
Modellierung und statistische Physik biologischer und sozialer Systeme

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Ansgar Kirchner
aus Köln

KÖLN 2002

Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr. A. Schadschneider
Prof. Dr. J. Zittartz

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Sympatrische Speziation in Evolutionsmodellen | 8 |
| 2.1 | Grundlagen | 8 |
| 2.2 | Asexuelle Reproduktion | 11 |
| 2.3 | Genommodelle | 17 |
| 2.3.1 | Das diploide Genom | 18 |
| 2.3.2 | Das haploide Genom | 20 |
| 2.4 | Entwicklungsgleichung in diskreter Zeit | 21 |
| 2.4.1 | Konzept | 21 |
| 2.4.2 | Ergebnisse | 23 |
| 2.5 | DGL-Systeme mit sexueller Reproduktion | 24 |
| 2.5.1 | Das Drei-Zustands-Modell | 25 |
| 2.5.2 | Das Zwei-Trait-Modell | 29 |
| 3 | Simulation von Fußgängerdynamik | 32 |
| 3.1 | Vorbetrachtungen | 32 |
| 3.2 | Kollektive Phänomene und Modelle zur Fußgängerdynamik | 33 |
| 3.2.1 | Kollektive Phänomene der Dynamik von Fußgängern | 33 |
| 3.2.2 | Fußgängermodelle | 36 |
| 3.3 | Grundprinzipien | 38 |
| 3.4 | Definition des Modells | 39 |
| 3.4.1 | Das statische Grundfeld S | 40 |
| 3.4.2 | Das dynamische Grundfeld D | 41 |
| 3.4.3 | Update-Vorschriften | 42 |
| 3.5 | Evakuierungs-Simulationen | 44 |
| 3.5.1 | Der Einfluß der Sensitivitätsparameter | 44 |
| 3.5.2 | Alternative Definitionen des dynamischen Feldes D | 49 |
| 3.5.3 | Raum mit zwei Türen | 51 |
| 3.6 | Konflikte und Reibung zwischen den Teilchen | 53 |
| 3.6.1 | Konflikt-Lösung im parallelen Update | 53 |
| 3.6.2 | Einführung des Reibungsparameters μ | 54 |
| 3.6.3 | Einfluß von μ und Teilchendichte ρ | 54 |
| 3.6.4 | Neuinterpretierung des geordneten Regimes | 56 |
| 3.6.5 | Zeitentwicklung einer Evakuierung | 57 |
| 3.6.6 | Mean-Field Approximation für das geordnete Regime | 59 |
| 3.6.7 | Zahl der Konflikte während einer Evakuierung | 61 |
| 3.6.8 | Säule vor dem Ausgang | 63 |
| 3.6.9 | Fluß und Konflikte im Korridor | 65 |
| 3.6.10 | Vergleich mit empirischen Daten | 68 |

| | | |
|------------------------------|--|------------|
| 3.7 | Modellvarianten zu $v_{\max} > 1$ | 71 |
| 3.7.1 | Klassifikation der Modellvarianten | 71 |
| 3.7.2 | Simulationen | 74 |
| 3.8 | Feinere Diskretisierung des Raumes | 78 |
| 3.8.1 | Motivation und Konsequenzen | 78 |
| 3.8.2 | Simulationsergebnisse | 81 |
| 4 | Schlußbetrachtungen | 85 |
| 4.1 | Zusammenfassung | 85 |
| 4.2 | Ausblick | 86 |
| Anhang | | 88 |
| A | Gleichheit der Vererbungswahrscheinlichkeiten in Abschnitt 2.3 | 88 |
| B | Jacobi-Matrizen und Eigenwerte aus Abschnitt 2.5 | 90 |
| B.I | Größen aus Abschnitt 2.5.1 | 90 |
| B.II | Größen aus Abschnitt 2.5.2 | 91 |
| C | Berechnung des statischen Grundfeldes S | 92 |
| D | Details zur Dynamik des Grundfeldes D | 98 |
| E | Java-Applets | 101 |
| F | Beweis der Formel (3.6.4) | 106 |
| Literaturverzeichnis | | 107 |
| Kurze Zusammenfassung | | 113 |
| Abstract | | 115 |
| Danksagungen | | 117 |
| Erklärung | | 119 |
| Lebenslauf | | 121 |

1 Einleitung

Bedingt durch die großen Speicherkapazitäten und Möglichkeiten moderner Computertechnik leben wir heute in einer Welt, in der unablässig neue Daten aus allen Bereichen des Lebens produziert und gespeichert werden. Als Beispiele lassen sich angeben:

- Die Sequenzierung des kompletten menschlichen Genoms mit seinem $3 \cdot 10^9$ Basenpaaren innerhalb der letzten Jahre.
- Die Erfassung eines großen Teils des täglich auf deutschen Autobahnen stattfindenden Fahrzeugverkehrs mit Hilfe von Zählschleifen.
- Das beständigem Wandel und Wachstum unterworfenen Netz des *World Wide Web* mit seinen immensen Datenmengen.
- Die infolge der Globalisierung weltweit synchronisierten Handelsaktivitäten der Finanzmärkte und Börsen.

Einhergehend mit dieser großen Menge beständig wachsender Informationen besteht nun aber die Notwendigkeit, diese nicht nur zu katalogisieren, sondern auch quantitativen Analysen zu unterwerfen.

Daher sind komplexe Fragestellungen aus dem Bereich biologischer und sozialer Systeme innerhalb der letzten zwei Dekaden verstärkt mit Methoden der theoretischen Physik und Mathematik in interdisziplinären Forschungsprojekten untersucht worden.

Sehr häufig tritt bei der Untersuchung biologischer und sozialer Systeme das Problem auf, daß die Wechselwirkungen zwischen den Individuen „nicht physikalisch“ sind. Das heißt, die die Interaktionen beeinflussenden Faktoren sind weder bekannt noch exakt meßbar (zum Beispiel psychologische Aspekte der Routenwahl von Verkehrsteilnehmern, oder instinktives Handeln innerhalb biologischer Populationen). Daher werden solche Systeme häufig mit Hilfe stochastischer Regeln oder unter Berücksichtigung zufälliger Aspekte modelliert.

Die Zahl der Beiträge und aktuellen Forschungsgebiete auf diesem Sektor ist zu groß, um auch nur annähernd in dieser Einleitung wiedergegeben zu werden. Daher sollen im folgenden lediglich einige wenige prominente Beispiele mathematisch-physikalischer Methoden innerhalb der interdisziplinären Forschung genannt sein.

- Die Anwendung der Spieltheorie zur Analyse globaler Märkte und Finanztransaktionen.
- Kontinuierliche Modelle und zelluläre Automaten liefern wichtige Beiträge zur Beschreibung der Dynamik des Straßenverkehrs.
- Differentialgleichungssysteme und Computermodelle modellieren die Interaktion biologischer Populationen.

- Sequenzalignment von Genomsequenzen mit Methoden der statistischen Physik.
- Graphen- und Netzwerktheorie werden zur Erforschung genetischer Netzwerke eingesetzt.

Auch in der vorliegenden Arbeit sollen Fragestellungen aus dem Bereich biologischer und sozialer Systeme mit Hilfe von Methoden der statistischen Physik untersucht werden.

Die Arbeit gliedert sich hierbei in zwei Kapitel, in denen scheinbar recht unterschiedliche Themengebiete diskutiert werden. Übergreifend läßt sich jedoch sagen, daß sich beide Themenbereiche mit dem Fluß und der Verarbeitung von Information innerhalb eines Vielteilchensystems auseinandersetzen. Diese Systeme setzen sich aus vielen relativ einfachen Einheiten zusammen und unterliegen bestimmten dynamischen Regeln.

In Kapitel 2 werden Evolutionsmodelle zur *sympatrischen Speziation* vorgestellt und untersucht¹. Die sympatrische Speziation stellt einen speziellen Artbildungsprozeß dar, der vornehmlich auf der unterschiedlichen Ausprägung bestimmter charakteristischer Merkmale der teilhabenden Individuen beruht (siehe Abschnitt 2.1). Insbesondere wird der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen Teilpopulationen eines Gesamtensembles im Verlauf der Zeit ein stabiles Gleichgewicht miteinander bilden können. Die Teilpopulationen stehen einerseits durch Konkurrenz um Habitate und ökologische Nischen, andererseits bedingt durch die Möglichkeit sexueller Vermischung in starker Wechselwirkung zueinander. Ein besonderes Augenmerk wird hierbei auf den evolutionsgenetischen Aspekt der Vererbung bestimmter Eigenschaften im Verlauf der Generationen gelegt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Analyse des Flusses und der Vererbung genetischer Information in der zeitlichen Entwicklung unter bestimmten Randbedingungen.

Die Modelle werden mit Hilfe von Differentialgleichungssystemen und zeitdiskreten Gleichungen diskreter Zustandsvariabler gebildet. Desweiteren wird ein Modell zur Vererbung quantitativer Eigenschaften verwendet, dessen statistische Eigenschaften durch kombinatorische Rechnungen analysiert werden.

Kapitel 3 liefert die Definition und ausführliche Untersuchung eines Zellularautomaten-Modells zur Dynamik von Fußgängern. Hierbei geht es darum, möglichst komplexes, kollektives Verhalten (siehe Abschnitt 3.2.1) einer großen Menge von Individuen zu reproduzieren. Die Fußgänger (oder Teilchen) des Modells sollen dabei aber möglichst wenig individuelle Eigenschaften, wie zum Beispiel Gedächtnis oder Intelligenz, besitzen. Im Rahmen des Modells wird dies durch einen probabilistischen Automaten gewährleistet, in dem die Teilchen sämtliche Informationen über ihre belebte und unbelebte Umwelt lediglich durch kurzreichweitige Wechselwirkungen erhalten. Diese kurzreichweitigen Wechselwirkungen werden durch die Existenz zweier sogenannter *Grundfelder* inkorporiert.

Infolgedessen besitzt das Modell eine hohe geschwindigkeits- und speichertechnische Effizienz, die die Untersuchung sehr komplexer Sachverhalte ermöglicht. Es läßt sich das Verhalten und die Ausbreitung eines großen Ensembles von Teilchen über geometrisch beliebig komplizierten Strukturen analysieren. Insbesondere kann das Modell

¹Die in Kapitel 2 präsentierten Resultate wurden unter der Anleitung von Prof. Dr. Michael Lässig erarbeitet.

einen Beitrag in der Untersuchung diverser Evakuierungsszenarien leisten und ist daher zur Verwendung in Sicherheitsuntersuchungen für komplexe Gebäudeplanungen bestens geeignet.

Ferner lassen sich mit Hilfe des Modells die meisten der bekannten kollektiven Effekte der Dynamik von Fußgängern reproduzieren.

Diverse physikalische Meßgrößen wie Teilchenflüsse oder Ausflußzeiten werden durch Monte-Carlo-Simulationen gewonnen und untersucht. Ferner werden weitere Observable durch kombinatorische Überlegungen abgeleitet.

Die wissenschaftlichen Grundlagen zu beiden Themengebieten werden in den betreffenden Kapiteln jeweils eingehend erörtert.

Auf der Grundlage der in Kapitel 2 und 3 getroffenen Erkenntnisse, läßt sich über ein breites Spektrum an Kombinationsmöglichkeiten zwischen den diskutierten Modellen nachdenken.

Das Konzept der Grundfelder aus Kapitel 3 ist zum Beispiel bestens geeignet, die Ausbreitung von Populationen in ihren Habitaten zu beschreiben. Durch die in Kapitel 2 vorgestellten Konzepte zur Vererbung, besteht wiederum die Möglichkeit, die Teilchen aus Kapitel 3 mit unterschiedlichen Eigenschaften auszustatten, was eine Diversifizierung des Ensembles zur Folge hätte.

Auf diese Aspekte soll im Ausblick noch einmal näher eingegangen werden.

Populationen bewirkt. Die notwendige Separation läßt sich auf verschiedene Weise erreichen: Zum Beispiel können ursprünglich geschlossene Populationen durch Bildung von Habitatinseln aufgesplittert werden und auf diese Weise eine disjunkte Verbreitung erreichen.

Die Separation führt schließlich zur Ausbildung von Merkmalen, die den Genfluß zwischen den beiden Arten auch nach erneuter räumlicher Zusammenführung verhindern würden. Die divergente Entwicklung der beiden Populationen kann entweder durch genetische Drift oder durch in den verschiedenen Verbreitungsgebieten unterschiedlich wirkende Selektion zustande kommen. Ein berühmtes Beispiel hierfür sind die Darwinfinken der Galapagos Inseln (siehe Abb. 2.2).

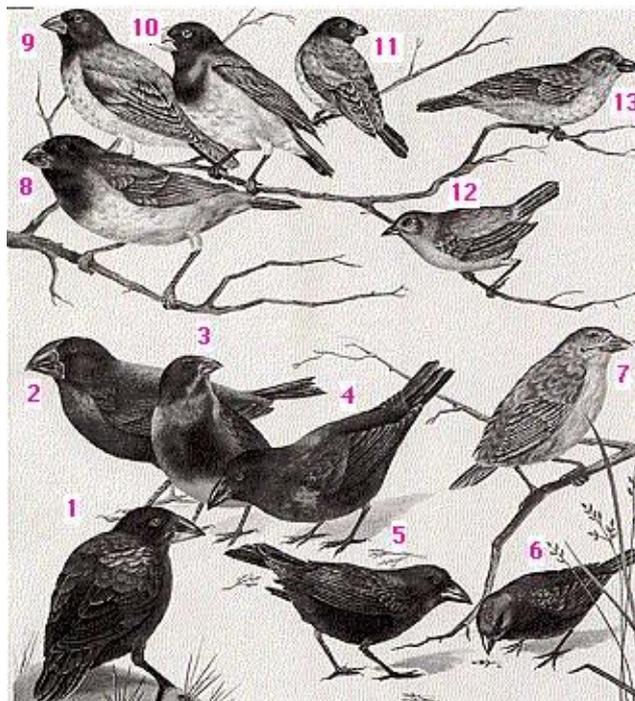


Abbildung 2.2: Die Galapagos Inseln liegen fast 1000 km vom Festland entfernt und wurden vermutlich gegen Ende des Tertiärs von einer Stammpopulation besiedelt, die ein reiches Angebot an ökologischen Nischen vorfand. Die Gründerpopulation hat sich bis heute durch Nahrungsspezialisierung in 13 Arten differenziert.

- *Sympatrische Speziation:*

Bei der sympatrischen Speziation dagegen evolviert reproduktive Isolation und einhergehende divergente Entwicklung zweier Populationen allein durch die Evolution von Merkmalen, die Fortpflanzungsaktivitäten zwischen den Populationen vermindern. Sie müssen dabei nicht in ihrer Fortpflanzung durch geographische Barrieren vollständig voneinander getrennt sein. Die für die genetische Differenzierung verantwortliche Verminderung des Genflusses zwischen den Populationen muß also durch ein hohes Maß an sortengleicher Paarung (*assortatives Mating*) aufgrund nicht-geographischer Faktoren verursacht werden.

Im Gegensatz zur immer noch vorherrschenden Lehrbuchmeinung wird die universelle Bedeutung allopatrischer Erklärungsmodelle in den letzten Jahren zunehmend in

Frage gestellt. Diese Entwicklung nährt sich aus Forschungsergebnissen unterschiedlicher Fachbereiche der Biologie, insbesondere der theoretischen Biologie [3–12], aber auch der molekularen Phylogenetik sowie der experimentellen Populationsgenetik (siehe hierzu Abb. 2.3).



Abbildung 2.3: Untersuchungen an den Chicliden (Buntbarschen) des Sees Ejagham im westlichen Afrika deuten auf eine durch sympatrische Speziation bedingte Artdifferenzierung hin [2, 13, 14].

In diesem Kapitel sollen nun verschiedene Modelle zur sympatrischen Speziation in Populationen mit sexueller Reproduktion eingeführt und untersucht werden. Entscheidende Voraussetzung für die divergente Entwicklung von Subpopulationen bis hin zu vollständiger reproduktiver Isolation ist das Vorliegen disruptiver Selektion, das heißt die fitneßbedingte Benachteiligung intermediärer Phänotypen. Zur Bestimmung der Fitneß der Individuen in den Modellen gibt es zwei Konzepte.

- *Dichteabhängige Fitneß:*
Die Fitneß F eines Individuums hängt nur von einer quantitativen Eigenschaft x des Individuums ab: $F = F(x)$. Für disruptive Selektion muß dann gelten: $F_{\max} = F(x_{\max}) = F(x_{\min})$. Eine solche Situation kann zum Beispiel bei der Neubesiedelung eines Habitats durch eine Gründerpopulation vorliegen. Diese Form der Fitneßfunktion wird in 2.4 verwendet.
- *Frequenzabhängige Fitneß:*
Die Fitneß hängt nicht mehr vom einzelnen Individuum, sondern von der Gesamtpopulation ab. $N(x, t)$ sei zum Zeitpunkt t die Zahl der Individuen, die die Eigenschaft x besitzen. Dann gilt für ihre Fitneß:

$$F = F(N(x, t), x, t) = \int_y \tilde{F}(N(y, t), y, t) dy$$

Offenbar handelt es sich hierbei um ein wesentlich realistischeres und komplexeres Konzept von Fitneß [12, 15]. Die Wirkungsweise dieses Konzepts wird in Abschnitt 2.2 anhand eines Systems gekoppelter Differentialgleichungen zur Beschreibung von Konkurrenz um Nahrungsmittelressourcen zwischen Populationen verdeutlicht.

Anschließend müssen als Grundlage für die Untersuchungen zur Speziation in sich sexuell reproduzierenden Populationen zunächst Modelle entwickelt werden, die die Vererbung quantitativer Eigenschaften (*Traits*) von Individuen einer Generation auf

ihre Nachkommen definieren. In Abschnitt 2.3 werden zwei solcher Modelle vorgestellt und auf ihre statistischen Eigenschaften hin untersucht.

Danach werden ein Modell in diskreter (Abschnitt 2.4) und ein Modell in kontinuierlicher Zeit (Abschnitt 2.5) zur Speziation in Populationen mit sexueller Fortpflanzung vorgestellt und untersucht. Die Individuen der Modellpopulationen variieren hierbei in beiden Modellen in bezug auf eine diskrete quantitative Eigenschaft. Die Eigenschaft besitzt stets endlich viele Phänotypen. Der Phänotyp ist dann sowohl für die Fitneß der Individuen unter den herrschenden Selektionsbedingungen, als auch für das Verhalten bei der Partnerwahl verantwortlich. In Abschnitt 2.5.2 besitzen die Individuen zusätzlich eine zweite quantitative Eigenschaft. Fitneß und Partnerwahl der Individuen werden dann von unterschiedlichen Merkmalen bestimmt. Als Speziationszustand wird in allen Modellen ein Zustand bezeichnet, in dem zwei konstante, sich in bezug auf mindestens ein Merkmal unterscheidende, Teilpopulationen N_A und N_B mit $N_A > 0$, $N_B > 0$ existieren, die reproduktiv voneinander isoliert sind.

2.2 Asexuelle Reproduktion

Zur Verdeutlichung des in der Einleitung erörterten Konzepts der frequenzabhängigen Fitneß soll im folgenden ein Differentialgleichungssystem (DGL-System) zur Beschreibung wechselwirkender Individuen diskutiert werden. Dieses DGL-System läßt sich auf verschiedene Weisen interpretieren:

- Verschiedene Spezies konkurrieren innerhalb eines Ökosystems um dieselbe begrenzte Nahrungsquelle oder hemmen ihr gegenseitiges Wachstum in irgendeiner anderen Weise.
- Individuen einer sich asexuell reproduzierenden polymorphen Spezies variieren in einer quantitativen Eigenschaft, die die Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Nahrungsquellen bestimmt. Zum Beispiel kann die Schnabellänge bei Vögeln die Größe der konsumierbaren Samenkörner festlegen. Die Variation der betrachteten Eigenschaft vollzieht sich hierbei in diskreten Schritten. Mutationen seien vernachlässigt.

Das DGL-System soll die zeitliche Entwicklung der Größen X_i dreier Teilpopulationen beschreiben. Die Populationen sind, wie oben erörtert, als verschiedene Spezies oder als unterschiedliche Phänotypen i einer Spezies denkbar (z.B. $i = 0, 1, 2$: kurzer, intermediärer, langer Schnabel). Der Schwerpunkt der folgenden Analyse liegt bei einer Untersuchung des Systems in bezug auf die zweite Interpretationsmöglichkeit. Das Wachstum jeder einzelnen Population wird durch einen *logistic growth*-Ansatz [16] kontrolliert, darüber hinaus besteht in unterschiedlich starker Weise Konkurrenz zu den anderen Populationen um die zur Verfügung stehenden Ressourcen. Das DGL-System ist von der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dX_0}{dt} &= r_0 X_0 \left[1 - \frac{X_0}{K_0} - c_{01} \frac{X_1}{K_0} \right], \\ \frac{dX_1}{dt} &= r_1 X_1 \left[1 - \frac{X_1}{K_1} - c_{10} \frac{X_0}{K_1} - c_{12} \frac{X_2}{K_1} \right], \\ \frac{dX_2}{dt} &= r_2 X_2 \left[1 - \frac{X_2}{K_2} - c_{21} \frac{X_1}{K_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Sämtliche im folgenden aufgelistete Größen sind positive Konstanten und bedeuten im einzelnen:

$$\begin{aligned} r_i &:= \text{lineare Geburtenrate der Individuen aus } X_i, \\ K_i &:= \text{Kapazität von } X_i, \\ c_{ij} &:= \text{kompetitiver Effekt von } X_j \text{ auf } X_i. \end{aligned}$$

Die Kapazität K_i bezeichnet die der Population X_i zur Verfügung stehenden natürlichen Ressourcen. Die c_{ij} müssen nicht notwendig symmetrisch sein. Ferner wird in (2.2.1) die Konkurrenz zwischen den Individuen von X_0 und X_2 als vernachlässigbar angenommen ($c_{02} = c_{20} = 0$). Zum Beispiel können die Phänotypen 0 und 2 so unterschiedlich sein, daß die Individuen aus X_0 und X_2 nicht mehr um vorhandene Nahrungsquellen konkurrieren.

Die Größen des Modells (2.2.1) werden nun in folgender Weise reskaliert:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{X_0}{K_0}, & u_1 &= \frac{X_1}{K_1}, & u_2 &= \frac{X_2}{K_2}, \\ \tau &= r_1 t, & \rho_{01} &= \frac{r_0}{r_1}, & \rho_{21} &= \frac{r_2}{r_1}, \\ \tilde{c}_{01} &= c_{01} \frac{K_1}{K_0}, & \tilde{c}_{10} &= c_{10} \frac{K_0}{K_1}, & \tilde{c}_{12} &= c_{12} \frac{K_2}{K_1}, & \tilde{c}_{21} &= c_{21} \frac{K_1}{K_2}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Das DGL-System (2.2.1) geht mit diesen Ersetzungen über in:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= \rho_{01} u_0 [1 - u_0 - \tilde{c}_{01} u_1], \\ \frac{du_1}{d\tau} &= u_1 [1 - u_1 - \tilde{c}_{10} u_0 - \tilde{c}_{12} u_2], \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho_{21} u_2 [1 - u_2 - \tilde{c}_{21} u_1]. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Sämtliche Parameter des reskalierten Modells (2.2.3) sind nun dimensionslos. Die Zahl der konstanten Parameter reduziert sich darüber hinaus von zehn in (2.2.1) auf sechs in (2.2.3).

Um nun der Fragestellung nachzugehen, welche stabilen Koexistenzmöglichkeiten es zwischen den Phänotypen einer (sich asexuell reproduzierenden) Spezies gibt, werden die Parameter des Modells (2.2.1) weiter spezifiziert:

- Die äußeren Phänotypen $i = 0, 2$ sollen dieselbe Nahrungsmittelkapazität besitzen, $K_0 = K_2 = k$. Darüber hinaus soll ihnen weniger Nahrung zur Verfügung stehen als dem intermediären Phänotyp, $K_1 = K > k$. Im Bild des weiter oben angesprochenen Beispiels der Schnabellängen würde dies bedeuten, daß die Zahl der Samenkörner mittlerer Größe überwiegt.
- Die Konkurrenz um Nahrungsmittel zwischen der Population der intermediären Phänotypen und den beiden Populationen der äußeren Phänotypen sei gleich und symmetrisch

$$c_{ij} = c, \quad \forall_{i,j \in \{0,1,2\}} : |i - j| = 1.$$

Zusätzlich soll die interspezifische Konkurrenz zwischen den Individuen kleiner sein als die intraspezifische Konkurrenz: $c < 1$.

- Die linearen Geburtsraten r_i bestimmen lediglich die Dynamik des Prozesses, die Stabilität von Fixpunkten wird durch die Raten r_i nicht beeinflusst. Daher soll in der folgenden Analyse der stationären Zustände stets $r_i = 1$ gelten.

Diese Spezifizierung der Parameter stellt keine grundsätzliche Voraussetzung dar, das Modell läßt sich auch für allgemeinere Fälle diskutieren, wie zum Beispiel $K_0 \neq K_2$. Jedoch vollzieht sich dann die Analyse der stationären Zustände weitgehend auf numerischem Weg.

Durch diese Wahl der Parameter erhält man aus (2.2.3) schließlich :

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= u_0 \left[1 - u_0 - c \frac{K}{k} u_1 \right] = f_0(u_0, u_1, u_2) , \\ \frac{du_1}{d\tau} &= u_1 \left[1 - u_1 - c \frac{k}{K} \{u_0 + u_2\} \right] = f_1(u_0, u_1, u_2) , \\ \frac{du_2}{d\tau} &= u_2 \left[1 - u_2 - c \frac{K}{k} u_1 \right] = f_2(u_0, u_1, u_2) . \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Stationäre Zustände oder Fixpunkte \vec{u}^* von (2.2.4) sind die Lösungen des Gleichungssystems $f_i(\vec{u}^*) = 0, \forall_{i \in \{0,1,2\}}$. Im folgenden sollen drei der insgesamt acht Fixpunkte auf ihre lineare Stabilität gegenüber kleinen Störungen untersucht werden. Die restlichen Fixpunkte sind entweder unbiologisch oder im Kontext der zugrunde liegenden Fragestellung irrelevant. Biologisch oder physikalisch relevant sind offensichtlich nur Lösungen, bei denen für die Teilpopulationen u_i gilt: $u_i \geq 0, \forall_{i \in \{0,1,2\}}$. Die drei interessanten Fixpunkte sind:

$$\vec{u}_a^* = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{u}_b^* = (1, 0, 1) \quad , \quad \vec{u}_c^* = \left(\frac{1 - c \frac{K}{k}}{1 - 2c^2}, \frac{1 - 2c \frac{k}{K}}{1 - 2c^2}, \frac{1 - c \frac{K}{k}}{1 - 2c^2} \right) . \quad (2.2.5)$$

Die zu der Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|_{\vec{u}^*} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_0} & \frac{\partial f_0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_0} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \Big|_{\vec{u}^*} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2u_0 - c \frac{K}{k} u_1 & -c \frac{K}{k} u_0 & 0 \\ -c \frac{k}{K} u_0 & 1 - 2u_1 - c \frac{k}{K} \{u_0 + u_2\} & -c \frac{k}{K} u_2 \\ 0 & -c \frac{K}{k} u_2 & 1 - 2u_2 - c \frac{K}{k} u_1 \end{pmatrix} \Big|_{\vec{u}^*} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

gehörenden Eigenwerte λ geben Aufschluß über die Stabilität der Fixpunkte.

1. \vec{u}_a^* :

Für $\vec{u}_a^* = (0, 1, 0)$ ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 - c \frac{K}{k}, \quad \lambda_3 = 1 - c \frac{K}{k} . \quad (2.2.7)$$

Es gilt also für diesen stationären Zustand:

$$\vec{u}_a^* \text{ ist } \begin{cases} \text{asymptotisch stabil} & \text{für } c > \frac{k}{K} , \\ \text{instabil} & \text{für } c < \frac{k}{K} . \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Das Verhalten läßt sich sehr gut anhand des Vektorfeldes $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} F_x &= x \left[1 - x - c \frac{K}{k} y \right] , \\ F_y &= y \left[1 - y - 2c \frac{k}{K} \right] \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

verdeutlichen. Dieses Feld beschreibt mittels der Transformation $y = u_1$, $2x = u_0 + u_2$ die Projektion der Phasentrajektorien des Modells (2.2.4) in die zweidimensionale Ebene. Der Fixpunkt \vec{u}_a^* entspricht dann dem Fixpunkt $(0, 1)$ von (2.2.9). Abb. 2.4 zeigt die Trajektorien im Fall asymptotischer Stabilität.

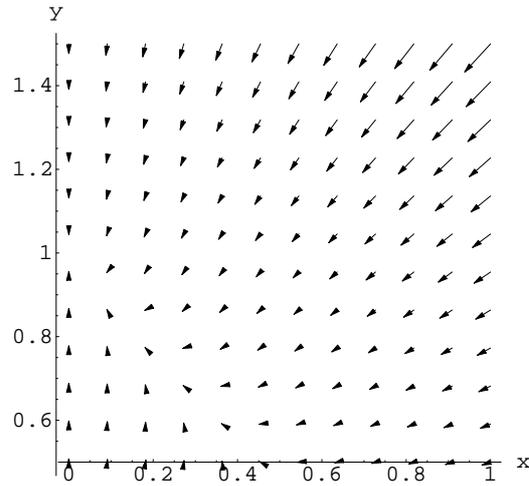


Abbildung 2.4: Vektorfeld (2.2.9) für die Parameter $k = 3$, $K = 5$, $c = 0.8$.

Deutlich sieht man die Attraktivität des Punktes $(0, 1)$. Nur der intermediäre Phänotyp, der die größte Nahrungsmittelkapazität besitzt, setzt sich durch. Die extremen Phänotypen werden aufgrund der hohen interspezifischen Konkurrenz ausgelöscht. Abb. 2.5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Populationsgrößen, der sich aus der numerischen Lösung von (2.2.4) ergibt, für die Anfangskonfiguration $u_0 = 1.2$, $u_1 = 0.3$, $u_2 = 0.5$. Die Parameter K , k und c seien wie in Abb. 2.4 gewählt.

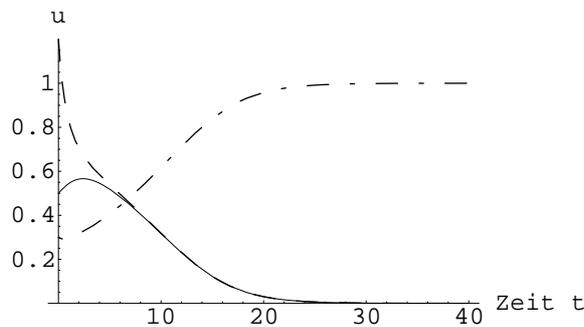


Abbildung 2.5: Zeitlicher Verlauf der Populationen $u_0 = \text{---}$, $u_1 = \text{---}\cdot\text{---}$, $u_2 = \text{---}$.

2. \vec{u}_b^* :

Aus $\vec{u}_b^* = (1, 0, 1)$ resultieren die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1 - 2c \frac{k}{K}. \quad (2.2.10)$$

Hieraus folgt für den stationären Zustand:

$$\vec{u}_c^* \text{ ist } \begin{cases} \text{asymptotisch stabil} & \text{für } c > \frac{K}{2k}, \\ \text{instabil} & \text{für } c < \frac{K}{2k}. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Hier kommt es zur Auslöschung des intermediären Phänotyps, nur die extremen Phänotypen bilden stabile Populationen. Dieser Fall läßt sich als Speziation einer asexuell reproduzierenden Art interpretieren.

Bei geeigneter Parameterwahl liefert (2.2.9) analog zu \vec{u}_a^* ein Vektorfeld, in dem die Attraktivität des transformierten Fixpunktes $(0, 1)$ gut sichtbar ist. Die aus (2.2.4) resultierende zeitliche Entwicklung der Populationsgrößen für die Anfangsbedingung $u_0 = 0.8, u_1 = 1.2, u_2 = 0.3$ ist in Abb. 2.6 dokumentiert. Hierbei gelte $K = 5, k = 4$ und $c = 0.8$.

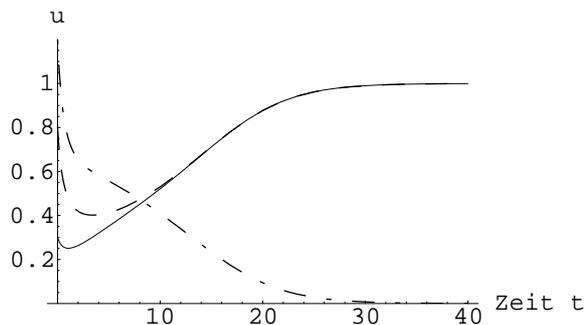


Abbildung 2.6: Zeitlicher Verlauf der Populationen $u_0 = - -$, $u_1 = - \cdot -$, $u_2 = \text{---}$.

3. \vec{u}_c^* :

Die zu $\vec{u}_c^* = \left(\frac{1-c\frac{K}{k}}{1-2c^2}, \frac{1-2c\frac{k}{K}}{1-2c^2}, \frac{1-c\frac{K}{k}}{1-2c^2} \right)$ gehörenden Eigenwerte lauten:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1 - c\frac{K}{k}}{-1 + 2c^2}, \quad \lambda_3 = \frac{(2c - \frac{K}{k})(-1 + c\frac{K}{k})}{(-1 + 2c^2)\frac{K}{k}}. \quad (2.2.12)$$

\vec{u}_c^* stellt nur dann eine biologisch sinnvolle Lösung dar, wenn $\forall_i : u_{ci}^* \geq 0$ gilt. Hier soll der Fall der Koexistenz aller drei Phänotypen mit $u_{ci}^* > 0$ untersucht werden. Dazu bietet sich eine Fallunterscheidung an:

1. Fall:

$$1 - 2c^2 > 0 \stackrel{c > 0}{\iff} c < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.2.13)$$

In diesem Fall muß für $u_{ci}^* > 0$ zusätzlich gelten:

$$c < \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c < \frac{K}{2k}. \quad (2.2.14)$$

Aus (2.2.12) folgt dann sofort:

$$\lambda_i < 0, \quad \forall_i. \quad (2.2.15)$$

Der Fixpunkt \vec{u}_c^* ist also für die Bedingungen (2.2.13) und (2.2.14) stets asymptotisch stabil. Ihm entspricht der Fixpunkt $\left(\frac{1-c\frac{K}{k}}{1-2c^2}, \frac{1-2c\frac{k}{K}}{1-2c^2} \right)$ von (2.2.9). Deutlich sieht man in Abb. 2.7 die starke Attraktivität des Punktes im Fall asymptotischer Stabilität, die zwei anderen Fixpunkte $(0, 1)$ und $(1, 0)$ sind beide instabil. Unter den Bedingungen (2.2.13) und (2.2.14), das heißt also im Fall geringer interspezifischer Konkurrenz, kann sich ein stabiles Koexistenzgleichgewicht der Zustände ausbilden. In Abb. 2.8 ist der zeitliche Verlauf der Populationsgrößen für die gleiche Anfangskonfiguration wie in Abb. 2.5 abgebildet. Für die Parameter K, k und c seien ebenfalls dieselben Werte wie in Abb. 2.7 gewählt.

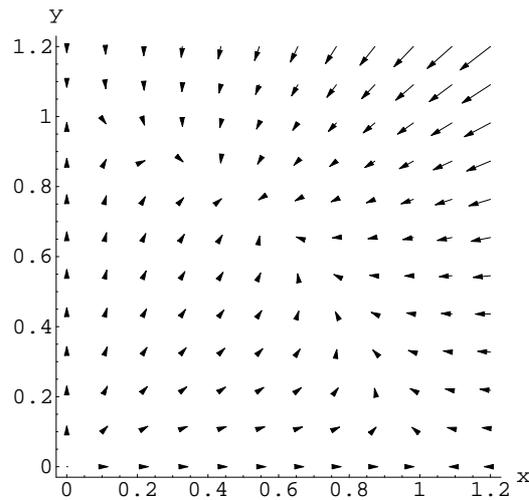


Abbildung 2.7: Vektorfeld (2.2.9) für die Parameter $k = 3$, $K = 5$, $c = 0.4$.

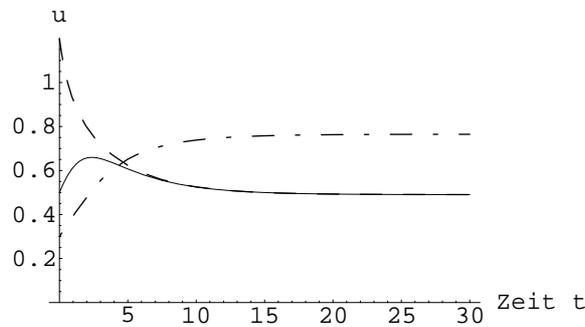


Abbildung 2.8: Zeitlicher Verlauf der Populationen $u_0 = \text{---}$, $u_1 = \text{-}\cdot\text{-}$, $u_2 = \text{---}$.

Die Populationsgrößen bestimmen sich aus der Wahl der Parameter. Hierbei gilt

$$u_{c0/2}^* \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} u_{c1}^* \iff \frac{k}{K} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.2.16)$$

die relativen Populationsgrößen hängen also nicht vom Konkurrenzparameter c ab. Bei geeigneter Wahl des Parameters c geht \vec{u}_c^* stetig in einen der beiden Fixpunkte \vec{u}_a^* oder \vec{u}_b^* über.

2. Fall:

$$c > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c > \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c > \frac{K}{2k}. \quad (2.2.17)$$

Analog zum oberen Fall läßt sich zeigen, daß der Fixpunkt \vec{u}_b^* unter der Nebenbedingung (2.2.17) stets instabil ist. Die interspezifische Konkurrenz zwischen den Phänotypen ist zu groß, um ein stabiles Gleichgewicht zu gewährleisten. In diesem Fall stellen jedoch sowohl \vec{u}_a^* , als auch \vec{u}_b^* asymptotisch stabile Fixpunkte dar. In welchen Endzustand das System unter diesen Voraussetzungen hineinläuft, hängt dann entscheidend von den anfänglichen Populationsgrößen ab.

Das Phasendiagramm der koexistierenden Teilpopulationen im Raum der Parameter c und $\frac{k}{K}$ in Abb. 2.9 verdeutlicht noch einmal alle Ergebnisse.

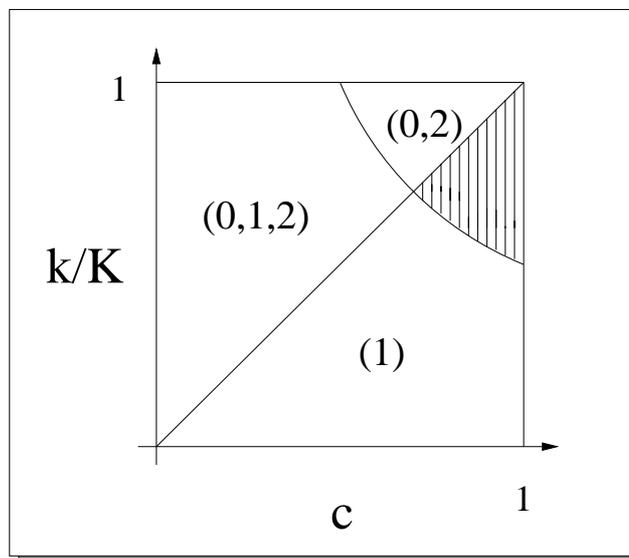


Abbildung 2.9: Phasendiagramm im Raum der Parameter c und $\frac{k}{K}$. Die Zahlen in den Feldern indizieren stabil koexistierende Teilpopulationen ($0 \equiv u_0$, $1 \equiv u_1$ und $2 \equiv u_2$). In dem schraffierten Bereich hängt es von den Anfangsbedingungen ab, in welchen Endzustand das System hineinläuft (entweder $\vec{u}_a^* = (1)$ oder $\vec{u}_b^* = (0, 2)$).

2.3 Genommodelle

Wie in Kapitel 2.1 erörtert, soll hier vornehmlich die Möglichkeit sympatrischer Speziation in Evolutionsmodellen mit sexueller Fortpflanzung diskutiert werden. Hierfür müssen zunächst Modelle entwickelt werden, die die Vererbung quantitativer Eigenschaften (Traits) von Individuen einer Generation auf ihre Nachkommen definieren. Zwei solcher Modelle zur Vererbung von Traits mit diskreten Phänotypen zwischen Individuen in Computer-Simulationen sind aus der Literatur bekannt [11, 12]. Ihre statistischen Eigenschaften sollen im folgenden untersucht werden, um sie in diskreten und kontinuierlichen Zeitgleichungsmodellen verwenden zu können.

Die hier vorgestellten Modelle zur Vererbung stellen lediglich eine grobe Verallgemeinerung realer Prozesse dar. Die Vererbungsvorgänge beruhen auf diskreten Erbfaktoren. Die Grundlage der Gene bildet die *DNA* (Desoxyribonucleinsäure), deren Informationsgehalt durch die vier *Nucleotide* Adenin (A), Thymin (T), Guanin (G) und Cytosin (C) kodiert wird. Diese Nucleotide bilden in langen linearen Ketten die DNA (siehe Abb. 2.10). In den im folgenden vorgestellten Modellen wird die Erbinformation ebenfalls durch diskrete Besetzungszahlen $\in \{0, 1\}$ bestimmter *Genloci* (die hier den Bonds einer Kette entsprechen) gebildet. Prinzipiell läßt sich somit durch die Kombination von 0 und 1 eine beliebige Nucleotidsequenz kodieren¹. Jedoch sind die tatsächlichen Vererbungsvorgänge hochgradig nichtlinear und die Weitergabe von Erbmaterial bei der sexuellen Fortpflanzung ist nicht statistisch unabhängig.

¹Zum Beispiel durch $(0, 0) = A$, $(1, 0) = T$, $(0, 1) = G$ und $(1, 1) = C$.

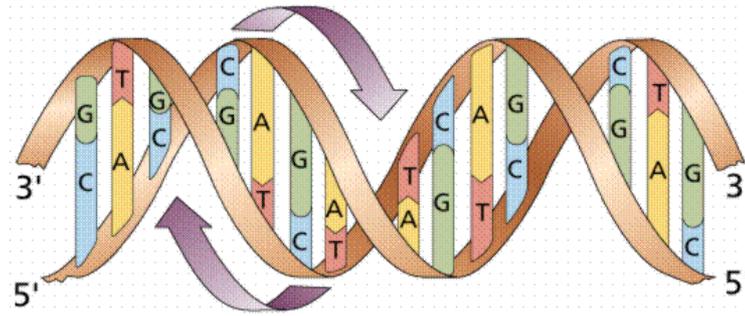


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung des DNA-Moleküls. Die Nucleotide sind als Zucker-Phosphatester zu langen Polynucleotidketten aneinandergefügt. Die DNA besteht dann aus zwei solchen komplementären Kettenmolekülen, die zu einer Doppelhelix aufgewunden sind. Die Ketten werden durch Wasserstoffbrücken zwischen den Nucleotiden zusammengehalten (dabei paart sich stets A mit T und G mit C).

Eine sehr gute Einführung in die Grundlagen der Genetik und weiterführende Details liefert [1].

2.3.1 Das diploide Genom

Die Betrachtung gelte für ein Ein-Trait-Genom, die Erweiterung auf ein Modell mit beliebig vielen Traits ist evident. Jedes Individuum besitzt ein Genom aus n ($n \in \mathbb{N}^+$) diallelen Loci $(\eta_1(i), \eta_2(i))$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), die die Besetzungszahlen $\eta_j(i) \in \{0, 1\}$ haben können. Dieses Genom kodiert nun für einen Phänotyp k des betreffenden Traits in folgender Weise:

$$k = \sum_{i=1}^n (\eta_1(i) + \eta_2(i)) . \quad (2.3.1)$$

Es ergeben sich somit für k die $2n + 1$ möglichen diskreten Werte $k \in 0, 1, \dots, 2n$ (siehe Abb. 2.11).

Die Vererbung der Allele zweier Individuen auf einen Nachkommen vollzieht sich in folgender Weise: Ein Elternteil vererbt für alle Loci i mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder das Allel $\eta_1(i)$ oder $\eta_2(i)$ auf das Allel $\eta_1(i)$ des Nachkommens, der andere Elternteil in gleicher Weise für das Allel $\eta_2(i)$. Dies entspricht freier Rekombination. Offensichtlich ist die Vererbung der beiden Elternteile auf den Nachkommen völlig unabhängig voneinander, so daß es genügt, zunächst die isolierte Vererbung der Allele eines Elternteils auf den Nachkommen zu betrachten. Für jeden Phänotyp k gibt es

$$\binom{2n}{k} \quad (2.3.2)$$

mögliche Mikrozustände des Genoms, die ihn repräsentieren. Es stellt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(n, k, m)$ ein Elternteil mit n Loci und Phänotyp k m Allele mit Besetzungszahl gleich eins auf seinen Nachkommen vererbt, unabhängig vom speziellen Mikrozustand seines Genoms.

Gilt für einen Locus des elterlichen Genoms $\eta_1(i) = \eta_2(i)$, so wird die Besetzungszahl $\eta_1(i) = \eta_2(i) \in \{0, 1\}$ deterministisch auf den Nachkommen vererbt. Die Gesamtanzahl der Loci eines Mikrozustandes, für die gilt $\eta_1(i) = \eta_2(i) \in \{0, 1\}$, sei

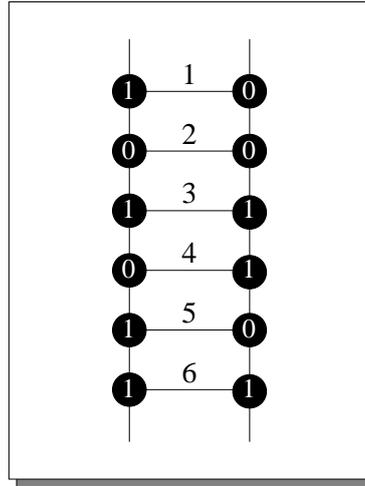


Abbildung 2.11: Veranschaulichung des Modells für ein diploides Genom. Das Genom besteht aus 6 diallelen Loci mit den Besetzungszahlen 0 oder 1. Das abgebildete Genom kodiert für den Phänotyp $k = 7$.

im folgenden mit u bezeichnet. Ein solcher Mikrozustand vererbt also stets u Besetzungszahlen deterministisch.

Daher bietet sich folgende Klassifizierung der Mikrozustände aus (2.3.2) an:

1. Fall k gerade $\in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$:

Sei $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2}\}$ beliebig. Für ein fest vorgegebenes k sind dann Mikrozustände denkbar, für die $u = u(j) = n - 2j$ gilt. Ihre Anzahl ist gegeben durch

$$A^g(n, k, j) = \binom{n}{2j} \binom{n-2j}{\frac{k-2j}{2}} 2^{2j}, \quad (2.3.3)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} - j \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) = \eta_2(i) = 1, \\ & n - \frac{k}{2} - j \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) = \eta_2(i) = 0, \\ & 2j \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) \neq \eta_2(i). \end{aligned}$$

2. Fall k ungerade $\in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$:

Sei $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$, dann ergibt sich analog die Anzahl der Mikrozustände, für die $u = u(j) = n - 1 - 2j$ gilt, zu

$$A^u(n, k, j) = \binom{n}{2j+1} \binom{n-(2j+1)}{\frac{k-1-2j}{2}} 2^{2j+1}. \quad (2.3.4)$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{k-1}{2} - j \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) = \eta_2(i) = 1, \\ & (n-1) - \frac{k-1}{2} - j \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) = \eta_2(i) = 0, \\ & 2j+1 \text{ Loci } i \text{ mit } \eta_1(i) \neq \eta_2(i). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nun die Wahrscheinlichkeit $p(n, k, m)$ mit $m \in \{0, 1, \dots, \min(n, k)\}$ zu:

1. Fall k gerade:

$$p^g(n, k, m) = \frac{1}{\binom{2n}{k}} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}} A^g(n, k, j) \mathcal{T}^g(k, m, j) \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \binom{2j}{m - (\frac{k}{2} - j)} \right\}, \quad (2.3.5)$$

mit

$$\mathcal{T}^g(k, m, j) = \Theta\left(\left(\frac{k}{2} + j\right) - m\right) \Theta\left(m - \left(\frac{k}{2} - j\right)\right).$$

Hierbei ist $\binom{2j}{m - (\frac{k}{2} - j)}$ die Anzahl der möglichen Mikrozustände des Nachkommen.

2. Fall k ungerade:

$$p^u(n, k, m) = \frac{1}{\binom{2n}{k}} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} A^u(n, k, j) \mathcal{T}^u(k, m, j) \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+1} \binom{2j+1}{m - (\frac{k-1}{2} - j)} \right\}, \quad (2.3.6)$$

mit

$$\mathcal{T}^u(k, m, j) = \Theta\left(\left(\frac{k-1}{2} + j + 1\right) - m\right) \Theta\left(m - \left(\frac{k-1}{2} - j\right)\right).$$

Aus diesen Vorüberlegungen erhält man nun die Wahrscheinlichkeit $p^{di}(n, k', k'', k)$, daß zwei Eltern mit n diploiden Loci und den Phänotypen k' und k'' einen Nachkommen des Phänotyps k erzeugen:

$$p^{di}(n, k', k'', k) = \sum_{m=0}^{\min(n, k')} \sum_{l=0}^{\min(n, k'')} p^{g/u}(n, k', m) p^{g/u}(n, k'', l) \delta(k - (m + l)). \quad (2.3.7)$$

Die Wahrscheinlichkeiten p^{di} können nun in Computersimulationen und Differentialgleichungssystemen verwendet werden. Da die Mikrozustände der Genome der Individuen nun nicht mehr berücksichtigt werden müssen, hat dies eine Reduzierung der Rechenzeit und des Speicherbedarfs zur Folge.

2.3.2 Das haploide Genom

Als ein weiteres Modell zur Vererbung eines Traits mit diskreten Phänotypen bei sexueller Fortpflanzung wird eine Vereinfachung des obigen Modells betrachtet. Jedes Individuum besitzt nun ein haploides Genom aus $2n$ Loci ($n \in \mathbb{N}^+$), die die Besetzungszahlen $\eta(i) \in \{0, 1\}$ haben können. Der Phänotyp

$$k = \sum_{i=1}^{2n} \eta(i) \quad (2.3.8)$$

kann also wieder die $2n + 1$ diskreten Werte $k \in 0, 1, \dots, 2n$ annehmen (siehe Abb. 2.12).

Der Vererbungsvorgang sei wie folgt definiert: Jeder Elternteil vererbt auf seinen Nachkommen n zufällig ausgewählte Loci seines Genoms. Die Vererbung der Besetzungszahlen findet für jeden Elternteil unabhängig voneinander statt. Daher bietet es sich auch hier an, zunächst den isolierten Vererbungsvorgang der Loci eines Elternteils zu betrachten. In diesem Modell gibt es keine durch deterministische Vererbung

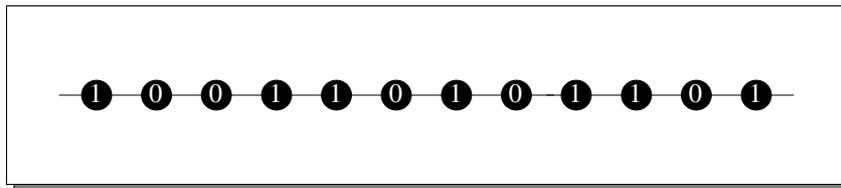


Abbildung 2.12: Veranschaulichung des Modells für ein haploides Genom. Das Genom besteht aus 12 Loci mit den Besetzungszahlen 0 oder 1. Das abgebildete Genom kodiert für den Phänotyp $k = 7$.

bestimmter Loci ausgezeichnete Zustände, so daß sich eine Klassifikation nach Mikrozuständen erübrigt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Phänotyp k m Loci mit Besetzungszahl $\eta(i) = 1$ auf seinen Nachkommen vererbt, ergibt sich hier aus der Hypergeometrischen Verteilung zu:

$$p^{Hyp}(2n, k, n)(m) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \binom{k}{m} \binom{2n-k}{n-m}. \quad (2.3.9)$$

Analog zum letzten Abschnitt folgt für die Wahrscheinlichkeit $p^{ha}(2n, k', k'', n, k)$, daß Eltern mit $2n$ haploiden Loci und den Phänotypen k' und k'' einen Nachkommen des Phänotyps k erzeugen:

$$p^{ha}(2n, k', k'', n, k) = \sum_{m=0}^{\min(n, k')} \sum_{l=0}^{\min(n, k'')} p^{Hyp}(2n, k', n)(m) p^{Hyp}(2n, k'', n)(l) \delta(k - (m + l)). \quad (2.3.10)$$

Obwohl die beiden Genommodelle aus den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 unterschiedliche Definitionen besitzen, sind sie in bezug auf ihre statistischen Eigenschaften identisch. Die Vererbungswahrscheinlichkeiten hängen nur von den Phänotypen der Eltern, und nicht von der spezifischen Definition des Genommodells ab. Es läßt sich zeigen, daß

$$\forall_{n, k', k'', k \in \mathbb{N}} \quad p^{ha}(2n, k', k'', n, k) = p^{di}(n, k', k'', k) \quad (2.3.11)$$

gilt. Der Beweis ist in Anhang A geführt. Im folgenden soll daher

$$C_{k'k''}^k(n) := p^{ha}(2n, k', k'', n, k) = p^{di}(n, k', k'', k) \quad (2.3.12)$$

stets die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, daß zwei Eltern mit den Phänotypen k' und k'' (resultierend aus einem Genom mit $2n$ Loci) einen Nachkommen des Phänotyps k erzeugen.

2.4 Entwicklungsgleichung in diskreter Zeit

2.4.1 Konzept

Evolutionmodelle wie das DGL-System (2.2.1) implizieren einen kontinuierlichen Überlapp der Generationen. Das Populationswachstum vieler in der Natur vorkommender Arten vollzieht sich jedoch, bedingt durch jahreszeitliche Einflüsse, in diskreten Zeitschritten sukzessiv aufeinander folgender Generationen. Zum Beispiel seien

hier die streng voneinander getrennten Lebenszyklen von Schmetterlingspopulationen genannt.

Diverse Aspekte des Wachstumsverhaltens solcher Arten werden durch eine große Zahl diskreter Modelle beschrieben [15–19]. Das Zeitintervall zwischen aufeinander folgenden Generationen wird hier stets auf eins skaliert. Üblicherweise beschreiben diese Modelle asexuell reproduzierende Populationen und sind gemeinhin von der Form:

$$N_{t+1} \approx N_t F(N_t) = f(N_t). \quad (2.4.1)$$

Hierbei ist N_t die Größe der betrachteten Population zum Zeitpunkt t und $F(N_t)$ ihre Fitneß. Die Fitneß kann, wie in Abschnitt 2.1 besprochen, auf das einzelne Individuum (dichteabhängig) oder die gesamte Population (frequenzabhängig) bezogen sein.

Im folgenden sollen eine (2.4.1) entsprechende Gleichung zur Beschreibung von sympatrischer Speziation in sexuell reproduzierenden Populationen aufgestellt und untersucht werden.

Ein-Trait-Modell:

Die Individuen der Population unterscheiden sich in bezug auf ein diskretes quantitatives Merkmal i , dem ein wie in Abschnitt 2.3 vorgestelltes Genom zugrunde liege. Der genetische Mikrozustand der betreffenden Individuen sei jedoch unbekannt. Das Merkmal i besitzt daher die Phänotypen $i \in \{0, 1, \dots, m, \dots, 2m\}$, hierbei ist $m \in \mathbb{N}^+$ beliebig (m legt die Größe des Genoms fest). N_i sei die Anzahl der Individuen zum Phänotyp i . Die Gesamtpopulationsgröße $N = \sum_i N_i$ sei als konstant angenommen. Das Modell kann also nicht die zeitliche Entwicklung der Gesamtgröße der Population beschreiben. Die Modellierung einer Extinktion der Gesamtpopulation ist zum Beispiel nicht möglich. Im folgenden soll dann die zeitliche Entwicklung der relativen Häufigkeiten $n_i = \frac{N_i}{N}$ untersucht werden ($\sum_i n_i = 1$).

Zwei Individuen der Phänotypen j und k erzeugen mit der Wahrscheinlichkeit $C_{jk}^i(m)$ einen Nachkommen vom Phänotyp i . Die Funktion $\Psi(j, k)$ soll die Präferenz bei der Partnerwahl der Individuen j und k charakterisieren. Die Fitneß eines Phänotyps i , oder der Teilpopulation N_i sei zunächst mit F_i bezeichnet. Das hier vorgestellte Konzept für die Entwicklungsgleichungen lautet:

”relativer Anteil n_i zum Zeitpunkt $t + 1$ ” \approx

”Geburtswahrscheinlichkeit n_i ” \times ”Wahrscheinlichkeit zu überleben (Fitneß)”.

Für die relativen Anteile der n_i zum Zeitpunkt $t + 1$ ergibt sich hieraus:

$$n_i(t+1) \approx \left(\sum_{j,k} C_{jk}^i(m) \Psi(j, k) n_j(t) n_k(t) \right) \cdot F_i \quad (2.4.2)$$

Zur Erhaltung der Normierung der n_i ist noch durch den Mittelwert der Fitneß \bar{f} zu dividieren:

$$\bar{f}(t) = \sum_{i,j,k} C_{jk}^i(m) \Psi(j, k) n_j(t) n_k(t) \cdot F_i \quad (2.4.3)$$

Schließlich erhält man für die n_i folgende Entwicklungsgleichung in diskreter Zeit:

$$n_i(t+1) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \left(\sum_{j,k} C_{jk}^i(m) \Psi(j, k) n_j(t) n_k(t) \right) \cdot F_i \quad (2.4.4)$$

Diese Gleichung soll im folgenden diskutiert werden.

2.4.2 Ergebnisse

Als Anfangskonfiguration ($t = 0$) sei eine Population gewählt, deren relative Häufigkeiten binomialverteilt um den intermediären Trait $i = m$ sind. Eine solche Konfiguration ergibt sich zum Beispiel aus einer freien Verteilung der Besetzungszahlen 0, 1 auf die Genome einer sehr großen Population. Die Phänotypen der Population seien folgender Fitneßlandschaft ausgesetzt, die einer disruptiven Selektion entspricht:

$$F(i, n_j, t) = F(i) = (1 - a) \left| \frac{i}{m} - 1 \right|^l + a, \quad (2.4.5)$$

mit $l \in \mathbb{N}^+$ und $0 < a < 1$ (dichteabhängige Fitneß). Zum Beispiel kann die Population infolge der Neubesiedelung eines Habitats veränderten Umweltbedingungen ausgesetzt sein, die die extremen Phänotypen begünstigen.

Zunächst gebe es keinerlei Präferenzen bei der Partnerwahl, d.h. $\Psi(i, j) = 1, \forall i, j$ (random Mating). In (2.4.5) gelte $a = 0.9$ und $l = 2$, darüber hinaus sei $m = 3$ gesetzt. (2.4.4) wird nun für verschiedene Zeitschritte iteriert. Abb. 2.13 zeigt die Phänotypenverteilung zu den Zeitpunkten $t = 0, 2, 100$. Nach kurzer Zeit kommt

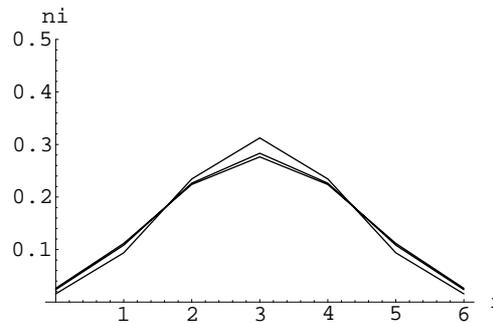


Abbildung 2.13: Relative Häufigkeiten n_i bei random Mating.

es zur Bildung eines stationären Zustandes. Die Häufigkeitsverteilung wird bedingt durch den Fitneßvorteil extremer Phänotypen zwar etwas flacher, durch die freie Partnerwahl werden jedoch stets intermediäre Phänotypen erzeugt und stabile Speziation bleibt aus.

Als nächstes soll nun assortatives Mating der Partnerwahl zugrunde liegen, das heißt bevorzugt sortengleiche Paarung (Abschnitt 2.1). Für die Matingfunktion $\Psi(i, j)$ soll gelten:

$$\Psi(i, j) = (1 - b) \left(1 - \frac{|i - j|}{2m} \right)^p + b, \quad (2.4.6)$$

mit $p \in \mathbb{N}^+$ und $b < 1$. Es seien $p = 4$ und $b = 0$ gewählt. Wieder wird (2.4.4) für verschiedene Zeitschritte iteriert. Abb. 2.14 zeigt die relativen Häufigkeiten der Population zu den Zeitpunkten $t = 0, 2, 10, 30, 40, 50$. Nach 50 Generationen kommt es zur Bildung eines stationären Zustandes, indem lediglich noch die beiden extremen Phänotypen existieren. Dieser Zustand kann als Speziation bezeichnet werden.

Im folgenden sollen weitere Ergebnisse der Untersuchungen der Gleichung (2.4.4) aufgelistet werden.

- Haupterkennnis aus (2.4.4) ist, welcher großen Einfluß das Verhalten der Individuen bei der Partnerwahl auf den Speziationsvorgang hat. Zum Beispiel ist kein stabiles Gleichgewicht wie in Abb. 2.14 möglich, wenn in (2.4.6) $b > 0$

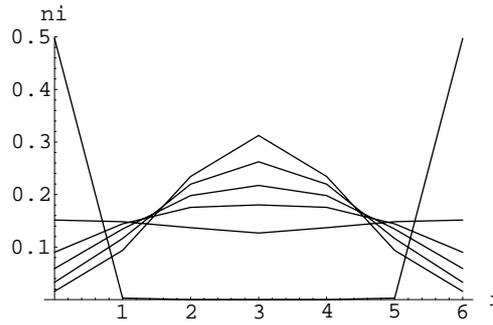


Abbildung 2.14: Relative Häufigkeiten n_i bei assortativem Mating.

gewählt wird. Reproduktive Isolation zwischen Individuen der beiden extremen Phänotypen ist also Voraussetzung der sympatrischen Speziation.

- Die Wahl der Funktionen (2.4.5) und (2.4.6) ist willkürlich. Zum Beispiel aus Gaußverteilungen gewonnene Darstellungen von Fitneß- und Matingfunktionen liefern vergleichbare Ergebnisse. Jedoch hängt es sehr stark von den Parameterwerten ab, ob sich die binomialverteilte Anfangspopulation unter der Dynamik von (2.4.4) in das Speziationsgleichgewicht entwickelt. Fitneß- und Matingfunktionen mit geringen Steigungen erschweren den Speziationsvorgang.
- Eine Erhöhung der Zahl der Genloci (und damit der in der Population vorhandenen Phänotypen) erschwert die Bildung eines Speziationsgleichgewichts.
- Die dichteabhängige Fitneßfunktion (2.4.5) hat den Nachteil, daß die Dynamik von (2.4.4) nicht unabhängig von den Anfangsbedingungen ist. Speziation ist nur möglich, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ $n_i = n_{|2m-i|}$ gilt. Unabhängigkeit von den Anfangsbedingungen kann man dann durch Einführung einer frequenzabhängigen Fitneßfunktion erreichen:

$$F(i, n_j, t) = 1 - \frac{1}{K_i} \sum_j n_j(t) c_{i,j} . \quad (2.4.7)$$

Hierbei sind K_i und $c_{i,j}$ die bereits in 2.2 eingeführten Kapazitäten und Kompetitionparameter der Phänotypen. Sie lassen sich zum Beispiel aus Gaußverteilungen gewinnen. Um zu vermeiden, daß $F(i, n_j, t) < 0$ auftritt (was negative Populationsgrößen $n_i < 0$ zur Folge hätte), bietet es sich an, die Ersetzung $F(i, n_j, t) \rightarrow \exp(kF(i, n_j, t))$ ($k \in \mathbb{R}^+$) vorzunehmen [16]. Mit einer solchen Fitneßfunktion erhält man Abb. 2.13 und Abb. 2.14 entsprechende Ergebnisse, die weitestgehend unabhängig von den Anfangsbedingungen sind. Als Voraussetzung zum Zeitpunkt $t = 0$ bleibt aber $n_m \geq n_j, \forall j \neq m$. Das heißt, die Teilpopulation mit dem intermediären Trait m muß die größte Gruppe innerhalb der Population sein.

2.5 DGL-Systeme mit sexueller Reproduktion

Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe der in den Abschnitten 2.2 und 2.4.1 gewonnenen Erkenntnisse DGL-Systeme zur Erklärung sympatrischer Speziation in Populationen mit sexueller Reproduktion aufzustellen und zu analysieren. Wie in Abschnitt 2.4 sei eine Population betrachtet, deren Individuen sich in einem diskreten

quantitativen Merkmal i unterscheiden (z.B. Schnabellänge). Die Vererbung dieser Eigenschaft vollzieht sich nach den in Abschnitt 2.3 berechneten Wahrscheinlichkeitswerten $C_{jk}^i(m)$. Somit können die Individuen der Gesamtpopulation die unterschiedlichen Phänotypen $i \in \{0, 1, \dots, m, \dots, 2m\}$ besitzen ($m \in \mathbb{N}^+$ bestimmt die Größe des Genoms). X_i sei die Größe der Teilpopulation der Individuen des Phänotyps i . In Analogie zu den in Abschnitt 2.2 aufgestellten Gleichungen bestimmt sich die Wachstumsrate einer Teilpopulation aus dem Produkt von Geburtsrate und Fitneß der Individuen eines Phänotyps. Die Fitneß der Individuen wird hierbei, wie in Abschnitt 2.2, aus einer frequenzabhängigen Fitneßfunktion bestimmt. Die durch sexuelle Reproduktion bedingte Geburtenrate wird wie in Abschnitt 2.4 gebildet. Es soll nun folgendes DGL-System betrachtet werden:

$$\frac{dX_i}{dt} = \left[\sum_{j,k=0}^{2m} C_{jk}^i(m) \Psi(|j-k|) X_j X_k \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{K_i} \sum_{l=0}^{2m} X_l c_{il} \right], \quad (2.5.1)$$

mit

$K_i :=$ Kapazität von X_i ,

$\Psi(|j-k|) :=$ Präferenz bei der Partnerwahl der Individuen i und j ,

$c_{ij} :=$ Kompetitiver Effekt von X_i auf X_j .

(2.5.1) wird im folgenden für $m = 1$ untersucht.

2.5.1 Das Drei-Zustands-Modell

Es sei der Fall eines Ein-Locus-Genoms betrachtet (Abschnitt 2.3.1), das heißt $m = 1$. Dem entspricht eine Population aus den drei Phänotypen $i = 0, 1, 2$. Ferner gelte wie in Abschnitt 2.2 $K_0 = K_2 = k$, $K_1 = K > k$ und für alle $i, j \in \{0, 1, 2\}$ mit $|i-j| = 1$: $c_{ij} = c < 1$. Aus (2.5.1) ergibt sich dann das DGL-System:

$$\begin{aligned} \frac{dX_0}{dt} &= \left[\Psi(0)X_0^2 + \Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \cdot \left[1 - \frac{X_0}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] = f_0(X_0, X_1, X_2), \\ \frac{dX_1}{dt} &= \left[\Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1^2 + \Psi(1)X_1X_2 + 2\Psi(2)X_0X_2 \right] \cdot \left[1 - \frac{X_1}{K} - c\frac{X_0}{K} - c\frac{X_2}{K} \right] = f_1(X_0, X_1, X_2), \\ \frac{dX_2}{dt} &= \left[\Psi(0)X_2^2 + \Psi(1)X_1X_2 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \cdot \left[1 - \frac{X_2}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] = f_2(X_0, X_1, X_2). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Sei nun zunächst der Fall präferenzloser Partnerwahl betrachtet, das heißt $\Psi(|i-j|) = 1, \forall_{i,j}$ (random Mating). (2.5.2) besitzt dann die biologisch relevanten Fixpunkte:

$$\vec{u}_a^* = (k, 0, 0), \quad \vec{u}_b^* = (0, 0, k), \quad \vec{u}_c^* = \left(\frac{k-cK}{1-2c^2}, \frac{K-2ck}{1-2c^2}, \frac{k-cK}{1-2c^2} \right). \quad (2.5.3)$$

Es gibt also bei freier Partnerwahl keinen Speziations-Fixpunkt der alleinigen Koexistenz der Zustände $i = 0, 2$. Die Nachkommen aus gemischten Verbindungen zwischen Phänotypen 0 und 2 sind stets intermediären Typs 1.

Auch kann es, anders als in Abschnitt 2.2 im Fall asexueller Reproduktion, wegen der Durchmischung der Zustände infolge der sexuellen Fortpflanzung keinen Fixpunkt der Form $(0, u_2^* > 0, 0)$ geben. Eine alleinige Existenz des intermediären Phänotyps ist also unmöglich.

Die aus der Jacobi-Matrix

$$\mathcal{A}|_{\vec{u}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} & \frac{\partial f_0}{\partial X_1} & \frac{\partial f_0}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_0} & \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_0} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} \Big|_{\vec{u}^*} \quad (2.5.4)$$

resultierenden Eigenwerte λ bestimmen die Stabilität der Fixpunkte (die Koeffizienten $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ der Matrix \mathcal{A} für allgemeines $\Psi(|i - j|)$ sind in Anhang B.I aufgeführt).

1. $\vec{u}_{a/b}^*$:

Für $\vec{u}_{a/b}^*$ ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -k, \quad \lambda_3 = k\left(1 - c\frac{k}{K}\right). \quad (2.5.5)$$

Es ist $\lambda_3 < 0$, wenn $c > \frac{K}{k} > 1$ gilt. Da aber stets $c < 1$ gilt, sind $\vec{u}_{a/b}^*$ instabile Fixpunkte.

2. \vec{u}_c^* :

\vec{u}_c^* besitzt die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{(K + 2k - 2(K + k)c)^2}{4k(1 - 2c^2)^2}, \\ \lambda_{2/3} &= -\frac{(K + 2k - 2(K + k)c)^2(K + 2k \pm \sqrt{(K - 2k)^2 + 16kKc^2})}{8k(1 - 2c^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

\vec{u}_c^* ist nur dann eine biologisch sinnvolle Lösung (Koexistenz), wenn $\forall_i : u_{c_i}^* > 0$ gilt:

1.Fall:

$$c < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c < \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c < \frac{K}{2k}. \quad (2.5.7)$$

Durch einfache algebraische Umformungen von (2.5.6) läßt sich dann zeigen, daß im Fall $c = \frac{1 + \frac{K}{2k}}{1 + \frac{K}{k}}$ \vec{u}_c^* stabil (das heißt, für alle Eigenwerte gilt $\lambda_i \leq 0$), ansonsten asymptotisch stabil ist.

2.Fall:

$$c > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c > \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c > \frac{K}{2k}. \quad (2.5.8)$$

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus (2.5.6) $\lambda_2 > 0$, somit ist \vec{u}_c^* stets instabil.

Als nächstes soll der Fall betrachtet werden, indem die Partnerwahl durch die Phänotypen bestimmt wird (assortatives Mating). Hierzu sei die Matingfunktion Ψ wie folgt gewählt:

$$\Psi(i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, 1, \\ 0 & \text{für } i = 2. \end{cases} \quad (2.5.9)$$

In diesem Fall besitzt (2.5.2) die biologisch relevanten Fixpunkte:

$$\begin{aligned}\vec{u}_a^* &= (k, 0, 0) \quad , \quad \vec{u}_b^* = (0, 0, k) \quad , \\ \vec{u}_c^* &= \left(\frac{k - cK}{1 - 2c^2}, \frac{K - 2ck}{1 - 2c^2}, \frac{k - cK}{1 - 2c^2} \right) \quad , \\ \vec{u}_d^* &= (k, 0, k) \quad .\end{aligned}\tag{2.5.10}$$

Bei assortativer Partnerwahl existiert also zusätzlich der Speziationsfixpunkt \vec{u}_d^* .

1. $\vec{u}_{a/b}^*$:

Den Fixpunkten $\vec{u}_{a/b}^*$ sind dieselben Eigenwerte wie in (2.5.5) der Jacobi-Matrix $\mathcal{A}|_{\vec{u}^*}$ zugeordnet. Sie sind daher stets instabil (s.o.).

2. \vec{u}_c^* :

Die Eigenwerte λ_i des Koexistenzfixpunktes \vec{u}_c^* sind in Anhang B.I aufgeführt. Wie im Fall der zufälligen Partnerwahl sind nur diejenigen Lösungen biologisch sinnvoll, für die $\forall_i : u_{ci}^* > 0$ gilt:

1.Fall:

$$c < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c < \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c < \frac{K}{2k} .\tag{2.5.11}$$

Leicht zeigt man zunächst, daß $\lambda_1 < 0$ für $c \neq \frac{1 + \frac{K}{2k}}{1 + \frac{K}{k}}$ gilt ($\lambda_1 = 0$ für $c = \frac{1 + \frac{K}{2k}}{1 + \frac{K}{k}}$). Für $\lambda_{2/3}$ kann man aufgrund ihrer komplizierten Struktur keine analytischen Abschätzungen angeben. Daher muß man bei gegebenen K und k die Realteile der Eigenwerte $\lambda_{2/3}$ indem für c durch (2.5.11) vorgegebenen Parameterbereich numerisch berechnen. Sei zum Beispiel $K = 4$ und $k = 3$ gewählt. In Abb. 2.15 sind dann die Realteile der Eigenwerte $\lambda_{2/3}$ in dem Intervall $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ aufgetragen.

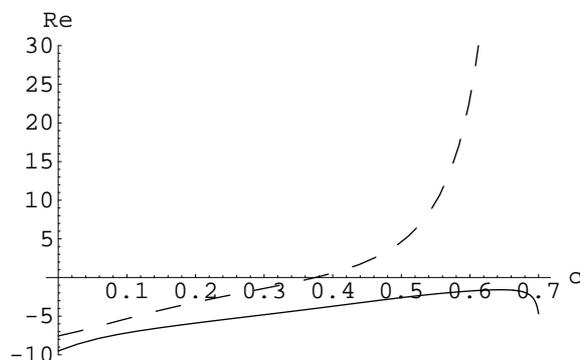


Abbildung 2.15: Realteile (Re) der Eigenwerte $\lambda_2 = \text{—}$ und $\lambda_3 = \text{-- --}$, in Abhängigkeit von c .

Wählt man nun zum Beispiel $c = 0.3$, so ist der Koexistenzfixpunkt \vec{u}_c^* asymptotisch stabil. Abb. 2.16 zeigt für diese Parameter k , K und c den zeitlichen Verlauf der Populationsgrößen, der sich aus der numerischen Lösung von (2.5.2) ergibt. Als Anfangskonfiguration sei $X_0 = 4.3$, $X_1 = 0.7$, $X_2 = 0$ gewählt.

Anders als im Fall der asexuellen Reproduktion in Abschnitt 2.2, wo die Erfüllung der Nebenbedingungen (2.2.13) und (2.2.14) genügte, um stabile Koexistenz der drei Zustände zu gewährleisten, reicht die Erfüllung von (2.5.11) bei sexueller Reproduktion hierzu alleine nicht mehr aus.

2.Fall:

$$c > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c > \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c > \frac{K}{2k} .\tag{2.5.12}$$

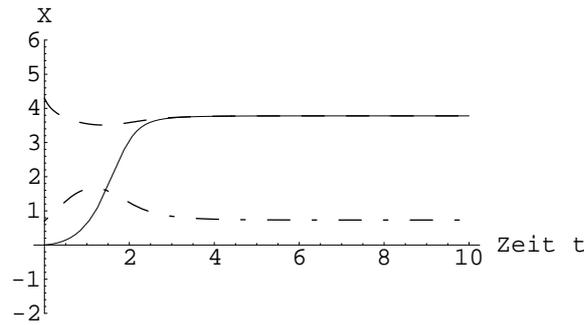


Abbildung 2.16: Zeitlicher Verlauf der Populationen $X_0 = - -$, $X_1 = - \cdot -$, $X_2 = - -$. Alle drei Teilpopulationen koexistieren stabil.

Wieder gilt, daß für $c = \frac{1 + \frac{K}{2k}}{1 + \frac{K}{k}}$ $\lambda_1 = 0$ und sonst $\lambda_1 < 0$ ist. Im Intervall $] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ sind die Realteile von $\lambda_{2/3}$ numerisch zu betrachten. In allen untersuchten Fällen war \vec{u}_c^* instabil.

3. \vec{u}_d^* :

Der Speziationsfixpunkt $\vec{u}_d^* = (k, 0, k)$ führt zu den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = -k, \quad \lambda_2 = -k, \quad \lambda_3 = 1 - 2c \frac{k}{K}. \quad (2.5.13)$$

Hieraus folgt für den stationären Zustand:

$$\vec{u}_d^* \text{ ist } \begin{cases} \text{asymptotisch stabil} & \text{für } c > \frac{K}{2k}, \\ \text{instabil} & \text{für } c < \frac{K}{2k}. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Unter der Voraussetzung $\Psi(2) = 0$ ist also stabile sympatrische Speziation in einer sexuell reproduzierenden Population möglich. Die wird auch durch Abb. 2.17 dokumentiert, die den zeitlichen Verlauf der Populationsgrößen, der aus (2.5.2) resultiert, zeigt. Es gelte $k = 3$, $K = 4$ und $c = 0.7$. Als Anfangskonfiguration sei $X_0 = 0$, $X_1 = 8$, $X_2 = 5$ gewählt.

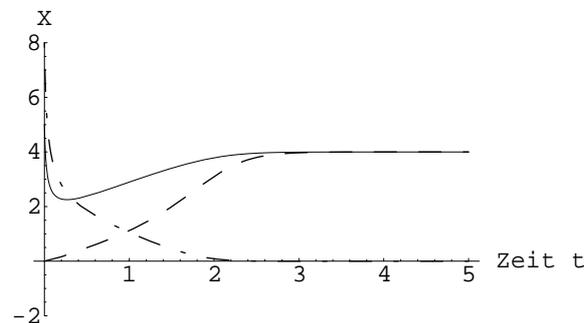


Abbildung 2.17: Zeitlicher Verlauf der Populationsgrößen $X_0 = - -$, $X_1 = - \cdot -$, $X_2 = - -$. Es bildet sich stabile Speziation trotz sexueller Reproduktion aus.

Untersucht man (2.5.2) für $m > 1$, so kommt man zu Ergebnissen, die den in diesem Kapitel gewonnenen vergleichbar sind. Stabile Speziation ist unter der Voraussetzung $\Psi(2m) = 0$ auch für Systeme mit einer größeren Anzahl von Phänotypen

möglich. Allerdings ist es nicht mehr möglich, explizite Angaben über die Stabilität des Systems in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Parameter zu treffen. Die Untersuchungen vollziehen sich dann vornehmlich auf numerischem Weg.

Abschließend soll im folgenden Kapitel eine Variation des Modells (2.5.1) diskutiert werden. Zusätzlich wird nun eine weitere quantitative Eigenschaft der Individuen eingeführt, die selektiv neutral ist und allein für die Partnerwahl verantwortlich zeichnet.

2.5.2 Das Zwei-Trait-Modell

In dem Modell (2.5.1) wird sowohl die Fitneß der Individuen, als auch die Präferenz bei der Partnerwahl durch das eine quantitative Merkmal i festgelegt. Ein realistischerer Ansatz ist es jedoch, Fitneß und Präferenz bei der Partnerwahl durch zwei verschiedene Merkmale i und j bestimmen zu lassen. Das Merkmal i bestimme die Fitneß der Individuen und soll weiterhin die Phänotypen $i \in \{0, 1, \dots, m, \dots, 2m\}$ ($m \in \mathbb{N}^+$) besitzen. Zusätzlich wird ein weiteres selektiv neutrales Merkmal j eingeführt, welches die Partnerwahl reguliert. Dieser sogenannte *Marker Trait* besitzt die Phänotypen $j \in \{0, \dots, s, \dots, 2s\}$ ($s \in \mathbb{N}^+$). Man kann sich dieses Merkmal etwa als Körperfarbe der Individuen vorstellen. In diesem Bild bedeutet $j = 0$ zum Beispiel weiße Körperfarbe, $j = 2s$ schwarze Körperfarbe. Die anderen Werte von j kennzeichnen dann abgestufte grau-Werte zwischen weiß und schwarz. Die Vererbung der beiden Eigenschaften geschieht statistisch völlig unabhängig, so daß sich folgende Ersetzungen ergeben:

$$\begin{aligned} X_i(t) &\longrightarrow X_{ij}(t) , \\ C_{jk}^i(m)X_jX_k &\longrightarrow C_{op}^i(m)C_{kl}^j(s)X_{ok}X_{pl} . \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Die (2.5.1) entsprechende Entwicklungsgleichung für die X_{ij} lautet dann

$$\frac{dX_{ij}}{dt} = \left[\sum_{o,p=0}^{2m} \sum_{k,l=0}^{2s} C_{op}^i(m)C_{kl}^j(s)\Psi(|k-l|)X_{ok}X_{pl} \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{K_i} \sum_{l=0}^{2m} \left(\sum_{f=0}^{2s} X_{lf} \right) c_{il} \right] . \quad (2.5.16)$$

Eigenschaften dieser Gleichung sollen im folgenden für $m = 1$ und $s = 1$ diskutiert werden. Die beiden Merkmale i und j besitzen also jeweils drei Phänotypen.

Es soll nur der Fall assortativer Partnerwahl betrachtet werden ($\Psi(0/1) = 1$, $\Psi(2) = 0$). Drei Fixpunkte sind von Interesse:

1.: Der Koexistenzfixpunkt \vec{u}_a^* mit $u_{aij}^* > 0 \forall ij \in \{0, 1, 2\}$ ist bezüglich des selektiv neutralen Marker Traits entartet. Bedingung für die Stationarität ist:

$$\sum_{j=0}^2 u_{a0j}^* = \frac{k - cK}{1 - 2c^2}, \quad \sum_{j=0}^2 u_{a1j}^* = \frac{K - 2ck}{1 - 2c^2}, \quad \sum_{j=0}^2 u_{a2j}^* = \frac{k - cK}{1 - 2c^2}. \quad (2.5.17)$$

Mehrere physikalisch sinnvolle Lösungen von (2.5.17) sind denkbar. Eine plausible Annahme ist, daß den relativen Größenanteilen des Marker Traits eine freie Verteilung der Besetzungszahlen 0, 1 auf die Genome der Individuen zugrunde liegt. Ihr entsprechen binomialverteilte relative Größen:

$$\frac{u_{ai0/2}^*}{\sum_{i=0}^2 u_{ai0/2}^*} = \frac{1}{4}, \quad \frac{u_{ai1}^*}{\sum_{i=0}^2 u_{ai1}^*} = \frac{1}{2}, \quad \forall ij \in \{0, 1, 2\}. \quad (2.5.18)$$

Wie in Abschnitt 2.5.1 sind nur diejenigen Lösungen biologisch sinnvoll, für die $\forall_i : u_{aij}^* > 0$ gilt. Hier soll der Fall

$$c < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad c < \frac{k}{K} \quad \wedge \quad c < \frac{K}{2k}. \quad (2.5.19)$$

betrachtet werden (die Diskussion des zweiten Falls verläuft analog). Die sich aus der Jacobi-Matrix

$$\mathcal{A}|_{\vec{u}^*} = \left(\frac{\partial \left(\frac{dX_{ij}}{dt} \right)}{\partial X_{kl}} \right) |_{\vec{u}^*} \quad (2.5.20)$$

ergebenden Eigenwerte sind in Anhang B.II aufgeführt. Für die ersten 6 Eigenwerte gilt: $\lambda_1, \dots, \lambda_6 = 0$. Für die restlichen Eigenwerte gilt: $\lambda_i < 0$, $i = 7, 8, 9$. Unter der Nebenbedingung (2.5.19) ist also der Koexistenzfixpunkt \vec{u}_a^* stets stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

2. und 3.: Die beiden Speziationsfixpunkte \vec{u}_b^* und \vec{u}_c^* besitzen die Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{u}_b^* : u_{b00}^* = u_{b22}^* = k, \quad u_{bij}^* = 0 \text{ sonst}, \\ \vec{u}_c^* : u_{b02}^* = u_{b20}^* = k, \quad u_{bil}^* = 0 \text{ sonst}. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Abb. 2.18 zeigt zur graphischen Verdeutlichung die Dichteprofile der Fixpunkte \vec{u}_b^* und \vec{u}_c^* .

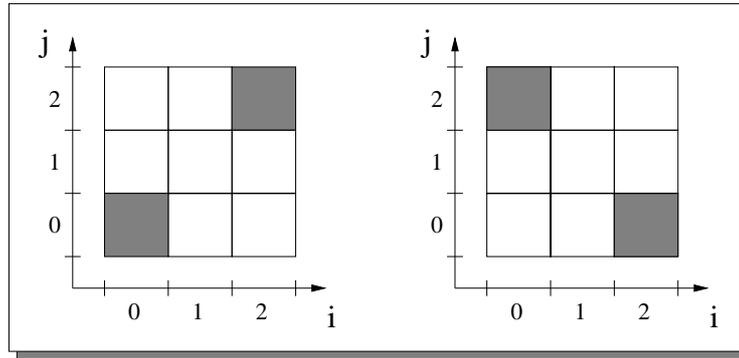


Abbildung 2.18: Komponenten $u_{b/cij}^*$ als Dichteprofile. Links: \vec{u}_b^* , rechts: \vec{u}_c^* .

\vec{u}_b^* und \vec{u}_c^* führen zu denselben Eigenwerten der Jacobi-Matrix $\mathcal{A}|_{\vec{u}_{b/c}^*}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_5, \lambda_6 &= -k, \\ \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9 &= k \left(1 - \frac{2ck}{K} \right). \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Hieraus folgt für die stationären Zustände:

$$\vec{u}_b^* \text{ und } \vec{u}_c^* \text{ sind } \begin{cases} \text{stabil} & \text{für } c > \frac{K}{2k}, \\ \text{instabil} & \text{für } c < \frac{K}{2k}. \end{cases} \quad (2.5.23)$$

Wiederum kann für die Speziationsfixpunkte keine asymptotische Stabilität erreicht werden.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine Population, deren zeitliche Entwicklung durch (2.5.16) beschrieben wird, einem der beiden Fixpunkte \vec{u}_b^* oder \vec{u}_c^* zustreben kann. Offensichtlich ist keiner der beiden Punkte vor dem anderen in irgendeiner Weise ausgezeichnet. An dieser Stelle ist es nützlich, eine neue Meßgröße der Population einzuführen, die Korrelation LD zwischen den beiden Merkmalen i und j :

$$LD = \langle i \cdot j \rangle - \langle i \rangle \langle j \rangle . \quad (2.5.24)$$

Diese Größe wird in der Populationsgenetik als *Linkage Disequilibrium* bezeichnet [15]. Offenbar gilt für den Koexistenzfixpunkt \vec{u}_a^* mit $u_{aij}^* = u_{ai|2-j}^* = u_{a|2-i|j}^* = u_{a|2-i||2-j}^*$: $LD = 0$. Die beiden Merkmale i und j werden nach (2.5.16) statistisch völlig unabhängig voneinander vererbt, der reine Vererbungsvorgang induziert keine Bildung von Korrelationen. Daher gilt für eine durch (2.5.16) beschriebene Population mit $LD(t_0) = 0$ stets: $LD(t_1) = 0, \forall t_1 > t_0$. \vec{u}_b^* besitzt jedoch eine Korrelation von $LD = 1$, \vec{u}_c^* eine von $LD = -1$. Diese Zustände sind in realistischen, endlichen Populationen mit $LD = 0$ nur zu erreichen, wenn es infolge von stochastischen Fluktuationen zu spontaner Symmetriebrechung mit $LD > 0$ oder $LD < 0$ kommt. Solche stochastischen Fluktuationen können mit Hilfe des deterministischen Modells (2.5.16) nicht beschrieben werden. Sie sind jedoch zentraler Gegenstand in Computersimulationen [7, 8, 11, 12], in denen der Vorgang der sympatrischen Speziation als stochastischer Prozeß aufgefaßt wird.

3 Simulation von Fußgängerdynamik

3.1 Vorbetrachtungen

Viele Probleme aus dem Bereich der Verkehrsdynamik sind in den letzten Jahren erfolgreich mit Hilfe von etablierten Methoden der theoretischen Physik untersucht worden [21–30]. Infolge grundlegender Arbeiten stellen Zellular-Automaten hierbei eine wichtige Klasse von Modellen dar [31–33]. Zunächst beschäftigte man sich fast ausschließlich mit eindimensionalen Systemen. Mit Hilfe analytischer Ansätze ließen sich einige Modelle exakt lösen¹ [30]. Man konzentrierte sich bei diesen Untersuchungen primär auf die möglichst treffende Beschreibung der Dynamik von Fahrzeugen im Straßenverkehr [36].

Andererseits werden physikalische Modelle zur Beschreibung der Dynamik von Fußgängern erst seit kurzer Zeit untersucht [37]. Aufgrund ihrer generisch zweidimensionalen Struktur gestaltet sich die Beschreibung der Bewegung von Fußgängern anhand einfacher Modelle als kompliziert.

Allerdings konnten bereits viele interessante kollektive Effekte und Selbstorganisations-Phänomene beobachtet werden, wie zum Beispiel Stauformationen, Spurbildung und Oszillationen an Engstellen im Gegenverkehr (eine ausführliche Betrachtung hierzu findet sich in [28, 38], einige der wichtigsten Phänomene sollen in Abschnitt 3.2.1 aufgelistet werden).

Die beobachtbaren Phänomene können sich in sehr unterschiedlichen Verhaltensweisen von Fußgängern manifestieren. Als Beispiel sei hier der Gegensatz zwischen der Bewegung in geordneten Formationen einerseits, und unkontrollierter Bewegung in Paniksituationen andererseits, genannt. Es ist daher wünschenswert, bei der Modellbildung das gesamte Spektrum des Verhaltens von Fußgängern zu berücksichtigen und in einheitlicher Form zu beschreiben.

Die meisten der bisher vorgestellten diskreten Modelle zur Dynamik von Fußgängern [39–43] sind rudimentäre Verallgemeinerungen eines ursprünglichen Ansatzes zur Beschreibung von Stadtverkehr (des sogenannten *Biham-Middleton-Levin*-Modells [31]) und nicht in der Lage, die gesamte Breite des beobachtbaren Verhaltens zu reproduzieren.

Bis jetzt ist hauptsächlich das sogenannte *social force model* (Sozialkräfte-Modell) [28, 44] in der Lage, das gesamte Spektrum des Fußgängerverhaltens zu beschreiben (eine kurze Diskussion der bereits existierenden Modelle zur Fußgängerdynamik findet sich in Abschnitt 3.2.2). Bei diesem kontinuierlichen Modell werden die Fußgänger als Teilchen aufgefaßt, deren Bewegung durch ein System von Grundkräften und Mehrteilchenwechselwirkungen gegeben ist.

Die Simulation dieses Modells läuft auf die numerische Integration von gekoppelten Differentialgleichungen hinaus. Dazu müssen Raum und Zeit diskretisiert werden,

¹Prominentestes Modell ist hier der Asymmetrische Exklusionsprozeß (ASEP), der für verschiedenste Randbedingungen und Dynamiken beispielsweise durch Clusterapproximationen oder Matrix-Produkt-Ansatz (MPA) gelöst werden kann [34, 35].

wobei jedoch Raum- und Zeitschritt sehr klein werden müssen, um die Diskretisierungsfehler im Rahmen zu halten. Die Fußgänger wechselwirken miteinander durch eine repulsive (soziale) Kraft, die im allgemeinen exponentiell mit ihrem Abstand abfällt. Daraus ergibt sich, daß in jedem Schritt einer Simulation von N Individuen im Prinzip $O(N^2)$ Wechselwirkungsterme berechnet werden müssen². Daher können diese Simulationen, besonders im Fall einer sehr großen Zahl N von Fußgängern, sehr zeitaufwendig werden.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, ein Zellularautomaten-Modell (CA-Modell) zur Beschreibung von Fußgänger-Dynamik vorzustellen, daß in der Lage ist, die wichtigsten kollektiven Effekte im Verhalten von Fußgängern zu reproduzieren und andererseits die Zahl der Wechselwirkungsterme pro Zeitschritt auf $O(N)$ zu reduzieren. Diese Reduzierung zusammen mit der Diskretheit des Modells führt zu einer sehr effizienten Implementierung auf dem Computer und zu sehr hohen Simulationsgeschwindigkeiten. Daher ist es möglich, mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen die kompletten statistischen Eigenschaften des Modells zu quantifizieren.

Bevor die Grundprinzipien des Modells und seine Definition genau erörtert werden, sollen im folgenden die wichtigsten bekannten kollektiven Effekte im Verhalten von Fußgängern aufgelistet werden. Jedes vernünftige Modell sollte in der Lage sein, diese Phänomene zu reproduzieren, andernfalls wird die Dynamik nicht vollständig erfaßt. Anschließend wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten, bereits existierenden Modelle zur Dynamik von Fußgängern gegeben.

3.2 Kollektive Phänomene und Modelle zur Fußgängerdynamik

3.2.1 Kollektive Phänomene der Dynamik von Fußgängern

Die Dynamik von Fußgängern enthält ein großes Spektrum faszinierender kollektiver Effekte, die in den letzten Jahren qualitativ und quantitativ erfaßt worden sind [28, 38]:

- **Staubildung:** Bei hohen Fußgängerdichten kommt es zu verschiedenen Arten von Stauphänomenen, zum Beispiel wenn viele Menschen versuchen, einen Raum gleichzeitig durch eine Tür zu verlassen [38, 45–52]. Zu solchen Verstopfungseffekten kommt es typischerweise an Engstellen. Zu anderen Arten von Stauung kommt es im Fall von Gegenverkehr, wenn zwei Gruppen von Fußgängern sich gegenseitig blockieren [40, 41]. Dies ereignet sich vornehmlich bei sehr hohen Dichten, bei denen die Fußgänger nicht in der Lage sind, ihre Laufrichtung zu ändern. Sie werden dabei von nachrückenden Fußgängern daran gehindert, sich umzudrehen und so dem Stau zu entkommen.
- **Spurbildung:** Im Gegenverkehr, also wenn zwei Gruppen von Fußgängern sich in entgegengesetzte Richtungen fortbewegen wollen, kann es zu einer Art spontaner Symmetriebrechung kommen. Die Dichten der sich entgegengesetzt fortbewegenden Fußgänger sind dann nicht mehr symmetrisch auf den zur Verfügung stehenden Raum verteilt. Durch Selbstorganisation kommt es zur Ausbildung dynamisch variierender Spuren sich in selber Richtung bewegend der Fußgänger [44]. Auf diese Weise werden Wechselwirkungen mit entgegen-

²Die Molekularfeldtheorie besitzt jedoch Methoden, die Anzahl dieser Wechselwirkungsterme effektiv zu reduzieren.

kommenden Fußgängern vermieden und höhere Laufgeschwindigkeiten sind möglich. Das Phänomen der Spurbildung ist in Abb. 3.1 verdeutlicht.



Abbildung 3.1: Spurbildung bei einer hohen Dichte von Fußgängern [53].

- **Oszillationen:** Im Gegenverkehr an Engstellen wie zum Beispiel Türen, lassen sich oszillierende Wechsel der Bewegungsrichtung erkennen [44]. Hat ein Fußgänger eine Engstelle passiert, so ist das Nachfolgen anderer in derselben Richtung stark erleichtert, bis es einem Fußgänger gelingt, die Engstelle in der Gegenrichtung zu passieren (zum Beispiel durch eine Fluktuation, siehe Abb. 3.2).

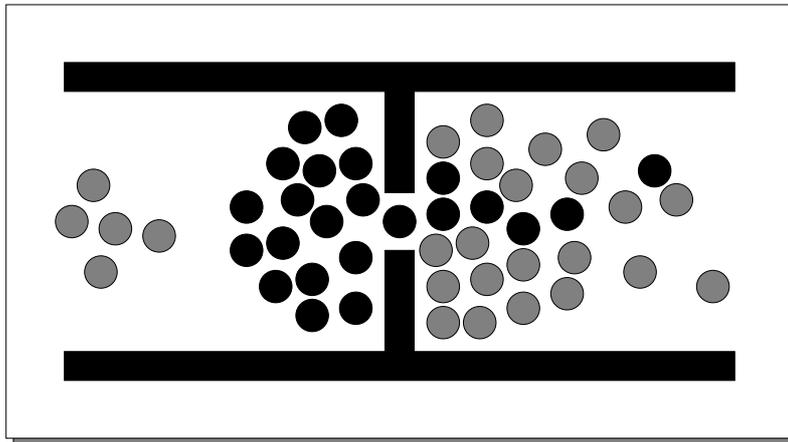


Abbildung 3.2: Verdeutlichung der Oszillationen an einer Engstelle in einem Korridor. Graue Teilchen bewegen sich von rechts nach links und schwarze von links nach rechts durch den Korridor.

- **Muster an Kreuzungen:** An Kreuzungspunkten von Fußgängerströmen kann es zur Ausbildung verschiedener Bewegungsmuster kommen [28, 38, 43]. Ein typisches Beispiel sind kurzlebige Kreisverkehrströme, die die Bewegung effizienter machen können [28, 38]. Zwei sich kreuzende Fußgängerströme bilden mitunter charakteristische Streifenmuster aus.

- **Ausbildung von Trampelpfaden:** Obwohl Trampelpfade von Menschen und Tieren aus unterschiedlichen Gründen gebildet werden, haben ihre Strukturen doch einige Gemeinsamkeiten [46, 54]. Meistens werden menschliche Trampelpfade als Abkürzung zwischen bereits bestehenden vorgegebenen Laufwegen gebildet (siehe Abb. 3.3). Die Pfade von Tieren stehen in der Regel in Verbindung mit dem Phänomen der Chemotaxis (siehe Abschnitt 3.3) und können geeignete Wege zu Futterstellen markieren.



Abbildung 3.3: Trampelpfade auf dem Campus der Universität zu Köln.

- **Panik:** In Paniksituationen, ausgelöst zum Beispiel durch Feuer oder unvorhergesehene gewalttätige Übergriffe vereinzelter Gruppen in Fußballstadien, kommt es oft zu irrationalen kollektiven Handlungen, die fatale Auswirkungen für die Beteiligten haben können (siehe Abb. 3.4). Zum Beispiel kann es zu



Abbildung 3.4: Opfer einer Katastrophe im Ellis Park Stadion von Johannesburg, Süd Afrika 11.4. 2001. Bei einem Spiel zwischen den Orlando Pirates und den Kaizer Chiefs kam es nach Auseinandersetzungen gewalttätiger Fangruppen zu einer Panik unter den Besuchern des Spiels, die viele Verletzte und Todesopfer zur Folge hatte.

Verstopfungen an Engstellen durch starkes Drängeln nachrückender Fußgänger kommen. Auch ist ein starkes Herdenverhalten in panischen Menschenmengen beobachtbar. Große Gruppen orientieren sich ohne rationale Prüfung an den Entscheidungen einiger weniger Personen, in dem sie deren Laufrichtung einschlagen. Auch ist bekannt, daß Fußgänger in Paniksituationen durch nervöses Agieren oder durch Erhöhung ihrer Laufgeschwindigkeit, bei gleichzeitiger Mißachtung anderer Fußgänger, Laufwege verstopfen und den globalen Fluß erniedrigen können. Diese Phänomene werden als *freezing-by-heating* und *faster-is-slower-Effekt* bezeichnet und sind in [55, 56] ausführlich untersucht worden. In diesen Artikeln findet sich eine ausführliche Diskussion von Panik-Phänomenen.

Aus [57] und aus dieser Arbeit geht hervor, daß der in den folgenden Kapiteln vorgestellte Zellularautomat in der Lage ist, trotz seiner Einfachheit, viele Aspekte dieser beobachtbaren, kollektiven Effekte zu reproduzieren. Der Schwerpunkt von [45, 57] liegt in einer ausführlichen Diskussion der Reproduktion des Phänomens der Spurbildung.

3.2.2 Fußgängermodelle

Kontinuierliche Modelle

Das bereits weiter oben angesprochene *social force model* ist das prominenteste und erfolgreichste aller Modelle zur Fußgängerdynamik [28, 44]. Ein Ensemble von Fußgängern wird hierbei als wechselwirkendes Vielteilchensystem aufgefaßt. Auf jedes Individuum des Ensembles wirkt zu jeder Zeit eine bestimmte Kraft, die aus dem Sozialverhalten der Menschen abgeleitet wird. Ferner werden noch geometrische Zwangsbedingungen durch die räumliche Struktur betrachtet. In Anlehnung an die Newtonsche Mechanik lautet die Bewegungsgleichung für ein Teilchen α :

$$\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = -\nabla_\alpha V_\alpha ,$$

mit dem zusammengesetzten Potential

$$V_\alpha = V_A(\vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha) + V_B(\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha \neq \beta} V_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha; \vec{r}_\beta, \vec{v}_\beta) .$$

Der erste Term beschreibt das individuelle Antriebs- und Dissipationsverhalten eines einzelnen Teilchens und inkorporiert Informationen zur Vorzugsrichtung und -geschwindigkeit. Der zweite sorgt dafür, daß die Teilchen die gegebenen Geometrien berücksichtigen. Hierbei werden Wände zum Beispiel durch ein abstoßendes Potential repräsentiert.

Dem letzten Term der Gleichung verdankt das Modell schließlich seinen Namen. In ihm werden verschiedene Wechselwirkungen zwischen den Teilchen zusammengefaßt. Es findet sich eine orts- und geschwindigkeitsabhängige Abstoßung, die dem Wunsch nach möglichst ungestörter persönlicher Umgebung der Individuen Rechnung trägt. Darüber hinaus existieren eventuelle längerreichweitige Anziehungen, um Gruppenverhalten zwischen den Teilchen zu erzeugen. Hierbei ist jedoch im allgemeinen das dritte Newtonsche Axiom *actio = reactio* nicht erfüllt.

Insgesamt erhält man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen, das nach entsprechender Diskretisierung numerisch zu integrieren ist. Dieses System ist getrieben, gedämpft und hochgradig nichtlinear.

Die sogenannten *Active Walker Modelle* [54] dienen dazu, die Entstehung von Trampelpfaden zu simulieren. Der Unterschied zu den Sozialkräftenmodellen besteht in der Einführung eines Feldes, das zum Beispiel die Stärke des Bodenbewuchses darstellt. Die Teilchen reduzieren diesen auf ihrem Weg und versuchen ihrerseits, den Spuren anderer zu folgen. An Stellen, die längere Zeit nicht von einem Teilchen überquert worden sind, erholt sich der Bodenbewuchs wieder. Dabei läßt sich verfolgen, daß sich Trampelpfade vor allem dort ausbilden, wo ihre Benutzung eine deutliche Verkürzung der Wegstrecke mit sich bringt.

Diese Modelle ermöglichen die Wiedergabe einer großen Anzahl kollektiver Effekte, besitzen jedoch sehr viele Parameter. Auch ist zu bemerken, daß die zur numerischen Behandlung erforderliche Diskretisierung der eigentlichen Natur des Modells entgegensteht und nicht wie beim zellulären Automaten integraler Bestandteil ist.

Diskrete Modelle

Wie bereits erwähnt, sind die meisten diskreten Modelle zur Fußgängerdynamik Verallgemeinerungen des *Biham-Middleton-Levin-Modells* zur Beschreibung von Stadtverkehr. Gipps und Marksjö stellten bereits 1985 ein Modell zur Simulation von Fußgängern vor [58]. Hierbei wird die betrachtete Grundfläche in ein regelmäßiges Quadratgitter eingeteilt. Die Fußgänger folgen einem Pfad von aufeinanderfolgenden Zielknoten. Dabei wird die Abstoßung der Teilchen untereinander durch ein diskretes Potential realisiert, das in der nächsten Umgebung jedes Teilchens auftritt und am Ort des Teilchens einen sehr hohen Wert besitzt, um Kollisionen auszuschließen. Die Potentiale aller Teilchen werden superpositioniert, um das gesamte abstoßende Potential zu bestimmen. Die Hüpfrichtung der Teilchen richtet sich nun einerseits nach ihrer Lage relativ zum aktuellen Zielpunkt und andererseits nach der Verteilung des Potentials.

Ein probabilistischer Automat zur Simulation von Fußgängerverhalten wurde von Muramatsu und Nagatani vorgestellt [41]. Er ist ebenfalls auf einem Quadratgitter mit vier nächsten Nachbarplätzen definiert. Hier besitzt jedes Teilchen Wahrscheinlichkeiten, entweder nach vorne (p_x), oder zur linken oder rechten Seite (p_y bzw. p_{-y}) zu hüpfen. Falls das so ausgewählte Zielfeld besetzt ist, bewegt sich das Teilchen nicht.

Beide Modelle sind nicht in der Lage, ein breites Spektrum kollektiver Effekte zu reproduzieren. Der Grund hierfür liegt vor allem in der Nichtberücksichtigung langreichweitiger Wechselwirkungen, sowohl zwischen den Teilchen, als auch mit der umgebenden Geometrie.

In [37] finden sich eine Reihe weiterer diskreter Modelle zur Simulation von Fußgängerverhalten, die jeweils unterschiedliche Aspekte der Dynamik berücksichtigen.

Im folgenden werden alle Eigenschaften und Definitionen des dieser Arbeit zugrundeliegenden Modells vorgestellt.

3.3 Grundprinzipien

Zunächst sollen einige bei der Entwicklung des Modells berücksichtigte Grundprinzipien diskutiert werden. Die Begriffe *Teilchen* und *Fußgänger* sollen im folgenden synonym verwendet werden. Zwei sogenannte *Grund-* oder *Bodenfelder* bestimmen die Wechselwirkung der Fußgänger und die Dynamik des Modells.

Durch das *statische Grundfeld* werden durch die Geometrie vorgegebene Vorzugsrichtungen wie Ausgänge, oder Wände und Hindernisse realisiert (Abschnitt 3.4.1). Für die Implementierung der Wechselwirkung zwischen den Fußgängern wird sich einer in Anlehnung an das biologische Phänomen der *Chemotaxis* konzipierten Idee bedient [59, 60]. Die Fußgänger hinterlassen bei ihrer Bewegung eine virtuelle Spur, die ihrerseits die Bewegung der anderen Fußgänger beeinflusst. Diese virtuellen Spuren bilden in ihrer Gesamtheit das *dynamische Grundfeld* und unterliegen zusätzlich Verfall und Diffusion (Abschnitt 3.4.2). Um das Auftreten von Zusammenstößen zu vermeiden, sind auf kurzer Distanz Wechselwirkungen von Fußgängern repulsiv. Dieser Tatsache wird durch die „hard-core-Abstoßung“ Rechnung getragen, ein Platz kann von maximal einem Fußgänger besetzt werden. Für größere Distanzen sind Wechselwirkungen häufig attraktiv. Zum Beispiel wird man sich in einem überfüllten, unübersichtlichen Gebiet häufig an anderen Fußgängern orientieren. Dieser Tatsache wird durch die Wechselwirkung der Fußgänger mit dem dynamischen Grundfeld Rechnung getragen.

In dem Modell hängen alle Übergangswahrscheinlichkeiten von den Besetzungszahlen und den Stärken der beiden Felder in der nächsten Nachbarschaft der Fußgänger ab. Sämtliche langreichweitige, räumliche Wechselwirkungen sind auf diese Weise in lokale übersetzt worden. Die Teilchen sind mit möglichst wenig Eigenintelligenz ausgestattet. Die Regeln, denen die Teilchen folgen, sollen jedoch Selbstorganisationsphänomene begünstigen, also die Bildung geordneter Strukturen mittels vieler gleichartiger, einfacher Individuen. Daher eignet sich das Modell hervorragend zur Implementierung auf einem Rechner und zu sehr effizienten Computersimulationen von Systemen großer Teilchenzahl.

Die durchschnittliche Beschleunigungszeit eines Fußgängers zum Erreichen seiner Maximalgeschwindigkeit beträgt etwa eine halbe Sekunde [61]. Zudem besitzt die Geschwindigkeitsverteilung von Fußgängern ein relativ scharfes Maximum [62, 63]. Im Gegensatz zu Straßenverkehrsmodellen ist die Beschleunigungsphase hier also zunächst vernachlässigbar. Diese Tatsachen führen daher zu einem Modell, in dem die Fußgänger eine Maximalgeschwindigkeit von $v_{\max} = 1$ besitzen, das heißt nur Übergänge zu einem benachbarten Gitterplatz sind erlaubt. Eine Erhöhung der Reichweiten, also ein Modell mit $v_{\max} > 1$, führt zum Auftreten einer Reihe von Problemen. Die Anzahl möglicher Zielzellen erhöht sich quadratisch mit der Wechselwirkungsreichweite. Infolgedessen würde die speichertechnische Effizienz des Modells reduziert. Ferner treten weitere Probleme besonders bei parallelem Update auf: die Konfliktlösung und Routenwahl der Teilchen in einem Zeitschritt t ist ein nichttriviales Problem, bei dem verschiedene Lösungsansätze denkbar sind. Trotzdem erscheint die Einführung höherer Laufgeschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ in Hinblick auf die Reproduktion bestimmter empirischer Sachverhalte ([64, 65]) als durchaus sinnvoll. Auch ließe sich auf diese Weise eine statistische Streuung verschiedener Laufgeschwindigkeiten sehr einfach realisieren³. Eine ausführliche Diskussion einer

³Zum Beispiel eine Aufteilung des Teilchenensembles in: *Fast Walker*, $v_{\max} = 3$, 10% der Teilchen; *Standard Walker*, $v_{\max} = 2$, 80% der Teilchen; *Slow Walker*, $v_{\max} = 1$, 10% der Teilchen [66].

Erweiterung des zugrundeliegenden Modells mit Laufgeschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ findet sich in Abschnitt 3.7. In der Regel ist jedoch eine Beschränkung auf eine einheitliche Geschwindigkeit ausreichend, daher gelte im folgenden stets $v_{\max} = 1$.

3.4 Definition des Modells

Die zugrundeliegende Struktur des Modells ist ein zweidimensionales Quadratgitter mit offenen oder geschlossenen Rändern. Jede Zelle des Gitters kann entweder leer oder mit einem Teilchen besetzt sein⁴, es gilt „hard-core exclusion“. Dies führt zu einer effektiven Hartkugelabstoßung und einem oberen Schwellenwert für Teilchenzahl und Dichte, berücksichtigt also automatisch einen primitiven Aspekt einer abstoßenden sozialen Kraft (eine Art „Privatsphäre“ der Teilchen). Die Größe einer Zelle des Gitters entspricht in etwa $40 \times 40 \text{ cm}^2$. Dies ist identisch mit dem typischen Raum, der von einem Fußgänger in einer dichten Menschenmenge eingenommen wird [64, 65] (hieraus resultiert eine maximale Personendichte von $\rho \approx 6$ Personen/ m^2).

Der Updatevorgang gliedert sich in mehrere Einzelschritte, welche weiter unten aufgeführt sind. Diese werden jeweils für alle Teilchen gleichzeitig ausgeführt, es gilt *paralleler Update*. Hierdurch wird den Teilchen eine gewisse Reaktionszeit auferlegt, Aktionen benachbarter Teilchen können erst im nächsten Zeitschritt berücksichtigt werden. Dies führt zur Einführung einer Zeitskala in die Dynamik des Systems, die in etwa mit der normalen menschlichen Reaktionszeit $t_{\text{reac}} (\approx 0.3 \text{ s})$ identifiziert werden kann⁵. Ebenfalls stimmt diese Zeitskala sehr gut mit der Zeit überein, die ein Fußgänger benötigt, um seine durchschnittliche Geschwindigkeit zu erreichen (circa 0.5 s). Diese Zeit entspricht wiederum v_{\max} Zeitschritten⁶.

Jedes Teilchen kann sich in jedem diskreten Zeitschritt $t \rightarrow t + 1$ auf einen seiner nichtbesetzten nächsten Nachbarplätze bewegen. Hierbei ordnet es seinem Platz und seinen nächsten Nachbarplätzen eine Übergangswahrscheinlichkeit zu⁷ (siehe Abb. 3.5). Die explizite Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich durch die Besetzungszahlen der nächsten Nachbarplätze und durch die bereits weiter oben erwähnten Bodenfelder. Um bestimmte kollektive Phänomene und Effekte reproduzieren zu können, ist die Einführung spezieller langreichweitiger Wechselwirkungen erforderlich. In einigen kontinuierlichen Modellen wird dies durch die Idee der *sozialen Kräfte* [44, 54] realisiert. Um das Modell so einfach wie möglich zu machen, soll hier jedoch auf die Verwendung expliziter, langreichweitiger Wechselwirkung verzichtet werden. Statt dessen wird das Konzept der Grundfelder [45, 57] eingeführt, die die Bewegung der Fußgänger beeinflussen und die ihrerseits durch die Fußgänger modifiziert werden. Durch diese Felder können Wechselwirkungen der Teilchen untereinander und mit der Geometrie des Systems in einfacher Weise berücksichtigt werden, ohne dabei die Vorteile lokaler Übergangsregeln aufzugeben.

⁴Eine feinere Diskretisierung des Gitters, d.h. die Besetzung mehrerer Zellen durch ein Teilchen, mag in manchen Fällen sinnvoll erscheinen. Eine Diskussion der sich hieraus ergebenden Konsequenzen findet sich in Abschnitt 3.8.

⁵Ein einzelner, nicht mit anderen wechselwirkender Fußgänger bewegt sich in dem Modell mit einer Maximalgeschwindigkeit von einer Zelle pro Zeitschritt (das heißt 40 cm pro Zeitschritt). Die empirische Durchschnittsgeschwindigkeit eines Fußgängers beträgt etwa 1.3 m/s [64]. Ein Zeitschritt des Modells entspricht daher einer realen Zeit von circa 0.3 s, ist also von der Ordnung der normalen Reaktionszeit t_{reac} .

⁶In dem Fall, daß die Teilchen eine Einheit pro Zeitschritt beschleunigen können.

⁷Eine Erweiterung des Modells durch die Einführung von Übergangswahrscheinlichkeiten zu den vier in diagonaler Richtung liegenden Nachbarplätzen ist in evidenten Weise möglich.

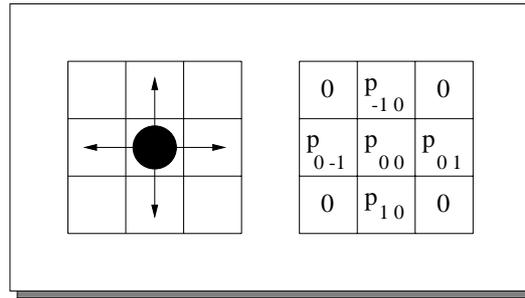


Abbildung 3.5: Erlaubte Bewegungen und die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} eines Teilchens.

Die Grundfelder lassen sich als weitere Gitter mit zugehörigen Feldwerten veranschaulichen, die neben dem, von den Teilchen besetzten, realen Gitter existieren. Diese Felder bestimmen die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Weise, daß die Teilchenbewegung bevorzugt in Richtung wachsender Feldwerte stattfindet. Zwei Arten von Bodenfeldern werden berücksichtigt.

3.4.1 Das statische Grundfeld S

Das statische Grundfeld S ist zeitunabhängig und wird durch die Anwesenheit der Fußgänger nicht beeinflusst. Dieses Feld dient dazu, attraktive Raumregionen, wie zum Beispiel Ausgänge oder speziell gekennzeichnete Fluchtwege, kenntlich zu machen. Betrachtet man zum Beispiel wie in den folgenden Kapiteln die Evakuierung einfacher Geometrien, so beschreibt das Feld S an jedem Gitterplatz den kürzesten Abstand zu einer der vorhandenen Türzellen durch eine einfache Abstands-Metrik. Dies ist nur eine mögliche Repräsentation der Konstruktion des statischen Feldes S . Die qualitativen Ergebnisse der Untersuchungen werden durch alternative Definitionen von S nicht beeinflusst (siehe Anhang C). Für kompliziertere Raumgeometrien, zum Beispiel Räume mit inneren Wänden und Strukturen, ist es von großem Vorteil, auf eine Manhattan-Metrik zurückzugreifen (Abschnitt 3.6.8 und Anhang C). Die Manhattan-Metrik kennzeichnet den kürzesten Abstand zweier Zellen (i_1, j_1) und (i_2, j_2) auf einem Gitter, gemessen in zu überschreitenden Gitterzellen. Hierbei dürfen nur nächste Nachbargitterplätze überschritten werden (siehe Abb. 4.1 in Anhang C). Eine explizite Diskussion aller in dieser Arbeit verwendeten Grundfelder, sowie die Angabe eines Algorithmus zur Berechnung des statischen Feldes S für eine beliebige Raumgeometrie, findet sich in Anhang C.

In Abb. 3.6 finden sich graphische Darstellungen des statischen Feldes S für unterschiedliche Geometrien. Die hier gezeigten Graphiken entsprechen Feldern für Evakuierungsprozeduren, die im folgenden ausführlich diskutiert werden. Die Fußgänger verlassen die Räume durch die vorhandenen Türen, die durch die höchsten Feldwerte S gekennzeichnet sind. S ist so berechnet, daß die Feldwerte stets in Richtung auf den nächstgelegenen Ausgang zunehmen (Anhang C).

Die Übergangswahrscheinlichkeit p_{ij} für die Bewegung eines Teilchens in Richtung (i, j) , mit $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ (siehe Abb. 3.5), ist proportional zu einem gewichteten Wert des statischen Bodenfeldes (den Platz, auf dem es sich befindet, mit eingeschlossen). Es gilt:

$$p_{ij} \propto \exp(k_S \cdot S_{ij}) . \quad (3.4.1)$$

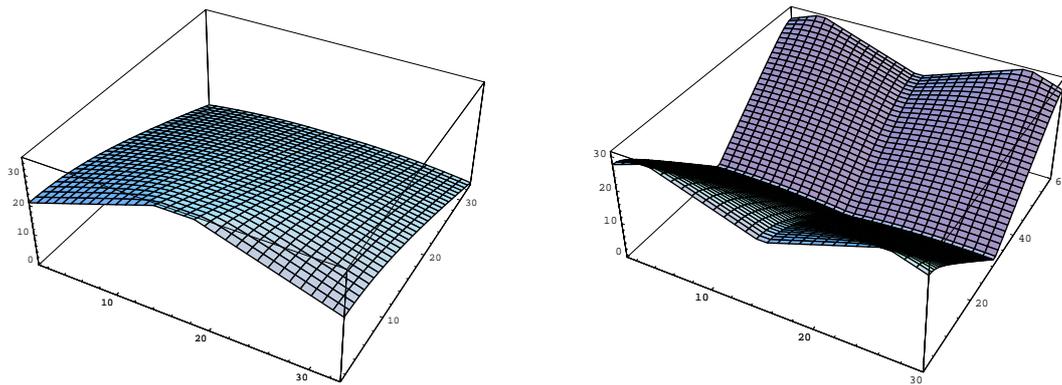


Abbildung 3.6: Statisches Grundfeld S : a) für ein Gitter der Größe $X \times Y = 33 \times 33$ mit einem Ausgang der Breite 5 Zellen; b) für ein Gitter der Größe $X \times Y = 30 \times 60$ mit jeweils zwei Ausgängen der Breite 2 Zellen an jeder Stirnseite.

Der kontinuierliche Parameter $k_S \in [0, \infty[$ bestimmt die Stärke der Kopplung der Teilchen an das statische Grundfeld. k_S wirkt hierbei wie eine inverse Temperatur [67]: für $k_S = 0$ existiert keine Kopplung an das statische Feld und für $k_S \rightarrow \infty$ wird sie immer stärker. $k_S \rightarrow \infty$ beschreibt eine Art von deterministischem Grenzfall: ein einzelnes Teilchen bewegt sich auf dem, von der Geometrie vorgegebenen, optimalen Weg⁸.

3.4.2 Das dynamische Grundfeld D

Das dynamische Grundfeld D ist eine von den Fußgängern hinterlassene virtuelle Spur. D hat seine eigene Dynamik, bedingt durch Zerfall und Diffusion und dient zur Modellierung einer attraktiven Wechselwirkung zwischen den Teilchen. Abb. 3.7 zeigt dreidimensionale Darstellungen von D für verschiedene Zeitschritte während einer Evakuierungssituation. D berechnet sich während einer Simulation auf die

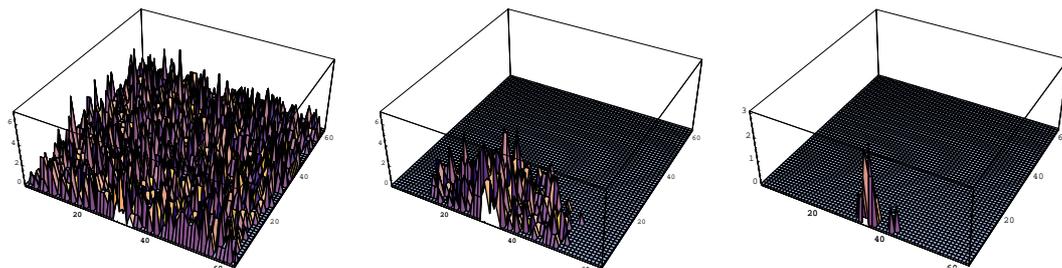


Abbildung 3.7: Dynamisches Grundfeld D : a) beginnender Evakuierungsprozess; b) mittlere Zeitkonfiguration; c) Ende einer Evakuierung.

folgende Weise:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das dynamische Feld D auf allen Plätzen (i, j) des Gitters stets Null, d.h. $D_{ij} = 0$.
- Jedesmal, wenn sich ein Teilchen von Platz (i, j) auf einen seiner benachbarten Plätze bewegt, wird D auf der Startzelle um eins erhöht: $D_{ij} \rightarrow D_{ij} + 1$.

⁸Zum Beispiel findet ein Teilchen den kürzesten Weg zu einer Tür oder um ein Hindernis herum.

D nimmt also lediglich nichtnegative ganzzahlige Werte an und läßt sich daher mit einem *bosonischen Feld*⁹ vergleichen. Die von den Teilchen bei ihrer Bewegung fallengelassenen Bosonen erzeugen auf diese Weise die virtuelle Spur D . Somit entspricht der Feldwert D_{ij} stets D_{ij} Bosonen auf (i, j) .

- Das dynamische Feld D ist zeitabhängig. Es besitzt Zerfall und Diffusion, die durch die zwei Parameter $\alpha \in [0, 1]$ und $\delta \in [0, 1]$ kontrolliert werden. Dies führt zu einer Verdünnung und Verbreiterung der Spur.

In jedem Zeitschritt der Simulation zerfällt jedes einzelne Boson von D mit der Wahrscheinlichkeit δ und diffundiert mit der Wahrscheinlichkeit α auf einen seiner benachbarten Plätze. Schließlich ergibt sich hieraus $D = D(t, \delta, \alpha)$.

Es gilt zu beachten, daß das dynamische Grundfeld D lediglich durch *sich bewegende* Teilchen verändert wird und daher eher einem virtuellen *Geschwindigkeitsdichtefeld*, als einem *Teilchendichtefeld* entspricht. In Abschnitt 3.5.2 sollen die alternative Definition von D als einem reinen Teilchendichtefeld und die sich daraus ergebenden Konsequenzen diskutiert werden.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} für die Bewegung eines Teilchens in Richtung (i, j) sind auch im Fall des dynamischen Bodenfeldes an gewichtete Feldwerte geknüpft (siehe (3.4.1)):

$$p_{ij} \propto \exp(k_D \cdot D_{ij}) . \quad (3.4.2)$$

Der kontinuierliche Parameter $k_D \in [0, \infty[$ bestimmt wieder die Stärke der Kopplung der Teilchen an das dynamische Grundfeld.

Weitere Einzelheiten und Angaben über den, die Diffusion und den Zerfall des Feldes D berechnenden Algorithmus, sind in Anhang D dargelegt.

Die beiden Parameter k_D und k_S sollen im folgenden als *Sensitivitätsparameter* für die entsprechende Kopplung bezeichnet werden.

3.4.3 Update-Vorschriften

Nachdem die grundlegenden Konzepte und Definitionen des Modells vorgestellt wurden, sollen im folgenden die gesamten Update-Regeln aufgelistet werden [45, 68, 69].

1. Das dynamische Grundfeld D wird entsprechend seiner Zerfalls- und Diffusionsdynamik modifiziert (siehe Abschnitt 3.4.2).
2. Für jedes Teilchen werden die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} für eine Bewegung auf einen unbesetzten Nachbarplatz (i, j) (Abb. 3.5) durch die lokale Dynamik und die beiden Grundfelder bestimmt. Wie bereits beschrieben werden die Feldwerte von S und D mit den zwei Sensitivitätsparametern k_S und k_D gewichtet. Daraus ergibt sich:

$$p_{ij} = N \exp(k_D \cdot D_{ij}) \exp(k_S \cdot S_{ij})(1 - n_{ij})\xi_{ij} , \quad (3.4.3)$$

⁹ [70] liefert eine Beschreibung des Phänomens der Chemotaxis anhand eines vereinfachten ein-dimensionalen Modells mit einem *fermionischen* Bodenfeld. Dieses Feld kann also lediglich die Werte 0 und 1 annehmen.

mit:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Besetzungszahl:} & n_{ij} = 0, 1, \\
 \text{Hinderniszahl:} & \xi_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für verbotene Plätze, z.B. Wände,} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \\
 \text{Normierung:} & N = \left[\sum_{(i,j)} \exp(k_D \cdot D_{ij}) \exp(k_S \cdot S_{ij}) (1 - n_{ij}) \xi_{ij} \right]^{-1}
 \end{array}$$

(in diesen Übergangswahrscheinlichkeiten ist die Möglichkeit eines Verbleibs der Teilchen auf ihren Ausgangsplätzen mit eingeschlossen).

3. Jedes Teilchen wählt basierend auf den im vorangegangenen Schritt berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} ein Zielfeld.
4. Auftretende Konflikte, die immer dann entstehen, wenn zwei oder mehr Teilchen versuchen, dasselbe Zielfeld zu besetzen, werden mit Hilfe eines probabilistischen Verfahrens gelöst. Die Teilchen, denen es erlaubt ist, sich zu bewegen, führen ihren Schritt aus.
5. D wird von allen sich bewegenden Teilchen erhöht.

Der Einfluß der Sensitivitätsparameter k_S und k_D auf die Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} wird in Abschnitt 3.5.1 ausführlich diskutiert. Das Auftreten von Konflikten bei der Platzwahl zwischen den Teilchen, besonders bei hohen Dichten, hat entscheidende Auswirkungen auf die Dynamik der Fußgänger. Eine genaue Untersuchung dieser Konfliktsituationen findet sich in Abschnitt 3.6. Da paralleler Update verwendet wird, werden sämtliche, oben aufgelistete Regeln, auf alle Teilchen gleichzeitig angewendet. In [45, 57, 71] und dieser Arbeit wird gezeigt, daß einfache, lokale Update-Regeln für die Teilchen zusammen mit dem Konzept der beiden Felder S und D ausreichend sind, eine mannigfaltige Zahl komplexer Phänomene zu reproduzieren (Abschnitt 3.2.1).

Dieses Konzept ist hervorragend geeignet, die Simulation von großen Teilchenzahlen in mehrfacher Echtzeit zu gewährleisten, zum Beispiel als reale Anwendung während Evakuierungsprozessen in öffentlichen Gebäuden [45, 47, 48].

In den folgenden Abschnitten sollen die quantitativen und qualitativen Auswirkungen der Variierung der unterschiedlichen Modellparameter untersucht werden. Hieraus wird ein tieferes Verständnis der dem Modell zugrundeliegenden Dynamik resultieren. Soll das Modell zukünftig zur Untersuchung realer Evakuierungsprozesse eingesetzt werden, so müssen diese Modellparameter an experimentelle Ergebnisse angepaßt werden.

3.5 Evakuierungs-Simulationen

Zu allen Simulationen und Problemstellungen der Fußgängerdynamik sind, im Rahmen dieser Arbeit, Java-Applets mit graphischer Oberfläche und variabler Einstellung der Modellparameter entwickelt worden. Die Programmstruktur dieser Applets ist in Anhang E eingehend beschrieben und unter [72] stehen diese zu Eigenuntersuchungen im Internet zur Verfügung.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Simulationen einer typischen Evakuierungssituation beschrieben, nämlich die Evakuierung eines großen Raums (zum Beispiel infolge eines Feuersausbruchs) ohne innere Struktur. Hierbei liegt das Hauptaugenmerk auf der Untersuchung des Einflusses der Sensitivitätsparameter k_S und k_D auf die Evakuierungszeiten. Dadurch lassen sich die unterschiedlichen Verhaltensweisen der Fußgänger, die in dem Modell enthalten sind, klassifizieren. Wie sich zeigen wird, führen interessante kollektive Phänomene zwischen den Teilchen zu nichttrivialen Abhängigkeiten der Evakuierungszeiten von k_S und k_D . In Abschnitt 3.5.2 werden mögliche alternative Definitionen des dynamischen Feldes D untersucht. Abschnitt 3.5.3 liefert ein einfaches Optimierungsproblem, anhand der Evakuierung eines Raumes mit zwei variablen Türen [72].

3.5.1 Der Einfluß der Sensitivitätsparameter

Der Wert von k_S , also die Kopplungsstärke an das statische Feld, läßt sich als ein Maß für das Wissen der Fußgänger über die explizite Lage des Ausgangs interpretieren. Ein großes k_S impliziert hierbei eine Bewegung Richtung Ausgang auf dem kürzest möglichen Pfad. Andererseits werden die Teilchen bei verschwindendem k_S lediglich eine Zufallsbewegung ausführen und somit die Tür nur zufällig finden. Somit ist der Fall $k_S \ll 1$ besonders für Prozesse in dunklen oder raucherfüllten Räumen relevant, in denen die Teilchen keine volle Kenntnis über die Lage des Ausgangs besitzen.

Der Parameter k_D für die Kopplung an das dynamische Feld kontrolliert die Tendenz der Teilchen, sich an der Bewegung anderer zu orientieren. Ein großer k_D -Wert korrespondiert also mit einem starken kollektiven Herdenverhalten, wie es in Fällen von Panik beobachtet wurde [56].

Den folgenden Simulationen liegt ein quadratisches Gitter der Größe 63×63 zugrunde, mit einem Ausgang der Breite eines Gitterplatzes in der Mitte einer Wand. Zu Beginn der Evakuierung, also $t = 0$, sind die Teilchen zufällig auf dem Gitter verteilt und versuchen nun den Raum zu verlassen. Hierbei erhalten sie lediglich über die Grundfelder Informationen über ihre Umgebung. Abb. 3.8 zeigt typische Zustände der Dynamik für eine anfängliche Teilchendichte von $\rho = 0.3$, das bedeutet 1116 Teilchen. Im mittleren Bild von Abb. 3.8 läßt sich die typische halbkreisförmige Stauformation vor der Tür gut erkennen. Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Dynamik ist die Bewegung von „Löchern“ radial vom Ausgang weg, die von den den Raum verlassenden Teilchen gebildet werden.

Die Evakuierungszeiten T und die zugehörigen Varianzen σ werden über 500 verschiedene Anfangskonfigurationen gemittelt und hängen stark von den Sensitivitätsparametern k_S und k_D ab. Abb. 3.9 (a) zeigt die Evakuierungszeiten für konstanten Kopplungsparameter k_D des dynamischen Feldes bei variablem Kopplungsparameter k_S des statischen Feldes und Abb. 3.9 (b) zeigt die Evakuierungszeiten für variables k_S und konstantes k_D . In Abb. 3.10 sind sämtliche zugehörigen Varianzen σ

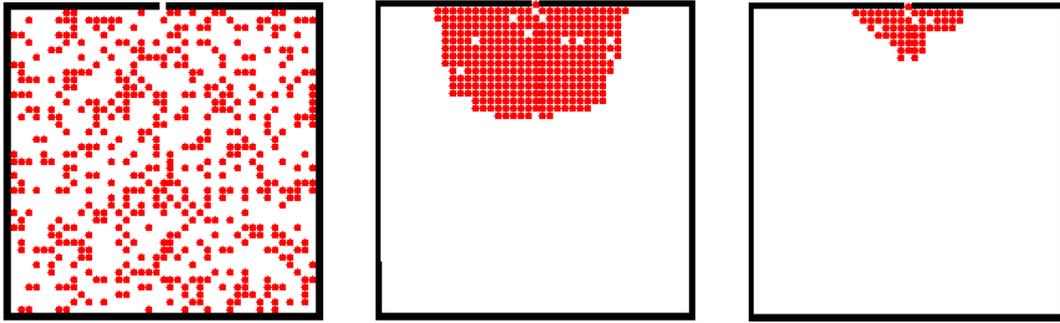


Abbildung 3.8: Typische Zustände der Dynamik: **(a)** Beginnende Evakuierung ($t = 0$); **(b)** Gestaute Formation; **(c)** Ende einer Evakuierung mit nur wenigen verbliebenen Teilchen.

und relativen Varianzen σ/T abgebildet. Die gemittelten Evakuierungszeiten werden stets in Update-Zeitschritten gemessen. Mit der generischen Zeitskala des Modells (Abschnitt 3.4) von circa $0.3 \text{ s/Zeitschritt}$ [45, 68, 69] sind diese auf einfache Weise in Echtzeitwerte umzurechnen. Zunächst soll der Fall $k_D = 0$, daß heißt keine

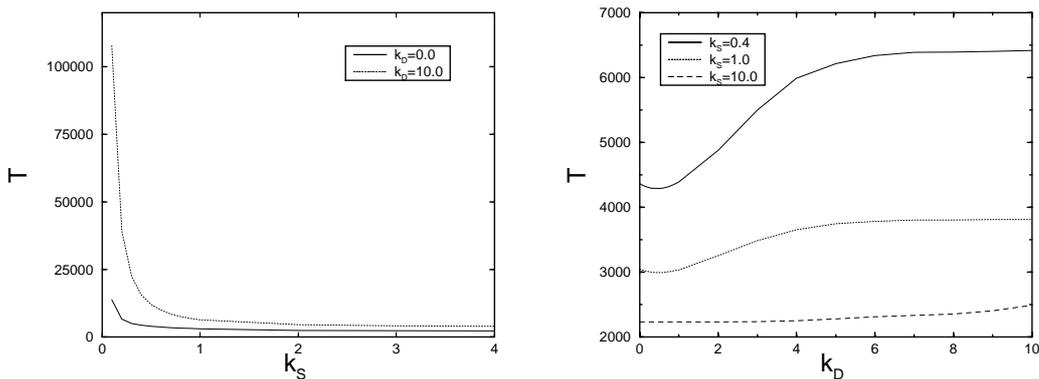


Abbildung 3.9: Gemittelte Evakuierungszeiten eines großen Raumes (siehe Abb. 3.8) für eine anfängliche Teilchendichte von $\rho = 0.3$ und eine Zerfallskonstante $\delta = 0.3$: **(a)** $\alpha = 0.1$ und k_D konstant; **(b)** $\alpha = 0.3$ und k_S konstant.

Kopplung an das dynamische Feld, betrachtet werden. Abb. 3.9 (a) bestätigt die Vorüberlegungen aus Abschnitt 3.4.1. Für $k_S \rightarrow 0$ nehmen die Teilchen die Stärke des Feldes nicht wahr und besitzen daher keinerlei Orientierung an ihrer Umgebung. Daher vollführen sie eine reine Zufallsbewegung, die zu einem maximalen Wert der Evakuierungszeit für $k_S = 0$ führt. Hingegen haben sie für $k_S \rightarrow \infty$ volle Information über den kürzesten Weg zur Tür und die Evakuierungszeit konvergiert gegen einen minimalen Wert. Die Teilchenbewegung wird annähernd deterministisch. k_S wirkt also als eine Art inverse Temperatur für den Informationsgrad der Teilchen über ihre unbelebte Umgebung.

Inselber Weise wirkt der Sensitivitätsparameter k_D als eine inverse Temperatur für die Information über die virtuelle Spur des gesamten Teilchenensembles. Bei einer Variation von k_S von Null bis Unendlich wirkt ein nicht-verschwindender k_D -Wert lediglich als ein zusätzliches Rauschen und die Evakuierungszeiten nehmen mit stärkerer Kopplung k_D zu (Abb. 3.9 (a)).

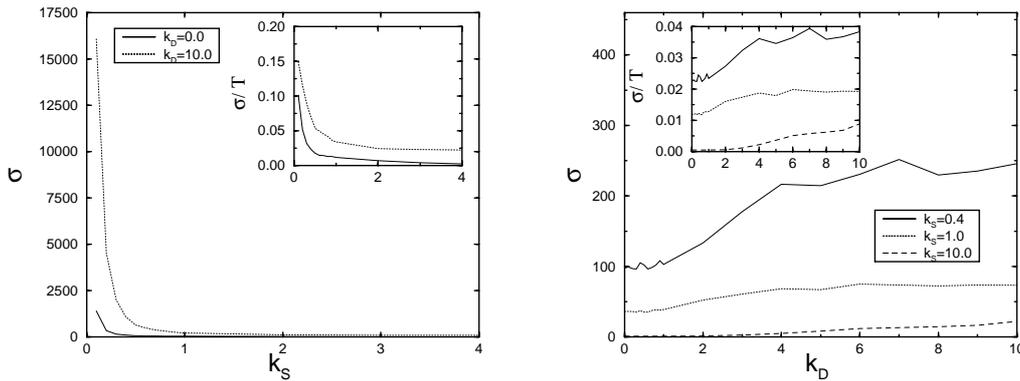


Abbildung 3.10: Gemittelte Varianzen σ und relative Varianzen σ/T der Evakuierungszeiten aus Abb. 3.9: **(a)** $\delta = 0.3$, $\alpha = 0.1$ und k_D konstant; **(b)** $\delta = 0.3$, $\alpha = 0.3$ und k_S konstant.

Wesentlich interessanter ist das Verhalten für konstantes k_S (Abb. 3.9 (b)). Die Evakuierungszeiten konvergieren für wachsenden Kontrollparameter k_D des dynamischen Feldes gegen eine obere Schranke. Das Bemerkenswerteste hierbei ist das nicht-monotone Verhalten der Kurve $T(k_D)$: für nicht-verschwindende kleine k_D -Sensitivitätsparameter kommt es zur Ausbildung minimaler Evakuierungszeiten. Daher entspricht eine kleine Wechselwirkung mit dem der Geschwindigkeitsdichte proportionalen, dynamischen Feld D einer Art minimaler Intelligenz der Teilchen. Durch die optimale Kopplung an D sind die Teilchen in der Lage, Regionen erhöhten Teilchenflusses aufzuspüren und somit ihre Wartezeiten im Bereich des Ausgangs zu minimieren. Dieser Minimierungseffekt ist am ausgeprägtesten für eine mittlere Kopplungsstärke an das statische Feld ($k_S \approx 0.4$), jedoch sehr schwach für sehr starke Kopplung an S ($k_S \approx 10$). In diesem Bereich wird die Bewegung durch die Orientierung an der rein unbelebten Umgebung dominiert. Der Effekt verschwindet ebenfalls für sehr schwache Kopplung an S ($k_S = 0.1$, nicht in Abb. 3.9 (b) abgebildet), wo die Bewegung eher einer reinen Zufallsbewegung gleicht.

Wird die Kopplung an das dynamische Feld weiter erhöht ($k_D \gg 1$), erhöhen sich die Evakuierungszeiten zunächst stark, um darauf gegen Maximalwerte zu konvergieren. Die Wechselwirkung mit anderen Teilchen wird hier zusehends unvorteilhafter (dies ist ähnlich zur Entstehung einer Paniksituation, wo sich Personen herdenartig am Verhalten anderer orientieren). Je schwächer die Kopplung an das statische Feld ist, um so höher sind die Evakuierungszeiten: die Teilchen besitzen keine ausreichende Information über die Lage des Ausgangs (zum Beispiel bedingt durch einen raucherfüllten Raum im Falle eines Feuersausbruchs).

Die Varianzen σ (Abb. 3.10) zeigen qualitativ dasselbe Verhalten wie die gemittelten Zeitwerte der Evakuierung. Für starke Kopplung an S ($k_S \approx 10$, $k_D < 2$) strebt σ gegen Null, der Prozeß ist annähernd deterministisch (Abb. 3.10 (a)). Für schwache Kopplung an S wachsen die Varianzen σ stark an, ebenso werden die relativen Varianzen $\frac{\sigma}{T}$ sehr groß für $k_S \rightarrow 0$. Betrachtet man dieses Ergebnis vom praktischen Standpunkt realer Evakuierungssituationen aus, muß man sich fragen, ob sich Sicherheit alleine über gemittelte Evakuierungszeiten definieren läßt. Hohe Varianzen sollten also in Sicherheitsüberlegungen stets mitberücksichtigt werden.

Für konstantes k_S und variierende Kopplung k_D verhalten sich die Varianzen ebenfalls qualitativ wie die Zeiten T , das heißt, sie nehmen mit erhöhter Kopplung k_D

zu (Abb. 3.10 (b)).

Im folgenden soll der Einfluß der Zerfalls- und Diffusionsparameter δ und α diskutiert werden. Aus Abb. 3.11 (a) läßt sich ersehen, daß für mittleres k_S und ei-

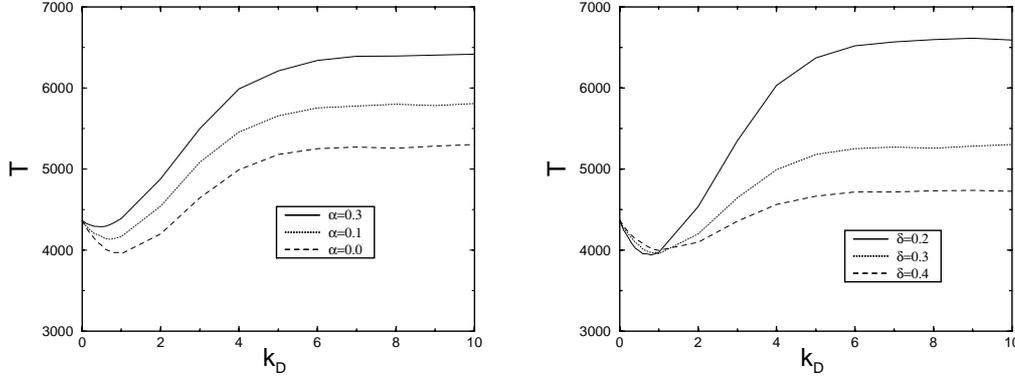


Abbildung 3.11: Gemittelte Evakuierungszeiten eines großen Raumes für eine anfängliche Teilchendichte von $\rho = 0.3$: (a) $k_S = 0.4$ und $\delta = 0.3$; (b) $k_S = 0.4$ und $\alpha = 0.0$.

ne Teilchendichte von $\rho = 0.3$ der Effekt minimaler Evakuierungszeiten für nicht-verschwindende kleine Kopplung k_D im Limes $\alpha \rightarrow 0$ am stärksten ausgeprägt ist. Ferner werden sämtliche Evakuierungszeiten mit wachsendem α erhöht. Daraus läßt sich folgern, daß die Diffusion des dynamischen Feldes lediglich als zusätzliches Rauschen auf die Teilchen wirkt und aufgrund der starken Verschmierung von D durch hohes α keine vorteilhafte Information für die Teilchen liefert.

Die Lebensdauer der Bosonen des dynamischen Feldes D nimmt für abnehmenden Zerfallsparameter $\delta \rightarrow 0$ stark zu und der Bereich minimaler Evakuierungszeiten ist in Richtung kleinerer k_D -Werte verschoben. In diesem Bereich kleiner k_D -Werte nehmen die Evakuierungszeiten monoton mit δ ab (Abb. 3.11 (b)), die positive Wechselwirkung nimmt mit dem Feld zu. Im Gegensatz hierzu steigen die Evakuierungszeiten im Bereich hoher k_D -Werte stark mit kleinerem δ an. In diesem Bereich wächst mit den Feldwerten D auch die Menge an gespeicherter Information über vergangene Zeitschritte an und somit auch das Rauschen im System. Das Wissen der Teilchen über die umgebende Geometrie wird durch das starke Herdenverhalten in ungünstiger Weise überlagert.

Diese beiden entgegengesetzten Verhaltensweisen für $k_D \rightarrow 0$ und $k_D \rightarrow \infty$ führen zu einer Überschneidung der Kurven in Abb. 3.11 (b). Interessanterweise findet dieses Überschneiden in einem sehr engen Intervall um $k_D \approx 1$ statt.

Der Einfluß des Diffusionsparameters α von D im Bereich minimaler Evakuierungszeiten hängt stark von der Teilchendichte ρ ab. Ebenso wie in (Abb. 3.11 (a)) läßt sich in Abb. 3.12 (a) erkennen, daß im Bereich hoher Teilchendichte eine Erhöhung von α stets zu einer Erhöhung der Evakuierungszeiten führt. Für kleine Teilchendichten findet man ein entgegengesetztes Verhalten. Da sich hier nur sehr wenige Teilchen im System befinden, führt eine Ausbreitung der Spur durch Diffusion zu einem erhöhten Grad von Information und vorteilhafter langreichweitiger Wechselwirkung zwischen den Teilchen (Abb. 3.12 (b)).

Zusammenfassend lassen sich drei Hauptregime für das Teilchenverhalten unterscheiden. Für starke Kopplung an S und schwache Kopplung an D existiert ein *geordnetes Regime*, in dem die Teilchen sich lediglich an der durch S vermittelten umgebenden Geometrie orientieren. Das Teilchenverhalten ist dann weitestgehend

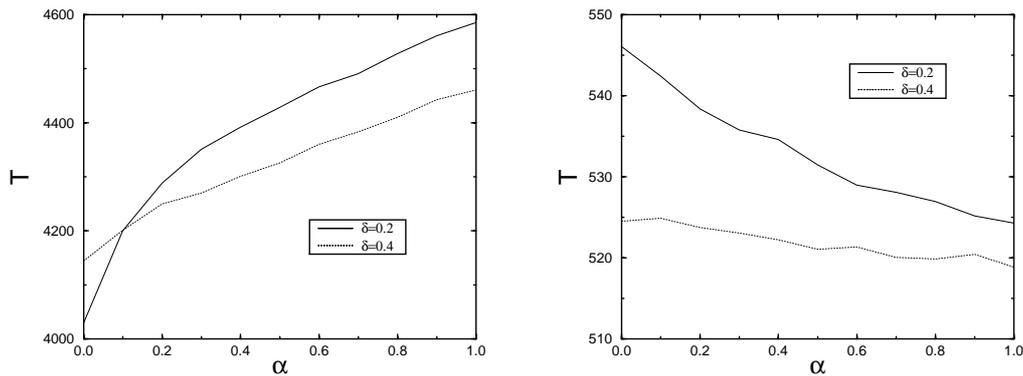


Abbildung 3.12: Gemittelte Evakuierungszeiten eines großen Raumes für zwei Teilchendichten, variables α und $k_S = k_D = 0.4$: (a) $\rho = 0.3$, und (b) $\rho = 0.003$.

deterministisch, resultierend in minimalen Evakuierungszeiten.

Das Verhalten der Teilchen im *ungeordneten Regime*, charakterisiert durch starke Kopplung an D und schwache Kopplung an S , führt zu maximalen Evakuierungszeiten. Das Verhalten in diesem Bereich ist vergleichbar mit dem in Paniksituationen. Die Tendenz zur Herden- und Clusterbildung ist hier dominierend.

Zwischen diesen beiden Bereichen existiert ein *kooperatives Regime*¹⁰, indem bei mittlerer Kopplung an S ($k_S \approx \frac{1}{2}$) die Wechselwirkung der Teilchen mit dem Feld D zu einer Optimierung der Evakuierungszeiten durch kooperatives Verhalten führt.

Die drei Hauptregime des Teilchenverhaltens sind in Abb. 3.13 im Parameterraum der zwei Sensitivitätsparameter schematisch dargestellt. Da ja keine echten Pha-

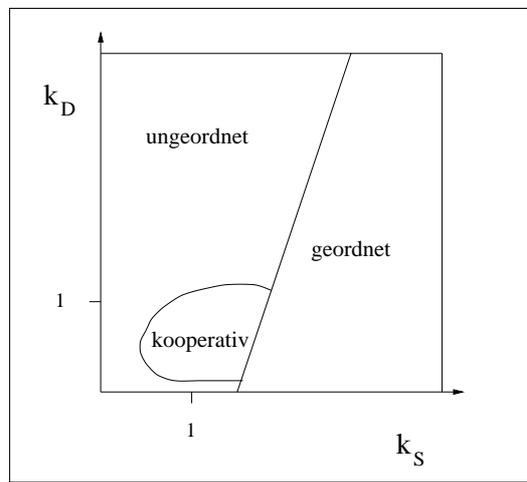


Abbildung 3.13: Schematische Darstellung der drei Hauptregime des Teilchenverhaltens im Parameterraum der zwei Sensitivitätsparameter k_S und k_D . Die Bereiche sind stark abhängig von der Teilchendichte ρ und den Parametern α und δ von D .

senübergänge zwischen den Regimen existieren, sind die Trennlinien nicht als scharf aufzufassen.

Wie sich gezeigt hat, ist das Teilchenverhalten in dem Modell sehr stark von den

¹⁰Dieser Bereich wurde in früheren Veröffentlichungen als *optimales Regime* bezeichnet. Diese Bezeichnung ist jedoch in gewisser Weise irreführend.

Sensitivitätsparametern k_S und k_D , sowie den Parametern α und δ des dynamischen Feldes D abhängig. Für realistische Anwendungen des Modells ist es dringend erforderlich, Prozeduren zu entwickeln, die die Kalibrierung und Bestimmung der Modellparameter in Experimenten ermöglichen. Eine einfache Methode zur Bestimmung von k_S besteht in dem Abgleich mit experimentell ermittelten Laufgeschwindigkeiten und deren Fluktuationen (siehe hierzu auch Abschnitt 3.7 und [71]).

Abb. 3.14 zeigt abschließend den Einfluß einer wachsenden Teilchendichte ρ auf die Evakuierungszeiten in den drei angegebenen Hauptregimen. Im Bereich sehr kleiner

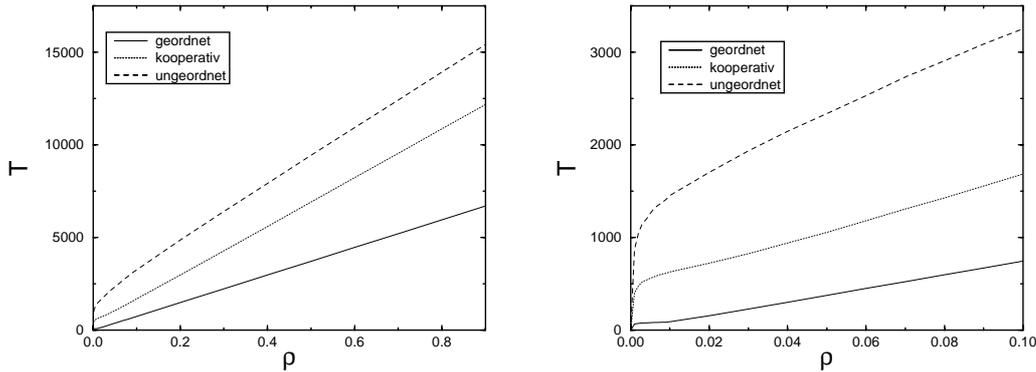


Abbildung 3.14: Gemittelte Evakuierungszeiten der drei Hauptregime (*geordnet*, *ungeordnet* und *kooperativ*): (a) Dichtebereich $\rho \in [0, 0.9]$; (b) Ausschnitt des Bereichs niedriger Dichte $\rho \in [0, 0.1]$.

Dichten steigt die Evakuierungszeit sehr stark an (Abb. 3.14 (b)). Sind zum Zeitpunkt $t = 0$ nur sehr wenige Teilchen im System, die zufällig auf das Gitter verteilt sind, so erreichen sie während der Evakuierung nahezu unabhängig voneinander den Ausgang. Dies ist auch der Dichtebereich, in dem die Diffusion des dynamischen Feldes D vorteilhafte Information für die Teilchen liefert (Abb. 3.11 (a)). Steigt die Teilchendichte nun an (im Bereich $\rho \approx 0.005$), so beginnt sich ein Stau vor der Tür auszubilden. Dieser ist dann maßgebend für die Evakuierungszeiten, die im Bereich höherer Dichten linear mit wachsender Teilchenzahl ansteigen.

3.5.2 Alternative Definitionen des dynamischen Feldes D

Im folgenden werden die Konsequenzen einer Erweiterung des Parameterbereichs k_D und einer alternativen Definition des dynamischen Feldes D diskutiert. Zunächst soll sich auf die Auswirkungen eines negativen Sensitivitätsparameters k_D konzentriert werden. Ein $k_D < 0$ entspricht einer repulsiven Wechselwirkung zwischen den Teilchen. Abb. 3.15 (a) zeigt die gemittelten Evakuierungszeiten T für die Dichte $\rho = 0.3$ und schwache Kopplung $k_S = 0.4$ an das statische Feld für verschiedene Diffusionsparameter α ($\delta = 0.3$ konstant). Die Evakuierungszeiten nehmen für alle Diffusionsparameter α mit fallendem Sensitivitätsparameter $k_D < 0$ zu. Dies ist klar, da D der Geschwindigkeitsdichte der Teilchen proportional ist und somit die Gebiete maximalen Flusses im System (zum Beispiel in der Nähe des Ausgangs) kennzeichnet. Daher sollte das Vermeiden dieser Regionen stets zu einer erhöhten Evakuierungszeit führen. Mit wachsendem α nimmt die Schärfe von D in den Hochflußgebieten durch Diffusion stark ab. Daher wird der Vermeidungseffekt dieser Gebiete abgemildert, die Evakuierungszeiten nehmen also mit wachsenden α und $k_D < 0$ ab.

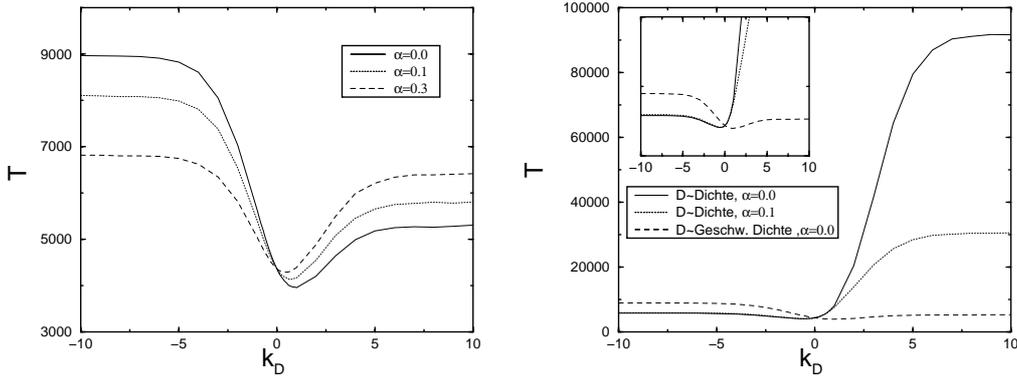


Abbildung 3.15: Gemittelte Evakuierungszeiten für Variationen von k_D und D für eine Dichte von $\rho = 0.3$: **(a)** $k_D \in [-10, 10]$ für D proportional zu der Geschwindigkeitsdichte; **(b)** $k_D \in [-10, 10]$ für ein dynamisches Feld \tilde{D} proportional zur Teilchendichte und D proportional zur Geschwindigkeitsdichte.

Subtilere Konsequenzen für die Dynamik des Modells ergeben sich durch eine veränderte Definition des dynamischen Feldes D . Bisher wurde ein der Geschwindigkeitsdichte proportionales, dynamisches Feld betrachtet, D wird nur durch sich bewegendes Teilchen verändert (siehe Abschnitt 3.4.2). Als Alternative soll nun ein Feld \tilde{D} untersucht werden, daß durch *alle* Teilchen beeinflusst wird. In jedem Zeitschritt erhöht jedes Teilchen den Wert des dynamischen Feldes auf seinem Platz:

$$\tilde{D}_{ij}(t+1) = \tilde{D}_{ij}(t) + n_{ij}(t) \quad (3.5.1)$$

(hierbei ist $n_{ij}(t)$ die Besetzungszahl des Platzes n_{ij} zum Zeitpunkt t). Somit ist \tilde{D} proportional zur Teilchendichte. Abb. 3.15 (b) zeigt die Evakuierungszeiten für konstante Kopplung $k_S = 0.4$ an S , variables $k_{\tilde{D}} \in [-10, 10]$ und die zwei Diffusionsparameter $\alpha = 0.0$ und $\alpha = 0.1$ für dieses Dichtefeld \tilde{D} ($\delta = 0.3$ konstant). Zum Vergleich sind in Abb. 3.15 (b) ebenfalls die korrespondierenden Evakuierungszeiten des herkömmlichen Geschwindigkeitsfeldes D (Abb. 3.15 (a)) für $\alpha = 0.0$ abgebildet. Für positiven Kopplungsparameter $k_{\tilde{D}} > 0$, also attraktive Wechselwirkung, findet man monoton anwachsende Evakuierungszeiten für alle Diffusionsparameter α . Die Zeitwerte laufen für $k_{\tilde{D}} > 1$ sehr stark auseinander, derart, daß für $k_{\tilde{D}} > 5$ die Evakuierungszeiten für $\alpha = 0.0$ dreimal so hoch sind wie für $\alpha = 0.1$. Der Grund hierfür wird durch Betrachtung von Abb. 3.16 klar. Abb. 3.16 (c) zeigt eine zweidimensionale Visualisierung des dichteabhängigen Feldes \tilde{D} während einer Evakuierung. Die am dunkelsten gefärbten Stellen entsprechen den Regionen höchster \tilde{D} -Werte. Da \tilde{D} der Teilchendichte proportional ist, sind Regionen mit starker Staubbildung aufgrund der hohen Teilchenkonzentration durch hohe \tilde{D} -Werte ausgezeichnet (zum Beispiel im Fall eines halbkreisförmigen Staus vor einen Ausgang, siehe Abb. 3.16 (a)). Dieser Effekt ist am stärksten für $\alpha = 0.0$, da ein nicht-verschwindender Diffusionsparameter lediglich die Feldgradienten abschwächt. Daher führt eine attraktive Wechselwirkung mit einem solchen Teilchendichtefeld durch Cluster- und Herdenbildung in gestauten Bereichen zu sehr hohen Evakuierungszeiten, besonders im Fall verschwindender Diffusion. Ein solches Verhalten ist von Paniksituationen bekannt, wo sich Personen einer Menschenmenge ohne rationale Prüfung an dem Verhalten, sich in der nächsten Umgebung befindender Personen, orientieren.

Für negativen Sensitivitätsparameter $k_{\tilde{D}} < 0$, also einer repulsiven Wechselwirkung,



Abbildung 3.16: Graphische Darstellung einer Simulation und der zugehörigen dynamischen Felder D und \tilde{D} (für $\alpha = 0$, $\delta = 0.3$): (a) typischer Zustand der Dynamik während einer Evakuierung und (b) das dynamische Feld D proportional zur Geschwindigkeitsdichte der Teilchen; (c) Dynamisches Feld \tilde{D} für das modifizierte Modell mit \tilde{D} proportional zur Teilchendichte.

findet man ein anderes Verhalten. Im Bereich $k_{\tilde{D}} \in] - 1, 0[$ kommt es zu einer Minimierung der Evakuierungszeiten für das dichteabhängige Feld. Für kleinere Werte $k_{\tilde{D}} < -1$ wachsen die Evakuierungszeiten wieder monoton an. Dieses Verhalten ist dem Effekt minimierter Evakuierungszeiten für das Geschwindigkeitsdichtefeld D im Bereich $k_D \in]0, 1[$ (siehe Abb. 3.9 (b) und Ausschnitt in Abb. 3.15 (b)) sehr ähnlich. Eine schwache Abstoßung von Regionen hoher Teilchendichte, kombiniert mit einer mittleren Kopplung an das statische Feld S ($k_S = 0.4$) sollte ebenso zu einem erhöhten Teilchenfluß und kleineren Evakuierungszeiten führen, wie eine attraktive Wechselwirkung mit der Geschwindigkeitsdichte (also Bereichen hohen Flusses) der Teilchen (Ausschnitt in Abb. 3.15 (b)). Hingegen verhindert ein stark abstoßendes Verhalten eine Führung durch S entlang der kürzesten Wege zum Ausgang und ist somit kontraproduktiv. Dies führt also zu einem erneuten Ansteigen der Evakuierungszeiten für $k_{\tilde{D}} < -1$. Für $k_{\tilde{D}} < 0$ sind die Evakuierungszeiten für \tilde{D} stets kleiner als für die vergleichbaren Werte für D , eine Abstoßung von Regionen hoher Teilchendichte ist stets vorteilhafter als eine Abstoßung von Gebieten hohen Teilchenflusses. Abschließend legt also Abb. 3.15 (b) den Schluß nahe, daß sich ein Teilchendichtefeld \tilde{D} mit repulsiver Wechselwirkung in einigen Aspekten wie ein Geschwindigkeitsdichtefeld D mit attraktiver Wechselwirkung verhält.

3.5.3 Raum mit zwei Türen

Als ein einfaches Beispiel für die Einsetzbarkeit des Modells für Sicherheitsabschätzungen bei Gebäudeplanungen soll im folgenden untersucht werden, welchen Einfluß ein variabler Abstand zwischen zwei Türen auf die Evakuierungszeiten besitzt. Wiederrum soll ein gewöhnlicher Raum der Größe $X \times Y = 102 \times 102$ ohne innere Struktur betrachtet werden. Zunächst besitzt dieser Raum eine Tür der Breite zweier Gitterzellen in der Mitte einer Wand. Anschließend wird diese Tür in zwei Türen der Breite einer Zelle mit variablem Abstand separiert. Der Abstand zwischen den zwei Türen variiert hierbei zwischen 2 und 98 Gitterzellen (Abb. 3.17 (b) und (c)). Abb. 3.17 zeigt typische Zustände der Dynamik für unterschiedliche Türabstände. Für alle drei in Abschnitt 3.5.1 eingeführten Hauptregime des Modells wurden gemittelte Evakuierungszeiten für die oben beschriebenen Raumkonfigurationen gemessen. Abhängig von den betreffenden Regimen zeigt Abb. 3.18 (a) einen starken Einfluß der Va-

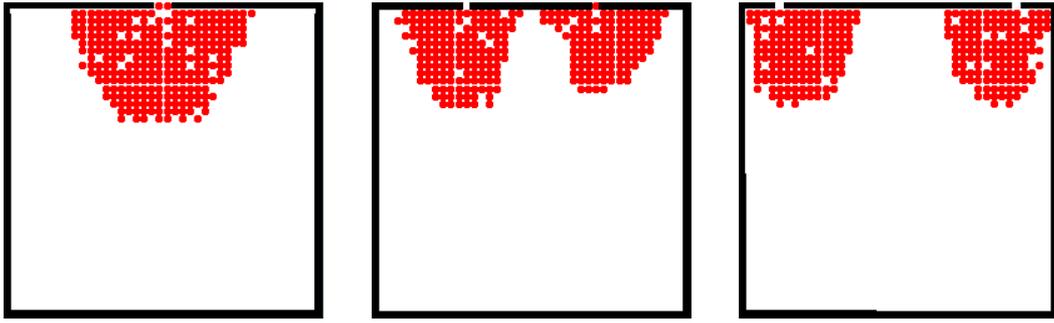


Abbildung 3.17: Typische Staukonfigurationen vor einem Raum mit zwei Türen und (a) keinem Abstand zwischen den Türen, (b) mittlerem Türabstand, und (c) den zwei Türen in der Nähe der zwei Ecken des Raumes.

riation der Türabstände für große und kleine Abstände. Die Evakuierungszeiten im

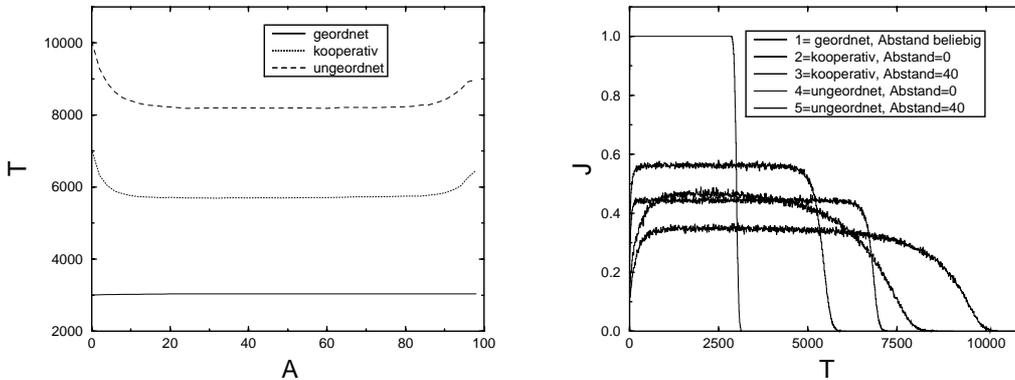


Abbildung 3.18: (a) Evakuierungszeiten für alle drei Hauptregime des Modells als Funktion des Abstands A (in Gitterzellen) zwischen zwei Türen der Breite einer Zelle. (b) Gemittelte Teilchenflüsse J durch den Ausgang für ausgewählte Türabstände in allen drei Regimen.

geordneten Regime werden durch eine Variation des Türabstands nicht beeinflusst. Grund hierfür ist, daß in diesem Regime die Bewegung weitgehend deterministisch orientiert an S verläuft und die Teilchen über D nicht miteinander wechselwirken. In den beiden anderen Regimen hat die Variation des Abstands aufgrund der starken Wechselwirkung mit D jedoch einen erheblichen Einfluß auf die Evakuierungszeiten. Sowohl im ungeordneten als auch im kooperativen Regime findet man eine Minimierung der Zeiten für einen großen Bereich verschiedener Türabstände von circa 20 bis 80 Gitterplätzen. Für sehr kleine Abstände wirkt sich die Wechselwirkung zwischen den vielen Teilchen des großen Staus vor den Türen negativ aus (Abb. 3.17 (a)). Für sehr große Türabstände (größer als 80 Gitterplätze) bewirken die Seitenwände eine nicht optimale Konfiguration der Teilchen vor den Ausgängen (Abb. 3.17 (c)). Für mittlere Türabstände wird die gesamte Menge der Teilchen in optimaler Weise in zwei Untergruppen unterteilt, resultierend in vorteilhafter Wechselwirkung und minimalen Zeiten. Diese Resultate werden ebenfalls durch die in Abb. 3.18 (b) dargestellten Teilchenflüsse J durch die Ausgänge bestätigt. Ein Türabstand von 40 Gitterzellen führt zu vergrößerten Flüssen im ungeordneten und kooperativen Regime.

3.6 Konflikte und Reibung zwischen den Teilchen

Die Auswirkungen der Entstehung von Konfliktsituationen innerhalb des Fußgängerverkehrs sind bisher nicht untersucht worden. Ein Konflikt bezeichnet eine Situation, in der zwei oder mehr Teilchen zum selben Zeitpunkt denselben Platz besetzen wollen¹¹. Ballungs- und Verstopfungsphänomene von Fußgängern, ausgelöst durch gegenseitige Behinderung, in Paniksituationen an Türen und Engstellen sind typische Beispiele, in denen Konflikte auftreten. Solche Phänomene führen während Evakuierungen häufig zu sehr gefährlichen Situationen und Notfällen (siehe Abb. 3.19). Darüber hinaus stehen solche Effekte in enger Verbindung zu vielen Pro-



Abbildung 3.19: In Panik geratene Fußballfans versuchen das Fußballstadion von Sheffield zu verlassen. Aufgrund der Enge des Durchgangs und gegenseitiger Behinderung kommt es zu einer Verstopfung des Ausgangs [73].

blemen aus dem Bereich granularer Materie [74–76]. Im folgenden soll das bisher vorgestellte Modell in geeigneter Weise um den sogenannten Reibungsparameter μ erweitert werden, der es ermöglichen wird, oben angeführte Phänomene zu beschreiben. Zunächst sollen die möglichen Verfahren der Konflikt-Lösung ohne Reibung noch einmal vorgestellt werden.

3.6.1 Konflikt-Lösung im parallelen Update

Teilen k Teilchen in einem Zeitschritt dieselbe Zielzelle, so kann lediglich ein Teilchen $l \in \{1, \dots, k\}$ diesen Platz einnehmen. Alle anderen Teilchen verbleiben auf ihren Startzellen¹². Es gibt zwei wesentliche Möglichkeiten, dieses Teilchen auszuwählen.

1. Die Wahrscheinlichkeit P_l^{move} , daß Teilchen l seine Zielzelle einnehmen darf, ist proportional seiner Übergangswahrscheinlichkeit, das heißt

$$P_l^{\text{move}} = \frac{p_{ij}^l}{\sum_{s=1}^k p_{ij}^s}$$

¹¹Offensichtlich handelt es sich hierbei um einen genuin zweidimensionalen Effekt, der keinerlei Entsprechung innerhalb der Modelle zur Beschreibung eindimensionalen, vollständig asymmetrischen Straßenverkehrs besitzt.

¹²Es existiert also eine Art „Schrecksekunde“ in dem Modell. Im Prinzip könnte den Teilchen auch die Möglichkeit gegeben werden, sich neu zu entscheiden.

(siehe [57]).

- Alle Teilchen l besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit, die Zielzelle einnehmen zu können

$$P_l^{\text{move}} = \frac{1}{k}$$

(siehe [71]).

Die bisher durchgeführten Simulationen wurden mit der zweiten Methode ausgeführt.

3.6.2 Einführung des Reibungsparameters μ

Zur Beschreibung der oben angeführten Phänomene wird der Parameter $\mu \in [0, 1]$ eingeführt, der sich in folgender Weise auswirkt:

Versuchen zwei oder mehr Teilchen in einem Zeitschritt dieselbe Zielzelle einzunehmen, so wird die Bewegung aller dieser Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit μ verhindert (Abb. 3.20). Die Wahrscheinlichkeit, daß eines dieser Teilchen seine Zielzelle einnehmen kann, ist somit gegeben durch $1 - \mu$. Dieses Teilchen wird dann entsprechend Abschnitt 3.6.1 ausgewählt. Aus dieser Definition von μ und den erweiterten

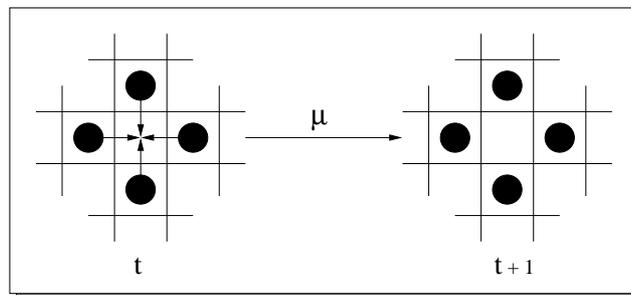


Abbildung 3.20: Verhinderte Teilchenbewegung durch den Reibungsparameter μ .

Update-Regeln läßt sich erkennen, daß μ als eine Art von lokalem Druck zwischen den Teilchen wirkt. Bei großen μ Werten hindern sich die Teilchen im Versuch, ihre Zielzellen zu erreichen, stark gegenseitig. Wie sich zeigen wird, hat der Parameter μ große Auswirkungen auf quantitative Größen wie Teilchenfluß und Evakuierungszeiten.

Für die Analyse von Konfliktsituationen zwischen Fußgängern ist die Verwendung parallelen Updates offenbar unerlässlich. Jede andere Form von zufälligem oder geordnet-sequenziellem Update läßt eine genaue Quantifizierung der tatsächlichen Konflikte zwischen den Teilchen innerhalb eines Zeitschritts nicht zu.

Im folgenden sollen die Auswirkungen von μ in den drei Hauptregimen (Abschnitt 3.5.1) des Modells explizit untersucht werden. Betrachtet wird wieder die Evakuierung eines Raumes ohne innere Struktur mit einem Ausgang. Der Raum wird durch ein Gitter der Größe 63×63 Gitterzellen repräsentiert (siehe Abschnitt 3.5).

In den anschließenden Abschnitten werden dann weitere Auswirkungen des Reibungsparameters μ in verschiedenen Situationen diskutiert.

3.6.3 Einfluß von μ und Teilchendichte ρ

Abb. 3.21 zeigt den Einfluß eines variierenden μ -Parameters auf die Evakuierungszeiten der drei Regime für zwei Teilchendichten. Im Bereich niedriger Dichte hat

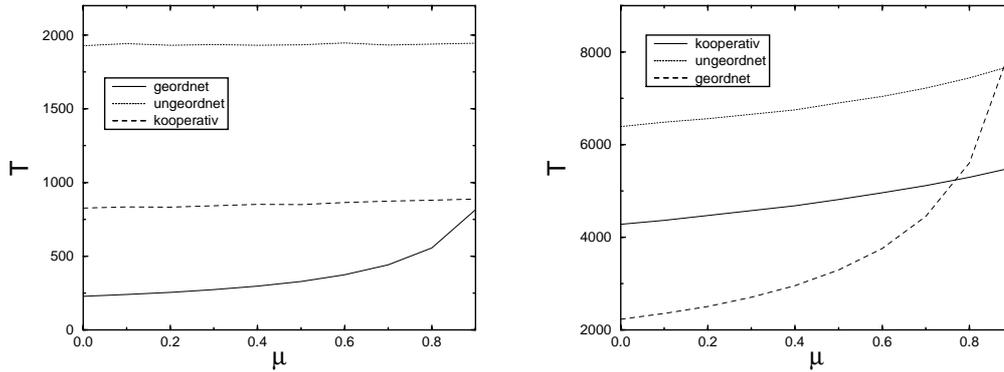


Abbildung 3.21: Gemittelte Evakuierungszeiten eines großen Raumes in Abhängigkeit des Reibungsparameters μ : (a) niedrige Teilchendichte $\rho = 0.03$; (b) hohe Teilchendichte $\rho = 0.3$.

ein wachsender μ -Parameter keinen Einfluß auf die Evakuierungszeiten im ungeordneten und kooperativen Regime. Die Bewegung der Teilchen wird hier durch Zufalls-Prozesse dominiert, die Kopplung an das statische Feld S ist schwach. Daher bildet sich zu keiner Zeit ein dicht-gestaffelter Stau vor dem Ausgang aus (Abb. 3.8), Konflikte in unmittelbarer Nähe der Tür sind selten. Konflikte inmitten des Raumes kommen zwar bedingt durch zufälliges Aufeinandertreffen der Teilchen vor (siehe Abschnitt 3.6.7), haben aber auf die Evakuierungszeiten keinen entscheidenden Einfluß.

Anders das Verhalten im geordneten Regime, wo die Teilchen den direktesten Weg in Richtung Ausgang nehmen. Selbst bei einer geringen Anfangsdichte stauen sich die Teilchen nach kurzer Zeit vor der Tür. Konflikte in dieser Region führen zu einer starken Verminderung des Ausflusses aus der Tür. Da sich aber nur wenige Teilchen im System befinden, steigt die Evakuierungszeit erst für große Reibungsparameter $\mu > \frac{1}{2}$ stark an.

Im Bereich hoher Teilchendichte $\rho = 0.3$ ist der Einfluß von μ wesentlich stärker. Auch im ungeordneten und kooperativen Regime steigt die Evakuierungszeit für $\mu > 0.6$ stark an, die hohe Teilchenzahl führt auch in diesen Regimen zu starker Staubildung vor dem Ausgang, resultierend in einer hohen Zahl von Konflikten. Verheerend sind die Auswirkungen im geordneten Regime. Ein Wert $\mu = 0.6$ führt zu einer annähernden Verdopplung der Evakuierungszeit und für $\mu \rightarrow 1$ steigt sie gegen Unendlich. Schon nach kürzester Zeit stauen sich sämtliche Teilchen des System vor dem Ausgang. Die Bewegung der Teilchen findet annähernd deterministisch in Richtung höherer Feldgradienten von S statt, es gibt keine Temperatur, die diesen Drang abschwächt und die Teilchen auf Plätze mit niedrigeren S Werten ausweichen läßt. Konflikte lösen sich also stets lediglich mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \mu$ (ein Wert von $\mu = 1$ führt offensichtlich im geordneten Regime bei einer Türbreite von einer Gitterzelle zu einem totalen Stillstand des Evakuierungsprozesses) und nicht durch ein Ausweichen der Teilchen. Der Ausgang wird dauerhaft blockiert.

In Abb. 3.22 ist der Einfluß wachsender Teilchendichte ρ für verschiedene μ -Werte auf die Evakuierungszeiten dargestellt. Beginnt sich der Einfluß von μ im ungeordneten Regime erst für Dichten $\rho > 0.1$ bemerkbar zu machen, so ist der Effekt im geordneten Regime nahezu unabhängig von der Teilchendichte. Dies wird durch die relativen Zeitdifferenzen $(T(\mu = 0.9) - T(\mu = 0.0))/T(\mu = 0.0)$ in Abb. 3.22 (b) bestätigt.

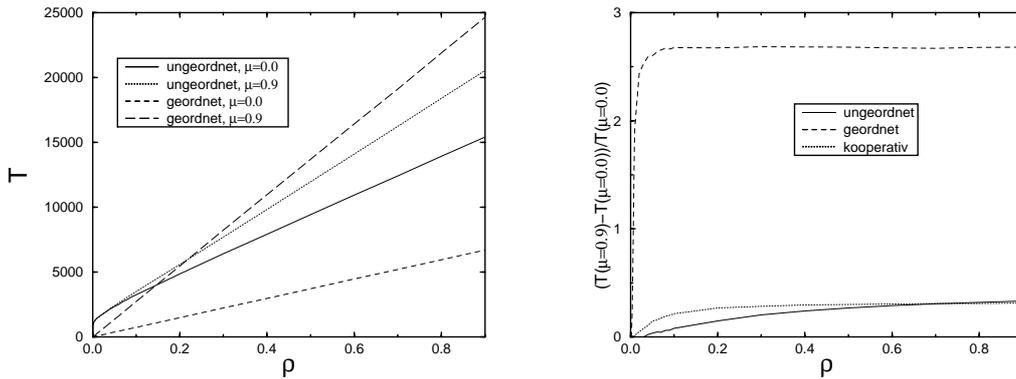


Abbildung 3.22: Evakuierungszeit in Abhängigkeit von ρ und μ : (a) $\mu = 0.0$ und $\mu = 0.9$, ungeordnetes und geordnetes Regime; (b) relative Zeitdifferenzen für alle drei Regime.

Bemerkenswert ist der sehr starke Anstieg im Bereich $\rho = 0.0$ bis $\rho = 0.004$ des geordneten Regimes. Für $\rho > 0.004$ bleibt dann die relative Zeitdifferenz konstant.

3.6.4 Neuinterpretierung des geordneten Regimes

Die Einführung des Reibungsparameters μ erlaubt eine verbesserte Interpretation des geordneten Regimes, daß heißt also starke Kopplung an das statische Feld S ($k_S > 3$) und schwache bis keine Kopplung an das dynamische Feld D . In diesem Regime wurde die Teilchenbewegung beschrieben als eine deterministische, gerichtete Fortbewegung entlang des kürzesten Weges ohne Wechselwirkung mit anderen Teilchen in Richtung des Ausgangs. Durch die Erhöhung des Reibungsparameters μ wird nun eine repulsive Wechselwirkung zwischen den Teilchen in das System eingeführt. Die Teilchen behindern sich auf ihrem Weg durch starke Konkurrenz um die unbesetzten Plätze in der Nähe des Ausgangs. Ein hoher μ -Wert wirkt dann wie ein interner lokaler Druck zwischen den Teilchen, der ihren Fluß hemmt. Somit beschreibt eine starke Kopplung an S zusammen mit einem hohen Reibungswert μ eine typische Paniksituation, in der alle Teilchen versuchen, auf schnellstem Weg den Ausgang zu erreichen und sich hierbei durch Fehlverhalten und lokale Konflikte behindern. Ein solches Verhalten in der Nähe von Engstellen und Ausgängen führt dann zu stark erhöhten Evakuierungszeiten (Beispiele hierfür sind Vorgänge bei Notfall-Evakuierungen aufgrund von Feuer in großen Sportarenen oder Passagierschiffen [50]). Diese Interpretation wird durch Abb. 3.23 gestützt, wo der Einfluß der Kopplungsstärke an S auf die Evakuierungszeit für feste μ -Werte gezeigt ist. Die Kurve für $\mu = 0.0$ legt die Interpretation von k_S als einer inversen Temperatur für den Grad der Information der Teilchen nahe. Für $\mu = 0.0$ gibt es keine interne Reibung zwischen den Teilchen und daher fällt die Evakuierungszeit mit wachsendem k_S monoton (siehe Abschnitt 3.5.1). Anders das Verhalten für $\mu \rightarrow 1$. Die Zahl der ungelösten Konflikte nimmt hier stark mit k_S zu, da die Teilchen umso stärker auf ihrer Wunschrichtung beharren. Es kommt zu einem großen Stau um den Ausgang, den die Teilchen mit wachsendem μ -Wert immer stärker blockieren und verstopfen. Die Folge hiervon ist ein starkes Anwachsen der Evakuierungszeit mit k_S . Für sehr hohe μ -Werte ($\mu = 0.9$ in Abb. 3.23) kommt es schließlich sogar zu *minimalen* Evakuierungszeiten für mittlere Kopplungsstärke ($k_S \approx 1$) [77]. Dieses

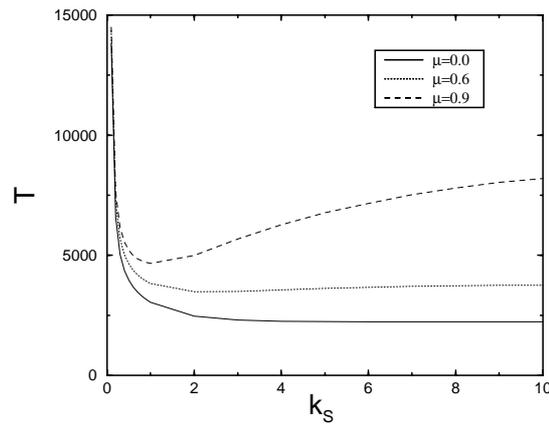


Abbildung 3.23: Evakuierungszeit als Funktion des Sensitivitätsparameters k_S für verschiedene μ -Werte ($k_D = 0.0$).

Verhalten ist somit dem *faster-is-slower-Effekt* aus [38, 55] sehr ähnlich.

3.6.5 Zeitentwicklung einer Evakuierung

Im folgenden soll die zeitliche Entwicklung einer Evakuierung betrachtet werden. Abb. 3.24 zeigt die Anzahl evakuierter Teilchen (also Teilchen die den Raum verlassen haben) N in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und unterschiedliche μ -Werte bei einer hohen Teilchendichte $\rho = 0.3$. Die Kurven zeigen von $t = 0$ an fast

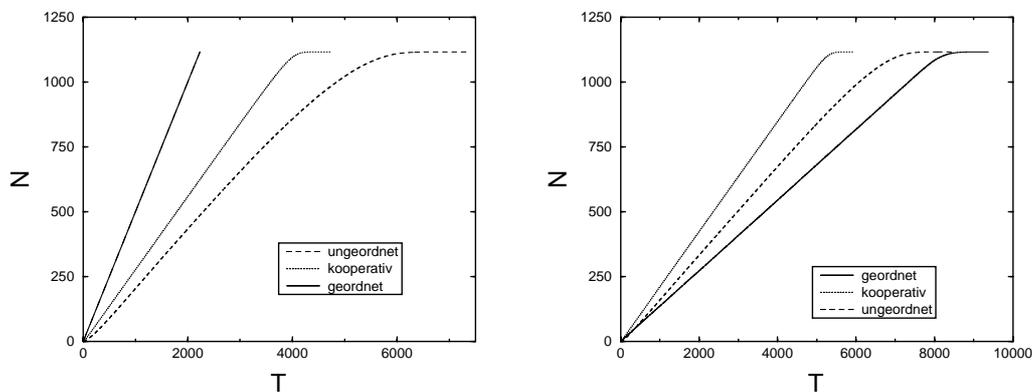


Abbildung 3.24: Anzahl der evakuierten Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und $\rho = 0.3$: (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

den gesamten Verlauf über einen linearen Anstieg. Der Grund hierfür liegt in der hohen Teilchendichte, so daß bereits ganz zu Beginn der Evakuierung etliche Teilchen um den Ausgang versammelt sind, infolgedessen die Ausflußzeiten über einen weiten Bereich konstant bleiben. Die Evakuierungszeiten sind für den Reibungsparameter $\mu = 0.9$ stark erhöht, am deutlichsten ist dieser Effekt wieder im geordneten Regime, wo die Evakuierung sogar die längste Zeit aller drei Regime benötigt. Gegen Ende der Evakuierung, wenn fast alle Teilchen den Raum verlassen haben, verlaufen die Kurven annähernd konstant.

Die Kurven sind aufgrund der Mittelung über viele Konfigurationen sehr glatt¹³. Um einen Eindruck über den Verlauf einer einzelnen Evakuierung und den sich ergebenden möglichen Zeitunterschieden zu gewinnen, sind in Abb. 3.25 die gemittelten Kurven eingehüllt von den Kurven maximaler und minimaler Evakuierungszeit für das geordnete Regime und verschiedene μ -Werte dargestellt. Für $\mu = 0.0$ verläuft der

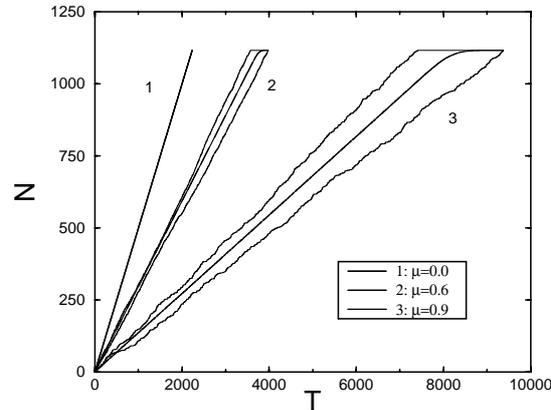


Abbildung 3.25: Anzahl der evakuierten Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit für das geordnete Regime und $\rho = 0.3$; gemittelter, kürzester und längster Evakuierungsprozeß für drei μ -Werte.

Evakuierungsprozeß annähernd deterministisch, gemittelte und einhüllende Kurven fallen zusammen. Mit wachsendem μ wird der interne Druck zwischen den Teilchen stark erhöht und der Prozeß wird in immer stärkerer Weise von der durch μ aufgeprägten Stochastik dominiert. Gemittelte und einhüllende Kurven unterscheiden sich stark. Lokale Plateaugebiete, also kurze Zeitabschnitte, in denen keine Teilchen den Raum verlassen, sind einfach auszumachen. Solche Plateaugebiete finden sich üblicherweise in ähnlichen Ausflußproblemen granularer Materie [74, 75].

In Abb. 3.26 sind erneut die eingehüllten gemittelten Evakuierungskurven abge-

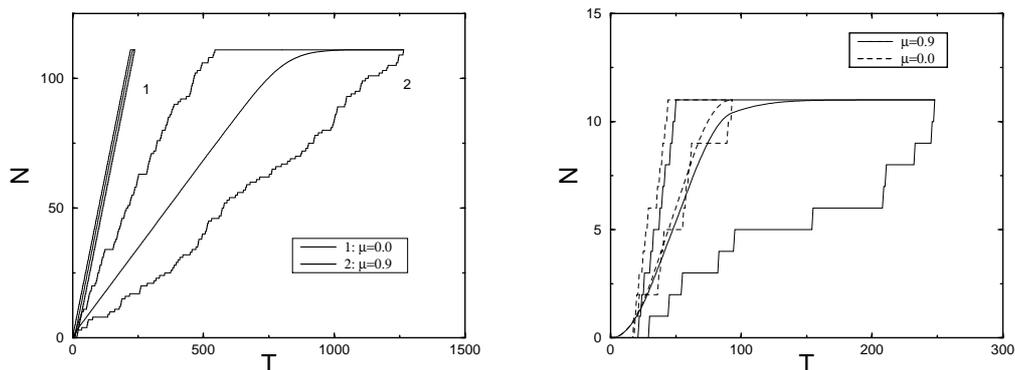


Abbildung 3.26: Anzahl der evakuierten Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit für das geordnete Regime; gemittelter, kürzester und längster Evakuierungsprozeß für zwei μ -Werte: (a) $\rho = 0.03$; (b) $\rho = 0.003$.

¹³Es wurde stets über 500 bis 2000 Konfigurationen gemittelt.

bildet, diesmal für die beiden Dichten $\rho = 0.03$ und $\rho = 0.003$ und die beiden Reibungsparameter $\mu = 0.0$ und $\mu = 0.9$. Dieselben Effekte wie für $\rho = 0.3$ lassen sich hier noch viel deutlicher erkennen. Man sieht die typischen Plateauwerte und das starke Abweichen der Einhüllenden von den gemittelten Kurven. Im Bereich sehr kleiner Dichte $\rho = 0.03$ besitzen die gemittelten Kurven zu Beginn der Evakuierung nur eine schwache Steigung. Hier sind von Beginn an nur sehr wenig Teilchen im System. Diese brauchen dann eine gewisse Zeit, um sich vor dem Ausgang zu sammeln. Nachdem die Teilchen dann einen Stau vor der Tür gebildet haben, setzt sich die Evakuierung in konstanter Weise fort. Für kleinere Dichten werden die gemittelten Kurven also mehr und mehr „S“-förmig.

3.6.6 Mean-Field Approximation für das geordnete Regime

Wie sich in Abschnitt 3.6.5 gezeigt hat, verläuft die Kurve der Anzahl evakuierter Personen $N(t)$ annähernd linear, besonders für hohe Dichten ρ im geordneten Regime. Im folgenden soll nun für dieses Regime eine analytische Näherungslösung für diese Kurve in Abhängigkeit von μ berechnet werden, also $N = N(t, \mu)$.

Im geordneten Regime bewegen sich alle Teilchen aufgrund der starken Kopplung an S auf dem kürzesten Weg in Richtung Ausgang. Daher kommt es bereits nach sehr kurzer Zeit zur Ausbildung eines Staus in der Umgebung des Ausgangs. Abb. 3.27 zeigt daher eine typische lokale Konfiguration in unmittelbarer Nähe der Tür. In Abb. 3.27 konkurrieren drei Teilchen um den unbesetzten Gitterplatz vor der Tür

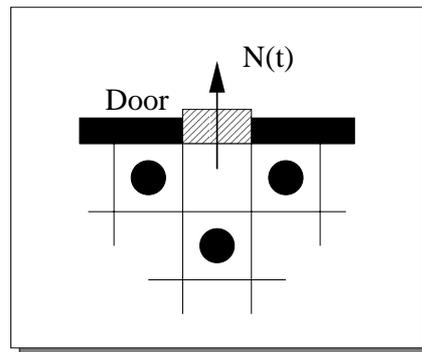


Abbildung 3.27: Typische Konfiguration vor der Tür im geordneten Regime.

zu einem beliebigen Zeitschritt t . Eines dieser drei Teilchen ist dann in der Lage, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \mu$ diesen Platz zum Zeitpunkt t einzunehmen. Im nächsten Zeitschritt $t + 1$ wird dann dieses Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit 1 den Raum durch die Tür verlassen. Aufgrund des dichtgepackten Staus vor der Tür wird die lokale Konfiguration aus Abb. 3.27 zum Zeitpunkt $t + 2$ wieder hergestellt sein. Daher läßt sich durch sukzessive Wiederholung der soeben beschriebenen Sequenz ein typisches Beispiel für die Zeitentwicklung $N(t)$ wie in Abb. 3.28 darstellen. Durch kombinatorische Überlegungen wird dann klar, daß sich der Erwartungswert von $N(t)$ wie folgt schreiben läßt:

$$\langle N(t) \rangle = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} n \binom{t-n}{n} (1-\mu)^n \mu^{t-2n}. \quad (3.6.1)$$

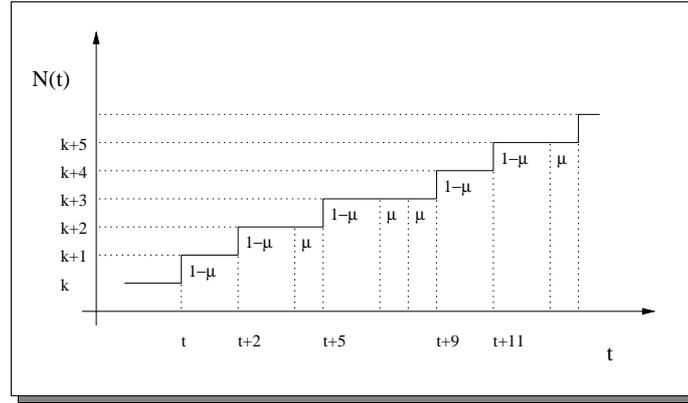


Abbildung 3.28: Ein Beispiel für den Verlauf von $N(t)$ im geordneten Regime.

Hierbei ist der Normierungsfaktor C definiert als

$$C = \sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n}{n} (1-\mu)^n \mu^{t-2n}. \quad (3.6.2)$$

Die Normierung C lässt sich umschreiben zu

$$C(t) = \mu^t \sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n}{n} \left(\frac{1-\mu}{\mu^2} \right)^n. \quad (3.6.3)$$

Mit Hilfe der Formel

$$\sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1+4z}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{t+1} \right) \quad (3.6.4)$$

erhält man schließlich

$$C(t) = \frac{\mu^{t+1}}{2-\mu} \left[\left(\frac{1}{\mu} \right)^{t+1} - \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)^{t+1} \right] \quad (3.6.5)$$

(der Beweis von (3.6.4) wird in Anhang F geführt).

Da $\langle N(t) \rangle$ mit C durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\mu} C = \frac{t}{\mu} C + \frac{\mu-2}{\mu(1-\mu)} \langle N(t) \rangle C, \quad (3.6.6)$$

oder

$$\langle N(t) \rangle = \frac{\mu(1-\mu)}{\mu-2} \left(\frac{d}{d\mu} \log C - \frac{t}{\mu} \right) \quad (3.6.7)$$

verknüpft ist, erhält man schließlich für $\langle N(t) \rangle$ den Ausdruck

$$\langle N(t) \rangle = \frac{\mu-1}{(\mu-2)^2} \left\{ \mu(1+t) - 2t - \frac{(\mu-2)(\mu-1)^t \mu(1+t)}{(\mu-1)^{t+1} - 1} \right\}. \quad (3.6.8)$$

Asymptotisch erhält man dann aus (3.6.8)

$$\langle N(t) \rangle \sim \frac{1-\mu}{2-\mu} t \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (3.6.9)$$

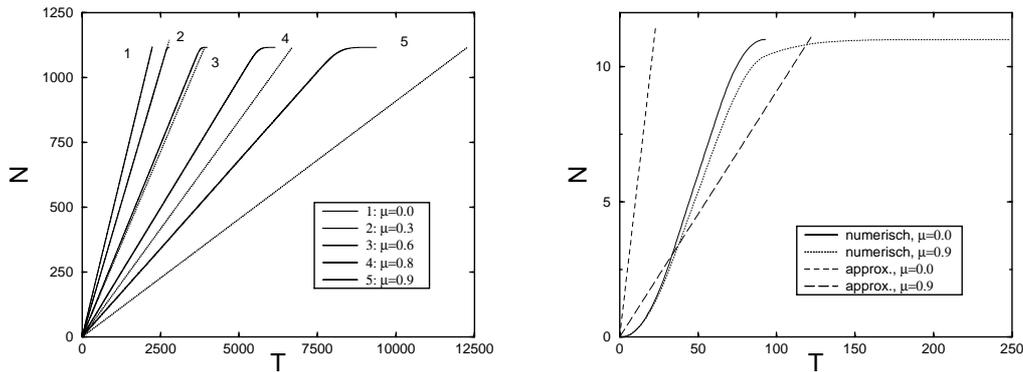


Abbildung 3.29: Anzahl der evakuierten Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit für das geordnete Regime; Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der analytischen Approximation (3.6.8): (a) $\rho = 0.3$; (b) $\rho = 0.003$.

Abb. 3.29 zeigt den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der analytischen Approximation in (3.6.8) für verschiedene μ -Werte und zwei Teilchendichten. Aus Abb. 3.29 läßt sich ersehen, daß die Approximation (3.6.8) für $\langle N(t) \rangle$ für hohe Dichten ($\rho = 0.3$) und Reibungsparameter $\mu \leq 0.6$ sehr gut ist. Für sehr große Parameter $\mu \geq 0.8$ wird die Approximation jedoch ziemlich schlecht. Grund hierfür ist, daß sich für große μ -Werte die Annahme der lokalen Konfiguration aus Abb. 3.27 nicht länger aufrecht erhalten läßt. Diese Annahme führt zu einer Unterschätzung des Flusses durch (3.6.8) für großes μ . Tatsächlich behindern sich die Teilchen bei großem μ bereits sehr stark in sämtlichen Regionen des Gitters auf ihrem Weg. Dies führt dazu, daß sie verspätet den Ausgang erreichen und der Stau in unmittelbarer Nähe des Ausgangs nicht so dichtgepackt ist und somit auch andere lokale Konfigurationen als in Abb. 3.27 möglich sind.

(3.6.8) liefert auch eine sehr gute Approximation im Niedrigdichtebereich $\rho = 0.03$ für $\mu \leq 0.6$ (in Abb. 3.29 nicht abgebildet), wird jedoch für sehr kleine Dichten $\rho = 0.003$ unabhängig von μ sehr schlecht (Abb. 3.29 (b)). Bei einer solchen Dichte befinden sich lediglich sehr wenige Teilchen im System, die nahezu unabhängig voneinander, ohne sich zu behindern, den Ausgang erreichen. Hier wird die durchschnittliche Evakuierungszeit eher durch den Durchmesser des Raumes (proportional zur mittleren Weglänge der Teilchen zum Ausgang) bestimmt, als durch die Zahl der Teilchen im System.

3.6.7 Zahl der Konflikte während einer Evakuierung

Der folgende Abschnitt soll über die zeitliche Entwicklung der entstehenden Konflikte im Gesamtsystem im Verlauf einer Evakuierung Aufschluß geben. Abb. 3.30 zeigt die Anzahl der Konflikte in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime im Bereich hoher Dichte $\rho = 0.3$. Die maximale Anzahl der Konflikte findet sich in allen Regimen kurz nach Beginn der Evakuierung. Die Anzahl der Konflikte ist im ungeordneten Regime stets am größten. Die Teilchenbewegung findet hier größtenteils ungerichtet über das Gitter statt. Da sich sehr viele Teilchen im System befinden, kommt es bei dieser Zufallsbewegung häufig zu Konflikten sich kreuzender Teilchen in vielen Regionen des Gitters. Im geordneten Regime sammeln sich die Teilchen nach kurzer Zeit um den Ausgang, der größte Teil der im dichten Stau (siehe Abb.

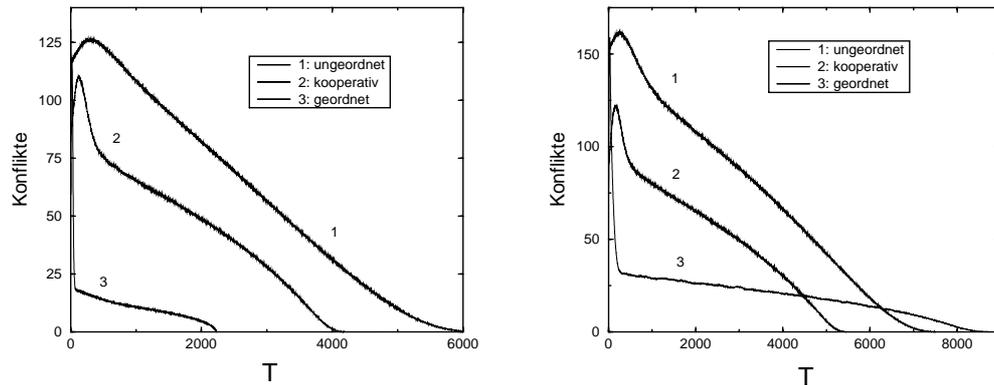


Abbildung 3.30: Anzahl der Konflikte in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und $\rho = 0.3$: (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

3.8) stehenden Teilchen kann sich gar nicht bewegen und trägt daher keine Konflikte aus. Aber obwohl die Gesamtzahl der Konflikte im geordneten Regime am kleinsten ist, hat der Reibungsparameter μ hier den weitaus größten Einfluß. Entscheidend ist die Lokalisierung der Konflikte in unmittelbarer Nähe des Ausgangs.

In Abb. 3.31 sind die zugehörigen Konfliktdichten, das heißt, die Anzahl der Kon-

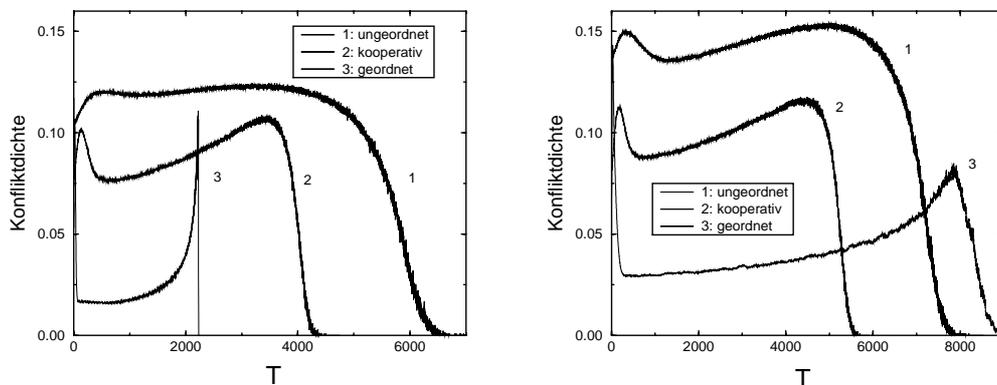


Abbildung 3.31: Konfliktdichte in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und $\rho = 0.3$: (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

flikte geteilt durch die Anzahl der Teilchen im System abgebildet. Abb. 3.31 (a) zeigt gegen Ende der Evakuierung einen sehr starken Anstieg der Konfliktdichte im geordneten Regime für $\mu = 0.0$. Der große Stau vor dem Ausgang hat sich dann immer weiter aufgelöst, und sämtliche, im System verbliebenen Teilchen konkurrieren um die unbesetzten Plätze vor dem Ausgang.

In Abb. 3.32 und Abb. 3.33 sind die Anzahl der Konflikte und die Konfliktdichten in allen drei Regimen für die Teilchendichte $\rho = 0.03$ dargestellt. Da sich für $\rho = 0.03$ nicht so viele Teilchen im System befinden, kommt es im ungeordneten und kooperativen Regime nicht so häufig zu Konflikten. Die Anzahl der Konflikte und die Konfliktdichte sind nun im geordneten Regime annähernd maximal, wo sich sämtliche Teilchen in unmittelbarer Nähe des Ausgangs befinden.

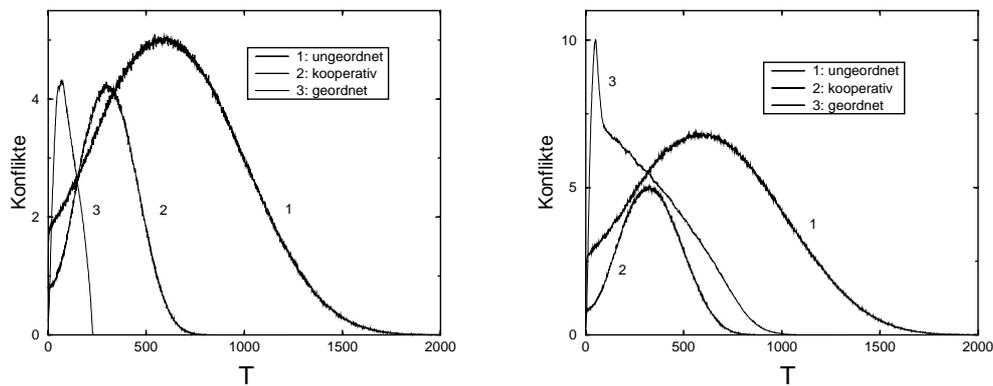


Abbildung 3.32: Anzahl der Konflikte in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und $\rho = 0.03$: (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

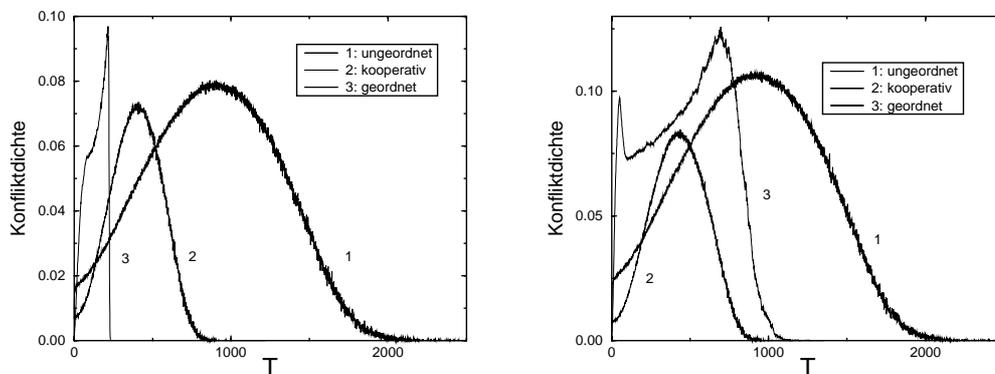


Abbildung 3.33: Konfliktdichte in Abhängigkeit von der Zeit für alle drei Regime und $\rho = 0.03$: (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

3.6.8 Säule vor dem Ausgang

Analog zu Abschnitt 3.5.3 soll im folgenden untersucht werden, welchen Einfluß ein einfaches, geometrisches Objekt vor einem Ausgang auf die Evakuierungszeiten in Abhängigkeit von μ hat (siehe hierzu auch [38, 56]). Bei dem geometrischen Objekt handelt es sich um ein nicht-überquerbares Hindernis, das als eine Art stilisierte Säule vor dem Ausgang plaziert wird. Diese Säule kann sowohl zentral, als auch seitlich um einige Gitterplätze verschoben, vor der Tür liegen. Abb. 3.34 zeigt dynamische Zustände von Evakuierungen für verschiedene Raumgeometrien. Die gemittelten Evakuierungszeiten für verschiedene Positionen der Säule sollen im folgenden mit den Zeiten für einen Raum ohne innere Struktur verglichen werden. Das statische Feld S wurde für die kompliziertere Geometrie eines Raumes mit innerer Struktur mit Hilfe einer Manhattan-Metrik bestimmt. Detaillierte Angaben hierzu finden sich in Anhang C.

Da der Einfluß des Reibungsparameters μ im geordneten Regime am weitest stärksten ist, soll es im folgenden als einziges berücksichtigt werden. In Abb. 3.35 sind die gemittelten Evakuierungszeiten für vier verschiedene Reibungsparameter ($\mu = 0.0, 0.3, 0.6$ und 0.9) und unterschiedliche Positionen der Säule abgebildet. Die Platzierung einer Säule hat für $\mu = 0.0$ keinen Einfluß auf die Evakuierungszeiten. Die Teil-

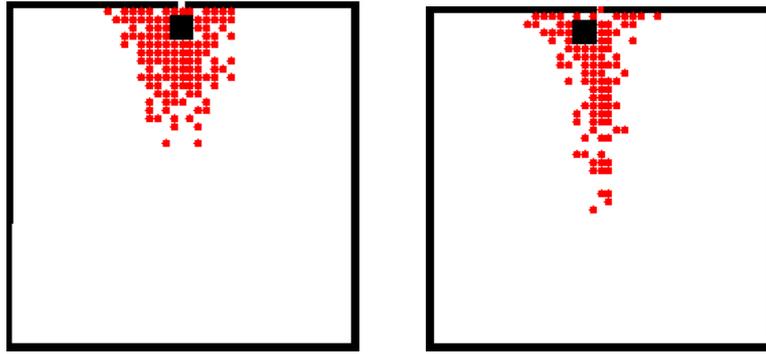


Abbildung 3.34: Typische Zustände der Dynamik einer Evakuierung mit einer Säule im Bereich des Ausgangs. Die stilisierte Säule ist ein nicht-überquerbares Hindernis von 3×3 Gitterplätzen. **(a)** Die Säule liegt zentral vor der Tür. **(b)** Die Säule ist um zwei Gitterplätze seitlich zum Ausgang verschoben.

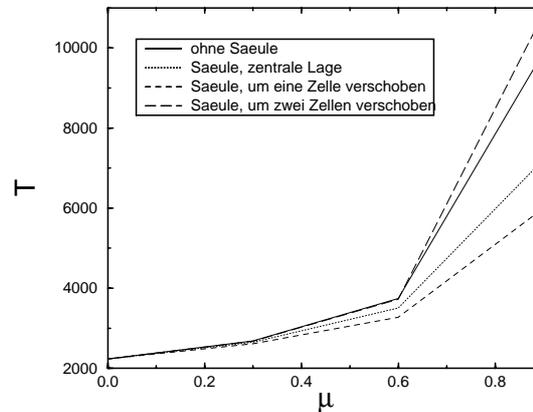


Abbildung 3.35: Gemittelte Evakuierungszeiten als Funktion des Reibungsparameters μ für vier verschiedene Raumgeometrien: ohne Säule, Säule zentral vor dem Ausgang und seitlich verschobene Säulen (Verschiebung ein und zwei Gitterzellen, siehe Abb. 3.34).

chenbewegung verläuft annähernd deterministisch, die Teilchen behindern sich nicht durch Konflikte und verlassen geordnet nacheinander den Raum. Für wachsenden μ -Parameter kann die Plazierung einer Säule eine starke Verringerung der Evakuierungszeit zur Folge haben. Die Säule bewirkt eine Aufteilung der Teilchenmenge und führt zu einer Verringerung von Konfliktsituationen. Minimale Evakuierungszeiten ergeben sich für $\mu > 0$ für eine leicht vom Ausgang parallel verschobene Säule (Verschiebung um eine Gitterzelle) [38, 56]. Auf diese Weise werden den Teilchenfluß behindernde symmetrische Konfigurationen der Teilchen und Felder um den Ausgang, die im Fall einer zentralen Säule auftreten, vermieden¹⁴. Wird die Säule zu weit vom Ausgang entfernt, so wirkt sie lediglich als blockierendes Hindernis für die Teilchen. In diesem Fall führt die Säule zu einer Maximierung der Evakuierungszeit.

¹⁴Solche, den Teilchenfluß blockierenden, symmetrischen Konfigurationen sind durch viele Arbeiten auf dem Gebiet granularer Materie bekannt (zum Beispiel im Fall von *Arching*). Ob es sich in dem hier untersuchten Fall um ein Artefakt der Simulation oder um einen realen Effekt handelt, kann ohne die Ausführung von Experimenten nicht entschieden werden.

ten.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Untersuchungen beziehen sich auf ein stark vereinfachtes Bild realer Situationen. Insbesondere ist die Wechselwirkung der Teilchen in dem Modell mit der Säule als reibungsfrei angenommen, und es werden keine Aussagen über optimale Form und Größe der Säule gemacht. Eine Überprüfung der Ergebnisse anhand von Experimenten (siehe Abschnitt 3.6.10) wäre daher höchst aufschlußreich.

3.6.9 Fluß und Konflikte im Korridor

In diesem Abschnitt soll der Einfluß des Reibungsparameters μ auf den Teilchenfluß J in einem Korridor untersucht werden. Der Korridor wird repräsentiert durch ein Gitter der Größe $X \times Y = 93 \times 33$. Das statische Grundfeld S hat die höchsten Feldwerte am rechten Rand des Gitters, die vorherrschende Bewegungsrichtung der Teilchen verläuft also von rechts nach links. Das Gitter besitzt periodische Randbedingungen (siehe hierzu [57], Seite 26). Jedoch können sämtliche Zellen am oberen und unteren Rand des Gitters von den Teilchen nicht betreten werden, sie stellen die begrenzenden Wände des Korridors dar und besitzen daher die Hinderniszahl $\zeta_{ij} = 0$. In der Mitte des Korridors kann senkrecht zur bevorzugten Teilchenlaufrichtung eine Engstelle variabler Breite \mathcal{B} eingefügt werden (\mathcal{B} wird in Gitterzellen angegeben). Abb. 3.36 zeigt Zustände der Dynamik für einen Korridor mit zwei verschiedenen Breiten der Engstelle. In Abb. 3.37 sind die zu Abb. 3.36 (b) korres-

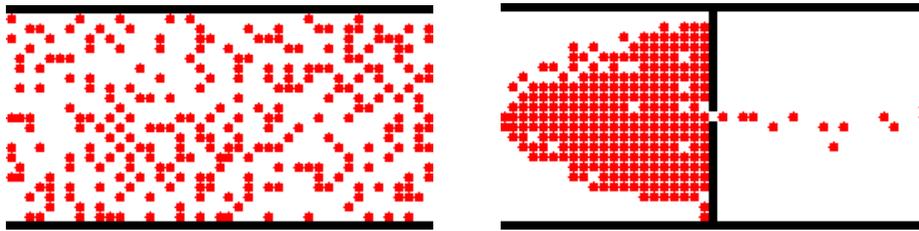


Abbildung 3.36: Korridor mit Teilchenbewegung von links nach rechts: (a) Korridor ohne Engstelle (das heißt $\mathcal{B} = 31$); (b) Korridor mit Engstelle der Breite $\mathcal{B} = 1$.

pondierenden Felder D und S abgebildet. Im folgenden werden nun für verschiedene

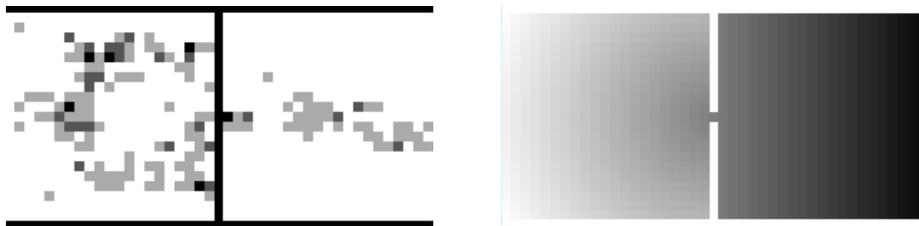


Abbildung 3.37: (a) D und (b) S entsprechend Abb. 3.36 (b).

Breiten \mathcal{B} die Teilchenflüsse durch die Engstelle im geordneten Regime ermittelt. Die Teilchenströme J ergeben sich aus dem Produkt von mittlerer Teilchengeschwindigkeit $\langle v_x \rangle$ mit der Teilchendichte ρ im stationären Zustand des Systems. Die hieraus resultierende Kenngröße heißt *Fundamentaldiagramm* (FD)¹⁵, die den Teilchenfluß

¹⁵Das Fundamentaldiagramm ist in sämtlichen Untersuchungen zur Verkehrsdynamik die wichtigste Kenngröße [30]. Besondere Bedeutung kommt hierbei den Studien empirischer Daten [25, 78] zu.

J in Abhängigkeit von der Teilchendichte ρ angibt.

Zunächst sei ein Korridor der Größe $X \cdot Y$ ohne Engstelle betrachtet. Im geordneten Regime ($k_S = 10.0$, $k_D = 0.0$) ohne Reibung ($\mu = 0.0$) wird sich dann zu einem beliebigen Zeitschritt t ein Teilchen vom Platz (i, j) auf seinen rechten Nachbarplatz bewegen, wenn dieser unbesetzt ist. Ist der rechte Nachbarplatz besetzt, so verbleibt das Teilchen auf seinem Platz, oder bewegt sich auf den oberen oder unteren Nachbarplatz, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit (Wechsel der Bahn). Eine vereinfachte Variante hiervon ist ein Modell entkoppelter Bahnen, indem die Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit n_{i+1j} (Besetzungszahl des Platzes $(i+1, j)$) nach rechts vorrücken oder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - n_{i+1j}$ auf ihrem Platz verharren. Das Modell reduziert sich also auf Y Kopien eines eindimensionalen Modells, die lediglich durch die konstante globale Teilchendichte verknüpft sind (insgesamt also Y Bahnen der Länge X). Diese eindimensionalen Untersysteme der vereinfachten Variante entsprechen dem ASEP mit $v_{\max} = 1$ und Hüpfwahrscheinlichkeit $p = 1$ [34,57]. Das Fundamentaldiagramm für den allgemeinen, stochastischen ASEP ($0 \leq p \leq 1$) mit parallelem Update und periodischen Randbedingungen ist nach [35] durch

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4p\rho(1 - \rho)} \right) \quad (3.6.10)$$

gegeben. Da die Teilchendichte des Korridors nur global vorgegeben ist, wird die Teilchenzahl der einzelnen Bahnen fluktuieren. Insgesamt befinden sich $\rho \cdot X \cdot Y$ Teilchen im System, welche zu Beginn der Simulation zufällig auf den freien Plätzen des Gitters verteilt werden.

Die zu bestimmende Größe $P(i, n)$ ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von n bereits verteilten Teilchen genau i in einer ausgewählten Bahn liegen. $P(i, n)$ ist durch die hypergeometrische Verteilung gegeben [57]:

$$P(i, n) = \frac{\binom{X}{i} \binom{X(Y-1)}{n-i}}{\binom{XY}{n}}. \quad (3.6.11)$$

Für den Erwartungswert der Dichte einer Bahn ergibt sich dann wie erwartet:

$$\frac{1}{X} \sum_{i=0}^X iP(i, \rho XY) = \frac{1}{X} \cdot \frac{X \cdot \rho XY}{XY} = \rho. \quad (3.6.12)$$

Das Fundamentaldiagramm des vereinfachten Modells entkoppelter Bahnen läßt sich dann mit Hilfe von (3.6.10) zurückführen auf

$$J(\rho) = \sum_{i=0}^X P(i, \rho XY) J_0 \left(\frac{i}{X} \right). \quad (3.6.13)$$

Abb. 3.38 zeigt den Vergleich der Fundamentaldiagramme des geordneten Regimes mit $\mu = 0.0$ und des Modells entkoppelter Bahnen. Beide Kurven sind bis zu einer Teilchendichte von $\rho = 0.45$ nahezu identisch. Das Maximum des Flusses J des vereinfachten Modells liegt bei¹⁶ $\rho = \frac{1}{2}$, wohingegen der Maximalwert von J im

¹⁶Der ASEP und damit auch das vereinfachte Modell entkoppelter Bahnen besitzen *Teilchen-Loch-Symmetrie*, daher müssen (3.6.10) und (3.6.13) um $\rho = \frac{1}{2}$ symmetrische Fundamentaldiagramme ergeben. Für das in dieser Arbeit untersuchte Fußgängermodell ist die Teilchen-Loch-Symmetrie jedoch verletzt, das FD im geordneten Regime muß also nicht notwendigerweise symmetrisch sein.

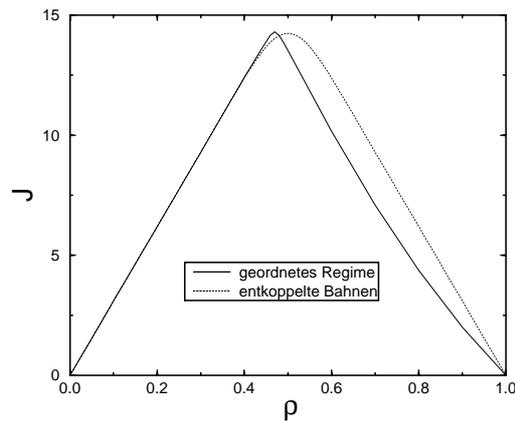


Abbildung 3.38: Vergleich der Fundamentaldiagramme des geordneten Regimes ($k_S = 10.0$, $k_D = 0.0$) ohne Reibung mit der mehrdimensionalen Version entkoppelter Bahnen des ASEP.

geordneten Regime zu einer kleineren Dichte $\rho \approx 0.47$ verschoben ist. Nach diesem Maximalwert des Flusses fällt die Kurve im geordneten Regime monoton, und die Flußwerte sind stets kleiner als die korrespondierenden des vereinfachten Modells. Der Grund hierfür liegt darin, daß im geordneten Regime des herkömmlichen Modells Bahnwechsel der Teilchen im Falle eines besetzten rechten Nachbarplatzes mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, wie das Verharren der Teilchen auf ihren Plätzen. Ein solcher Bahnwechsel trägt jedoch nicht zum Fluß in horizontaler Richtung bei und kann seinerseits die Vorwärtsbewegung anderer Teilchen verhindern (siehe Abb. 3.39). Abb. 3.40 zeigt die Fundamentaldiagramme im geordneten Re-

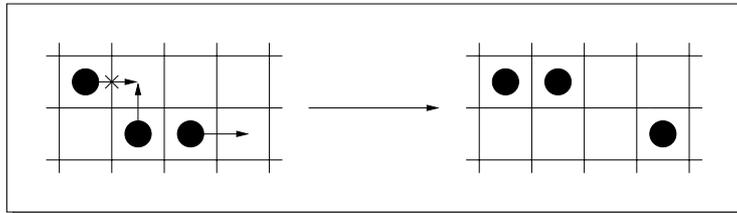


Abbildung 3.39: Verminderung des Flusses durch Bahnwechsel.

gime für verschiedene Breiten der Engstelle und die Reibungsparameter $\mu = 0.0$ (a) und $\mu = 0.9$ (b). Der Maximalwert des Flusses J skaliert für $\mu = 0.0$ mit der Größe der Engstelle. Er wird für kleinere Engstellen jeweils bei kleineren Teilchendichten angenommen. Der Einfluß des Reibungsparameters wirkt sich besonders stark für erhöhte Dichten ρ aus (beginnend etwa bei der dem Flußmaximum korrespondierenden Dichte). Der Vergleich der Flüsse für die zwei μ -Parameter ist in Abb. 3.41 für $\mathcal{B} = 31$ und $\mathcal{B} = 1$ gezeigt. Der Reibungsparameter μ hat bei einer schmalen Engstelle einen proportional wesentlich größeren Einfluß auf den Teilchenfluß. Selbst bei sehr geringen Dichten ($\rho \approx 0.001$) bricht der Fluß für $\mu = 0.9$ auf ein Fünftel des reibungsfreien Flusses zusammen. Die Teilchen können bei schmalerer Engstelle ihre direkte Vorwärtsbewegung entlang des Korridors nicht fortsetzen, sondern müssen, um die Engstelle zu passieren, ihre Richtung ändern. Infolgedessen kommt es zu einer großen Anzahl von Konflikten im Bereich der Engstelle.

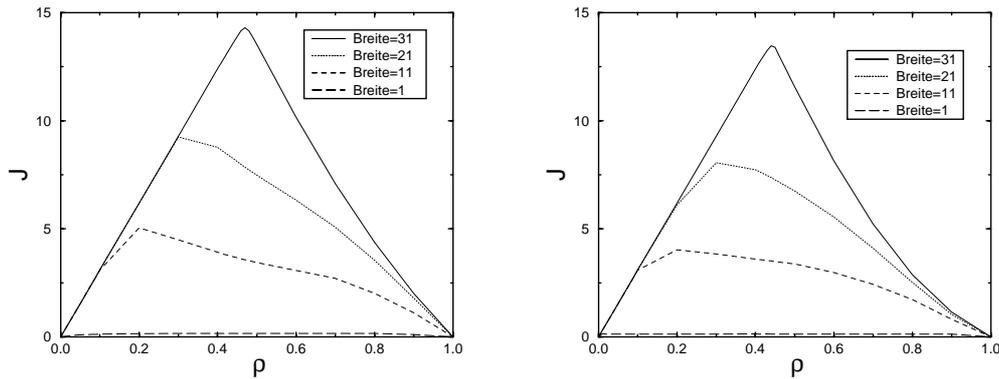


Abbildung 3.40: Fundamentaldiagramme des Flusses J durch die Engstelle variabler Breite im geordneten Regime ($k_S = 10.0$): (a) $\mu = 0.0$; (b) $\mu = 0.9$.

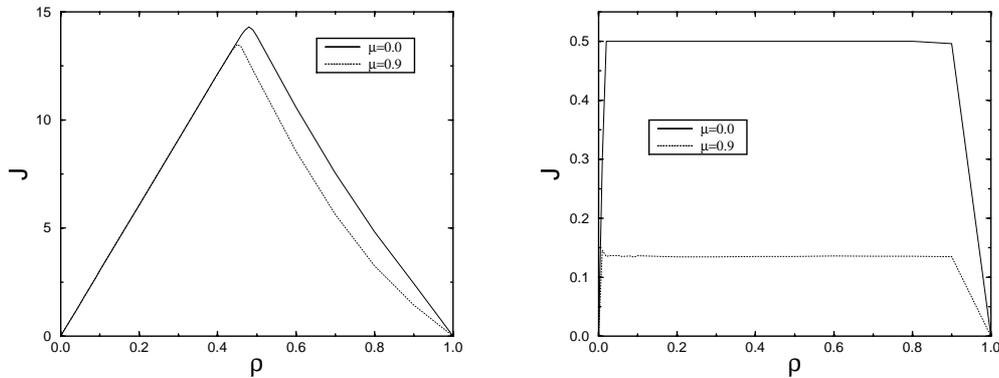


Abbildung 3.41: Fundamentaldiagramme des Flusses J durch die Engstelle variabler Breite im geordneten Regime ($k_S = 10.0$): (a) $B = 31$; (b) $B = 1$.

3.6.10 Vergleich mit empirischen Daten

Die folgenden Untersuchungen wurden durch eine sehr interessante experimentelle Versuchsreihe angeregt [79]. Bei diesen Versuchen wurden die Evakuierungszeiten von 30 Testpersonen¹⁷ aus einem schmalen Passagierflugzeug durch einen Ausgang variabler Breite gemessen. Die Testpersonen sollten sich bei der Evakuierung sowohl in kompetitiver, als auch in nicht-kompetitiver Weise verhalten¹⁸. Abb. 3.42 zeigt die Ergebnisse des Experiments. Oberhalb einer bestimmten Türbreite führt das kompetitive Verhalten der Teilnehmer zu geringeren Evakuierungszeiten. Hingegen ist unterhalb dieser ausgezeichneten Türbreite das Gegenteil der Fall. Im Bereich der ausgezeichneten Türbreite kommt es zu einem sehr starken Abfall der Evakuierungszeiten im kompetitiven Fall.

¹⁷Die eigentliche Anzahl der Teilnehmer des Experiments war in der Tat um einiges größer (circa. 70 Personen). Für die Analyse festgehalten wurden jedoch nur die Zeiten, die nach der Evakuierung der 30. Person gemessen wurden.

¹⁸Die beiden Verhaltensweisen wurden in folgender Weise simuliert: Im Fall des kompetitiven Verhaltens wurde als Belohnung für die erste Person, der es gelang, das Flugzeug zu verlassen, eine 5 Pfund-Note ausgelobt. Im Fall des nicht-kompetitiven Verhaltens gab es keinerlei Anreize durch Belohnung. Die Testpersonen waren lediglich aufgefordert, in gesitteter Weise das Flugzeug zu verlassen.

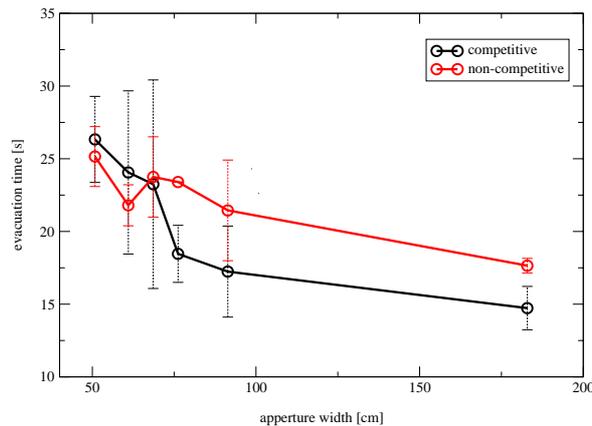


Abbildung 3.42: Evakuierungszeit (*evacuation time*) gegen Breite des Ausgangs (*aperture width*) einer Evakuierungsübung in einem Flugzeug. Die 30 Testpersonen verhielten sich entweder kompetitiv (*competitive*) oder nicht-kompetitiv (*non-competitive*) (siehe [79]). Die Kurven der Evakuierungszeiten schneiden sich bei einer Türbreite von ca. 65 cm.

Im folgenden soll die Frage erörtert werden, wie kompetitives und nicht-kompetitives Verhalten von Fußgängern modelliert werden kann und ob es möglich ist, das experimentelle Resultat in Abb. 3.42 zu reproduzieren. Um in einem Modell für die Dynamik von Fußgängern verschiedene Arten von kompetitivem und nicht-kompetitivem Verhalten der Teilchen unterscheiden zu können, ist es hilfreich, grundlegende Konzepte aus dem Bereich der Spiel-Theorie einzuführen [80]. Es lassen sich zwei Hauptarten von kompetitivem Verhalten angeben.

1. Wettstreit (*competition*) zwischen Teilchen, der zu keinem Gewinn für eines der beteiligten Teilchen führt. Alle beteiligten Teilchen sind Verlierer des Wettstreits.
2. Wettstreit zwischen Teilchen, der einem (oder mehreren) der beteiligten Teilchen einen Gewinn verschafft und die anderen verlieren läßt (ein sogenanntes *Nullsummenspiel*).

Gewinn im Sinne der bisher betrachteten Szenarien des Fußgängermodells bedeutet für ein Teilchen Minimierung der eigenen Evakuierungszeit. Dies läßt sich durch einen optimalen Laufweg zum Ausgang und Minimierung der durch Konflikte um Zielzellen des Gitters mit konkurrierenden Teilchen entstehenden Wartezeiten erreichen.

Offensichtlich läßt sich durch das Konzept des Reibungsparameters μ die erste Version kompetitiven Verhaltens modellieren. Teilchen mit hoher Kopplung an das statische Feld S bewegen sich auf dem schnellsten Weg zum Ausgang, bei einem hohen Wert von μ verlieren jedoch sehr häufig alle Teilchen eines Konfliktes. Alle Teilchen verharren auf ihren Startzellen, und die von den Teilchen gemeinsam angestrebte Zielzelle bleibt unbesetzt.

Eine erste Möglichkeit zur Adaption der zweiten Version kompetitiven Verhaltens ist einfach durch die in Abschnitt 3.6.1 beschriebenen herkömmlichen Regeln des Update gegeben (oder durch $\mu = 0.0$). Wieder sollen sich die Teilchen durch starke Kopplung an S auf dem kürzesten Weg Richtung Ausgang bewegen. In jedem Kon-

flikt um einen unbesetzten Zielplatz gewinnt dann stets nur das zum Zug kommende Teilchen. Alle anderen beteiligten Teilchen verlieren durch ihr Verharren auf den Startfeldern. Diese Realisierung des zweiten Konzepts resultiert aber im Rahmen des Modells in einer zu „schwachen“ Form von Wettstreit und ist daher zur Wiedergabe von Abb. 3.42 nicht geeignet (die Evakuierungszeiten sinken stets für alle Türbreiten mit wachsender Kopplung an das statische Feld S). Eine angemessenere Realisierung der zweiten Version ließe sich durch eine differenzierte Erweiterung des Modells erreichen. Bestimmte Teilchen sollten dann in der Lage sein, auf dem kürzesten Weg zum Ausgang andere Teilchen aus dem Weg zu räumen. Hierbei könnte ihnen auch die Möglichkeit gegeben werden, andere Teilchen von bereits besetzten Plätzen zu verdrängen. Den verdrängten Teilchen könnte es dann für mehrere Zeitschritte nicht möglich sein, sich zu bewegen.

Im folgenden soll mit Hilfe des Konzepts von μ und der daraus resultierenden Adaption der ersten Version kompetitiven Verhaltens untersucht werden, ob sich das Verhalten aus Abb. 3.42 durch das Modell qualitativ reproduzieren läßt. Wie bereits beschrieben sei kompetitives Verhalten der Teilchen durch einen hohen k_S -Wert ($k_S = 10.0$) und hohen μ -Wert ($\mu = 0.6$) dargestellt.

Nicht-kompetitives Verhalten der Teilchen wird dann durch eine schwächere Kopplung an S (die Teilchen trödeln und bewegen sich nicht stets auf dem direkten Weg zum Ausgang) und kleines μ (die Teilchen behindern sich nicht gegenseitig) beschrieben. Als Parameter für dieses Verhalten seien $k_S = 1.0$ und $\mu = 0.0$ gewählt.

In Abb. 3.43 sind die gemittelten Evakuierungszeiten für beide Verhaltensweisen abgebildet. Zugrunde liegt ein Gitter der Größe $X \times Y = 63 \times 63$ mit einem Ausgang variabler Breite. Die anfängliche Dichte ist $\rho = 0.03$, dies entspricht 111 Teilchen. Die

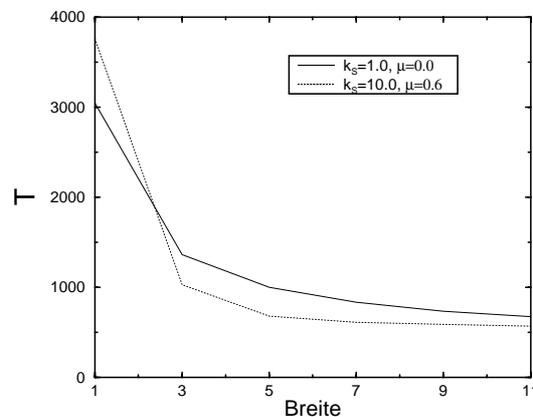


Abbildung 3.43: Gemittelte Evakuierungszeiten eines Raumes in Abhängigkeit von der Breite der Tür. Die Breite variiert zwischen einer und elf Gitterzellen. Kompetitives Verhalten wird durch die Parameter $k_S = 10.0$ und $\mu = 0.6$ und nicht-kompetitives Verhalten durch die Parameter $k_S = 1.0$ und $\mu = 0.0$ dargestellt.

experimentellen Ergebnisse aus Abb. 3.42 werden durch Abb. 3.43 qualitativ sehr gut reproduziert. Berücksichtigt man die Zeitskala des Modells und zieht man die unterschiedlichen Fußgängerzahlen in Betracht, so erkennt man, daß die Übereinstimmung mit dem Experiment auch quantitativ recht gut ist¹⁹. Dieser Vergleich zwischen ei-

¹⁹Die Evakuierungszeiten des Modells sind um etwa den Faktor $2\frac{1}{2}$ größer als die Zeiten des Experiments (die höhere Teilchenzahl der Simulation ist hierbei bereits berücksichtigt). Ein weiterer

nem Experiment und Simulationsergebnissen des Modells liefert also einen weiteren Beleg für die Fruchtbarkeit des Konzepts des Reibungsparameters μ .

3.7 Modellvarianten zu $v_{\max} > 1$

In der bisher untersuchten Version des Modells zur Fußgängerdynamik war es den Teilchen lediglich gestattet, sich in einem Zeitschritt t auf einen unbesetzten nächsten Nachbarplatz zu bewegen, das heißt, es galt stets $v_{\max} = 1$. Diese Beschränkung der Laufgeschwindigkeiten der Teilchen bringt die in Abschnitt 3.4 diskutierten Vorteile mit sich und führt nicht zu qualitativen Abweichungen bei der Wiedergabe der meisten experimentell beobachtbaren Phänomene. Gleichwohl gibt es einige gewichtige Gründe, die für die Einführung höherer Laufgeschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ in bestimmten Fällen sprechen.

1. Das in Abb. 3.38 abgebildete Fundamentaldiagramm der Teilchenbewegung in einem Korridor ist annähernd symmetrisch mit einem Maximalwert des Flusses bei einer Dichte von $\rho \approx \frac{1}{2}$. Experimentell ermittelte Daten belegen jedoch ein nicht-symmetrisches Fundamentaldiagramm des Flusses mit Maximalwerten für Dichten $\rho < \frac{1}{2}$ [64, 65].
2. Das Geschwindigkeitsprofil durchschnittlicher Fußgänger besitzt zwar einen relativ scharfen Mittelwert (ca. 1.3 m/s), jedoch sind auch um einiges höher liegende Laufgeschwindigkeiten häufig beobachtbar [64].
3. In einem Modell mit $v_{\max} > 1$ läßt sich eine realistische Verteilung verschiedener Laufgeschwindigkeiten auf das Ensemble der Teilchen einfach erreichen (Abschnitt 3.4)²⁰.

Im folgenden sollen daher höhere Laufgeschwindigkeiten der Teilchen ermöglichende Erweiterungen des Modells vorgestellt werden. Die aus diesen Modellvarianten resultierenden Ergebnisse sollen dann eingehend diskutiert und mit experimentellen Daten verglichen werden.

3.7.1 Klassifikation der Modellvarianten

Im bisher diskutierten Modell mit $v_{\max} = 1$ konnten die Teilchen in einem Zeitschritt eine maximale Strecke von $a = 40$ cm zurücklegen (dies entspricht einer Bewegung auf einen nächsten Nachbarplatz). Bei größeren Geschwindigkeiten $v_{\max} \in \{1, 2, 3, \dots\}$ sollen die Teilchen dann entsprechend eine Strecke von $v_{\max} \cdot a$ in einem Zeitschritt zurücklegen können.

Hierzu sei zunächst zu Beginn eines Zeitschritts t die Position eines jeden Teilchens $n \in \{1, \dots, N\}$ mit $T_{n0}(t)$ bezeichnet. Jedes Teilchen bestimmt dann entsprechend seiner gewünschten Bewegung eine aus $v_{\max} + 1$ Gitterplätzen bestehende Trajektorie $T_n(t) = \{T_{n0}(t), \dots, T_{nv_{\max}}(t)\}$. Ein beliebiges Element der Trajektorie $T_{nl}(t)$

relevanter Unterschied zwischen Experiment und Simulation besteht in den unterschiedlichen Ausmessungen der zugrundeliegenden räumlichen Strukturen. Die Personen mußten im Experiment eine wesentlich kürzere Strecke zum Ausgang zurücklegen, als in der Simulation.

²⁰Der wichtigste Aspekt dieser Auflistung ist sicherlich der erste. Die beiden anderen Aspekte lassen sich auch im Fall von $v_{\max} = 1$ mit Hilfe individueller Trödelwahrscheinlichkeiten, oder einer Reskalierung der Zeitskala erreichen.

entspricht hierbei einem mit Hilfe des in Abschnitt 3.4 erläuterten Verfahrens ermittelten Zielfeldes \mathcal{Z} eines virtuell auf den Platz $T_{nl-1}(t)$ vorgerückten Teilchens:

$$T_{nl}(t) = \mathcal{Z}(T_{nl-1}(t)) \quad (3.7.1)$$

($T_{nl}(t)$ kann also nur eines der vier nächsten Nachbarfelder²¹ von $T_{nl-1}(t)$ sein). Insgesamt werden also für jedes Teilchen iterativ v_{\max} Zielfelder \mathcal{Z} bestimmt. Hierbei ist es wichtig zu beachten, daß sich die Bestimmung der v_{\max} Zielfelder \mathcal{Z} an der zum Zeitpunkt t vorliegenden Konfiguration aller Teilchen orientiert (also anhand der durch $\{T_{10}(t), \dots, T_{N0}(t)\}$ gegebenen Teilchenpositionen).

Die Menge aller Wunschtrajektorien läßt sich dann zusammenfassen in einer Matrix

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_{10}(t) & \cdots & T_{1v_{\max}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N0}(t) & \cdots & T_{Nv_{\max}}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.7.2)$$

die in jedem Zeitschritt der Simulation zwischengespeichert werden muß.

Zwei Grundvoraussetzungen des Modells drücken sich in den Matrixelementen von $T(t)$ aus:

- Die Teilchen verhalten sich wie Fermionen auf dem Gitter:
 $T_{i0}(t) \neq T_{j0}(t)$, $\forall i \neq j \in \{1, \dots, N\}$, jede Zelle des Gitters kann stets mit maximal einem Teilchen besetzt sein.
- Es gilt paralleler Update: $T_{iv_{\max}}(t) \neq T_{j0}(t)$, $\forall i \neq j \in \{1, \dots, N\}$. Hierdurch kommt die Reaktionszeit der Teilchen zum Ausdruck. Kein Teilchen kann zum Zeitpunkt $t + 1$ einen Gitterplatz besetzen, der zum Zeitpunkt t von einem anderen Teilchen besetzt war.

Im folgenden versuchen die Teilchen ihre Zielposition $T_{nv_{\max}}(t)$ einzunehmen. Die dabei auftretenden Konflikte zwischen den Teilchen können in unterschiedlicher Weise bereinigt werden. Insgesamt lassen sich vier unterschiedliche Versionen zur Konfliktlösung als Verallgemeinerung des parallelen Updates von $v_{\max} = 1$ zu $v_{\max} > 1$ angeben.

1. Gilt für zwei oder mehr Teilchen $\{1, \dots, k\}$:

$$T_{iv_{\max}}(t) = T_{jv_{\max}}(t), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\},$$

so wird mit Hilfe eines probabilistischen Verfahrens eines dieser Teilchen i ausgewählt, welches seine Zielzelle einnehmen kann: $T_{i0}(t+1) = T_{iv_{\max}}(t)$. Für alle anderen Teilchen gilt dann: $T_{j0}(t+1) = T_{j0}(t)$, $\forall j \neq i$. Das probabilistische Verfahren wird mit Hilfe eine Permutation σ der Indexmenge aller Teilchen realisiert:

$$\sigma : \{1, \dots, N\} \mapsto \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}. \quad (3.7.3)$$

Die Teilchen versuchen danach in der durch σ induzierten Reihenfolge $\{n = \sigma(n)\}$ auf die Zielfelder $T_{nv_{\max}}(t)$ zu springen. Ist dieser Platz bereits besetzt, verharren sie auf den Startzellen $T_{n0}(t)$.

Dieses ist die einfachste Form der Konfliktlösung zwischen den Teilchen. Die Bewegung findet hier ohne Berücksichtigung der Trajektorien $T_n(t)$ der Teilchen statt. Das Kreuzen von Trajektorien und das Überspringen bereits auf ihren Zielzellen angekommener Teilchen sind erlaubt.

²¹Man spricht hier von einer *Moore-Nachbarschaft*. Werden auch die vier in diagonaler Richtung liegenden benachbarten Plätze mit hinzugezogen, spricht man von *von-Neumann-Nachbarschaft*.

2. Teilchen, die ihr Zielfeld bereits erreicht haben, sollen in dieser Version von nachfolgenden Teilchen nicht mehr übersprungen werden können.

Hierzu bewegen sich die Teilchen wieder in der von σ vorgegebenen Reihenfolge $\{n = \sigma(n)\}$. Ein Teilchen n kann solange seine Bewegung längs der Trajektorie $T_n(t)$ fortsetzen, falls $T_{nl}(t)$ ($l \in \{1, \dots, v_{\max}\}$) nicht bereits von einem Teilchen $k \in \{1, \dots, n-1\}$ besetzt worden ist (entweder gilt also $T_{nl}(t) = T_{kv_{\max}}(t)$ oder, falls das Teilchen k seine Bewegung nicht bis zu Ende ausführen konnte, $T_{nl}(t) = T_{k0}(t+1)$). In diesem Fall folgt dann

$$T_{n0}(t+1) = T_{nl-1}(t).$$

3. Bei dieser Form des Updates wird das Entlanglaufen der Teilchen längs ihrer Trajektorien $T_n(t)$ in v_{\max} Subzeitschritte aufgelöst. Gilt dann in einem Subzeitschritt l für zwei oder mehr Teilchen $\{1, \dots, k\}$:

$$T_{il} = T_{jl}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\},$$

so rückt lediglich ein zufällig ausgewähltes Teilchen $i \in \{1, \dots, k\}$ auf diesen Platz vor. Die anderen Teilchen $j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$ können dann versuchen, den Platz im nächsten Subzeitschritt zu erreichen.

In jedem der Subzeitschritte dieser Version des Updates werden also entstehende Konflikte zwischen den Teilchen beachtet und gelöst. In dieser Version läßt sich daher das Konzept des Reibungsparameters μ einfach in das Modell mit $v_{\max} > 1$ integrieren. Jedoch wird bei diesem Verfahren aufgrund der sukzessiven Behandlung der Subzeitschritte ein hoher Rechenaufwand benötigt.

4. In der letzten Version ist es keinem Teilchen gestattet, eine Trajektorie eines bereits bewegten Teilchens zu kreuzen. Die Teilchen bewegen sich in der Reihenfolge $\{n = \sigma(n)\}$. Gilt dann für ein Teilchen n :

$$T_{nl} = T_{jk}, \quad \text{mit } j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ und } l, k \in \{1, \dots, v_{\max}\},$$

so folgt:

$$T_{n0}(t+1) = T_{nl-1}(t).$$

Am Ende eines jeden Zeitschritts erhöhen sämtliche Teilchen auf allen von ihnen überquerten Gitterplätzen ihrer Trajektorien den Wert des dynamischen Feldes D um eins. Anschließend wird D dann entsprechend der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Zerfalls- und Diffusionsdynamik modifiziert.

Jede dieser Versionen berücksichtigt unterschiedliche Aspekte der zweidimensionalen Fortbewegung auf dem Gitter. Abb. 3.44 liefert eine graphische Veranschaulichung der unterschiedlichen Verfahren zur Konfliktlösung. Alle vier Varianten reproduzieren für $v_{\max} = 1$ das in Abschnitt 3.4 vorgestellte Modell.

Die charakteristische Zeitskala Δt des Modells soll durch die Wahl von $v_{\max} > 1$ nicht beeinflusst werden. Infolgedessen läßt sich für einen vorgegebenen Wert von v_{\max} die diesem Wert entsprechende maximale reale Laufgeschwindigkeit stets mit Hilfe der Formel

$$v_{\text{real}} = v_{\max} \cdot \frac{a}{\Delta t} = v_{\max} \cdot 1.3\text{m/s} \quad (3.7.4)$$

berechnen (mit $a = 40$ cm und $\Delta t = 0.3$ sec).

Im folgenden sollen die sich aus den erhöhten Laufgeschwindigkeiten ergebenden Konsequenzen für den Teilchenfluß untersucht werden. Hierbei werden auch die aus den unterschiedlichen Versionen resultierenden Unterschiede diskutiert. Anschließend werden Zeiten der Evakuierung eines Raumes in Abhängigkeit von v_{\max} betrachtet.

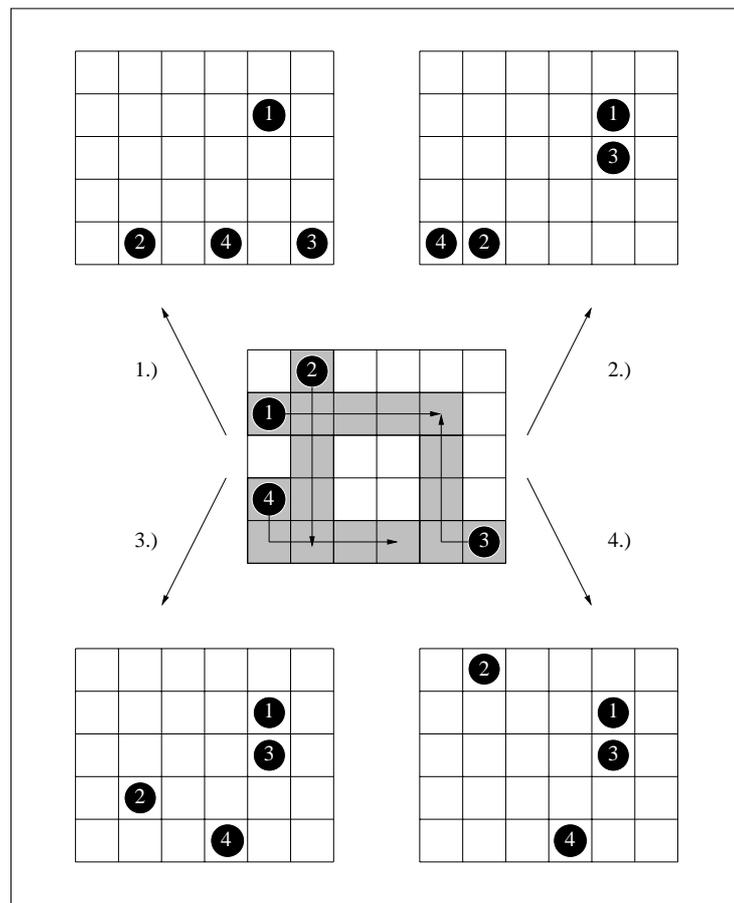


Abbildung 3.44: Graphische Darstellung der vier Konfliktlösungsprozeduren im Fall $v_{\max} = 4$. Die Trajektorien $T_n(t)$ der Teilchen sind grau unterlegt. Die den Teilchen gegebenen Nummern entsprechen auch der (mit Hilfe der Permutation σ gewonnenen) zufälligen Reihenfolge, in der die Teilchen ihre Züge ausführen dürfen. In der 1., 2. und 4. Version wird diese Reihenfolge nur einmal bestimmt. Bei der Realisierung der 3. Version wird in jedem der $v_{\max} = 4$ Subzeitschritte eine neue zufällige Reihenfolge gewählt. Der Einfachheit halber entsprechen sie jedoch stets der in der Graphik festgelegten Numerierung.

3.7.2 Simulationen

Fundamentaldiagramme

Die im folgenden Abschnitt präsentierten Flüsse und Geschwindigkeiten der Teilchen wurden stets in einem Korridor der Abmessungen $X \times Y = 93 \times 33$ mit periodischen Randbedingungen gemessen. Das statische Feld S in diesem Korridor wurde auf gleiche Weise wie in Abschnitt 3.6.9 berechnet. Infolgedessen wollen die Teilchen bei vorhandener Kopplung an S den Korridor von links nach rechts durchqueren. In Abb. 3.45 ist zunächst die gemittelte Laufgeschwindigkeit eines einzelnen Teilchens in Abhängigkeit des Sensitivitätsparameters k_S dargestellt. Die Graphik zeigt $\langle v_x \rangle$ für verschiedene Werte von v_{\max} ($\langle v_y \rangle$ ist aufgrund der Symmetrie von S in y -Richtung stets gleich Null). Eine solche Kurve ist bei der Kalibrierung des Modells an experimentelle Daten unerlässlich, mit Hilfe von (3.7.4) lassen sich die Geschwindigkeitswerte $\langle v_x \rangle(k_S)$ in reale Laufgeschwindigkeiten umrechnen.

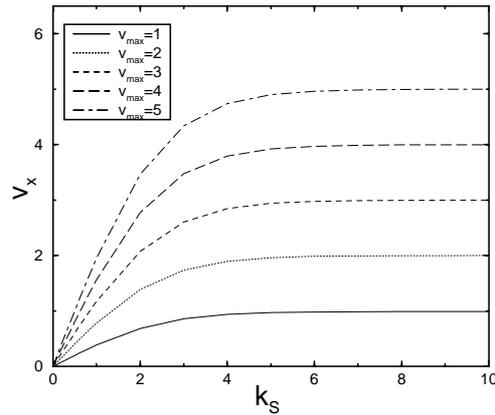


Abbildung 3.45: Gemittelte Laufgeschwindigkeiten $\langle v_x \rangle$ in Abhängigkeit des Sensitivitätsparameters k_S für $v_{\max} = 1$ bis $v_{\max} = 5$ ($k_D = 0.0$).

Abb. 3.46 zeigt Fundamentaldiagramme für $v_{\max} = 1$ bis $v_{\max} = 5$ zweier der oben diskutierten Modellvarianten. In Abb. 3.46 (a) wurden die Flußwerte J im geordne-

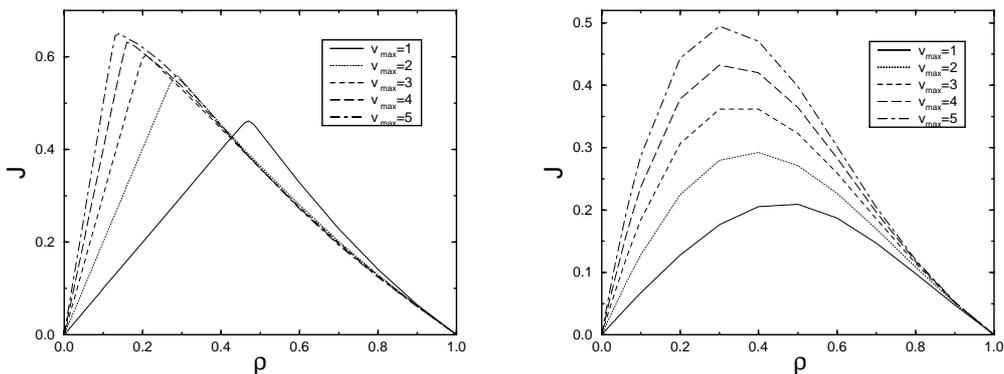


Abbildung 3.46: Fundamentaldiagramme für $v_{\max} = 1$ bis 5: **(a)** 4. Version des Modells, $k_S = 10.0$ und $k_D = 0.0$; **(b)** 2. Version des Modells, $k_S = 2.0$ und $k_D = 0.0$.

ten Regime der Teilchen gemessen ($k_S = 10.0$). Zugrundeliegend ist hier die vierte Version des Modells. Die Maximalwerte der Fundamentaldiagramme werden mit wachsendem v_{\max} in Bereichen kleinerer Teilchendichte angenommen. Der Wert des Maximums steigt ebenfalls mit wachsendem v_{\max} . Eine besondere Eigenschaft der vierten Version des Modells ist die Tatsache, daß paradoxerweise im Bereich der Teilchendichte $\rho > 0.4$ der Fluß bei $v_{\max} > 1$ niedriger ist als für $v_{\max} = 1$. Dies resultiert aus der mit v_{\max} zunehmenden Blockierung weiter Teile des Gitters, die durch die nicht-überquerbaren Trajektorien der Teilchen bedingt wird.

Aufgrund der sehr starken Kopplung an S nehmen die Fundamentaldiagramme eine sehr scharfe Form an (infolge der maximalen Steigung der Kurven im Bereich kleiner Dichten). Wählt man, wie in Abb. 3.46 (b) für die zweite Version des Modells, einen kleineren Parameter $k_S \ll 10$, so steigt die Trödelwahrscheinlichkeit p_{dec} der Teilchen. Sie bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein einzelnes Teilchen (trotz unbesetzter nächster Nachbarplätze) nicht in positive x -Richtung des Korridors be-

wegt. Diese ist durch

$$p_{\text{dec}}(k_S) = P(v_x \leq 0)(k_S) = 1 - \frac{e^{k_S}}{3 + e^{k_S} + e^{-k_S}} \quad (3.7.5)$$

gegeben (siehe Abschnitt 3.4, für S im Korridor ohne Engstelle gilt: $S_{ij} = j$). Für $k_S = 2.0$ wird die Form der Fundamentaldiagramme dann wesentlich glatter. Die Maximalwerte werden kleiner (liegen jedoch noch bei denselben Dichten ρ) und die Steigungen im Bereich kleiner und großer Dichten sinken.

Im folgenden soll die Auswirkungen der verschiedenen Konfliktlösungsvarianten auf die Teilchenflüsse diskutiert werden. Abb. 3.47 zeigt die Fundamentaldiagramme aller vier Versionen für die Geschwindigkeiten $v_{\max} = 2$ und $v_{\max} = 4$. Hierbei gilt $k_S = 2.0$. Bei einer Maximalgeschwindigkeit von $v_{\max} = 2$ sind die Unterschiede

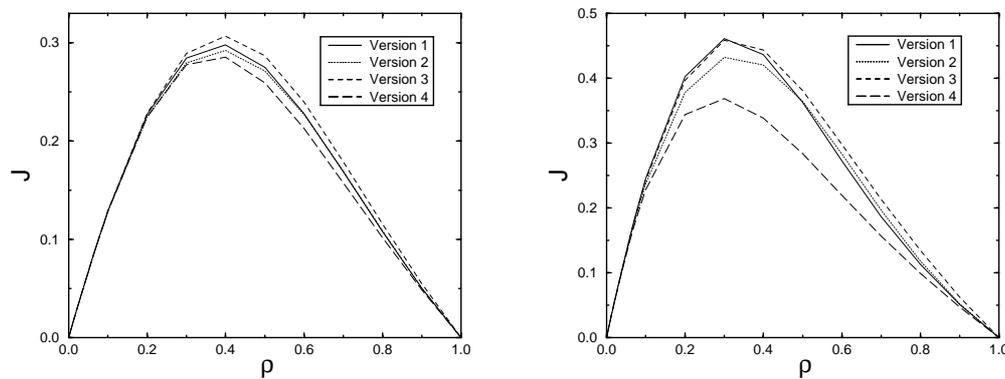


Abbildung 3.47: Fundamentaldiagramme für alle vier Versionen des Modells, $k_S = 2.0$ und $k_D = 0.0$: (a) $v_{\max} = 2$; (b) $v_{\max} = 4$.

in den Fundamentaldiagrammen der einzelnen Versionen nicht besonders stark ausgeprägt. Jedoch läßt sich feststellen, daß die Flußwerte J der vierten Version am niedrigsten, die der dritten Version in allen Dichtebereichen ρ am höchsten sind. Die Werte der ersten und zweiten Version unterscheiden sich kaum. Bei einer höheren Maximalgeschwindigkeit $v_{\max} = 4$ machen sich jedoch deutlichere Unterschiede bemerkbar. Die Version des Modells liefert für alle Teilchendichten $\rho > 0.1$ den mit Abstand niedrigsten Fluß. Der Grund hierfür wurde bereits weiter oben erläutert: Die Trajektorien $T_n(t)$ dürfen nicht überquert werden, Teilchenwege dürfen sich nicht überschneiden.

Version zwei besitzt gegenüber Version eins für alle Dichten $\rho > 0.5$ höhere Flußwerte J . Hingegen sind die Flußwerte der ersten Version im Bereich $\rho < 0.5$ höher. Die Teilchen können in der ersten Version bereits vorgerückte Teilchen überspringen, was vor allem im Bereich niedrigerer Dichten von Vorteil ist. Hingegen können die Teilchen in der zweiten Version, selbst bei einer besetzten Zielzelle $T_{nv_{\max}}(t)$ auf ein davor liegendes Feld vorrücken. Diese Tatsache begünstigt im Bereich höherer Dichten einen erhöhten Fluß J .

Den maximalen Fluß in allen Dichtebereichen liefert die dritte Version des Modells (gleichwohl die Unterschiede zwischen 1., 2. und 3. Version nicht sehr groß sind). Die Lösung aller Konflikte in Subzeitschritten ermöglicht den Teilchen, die einen besetzten Platz ihrer Trajektorie vorfinden, in einem späteren Subzeitschritt vorzurücken. Im folgenden sollen die Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten verglichen werden. Abb. 3.48 zeigt den Vergleich der Fundamentaldiagramme der dritten Versi-

on des Modells für $v_{\max} = 1$ bis $v_{\max} = 5$ und $k_S = 4.0$ mit einem Fit experimentell ermittelter Flußwerte [64]. Die experimentellen Daten des spezifischen Flusses wurden in die Einheiten des Modells umgerechnet²². Die Kurve für den Wert $v_{\max} = 3$

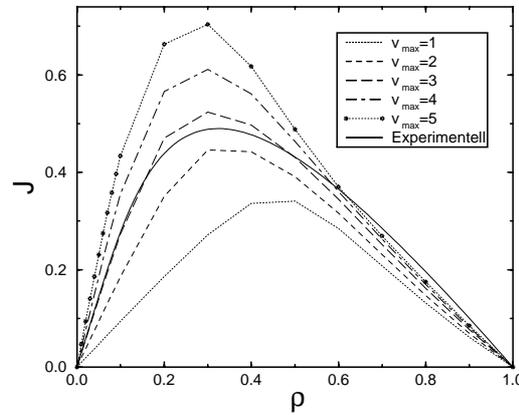


Abbildung 3.48: Vergleich der Fundamentaldiagramme der dritten Version des Modells für die Geschwindigkeiten $v_{\max} = 1$ bis $v_{\max} = 5$ mit experimentellen Daten aus [64]. $k_S = 4.0$ und $k_D = 0.0$.

liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Insbesondere wird die Position des maximalen Flusses J sehr gut wiedergegeben. Da $k_S = 4.0$ gewählt wurde, besitzen die Teilchen eine nichtverschwindende Trödelwahrscheinlichkeit ($p_{\text{dec}}(k_S) \approx 0.1$). Im Rahmen des Modells bedeutet dies dann eine Streuung der Laufwahrscheinlichkeiten zwischen $v_{\max} = 3$ und niedrigeren Laufgeschwindigkeiten innerhalb des Teilchenensembles. Im Bereich sehr großer Teilchendichten $\rho > 0.6$ liefert das Modell zu niedrige Flußwerte. Dies hängt mit den in Abschnitt 3.6.9 erläuterten Spurwechseln der Teilchen bei hohen Dichten zusammen (siehe Abb. 3.39).

Die Fundamentaldiagramme der anderen Maximalgeschwindigkeiten liefern wesentlich schlechtere Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten.

Evakuierungen

Abschließend soll der Einfluß von $v_{\max} > 1$ auf die gemittelten Zeiten einer Evakuierung betrachtet werden. Die zugrundeliegende Geometrie sei ein Gitter der Größe 63×63 Zellen mit einem Ausgang der Breite einer Zelle in der Mitte einer Wand (siehe Abb. 3.8). Abb. 3.49 zeigt die Evakuierungszeiten für unterschiedliche Kombinationen der Sensitivitätsparameter k_S und k_D in der zweiten Version des Modells (sämtliche Versionen des Modells zeigen dasselbe qualitative Verhalten). Hierbei werden die Geschwindigkeiten $v_{\max} = 1$ bis $v_{\max} = 4$ betrachtet. Der Verlauf der Kurven in Abb. 3.49 (a) läßt sich in folgender Weise verstehen. Ist die Kopplung an das statische Feld S sehr klein ($k_S \ll 1.0$), gleicht das Verhalten der Teilchen eher einer Zufallsbewegung. Aber obwohl es keine gerichtete oder nur schwach gerichtete Bewegung gibt, steigt mit v_{\max} die Varianz σ_v der Bewegung. Daher erreichen die Teilchen den Ausgang mit wachsendem v_{\max} durch Zufallsbewegungen wesentlich

²²Experimentelle Einheit des spezifischen Flusses ist: „Fußgänger/(Meter·Sekunde)“. Die natürliche Einheit des Modells ist: „Teilchen/($a \cdot \Delta t$)“ ($a = 40$ cm, Länge einer Zelle).

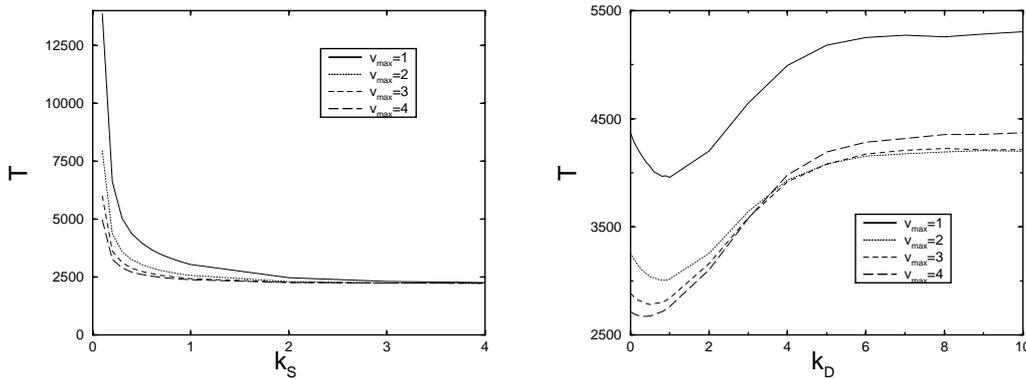


Abbildung 3.49: Gemittelte Evakuierungszeiten für einen Raum der Größe 63×63 Gitterzellen und einem Ausgang der Breite einer Zelle. Die Teilchendichte zu Beginn der Evakuierung ist $\rho = 0.3$ (1116 zufällig verteilte Teilchen). Verschiedene v_{\max} -Werte in der zweiten Version des Modells. (a) $k_D = 0.0$; (b) $k_S = 0.4$ und $\delta = 0.3$ und $\alpha = 0.0$ als Parameter von D .

eher, resultierend in kleineren Evakuierungszeiten.

Im Grenzwert $k_S \rightarrow \infty$ bewegen sich die Teilchen nur noch auf dem kürzest möglichen Weg zum Ausgang, die Bewegung wird deterministisch. Nach kurzer Zeit kommt es dann aber bei erhöhten Teilchendichten zur Formierung eines großen Staus im Bereich des Ausgangs. Die Evakuierungszeiten werden infolgedessen eher durch die Teilchenzahl, als durch die maximale Laufgeschwindigkeit bestimmt. Daher sind im Bereich erhöhter Dichten und $k_S \rightarrow \infty$ die Evakuierungszeiten für alle v_{\max} Werte gleich. Kopplungen $k_S \gg 1$ stellen sicherlich den im Vergleich zu realem Fußgängerverhalten relevantesten Bereich dar. Daher zeigt dieses Resultat, daß in vielen Fällen die Beschränkung auf $v_{\max} = 1$ zur Reproduktion realer Sachverhalte ausreichend ist. In anderen Fällen (siehe oben) ist jedoch eine Wahl $v_{\max} > 1$ unerlässlich.

Die oben angeführten Erklärungen erläutern auch die unterschiedlichen Zeitwerte für den Sensitivitätsparameter $k_D = 0.0$ in Abhängigkeit von v_{\max} in Abb. 3.49 (a). Da $k_S = 0.4$ ist, fallen diese mit wachsendem v_{\max} . Der charakteristische nicht-monotone Verlauf der Kurve (siehe Abschnitt 3.5.1) wird für alle v_{\max} Werte reproduziert. Da die Teilchendichte einen zeitbegrenzenden Faktor der Evakuierung darstellt, kommt es für $v_{\max} > 2$ zu einer Art Konvergenz der Zeitwerte.

3.8 Feinere Diskretisierung des Raumes

3.8.1 Motivation und Konsequenzen

Die Identifizierung der Größe einer Gitterzelle mit dem durchschnittlich von einem Fußgänger eingenommenen Raum ist der naheliegendste Ansatz zur Konstruktion eines Zellularautomaten-Modells zur Fußgängerdynamik. Liegt dem Modell ein Quadratgitter zugrunde, führt dies zu einer Zellengröße von $a^2 = 1/\rho_{\max}^{\text{emp}}$, resultierend in einer Kantenlänge von $a = 40$ cm (ρ_{\max}^{emp} ist hierbei die maximale empirische Fußgängerdichte, siehe Abschnitt 3.4). Alle räumlichen Einheiten sind dann Vielfache dieser Längenskala $a = 40$ cm. Obwohl die mit Hilfe dieser Skala gewonnenen bisherigen Ergebnisse zu keinen grundlegenden Abweichungen von experimentellen oder empirischen Daten führen, gibt es zwei Hauptgründe, die die Untersuchung

einer feineren Diskretisierung des Raumes motivieren.

1. Die Wahl von $a \ll 1/\sqrt{\rho_{\max}^{\text{emp}}}$ impliziert einen Übergang von diskreter (im CA-Modell) und kontinuierlicher Darstellung von Raum und Zeit. Dies läßt sich in folgender Weise verstehen. Wählt man, wie im folgenden geschehen soll, $a = 20$ cm als kleinste Längeneinheit des Systems (also als Kantenlänge einer Zelle des Quadratgitters), so folgt daraus, daß jedes Teilchen des Modells auf dem Gitter einen Platz von 2×2 Zellen einnimmt (siehe Abb. 3.50). Die natürli-

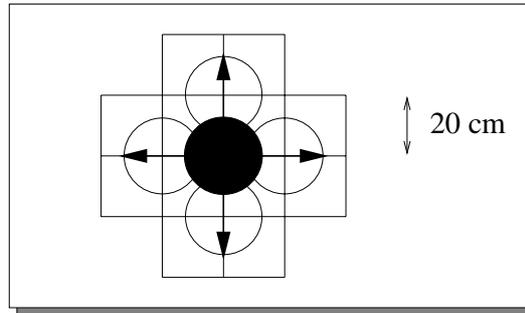


Abbildung 3.50: Besetzung von 2×2 Gitterzellen der Kantenlänge $a = 20$ cm und mögliche Übergänge des Teilchens in einem Zeitschritt t .

che Verallgemeinerung der Übergangswahrscheinlichkeiten im herkömmlichen Modell (im folgenden als 40-cm-Modell bezeichnet) auf nächste Nachbarplätze (siehe Abb. 3.5) entspricht im 20-cm-Modell die Möglichkeit des Vorrückens auf jeweils zwei unbesetzte nächste Nachbarplätze der vier Gitterzellen eines Teilchens²³. Hierbei behält das Teilchen bei einer Bewegung im Zeitschritt $t+1$ jeweils zwei der vier zum Zeitpunkt t besetzten Zellen bei (Abb. 3.50).

Aus dieser Wahl der Übergangswahrscheinlichkeiten resultiert nun aber ebenfalls im 20-cm-Modell eine Halbierung der natürlichen Zeitskala des 40-cm-Modells. Ein Teilchen bewegt sich stets mit einer Maximalgeschwindigkeit von einer Zellenlänge pro Zeitschritt²⁴. Bei einer empirischen Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_{\text{emp}} = 1.3$ m/s resultiert für eine Kantenlänge von $a = 20$ eine Zeitskala von $\Delta t = 0.15$ sec, also genau die halbe Zeitskala des 40-cm-Modells²⁵ (siehe Kapitel 3.4).

Bei einer noch feineren Diskretisierung der zugrundeliegenden räumlichen Struktur kommt es also stets zu einer weiteren Verkleinerung der Längen- und Zeitskala des Modells (wenn man $v_{\max} = 1$ festhält). Der Limes $a \rightarrow 0$ führt daher zu einem Modell, in dem Raum und Zeit kontinuierlich sind. Ein solcher Übergang ist daher als Vergleich zwischen diskreten und kontinuierlichen Modellen von allgemeinem Interesse.

²³Es besteht ebenfalls die Möglichkeit, nur Übergänge der Teilchen auf Blöcke von vier benachbarten, unbesetzten Zellen zuzulassen. Die Teilchen würden sich dann weiterhin pro Zeitschritt eine Strecke von 40 cm bewegen. Die Zeitskala des Modells bleibt in diesem Fall unverändert $\Delta t = 0.3$ sec. Bei der Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten müssen dann aber weiter als auf nächsten Nachbarplätzen liegende Zellen betrachtet werden, was die geschwindigkeits- und speichertechnische Effizienz des Modells verringern würde.

²⁴Eine Erweiterung des 20-cm-Modells auf ein Modell mit Laufgeschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ ist in evidenten Weise analog zu der in abschnitt 3.7 diskutierten Vorgehensweise möglich, soll jedoch im folgenden nicht betrachtet werden.

²⁵Bei einer noch feineren Diskretisierung gilt also stets: Zeitskala $\Delta t = a/v_{\text{emp}}$.

2. Soll das Modell nicht nur zu grundlegenden Untersuchungen der Dynamik von Fußgängern eingesetzt werden, sondern auch in Sicherheitsabschätzungen von Evakuierungsszenarien komplexer architektonischer Strukturen und Gebäude (zum Beispiel Fußballstadien oder Kreuzfahrtschiffe) genutzt werden, so ist eine möglichst genaue Wiedergabe der zugrunde liegenden Gebäudepläne in den Simulationen erforderlich. Einer feineren Diskretisierung entspricht aber natürlicherweise die Möglichkeit zu einer genaueren Darstellung räumlicher Strukturen. Dieser Sachverhalt ist anhand einer einfachen Graphik in Abb. 3.51 verdeutlicht.

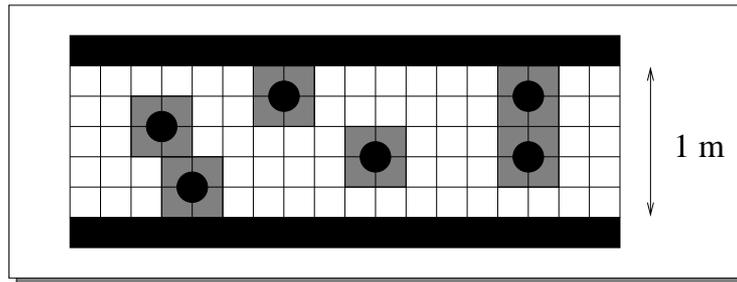


Abbildung 3.51: Die Graphik zeigt die Darstellung eines einfachen Korridors der Breite ein Meter im 20-cm-Modell. Ein solcher Korridor läßt sich trivialerweise im 40-cm-Modell nicht reproduzieren. Die jeweils von einem Teilchen besetzten vier Gitterplätze sind grau unterlegt.

Die Besetzung von vier Gitterplätzen durch jeweils ein Teilchen infolge der Halbierung der Längenskala a führt zu weiteren Konsequenzen im 20-cm-Modell.

1. Jedes Teilchen verläßt bei einer Bewegung stets zwei der zuvor besetzten vier Plätze (Abb. 3.50). Infolgedessen sollen die Teilchen auch auf jedem dieser zwei Plätze ein Boson der virtuellen Spur hinterlassen, die dann den entsprechenden Feldwerten des dynamischen Feldes D hinzugerechnet werden.
2. Da ein Teilchen stets vier Plätze einnimmt oder im nächsten Zeitschritt einnehmen möchte, sollen bei der Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten die spezifischen Feldwerte S und D der zu besetzenden vier Plätze gemittelt werden (siehe grau unterlegte Bereiche des Gitters in Abb. 3.51).
3. Ein Hauptunterschied der beiden Modelle liegt in der Charakteristik von Konflikten zwischen den Teilchen. Im 40-cm-Modell ist jeder Konflikt eine lokale Größe, in dem Sinn, daß stets eine endliche Anzahl von Teilchen (zwischen zwei und vier) um eine bestimmte Zelle des Gitters konkurrieren (siehe Abb. 3.20). Dieser Wettstreit wird durch den Reibungsparameter μ beschrieben. Im 40-cm-Modell sind Konflikte keine lokale Größe mehr. Konflikte beschränken sich hier nicht lediglich auf einzelne Zellen, sondern können sich über weitere Gebiete des Gitters erstrecken. Auch ist die Anzahl der Teilchen, die an einem Konflikt beteiligt ist, keineswegs beschränkt. Prinzipiell können alle Teilchen eines Systems an einem Konflikt beteiligt sein. Die Nicht-Lokalität der Konflikte läßt sich mit Hilfe von Abb. 3.52 verdeutlichen. Durch die partielle Überlagerung der Zielfelder der Teilchen können auch weiter voneinander entfernte

Teilchen an einem Konflikt beteiligt sein²⁶. Infolgedessen läßt sich das Konzept des Reibungsparameters μ nicht in evidenten Weise auf das 20-cm-Modell übertragen und findet daher im folgenden keine Berücksichtigung. Zur Untersuchung des Einflusses von Konflikten im 20-cm-Modell muß gegebenenfalls ein neues Konzept entwickelt werden.

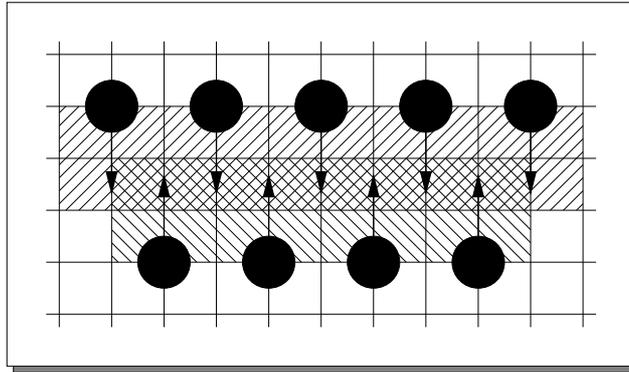


Abbildung 3.52: Konflikte sind im $a = 20$ cm Modell nicht-lokal und können sich über weite Gebiete des Gitters erstrecken. Alle Teilchen des Systems können prinzipiell an demselben Konflikt beteiligt sein. Der Bereich des nicht-lokalen Konflikts ist durch doppelt schraffierte Zellen gekennzeichnet.

Im folgenden sollen Ergebnisse von mit dem 20-cm-Modell durchgeführten Simulationen vorgestellt werden und mit den Ergebnissen des herkömmlichen Modells verglichen werden.

3.8.2 Simulationsergebnisse

Evakuierungszeiten

Zunächst soll der Einfluß der Diskretisierung auf die Evakuierungszeiten eines einfachen Raumes betrachtet werden (siehe Abschnitt 3.5.1). Gemessen wurden die gemittelten Zeiten der Evakuierung eines Raumes der Größe $62 \cdot 40 \text{ cm} \times 62 \cdot 40 \text{ cm}$ (also 62×62 oder 124×124 Gitterplätze) durch eine Tür der Breite 80 cm (zwei oder vier Gitterplätze). Abb. 3.53 zeigt die Auswirkungen einer Variation der zwei Sensitivitätsparameter k_S und k_D im $a = 20$ cm und $a = 40$ cm Modell²⁷. Die anfängliche Teilchendichte sei jeweils $\rho = 0.3$ (1153 Teilchen). Das qualitative Verhalten des Modells infolge der Variation der Sensitivitätsparameter wird durch die feinere Diskretisierung des Raumes nicht beeinflusst. Bedingt durch leicht unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten infolge der Mittelung über die Feldwerte aller vier besetzten (oder zu besetzenden) Plätze eines Teilchens im $a = 20$ cm Modell, kommt es in Abb. 3.53 (a) lediglich für schwache bis mittlere Kopplung ($k_S < 3$) zu kleinen Zeitdifferenzen. Dies führt dann auch zu unterschiedlichen Zeitwerten der Evakuierung für die zwei Modelle verschiedener Diskretisierung bei der Parameterkombination $k_D = 0.0$ und $k_S = 0.4$ in Abb. 3.53 (b). Beachtenswert ist, daß der

²⁶Es ist die Frage berechtigt, ob solche Strukturen nicht vielleicht sogar realistischer als die streng lokalisierten Konflikte des 40-cm-Modells sind. Denkbar ist zum Beispiel eine Relation zu den *Arching*-Phänomenen granularer Materialien.

²⁷Die Zeiten sind gemessen in Update-Schritten der Simulationen. Um diese für die beiden Modelle vergleichen zu können, muß man die Simulationszeiten im 20-cm-Modell also halbieren.

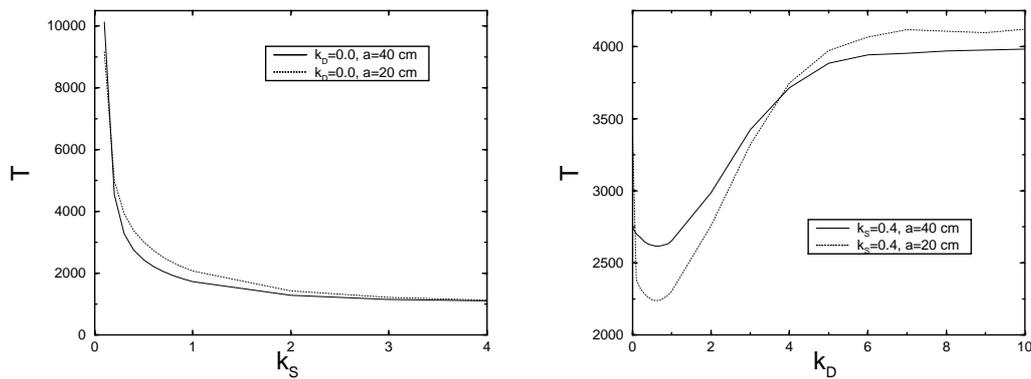


Abbildung 3.53: Gemittelte Evakuierungszeiten eines Raumes der Größe $62 \cdot 40 \text{ cm} \times 62 \cdot 40 \text{ cm}$ durch einen Ausgang der Breite 80 cm . Vergleich der beiden grundlegenden Längeneinheiten (Kantenlänge einer Zelle) $a = 20 \text{ cm}$ und $a = 40 \text{ cm}$: **(a)** $k_D = 0.0$ konstant und Variation von k_S ; **(b)** $k_S = 0.4$ konstant und Variation von k_D ($\delta = 0.3$ und $\alpha = 0.0$).

durch das dynamische Feld D verursachte Effekt eines nicht-monotonen Verlaufs der Kurve für zunehmendes k_D im 20-cm-Modell um einiges stärker ausgeprägt ist.

Flußmessungen

Erheblich größere Unterschiede ergeben sich aus der feineren Diskretisierung der Längen- und Zeitskala bei der Messung von Teilchenflüssen. In Abb. 3.54 sind die Fundamentaldiagramme im geordneten Regime der Teilchen für einen Korridor (siehe Abschnitt 3.6.9) der Breite zwei Meter im 40-cm-Modell (Breite 5 Zellen) und im 20-cm-Modell (Breite 10 Zellen) abgebildet. Die Flüsse der beiden Modelle sind

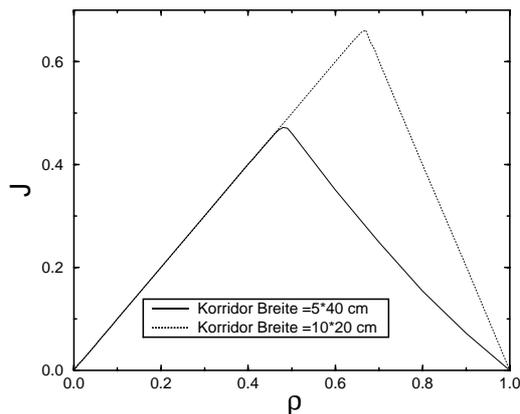


Abbildung 3.54: Fundamentaldiagramme der Flüsse J im geordneten Regime ($k_S = 10.0$, $k_D = 0.0$) beider Modelle. Breite des Korridors: 5 Zellen im 40-cm-Modell und 10 Zellen im 20-cm-Modell.

bis zu einer Teilchendichte von $\rho \approx \frac{1}{2}$ identisch. Der Bereich $\rho < \frac{1}{2}$ kennzeichnet in beiden Modellen das Gebiet freien Flusses, die Teilchen können sich in jedem Zeitschritt ungehindert auf ihre rechten nächsten Nachbarplätze bewegen. Der Fluß

steigt hier also linear mit der Dichte. Ab einer Dichte von $\rho \approx \frac{1}{2}$ nimmt im 40-cm-Modell die Wahrscheinlichkeit stark zu, daß die rechten nächsten Nachbarplätze der Teilchen besetzt sind, die mittlere Geschwindigkeit sinkt auf einen Wert $\langle v_x \rangle < 1$. Der Fluß sinkt dann infolgedessen mit steigender Dichte und wird zusätzlich noch durch Konflikte infolge von Bahnenwechseln der Teilchen vermindert (siehe Abb. 3.39). Anders das Verhalten im 20-cm-Modell. Der Platz, den ein Teilchen für eine ungehinderte Vorwärtsbewegung in einem Zeitschritt benötigt, entspricht hier lediglich der halben Länge seiner eigenen Ausdehnung (im Gegensatz zum 40-cm-Modell, wo die Teilchen zur Fortbewegung einen ihrer eigenen Ausdehnung entsprechenden Platz benötigen). Somit gilt im 20-cm-Modell bis zu einer Dichte von $\rho \approx \frac{2}{3}$ für die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\langle v_x \rangle \approx 1$, was zu einem linearen Anstieg des Flusses bis zu dieser Dichte führt. Für Dichten $\rho > \frac{2}{3}$ fällt der Teilchenfluß dann ziemlich rasch ab.

Es kommt also bedingt durch die feinere Diskretisierung zu einer Verschiebung des Maximums des Flusses in einen Bereich höherer Teilchendichte. Dieser Prozeß würde bei einer weiteren Diskretisierung fortgesetzt. Wie aber in Abschnitt 3.7 erörtert wurde, sprechen experimentelle Untersuchungen eher für ein Flußmaximum bei kleineren Dichten $\rho < \frac{1}{2}$. Das 20-cm-Modell ist daher nicht geeignet, diese Untersuchungen qualitativ zu reproduzieren.

Eine weitere spezifische Eigenschaft des 20-cm-Modells offenbart sich, wenn man den Fluß durch eine Engstelle oder einen Ausgang von den Abmessungen der Teilchenbreite betrachtet (das heißt also Ausgang oder Engstelle haben eine Breite von zwei Zellen oder 40 cm). Erreichen zwei Teilchen imselben Zeitschritt die Engstelle, so blockieren sie sich gegenseitig, so daß keines der Teilchen den Durchgang passieren kann (siehe Abb. 3.55). Bei hoher Kopplung an das statische Feld S ($k_S \gg 2$)

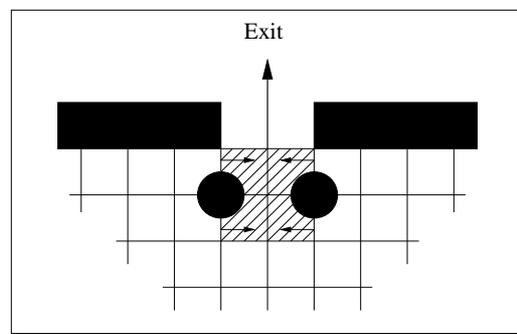


Abbildung 3.55: Blockade von Engstellen oder Ausgängen der Breite 40 cm im 20-cm-Modell durch zwei Teilchen. Beide Teilchen wollen die vier Plätze vor dem Ausgang besetzen.

wird keines der Teilchen von seinem Platz zurückweichen und der Zugang bleibt dauerhaft versperrt. Auch wird ein solches Zurückweichen durch nachfolgende Teilchen bei höherer Dichte behindert, so daß selbst bei höherer Temperatur des Systems ($k_S < 1$) nur wenige Teilchen die Engstelle passieren. Die Blockade führt also im geordneten Regime zu divergierenden Evakuierungszeiten oder zum Zusammenbrechen des Flusses bei Ausgängen oder Engstellen der Breite 40 cm. Auch wenn experimentelle Untersuchungen belegen, daß sehr schmale Ausgänge durch eine Menschenmenge total blockiert werden können [79], so handelt es sich im Fall des 20-cm-Modells aber nicht um eine Reproduktion dieser Ereignisse, sondern wohl

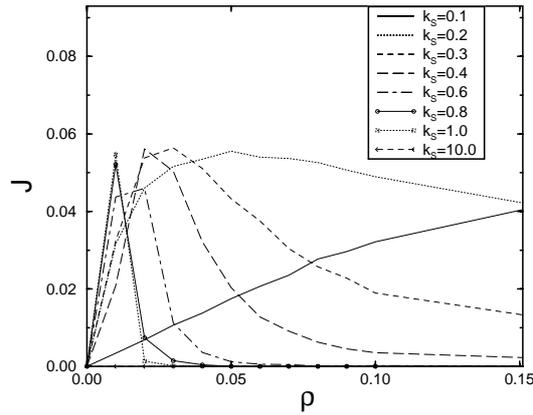


Abbildung 3.56: Größe des Korridors $93 \cdot 40\text{cm} \times 33 \cdot 40\text{cm}$ mit einer Engstelle der Breite 2 Zellen oder 40 cm in Abhängigkeit des Sensitivitätsparameters k_S .

eher um ein geometrisches Artefakt infolge der Diskretisierung. Abb. 3.56 zeigt den Teilchenfluß J durch eine Engstelle der Breite 2 Zellen oder 40 cm in Abhängigkeit des Sensitivitätsparameters k_S . Für sehr schwache Kopplung k_S ($k_S = 0.1$) wird ein sehr kleiner Teilchenfluß auch für hohe Dichten aufrechterhalten. Bei wachsendem k_S bricht der Fluß bereits bei sehr kleinen Dichten zusammen (für $k_S = 10.0$ ist der Fluß für alle Dichten gleich Null). Das System friert also mit wachsendem Parameter k_S ein, eine paradoxe Situation, die dem *faster-is-slower-Effekt* aus [28, 55] nicht unähnlich ist. Bei dem *faster-is-slower-Effekt* führt der Versuch, die Laufgeschwindigkeit zu erhöhen, zu einer verminderten Durchschnittsgeschwindigkeit infolge von gegenseitiger Behinderung. In der durch Abb. 3.56 beschriebenen Situation führt die Erhöhung von k_S ebenfalls zu höheren Laufgeschwindigkeiten. Der Grund für das Zusammenbrechen des Flusses liegt hier aber einzig in dem in Abb. 3.55 skizzierten, lokalen Effekt.

4 Schlußbetrachtungen

4.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Fragestellungen aus dem Bereich biologischer und sozialer Systeme mit Methoden der statistischen Physik untersucht. Hierbei wurden in abgeschlossenen Kapiteln zwei unterschiedlich motivierte Themenkreise ausführlich diskutiert.

In Kapitel 2 wurden Evolutionsmodelle zur sympatrischen Speziation vorgestellt und untersucht.

Zunächst wurde ein Differentialgleichungssystem zur Beschreibung asexuell reproduzierender Populationen eingeführt und einer ausführlichen Stabilitätsanalyse der Fixpunkte unterzogen. Die Individuen von drei Teilpopulationen konkurrierten hierbei um Nahrungsmittel. In Abhängigkeit von der Parameterwahl des Modells konnten verschiedene stabile Koexistenzen zwischen den Populationen nachgewiesen werden. Um analoge Untersuchungen im Fall sexuell reproduzierender Individuen durchführen zu können, wurden vereinfachte Genommodelle zur Vererbung diskreter Merkmale (Traits) entwickelt, und auf ihre statistischen Eigenschaften hin untersucht.

Abschließend wurden mit Hilfe dieser Genommodelle diskrete und kontinuierliche Zeitgleichungen zur Beschreibung von Populationen, die sowohl durch sexuelle Fortpflanzung als auch durch Konkurrenz um Nahrungsressourcen miteinander wechselwirken, untersucht. Abhängig von der Parameterwahl ließen sich stabile Koexistenzen einzelner, reproduktiv isolierter Teilpopulationen nachweisen, die sich als sympatrische Speziation interpretieren lassen.

Kapitel 3 legte die Definition und ausführliche Untersuchung eines Zellularautomaten-Modells zur Dynamik von Fußgängern dar.

Das Modell ist in der Lage, ohne langreichweitige Wechselwirkungen zwischen den Teilchen eine große Anzahl komplexer kollektiver Verhaltensmuster zu reproduzieren. Die Teilchen erhalten in dem Modell sämtliche Informationen über ihre belebte und unbelebte Umwelt durch kurzreichweitige Wechselwirkungen mit zwei sogenannten Grundfeldern S und D . Hierbei enthält das statische Grundfeld S sämtliche Informationen über die grundlegende räumliche Struktur und das dynamische Grundfeld D steuert die Wechselwirkung zwischen den Individuen. Der Automat benutzt parallelen Update und basiert auf stochastischen Regeln.

Zunächst wurde, mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen und anhand einfacher Evakuierungsszenarien, der Einfluß der Modellparameter auf die Dynamik der Teilchen untersucht. Das „Phasendiagramm“ der Regime des Teilchenverhaltens in Abhängigkeit der Sensitivitätsparameter k_S und k_D wurde erstellt. Die drei Hauptregime haben in diversen real beobachtbaren Verhaltensweisen ihre Entsprechung, wie zum Beispiel geordneter Bewegung und Panikverhalten.

Weiterhin wurde der Einfluß von Konflikten bei der Platzwahl zwischen den Teil-

chen untersucht. Solche Konflikte bilden eine große Gefahrenquelle realer Evakuierungsszenarien und lassen sich in Zellularautomaten-Modellen durch die Benutzung paralleler Updates quantifizieren. Die neu eingeführte stochastische Größe des Reibungsparameters μ war dabei sehr gut geeignet, durch Teilchenkonflikte bedingte Stau- und Verstopfungsphänomene an Engstellen zu modellieren. Es wurden eine Reihe quantitativer Ergebnisse gewonnen, die zum Teil in sehr guter Übereinstimmung mit realen Vorkommnissen sind.

Ferner wurden zur Modellierung beliebiger Laufgeschwindigkeiten der Teilchen vier mögliche Erweiterungen des Modells angegeben, in denen $v_{\max} > 1$ gilt. Die aus diesen Modellvarianten resultierenden Fundamentaldiagramme der Teilchenflüsse wurden eingehend untersucht und mit empirischen Daten verglichen. Die aus den unterschiedlichen Modellvarianten resultierenden Effekte wurden analysiert. Darüber hinaus wurde eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulationsergebnissen und experimentellen Daten gefunden.

Abschließend wurden die Auswirkungen einer feineren Diskretisierung der zugrundeliegenden räumlichen Struktur analysiert. In dieser Modellvariante ist die kleinste räumliche Einheit durch eine Gitterzelle entsprechend einer Größe von 20×20 cm gegeben. Als Konsequenz hiervon besetzt jedes Teilchen hier jeweils vier Gitterzellen. Bedingt durch eine Reihe tiefgreifender Veränderungen, liefert die feinere Diskretisierung Simulationsergebnisse, die zum Teil stark von denen des herkömmlichen Modells abweichen. Eine direkte Übertragung der Ergebnisse des 40 cm-Modells auf das 20 cm-Modell ist daher nicht möglich.

4.2 Ausblick

Diverse weiterführende Untersuchungen anhand der vorgestellten Modelle sind denkbar.

Die in Kapitel 2 vorgestellten Evolutionsmodelle zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Populationen lassen sämtliche Aspekte und Einflüsse einer räumlichen Verteilung der Individuen unberücksichtigt. Da aber üblicherweise die räumliche Kompartimentierung von Nahrungsressourcen und konkurrierenden Individuen in unterschiedliche ökologische Nischen zu beobachten ist, ist die Betrachtung komplexerer Modelle mit differenzierter räumlicher Struktur naheliegend. Die räumliche Struktur und die Wechselwirkung zwischen den Individuen könnte hierbei durch ähnliche Felder wie die in Kapitel 3 eingeführten Grundfelder D und S modelliert werden.

Ein solcher Ansatz ermöglicht auch die Untersuchung der Mechanismen *parapatrischer Artbildung*, bei der Aspekte räumlicher Separierung und reproduktiver Isolierung zwischen den Individuen von Bedeutung sind.

Die Erforschung von Fußgängerdynamik mit Hilfe des Zellularautomaten-Modells läßt sich in drei verschiedene Richtungen fortsetzen.

Zunächst einmal können weitere grundlegende Eigenschaften des Modells in Verbindung mit einigen Erweiterungen untersucht werden. Hier bietet sich vor allem die Analyse von Unordnungseffekten, zeitabhängigen Sensitivitätsparametern und des Skalenverhaltens an.

Das vorgestellte Zellularautomaten-Modell und das *social force model* weisen trotz unterschiedlicher Definition einige Gemeinsamkeiten auf (siehe hierzu vor allem Ab-

schnitt 3.5.2 und 3.6). Die Teilchen wechselwirken in dem hier vorgestellten Modell mit der Geschwindigkeitsdichte D , hingegen wird im *social force model* eine repulsive Dichte-Dichte-Wechselwirkung angenommen. Daher ist eine genauere Analyse der diesen Gemeinsamkeiten zugrundeliegenden Ursachen dringend erforderlich. Möglicherweise existieren subtile Übereinstimmungen zwischen den vordergründig unterschiedlichen Definitionen (siehe Abschnitt 3.5.2).

Desweiteren sollten, wie bereits in Abschnitt 3.6.10 geschehen, Konzepte und Methoden der Spieltheorie in das Modell miteinbezogen werden. Hiermit ließen sich Entscheidungsprozesse, zum Beispiel bei der Routenwahl, eines großen Ensembles von Fußgängern studieren. Schließlich bietet es sich auf der Grundlage der in Kapitel 2 entwickelten Genommodelle an, die Teilchen des Modells mit Informationen auszustatten. Diese Informationen könnten dann durch Wechselwirkungsprozesse mit anderen Teilchen ausgetauscht und modifiziert werden, was die Erzeugung von Antizipationsverhalten und Selbstorganisation ermöglichen würde.

Zur Verwendung des Modells in Sicherheitsuntersuchungen komplexer Gebäudeanlagen müssen eine Reihe von technischen Details realisiert werden. Auf der Grundlage des in Anhang C vorgestellten Algorithmus ist die Simulation beliebig komplexer räumlicher Strukturen möglich. Benutzerfreundliche Oberflächen und Programme zur Transformation von CAD-Gebäudeplänen fehlen indes bisher. Durch die Möglichkeiten des Modells ließen sich dann beliebig viele Individuen mit unterschiedlichen physischen Eigenschaften und Verhaltensweisen in Evakuierungssituationen simulieren.

Ein ganz wesentlicher Schwerpunkt zukünftiger Forschung sollte auf der Gewinnung und Analyse realer und experimenteller Daten liegen. In Abschnitt 3.6.10 und 3.7 wurden bereits experimentelle Ergebnisse in die Untersuchungen miteinbezogen. Gibt es bisher auch nur sehr wenige verlässliche Daten, so zeigen aber die Anstrengungen bei der Gewinnung von Daten des Straßenverkehrs in welcher Richtung sich die Forschung entwickeln könnte. Der Vergleich und die Kalibrierung des Modells mit quantitativen Meßergebnissen ist für weiterführende Untersuchungen und Anwendungen unerlässlich. Hierbei steht besonders der bereits vorher diskutierte Aspekt der Kalibrierung und Bestimmung der Modellparameter aus Experimentellen Untersuchungen im Vordergrund.

Anhang

A Gleichheit der Vererbungswahrscheinlichkeiten in Abschnitt 2.3

Offenbar genügt es, zum Beweis der Formel (2.3.11) zu zeigen:

$$\forall_{n,k,m} \in \mathbb{N} : p^{g/u}(n, k, m) \stackrel{!}{=} p^{Hyp}(2n, k, n)(m) , \quad (\text{A.1})$$

wobei stets $m \in \{0, 1, \dots, \min(n, k)\}$ gilt. Andernfalls sind beide Seiten von (A.1) identisch gleich Null.

1. Fall k gerade $\in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$:

Zunächst läßt sich $p^g(n, k, m)$ einfach umformen in:

$$p^g(n, k, m) = \frac{1}{\binom{2n}{k}} \left\{ \sum_{j=\tilde{m}}^{\frac{k}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{k}{2} - j\right)! \left(n - j - \frac{k}{2}\right)! (j + \tilde{m})! (j - \tilde{m})!} \right\} , \quad (\text{A.2})$$

mit $\tilde{m} := \left| m - \frac{k}{2} \right|$.

Setzt man (A.2) in (A.1) ein, so bleibt zu zeigen:

$$\sum_{j=\tilde{m}}^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2} - j\right)! \left(n - j - \frac{k}{2}\right)! (j + \tilde{m})! (j - \tilde{m})!} \stackrel{!}{=} \frac{n!}{\underbrace{m! (k - m)! (n - m)! (n - k + m)!}_{(*)}} . \quad (\text{A.3})$$

Der Nenner (*) läßt sich umformen zu:

$$(*) = \left(\frac{k}{2} - \tilde{m}\right)! \left(\frac{k}{2} + \tilde{m}\right)! \left(n - \frac{k}{2} + \tilde{m}\right)! \left(n - \frac{k}{2} - \tilde{m}\right)! . \quad (\text{A.4})$$

Mit den Ersetzungen $l = \frac{k}{2} - j$ und $m' = \frac{k}{2} - \tilde{m} \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2}\}$ wird (A.3) äquivalent zur Behauptung:

$$\sum_{l=0}^{m'} \frac{1}{l! (n - k + l)! (k - m' - l)! (m' - l)!} \stackrel{!}{=} \frac{n!}{m'! (k - m')! (n - m')! (n - k + m')!} . \quad (\text{A.5})$$

Dies läßt sich aber umformen in:

$$\sum_{l=0}^{m'} \binom{k - m'}{l} \binom{m' - k + n}{m' - l} \stackrel{!}{=} \binom{n}{m'} , \quad (\text{A.6})$$

mit $m' \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2}\}$.

Unter Beachtung der allgemeinen Definition der Binomialkoeffizienten über die Gammafunktion gilt nach [20] für $d, m', s \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{l=0}^{m'} \binom{d}{l} \binom{s}{m' - l} = \binom{d + s}{m'} . \quad (\text{A.7})$$

Dies ist mit den Ersetzungen $n = d + s$, $s = k - m' \in \{\frac{k}{2}, \frac{k}{2} + 1, \dots, k\}$ aber identisch mit (A.6). Hiermit ist die Behauptung (A.1) für k gerade gezeigt. Der Fall k verhält sich analog.

B Jacobi-Matrizen und Eigenwerte aus Abschnitt 2.5

B.1 Größen aus Abschnitt 2.5.1

Die Koeffizienten der Matrix (2.5.4)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} & \frac{\partial f_0}{\partial X_1} & \frac{\partial f_0}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_0} & \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_0} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

lauten explizit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} &= [2\Psi(0)X_0 + \Psi(1)X_1] \left[1 - \frac{X_0}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(0)X_0^2 + \Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \frac{1}{k}, \\ \frac{\partial f_0}{\partial X_1} &= \left[\Psi(1)X_0 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1 \right] \left[1 - \frac{X_0}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(0)X_0^2 + \Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \frac{c}{k}, \\ \frac{\partial f_0}{\partial X_2} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_0} &= [\Psi(1)X_1 + 2\Psi(2)X_2] \left[1 - \frac{X_1}{K} - c\frac{X_0}{K} - c\frac{X_2}{K} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1^2 + \Psi(1)X_1X_2 + 2\Psi(2)X_0X_2 \right] \frac{c}{K}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_1} &= [\Psi(1)(X_0 + X_2) + \Psi(0)X_1] \left[1 - \frac{X_1}{K} - c\frac{X_0}{K} - c\frac{X_2}{K} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1^2 + \Psi(1)X_1X_2 + 2\Psi(2)X_0X_2 \right] \frac{1}{K}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_2} &= [\Psi(1)X_1 + 2\Psi(2)X_0] \left[1 - \frac{X_1}{K} - c\frac{X_0}{K} - c\frac{X_2}{K} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(1)X_0X_1 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1^2 + \Psi(1)X_1X_2 + 2\Psi(2)X_0X_2 \right] \frac{c}{K}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_0} &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} &= \left[\Psi(1)X_2 + \frac{1}{2}\Psi(0)X_1 \right] \left[1 - \frac{X_2}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(0)X_2^2 + \Psi(1)X_1X_2 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \frac{c}{k}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_2} &= [2\Psi(0)X_2 + \Psi(1)X_1] \left[1 - \frac{X_2}{k} - c\frac{X_1}{k} \right] \\ &\quad - \left[\Psi(0)X_2^2 + \Psi(1)X_1X_2 + \frac{1}{4}\Psi(0)X_1^2 \right] \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Der Fixpunkt \vec{u}_c^* aus (2.5.10) besitzt die Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{(K + 2k - 2(K + k)c)^2}{4k(1 - 2c^2)^2}, \\ \lambda_{2/3} &= -\frac{1}{16kK(1 - 2c^2)^2}[r_1 \pm \sqrt{r_2}],\end{aligned}\tag{B.3}$$

mit

$$\begin{aligned}r_1 &= 2(-1 + 2c^2)(K^2(1 - 2c)^2 + 8k^2(-2 + c)c + 2K^2k \\ &\quad + 2K^2k(3 + 2c(-5 + 2c)) + 4Kk^2(3 + c(-4 + 5c))), \\ r_2 &= -32kK(K - 2kc)(K + 2k - 2(K + k)c)^2(-1 + 2c)^2 \\ &\quad (2k(-2 + c) + K(-1 + 4c)) + 4(1 - 2c^2)^2 \\ &\quad (K^2(1 - 2c)^2 + 8k^2(-2 + c)c + 2K^2k(3 + 2c(-5 + 2c)) \\ &\quad + 4Kk^2(3 + c(-4 + 5c)))^2.\end{aligned}$$

B.II Größen aus Abschnitt 2.5.2

Die Eigenwerte λ_i des Koexistenzfixpunktes \vec{u}_a^* aus (2.17) lauten:

$$\begin{aligned}\lambda_1, \dots, \lambda_6 &= 0, \\ \lambda_7 &= -\frac{7((-1 + 2c)K + 2(-1 + c)k)^2}{32(1 - 2c^2)^2k}, \\ \lambda_{8/9} &= \frac{-7(K(2c - 1) + 2k(c - 1))^2(K + 2k \pm \sqrt{K^2 + 4(-1 + 4c^2)kK + 4k^2})}{64(1 - 2c^2)^2kK}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

C Berechnung des statischen Grundfeldes S

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten statischen Grundfelder S wurden auf zwei unterschiedliche Weisen berechnet.

Für einfache, konvexe rechteckige Raumgeometrien, wie sie fast durchgehend in den Evakuierungssimulationen in Kapitel 3 untersucht wurden, ist die Verwendung einer einfachen euklidischen Metrik ausreichend. Sämtliche Teilchen des Systems verlassen den betrachteten Raum durch Ausgänge, die durch eine oder mehrere Zellen des Gitters repräsentiert werden. Der Wert des statischen Feldes S_{ij} am Platz des Gitters (i, j) ist dann proportional zum kürzesten Abstand zu einer der Türzellen.

Explizit bestimmen sich die Feldwerte von S dann in folgender Weise: Das Gitter der Größe $X \times Y$ sei, bis auf eine Menge von sog. Türzellen $\{(i_{T_1}, j_{T_1}), \dots, (i_{T_k}, j_{T_k})\}$, von nicht-durchquerbaren Wandzellen umgeben. Die Teilchen können den Raum nur durch diese Türzellen verlassen. Die explizite Formel für das Bodenfeld am Platz (i, j) lautet dann:

$$S_{ij} = \min_{(i_{T_s}, j_{T_s})} \left\{ \max_{(i_l, j_l)} \left\{ \sqrt{(i_{T_s} - i_l)^2 + (j_{T_s} - j_l)^2} \right\} - \sqrt{(i_{T_s} - i)^2 + (j_{T_s} - j)^2} \right\}. \quad (\text{C.1})$$

$\max_{(i_l, j_l)} \left\{ \sqrt{(i_{T_s} - i_l)^2 + (j_{T_s} - j_l)^2} \right\}$, wobei (i_l, j_l) über das gesamte Gitter läuft, ist der größte aller Abstände von dem Ausgang (i_{T_s}, j_{T_s}) . Dieser Wert dient lediglich als Normalisierung, so daß die Feldwerte von S mit abnehmendem Abstand $\sqrt{(i_{T_s} - i)^2 + (j_{T_s} - j)^2}$ von einer der Türen zunehmen. S ist dann stets gleich Null für die von den Ausgängen am weitesten entfernte Zelle. Abb. 3.6 zeigt graphische Darstellungen des in obiger Weise berechneten statischen Feldes S für unterschiedliche Geometrien.

Dieses Konzept läßt sich jedoch nicht auf beliebige Raumgeometrien verallgemeinern. Will man Felder für Räume mit komplizierter innerer Struktur berechnen, so ist die Verwendung einer Manhattan-Metrik hilfreich. Die Manhattan-Metrik kennzeichnet wie bereits in Kapitel 3.4 gesagt, den kürzesten Abstand zweier Zellen (i_1, j_1) und (i_2, j_2) auf einem Gitter, gemessen in zu überschreitenden Gitterzellen. Es dürfen nur nächste Nachbargitterplätze überschritten werden (siehe Abb. 4.1). Pfade gleicher Länge sind gleichberechtigt. Die Berechnung der statischen Felder im

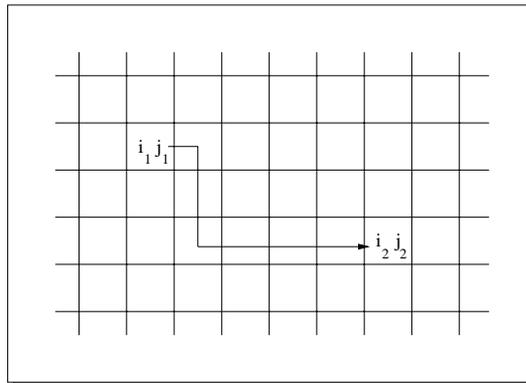


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Manhattan-Metrik. Der Abstand der Zellen (i_1, j_1) und (i_2, j_2) auf dem Gitter beträgt sieben Zellen.

Fall komplexer Geometrien mit Hilfe der Manhattan-Metrik, läßt sich mit der Aus-

breitung eines Potentials, ausgehend von verschiedenen Quellen verglichen. Jede Türzelle bildet hierbei eine unabhängige Quelle des Potentials. Zu beachten ist, daß die Ausbreitung nicht durch die sogenannten Hinderniszellen, wie Wände oder innere Raumstrukturen, erfolgen darf. Abb. 4.2 zeigt eine einfache Veranschaulichung der Potentialausbreitung. Der im folgenden aufgelistete Algorithmus kann durch das das

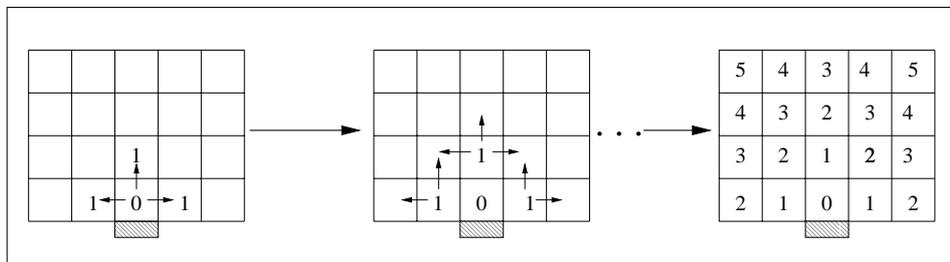


Abbildung 4.2: Veranschaulichung der Potentialausbreitung.

oben erläuterte Prinzip der Potentialausbreitung für beliebige komplexe Geometrien statische Felder S berechnen. Zu Beginn der Berechnung müssen lediglich die als Quellen der Potentialausbreitung (also alle Gitterzellen, die einen Ausgang darstellen) vorgesehenen Zellen identifiziert werden. Das statische Grundfeld wird durch die folgende Struktur beschrieben:

```
typedef struct gbosons
{
    int val;
    int seed;
} GBOSONSTYPE;
GBOSONSTYPE gbosons[X*Y];
```

Hierbei entspricht

`gbosons[j].val`

dem Feldwert des Gitterplatzes j und über

`gbosons[j].seed`

werden alle Quellen der Potentialausbreitung gekennzeichnet. Diese müssen zu Beginn der Berechnung festgelegt werden. Ferner erhalten alle Wand- und Hinderniszellen des Systems zunächst den Feldwert -1 . Der Pseudo-Code des Algorithmus lautet dann wie folgt:

```
void gfield ()
{
    int i, n, j, max;
    int list [X*Y];

    i=0;
    while(i < (X*Y))
    {

        gbosons[i].val=0;
        gbosons[i].seed=-1;
        i++;
```

```

}
for(i=all Obstacle Cells)
{
  gbosons[i].val=-1;
}

for(i= all Potential Sources)
{
  gbosons[i].seed=1;
}

j=0;
max=0;
for(i= all Potential Sources)
{
  gbosons[i].val=0;
  if(i-X>=0 && gbosons[i-X].val>-1 && gbosons[i-X].seed<1)
  {
    gbosons[i-X].val=gbosons[i].val+1;
    gbosons[i-X].seed=1;
    list[j]=i-X;
    j++;
  }
  if(gbosons[i-1].val>-1&& gbosons[i-1].seed<1)
  {
    gbosons[i-1].val=gbosons[i].val+1;
    gbosons[i-1].seed=1;
    list[j]=i-1;
    j++;
  }
  if(gbosons[i+1].val>-1&& gbosons[i+1].seed<1)
  {
    gbosons[i+1].val=gbosons[i].val+1;
    gbosons[i+1].seed=1;
    list[j]=i+1;
    j++;
  }
  if(gbosons[i+X].val>-1&& gbosons[i+X].seed<1)
  {
    gbosons[i+X].val=gbosons[i].val+1;
    gbosons[i+X].seed=1;
    list[j]=i+X;
    j++;
  }
  gbosons[i].seed=2;
}
max=j;
while(max>0)
{
  for(i=0;i<max;i++)
  {
    if( list[i]-X>=0 && gbosons[list[i]-X].val>-1 && gbosons[list[i]-X].seed<1)
    {
      gbosons[ list[i]-X].val=gbosons[ list[i]].val+1;
      gbosons[ list[i]-X].seed=1;
    }
  }
}

```

```

    if (gbosons[ list [ i ]-1].val > -1 && gbosons[list[i]-1].seed < 1)
    {
        gbosons[ list [ i ]-1].val = gbosons[ list [ i ]].val + 1;
        gbosons[ list [ i ]-1].seed = 1;
    }
    if (gbosons[ list [ i ]+1].val > -1 && gbosons[list[i]+1].seed < 1)
    {
        gbosons[ list [ i ]+1].val = gbosons[ list [ i ]].val + 1;
        gbosons[ list [ i ]+1].seed = 1;
    }
    if (gbosons[ list [ i ]+X].val > -1 && gbosons[list[i]+X].seed < 1)
    {
        gbosons[ list [ i ]+X].val = gbosons[ list [ i ]].val + 1;
        gbosons[ list [ i ]+X].seed = 1;
    }
    gbosons[ list [ i ]].seed = 2;
}
j = 0;
for (i = 0; i < X*Y; i++)
{
    if (gbosons[i].seed == 1)
    {
        list [ j ] = i;
        j++;
    }
}
max = j;
}
max = 0;
for (i = 0; i < X*Y; i++)
{
    if (gbosons[i].val > max)
        max = gbosons[i].val;
}
for (i = 0; i < X*Y; i++)
{
    if (gbosons[i].val > -1)
        gbosons[i].val = max - gbosons[i].val;
    else
        gbosons[i].val = 0;
}
return;
}

```

Das in Abschnitt 3.6.8 verwendete statische Feld S zur Beschreibung des Raumes mit einer Säule vor dem Ausgang wurde mit Hilfe dieses Algorithmus berechnet. In Abb. 4.3 ist eine graphische Darstellung von S gezeigt. Die Verwendung unter-

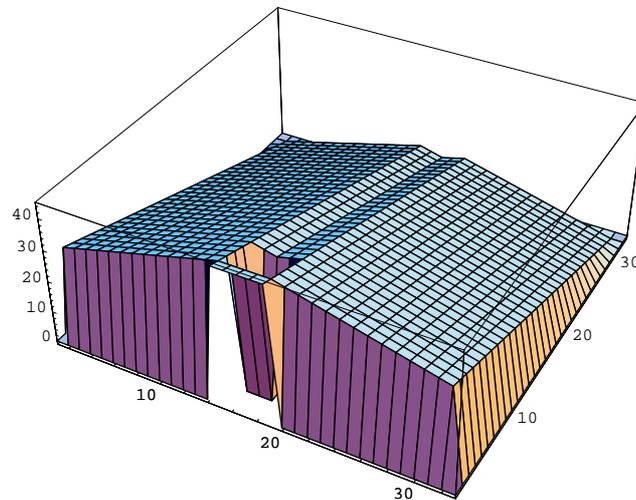


Abbildung 4.3: Graphische Darstellung des Feldes S aus Abschnitt 3.6.8 für ein kleineres Gitter der Größe 33×33 . Hinderniszellen wie Wände oder interne Objekte haben den Feldwert Null. Konstruktion mit Hilfe der Manhattan-Metrik

schiedlicher Berechnungsmethoden für die Felder S in dieser Arbeit ist eher historisch bedingt. Prinzipiell ist die vereinheitlichte Benutzung einer Methode erstrebenswert, besonders in Hinblick auf die Nutzung des Modells in Sicherheitsuntersuchungen in Gebäudeplanungen. Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse hängen in qualitativer Hinsicht nicht von der Wahl der Berechnungsmethode ab. Ein wichtiger Aspekt

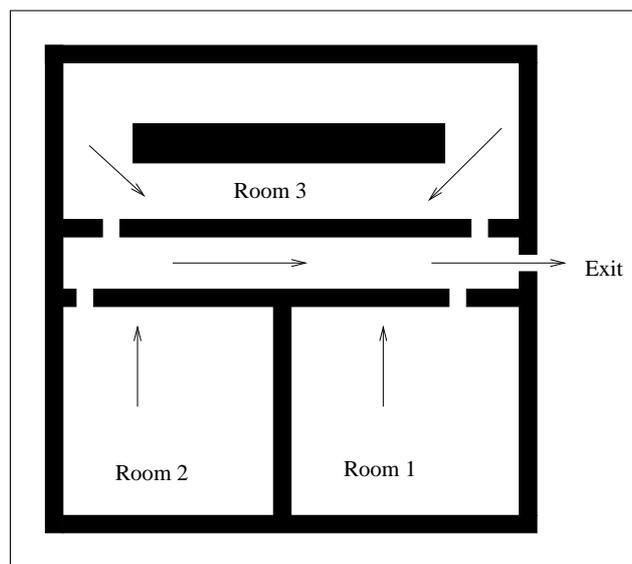


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung eines Gebäudeplans dreier durch einen Gang verbundener Räume.

der Manhattan-Metrik ist die Gewährleistung räumlicher Isotropie. Die effektiven Teilchengeschwindigkeiten $v_{\text{eff}} = 1 - p_{\text{dec}}$ (siehe (3.7.5)) entlang des Potentialgradienten von S hängen an jedem Platz des Gitters nur von k_S ab (im Fall $k_D = 0$). Diese Isotropie ist Grundvoraussetzung einer Anpassung des Modells an empirische Daten. In Hinsicht auf eine kommerzielle Nutzung für komplexe Gebäudeanlagen wie Fußballstadien oder Passagierschiffe, empfiehlt sich ebenfalls die Verwendung der Manhattan-Metrik und des oben angeführten Algorithmus.

Hierzu sei Abschließend noch ein Beispiel für die Berechnung des statischen Feldes S einer komplexen räumlichen Struktur gegeben. Abb. 4.4 zeigt den schematischen Grundriß dreier durch einen langen Gang verbundener Räume. Der Gang besitzt an einem seiner Enden einen Ausgang in ein unbestimmtes, angrenzendes Areal. Der Grundriß könnte also zum Beispiel einen Teil eines Decks eines Passagierschiffes darstellen. Der größte Raum besitzt in seinem Inneren eine nicht-durchquerbare Struktur. Diese Struktur stellt zum Beispiel einen langen Tisch, oder eine Bar dar. Abb. 4.5 zeigt dann das für diesen Grundriß berechnete statische Feld S . Dieses

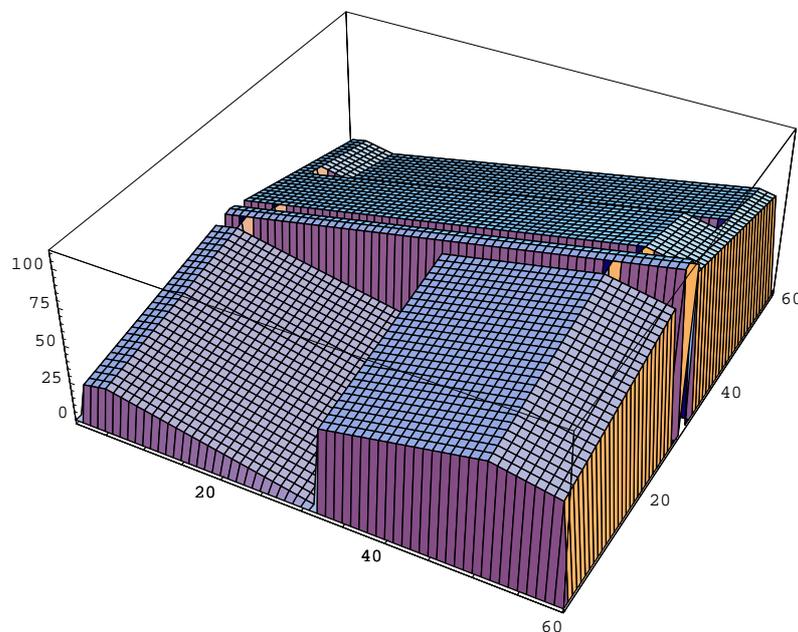


Abbildung 4.5: Graphische Darstellung des Feldes S für den Grundriß aus Abb. 4.4. Das zugrundeliegende Gitter hat die Größe 60×60 Zellen. Hinderniszellen wie Wände oder interne Objekte haben den Feldwert Null. Konstruktion mit Hilfe der Manhattan-Metrik.

wurde mit dem oben angeführten Algorithmus berechnet. Dabei liegt die Annahme zugrunde, daß zu evakuierende Personen aus den drei Räumen den Komplex durch den Ausgang am Ende des Ganges verlassen wollen.

D Details zur Dynamik des Grundfeldes D

Die numerische Berechnung der Dynamik eines diskreten Bodenfeldes D unterscheidet sich erheblich von den Berechnungen im Fall eines kontinuierlichen Feldes. In [57] wurden sämtliche Untersuchungen mit einem kontinuierlichen dynamischen Bodenfeld D durchgeführt, dessen Werte auf den Bereich $[0, 1]$ beschränkt waren. Die grundlegende Gleichung, die die Dynamik des Bodenfeldes bestimmte, lautete

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \alpha \cdot \Delta D - \delta D, \quad (\text{D.1})$$

mit Zerfallskonstante δ und Diffusionskonstante α . Die numerische Behandlung der Dynamik läuft dann auf eine Diskretisierung des Laplace-Operators Δ hinaus:

$$\Delta D_{i,j} = D_{i-1,j} + D_{i+1,j} + D_{i,j-1} + D_{i,j+1} - 4D_{i,j}. \quad (\text{D.2})$$

Um zu gewährleisten, daß der Wertebereich $[0, 1]$ von D durch (D.1) nicht überschritten wird, sind folgende Schranken zu berücksichtigen:

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = \frac{1}{8}, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_{\max} = \frac{1}{2}. \quad (\text{D.3})$$

Da D in der vorliegenden Arbeit stets ganzzahlige Werte $\in 0, 1, 2, \dots$ annimmt, ist eine einfache Übertragung des oben angedeuteten Algorithmus nicht möglich. Stattdessen wurde ein Algorithmus benutzt, der stochastisch Zerfall und Diffusion sämtlicher Bosonen des Feldes D bewirkt. Jedes einzelne Teilchen kann in einem Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit δ zerfallen und mit der Wahrscheinlichkeit α auf einen seiner freien Nachbarplätze diffundieren. Das dynamische Feld D sei durch

int dbosons[X*Y];

indiziert. Die Variablen

double deathpro, diffpro ;

entsprechen δ und α . Der Code des Algorithmus für einen Raum mit einer Tür lautet dann:

```
void diffdecay ()
{
  int i, j, k, l;
  int dumbos[X*Y];
  double pdum;

  /*-----decay-----*/

  for (i=(X-1)/2-door; i<(X-1)/2+door+1; i++)
    for (j=0; j<dbosons[i]; j++)
      {
        pdum=drand48();
        if (pdum<deathpro)
          dbosons[i]-=1;
      }
  for (i=0; i<(Y-2); i++)
    for (k=0; k<(X-2); k++)
      {
        l=(i+1)*X+k+1;
        for (j=0; j<dbosons[l]; j++)
```

```

        {
            pdum=drand48();
            if (pdum<deathpro)
                dbosons[l]-=1;
        }
    }

/*-----diffusion-----*/

for (i=0;i<X*Y;i++)
    dumbos[i]=0;
for (i=(X-1)/2-door;i<(X-1)/2+door+1;i++)
    for (j=0;j<dbosons[i];j++)
        {
            pdum=drand48();
            if (pdum<diffpro)
                {
                    pdum=drand48();
                    if (pdum<0.25)
                        dumbos[i+1]+=1;
                    else if (pdum>0.25 && pdum<0.5)
                        dumbos[i+X]+=1;
                    else if (pdum>0.5 && pdum<0.75)
                        dumbos[i-1]+=1;
                }
            else
                dumbos[i]+=1;
        }
for (i=0;i<(Y-2);i++)
    for (k=0;k<(X-2);k++)
        {
            l=(i+1)*X+k+1;
            for (j=0;j<dbosons[l];j++)
                {
                    pdum=drand48();
                    if (pdum<diffpro)
                        {
                            pdum=drand48();
                            if (pdum<0.25)
                                dumbos[l+1]+=1;
                            else if (pdum>0.25 && pdum<0.5)
                                dumbos[l+X]+=1;
                            else if (pdum>0.5 && pdum<0.75)
                                dumbos[l-1]+=1;
                            else
                                dumbos[l-X]+=1;
                        }
                    else
                        dumbos[l]+=1;
                }
        }
}

for (i=(X-1)/2-door;i<(X-1)/2+door+1;i++)
    {
        if (dumbos[i]<maxbos)

```

```

        dbosons[i]=dumbos[i];
    else
        dbosons[i]=maxbos;
}
for(i=0;i<(Y-2);i++)
    for(k=0;k<(X-2);k++)
        {
            l=(i+1)*X+k+1;
            if(dumbos[l]<maxbos)
                dbosons[l]=dumbos[l];
            else
                dbosons[l]=maxbos;
        }
return;
}

```

Dieser Algorithmus gewährleistet ganzzahlige Werte $D \geq 0$ und es sind keine Beschränkungen von α und δ notwendig.

Abschließend soll noch kurz ein weiteres Detail des dynamischen Feldes D erwähnt werden. Um zu verhindern, daß Teilchen bei hoher Kopplung an D stark mit der von ihnen selbsterzeugten Spur wechselwirken, wird bei der Wahl der Zielfelder in jedem Zeitschritt t für jedes Teilchen ein von ihm zum Zeitpunkt $t-1$ erzeugtes Boseteilchen aus D herausgerechnet. Dies führt in jedem Zeitschritt für jedes Teilchen i zu einem effektiven Feld $D_i(t)$.

E Java-Applets

Die Erstellung graphischer Oberflächen und die Visualisierung der Dynamik des Modells mit Hilfe komplexer Java-Programme war bei der Untersuchung der behandelten Fragestellungen sehr hilfreich. Sämtliche verwendeten Programme stehen im Internet zu Eigenuntersuchungen zur Verfügung [72]. Abb. 4.6 zeigt ein Beispiel für die graphische Oberfläche eines der verwendeten Programme. Jede Oberfläche

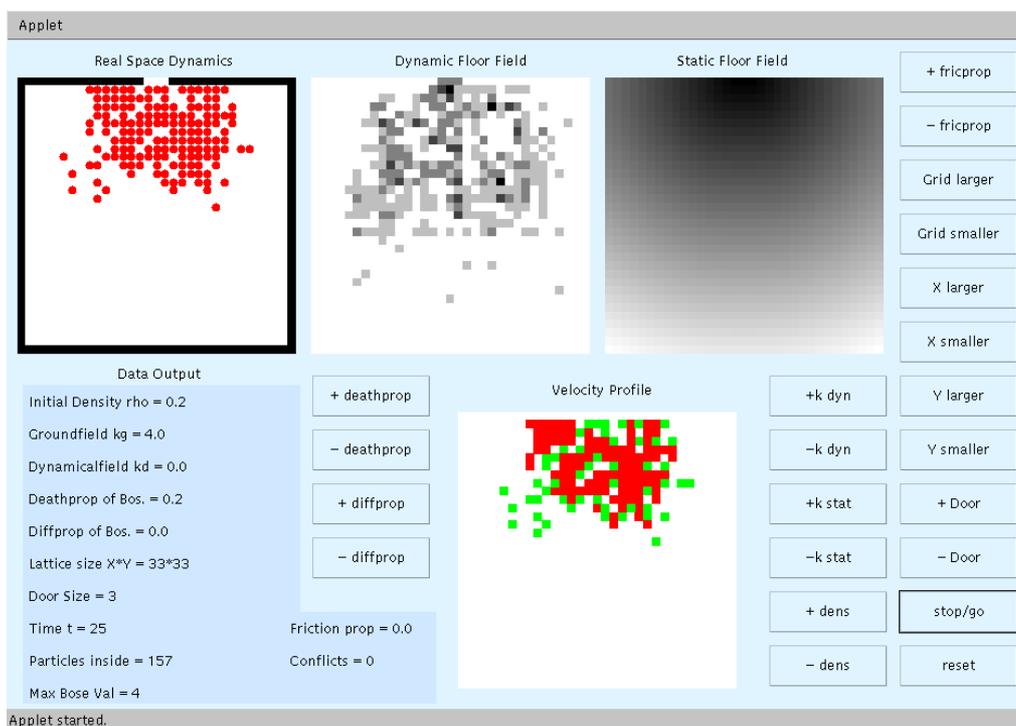


Abbildung 4.6: Bildschirmkopie der graphischen Oberfläche eines Java-Applets zur Modelldynamik. In diesem Fall ist ein Applet zur Situation einer Evakuierung eines einfachen Raumes abgebildet. In der linken oberen Ecke ist die Dynamik des ablaufenden Prozesses (*Real Space Dynamics*) wiedergegeben. Die Änderung des dynamischen Feldes (*Dynamic Floor Field*) wird rechts daneben angezeigt. Die Visualisierung zeigt eine zweidimensionale Darstellung von D . Der höchste Feldwert von D ist durch schwarze Farbe gekennzeichnet. Andere Feldwerte sind in Schattierungen zwischen schwarz und weiß relativ zum Maximalwert dargestellt. Dasselbe gilt für die Darstellung des statischen Feldes S in der rechten oberen Ecke. Weiterhin findet sich unter der Bezeichnung *Velocity Profile* eine Darstellung des Geschwindigkeitsprofils der Teilchen (gilt $v_{\max} = 1$, so werden sich bewegende Teilchen durch grüne und stehende Teilchen durch rote Farbe gekennzeichnet. Für $v_{\max} > 1$ findet sich eine feinere Farbschattierung entsprechend der Geschwindigkeitswerte.).

enthält eine Visualisierung der Dynamik des ablaufenden Prozesses (*Real Space Dynamics*), sowie des dynamischen (*Dynamic Floor Field*) und statischen Grundfeldes (*Static Floor Field*). Ferner wird die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen angezeigt (*Velocity Profile*). Mit Hilfe verschiedener Buttons können die Parameter des Modells variiert werden, deren Funktionsweise in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

| Parameter | Buttons |
|----------------------------|--|
| Statisches Grundfeld | Der Sensitivitätsparameter k_S , der die Kopplungsstärke an das statische Feld S beschreibt, wird von den Buttons +kstat (Erhöhung von k_S) und -kstat (Erniedrigung von k_S) eingestellt. |
| Dynamisches Grundfeld | Der Sensitivitätsparameter k_D , der die Kopplungsstärke an das dynamische Feld D beschreibt, kann durch die Buttons +kdyn und -kdyn eingestellt werden. |
| Teilchen-dichte | Die anfängliche Teilchendichte ρ kann durch die Buttons +dens und -dens variiert werden. |
| Zerfall von D | Der Zerfallsparameter δ wird über die Buttons +deathprop und -deathprop variiert. |
| Diffusion von D | Der Diffusionsparameter α kann mit Hilfe der Buttons +diffprop und -diffprop verändert werden. |
| Reibung μ der Teilchen | Der Reibungs- oder Konfliktparameter μ entspricht den Buttons +fricprop und -fricprop . |
| Geometrie-parameter | Die Größe des Gitters kann durch Grid larger und Grid smaller verändert werden (X larger und X smaller verändern die X-Koordinate und Y larger und Y smaller die Y-Koordinate des Gitters). Ferner lassen sich durch +door und -door sowie +wall und -wall die Größe der Türen und der Engstelle des Korridors einstellen. +gap und -gap reguliert den Abstand zweier Türen, die entlang einer Wand liegen. |
| Reset und stop and go | Der Button reset setzt die Simulation stets auf den Zeitpunkt $t = 0$ der Dynamik. Die Teilchen sind hier zufällig über das Gitter verteilt. stop/go stoppt und startet die Simulation. |
| Geschwindigkeit | In den Applets zu dem $v_{\max} > 1$ Modell kann mit Hilfe der Buttons +vmax und -vmax die maximale Laufgeschwindigkeit der Teilchen eingestellt werden. |

Darüber hinaus enthalten die Oberflächen stets einen Bereich in dem neben den Parameterwerten auch betreffende Meßgrößen wie Simulationszeit, Anzahl der Teilchen und Anzahl der Konflikte im System wiedergegeben sind.

Die Programmierung solcher Applets mit Hilfe der Programmiersprache Java gestaltet sich recht aufwendig. Prinzipiell müssen mehrere Aktionen der Programmausführung *parallel* verarbeitet werden. Die Technik die zur Realisierung solcher komplexen Programmstrukturen von Java zur Verfügung gestellt wird, heißt *Multithreading*. Eine solche Technik steht zum Beispiel in den Programmiersprachen *C* und *C++* nicht zur Verfügung. Im folgenden soll daher die Struktur des Programmcodes für das in Abb. 4.6 abgebildete Applet aufgelistet werden. Mit Hilfe dieser Anleitung ist es möglich, in kurzer Zeit beliebige andere Zellularautomaten-Modelle in ähnlicher Weise zu visualisieren. Die einzelnen Unterprogramme werden hierbei nicht aufgeführt, vor allem soll es darum gehen, das Interagieren der verschiedenen *Threads* zu dokumentieren.

```

import java . util .*;
import java . awt .*;
import java . applet .*;

public class friction
extends Applet
implements Runnable
{

    int MAXX=940; /*-----dimension of the applet -----*/
    int MAXY=620;
    /*--maximal and minimal size of the grid--*/
    int X_MAX=128;
    int X_MIN=13;
    int Y_MAX=128;
    int Y_MIN=13;
    Thread t=null;

    /*-----declaration of all arrays and parameters-----*/
    int latt []=new int[X_MAX*Y_MAX];
    int dbosons[]=new int[X_MAX*Y_MAX];
        /*-- .....--*/
    /*-- scaling of the painted grid --*/
    int k2=2*(X_MAX+Y_MAX)/(X+Y)+1;
    double k1=2*((double)(X_MAX+Y_MAX))/((double)(X+Y));
    /*--buttons--*/
    Button KDP_B,KDM_B,KGP_B,KGM_B;
        /*-- .....--*/

    public void init ()
    {
        int i,j;
        /*-- initialisation of all classes --*/
        for (i=0;i<X_MAX*Y_MAX;i++)
        {
            pedest[i]=new actor();
            sitejump[i]=new conflictsol ();
        }
        /*-- geometry and color --*/
        setLayout( null );
        setBackground( new Color(224,244,255));

        KDP_B=new Button(" +k_dyn");KDP_B.reshape(700,310,110,40);add(KDP_B);
        KDM_B=new Button(" -k_dyn");KDM_B.reshape(700,360,110,40);add(KDM_B);
        KGP_B=new Button(" +k_stat");KGP_B.reshape(700,410,110,40);add(KGP_B);
        KGM_B=new Button(" -k_stat");KGM_B.reshape(700,460,110,40);add(KGM_B);
        /*-- .....--*/
        initgrid ();
    }

    void initgrid ()
    {
        /*-- initial configuration --*/
        repaint ();
    }
}

```

```

void update()
{
    /*--specific update rules--*/
}

public void run()
{
    int i,k,l,x,y;

    Graphics g=getGraphics();
    while(t!=null)
    {
        if (go)
        {
            update();
            repaint ();
            Time+=1;
            print ();
            try
            {
                Thread.sleep(200);
            }
            catch(InterruptedException e)
            {
                stop ();
            }
            if ( inside<1)
                go=!go;
        }
    }
}

public void start ()
{
    if (t==null)
    {
        t=new Thread(this);
        t.start ();
    }
}

public void stop()
{
    t=null;
}

public void print ()
{
    /*--print all parametervalues and measurants--*/
    Graphics g=getGraphics();
    g.setColor(new Color(208,232,255));
    g.fillRect (15,320,255,215);
    g.fillRect (15,530,380,85);
    g.setColor( Color.black );
    g.drawString(" Initial ρDensity ρrhoρ="
    "+String.valueOf(((double)Math.round(rho*1000000)/1000000),20,340);
    /*--.....--*/
}

```

```

public void paint(Graphics g)
{
    int x,y,i;
    print ();
    for (i=0;i<X*Y;i++)
    {
        x=i%X;
        y=(int)(i/X);
        g.setColor(Color.white);
        g.fillRect(10+(int)(k1*x),35+(int)(k1*y),k2,k2);
    }
    for (i=0;i<X*Y;i++)
    {
        x=i%X;
        y=(int)(i/X);
        if (latt [i]==1)
        {
            g.setColor(Color.red);
            g.fillOval(10+(int)(k1*x),35+(int)(k1*y),k2,k2);
        }
        else if (latt [i]==2)
        {
            g.setColor(Color.black);
            g.fillRect(10+(int)(k1*x),35+(int)(k1*y),k2,k2);
        }
    }
    /*-----*/
}

/*-- event-handling of buttons via mouse-click --*/
public boolean action(Event evt, Object arg)
{
    if ((String)arg=="X_larger")
    {
        if (X+10<X_MAX)
        {
            X+=10;
            if (X>Y)
            {
                k2=2*X_MAX/X+1;
                k1=(double)X_MAX/(double)X*2;
            }
            else
            {
                k2=2*X_MAX/Y+1;
                k1=(double)X_MAX/(double)Y*2;
            }
            N = (int)((X-2)*(Y-2)*rho);
            Time=0;
            initgrid ();
        }
    }
    /*-----*/
    return true;
}
}

```

F Beweis der Formel (3.6.4)

Sei

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n}{n} z^n. \quad (\text{F.1})$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} a(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \left(\binom{t-n-1}{n} + \binom{t-n-1}{n-1} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n-1}{n} z^n + \sum_{n=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n-1}{n-1} z^n. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Jetzt läßt sich der erste Term auf der rechten Seite von (F.2) umschreiben zu

$$\sum_{n=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n-1}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\lfloor (t-1)/2 \rfloor} \binom{t-n-1}{n} z^n = a(t-1). \quad (\text{F.3})$$

In ähnlicher Weise wird der zweite Term der rechten Seite von (F.2) zu

$$\sum_{n=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t-n-1}{n-1} z^n = z \sum_{n=0}^{\lfloor (t-2)/2 \rfloor} \binom{t-n-2}{n} z^n = za(t-2). \quad (\text{F.4})$$

Schließlich erhält man die Rekursions-Relation

$$a(t) = a(t-1) + za(t-2). \quad (\text{F.5})$$

Diese läßt sich mit Hilfe der Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - x - z = 0$ lösen, also

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4z}}{2}. \quad (\text{F.6})$$

Berücksichtigt man noch zusätzlich $a(0) = a(1) = 1$, so erhält man schließlich Formel (3.6.4).

Literaturverzeichnis

- [1] R. Wehner, W. Gehring: *Zoologie*, Thieme (1990)
- [2] U. Schliewen: *Sympatrische Artbildung bei Chichliden im Ejagham-See*, Dissertation (1999)
- [3] A. Kondrashov, M. Shpark: *On the origin of species by means of assortative mating*, Proc. R. Soc. Lond. B **265**, 2273 (1998)
- [4] G. Turner, M. Burrows: *A model of sympatric speciation by sexual selection*, Proc. R. Soc. Lond. B **260**, 287 (1995)
- [5] P. Higgs, B. Derrida: *Stochastic models for species formation in evolving populations*, J. Phys. A **24**, 985 (1991)
- [6] P. Higgs, B. Derrida: *Genetic Distance and Species Formation in Evolving Populations*, J. Mol. Evol. **35**, 454 (1992)
- [7] A. Kondrashov: *Multilocus Model of Sympatric Speciation*, Theo. Pop. Biol. **29**, 1 (1986)
- [8] K. Kaneko: *Sympatric speciation: compliance with phenotype diversification from a single genotyp*, cond-mat/0009252 (2000)
- [9] T. Johnson, C. Scholz, M. Talbot: *Late Pleistocene Desiccation of Lake Victoria and Rapid Evolution of Cichlid Fishes*, Science **273**, 1091 (1996)
- [10] G. Doorn, A. Noest, P. Hogeweg: *Sympatric speciation and extinction driven by environment dependent sexual selection*, Proc. R. Soc. Lond. B **265**, 1915 (1998)
- [11] A. Kondrashov, F. Kondrashov: *Interactions among quantitative traits in the course of sympatric speciation*, Nature **400**, 351 (1999)
- [12] U. Dieckmann, M. Doebeli: *On the origin of species by sympatric speciation*, Nature **400**, 354 (1999)
- [13] U. Schliewen, D. Tautz, S. Pääbo: *Sympatric speciation suggested by monophyly of crater lake cichlids*, Nature **368**, 629 (1994)
- [14] D. Schluter: *Experimental Evidence That Competition Promotes Divergence in Adaptive Radiation*, Science **266**, 798 (1994)
- [15] J. Maynard Smith: *Evolutionary Genetics*, Oxford University Press (1998)
- [16] J. Murray: *Mathematical Biology*, Springer Verlag (1980)

- [17] P. Hammerstein: *Darwinian adaption, population genetics and the streetcar theory of evolution*, J. Math. Biol. **34** (1996)
- [18] L. Peliti: *Introduction to the statistical theory of Darwinian evolution*, cond-mat/9712027 (1997)
- [19] L. Peliti: *Fitness Landscapes And Evolution*, cond-mat/9505003 (1995)
- [20] I. Gradshteyn, M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 4 (1980)
- [21] D. Wolf, M. Schreckenberg, A. Bachem (Herausgeber): *Traffic and Granular Flow*, World Scientific (1996)
- [22] M. Schreckenberg, D. Wolf (Herausgeber): *Traffic and Granular Flow '97*, Springer (1998)
- [23] D. Helbing, D. Wolf, M. Schreckenberg, H. Hermann (Herausgeber): *Traffic and Granular Flow '99: Social, Traffic and Granular Dynamics*, Springer (2000)
- [24] D. Helbing: *Verkehrsdynamik: Neue Physikalische Modellierungskonzepte*, Springer (1997)
- [25] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider: *Statistical Physics of Vehicular Traffic and Some Related Systems*, Phys. Rep. **329**, 199 (2000)
- [26] A. Schadschneider: *Statistical physics of traffic flow*, Physica A **285**, 101 (2000)
- [27] K. Nagel, J. Esser, M. Rickert: *Large-Scale Traffic Simulations for Transportation Planning*, in: D. Stauffer (Herausgeber): *Ann. Rev. Comp. Phys.*, World Scientific, Band 7, 151 (2000)
- [28] D. Helbing: *Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems*, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001)
- [29] K. Nagel, M. Schreckenberg: *A cellular automaton model for freeway traffic*, J.Physique I **2**, 2221 (1992)
- [30] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito: *Discrete stochastic models for traffic flow*, Phys. Rev. **E51**, 2939 (1995)
- [31] O. Biham, A. Middelton, D. Levine: *Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models*, Phys. Rev. **A46**, R 6124 (1992)
- [32] D. Stauffer: *Computer simulations of cellular automata*, J. Phys **A24**, 909 (1991)
- [33] S. Wolfram: *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, 1986); *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, 1994).
- [34] B. Derrida, M. Evans: *The asymmetric exclusion model: exact results through a matrix approach*, in: V. Privman (Herausgeber): *Nonequilibrium Statistical Mechanics in One Dimension*, Cambridge University Press (1997)
- [35] N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg: *The asymmetric exclusion process: comparison of update procedures*, J. Stat. Phys. **92**, 151 (1998)

- [36] K. Nagel: *High-Speed Microsimulations of Traffic Flow*, Dissertation, Universität zu Köln (1995)
- [37] M. Schreckenberg, S.D. Sharma (Ed.): *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, (Springer 2001)
- [38] D. Helbing, I. Farkas, P. Molnar, T. Vicsek: *Simulation of Pedestrian Crowds in Normal and Evacuation Situations*, in [37]
- [39] M. Fukui, Y. Ishibashi: *Self-organized phase transitions in cellular automaton models for pedestrians*, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 2861 (1999)
- [40] M. Fukui, Y. Ishibashi: *Jamming transition in cellular automaton models for pedestrians on passageways*, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 3738 (1999)
- [41] M. Muramatsu, T. Irie, T. Nagatani: *Jamming transition in pedestrian counterflow*, Physica **A267**, 487 (1999)
- [42] M. Muramatsu, T. Nagatani: *Jamming transition in two-dimensional pedestrian traffic*, Physica **A275**, 281 (2000)
- [43] M. Muramatsu, T. Nagatani: *Jamming transition of pedestrian traffic at a crossing with open boundaries*, Physica **A286**, 377 (2000)
- [44] D. Helbing, P. Molnar: *Social force model for pedestrian dynamics* Phys. Rev. **E51**, 4282 (1995)
- [45] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, J. Zittartz: *Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton*, Physica **A295**, 507 (2001)
- [46] D. Helbing, J. Keltsch, P. Molnar: *Modelling the evolution of human trail systems*, Nature **388**, 47 (1997)
- [47] C. Burstedde, A. Kirchner, K. Klauck, A. Schadschneider, J. Zittartz: *Cellular Automaton Approach to Pedestrian Dynamics - Applications*, in [37]
- [48] A. Kirchner, A. Schadschneider: *Cellular automaton simulations of pedestrian dynamics and evacuation processes*, erscheint im Proceedings-Band von "Traffic and Granular Flow '01", Springer (2002)
- [49] Y. Tajima, T. Nagatani: *Scaling behaviour of crowd flow outside a hall*, Physica **A292**, 545 (2001)
- [50] H. Klüpfel, T. Meyer-König, J. Wahle, M. Schreckenberg: *Microscopic Simulation of Evacuation Processes on Passenger Ships*, in: S. Bandini, T. Worsch (Herausgeber): *Theory and Practical Issues on Cellular Automata*, Springer (2000)
- [51] H. Klüpfel, T. Meyer-König, M. Schreckenberg: *Empirical data on evacuation exercise in a movie theater*, eingereicht in: Fire Safety Journal
- [52] H. Klüpfel, T. Meyer-König, M. Schreckenberg: *Comparison of an Evacuation Exercise in a Primary School to Simulation Results*, eingereicht in: Fire Safety Journal

- [53] Mit freundlicher Genehmigung von Hubert Klüpfel und traff-go GmbH.
- [54] D. Helbing, F. Schweitzer, J. Keltsch, P. Molnar: *Active walker model for the formation of human and animal trail systems*, Phys. Rev. **E56**, 2527 (1997)
- [55] D. Helbing, I. Farkas, T. Vicsek: *Freezing by Heating in a Driven Mesoscopic System*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1240 (2000)
- [56] D. Helbing, I. Farkas, T. Vicsek: *Simulating dynamical features of escape panic*, Nature **407**, 487 (2000)
- [57] C. Burstedde: *Simulation von Fußgängerverhalten mittels zweidimensionaler zellulärer Automaten*, Diplom-Arbeit, Universität zu Köln (2001)
- [58] P. Gipps, B. Marksjo: *A micro-simulation model for pedestrian flows*, Math. and Comp. in Simulation **27**, 95 (1985)
- [59] E. Ben-Jacob: *From snowflake formation to growth of bacterial colonies. Part II: Cooperative formation of complex colonial patterns*, Contemp. Phys. **38**, 205 (1997)
- [60] E. Ben-Jacob: *Generic modelling of cooperative growth patterns in bacterial colonies*, Nature **368**, 46 (1994)
- [61] D. Helbing: *Die wundervolle Welt aktiver Vielteilchensysteme*, Physikalische Blätter **1**, 27 (2001)
- [62] L. Henderson: *The Statistics of Crowd Fluids*, Nature **229**, 381 (1971)
- [63] L. Henderson, L. und D. Lyons: *Sexual Differences in Human Crowd Motion*, Nature **240**, 353 (1972)
- [64] U. Weidmann: *Transporttechnik der Fußgänger*, Schriftreihe des IVT **90**, ETH Zürich (1992)
- [65] *Special Report 209: Highway Capacity Manual*, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., Chapter 13 (1994)
- [66] V. Blue, J. Adler: *Flow Capacities from Cellular Automata Modeling*, in [37]
- [67] A. Kirchner: *Zellularautomaten simulieren biologische Bewegung*, Diplom-Arbeit, Universität zu Köln (1999)
- [68] A. Schadschneider: *Cellular Automaton Approach to Pedestrian Dynamics - Theory*, in [37]
- [69] A. Schadschneider: *Bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics*, erscheint im Proceedings-Band von "Traffic and Granular Flow '01", Springer (2002)
- [70] D. Chowdhury, V. Guttal, A. Schadschneider: *Cellular-automata models of ant-trail and vehicular traffic: similarities and differences*, cond-mat/0201207
- [71] A. Kirchner and A. Schadschneider: *Simulation of evacuation processes using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics*, akzeptiert zur Veröffentlichung in Physica **A**

- [72] Java-Applets der Simulationen finden sich unter:
<http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html>
- [73] Mit freundlicher Genehmigung von Dirk Helbing.
- [74] M. Nicodemi: *Force Correlations and Arch Formation in Granular Assemblies*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1340 (1998)
- [75] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita and H. Hayakawa: *4/3 Law of Granular Particles Flowing through a Vertical Pipe*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2833 (1998)
- [76] S. McNamara and W. Young: *Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium*, Phys. Fluids A4, 496 (1992)
- [77] A. Kirchner, K. Nishinari, A. Schadschneider: *Friction effects and clogging in a cellular automaton model for pedestrian dynamics*, preprint
- [78] B. Kerner: *The physics of traffic*, Physics World **8**, 25 (1999)
- [79] H. Muir: *Effects of motivation and cabin configuration on emergency aircraft evacuation behaviour and rates of egress*, Intern. J. Aviat. Psych., 6 (1): 57-77 (1996)
- [80] D. Fundenberg, J. Tirole: *Game Theory*, The MIT Press (1991)

Kurze Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Fragestellungen aus dem Bereich biologischer und sozialer Systeme mit Methoden der statistischen Physik untersucht. Hierbei wurden zwei unterschiedlich motivierte Themenkreise ausführlich diskutiert.

In Kapitel 2 wurden Evolutionsmodelle zur sympatrischen Speziation vorgestellt und untersucht. Zunächst wurde ein Differentialgleichungssystem zur Beschreibung asexuell reproduzierender Populationen einer ausführlichen Stabilitätsanalyse der Fixpunkte unterzogen. In Abhängigkeit von der Parameterwahl des Modells konnten verschiedene stabile Koexistenzen zwischen den Populationen nachgewiesen werden. Weiterhin wurden Genommodelle zur Vererbung diskreter Merkmale (Traits) entwickelt und ihre statistischen Eigenschaften abgeleitet.

Abschließend wurden mit Hilfe dieser Genommodelle diskrete und kontinuierliche Zeitgleichungen zur Beschreibung von sexuell reproduzierenden Populationen untersucht. Abhängig von der Parameterwahl ließen sich stabile Koexistenzen einzelner, reproduktiv isolierter, Teilpopulationen nachweisen, die sich als sympatrische Speziation interpretieren lassen.

In Kapitel 3 wurde ein Zellularautomaten-Modell zur Dynamik von Fußgängern vorgestellt. Das Modell ist in der Lage, ohne langreichweitige Wechselwirkungen zwischen den Teilchen eine große Anzahl komplexer kollektiver Verhaltensmuster zu reproduzieren. Die Teilchen erhalten sämtliche Informationen über ihre belebte und unbelebte Umwelt durch kurzreichweitige Wechselwirkungen mit zwei sogenannten Grundfeldern S und D . Das statische Grundfeld S enthält sämtliche Informationen über die grundlegende räumliche Struktur und das dynamische Grundfeld D steuert die Wechselwirkung zwischen den Individuen.

Zunächst wurde, anhand einfacher Evakuierungsszenarien, der Einfluß der Modellparameter untersucht. In Abhängigkeit von den, die Kopplung an S und D steuernden, Sensitivitätsparametern konnten unterschiedliche Regime des Teilchenverhaltens identifiziert werden, die in diversen real beobachtbaren Verhaltensweisen ihre Entsprechung haben. Weiterhin wurde der Einfluß von Konflikten bei der Platzwahl zwischen den Teilchen untersucht. Solche Konflikte bilden eine große Gefahrenquelle realer Evakuierungsszenarien. Zur Modellierung von Verstopfungsphänomenen an Engstellen wurde mit dem Reibungsparameter μ eine weitere stochastische Größe in das Modell eingeführt. Ferner wurden zur Modellierung beliebiger Laufgeschwindigkeiten der Teilchen mehrere Erweiterungen des Modells angegeben, in denen $v_{\max} > 1$ gilt. Fundamentaldiagramme der Teilchenflüsse wurden eingehend untersucht und mit empirischen Daten verglichen. Abschließend wurden die Auswirkungen einer feineren Diskretisierung der zugrundeliegenden räumlichen Struktur analysiert.

Abstract

In this work several questions of biological and social systems are studied with methods of statistical physics. Two different topics are discussed in detail.

In chapter 2 various evolution models for the description of sympatric speciation are proposed and investigated. A system of coupled differential equations for the description of asexual reproducing populations is studied in detail. Depending on the parameters of the model, different stable coexistences between the populations are observed.

The statistical properties of genom models for the inheritance of discrete traits are derived. With the aid of these genom models discrete and continuous time equations for the description of sexual reproducing populations are investigated. Depending on the parameter choice, stable coexistences between reproductive isolated populations are shown. This coexistences can be interpreted as sympatric speciation.

In chapter 3 a 2-dimensional cellular automaton model for the description of pedestrian dynamics is presented. The model is extremely time and memory efficient and it is able to reproduce many collective effects encountered in pedestrian dynamics. This is achieved by introducing two so-called *floor fields* S and D which mediate the long-range interactions between the pedestrians. At this the static floor field S contains all informations about the inanimate surroundings. The dynamic floor field D is a virtual trace left by the pedestrians and is used to model an attractive interaction between the particles.

First simple evacuation scenarios are studied. It is shown that the variation of the model parameters allows to describe three different main regimes of particle behaviour, from regular to panic. A non-monotonic dependence of evacuation times on the parameters of the model is found.

Further the role of conflicts in pedestrian traffic, i.e. the situation when two or more people try to enter the same space, is investigated. Due to clogging and sticking such conflicts can lead to very dangerous situations and emergencys. In the model such sticking phenomena can be modelled very well due to the introduction of the stochastic friction parameter μ . Some results are in good agreement to empirical data.

For the modelling of arbitrary walking speeds the model is extended in that way, that particles are allowed to move not only to nearest neighbour cells. Fundamental diagrams of the model are studied. They are in good agreement to empirical data. Finally the effects of a higher discretisation of the underlying geometrical structure are investigated. The discretisation has strong influences on the quantities of the model.

Danksagungen

Zunächst gilt mein besonderer Dank Herrn Priv. -Doz. Dr. A. Schadschneider für die Anregung zu einem großen Teil dieser Arbeit und die hervorragende fachliche Betreuung, sowie für viele hilfreiche Gespräche auch in nichtphysikalischen Bereichen. Desweiteren danke ich ihm für die Ermöglichung eines Forschungsaufenthalts in Japan.

Herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. J. Zittartz, der mir in besonderer Weise die Durchführung dieser Arbeit ermöglicht hat.

Weiterhin möchte ich mich sehr bei Herrn Prof. Dr. M. Lässig für die Vergabe des Themas *Sympatrische Speziation in Evolutionsmodellen* und seine ausgezeichnete Betreuung bedanken.

Ferner danke ich Prof. Dr. K. Nishinari für seine gastliche Aufnahme in Japan und die großartige fachliche Zusammenarbeit.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. M. Schreckenberg für die Bereitstellung diverser finanzieller Mittel, die mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglicht haben.

Großer Dank für die wissenschaftliche Zusammenarbeit während der letzten Jahre gebührt den Herren Dr. K. Klauck, F. Zielen, C. Burstedde, A. Kemper, A. Bühler, Dr. M. Rost und H. Klüpfel.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit geht mein Dank an die Herren Dr. M. Rost und H. Klüpfel, sowie an meine Mutter Hildegard Kirchner.

Nocheinmal möchte ich allen genannten und ungenannten Kollegen danken, die durch ihre Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft eine angenehme Atmosphäre erzeugt haben.

Nicht zuletzt gebührt meinen Eltern großer Dank, die mich stets in jeder erdenklichen Art und Weise unterstützt haben.

Mein Dank gilt auch Katja für ihre ständige Unterstützung und die vielen schönen Stunden jenseits der Arbeit.

Erklärung

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; daß diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Privat-Dozent Dr. A. Schadschneider betreut worden.

Köln, den 15. Mai 2002

Teilpublikationen:

C. Burstedde, A. Kirchner, K. Klauck, A. Schadschneider, J. Zittartz: *Cellular Automaton Approach to Pedestrian Dynamics - Applications*, in: M. Schreckenberg, S.D. Sharma (Ed.): *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, (Springer 2001)

A. Kirchner, A. Schadschneider: *Cellular automaton simulations of pedestrian dynamics and evacuation processes*, erscheint im Proceedings-Band von "Traffic and Granular Flow '01" (Springer 2002)

A. Kirchner, A. Schadschneider: *Simulation of evacuation processes using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics*, akzeptiert zur Veröffentlichung in *Physica A*

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Ansgar Kirchner
Geburtsdatum: 13. Dezember 1970
Geburtsort: Köln
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulbildung

1977 – 1981 Grundschole in Bensberg
1981 – 1988 Otto-Hahn-Gymnasium Bensberg
1988 – 1990 Gymnasium Thusneldastr. Köln (Abitur)

Hochschulstudium

Oktober 1990 Studium der Biologie an der Universität zu Köln
Oktober 1992 Vordiplom in Biologie
Oktober 1992 Studium der Mathematik und Physik an der Universität zu Köln
März 1995 Vordiplome in Physik und Mathematik
Juni 1998 – Juni 1999 Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln bei Prof. Zittartz
Thema: Zellularautomaten simulieren biologische Bewegung
Seit Oktober 1999 Anfertigung der vorliegenden Dissertation

Arbeitsverhältnisse

1998 – 1999 Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln
Okt. 1999 – Dez. 2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln
Seit Januar 2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Gerhard-Mercator Universität Duisburg

