\ =&E\Big[Z_1\varepsilon_1^2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j:i\neq j,\\ j\neq 1,i\neq 1}}\Gamma_{i,j,1}^2\Big)^2\Big] &\text{(A.8)} \\ &+(n-1)\cdot E\Big[Z_1\varepsilon_1\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1\neq 1,i_1\neq 1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}Z_2\varepsilon_2\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_2,j_2:j_2\neq i_2,\\ j_2\neq 2,i_2\neq 2}}\Gamma_{i_2,j_2,2}\Big]. &\text{(A.9)} \end{aligned}$$

Da in (A.8) ε_1^2 unabhängig von allen anderen auftretenden Zufallsvariablen ist, kann man schreiben

$$\begin{aligned}&E\Big[Z_1\varepsilon_1^2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j:i\neq j,\\ j\neq 1,i\neq 1}}\Gamma_{i,j,1}\Big)^2\Big] \leq \sigma^2 E\Big[\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j\geq 2:j\neq i}\Gamma_{i,j,1}\Big)^2\Big]\\ =&\sigma^2\frac{1}{n^4}\sum_{i,j\geq 2:j\neq i}E[\Gamma_{i,j,1}^2]+\sigma^2\frac{1}{n^4}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\geq 2:(i_1,j_i)\neq(i_2,j_2)}E[\Gamma_{i_1,j_1,1}\Gamma_{i_2,j_2,1}].\end{aligned}$$

Aus dem Anteil mit vier verschiedenen Indices ergibt sich wegen bedingter Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}&\sigma^2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}E[\Gamma_{2,3,1}\Gamma_{4,5,1}]\\ =&\sigma^2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}E[E(\Gamma_{2,3,1}|X_1)E(\Gamma_{4,5,1}|X_1)]=0.\end{aligned}$$

In den anderen Termen kann man abschätzen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}|E[\Gamma_{i_1,j_1,1}\cdot\Gamma_{i_2,j_2,1}]|\\ \leq&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\big(E[|h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_{j_1})||h_y(X_{i_2},r(X_{i_2},r(X_{i_2})+\varepsilon_{j_2})|]+3E[h_y^2(X,Y)]\big)\\ \leq&\frac{4K^2}{nb^2a_n^2}E[h_y^2(X,Y)]\to 0.\end{aligned}$$

Für (A.9) erhält man durch Ergänzen

$$\begin{aligned}&\frac{n-1}{n}nE\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>1,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_2,j_2:j_2\neq i_2,\\ j_2>2,i_2\neq 2}}\Gamma_{i_2,j_2,2}\Big)\Big]\\ &+\frac{n-1}{n}nE\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1\neq 1,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Da ε_1 im ersten Term unabhängig von allen anderen auftretenden Zufallsvariablen ist und $E\varepsilon=0$ gilt, wird daraus

$$\begin{aligned}&\frac{n-1}{n}nE\varepsilon_1\cdot E\Big[Z_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>1,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_2,j_2:j_2\neq i_2,\\ j_2>2,i_2\neq 2}}\Gamma_{i_2,j_2,2}\Big)\Big]\\ &+\frac{n-1}{n}nE\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>1,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big]\\ =&\frac{n-1}{n}E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>1,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Ein Aufteilen der Summe $\sum_{i_1,j_1:j_1\neq i_1,j_1\neq 1,i_1>1}$ auf $\sum_{i_1,j_1:j_1\neq i_1,j_1>2,i_1>1}$ und

$\sum_{i_1,j_1:j_1\neq i_1,j_1=1,i_1>1}=\sum_{i_1\geq 2,j_1=1}$ liefert wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeiten

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{n}E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>2,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big]\\
&+\frac{n-1}{n}E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i_1=3}^{n}\Gamma_{i_1,2,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big]\\
=&\frac{n-1}{n}E\varepsilon_2E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i_1,j_1:j_1\neq i_1,\\ j_1>2,i_1>1}}\Gamma_{i_1,j_1,1}\Big)\cdot Z_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big]\\
&+\frac{n-1}{n}E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i_1=3}^{n}\Gamma_{i_1,2,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big]\\
=&\frac{n-1}{n}\frac{1}{n}E\Big[Z_1\varepsilon_1\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_1=3}^{n}\Gamma_{i_1,2,1}\Big)\cdot Z_2\varepsilon_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i_2=3}^{n}\Gamma_{i_2,1,2}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Schätze dies nun betraglich nach oben ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{n}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2=3}^{n}E\big[\big(|\varepsilon_1||h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_2)|+E(|h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_2)||X_1)\big)\\
&\quad\cdot\big(|\varepsilon_2||h_y(X_{i_2},r(X_{i_2})+\varepsilon_1)|+E(|h_y(X_3,r(X_3)+\varepsilon_1)|X_2)\big)\big]\\
=&\frac{n-1}{n}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2=3}^{n}\big(E[|\varepsilon_1||\varepsilon_2||h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_2)||h_y(X_{i_2},r(X_{i_2})+\varepsilon_1)|]\\
&\quad+2E[|\varepsilon_1||h_y(X_{i_1},r(X_{i_1})+\varepsilon_2)|\varepsilon_2|E[|h_y(X_3,Y_3)|]]+E[|\varepsilon_1||\varepsilon_2|](E[|h_y(X_3,Y_3)|])^2\big)\\
\leq&\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^3}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\big((E[\varepsilon_1^2h_y^2(X_3,r(X_3)+\varepsilon_2)])^{1/2}(E[\varepsilon_2^2h_y^2(X_3,r(X_3)+\varepsilon_1)])^{1/2}\\
&\quad+2E[|h_y(X_3,Y_3)|]E[|\varepsilon_1|](\sigma^2)^{1/2}(E[h_y^2(X_3,Y_3)])^{1/2}+(E[|\varepsilon|])^2(E[|h_y(X_3,Y_3)|])^2\big)\\
\leq&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}4\sigma^2E[h_y^2(X,Y)].
\end{aligned}$$

Nach (B.h)(ii) ist der vorkommende Erwartungswert endlich, dieser Term konvergiert also aufgrund von (B.a)(i) gegen Null. Insgesamt folgt daraus (A.6) $=o_p(n^{-1/2})$, also auch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Z_l\varepsilon_l\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq l}^{n}Z_jh_y(X_i,r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_j-X_l)}{g_{a_n}(X_j)}\\
&-\iiint\pi(z)h_y(x,r(x)+u)\frac{k_b(z-X_l)}{g_{a_n}(z)}p(x)p(z)f(u)dxdzdu\Big)\\
=&(\mathrm{A.4})+(\mathrm{A.5})+(\mathrm{A.6})+(\mathrm{A.7})=o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

□

Proposition A.8. *Mit den Notationen aus Proposition 3.8 gilt unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1*

$$\sum_{\nu=2}^{5}B_\nu^{(n)}=o_p(n^{-1/2}).$$

Beweis. Schreibe $B_5^{(n)}$ als

$$\begin{aligned} B_5^{(n)} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{\hat{r}_{ni}^{(a)}\hat{g}(X_i) - r(X_i)g(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i) \\ &\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{r(X_i)g(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i) \\ &=: B_{5,1}^{(n)} + B_{5,2}^{(n)}. \end{aligned}$$

Man schätzt ab

$$\begin{aligned} n^{1/2}|B_{5,2}^{(n)}| &\leq n^{1/2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n Z_j |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)|\frac{|r(X_i)|}{g_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\Delta_{a_n}^2(X_i) \\ &\leq \frac{n^{1/2}}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)|. \end{aligned}$$

Mit der Hölder Ungleichung für Summen erhält man die Abschätzung

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n |h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)| \leq \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)\Big)^{1/2}.$$

Wie in Proposition A.6 folgt dann

$$\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r^2(X_i)\Big)^{1/2} = O_p(1).$$

Mit Lemma 3.4 ergibt sich also $B_{5,2}^{(n)} = o_p(n^{-1/2})$.
Die gleichen Methoden wie in Proposition A.6 liefern die Abschätzungen

$$\begin{aligned} n^{1/2}|B_{5,1}^{(n)}| &\leq \frac{n^{1/2}}{a_n^2}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2} \\ &\quad \cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}(\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i) - r(X_i)g(X_i))^2\Big)^{1/2} \xrightarrow{P} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} n^{1/2}|B_4^{(n)}| &\leq \frac{n^{1/4}}{a_n}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n h_y^2(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\Big)^{1/2} \\ &\quad \cdot\Big(n^{1/2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{g_{a_n}^2(X_i)}(\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i) - r(X_i)g(X_i))^2\Big)^{1/2} \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Für $B_3^{(n)}$ verfahre man analog zu Proposition A.6. In den Abschätzungen, in denen $E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)|1_{\{g(X_i)<a_n\}}]$ bzw. $E[|h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)||r(X_i)|1_{\{g(X_i)<2a_n\}}]$ vorkommt, muss man nun jedoch (B.aghr) benutzen, da hier $h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)$ und $r(X_i)1_{\{g(X_i)<a_n\}}$ (bzw. $r(X_i)1_{\{g(X_i)<2a_n\}}$) nicht mehr unabhängig sind.
Die Anteile in $B_2^{(n)}$ mit $i = j$ bzw. $i = l$ lassen sich ähnlich wie in Proposition A.6

abschätzen. Man muss sich also auch hier nur auf den Anteil $\tilde{B}_2^{(n)}$ von $B_2^{(n)}$ mit drei verschiedenen Summationsindices beschränken. Aufgrund der Markov-Ungleichung reicht es, zu zeigen, dass $nE[(\tilde{B}_2^{(n)})^2]$ gegen Null konvergiert. Man hat

$$\begin{aligned}
&n \cdot E[(\tilde{B}_2^{(n)})^2] \\
=&\frac{1}{n^5} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} E\Big[Z_j h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \frac{Z_l(r(X_l) - r(X_i))^2}{g_{a_n}^2(X_i)} k_b^2(X_i - X_l)\Big] \\
&+ \frac{1}{n^5} \sum E\Big[Z_{j_1} h_y(X_{i_1}, r(X_{i_1}) + \varepsilon_{j_1}) \frac{Z_{l_1}(r(X_{l_1}) - r(X_{i_1}))}{g_{a_n}(X_{i_1})} k_b(X_{i_1} - X_{l_1}) \\
&\quad \cdot Z_{j_2} h_y(X_{i_2}, r(X_{i_2}) + \varepsilon_{j_2}) \frac{Z_{l_2}(r(X_{j_2}) - r(X_{i_2}))}{g_{a_n}(X_{i_2})} k_b(X_{i_2} - X_{l_2})\Big],
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Summe über alle (i_1, j_1, l_1) und (i_2, j_2, l_2) mit $(i_1, j_1, l_1) \neq (i_2, j_2, l_2)$, i_1, j_1, l_1 verschieden und i_2, j_2, l_2 verschieden summiert wird.
Die Summe über die quadratischen Terme lässt sich mit Lemma A.4 umformen zu

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)}{n^4} EZE\Big[\frac{h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j)}{g_{a_n}^2(X_i)} E(\pi(X_l)(r(X_l) - r(X_i))^2 k_b^2(X_i - X_l)|X_i)\Big] \\
\leq&\frac{KEZ}{n^2 b a_n^2} E[h_y^2(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) E((r(X_l) - r(X_i))^2 k_b(X_i - X_l)|X_i)] \\
\leq&\frac{KEZ}{n^2 b a_n^2} E[h_y^2(X, Y)]\tilde{c} b^2.
\end{aligned}$$

Dies konvergiert aber wegen (B.a)(i) gegen Null.
Unterscheide für die Summe über die gemischten Terme verschiedene Fälle:
<u>6 verschiedene Indices:</u>
Der entsprechende Anteil der gemischten Summe lässt sich wegen Unabhängigkeit und mit Hilfe von Lemma A.2 wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5} n\bigg(E\Big[Z_2 h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2) \\
&\quad \cdot \frac{Z_3(r(X_3) - r(X_1))}{g_{a_n}(X_1)} k_b(X_1 - X_3)\Big]\bigg)^2 \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5} \bigg(n^{1/2} EZ \\
&\quad \cdot E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)} E(\pi(X_3)(r(X_3) - r(X_1)) k_b(X_1 - X_3)|X_1)\Big]\bigg)^2 \\
\leq&(EZ)^2 \bigg(n^{1/2} E\Big[\frac{|h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)|}{g_{a_n}(X_1)} |E(\pi(X_3)(r(X_3) - r(X_1)) k_b(X_1 - X_3)|X_1)|\Big]\bigg)^2 \\
\leq&(EZ)^2 \bigg(n^{1/2} b^2 c_1 E\Big[|h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)| \frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big] + n^{1/2} \frac{b^2}{a_n} c_2 E[|h_y(X, Y)|]\bigg)^2 \\
\leq&(EZ)^2 \bigg(n^{1/2} b^2 c_1 + n^{1/2} \frac{b^2}{a_n} c_2\bigg)^2 E[h_y^2(X, Y)].
\end{aligned}$$

Wegen (B.a)(ii) konvergiert dies gegen Null.
<u>5 verschiedene Indices:</u>
Wegen $(i_1, j_1, l_1) \neq (i_2, j_2, l_2)$, i_1, j_1, l_1 verschieden sowie i_2, j_2, l_2 verschieden sind

folgende Fälle zu betrachten:
$\underline{i_1 = i_2}$:
Mit Hilfe der Unabhängigkeit und Lemma A.2 wird aus dem Betrag des entsprechenden Anteils der gemischten Summe

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(EZ)^2\Big|E\Big[h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)\\
&\quad\cdot\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}^2(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\pi(X_4)(r(X_5)-r(X_1))k_b(X_1-X_5)\Big]\Big|\\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(EZ)^2\Big|E\Big[h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)}{g_{a_n}^2(X_1)}\\
&\quad\cdot\Big(E\Big(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_1\Big)\Big)^2\Big]\Big|\\
\leq&(EZ)^2E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|\frac{|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)|}{g_{a_n}^2(X_1)}\\
&\quad\cdot\Big(E\Big(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_1\Big)\Big)^2\Big]\\
\leq&(EZ)^2\Big(E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)|\frac{g^2(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}\Big]b^4c_1^2\\
&\quad+2c_1c_2\frac{b^2}{a_n}b^2E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)|\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big]\\
&\quad+c_2^2\frac{b^4}{a_n^2}E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)|]\Big)\\
\leq&(EZ)^2\Big(b^4c_1^2+2c_1c_2\frac{b^2}{a_n}b^2+c_2^2\frac{b^4}{a_n^2}\Big)E[h_y^2(X,Y)].
\end{aligned}$$

Dabei gilt aufgrund der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)|]\\
\leq&\big(E[h_y^2(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)]\big)^{1/2}\big(E[h_y^2(X_1, r(X_1)+\varepsilon_4)]\big)^{1/2}=E[h_y^2(X,Y)].
\end{aligned}$$

Wegen (B.a)(ii) konvergiert $b^4c_1^2+2c_1c_2\frac{b^2}{a_n}b^2+c_2^2\frac{b^4}{a_n^2}$ gegen Null.
$\underline{j_1 = j_2}$:
Benutze für den Betrag des entsprechenden Teils der gemischten Summe erneut Lemma A.2. Dies liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}EZ\Big|E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_4)}\\
&\quad\cdot\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))\pi(X_5)(r(X_5)-r(X_4))k_b(X_4-X_5)k_b(X_1-X_3)\Big]\Big|\\
\leq&EZ\Big|E\Big[\Big(E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|\varepsilon_2\Big)\Big)^2\Big]\Big|\\
=&EZE\Big[\Big(E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1,\varepsilon_2)\Big|\varepsilon_2\Big)\Big)^2\Big]\\
\leq&EZE\Big[\Big(c_1b^2E\Big(|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big|\varepsilon_2\Big)+c_2\frac{b^2}{a_n}E(|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)||\varepsilon_2)\Big)^2\Big]\\
\leq&EZ\Big(c_1b^2+c_2\frac{b^2}{a_n}\Big)^2E[h_y^2(X,Y)]\to 0.
\end{aligned}$$

$\underline{l_1 = l_2}$:
Mit Lemma A.5 schätzt man den Betrag des entsprechenden Teils der gemischten Summe ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(EZ)^2 \cdot \Big|E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1)) \\
&\qquad \cdot k_b(X_1-X_3)\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)}(r(X_3)-r(X_4))k_b(X_4-X_3)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(EZ)^2 \cdot \Big|E\Big[\pi(X_3) \\
&\quad \cdot E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3, \varepsilon_2, \varepsilon_5\Big) \\
&\quad \cdot E\Big(\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)}(r(X_3)-r(X_4))k_b(X_4-X_3)\Big|X_3, \varepsilon_2, \varepsilon_5\Big)\Big]\Big| \\
\le&(EZ)^2 \cdot E\Big[\Big|E\Big(\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)\Big|X_3, \varepsilon_2\Big)\Big| \\
&\quad \cdot \Big|E\Big(\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)}(r(X_3)-r(X_4))k_b(X_4-X_3)\Big|X_3, \varepsilon_5\Big)\Big|\Big] \\
\le&(EZ)^2 \cdot E\big[\big(\bar{c}_1 b|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_2)| + \bar{c}_2 b^2\big) \cdot \big(\bar{c}_1 b|h_y(X_3, r(X_3)+\varepsilon_5)| + \bar{c}_2 b^2\big)\big] \\
\le&(EZ)^2 \cdot \big(\bar{c}_1^2 b^2 E[h_y^2(X,Y)] + 2\bar{c}_1\bar{c}_2 b^3 E[|h_y(X,Y)|] + \bar{c}_2^2 b^4\big) \to 0.
\end{aligned}$$

$\underline{j_1 = l_2 \text{ bzw. } j_2 = l_1}$:
Mit Hilfe von Lemma A.2 erhält man für den Betrag des zugehörigen Anteils

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}EZ \cdot \Big|E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1)) \\
&\quad \cdot k_b(X_1-X_3)\Big]\Big| \cdot \Big|E\Big[\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)}\pi(X_2)(r(X_2)-r(X_4))k_b(X_4-X_2)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}EZ \\
&\quad \cdot \Big(E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)}E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1, \varepsilon_2)\Big]\Big)^2 \\
\le&EZ \cdot \Big(E\Big[\frac{|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|}{g_{a_n}(X_1)}|E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1)|\Big]\Big)^2 \\
\le&EZ \cdot \Big(c_1 b^2 E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big] + c_2\frac{b^2}{a_n}E[|h_y(X,Y)|]\Big)^2 \\
\le&EZ \cdot \Big(c_1 b^2 + c_2\frac{b^2}{a_n}\Big)^2 E[h_y^2(X,Y)] \to 0.
\end{aligned}$$

$\underline{i_1 = j_2 \text{ bzw. } j_1 = i_2}$:
Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit lässt sich der Betrag des Anteils der

gemischten Summe schreiben als

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} EZ \cdot \Big| E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)(r(X_3)-r(X_1)) \\
&\quad \cdot \pi(X_3) k_b(X_1 - X_3)\Big]\Big| \cdot \Big| E\Big[\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_1)}{g_{a_n}(X_4)} \pi(X_5)(r(X_5)-r(X_4)) k_b(X_4 - X_5)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} EZ \\
&\quad \cdot \Big| E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2) E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1)) k_b(X_1 - X_3)|X_1, \varepsilon_2)\Big]\Big| \\
&\quad \cdot \Big| E\Big[\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_1)}{g_{a_n}(X_4)} E(\pi(X_5)(r(X_5)-r(X_4)) k_b(X_4 - X_5)|X_4, \varepsilon_1)\Big]\Big| .
\end{aligned}
$$

Verwende nun Lemma A.2, um den Betrag des Anteils der Summe abzuschätzen durch

$$
\begin{aligned}
&EZ \cdot E\Big[\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} |h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)| |E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1)) k_b(X_1 - X_3)|X_1)|\Big] \\
&\quad \cdot E\Big[\frac{|h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_1)|}{g_{a_n}(X_4)} |E(\pi(X_5)(r(X_5)-r(X_4)) k_b(X_4 - X_5)|X_4)|\Big] \\
\leq& EZ \cdot \Big(b^2 c_1 E\Big[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)| \frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)}\Big] + c_2 \frac{b^2}{a_n} E[|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|]\Big) \\
&\quad \cdot \Big(b^2 c_1 E\Big[|h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_1)| \frac{|g(X_4)|}{g_{a_n}(X_4)}\Big] + c_2 \frac{b^2}{a_n} E[|h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_1)|]\Big) \\
\leq& EZ \cdot \Big(b^2 c_1 + c_2 \frac{b^2}{a_n}\Big)^2 \big(E[|h_y(X, Y)|]\big)^2 \to 0.
\end{aligned}
$$

<u>$i_1 = l_2$ bzw. $l_1 = i_2$:</u>
Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit kann man den Betrag des zugehörigen Anteil der gemischten Summe schreiben als

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} (EZ)^2 \cdot \Big| E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)} (r(X_3)-r(X_1)) \\
&\quad \cdot \pi(X_3) k_b(X_1 - X_3) \frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)} \pi(X_1)(r(X_1)-r(X_4)) k_b(X_4 - X_1)\Big]\Big| \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} (EZ)^2 \\
&\quad \cdot \Big| E\Big[\frac{h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)}{g_{a_n}(X_1)} E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1)) k_b(X_1 - X_3)|X_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5) \\
&\quad \cdot \pi(X_1) E\Big(\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)} (r(X_1)-r(X_4)) k_b(X_4 - X_1) \Big| X_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5\Big)\Big]\Big| .
\end{aligned}
$$

Mit Lemma A.2 und Lemma A.5 schätzt man dies ab durch

$$\begin{aligned}
&(EZ)^2 \cdot E\Big[\frac{|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)|}{g_{a_n}(X_1)}|E(\pi(X_3)(r(X_3)-r(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1)| \\
&\quad \cdot \Big|E\Big(\frac{h_y(X_4, r(X_4)+\varepsilon_5)}{g_{a_n}(X_4)}(r(X_1)-r(X_4))k_b(X_4-X_1)\Big|X_1,\varepsilon_5\Big)\Big|\Big] \\
\leq &(EZ)^2 \cdot E\Big[\Big(c_1 b^2\frac{|g(X_1)|}{g_{a_n}(X_1)} + c_2\frac{b^2}{a_n}\Big)|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_2)| \\
&\quad \cdot \Big(\bar{c}_1 b|h_y(X_1, r(X_1)+\varepsilon_5)| + \bar{c}_2 b^2\Big)\Big] \\
\leq &(EZ)^2 \cdot \Big(c_1\bar{c}_1 b^3 E[h_y^2(X,Y)] + c_1\bar{c}_2 b^4 E[|h_y(X,Y)|] + c_2\bar{c}_1\frac{b^3}{a_n}E[h_y^2(X,Y)] \\
&\quad + c_2\bar{c}_2\frac{b^4}{a_n}E[|h_y(X,Y)|]\Big) \to 0.
\end{aligned}$$

Für vier bzw. drei verschiedene Indices ähnelt die Vorgehensweise der hier vorgestellten. Daher wird dieser Beweisteil nicht weiter ausgeführt. □

Lemma A.9. *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 gilt*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&-\iiint \pi(z)h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(x-X_l)}{g_{a_n}(x)}p(x)p(z)f(u)\,dxdzdu\Big) = o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Beweis. Wie in Lemma A.7 fasse man das Dreifachintegral als bedingten Erwartungswert

$$E\Big(Z_j\frac{h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_l)\Big|X_l\Big) = EZE\Big(\frac{h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)}{g_{a_n}(X_i)}k_b(X_i-X_l)\Big|X_l\Big)$$

mit verschiedenen Indices i, j und l auf. Schreibe dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&-\iiint \pi(z)h_y(x, r(x)+u)\frac{k_b(x-X_l)}{g_{a_n}(x)}p(x)p(z)f(u)\,dxdzdu\Big) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} Z_i h_y(X_i, Y_i)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} &\text{(A.10)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} Z_l h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_l)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} &\text{(A.11)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j:i\neq j,\\ j\neq l,i\neq l}}\Big(Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \\
&\quad - E\Big(Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)}\Big|X_l\Big)\Big) &\text{(A.12)}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} Z_l\varepsilon_l\frac{3n-2}{n^2}E\Big(Z_j h_y(X_i, r(X_i)+\varepsilon_j)\frac{k_b(X_i-X_l)}{g_{a_n}(X_i)}\Big|X_l\Big). &\text{(A.13)}
\end{aligned}$$

Setze abkürzend

$$\tilde{\Gamma}_{i,j,l} := Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \frac{k_b(X_i - X_l)}{g_{a_n}(X_i)} - E\Big(Z_j h_y(X_i, r(X_i) + \varepsilon_j) \frac{k_b(X_i - X_l)}{g_{a_n}(X_i)} \Big| X_l \Big).$$

Für die Terme (A.10), (A.11) und (A.13) benutze man die gleichen Abschätzungen wie in Lemma A.7. Um (A.12) $= o_p(n^{-1/2})$ nachzuweisen, zeige man wie dort $nE[(\text{A.12})^2] = o(1)$.

$$n \cdot E[(\text{A.12})^2] = \frac{1}{n^5} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} E[Z_l \varepsilon_l^2 (\tilde{\Gamma}_{i,j,l})^2] \tag{A.14}$$

$$+ \frac{1}{n^5} \sum E[Z_{l_1} \varepsilon_{l_1} \tilde{\Gamma}_{i_1,j_1,l_1} \cdot Z_{l_2} \varepsilon_{l_2} \tilde{\Gamma}_{i_2,j_2,l_2}]. \tag{A.15}$$

Die zweite Summe erstreckt sich dabei über diejenigen i_1, j_1, l_1, i_2, j_2, l_2, für die i_1, j_1 und l_1 verschieden sind, i_2, j_2 und l_2 verschieden sind und $(i_1, j_1, l_1) \neq (i_2, j_2, l_2)$ gilt. Den Term (A.14) schätze man wie folgt ab

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)}{n^4} \sigma^2 E[Z_3 (\tilde{\Gamma}_{1,2,3})^2] \\
\leq &\frac{K^2}{n^2 b^2 a_n^2} \sigma^2 E[(|h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)| + E(|h_y(X_1, r(X_1) + \varepsilon_2)||X_3))^2] \\
\leq &\frac{K^2 \sigma^2}{n^2 b^2 a_n^2} 4E[h_y^2(X, Y)] \to 0.
\end{aligned}$$

Unterscheide für (A.15) nun folgende Fälle:
<u>6 verschiedene Indices:</u>
Wegen Unabhängigkeit erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5} n \big(E[Z_l \varepsilon_l \tilde{\Gamma}_{i,j,l}] \big)^2 \\
= &\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5} n \big(E\varepsilon \big)^2 \big(Z_l E \tilde{\Gamma}_{i,j,l} \big)^2 = 0.
\end{aligned}$$

<u>5 verschiedene Indices:</u>
<u>$i_1 = i_2$:</u>
Auch hier liefert die Unabhängigkeit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} (E\varepsilon)^2 E[Z_3 \tilde{\Gamma}_{1,2,3} Z_5 \tilde{\Gamma}_{1,4,5}] = 0.$$

<u>$j_1 = j_2$:</u>
Wegen Unabhängigkeit wird der entsprechende Anteil der gemischten Summe zu

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} (E\varepsilon)^2 E[Z_3 \tilde{\Gamma}_{1,2,3} Z_5 \tilde{\Gamma}_{4,2,5}] = 0.$$

<u>$l_1 = l_2$:</u>
Schreibe den zu untersuchenden Anteil der gemischten Summe als

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} E[Z_3 \varepsilon_3^2 \tilde{\Gamma}_{1,2,3} \tilde{\Gamma}_{4,5,3}] \\
= &\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4} \sigma^2 E[\pi(X_3) E(\tilde{\Gamma}_{1,2,3}|X_3) E(\tilde{\Gamma}_{4,5,3}|X_3)] = 0.
\end{aligned}$$

$\underline{i_1 = j_2 \text{ bzw. } i_2 = j_1:}$
Forme den zugehörigen Teil der gemischten Summe mit Hilfe der Unabhängigkeit um zu

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E\varepsilon)^2 E[Z_3\tilde{\Gamma}_{1,2,3}Z_5\tilde{\Gamma}_{4,1,5}] = 0.$$

$\underline{i_1 = l_2 \text{ bzw. } i_2 = l_1:}$
Für den entsprechenden Anteil der gemischten Summe erhält man wegen Unabhängigkeit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}(E\varepsilon)^2 E[Z_3\tilde{\Gamma}_{1,2,3}Z_1\tilde{\Gamma}_{4,5,1}] = 0.$$

$\underline{j_1 = l_2 \text{ bzw. } j_2 = l_1:}$
Wegen Unabhängigkeit lässt sich der zugehörige Anteil schreiben als

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}E[Z_3\varepsilon_3\tilde{\Gamma}_{1,2,3}Z_2\varepsilon_2\tilde{\Gamma}_{4,5,2}] \\
=&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^4}E\varepsilon E[Z_3\tilde{\Gamma}_{1,2,3}Z_2\varepsilon_2\tilde{\Gamma}_{4,5,2}] = 0.
\end{aligned}$$

Die anderen Anteile mit vier bzw. drei verschiedenen Indices schätze man betraglich wie den Term (A.14) ab. Insgesamt folgt damit die Behauptung. $\square$

Anhang B

Konvergenz von $\hat{E}$

Heuristisch ist klar, dass $\hat{E}$ stochastisch gegen E konvergiert. Den Beweis dafür möchte ich nun an dieser Stelle nachholen. Dazu zunächst einige Hilfsaussagen:

Lemma B.1. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$|E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1))k_b(X_1 - X_2)|X_1)| \leq c_\varkappa b^2$$

und

$$E(\pi(X_2)|\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1)|k_b(X_1 - X_2)|X_1) \leq \bar{c}_\varkappa b$$

mit positiven Konstanten $c_\varkappa$ und $\bar{c}_\varkappa$.

Beweis. Wie üblich schreibe man den bedingten Erwartungswert als Integral, substituiere und entwickle $\varkappa$ und g

$$\begin{aligned}
&|E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1))k_b(X_1 - X_2)|X_1)| \\
\leq &\int |g(X_1 + bu) - g(X_1)||\varkappa(X_1 + bu) - \varkappa(X_1)|k(u)du \\
&+ |g(X_1)|\Big|\int (\varkappa(X_1 + bu) - \varkappa(X_1))k(u)du\Big| \\
\leq &L_g L_\varkappa b^2 \int u^2 k(u)du + C_p\Big|\varkappa'(X_1)b\int uk(u)du\Big| \\
&+ C_p b\Big|\int\int_0^1 (\varkappa'(X_1 + tbu) - \varkappa'(X_1))dtuk(u)du\Big| \\
\leq &L_g L_\varkappa b^2 \int u^2 k(u)du + C_p \frac{L'_\varkappa}{2} b^2 \int u^2 k(u)du.
\end{aligned}$$

Mit $c_\varkappa := \left(L_g L_\varkappa + \frac{C_p}{2}L'_\varkappa\right)\int u^2 k(u)du$ folgt der erste Teil der Behauptung. Ferner schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&E(\pi(X_2)|\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1)|k_b(X_1 - X_2)|X_1) \\
= &\int g(X_1 + bu)|\varkappa(X_1 + bu) - \varkappa(X_1)|k(u)du \leq C_p L_\varkappa b \int |u|k(u)du.
\end{aligned}$$

Mit $\bar{c}_\varkappa := C_p L_\varkappa \int |u|k(u)du$ ergibt sich der zweite Teil der Behauptung. □

Lemma B.2. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j|h(X_j,Y_j)|k_b(X_i-X_j)=O_p(1).$$

Beweis. Ergänze zunächst $E(|h(X_j,Y_j)||X_j)$. Das liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j|h(X_j,Y_j)|k_b(X_i-X_j)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j(|h(X_j,Y_j)|-E(|h(X_j,Y_j)||X_j))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jE(|h(X_j,Y_j)||X_j)k_b(X_i-X_j).
\end{aligned}$$

Wegen (B.h)(iii) und der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte gilt auch $E(|h(X_j,Y_j)||X_j)\leq E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)^{1/2}\leq C_h^{1/2}$. Daher kann man den zweiten Term abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jE(|h(X_j,Y_j)||X_j)k_b(X_i-X_j)\\
\leq&\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jk_b(X_i-X_j)\\
\leq&\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}(\hat{g}(X_i)-g(X_i))+\frac{C_h^{1/2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}\\
\leq&C_h^{1/2}a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{g}(X_i)-g(X_i)|+C_h^{1/2}=O_p(1).
\end{aligned}$$

Untersuche nun

$$\begin{aligned}
&E\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g_{a_n}(X_i)}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_j(|h(X_j,Y_j)|-E(|h(X_j,Y_j)||X_j))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{g_{a_n}^2(X_i)}E\big((|h(X_j,Y_j)|-E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)k_b^2(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{n^4}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ j_1\neq i_1,j_2\neq i_2}}\frac{Z_{j_1}Z_{j_2}}{g_{a_n}(X_{i_1})g_{a_n}(X_{i_2})}E\big((|h(X_{j_1},Y_{j_1})|-E(|h(X_{j_1},Y_{j_1})||X_{j_1}))\\
&\cdot(|h(X_{j_2},Y_{j_2})|-E(|h(X_{j_2},Y_{j_2})||X_{j_2}))\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)k_b(X_{i_1}-X_{j_1})k_b(X_{i_2}-X_{j_2}).
\end{aligned}$$

Den ersten Term schätze man wie üblich ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{Z_j}{g_{a_n}^2(X_i)}E\big((|h(X_j,Y_j)|-E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)k_b^2(X_i-X_j)\\
\leq&\frac{K^2}{n^2b^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\big((|h(X_j,Y_j)|-E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|X_j\big).
\end{aligned}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\big((|h(X_j,Y_j)| - E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|X_j\big)\\ =&E[(|h(X,Y)| - E(|h(X,Y)||X))^2] + o_p(1) \leq E[h^2(X,Y)] + o_p(1) = O_p(1).\end{aligned}$$

Also ergibt sich mit (B.a)

$$\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\neq i} \frac{Z_j}{g_{a_n}^2(X_i)} E\big((|h(X_j,Y_j)| - E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)k_b^2(X_i - X_j) = o_p(n^{-1}).$$

Der Anteil der gemischten Summe mit vier verschiedenen Indices verschwindet wegen Unabhängigkeit und bedingter Zentriertheit. Gleiches gilt für die Anteile mit $j_1 \neq j_2$. Den Term mit $j_1 = j_2$ schätze man wiederum wie den zweiten ab durch

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l \text{ versch.}} \frac{Z_j k_b(X_i - X_j)k_b(X_l - X_j)}{g_{a_n}(X_i)g_{a_n}(X_l)} E\big((|h(X_j,Y_j)| - E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|X_j\big)\\ \leq&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\big((|h(X_j,Y_j)| - E(|h(X_j,Y_j)||X_j))^2\big|X_j\big) = o_p(1).\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Lemma B.3. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$\Big|E\Big(\frac{g(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}(\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1))k_b(X_1 - X_2)\Big|X_2\Big)\Big| \leq c_1 b^2 + c_2\frac{b^2}{a_n}$$

mit positiven Konstanten c_1 und c_2.

Beweis. Schreibe auch hier den bedingten Erwartungswert als Integral und forme es um

$$\begin{aligned}&\Big|E\Big(\frac{g(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}(\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1))k_b(X_1 - X_2)\Big|X_2\Big)\Big|\\ =&\Big|\int \frac{g(X_2 + bu)p(X_2 + bu)}{g_{a_n}^2(X_2 + bu)}(\varkappa(X_2) - \varkappa(X_2 + bu))k(u)du\Big|.\end{aligned}$$

Benutze nun die Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{p(X_2 + bu)g(X_2 + bu)}{g_{a_n}^2(X_2 + bu)} =& \frac{p(X_2)g(X_2)}{g_{a_n}^2(X_2)} + \frac{p(X_2)(g(X_2 + bu) - g(X_2))}{g_{a_n}(X_2)g_{a_n}(X_2 + bu)}\\ &-\frac{p(X_2)g(X_2)(g_{a_n}(X_2 + bu) - g_{a_n}(X_2))}{g_{a_n}^2(X_2)g_{a_n}(X_2 + bu)}\\ &-\frac{p(X_2)g(X_2 + bu)(g_{a_n}(X_2 + bu) - g_{a_n}(X_2))}{g_{a_n}^2(X_2 + bu)g_{a_n}(X_2)}\\ &+\frac{g(X_2 + bu)(p(X_2 + bu) - p(X_2))}{g_{a_n}^2(X_2 + bu)}.\end{aligned}$$

Benutzt man zusätzlich die Abschätzungen $\frac{g(x)}{g_{a_n}(x)} \leq 1$ und $\frac{p(x)}{g_{a_n}(x)} = \frac{g(x)}{g_{a_n}(X)\pi(x)} \leq c_\pi^{-1}$ sowie die vorausgesetzten Lipschitz-Bedingungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\Big|\int \frac{g(X_2+bu)p(X_2+bu)}{g_{a_n}^2(X_2+bu)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_2+bu))k(u)du\Big| \\
\leq&\Big|\frac{p(X_2)g(X_2)}{g_{a_n}^2(X_2)}\Big|\Big|\int \varkappa'(X_2)buk(u)du\Big| \\
&+\Big|\frac{p(X_2)g(X_2)}{g_{a_n}^2(X_2)}\Big|b\int\int_0^1 |\varkappa'(X_2+tbu)-\varkappa'(X_2)|dt|u|k(u)du \\
&+\frac{1}{c_\pi}\int\Big|\frac{g(X_2+bu)-g(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||\varkappa(X_2+bu)-\varkappa(X_2)|k(u)du \\
&+\frac{1}{c_\pi}\int\Big|\frac{g_{a_n}(X_2+bu)-g_{a_n}(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||\varkappa(X_2+bu)-\varkappa(X_2)|k(u)du \\
&+\frac{1}{c_\pi}\int\Big|\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big|\Big|\frac{g_{a_n}(X_2+bu)-g_{a_n}(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||\varkappa(X_2+bu)-\varkappa(X_2)|k(u)du \\
&+\int\Big|\frac{g(X_2+bu)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big|\Big|\frac{p(X_2+bu)-p(X_2)}{g_{a_n}(X_2+bu)}\Big||\varkappa(X_2+bu)-\varkappa(X_2)|k(u)du \\
\leq&\frac{1}{c_\pi}\frac{L'_\varkappa}{2}b^2\int u^2k(u)du+L_\varkappa\Big(\frac{3}{c_\pi}L_g+L_p\Big)\frac{b^2}{a_n}\int u^2k(u)du.
\end{aligned}$$

Mit $c_1 := \frac{L'_\varkappa}{2c_\pi}\int u^2k(u)du$ und $c_2 := L_\varkappa\big(\frac{3}{c_\pi}L_g+L_p\big)\int u^2k(u)du$ folgt die Behauptung. □

Jetzt zum eigentlichen Resultat:

Proposition B.4. *Unter den Voraussetzungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 gilt*

$$\hat{E}-E=o_p(1).$$

Beweis. Schreibe $\hat{E}$ als

$$\begin{aligned}
\hat{E} &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat{\varkappa}(X_i)}{\hat{\pi}_{a_n}(X_i)} \\
&= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\hat{p}(X_i)\frac{\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}Z_jh(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)k_b(X_i-X_j)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} \\
&= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}Z_jh(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))k_b(X_i-X_j) \\
&\quad+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)}Z_jh(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)k_b(X_i-X_j) =: E_1+E_2.
\end{aligned}$$

Betrachte zunächst den zweiten Term. Ergänze ihn zu

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}Z_j(h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}Z_j(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\\
&+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\hat{g}(X_i)\\
&-\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\frac{1}{n}k_b(0) =: \sum_{\nu=1}^4 E_{2,\nu}.
\end{aligned}
$$

Benutze nun die Darstellung

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} &\leq \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-\frac{p(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}+\frac{\hat{p}(X_i)-p(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&=: \frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\pi(X_i)}+R_i.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 3.5 und Lemma 3.4 gilt

$$
\sup_{1\leq i\leq n}|R_i|\leq c_\pi^{-1}a_n^{-1}\sup_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)|+a_n^{-1}\sup_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i)-p(X_i)|=o_p(n^{-1/4}).
$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
|E_{2,4}| &\leq \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{K}{nba_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\pi(X_i)}\varkappa(X_i)+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{K}{nba_n}\sup_{1\leq i\leq n}|R_i|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varkappa(X_i)\\
&\leq \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{K}{nba_n}\Big(\frac{1}{c_\pi}+\sup_{1\leq i\leq n}|R_i|\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\varkappa(X_i)=o_p(n^{-1/2})
\end{aligned}
$$

wegen (B.a), Lemma 3.4 und Lemma 3.5. Schreibe nun $E_{2,3}$ als

$$
\begin{aligned}
E_{2,3} &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_iR_i\frac{\hat{g}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\pi(X_i)}\frac{\Delta(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\\
&\quad-\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\pi(X_i)}\frac{g(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_i)}\varkappa(X_i)\\
&\quad+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)\varkappa(X_i)\\
&\quad+\frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\pi(X_i)}\Big(\frac{g(X_i)}{g_{a_n}(X_i)}-1\Big)\varkappa(X_i)+\Big(\frac{1}{\bar{Z}_n}-\frac{1}{EZ}\Big)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{Z_i}{\pi(X_i)}\varkappa(X_i)\\
&\quad+\frac{1}{EZ}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{Z_i}{\pi(X_i)}\varkappa(X_i)-E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\Big)+\frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]\\
&=: \sum_{l=1}^8\tilde{E}_l.
\end{aligned}
$$

$\tilde{E}_8$ ist nach Definition gleich E. Nach Lemma 3.4 und Lemma 3.5 gilt

$$|\tilde{E}_1| \le \frac{1}{\bar{Z}_n} \sup_{1\le i\le n} |R_i| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa(X_i) = o_p(n^{-1/4})$$

und

$$|\tilde{E}_2| \le \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{c_\pi} a_n^{-1} \max_{1\le i\le n} |\Delta_{a_n}(X_i)| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa(X_i) = o_p(n^{-1/4})$$

sowie

$$|\tilde{E}_3| \le \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{c_\pi} a_n^{-1} \max_{1\le i\le n} |\Delta_{a_n}(X_i)| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa(X_i) = o_p(n^{-1/4}).$$

Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen und $\frac{1}{\bar{Z}_n} = \frac{1}{EZ} + O_p(n^{-1/2})$ folgt direkt $\tilde{E}_6 = O_p(n^{-1/2}) = o_p(n^{-1/4})$. Zudem liefert der Zentrale Grenzwertsatz $\tilde{E}_7 = O_p(n^{-1/2}) = o_p(n^{-1/4})$. In den verbleibenden Termen verwende man die Chebyshev-Ungleichung, (B.ag$\varkappa$) und $\frac{1}{\bar{Z}_n} = O_p(1)$. Das liefert

$$\begin{aligned} P(n^{1/2}\bar{Z}_n|\tilde{E}_4| > \varrho) &\le \frac{n^{1/2}}{\varrho} E\Big[Z\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)\pi(X)}\Big|\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)} - 1\Big| 1_{\{g(X)<a_n\}}|\varkappa(X)|\Big] \\ &\le \frac{2}{\varrho c_\pi} n^{1/2} E[|\varkappa(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

und somit $\tilde{E}_4 = o_p(n^{-1/2})$. Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} P(n^{1/2}\bar{Z}_n|\tilde{E}_5| > \varrho) &\le \frac{n^{1/2}}{\varrho} E\Big[\frac{Z}{\pi(X)}\Big|\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)} - 1\Big| 1_{\{g(X)<a_n\}}|\varkappa(X)|\Big] \\ &\le \frac{2}{\varrho c_\pi} n^{1/2} E[|\varkappa(X)|1_{\{g(X)<a_n\}}] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

also $\tilde{E}_5 = o_p(n^{-1/2})$. Insgesamt erhält man $E_{2,3} = E + o_p(n^{-1/4})$.
Im Term $E_{2,2}$ schätze man ab

$$\begin{aligned} |E_{2,2}| &\le \frac{1}{\bar{Z}_n}\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_i Z_j \frac{p(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}(\varkappa(X_j) - \varkappa(X_i))k_b(X_i - X_j)\Big| \\ &\quad + \frac{1}{\bar{Z}_n}\sup_{1\le i\le n}|R_i|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_j|\varkappa(X_j) - \varkappa(X_i)|k_b(X_i - X_j). \end{aligned}$$

Mit Lemma B.1 folgt

$$\begin{aligned} &E\Big[\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_j|\varkappa(X_j) - \varkappa(X_i)|k_b(X_i - X_j)\Big] \\ =&\frac{n-1}{n} E[E(\pi(X_2)|\varkappa(X_2) - \varkappa(X_1)|k_b(X_1 - X_2)|X_1)] \le \bar{c}_\varkappa b = o(n^{-1/4}). \end{aligned}$$

Wegen $\sup_{1\le i\le n}|R_i| = o_p(n^{-1/4})$ erhält man also

$$\frac{1}{\bar{Z}_n}\sup_{1\le i\le n}|R_i|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i} Z_i Z_j|\varkappa(X_j) - \varkappa(X_i)|k_b(X_i - X_j) = o_p(n^{-1/2}).$$

Betrachte

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i}\frac{p(X_i)}{g_{a_n}^2(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))k_b(X_i-X_j)\Big)^2\Big]\\
=&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\neq i}E\Big[Z_iZ_j\frac{p^2(X_i)}{g_{a_n}^4(X_i)}(\varkappa(X_j)-\varkappa(X_i))^2k_b^2(X_i-X_j)\Big]\\
&+\frac{1}{n^4}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ j_1\neq i_1,j_2\neq i_2}}E\Big[Z_{i_1}Z_{j_1}\frac{p(X_{i_1})}{g_{a_n}^2(X_{i_1})}(\varkappa(X_{j_1})-\varkappa(X_{i_1}))k_b(X_{i_1}-X_{j_1})\\
&\quad\cdot Z_{i_2}Z_{j_2}\frac{p(X_{i_2})}{g_{a_n}^2(X_{i_2})}(\varkappa(X_{j_2})-\varkappa(X_{i_2}))k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\Big].
\end{aligned}
$$

Die erste Summe kann abgeschätzt werden durch

$$
\frac{1}{c_\pi^2 n}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}E[(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2]=\frac{1}{c_\pi^2 n}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}2(E[\varkappa^2(X)]-(E[\varkappa(X)])^2).
$$

Aufgrund von (B.a) und (B.$\varkappa$) ist dies jedoch gleich $o(n^{-1})$.
In der zweiten Summe unterscheide man wie gewohnt verschiedene Fälle:
<u>vier verschiedene Indices:</u> Für den entsprechenden Anteil der Summe ergibt sich aufgrund der Unabhängigkeit mit Hilfe von Lemma B.1

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}E\Big[Z_1Z_2\frac{p(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)Z_3Z_4\\
&\quad\cdot\frac{p(X_3)}{g_{a_n}^2(X_3)}(\varkappa(X_4)-\varkappa(X_3))k_b(X_3-X_4)\Big]\\
\leq&\Big(E\Big[\frac{\pi(X_1)p(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\Big]\Big)^2\\
\leq&c_\varkappa^2\frac{b^4}{a_n^2}\Big(E\Big[\frac{g(X)}{g_{a_n}(X)}\Big]\Big)^2\leq c_\varkappa^2\frac{b^4}{a_n^2}.
\end{aligned}
$$

Nach (B.a)(ii) ist dies jedoch gleich $o(n^{-1})$.
<u>drei verschiedene Indices:</u>
<u>$i_1=i_2$:</u> Lemma B.1 liefert auch hier für den Betrag des entsprechenden Anteils der Summe

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}n^{-1}\Big|E\Big[\pi(X_1)\frac{p^2(X_1)}{g_{a_n}^4(X_1)}E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))\pi(X_3)\\
&\quad\cdot(\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)k_b(X_1-X_3)|X_1)\Big]\Big|\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}n^{-1}\Big|E\Big[\frac{g(X_1)p(X_1)}{g_{a_n}^4(X_1)}E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\\
&\quad\cdot E(\pi(X_3)(\varkappa(X_3)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_3)|X_1)\Big]\Big|\\
\leq&\frac{c_\varkappa^2}{c_\pi}n^{-1}\frac{b^4}{a_n^2}=o(n^{-2}).
\end{aligned}
$$

$j_1 = j_2$: Mit Lemma B.3 schätze man den Betrag des zu untersuchenden Teils der Summe ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}n^{-1}\Big|E\Big[\pi(X_1)\pi(X_2)\pi(X_3)\frac{p(X_1)p(X_3)}{g_{a_n}^2(X_1)g_{a_n}^2(X_3)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))\\
&\qquad\cdot(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_3))k_b(X_1-X_2)k_b(X_3-X_2)\Big]\Big|\\
\leq& n^{-1}E\Big[\Big|E\Big(\frac{g(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)\Big|X_2\Big)\Big|\\
&\qquad\cdot\Big|E\Big(\frac{g(X_3)}{g_{a_n}^2(X_3)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_3))k_b(X_3-X_2)\Big|X_2\Big)\Big|\Big]\\
\leq& n^{-1}\Big(c_1b^2+c_2\frac{b^2}{a_n}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Nach (B.a) ist dies gleich $o(n^{-2})$.
$i_1 = j_2$ bzw. $i_2 = j_1$: Man verwende Lemma B.1 und Lemma B.3, um den Betrag des hier betrachteten Anteils wie folgt umzuformen:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}n^{-1}\Big|E\Big[\pi(X_1)\pi(X_2)\pi(X_3)\frac{p(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}\frac{p(X_3)}{g_{a_n}^2(X_3)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))\\
&\qquad\cdot k_b(X_1-X_2)(\varkappa(X_1)-\varkappa(X_3))k_b(X_3-X_1)\Big]\Big|\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}n^{-1}\Big|E\Big[\frac{g(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}E(\pi(X_2)(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))k_b(X_1-X_2)|X_1)\\
&\qquad\cdot E\Big(\frac{g(X_3)}{g_{a_n}^2(X_3)}(\varkappa(X_1)-\varkappa(X_3))k_b(X_1-X_3)\Big|X_1\Big)\Big]\Big|\\
\leq& n^{-1}\bar{c}_\varkappa\frac{b^2}{a_n}\Big(c_1b^2+c_2\frac{b^2}{a_n}\Big)=o(n^{-2}).
\end{aligned}$$

zwei verschiedene Indices: Zu untersuchen ist lediglich der Anteil mit $i_1 = j_2$ und $i_2 = j_1$. Für den Betrag dieses Anteils erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{n}n^{-2}\Big|E\Big[\pi(X_1)\pi(X_2)\frac{p(X_1)}{g_{a_n}^2(X_1)}\frac{p(X_2)}{g_{a_n}^2(X_2)}(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2k_b^2(X_1-X_2)\Big]\Big|\\
\leq& n^{-1}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}E[(\varkappa(X_2)-\varkappa(X_1))^2]\leq n^{-1}\frac{K^2}{nb^2a_n^2}2(E[\varkappa^2(X)]-(E[\varkappa(X)])^2).
\end{aligned}$$

Wegen (B.a)(i) und (B.$\varkappa$) ist dies jedoch gleich $o(n^{-1})$.
Insgesamt folgt also $E_{2,2} = o_p(n^{-1/2})$.
Schließlich untersuche man

$$\begin{aligned}
&E((\bar{Z}_nE_{2,1})^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\neq i}Z_iZ_j\frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^4(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
&+\frac{1}{n^4}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)\\ j_1\neq i_1,j_2\neq i_2}}Z_{i_1}Z_{j_1}\frac{\hat{p}(X_{i_1})}{\hat{g}_{a_n}^2(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})Z_{i_2}Z_{j_2}\frac{\hat{p}(X_{i_2})}{\hat{g}_{a_n}^2(X_{i_2})}\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})E((h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})-\varkappa(X_{j_2}))|\mathbf{X},\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Die erste Summe schätze man ab durch

$$\begin{aligned}
&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\bigl(c_\pi + \sup_{1\le i\le n}|R_i|\bigr)^2 n^{-1}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\ne i}(E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j) - \varkappa^2(X_j))\\
\le&\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\bigl(c_\pi^2 + \sup_{1\le i\le n}|R_i|\bigr)n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j).
\end{aligned}$$

Wegen (B.hℓ) liefert das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(h^2(X_j,Y_j)\ell^2(\varepsilon_j)|X_j) = E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)] + o_p(1) = O_p(1).$$

Mit (B.a)(i) und $\sup_{1\le i\le n}|R_i| = o_p(n^{-1/4})$ ergibt sich also

$$\frac{1}{n^4}\sum_{i,j:j\ne i} Z_iZ_j\frac{\hat p^2(X_i)}{\hat g_{a_n}^4(X_i)}k_b^2(X_i-X_j)E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = o_p(n^{-1}).$$

Sobald j_1 und j_2 verschieden sind, gilt ferner

$$\begin{aligned}
&E((h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})-\varkappa(X_{j_2}))|\mathbf{X},\mathbf{Z})\\
=&(E(h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})|X_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(E(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})|X_{j_2})-\varkappa(X_{j_2})) = 0.
\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\frac{1}{n^4}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\ne(i_2,j_2)\\ j_1\ne i_1,j_2\ne i_2}} Z_{i_1}Z_{j_1}\frac{\hat p(X_{i_1})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})Z_{i_2}Z_{j_2}\frac{\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}\\
&\quad\cdot k_b(X_{i_2}-X_{j_2})E((h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})-\varkappa(X_{j_2}))|\mathbf{X},\mathbf{Z})\Bigr|\\
=&\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,l\text{ versch.}} Z_iZ_jZ_l\frac{\hat p(X_i)}{\hat g_{a_n}^2(X_i)}\frac{\hat p(X_l)}{\hat g_{a_n}^2(X_l)}k_b(X_i-X_j)k_b(X_l-X_j)\\
&\quad\cdot E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j)\\
\le&\bigl(c_\pi^{-1}+\sup_{1\le i\le n}|R_i|\bigr)^2\frac{K^2}{nb^2a_n^2}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j).
\end{aligned}$$

Wegen (B.hℓ) gilt

$$\begin{aligned}
E[E((h(X,Y)\ell(\varepsilon)-\varkappa(X))^2|X)] &= E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)] - E[\varkappa^2(X)]\\
&\le E[h^2(X,Y)\ell^2(\varepsilon)] < \infty.
\end{aligned}$$

Das schwache Gesetz der großen Zahlen liefert also

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E((h(X_j,Y_j)\ell(\varepsilon_j)-\varkappa(X_j))^2|X_j) = E[(h(X,Y)\ell(\varepsilon)-\varkappa(X))^2]+o_p(1) = O_p(1).$$

Man erhält daher mit (B.a)(i) und $\sup_{1\le i\le n}|R_i| = o_p(n^{-1/4})$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^4}\sum_{\substack{i_1,j_1,i_2,j_2:(i_1,j_1)\ne(i_2,j_2)\\ j_1\ne i_1,j_2\ne i_2}} Z_{i_1}Z_{j_1}\frac{\hat p(X_{i_1})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_1})}k_b(X_{i_1}-X_{j_1})Z_{i_2}Z_{j_2}\frac{\hat p(X_{i_2})}{\hat g_{a_n}^2(X_{i_2})}k_b(X_{i_2}-X_{j_2})\\
&\quad\cdot E((h(X_{j_1},Y_{j_1})\ell(\varepsilon_{j_1})-\varkappa(X_{j_1}))(h(X_{j_2},Y_{j_2})\ell(\varepsilon_{j_2})-\varkappa(X_{j_2}))|\mathbf{X},\mathbf{Z}) = o_p(1).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.3 folgt also $E_{2,1} = o_p(1)$ und somit auch $E_2 = E + o_p(1)$.
Vertausche im Term E_1 die Summationsreihenfolge und benutze die Hölder-Ungleichung für Summen. Das führt zu

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{\bar{Z}_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h(X_j,Y_j)(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\\
&\leq \frac{1}{\bar{Z}_n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2\Big)^{1/2}\\
&\quad \cdot\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h^2(X_j,Y_j)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Im Folgenden zeige ich nun, dass gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h^2(X_j,Y_j)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2 = O_p(1)$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j) - \ell(\varepsilon_j))^2 = o_p(1).$$

Wegen (B.h)(iii) erhält man

$$\begin{aligned}
&E\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h^2(X_j,Y_j)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2\Bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Bigg)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{j=1} nZ_j E(h^2(X_j,Y_j)|X_j)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2\\
\leq&\frac{C_h}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{1}{n^2}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)} k^2_b(X_i - X_j)\\
&+\frac{C_h}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,l:i\neq l\\ i\neq j,l\neq j}} Z_i Z_l \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_i - X_j)\frac{\hat{p}(X_l)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)} k_b(X_l - X_j).
\end{aligned}$$

Mit der Darstellung

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} &= \frac{p(X_i)}{g_{a_n}(X_i)} + \frac{\hat{p}(X_i) - p(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)} - \frac{p(X_i)\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i) g_{a_n}(X_i)}\\
&\leq c_\pi^{-1} + a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\hat{p}(X_i) - p(X_i)| + c_\pi^{-1} a_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\Delta_{a_n}(X_i)| =: c_\pi^{-1} + \tilde{R}
\end{aligned}$$

und Lemma 3.4 und Lemma 3.5 kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{1}{n^2}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^4_{a_n}(X_i)} k^2_b(X_i - X_j) \leq \frac{K^2}{nb^2 a_n^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j:j\neq i} Z_i Z_j \frac{\hat{p}^2(X_i)}{\hat{g}^2_{a_n}(X_i)}\\
\leq&\frac{K^2}{nb^2 a_n^2}(c_\pi^{-1} + \tilde{R})^2 = o_p(1).
\end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,l:i\neq l\\ i\neq j,l\neq j}} Z_i Z_l \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j) \frac{\hat{p}(X_l)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_l - X_j)\\
\leq &(c_\pi^{-1} + \tilde{R})^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_l \frac{1}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_l - X_j)\\
= &(c_\pi^{-1} + \tilde{R})^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_l \frac{1}{g_{a_n}(X_i) g_{a_n}(X_l)} \Big(1 - \frac{\Delta_{a_n}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)}\\
&- \frac{\Delta_{a_n}(X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_l)} + \frac{\Delta_{a_n}(X_i)\Delta_{a_n}(X_l)}{\hat{g}_{a_n}(X_i)\hat{g}_{a_n}(X_l)}\Big) k_b(X_i - X_j) k_b(X_l - X_j)\\
\leq &(c_\pi^{-1} + \tilde{R})^2 \Big(1 + 2a_n^{-1} \max_{1\leq i\leq n} |\Delta_{a_n}(X_i)| + a_n^{-2} \Big(\max_{1\leq i\leq n} |\Delta_{a_n}(X_i)|\Big)^2\Big)\\
&\qquad \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_l \frac{1}{g_{a_n}(X_i) g_{a_n}(X_l)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_l - X_j).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big|\frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_l \frac{1}{g_{a_n}(X_i) g_{a_n}(X_l) k_b(X_i - X_j) k_b(X_l - X_j)}\Big|\Big]\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E\Big[E\Big(\frac{\pi(X_1)}{g_{a_n}(X_1)} k_b(X_1 - X_2)\Big| X_2\Big) E\Big(\frac{\pi(X_3)}{g_{a_n}(X_3)} k_b(X_3 - X_2)\Big| X_2\Big)\Big]\\
=&\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E\Big[\Big(\int \frac{g(X_2 + bu)}{g_{a_n}(X_2 + bu)} k(u) du\Big)^2\Big] \leq 1
\end{aligned}$$

gilt

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l \text{ versch.}} Z_i Z_l \frac{1}{g_{a_n}(X_i) g_{a_n}(X_l)} k_b(X_i - X_j) k_b(X_l - X_j) = O_p(1).$$

Daher folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,l:i\neq l\\ i\neq j,l\neq j}} Z_i Z_l \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j) \frac{\hat{p}(X_l)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_l - X_j) = O_p(1)$$

und somit

$$E\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h^2(X_j, Y_j) \Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2 \Big| \mathbf{X}, \mathbf{Z}\Big) = O_p(1)$$

mit Lemma 3.4 und Lemma 3.5. Der zweite Teil von Lemma 3.3 liefert also

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j h^2(X_j, Y_j) \Big(\frac{1}{n}\sum_{i:i\neq j} Z_i \frac{\hat{p}(X_i)}{\hat{g}_{a_n}^2(X_i)} k_b(X_i - X_j)\Big)^2 = O_p(1).$$

Schätze nun den noch fehlenden Term mit Hilfe von Lemma 3.2 ab gemäß

$$\begin{aligned}
&E\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
\leq&\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell_n(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j,\hat{\varepsilon}_{-j}))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
&+\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big).
\end{aligned}$$

Wie in Satz 4.13 dargelegt, hat man die Abschätzung

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\leq C\Big(\frac{1}{n^2\bar{Z}_n\beta^4\alpha_n^2}+\frac{1}{n^{6/5}\beta^5\alpha_n}\frac{1}{n^{4/5}b^2a_n^2}\Big).$$

Nach (B.α) ist dies gleich $o_p(n^{-1})$. Mit einer Taylor-Entwicklung und Abschätzung (L1) aus [Sch93] ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell'_n(\tilde{Z}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}))^2(\hat{\varepsilon}_j-\varepsilon_j)^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\leq\frac{c_0^2}{\beta^4}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\Big(\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)\\
=&\frac{c_0^2}{n^{1/2}\beta^4}n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}E\Big(\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big).
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Proposition 3.6 für $M(X)=1$ gilt

$$n^{-2/5}\sum_{j=1}^{n}E\Big(\big(\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)\big)^2\Big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\Big)=o_p(1).$$

Wegen (B.β) folgt also

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\hat{\varepsilon}_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(1).$$

Im letzten Term bilde man wegen Unabhängigkeit der ε_j den bedingten Erwartungswert, indem man zuerst über ε_j ausintegriere und anschließend über die restlichen

ε_i. Da $\hat{\varepsilon}_{-j}$ nicht mehr von ε_j abhängt, erhält man mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)\\
=&\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&\frac{6}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
&+\frac{6}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg).
\end{aligned}$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.13 schätzt man ab

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\sup_{x\in\mathbb{R}}(\ell_n(x,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell_n(x,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}))^2\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\\
\le&C\Big(\frac{1}{n^2\bar{Z}_n\beta^4\alpha_n^2}+\frac{1}{n^{6/5}\beta^5\alpha_n}\frac{1}{n^{4/5}b^2a_n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Wegen (B.α) ist dies gleich $o_p(n^{-1})$.
Mit $\Sigma_{n,1}$ und $\Sigma_{n,2}$ wie in [Sch93] folgt außerdem

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\bigg(\int(\ell_n(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\ell(u))^2 f(u)du\bigg|\mathbf{X},\mathbf{Z}\bigg)\le 2\bar{Z}_n(\Sigma_{n,1}+2\Sigma_{n,2}).$$

Nach Lemma 4.3 konvergiert dies jedoch stochastisch gegen Null. Daher gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j E\big((\ell_n(\varepsilon_j,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})-\ell(\varepsilon_j))^2\big|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)=o_p(1)$$

und somit auch

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j(\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j))^2=o_p(1).$$

Insgesamt folgt $E_1=o_p(1)$. Mit $E_2=E+o_p(1)$ ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung B.1. Für den Term $E_{2,1}$ wäre durch eine Modifikation des Beweises eine bessere Rate zu erzielen gewesen. Darauf habe ich jedoch verzichtet, da sich die Rate des Terms E_1 nicht verbessern lässt. Dies ist auch mit der Darstellung

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j) \;=\;& \hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)-\ell(\varepsilon_j)-\int\hat{\ell}(u-\delta_{nj})f(u)du\\
&+\int\big(\hat{\ell}(u-\delta_{nj})-\hat{\ell}(u)-\hat{\ell}\,'(u)\delta_{nj}\big)f(u)du\\
&+\int\hat{\ell}(u)f(u)du+\delta_{nj}\int\hat{\ell}\,'(u)f(u)du
\end{aligned}$$

nicht möglich, da für den Term $\int\hat{\ell}(u)f(u)du$ lediglich die Rate $o_p(1)$ erreicht werden kann.

Literaturverzeichnis

[AD-D00] Ash, R. B., Doléans-Dade, C. A., 2000. *Probability & Measure Theory.* Academic Press ,San Diego London, 2. Auflage.

[Bau02] Bauer, H., 2002. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Walter de Gruyter, 5. Auflage.

[Bic82] Bickel, P. J., 1982. On adaptive estimation. Ann. Statist. **10**, 647-671.

[BKRW93] Bickel, P. J., Klaassen, Ch. A. J., Ritov, Y., Wellner, J. A., 1993. *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore und London.

[Bos96] Bosq, D., 1996. *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes, Estimation and Prediction. Lecture Notes in Statistics 110.* Springer, New York.

[Che94] Cheng, P. E., 1994. Nonparametric Estimation of Mean Functionals With Data Missing at Random. J. Amer. Statist. Assoc. **89**, 81-87.

[Dur05] Durrett, Richard, 2005. *Probability: Theory an Examples*, Duxbury Advanced Series. Thomson Brooks/Cole, Belmont, 3. Auflage

[FHPS03] Forrester, J., Hooper, W., Peng, H., Schick, A., 2003. On the construction of efficient estimators in semiparametric models. Statist. Decisions **21**, 109-137.

[HMSW04] Härdle, W., Müller, M., Sperlich, S., Werwatz, A., 2004. *Nonparametric and Semiparametric Models*, Springer Series in Statistics. Springer, Berlin, 1. Auflage.

[Kop00] Kopka, H., 2000. *LATEX; Band 1: Einführung.* Addison-Wesley, 3. Auflage.

[Mue09] Müller, U. U., 2009. Estimating linear functionals in nonlinear regression with responses missing at random. Ann. Statist. **37**, 2245-2277.

[MG07] Mittelbach, F., Goossens, M., 2007. *Der LATEX-Begleiter.* Pearson Studium, 2. Auflage.

[MSW04] Müller, U. U., Schick, A., Wefelmeyer, W., 2004. Estimating linear functionals of the error distribution in nonparametric regression. J. Statist. Plann. Inference **119**, 75-93.

[MSW06] Müller, U. U., Schick, A., Wefelmeyer, W., 2006. Imputing responses that are not missing. Probability, Statistics and Modelling in Public Health, 350-363, Springer, New York.

[MSW07] Müller, U. U., Schick, A., Wefelmeyer, W., 2007. Estimating the error distribution function in semiparametric regression. Statist. Decisions **25**, 1-18.

[Pra83] Prakasa Rao, B. L. S., 1983. *Nonparametric Functional Estimation*, Probability and mathematical statistics. Academic Press, Orlando, 1. Auflage.

[Sch87] Schick, A., 1987. A Note on the construction of asymptotically linear estimators. J. Statist. Plann. Inference **16**, 89-105.

[Sch93] Schick, A., 1993. On efficient estimation in regression models. Ann. Statist. **21**, 1486-1521; Correction and addendum: **23** (1995) 1862-1863.

[Sch07] Schulz, M., 2007. Imputation von Zielvariablen in Regressionsmodellen. Diplomarbeit an der Universität zu Köln

[Vaa98] van der Vaart, A. W., 1998. *Asymptotic Statistics*, Cambridge series on statistical and probabilistic mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage.

[WJ95] Wand, M. P. , Jones, M. C., 1995. *Kernel Smoothing*, Monographs on Statistics and Applied Probability 60. Chapman & Hall, London, 1. Auflage.

[WR02] Wang, Q., Rao, J. N. K., 2002. Empirical Likelihood-Based Inference under Imputation for Missing Response Data. Ann. Statist. **30**, 896-924.

Liste der verwendeten Abkürzungen

Abkürzung	**definiert als**
p	Dichte von X
$k_b(y)$	$\frac{1}{b}k\left(\frac{y}{b}\right)$
$\hat{p}(x)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_b(x-X_i)$
$\pi(x)$	$P(Z=1\|X=x)=E(Z\|X=x)$
g	$p\cdot\pi$
$\hat{g}(x)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i k_b(x-X_i)$
$\Delta(x)$	$\hat{g}(x)-g(x)$
$\hat{\pi}(x)$	$\hat{g}(x)(\hat{p}(x))^{-1}$
$g_{a_n}(x)$	$\max\{a_n, g(x)\}$
$\hat{g}_{a_n}(x)$	$\max\{a_n, \hat{g}(x)\}$
$\Delta_{a_n}(x)$	$\hat{g}_{a_n}(x)-g_{a_n}(x)$
$\hat{\pi}_{a_n}(x)$	$\hat{g}_{a_n}(x)(\hat{p}(x))^{-1}$
$\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y},\boldsymbol{\varepsilon}$	$(X_1,\dots,X_n)^\top,(Z_1,\dots,Z_n)^\top,(Y_1,\dots,Y_n)^\top,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)^\top$
$\mathbf{Y}_{-j}$	entsteht aus $\mathbf{Y}$ durch Streichen von Y_j
$\mathbf{Y}_{-\{i,j\}}$	entsteht aus $\mathbf{Y}$ durch Streichen von Y_i und Y_j
$\hat{r}_{ni}$	$(\hat{g}(X_i))^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Z_jY_jk_b(X_i-X_j)$
$r_{a_n}(x)$	$r(x)g(x)(g_{a_n}(x))^{-1}$
$\hat{r}_{ni}^{(a)}$	$(\hat{g}_{a_n}(X_i))^{-1}\hat{r}_{ni}\hat{g}(X_i)$ $= (\hat{g}_{a_n}(X_i))^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Z_jY_jk_b(X_i-X_j)$
$\hat{r}_{nji}^{(a)}$	$E(\hat{r}_{nj}^{(a)}\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,j\}},\mathbf{Z})=E(\hat{r}_{nj}^{(a)}\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-i},\mathbf{Z})$
δ_{nj}	$\hat{r}_{nj}^{(a)}-r(X_j)$
$\bar{h}(\varepsilon)$	$E(h(X,Y)\|\varepsilon)$
$\bar{Z}_n$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$
$\chi(x)$	$E(h(X,Y)\|X=x)$
$\hat{\chi}_{a_n}(X_i)$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_jh(X_j,\hat{r}_{ni}^{(a)}+Y_j-\hat{r}_{nj}^{(a)})$
$\hat{H}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\chi}_{a_n}(X_i)$
f	Dichte von ε
σ^2	$E[\varepsilon^2]$
ℓ	$-\frac{f'}{f}$
J	$E[\ell^2(\varepsilon)]$
$\hat{\varepsilon}_i$	$Y_i-\hat{r}_{ni}^{(a)}$
$W_\beta(u)$	$\frac{1}{\beta}W\left(\frac{u}{\beta}\right)$
$\hat{f}(u)$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n\beta}\sum_{j=1}^{n} Z_jW\left(\frac{u-\hat{\varepsilon}_j}{\beta}\right)$
$\hat{f}_{\alpha_n}(u)$	$\alpha_n+\hat{f}(u)$
$\hat{f}'(u)$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n\beta^2}\sum_{j=1}^{n} Z_jW'\left(\frac{u-\hat{\varepsilon}_j}{\beta}\right)$
$\hat{\ell}(u)$	$-\hat{f}'(u)(\hat{f}_{\alpha_n}(u))^{-1}$
$\hat{\ell}'(u)$	Ableitung von $\hat{\ell}(u)$
$\hat{J}$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\hat{\ell}'(\hat{\varepsilon}_j)$
$\varkappa(X_i)$	$E(h(X_i,Y_i)\ell(\varepsilon_i)\|X_i)$
$\hat{\varkappa}_{ni}$	$(\hat{g}_{a_n}(X_i))^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Z_jh(X_j,Y_j)\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_j)k_b(X_i-X_j)$

$B(X_i)$	$\frac{\varkappa(X_i)}{\pi(X_i)}$
$\hat{B}_{ni}$	$(\hat{\pi}_{a_n}(X_i))^{-1}\hat{\varkappa}_{ni}$
E	$\frac{1}{EZ}E[h(X,Y)\ell(\varepsilon)]$
$\hat{E}$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\frac{\hat{\varkappa}_{nj}}{\hat{\pi}_{a_n}(X_j)} = (\bar{Z}_n)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\hat{B}_{nj}$
$\hat{T}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\hat{B}_{ni}-\hat{E})\big(\frac{1}{\hat{J}}\hat{\ell}(\hat{\varepsilon}_i)-\hat{\varepsilon}_i\big)$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$(\hat{\varepsilon}_1,\ldots,\hat{\varepsilon}_n)^\top$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j}$	$E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}) = \big(E(\hat{\varepsilon}_1\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z}),\ldots,E(\hat{\varepsilon}_n\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-j},\mathbf{Z})\big)^\top$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,j\}}$	$E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|\mathbf{X},\mathbf{Y}_{-\{i,j\}},\mathbf{Z})$
$\ell_n(x,\mathbf{y},\mathbf{w})$	$-\big(\alpha_n+\frac{1}{n\beta}\sum_{j=1}^n\frac{Z_j}{\bar{Z}_n}W\big(\frac{x-y_j}{\beta}\big)\big)^{-1}\frac{1}{n\beta^2}\sum_{j=1}^n\frac{Z_j}{\bar{Z}_n}W'\big(\frac{x-y_j}{\beta}\big)$
$\ell_n(x,\mathbf{y})$	$\ell_n(x,\mathbf{y},\mathbf{Z})$
$\ell_n^{(i)}$	i-te Ableitung von ℓ_n nach der ersten Komponente
$\hat{\ell}_{-j}^{(\mu)}(u)$	$\ell_n^{(\mu)}(u,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-j})$
$s_n^{(1,1)}$	$\frac{c_0}{n^{1/10}\beta^2}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}$
$s_n^{(1,2)}$	$\frac{c_0^{1/2}}{n^{1/10}\beta^{5/2}\alpha_n^{1/2}}\frac{K}{n^{2/5}ba_n}$
$s_n^{(2)}$	$(\bar{Z}_n)^{-1}\cdot\frac{c_0}{n^{1/2}\beta^2\alpha_n}$
U_n	$E\big(\int(\hat{\ell}(u)-\ell(u))^2f(u)du\big\|\mathbf{X},\mathbf{Z}\big)$
$D_j^{\{i,l\}}$	$\ell_n\big(Y_j-\hat{r}^{(a)}_{nj\{i,l\}},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{-\{i,l\}}\big)-\ell(\varepsilon_j)$

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. W. Wefelmeyer betreut worden.

....

Datum, Ort Unterschrift

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name:	Markus Schulz
Geburtstag:	06.02.1980
Geburtsort:	Frechen
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Konfession:	evangelisch
Familienstand:	ledig
Eltern:	Günther Schulz, Rentner Ursula Schulz, geb. Stax
Hobbys:	elektrische Orgel und Kirchenorgel spielen, Musik hören

Schul- und Hochschulausbildung

August 1986 bis Juni 1990	Edith-Stein-Schule Katholische Grundschule Frechen
August 1990 bis Juni 1999	Gymnasium der Stadt Frechen
Schulabschluss	Juni 1999, Allgemeine Hochschulreife (Abitur)
Oktober 2000 bis Februar 2007	Studium der Mathematik an der Universität zu Köln, Nebenfach: Physik
Hochschulabschluss	27. Februar 2007, Diplom

Tätigkeiten nach der Schulausbildung

01. Juli 1999 bis 30. Juni 2000	Zivildienst im St. Katharinen-Hospital in 50226 Frechen
13. Oktober 2003 bis 28. Februar 2007	Studentische Hilfskraft an der Universität zu Köln, Mathematisches Institut
09. April 2007 bis 31. März 2008	Wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität zu Köln, Mathematisches Institut Lehrstuhl: Prof. Dr. W. Wefelmeyer
seit 01. April 2008	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität zu Köln, Mathematisches Institut Lehrstuhl: Prof. Dr. W. Wefelmeyer

Frechen, den 12. Juli 2010