Untersuchungen einer neuen Klasse von ganzwertigen ganzen Funktionen

I n a u g u r a l – D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Michael Welter

aus Geldern

Hundt Druck GmbH, Köln

Köln 2002

Berichterstatter:	Prof. Dr. P. Bundschuh
	Prof. Dr. D. Huybrechts
Tag der mündlichen Prüfung:	27. Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **iii**

Symbolverzeichnis **xi**

1 Der multiplikative Fall **1**

1.1 Definitionen und Resultate 1

1.2 Beweis von Satz 1.3 7

1.2.1 Beweis von Teil (i) 7

1.2.2 Beweis von Teil (ii) 8

1.3 Zwei Hilfssätze aus der Theorie der transzendenten Zahlen . . 11

1.4 Beweis von Satz 1.5 12

1.5 Über NEWTONsche–Interpolationsreihen und ein weiterer Beweis für Satz 1.3 (i) 17

1.6 Beweis von Satz 1.6 22

1.6.1 Das Beweisprinzip 22

1.6.2 Konstruktion der Funktion 24

1.6.3 Ein Hilfssatz 26

1.6.4 Abschätzungen 26

2 Der additive Fall **32**

2.1 Definitionen und Ergebnisse 32

2.2 Beweis von Satz 2.3 36

2.2.1 Beweis des Teils (i) 36

2.2.2 Beweis von Teil (ii) 37

2.3 Beweis von Satz 2.4 40

2.4 Beweis von Satz 2.5 45

2.4.1 Konstruktion einer geeigneten Funktion 45

2.4.2 Ein Hilfssatz 49

2.4.3 Abschätzungen 50

2.5 Beweis von Satz 2.6 55

3 Der imaginär-quadratische Fall **59**

3.1 Definitionen und Ergebnisse 59

3.2 Zwei Hilfssätze 62

3.3 Beweis von Satz 3.1 62

3.3.1 Beweis von Teil (i) 62

3.3.2 Beweis von Teil (ii) 63

3.4 Beweis von Satz 3.2 67

3.5 Beweis von Satz 3.4 73

3.5.1 Konstruktion einer geeigneten Funktion 73

3.5.2 Abschätzungen 76

Zusammenfassung **84**

Literaturverzeichnis **86**

Einleitung

In seiner Arbeit *Über ganzwertige ganze Funktionen* [38] bewies Pólya im Jahre 1915, dass für jede ganztranszendente Funktion f, d.h. jede ganze Funktion f, die keine Polynomfunktion ist, stets

$$\sigma(f) := \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log |f|_r}{r} \geq \log 2$$

gilt, wenn sie der Bedingung $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ genügt. Dabei ist $|f|_r := \max_{|z|\leq r} |f(z)|$ gesetzt. Da für Polynomfunktionen der vorstehende Limes superior offensichtlich gleich Null ist, gibt es also keine ganze, im obigen Sinne ganzwertige Funktion f mit $0 < \sigma(f) < \log 2$. Wir sprechen deshalb von einer Wachstumslücke innerhalb der ganzwertigen ganzen Funktionen. Die Funktion 2^z zeigt, dass der Wert $\log 2$ als Unterschranke des obigen Limes superior bestmöglich ist. Der Satz von Pólya war historisch der Startpunkt der Untersuchungen von Ganzwertigkeitsfragen bei ganzen Funktionen.

Die Theorie der ganzwertigen ganzen Funktionen ist eng verknüpft mit der Theorie der transzendenten Zahlen. Die Hauptidee der oben genannten Arbeit von Pólya, nämlich die betrachtete ganze Funktion in eine geeignete Interpolationsreihe zu entwickeln und dann deren Koeffizienten zu untersuchen, gestattete es später Gel'fond [20], das berühmte siebte Hilbertsche Problem über die Transzendenz von α^β für algebraisches nichtverschwindendes $\alpha \neq 1$ und irrationales, algebraisches β in dem Spezialfall, dass β eine imaginär-quadratische Zahl ist, zu lösen. Aber sowohl die vollständige Lösung des siebten Hilbertschen Problems von Gel'fond [25, 24] als auch die von Schneider [42] benötigte noch eine weitere, von Siegel erstmals 1929 in [46] präsentierte Idee, die darin besteht eine Hilfsfunktion zu konstruieren, die an vielen vorgegebenen Stellen verschwindet. Die bei der Lösung des siebten Hilbertschen Problems entwickelten Methoden von Gel'fond und Schneider aus der Theorie der transzendenten Zahlen sind dann später wiederum erfolgreich bei Untersuchungen von Ganzwertigkeitsfragen angewendet worden.

Um eine Einordnung der in der vorliegenden Arbeit behandelten Fragestellung zu ermöglichen, wollen wir im Folgenden einen kurzen Überblick über einen Teil der umfangreichen Theorie der ganzwertigen ganzen Funktionen geben. Wir beschränken uns dabei auf Ergebnisse über Funktionen, die an unendlich vielen verschiedenen Stellen ganzwertig sind. Für Literatur über Funktionen, die mit sämtlichen Ableitungen an nur endlich vielen verschiedenen Stellen ganze Werte annehmen, sog. Hurwitz–Funktionen, verweisen wir auf das umfangreiche Literaturverzeichnis in Sato [41].

Wie bereits oben bemerkt wurde, steht am Anfang der Theorie der ganzwertigen ganzen Funktionen der Satz von Pólya aus dem Jahre 1915 über Funktionen, die $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ abbilden. Bei Ganzwertigkeit auf den positiven ganzen Zahlen sprechen wir vom *additiven Fall*. Gelegentlich wurden auch Funktionen untersucht, die auf sämtlichen ganzen Zahlen ganze Werte annehmen. Auch diese Ergebnisse wollen wir dem additiven Fall zuordnen, da sich das Wachstumsverhalten dieser Funktionen nicht wesentlich von dem ganzwertiger Funktionen im obigen Sinne unterscheidet.

Nach einigen Verschärfungen des Pólyaschen Ergebnisses u.a. durch Hardy [30] und auch Pólya [39] verallgemeinerte Gel'fond [22] 1929 den Satz auf ganze Funktionen, deren erste $s-1$ Ableitungen $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ abbilden. Selberg verbesserte Gel'fonds Ergebnis 1941 in [44].

Außerdem bewies Selberg in [45], dass eine ganze Funktion f, die den Bedingungen $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ und

$$\sigma(f) < \log 2 + \frac{1}{1500}$$

genügt, von der Form $P_1(z) + P_2(z)2^z$ mit Polynomfunktionen P_1 und P_2 ist. Bis zu diesem Zeitpunkt waren alle Ergebnisse in der Theorie der ganzwertigen ganzen Funktionen durch Untersuchungen geeigneter Interpolationsreihen, meistens so genannter Newtonscher Interpolationsreihen, gewonnen worden. 1942 führte dann Pisot [37] eine neue Methode in die Untersuchungen von Ganzwertigkeitsfragen bei ganzen Funktionen ein. Unter Benutzung der Laplace–Borel–Transformierten der ganzen Funktion f, konnte Pisot zeigen, dass ein α_0 mit $0,825 < \alpha_0 < 0,850$ existiert, so dass jede ganze, im Pólyaschen Sinne ganzwertige Funktion f mit $\sigma(f) < \alpha_0$ von der Form $\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(z)\beta_\nu^z$ mit Polynomfunktionen $P_1, \ldots, P_n$ und algebraischen Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ist. Weitere Anwendungen der Laplace–Borel–Transformierten auf Ganzwertigkeitsfragen im additiven Fall finden sich bei Buck [11], Wallisser [51] und Robinson [40].

FRIDMAN [18] untersuchte 1968 ganze Funktionen, deren sämtliche Ableitungen ganzwertige Funktionen im PÓLYAschen Sinne sind. Er konnte zeigen, dass für jede ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n, \sigma \in \mathbb{N}_0$

$$A(f) := \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log |f|_r}{r} \geq \log(1 + e^{-1})$$

gilt. Weiter konstruierte er eine ganztranszendente Funktion f mit $A(f) \leq \pi$, die der obigen Ganzwertigkeitsbedingung genügt. Somit existiert eine Konstante α_1 mit $\log(1 + e^{-1}) \leq \alpha_1 \leq \pi$, so dass $\mathrm{A}(f) \geq \alpha_1$ für alle in diesem Sinne ganzwertigen, ganztranszendenten Funktionen f ist. Der bestmögliche Wert für α_1 ist nicht bekannt. In diesem Zusammenhang muss auch die bereits erwähnte Arbeit von SATO [41] genannt werden, die eine ähnliche Konstruktion enthält.

WALDSCHMIDT [47] zeigte 1978, dass man den PÓLYAschen Satz prinzipiell auch mittels SCHNEIDERs Methode aus der Theorie der transzendenten Zahlen beweisen kann. Man erhält bei diesem Ansatz allerdings lediglich die Aussage, dass eine positive Konstante c existiert, so dass $\sigma(f) \geq c$ für jede ganzwertige ganze Funktion f gilt, die keine Polynomfunktion ist. Die korrekte Größe der Wachstumslücke, also $c = \log 2$, konnte bisher nicht mittels Transzendenzmethoden gewonnen werden. Einen Beweisvariante, die 1989 von LAURENT in die Transzendenztheorie eingeführten Interpolationsdeterminanten anstelle des SIEGELschen Lemmas benutzt, wird von WALDSCHMIDT in [49] skizziert.

1967 bewies BAKER [3] ein Analogon zum PÓLYAschen Satz für ganze Funktion mehrerer Veränderlicher. Durch Untersuchungen der LAPLACE–BOREL–Transformierten im $\mathbb{C}^d$ erhielten AVANISSIAN und GAY [2] im Jahre 1975 ein Analogon zum Ergebnis von PISOT für ganzwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher.

1981 betrachteten PERELLI und ZANNIER [35] das Wachstum von ganzwertigen ganzen Funktionen f, die neben der PÓLYAschen Ganzwertigkeitsbedingung noch den zusätzlichen arithmetischen Bedingungen $f(n + p) \equiv f(n) \pmod{p}$ für alle hinreichend großen Primzahlen p und alle $n \in \mathbb{N}$ genügen.

Ein weiterer wichtiger Fall der in der Literatur behandelten Ganzwertigkeitsfragen ist der *imaginär-quadratische Fall*, bei dem Funktionen untersucht werden, die den Ganzheitsring eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers in sich abbilden. FUKASAWA begann 1926 in [19] das Studium von ganzen

Funktionen, die der Bedingung $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$ genügen. 1929 konnte dann Gel'fond [21] zeigen, dass eine positive Konstante α existiert, so dass für jede in diesem Sinne ganzwertige ganztranszendente Funktion f

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log |f|_r}{r^2} \geq \alpha$$

gilt. Von hier aus war es nur noch ein kleiner Schritt zu der oben erwähnten Lösung des siebten Hilbertschen Problems für imaginär-quadratisches β. 1981 bewies schließlich Gramain [27] nach Vorarbeiten von Gruman [29] und Masser [34], dass man hier $\alpha = \frac{\pi}{2e}$ nehmen kann und dass dies die bestmögliche Wahl für α ist. Außerdem zeigte er dort einen allgemeineren Satz, in dem anstelle von $\mathbb{Z}[i]$ der Ganzheitsring $O_{\mathbb{K}}$ eines beliebigen imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{K}$ betrachtet wird. Interessanterweise erzielte Gramain dieses Ergebnis nicht mit einer Interpolationsreihen–Methode sondern mit der Schneiderschen Transzendenzmethode, indem er zuerst bewies, dass eine ganzwertige Funktion, die ein geringeres als das obige Wachstum aufweist, gewissen Funktionalgleichungen genügt. Hieraus konnte er folgern, dass das Wachstum der untersuchten Funktion dann sogar so gering sein muss, dass man die Algebraizität der Funktion aus einem Satz von Waldschmidt aus der bereits erwähnten Arbeit [47] folgern kann. Einen Beweis des Satzes von Gramain, der Interpolationsdeterminanten anstelle des Siegelschen Lemmas benutzt, findet man bei Ably und M'Zari [1]. Allerdings wird auch hier nicht die korrekte Größe der Wachstumslücke gewonnen.

Im dritten Fall, dem *multiplikativen Fall*, werden Wachstumslücken innerhalb der ganzen Funktionen bestimmt, die auf einer geometrischen Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit einem $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ganze Werte, d.h. Werte in $\mathbb{Z}$, annehmen. Allerdings sind auch einige Arbeiten von Bézivin [5, 6] hierzu zu zählen, in denen anstelle von $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewisse Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ betrachtet werden, für die $u_n \sim q^n$ gilt.

Im Jahre 1933 zeigte Gel'fond [23], dass für jede ganztranszendente Funktion, die der Bedingung $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt, stets

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log |f|_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}$$

gilt und dass dies bestmöglich ist. 1967 verallgemeinerte er in [26] sein Ergebnis auf Funktionen, deren erste $s-1$ Ableitungen ganzwertige Funktionen auf einer geometrischen Folge sind.

In [54, 55] haben wir ein multiplikatives Analogon zu dem Ergebnis von Fridman bewiesen. Wir haben dort gezeigt, dass für jede ganztranszendente

Funktion f mit $f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log |f|_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4 \log q}$$

ist. Während FRIDMAN sein Ergebnis mit einer Interpolationsreihen–Methode erzielte, benutzten wir eine Transzendenzmethode, bei der mittels SIEGELS Lemma eine Hilfsfunktion konstruiert wird, von der wir zeigen, dass sie identisch verschwindet, wenn f ein geringeres Wachstum hat.

Untersuchungen von ganzwertigen ganzen Funktionen mehrerer Veränderlicher im multiplikativen Fall finden sich bei BUNDSCHUH [12], BÉZIVIN [4] und GRAMAIN [28]. GRAMAIN [28] und BUNDSCHUH [13] geben alternative Beweise des Ergebnisses von GEL'FOND aus dem Jahre 1933 via der SCHNEIDERschen Transzendenzmethode (vgl. auch WALDSCHMIDT [50]). Auch hier konnte, wie im additiven Fall, bisher die korrekte Größe der Wachstumslücke nicht mit einer Transzendenzmethode gewonnen werden. WALLISSER benutzt in [52, 53] ein q-Analogon der LAPLACE–BOREL–Transformation zum Beweis des GEL'FONDschen Satzes. Es zeigt sich allerdings, dass die hierbei abzuschätzenden Ausdrücke den Koeffizienten der von GEL'FOND betrachteten Interpolationsreihe entsprechen.

Ein Analogon zu dem Ergebnis von PERELLI und ZANNIER hat BÉZIVIN [9] im multiplikativen Fall bewiesen.

Soweit zu den drei Hauptfällen von Ganzwertigkeitsfragen, die in der Vergangenheit in der Literatur betrachtet worden sind. Der Vollständigkeit halber seien noch einige Ergebnisse im Bereich der ganzwertigen Funktionen erwähnt, die sich nicht direkt den drei Hauptrichtungen zuordnen lassen.

Hierzu gehören sicherlich die Arbeiten von BÉZIVIN [8, 7] und von PILA und RODRIGUEZ VILLEGAS [36], in denen auch Funktionen untersucht werden, die auf dünneren Mengen als im multiplikativen Fall, also etwa auf der Folge $(q^{n!})_{n \in \mathbb{N}}$, ganzwertig sind. Diese Arbeiten sind allesamt sehr interessante Anwendungen von Interpolationsreihen–Methoden.

Außerdem gibt es noch vereinzelte Untersuchungen von ganzwertigen Funktionen über nicht-archimedisch bewerteten Körpern. p-adische Versionen der Sätze von PÓLYA und PISOT findet man bei HILLIKER und STRAUS [31], LAOHAKOSOL, LOXTON und VAN DER POORTEN [32] und WELTER [54]. Da $|n|_p \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, betrachten die Autoren dieser Arbeiten allerdings keine ganze Funktionen. Statt Unterschranken für das Mindestwachstum von transzendenten ganzwertigen Funktionen zu geben, werden hier Unterschranken für deren Konvergenzradius bestimmt. Des weiteren hat Car in [15] und [16] Analoga zu den Sätzen über ganzwertige Funktionen im additiven bzw. imaginär-quadratischen Fall für ganzwertige ganze Funktionen über Funktionenkörper erzielt.

Wir wollen nun die für unsere Arbeit wesentlichen, bisher bekannten Wachstumslücken in einer Tabelle zusammenfassen. Wir werden auf diese Tabelle am Ende der Arbeit noch einmal zurückkommen. Es sei dazu A gleich $\mathbb{N}$ im additiven Fall, $\{q^n | n \in \mathbb{N}\}$ im multiplikativen Fall und $\mathbb{Z}[i]$ im imaginär-quadratischen Fall gesetzt, und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der nach wachsendem Betrag geordneten Elemente in A. Weiter sei B gleich $\mathbb{Z}$ im additiven und im multiplikativen Fall und $\mathbb{Z}[i]$ im imaginär-quadratischen Fall. Ist nun $s \in \{1, \infty\}$ und f eine ganztranszendente Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(u_n) \in B \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, s-1 \tag{1}$$

genügt, so gilt

Fall	$s = 1$	$s = \infty$
add.	$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{r} \geq \log 2$ Pólya (1915)	$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\lvert f\rvert_r}{r} \geq \log(1+e^{-1})$ Fridman (1968)
mult.	$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}$ Gel'fond (1933)	$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\lvert f\rvert_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}$ Welter (1999)
imag.-quadr. ($O_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[i]$)	$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{r^2} \geq \frac{\pi}{2e}$ Gramain (1981)	?

Nun können wir die neue Klasse von ganzwertigen ganzen Funktionen beschreiben, die wir in der vorliegenden Arbeit untersuchen. Alle bisherigen Untersuchungen von ganzwertigen ganzen Funktionen beschäftigten sich mit Funktionen, die einer Ganzwertigkeitsbedingung der Art (1) mit einem festen $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ genügen. Wir betrachten Funktionen, die anstelle von (1) für alle großen $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(u_n) \in B \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, s_n - 1 \tag{2}$$

genügen, wobei (s_n) eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist. Genauer betrachten wir in dieser Arbeit den Fall, dass die Folge (s_n) exponentielles Wachstum hat. Wir zeigen, dass man obige Wachstumsschranken für $s = \infty$ bereits erhält, wenn die Folge (s_n) hinreichend schnell wächst. Es reicht also aus, wenn an jeder Stelle u_n endlich viele Ableitungen ganzwertig sind.

Im ersten Kapitel untersuchen wir die obige Fragestellung im multiplikativen Fall. Wir schließen somit an unseren Artikel [55] an.

Im zweiten Kapitel betrachten wir den additiven Fall. Unter anderem verbessern wir dabei FRIDMANs Resultat von 1968. Außerdem leiten wir eine Unterschranke für das Wachstum von ganztranszendenten Funktionen her, die mit sämtlichen Ableitung an allen ganzen Zahlen ganze Werte annehmen.

Im dritten und letzten Kapitel betrachten wir schließlich den imaginär-quadratischen Fall. Wir erhalten dabei u.a. ein Analogon zum Satz von FRIDMAN für den imaginär-quadratischen Fall. Ein solches fehlte bisher in der Literatur gänzlich.

PÓLYA verwendete in seiner oben genannten Arbeit eine schwache Version des folgenden Eindeutigkeitssatzes, der auf CARLSON [17] zurückgeht: *Ist f eine ganze Funktion mit $\sigma(f) < \pi$ und $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f die Nullfunktion.* Die Funktion $\sin \pi z$ zeigt, dass dieser Satz bestmöglich ist. Die Bezeichnung Eindeutigkeitssatz leitet sich davon ab, dass man Klassen von Funktionen betrachtet - in CARLSONs Satz die ganzen Funktionen mit $\sigma(f) < \pi$ -, die auch immer die Linearkombinationen ihrer Mitglieder beinhalten. Ein Eindeutigkeitssatz besagt also, dass die Mitglieder der betrachteten Klasse durch ihr Werteverhalten auf einer bestimmten Folge eindeutig bestimmt sind. Solche Eindeutigkeitssätze nehmen einen zentralen Platz in der Theorie der ganzen Funktionen ein. Wir wollen aber nicht weiter hierauf eingehen und stattdessen auf die umfangreiche Literatur zu den ganzen Funktionen, wie z.B. den Monographien von BOAS [10] und LEVIN [33], verweisen.

Neben den Sätzen über ganzwertige Funktionen, leiten wir in jedem Kapitel einen zugehörigen Eindeutigkeitssatz her, das heißt, wir untersuchen Funktionen, die anstelle von (2) der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(u_n) = 0 \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, s_n - 1$$

für alle großen $n \in \mathbb{N}$ genügen. Ein Vergleich des Mindestwachstums von ganztranszendenten Funktionen, die einer solchen Bedingung genügen, und von solchen Funktionen, die die zugehörige Ganzwertigkeitsbedingung (2) erfüllen, liefert einige interessante Parallelen, aber auch gravierende Unterschiede, je nachdem wie schnell die Folge (s_n) anwächst.

Außerdem untersuchen wir in jedem Kapitel die Güte der von uns gefundenen Wachstumslücken, indem wir Funktionen konstruieren, die einerseits den Ganzwertigkeitsbedingungen genügen und andererseits ein geringes Wachstum haben. Dabei gewinnen wir u.a. auch eine bessere Oberschranke für das oben definierte α_1, von dem Fridman $\alpha_1 \leq \pi$ gezeigt hatte.

Am Ende der Arbeit findet sich eine Zusammenfassung der neu gefundenen Wachstumslücken. Außerdem formulieren wir dort einige Vermutungen, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine ständige Diskussionsbereitschaft und seine wertvollen Hinweise danken.

Symbolverzeichnis

Die in der vorliegenden Arbeit benutzten Symbole sind weitgehend kanonisch, die wesentlichen sind im Anschluß aufgelistet und erklärt:

$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$	die Mengen der ganzrationalen, rationalen, reellen, positiven reellen und komplexen Zahlen
$O_{\mathbb{K}}$	der Ganzheitsring des algebraischen Zahlkörpers $\mathbb{K}$
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$\lvert f \rvert_r$	$:= \max_{\lvert z \rvert \leq r} \lvert f(z) \rvert$
$[x]$	die größte ganzrationale Zahl unterhalb x, Gauss-Klammer
$f(x) = \mathcal{O}\left(g(x)\right)$	, falls $\frac{\lvert f(x) \rvert}{g(x)}$ bei dem Grenzübergang $x \to \infty$ beschränkt bleibt, und g eine positivwertige Funktion ist; das Landau-„Groß-oh"-Symbol
$f(x) = o\left(g(x)\right)$	, falls $\lim_{x \to \infty} \frac{\lvert f(x) \rvert}{g(x)}$ existiert und 0 ist, und g eine positivwertige Funktion ist; das Landau-„Klein-oh"-Symbol
$\log_+ x$	$:= \log \max\left(1, x\right)$
$\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^n$	$:= (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$, Multiindex
$\lvert \underline{\varkappa} \rvert$	$:= \sum_{i=1}^n \varkappa_i$
$\underline{\varkappa}!$	$:= \varkappa_1! \cdot \ldots \cdot \varkappa_n!$
$\overline{\lim}$	Limes superior
$\underline{\lim}$	Limes inferior

log bzw. arg bezeichnen immer den Hauptwert der Logarithmus– bzw. Argumentfunktion.

Leere Summen und leere Produkte sind als 0 bzw. 1 definiert.

Kapitel 1

Der multiplikative Fall

1.1 Definitionen und Resultate

In [54, 55] haben wir das Wachstumsverhalten von ganztranszendenten Funktionen untersucht, die mit sämtlichen Ableitungen auf einer geometrischen Progression ganzrationale Werte annehmen. Wir haben dort den folgenden Satz bewiesen.

Satz 1.1
Es sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt für jede ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ |f|_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}. \tag{1.1}$$

Bemerkung
Ist $\mathbb{K}$ der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $O_{\mathbb{K}}$ sein Ganzheitsring, so bleiben der vorstehende Satz und auch alle folgenden Sätze über ganzwertige Funktionen in diesem Kapitel gültig, wenn man statt $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sogar $q \in O_{\mathbb{K}}, |q| > 1$, voraussetzt, und in den Aussagen über das Wachstum der betrachteten Funktion $\log q$ durch $\log |q|$ ersetzt.

In diesem Kapitel wollen wir das Wachstumsverhalten von ganzen Funktionen f untersuchen, die für alle großen $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, \left[e^{\tau n^\lambda}\right]$$

mit festen $\tau, \lambda \in \mathbb{R}_+$ genügen.

Um dieses Ergebnis formulieren zu können, benötigen wir einige Definitionen und Bezeichnungen.

Ist f eine ganze Funktion, so setzen wir für $\kappa \in \mathbb{R}_+$

$$\rho_\kappa(f) := \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_+ \log_+ |f|_r}{\log^\kappa r}.$$

$\rho_1(f)$ entspricht also der klassischen Wachstumsordnung der ganzen Funktion f, die üblicherweise mit $\rho(f)$ bezeichnet wird. Auf der linken Seite der Ungleichung (1.1) steht $\rho_2(f)$.

Wir wollen einige einfache Eigenschaften von ρ_κ festhalten.

Lemma 1.2
Es sei P eine Polynomfunktion, und f, g seien ganze Funktionen. Dann gilt für jedes $\kappa \in \mathbb{R}_+$

(i) $\rho_\kappa(P) = 0$,

(ii) $\rho_\kappa(f+g) \leq \max\{\rho_\kappa(f), \rho_\kappa(g)\}$,

(iii) $\rho_\kappa(fg) \leq \max\{\rho_\kappa(f), \rho_\kappa(g)\}$.

Beweis
Der offensichtliche Beweis sei dem Leser überlassen. Den Fall $\kappa = 1$ findet man in der Literatur.

$\square$

Um die arithmetischen Voraussetzungen in unseren Sätzen zu formulieren, benötigen wir die folgende

Definition
Es seien $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$, $T \subset \mathbb{C}$ und f eine ganze Funktion. Wir sagen dann, dass f an a eine T-Stelle der Ordnung n (in Zeichen $\mathrm{ord}_T(f,a) = n$) besitzt, wenn $f^{(\nu)}(a) \in T$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(a) \notin T$ gilt. Ist $f^{(\nu)}(a) \in T$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$, so setzen wir $\mathrm{ord}_T(f,a) = +\infty$.

Bemerkung
Ist $T = \{0\}$, so ist $\mathrm{ord}_{\{0\}}(f, a)$ nichts anderes als die übliche Nullstellenordnung der Funktion f an a. Wir schreiben in diesem Fall $\mathrm{ord}_0(f, a)$ statt $\mathrm{ord}_{\{0\}}(f, a)$.

Bevor wir uns aber dem Studium der oben beschriebenen Klasse von ganzwertigen ganzen Funktionen zuwenden, wollen wir einen entsprechenden Eindeutigkeitssatz im Carlsonschen Sinne herleiten, d.h. wir wollen das Wachstumsverhalten von ganzen Funktionen untersuchen, die für alle großen $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(q^n) = 0 \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, \left[e^{\tau n^\lambda}\right]$$

mit festen $\tau, \lambda \in \mathbb{R}_+$ genügen. Wir werden diesen Eindeutigkeitssatz bei unseren Untersuchungen von ganzwertigen Funktionen anwenden.

Wir setzen für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| > 1$

$$\lambda_0(f; q) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \mathrm{ord}_0(f, q^n)}{\log n}.$$

Außerdem sei für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau_0(f; q; \lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log_+ \mathrm{ord}_0(f, q^n)}{n^\lambda}$$

gesetzt. Offensichtlich ist $\tau_0(f; q; \lambda) = +\infty$, falls $0 < \lambda < \lambda_0(f; q)$ ist, und $\tau_0(f; q; \lambda) = 0$, falls $\lambda_0(f; q) < \lambda < +\infty$ ist. Wir setzen $\tau_0(f; q) := \tau_0(f; q; \lambda_0(f; q))$, falls $0 < \lambda_0(f; q) < +\infty$ ist.

Dann gilt der folgende

Satz 1.3
Es sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| > 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(i) *Für jede ganze, nicht konstante Funktion f mit $\lambda_0(f; q) \geq \lambda$ gilt*

$$\rho_\lambda(f) \geq \frac{\tau_0(f; q; \lambda)}{\log^\lambda |q|}.$$

(ii) *Zu jedem $\tau \in \mathbb{R}_+$ existiert eine ganztranszendente Funktion g mit $\lambda_0(g; q) = \lambda$, $\tau_0(g; q) = \tau$ und $\rho_\lambda(g) = \tau / \log^\lambda |q|$.*

Bemerkungen

(i) Der Teil (i) ist der eigentliche Eindeutigkeitssatz. Aus (ii) folgt, dass (i) bestmöglich ist.

(ii) Neben dem Beweis des Satzes im nächsten Abschnitt geben wir in Abschnitt 1.5 noch einen alternativen Beweis für (i) mittels einer Interpolationsreihen–Methode.

Wenden wir uns nun den ganzwertigen Funktionen zu. Um das Werteverhalten der Funktionen zu beschreiben, definieren wir

$$\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f, q^n)}{\log n}.$$

Weiter setzen wir für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau_{\mathbb{Z}}(f;q;\lambda) := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log_+ \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f, q^n)}{n^{\lambda}}$$

und, falls $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) \in \mathbb{R}_+$ ist, $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q) := \tau_{\mathbb{Z}}(f;q;\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q))$.

Da für alle $a \in \mathbb{C}$ offensichtlich $\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f,a) \geq \operatorname{ord}_0(f,a)$ gilt, haben wir den folgenden Zusammenhang zwischen $\lambda_0(f;q)$ und $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q)$.

Lemma 1.4
Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| > 1$ und f eine ganze Funktion, so ist $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) \geq \lambda_0(f;q)$. Gilt $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) = \lambda_0(f;q) \in \mathbb{R}_+$, so ist $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q) \geq \tau_0(f;q)$.

Nun gilt der folgende Satz, der das Wachstumsverhalten ganzer Funktionen mit $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) > 0$ beschreibt. Wir werden den Satz in Abschnitt 1.4 beweisen.

Satz 1.5
Es sei $q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\lambda \in]0,2]$ und $\tau \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt für jede ganztranszendente Funktion f mit $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q;\lambda) \geq \tau$:

(i) *Ist $\lambda < 2$, so ist $\rho_\lambda(f) \geq \frac{\tau}{\log^\lambda q}$.*

(ii) *Ist $\lambda = 2$, so ist $\rho_2(f) \geq \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\log q}} + 1\right)^{-2} \frac{\tau}{\log^2 q}$.*

Insbesondere ist $\rho_2(f) \geq 1/(4\log q)$, falls $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q;2) = +\infty$ ist.

Bemerkungen

(i) Der Zusatz in (ii) für $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q;2) = +\infty$ verschärft offensichtlich Satz 1.1.

(ii) Aus Satz 1.3 (ii) folgt, dass die Aussage (i) im vorstehenden Satz bestmöglich ist. Sind nämlich $\lambda \in]0,2[$ und $\tau \in \mathbb{R}_+$, und bezeichnet g eine ganztranszendente Funktion gemäß Satz 1.3 (ii) mit $\lambda_0(g;q) = \lambda$, $\tau_0(g;q) = \tau$ und $\rho_\lambda(g) = \tau/\log^\lambda q$, so folgt mit Lemma 1.4 $\lambda_1 := \lambda_{\mathbb{Z}}(g;q) \geq \lambda_0(g;q) = \lambda$. Wäre $\lambda_1 > \lambda$, so wäre nach (i) im vorstehenden Satz $\rho_\lambda(g) \geq \tau_{\mathbb{Z}}(g;q;\lambda)/\log^\lambda q = +\infty$. Also ist $\lambda_1 = \lambda$. Wieder aus Lemma 1.4 folgt nun $\tau_{\mathbb{Z}}(g;q) \geq \tau_0(g;q) = \tau$ und somit

$$\rho_\lambda(g) = \frac{\tau}{\log^\lambda q} \leq \frac{\tau_{\mathbb{Z}}(g;q)}{\log^\lambda q}.$$

Über die Güte von Satz 1.1 und Satz 1.5 (ii) gibt der folgende Satz Auskunft, den wir in Abschnitt 1.6 beweisen.

Satz 1.6
Es sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann existiert eine ganztranszendente Funktion g mit $g^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\rho_2(g) \leq \frac{1}{2\log q}.$$

Bemerkungen

(i) In [55] findet sich dieser Satz mit der Behauptung $\rho_2(g) \leq 1/(4\log q)$. Der Beweis dort ist aber inkorrekt. Man vergleiche hierzu die Bemerkung auf Seite 25.

(ii) Der Beweis dieses Satzes benutzt eine Konstruktion, die auf der NEWTONschen Interpolationsreihe beruht, wie sie sich in ähnlicher Form auch bei GRAMAIN [27] und bei BUNDSCHUH und SHIOKAWA [14] findet.

(iii) Während die Wachstumslücken für ganze Funktionen f mit $\lambda_0(f;q) < 2$ bzw. $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) < 2$ übereinstimmen, zeigt der vorstehende Satz in Kombination mit Satz 1.5 (ii), dass sich die Wachstumslücken für ganze Funktionen mit $\lambda_0(f;q) > 2$ bzw. $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q) > 2$ sogar in der Funktion unterscheiden, in der das Mindestwachstum von f ausgedrückt wird, d.h. $\rho_{\lambda_0(f;q)}(f)$ bzw. $\rho_2(f)$.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, sind die Untersuchungen von ganzwertigen ganzen Funktionen eng mit denen von transzendenten Zahlen verknüpft. Wir benutzen im Beweis von Satz 1.5 für die untere Abschätzung eines gewissen Ausdrucks lediglich die Tatsache, dass der Betrag einer nicht-verschwindenden ganzrationalen Zahl stets größer oder gleich Eins ist. Würden wir statt dessen die so genannte Fundamentalungleichung benutzen, die eine Abschätzung des Betrags einer algebraischen Zahl nach unten gestattet, so könnten wir leicht einen um gewisse algebraische Voraussetzungen erweiterten Satz formulieren und beweisen, der sowohl Satz 1.5 als auch den klassischen Satz von HERMITE und LINDEMANN über die Transzendenz von e^{α} bei algebraischem $\alpha \neq 0$ beinhaltet. In der Tat ist es so, dass in [55] Satz 1.1 aus einer solchen Verallgemeinerung gefolgert wird.

Aus Satz 1.5 folgt aber noch folgender Spezialfall des Satzes von HERMITE–LINDEMANN.

Korollar 1.7
Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so ist $e^{\alpha} \notin \mathbb{N}$.

Beweis
Wir betrachten die Funktion $f(z) := \exp(\alpha z)$. Wäre $e^{\alpha} \in \mathbb{N}$, so würde für beliebiges $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(\sigma)}(q^n) = \alpha^{\sigma} \exp(\alpha q^n) = \alpha^{\sigma} \left(e^{\alpha}\right)^{q^n} \in \mathbb{Z}$$

gelten. Nach Satz 1.1 folgt hieraus $\rho_2(f) > 0$. Andererseits ist aber $\log |f|_r \leq \alpha r$ und somit $\rho_2(f) = 0$. Folglich ist unsere Annahme $e^{\alpha} \in \mathbb{N}$ unhaltbar.
$\square$

Bemerkung
Satz 1.5 behält seine Gültigkeit, wenn man voraussetzt, dass die $f^{(\sigma)}(q^n)$ im Ganzheitsring $O_{\mathbb{K}}$ eines festen imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{K}$ liegen. Man kann also sogar folgern, dass e^{α} nicht in $O_{\mathbb{K}}$ liegen kann, wenn $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist.

1.2 Beweis von Satz 1.3

1.2.1 Beweis von Teil (i)

Es seien $\lambda, \tau \in \mathbb{R}_+$ und f eine ganze, nicht konstante Funktion mit $\tau_0(f; q; \lambda) \geq \tau$. Wir können hier ohne Einschränkung $\tau_0(f; q; \lambda) > 0$ annehmen, da ansonsten nichts zu zeigen ist. Wir zeigen nun $\rho_\lambda(f) \geq \tau / \log^\lambda |q|$.

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\operatorname{ord}_0(f, q^n) \geq \left[\exp\left((\tau - \varepsilon) n^\lambda\right)\right] \tag{1.2}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

Es bezeichne $n(r, f)$ die Anzahl der Nullstellen von f in $0 < |z| \leq r$. Weiter sei $\kappa := \operatorname{ord}_0(f, 0)$. Dann besagt die Jensensche Formel (vgl. Theorem I.5 in Levin [33])

$$\int_0^r \frac{n(t, f)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log \left| \frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!} \right| - \kappa \log r.$$

Hieraus folgt sofort wegen der Monotonie von $n(r, f)$

$$n(r, f) \leq \int_r^{er} \frac{n(t, f)}{t} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left|f(ere^{i\theta})\right| d\theta + \mathcal{O}(1) \leq \log |f|_{er} + \mathcal{O}(1).$$

Aus der Definition von $\rho_\lambda(f)$ folgt, dass für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}_+$

$$\log |f|_{er} \leq \exp\left((\rho_\lambda(f) + \varepsilon) \log^\lambda r\right)$$

gilt. Somit haben wir

$$\frac{\log n(r, f)}{\log^\lambda r} \leq \rho_\lambda(f) + \varepsilon.$$

Andererseits ist aber wegen (1.2)

$$n(r, f) \geq \sum_{n=n_0}^{\left[\frac{\log r}{\log |q|}\right]} \left[\exp\left((\tau - \varepsilon) n^\lambda\right)\right] \geq \exp\left(\frac{\tau - 2\varepsilon}{\log^\lambda |q|} \log^\lambda r\right).$$

Kombiniert man die letzten beiden Aussagen, so erhält man

$$\rho_\lambda(f) \geq \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log n(r, f)}{\log^\lambda r} \geq \frac{\tau}{\log^\lambda |q|}.$$

1.2.2 Beweis von Teil (ii)

Es seien $\lambda, \tau \in \mathbb{R}_+$. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall: $\lambda = 1$
Da $\rho_1(f)$ die klassische Wachstumsordnung der Funktion f ist, folgt (ii) im Fall $\lambda = 1$ sofort aus bekannten Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Wachstumsordnung. Bezeichnet nämlich (z_n) die Folge, in der jedes q^m genau $[\exp(\tau m)]$ mal vorkommt, so ist die Wachstumsordnung des zur Nullstellenfolge (z_n) zugehörigen kanonischen Produktes gleich dem Konvergenzexponenten der Nullstellenfolge (vgl. Theorem I.7 in Levin [33]). Der Konvergenzexponent ist $\tau / \log |q|$, da

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\exp(\tau m)] \left| \frac{1}{q^m} \right|^{\kappa} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} e^{(\tau - \kappa \log|q|)m} \text{ konvergiert.}$$

Die rechte Reihe konvergiert genau für $\kappa > \tau / \log |q|$. Das kanonische Produkt hat folglich alle im Satz geforderten Eigenschaften.

2. Fall: $\lambda < 1$
Wir betrachten die durch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

definierte Funktion einer komplexen Veränderlichen z, die mit g bezeichnet sei. Wir zeigen nun, dass g eine ganze Funktion mit $\rho_\lambda(g) \le \tau / \log^\lambda |q|$ ist. Da $\lambda_0(g; q) = \lambda$ und $\tau_0(f; q) = \tau$ ist, muss dann aber nach Teil (i) Gleichheit gelten.

Es sei $r \in \mathbb{R}_+$ groß. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $m := m(r) \in \mathbb{N}_0$, so dass $|q|^{m-1} \le r < |q|^m$ gilt. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\log \left| \prod_{n=0}^{m} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \right| \\ &\le \log \prod_{n=0}^{m} \left(1 + |q|^{m-n}\right)^{\left[e^{\tau m^\lambda}\right]} \\ &\le \exp\left(\tau m^\lambda + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Außerdem ist wegen $\log(1+x) \le x$ für $x \in \mathbb{R}_+$

$$\log \left| \prod_{n=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \right| \quad \le \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left(\tau n^\lambda + (m-n) \log|q|\right).$$

Wir betrachten nun die Funktion einer reellen Veränderlichen $h(x) := \tau x^\lambda + (m-x)\log|q|$. h' ist offensichtlich monoton fallend, und für großes m ist $h'(m) \le -\frac{1}{2}\log|q| < 0$. Somit haben wir nach dem Mittelwertsatz

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left(h(n) - h(m)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(h'(m)n\right) = \mathcal{O}\left(1\right).$$

Ist also r und damit auch m genügend groß, so gilt

$$\begin{aligned} \log \left| \prod_{n=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \right| &\le \exp\left(h(m)\right) \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left(h(n) - h(m)\right) \\ &\le \exp\left(h(m) + \mathcal{O}\left(1\right)\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wegen $m = \log r / \log|q| + \mathcal{O}\left(1\right)$ folgt nun aus (1.3) und (1.4), dass g eine ganze Funktion mit $\rho_\lambda(g) \le \tau / \log^\lambda |q|$ ist.

3. Fall: $\lambda > 1$
Wir betrachten die durch das unendliche Produkt

$$g(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{q^n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right) \right\}^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

definierte Funktion und zeigen wiederum, dass g eine ganze Funktion mit $\rho_\lambda(g) \le \tau / \log^\lambda |q|$ ist.

Wie zuvor sei $r \in \mathbb{R}_+$ wieder groß, $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ und $m := m(r) \in \mathbb{N}$ so, dass $|q|^{m-1} \le r < |q|^m$ gilt.

Wir schätzen wieder zunächst den Anfang des Produktes ab. Es ist

$$\begin{aligned}
&\log \prod_{n=0}^{m} \left| \left(1 - \frac{z}{q^n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq\ & \sum_{n=0}^{m} \exp\left(\tau n^\lambda + \tau\lambda(m-n)n^{\lambda-1} + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right) \qquad (1.5) \\
=\ & \exp\left(\tau m^\lambda + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right),
\end{aligned}$$

da die Funktion einer reellen Veränderlichen $h(x) := x^\lambda + \lambda(m-x)x^{\lambda-1}$ ihr Maximum auf $\mathbb{R}_+$ in $x = m$ annimmt.

Für $n > m$ ist $|zq^{-n}| < |q|^{m-n} < 1$ und somit

$$\log(1 - zq^{-n}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(zq^{-n})^j.$$

Außerdem ist

$$\sum_{j=\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]+1}^{\infty} |q|^{(m-n)j} \leq |q|^{(m-n)\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}} \sum_{j=0}^{\infty} |q|^{-j}.$$

Also haben wir für $n > m$

$$\begin{aligned}
&\log \left| \left(1 - \frac{z}{q^n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
&= \operatorname{Re}\left\{ -\left[e^{\tau n^\lambda}\right] \sum_{j=\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right\} \qquad (1.6) \\
&\leq e^{\tau n^\lambda} \sum_{j=\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|} n^{\lambda-1}\right]+1}^{\infty} |q|^{(m-n)j} \\
&\leq c(q) \exp\left(\tau n^\lambda + \tau\lambda(m-n)n^{\lambda-1}\right) \\
&= c(q) \exp\left(\tau h(n)\right),
\end{aligned}$$

mit einer von q abhängigen, aber von m unabhängigen Konstante $c(q)$. Die Funktion h ist für $x > m$ monoton fallend und hat eine Nullstelle in $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}m$.

Somit folgt aus (1.6)

$$\begin{aligned}&\log \prod_{n=m+1}^{\left[\frac{\lambda}{\lambda-1}m\right]+1} \left| \left(1-\frac{z}{q^n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|}n^{\lambda-1}\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\ &\leq \exp\left(h(m)+\mathcal{O}\left(\log m\right)\right).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Für $n > \frac{\lambda}{\lambda-1}m+1$, ist $h(n) = n^{\lambda-1}(\lambda m - (\lambda-1)n) \leq -(\lambda-1)n^{\lambda-1}$. Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{\left[n^{\lambda-1}\right]}$ den Konvergenzradius 1 hat, folgt somit aus (1.6)

$$\begin{aligned}&\log \prod_{n=\left[\frac{\lambda}{\lambda-1}m\right]+2}^{\infty} \left| \left(1-\frac{z}{q^n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{\lambda\tau}{\log|q|}n^{\lambda-1}\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{q^n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\ &\leq c(q) \sum_{n=\left[\frac{\lambda}{\lambda-1}m\right]+2}^{\infty} \exp\left(-\tau(\lambda-1)n^{\lambda-1}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(1\right).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Da $m = \frac{\log r}{\log|q|} + \mathcal{O}\left(1\right)$ ist, folgt nun aus (1.5), (1.7) und (1.8), dass g eine ganze Funktion mit $\rho_\lambda(g) \leq \tau/\log^\lambda|q|$ ist.

1.3 Zwei Hilfssätze aus der Theorie der transzendenten Zahlen

Um unsere Ergebnisse über ganzwertige Funktionen beweisen zu können, benötigen wir zwei Hilfssätze aus der Theorie der transzendenten Zahlen.

Der erste Hilfssatz spielt eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Hilfsfunktionen. Obwohl er für beliebige algebraische Zahlkörper formuliert werden kann, formulieren wir ihn hier in dem von uns benötigten Spezialfall.

Lemma 1.8 (Siegelsches Lemma)
Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der rationalen Zahlen oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $O_\mathbb{K}$ sein Ganzheitsring. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Die Beträge der Koeffizienten $a_{ij} \in O_\mathbb{K}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$

seien durch A beschränkt. Dann gibt es eine von n, m, A und den a_{ij} unabhängige Konstante $C \in \mathbb{R}_+$, so dass alle Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

durch ein $(x_1, \ldots, x_n) \in O_{\mathbb{K}}^n \setminus \{\underline{0}\}$ erfüllt sind, für das

$$\max_{1 \le j \le n} |x_j| \le (CnA)^{\frac{m}{n-m}}$$

gilt.

Bemerkung
Den Ausdruck $\frac{m}{n-m}$ nennt man SIEGEL–Exponent.

Beweis
Dies ist Hilfssatz 31 in SCHNEIDER [43] in dem Spezialfall, dass $\mathbb{K}$ der Körper der rationalen Zahlen oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist.

$\square$

Lemma 1.9 (SCHWARZsches Lemma)
Sei $0 < r \le R$ und $f \ne 0$ holomorph in $|z| \le R$. f habe n Nullstellen in $|z| \le r$, wobei jede gemäß Vielfachheit gezählt sei. Dann gilt

$$\log |f|_r \le \log |f|_R - n \log \frac{R^2 + r^2}{2rR}.$$

Beweis
Dies ist Lemma 1.3.1 in WALDSCHMIDT [48].

$\square$

1.4 Beweis von Satz 1.5

Es sei $\lambda \in]0, 2], \tau \in \mathbb{R}_+$ und f eine ganze Funktion mit $\tau_{\mathbb{Z}}(f; q; \lambda) \ge \tau$ und

$$\rho_\lambda(f) < \begin{cases} \frac{\tau}{\log^\lambda q}, & \text{falls } \lambda < 2 \\ \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\log q}} + 1\right)^{-2} \frac{\tau}{\log^\lambda q}, & \text{falls } \lambda = 2. \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass f dann keine transzendente Funktion sein kann, d.h. dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X,Y] \setminus \{0\}$ existiert, so dass die ganze Funktion $F(z) = P(z, f(z))$ identisch verschwindet.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_0 := N_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}}(f, q^n) \geq \exp\big((\tau - \varepsilon)n^\lambda\big) \tag{1.9}$$

ist.

Wegen der Voraussetzung über $\rho_\lambda(f)$, existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\gamma < \begin{cases} \tau, & \text{falls } \lambda < 2 \\ \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\log q}} + 1\right)^{-2} \tau, & \text{falls } \lambda = 2, \end{cases}$$

so dass für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}_+$

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma \frac{\log^\lambda r}{\log^\lambda q}\right) \tag{1.10}$$

ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass sogar

$$\gamma < \begin{cases} \tau - \varepsilon, & \text{falls } \lambda < 2 \\ \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\log q}} + 1\right)^{-2} (\tau - \varepsilon), & \text{falls } \lambda = 2 \end{cases} \tag{1.11}$$

gilt.

Sei $N \in \mathbb{N}$ stets hinreichend groß gewählt; insbesondere größer als N_0 und so groß, dass (1.10) für alle $r \geq q^N$ gilt.

Wir setzen $S_n := \left[e^{(\tau-\varepsilon)n^\lambda}\right]$ für $n \in \mathbb{N}$, $H := \left[S_N N^{1/2}\right] + 1$ und $K := \left[N^{3/2}\right] + 1$.

$T, \theta \in \mathbb{R}_{>1}$ sind Parameter, an die im Verlauf des Beweises Bedingungen gestellt werden und die dann im 4. Beweisschritt für $\lambda < 2$ und $\lambda = 2$ gesondert gewählt werden. Die Aussagen der Schritte 1 bis 3 gelten also nur unter der Annahme, dass man geeignete θ und T finden kann, die diesen Bedingungen genügen.

1. Schritt: Es existieren $a_{h,k} \in \mathbb{Z}$, $(h = 0, \ldots, H-1;\ k = 0, \ldots, K-1)$, *mit*

$$0 < \max_{h,k} |a_{h,k}| \leq \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}(N)\right),$$

so dass die ganze Funktion

$$F(z) := \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} z^h f(z)^k$$

für alle $n \in \{N, \ldots, [TN]\}$ *der Bedingung*

$$\mathrm{ord}_0(F, q^n) \geq S_N$$

genügt.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$0 = F^{(\sigma)}(q^n) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} \sum_{\substack{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ |\underline{\varkappa}| = \sigma}} \sigma! \binom{h}{\varkappa_{k+1}} q^{n(h-\varkappa_{k+1})} \prod_{j=1}^{k} \frac{f^{(\varkappa_j)}(q^n)}{\varkappa_j!}$$

für $n = N, \ldots, [TN]$ und $\sigma = 0, \ldots, S_N - 1$. Dies sind $S_N([TN] - N + 1)$ Gleichungen in den $HK \geq S_N N^2$ Unbekannten $a_{h,k}$. Ist $\gamma T^\lambda < \tau - \varepsilon$, so ist $\log |f|_{q^{TN}} \leq S_N$, falls N genügend groß gewählt wurde, und für obige n und σ gilt

$$\left|f^{(\sigma)}(q^n)\right| = \left| \frac{\sigma!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi| = q^n + 1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - q^n)^{\sigma+1}} \right| \leq \sigma! \exp\left(S_N + \mathcal{O}(N)\right).$$

Berücksichtigt man noch, dass die Kardinalität von $\left\{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \,|\, |\underline{\varkappa}| = \sigma\right\}$ gleich $\binom{\sigma+k}{k}$ ist, so ergibt sich für die Koeffizienten des obigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ |\underline{\varkappa}| = \sigma}} \sigma! \binom{h}{\varkappa_{k+1}} q^{n(h-\varkappa_{k+1})} \prod_{j=1}^{k} \frac{f^{(\varkappa_j)}(q^n)}{\varkappa_j!} \right| \\ \leq\ & \sigma! 2^{\sigma+K+H} \exp\left(HTN \log q + KS_N + K \cdot \mathcal{O}(N)\right) \\ \leq\ & \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(N^2\right)\right). \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus dem SIEGELschen Lemma. Man beachte, dass der SIEGEL–Exponent von der Größenordnung $\mathcal{O}(N^{-1})$ ist.

2. Schritt: Für alle $M \geq N$ und $S \in \{S_{M-1}, \dots, S_M\}$ gilt

$$\forall m \in \{M, \dots, [TM]\} : \ \mathrm{ord}_0(F, q^m) \geq S. \tag{$I_{M,S}$}$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Der 1. Schritt liefert uns die Induktionsverankerung (I_{N,S_N}).

Es sei $(I_{M,S})$ bereits gezeigt.

Wir zeigen nun:

1.) Ist $S_{M-1} \leq S < S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M,S+1})$.

2.) Ist $S = S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M+1,S})$.

Dann gilt $(I_{N,S_N}) \underset{2.)}{\Longrightarrow} (I_{N+1,S_N}) \underset{1.)}{\Longrightarrow} (I_{N+1,S_N+1}) \underset{1.)}{\Longrightarrow} \dots \underset{1.)}{\Longrightarrow} (I_{N+1,S_{N+1}}) \underset{2.)}{\Longrightarrow} (I_{N+2,S_{N+1}}) \underset{1.)}{\Longrightarrow} \dots$, und die Behauptung des 2. Schritts ist gezeigt.

Zu 1.): Es ist $S_{M-1} \leq S < S_M$. F hat wegen $(I_{M,S})$ mindestens $S([TM] - M + 1)$ Nullstellen in $|z| \leq q^{TM} + 1$. Mit dem SCHWARZschen Lemma haben wir also

$$\begin{aligned}
\log |F|_{q^{TM}+1} &\leq \log |F|_{q^{T\theta M}} - S([TM] - M + 1) \log \frac{q^{2\theta TM}}{2q^{(\theta+1)TM}} \\
&= \log |F|_{q^{T\theta M}} - S(T-1)T(\theta-1)M^2 \log q + S \cdot \mathcal{O}(M) .
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Ist nun $\gamma\theta^\lambda T^\lambda < \tau - \varepsilon$, so ist nach (1.10)

$$\log |f|_{q^{\theta TM}} \leq S_{M-1} \leq S,$$

falls nur N (und damit auch M) hinreichend groß ist. Hieraus ergibt sich, wenn man Schritt 1 und die Wahl von H und K berücksichtigt

$$\begin{aligned}
\log |F|_{q^{\theta TM}} &\leq \log H + \log K + \log \max |a_{h,k}| + \theta THM \log q + K \log |f|_{q^{\theta TM}} \\
&\leq S \cdot \mathcal{O}\left(M^{3/2}\right) .
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$h(\theta, T) := T(T-1)(\theta-1) \log q,$$

so folgt aus der CAUCHYschen Integralformel und (1.12) für $m \in \{M, \ldots, [TM]\}$

$$\begin{aligned}
&\left|F^{(S)}(q^m)\right| \\
= &\left|\frac{S!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=q^m+1} \frac{F(\xi)d\xi}{(\xi - q^m)^{S+1}}\right| \\
\leq\ & S! \exp\left(-h(\theta,T)SM^2 + S \cdot \mathcal{O}\left(M^{3/2}\right)\right) \qquad (1.13) \\
\leq\ & \exp\left(S\left(\log S_M - h(\theta,T)M^2 + \mathcal{O}\left(M^{3/2}\right)\right)\right) \\
\leq\ & \exp\left(S\left((\tau - \varepsilon)M^\lambda - h(\theta,T)M^2 + \mathcal{O}\left(M^{3/2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Kann man nun unter Berücksichtigung der übrigen an T und θ gestellten Bedingungen diese so wählen, dass $h(\theta,T) > 0$ im Fall $\lambda < 2$ und $\tau - \varepsilon - h(\theta,T) < 0$ für $\lambda = 2$ gilt, so ist also $\left|F^{(\sigma)}(q^m)\right| < 1$, falls N hinreichend groß ist. Somit muss $F^{(\sigma)}(q^m) = 0$ sein, da $F^{(\sigma)}(q^m) \in \mathbb{Z}$ ist. Die Wahl der Parameter erfolgt in Schritt 4.

Zu 2.): Im Fall $S = S_M$ verläuft der Beweis vollkommen analog. Man schätzt mit dem SCHWARZschen Lemma $|F|_{q^{T(M+1)}+1}$ ab und folgert dann wieder mit der CAUCHYschen Integralformel, dass $\left|F^{(\sigma)}(q^m)\right| < 1$ für $m \in \{[TM]+1, \ldots, [T(M+1)]\}$ und $\sigma \in \{0, \ldots, S-1\}$ gilt. Insbesondere ergeben sich dieselben Bedingungen an T und θ.

3. Schritt: Es ist $F \equiv 0$. Somit ist f eine algebraische Funktion.

Dies folgt sofort aus Satz 1.3 (i). Denn nach Lemma 1.2, (1.10), (1.11) und der Konstruktion von F gilt $\rho_\lambda(F) \leq \gamma/\log^\lambda q < (\tau-\varepsilon)/\log^\lambda q$. Andererseits ergibt sich aus dem 2. Schritt $\lambda_0(F;q) \geq \lambda$ und $\tau_0(F;q;\lambda) \geq \tau - \varepsilon$. Somit ist F nach dem Eindeutigkeitssatz eine konstante Funktion.

4. Schritt: Wahl der Parameter T und θ.

zu (i): $\lambda < 2$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma T^\lambda \theta^\lambda < \tau - \varepsilon \quad \text{und} \quad h(\theta,T) = T(T-1)(\theta-1)\log q > 0$$

ist. Setzt man nun $\theta := T := 1 + \delta$ mit einem von $\gamma, \tau, \varepsilon$ und λ abhängigen $\delta \in \mathbb{R}_+$, so ist beides offensichtlich erfüllt, da nach (1.11) $\gamma < \tau - \varepsilon$ ist.

zu (ii): $\lambda = 2$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma T^2\theta^2 < \tau - \varepsilon \;\text{ und }\; \tau - \varepsilon - h(\theta, T) < 0$$

ist.

Dazu maximieren wir die Funktion

$$g(\theta, T) := \frac{1}{\theta^2 T^2}$$

unter der Nebenbedingung

$$h(\theta, T) - \tau = T(T-1)(\theta - 1)\log q - \tau = 0.$$

Es ist also

$$\theta = 1 + \frac{\tau}{T(T-1)\log q}.$$

Setzt man dies in $g(\theta, T)$ ein, so ergibt eine leichte Rechnung, dass die Funktion ihr Maximum in

$$T = 1 + \sqrt{\frac{\tau}{\log q}}$$

annimmt. Aus (1.11) ergibt sich nun

$$\gamma < \frac{\tau - \varepsilon}{\theta^2 T^2} = \frac{\tau - \varepsilon}{\left(2\sqrt{\frac{\tau}{\log q}} + 1\right)^2},$$

und außerdem ist $\tau - \varepsilon - h(\theta, T) = -\varepsilon < 0$.

1.5 Über Newtonsche–Interpolationsreihen und ein weiterer Beweis für Satz 1.3 (i)

Es sei $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Setzen wir $P_0(z) := 1$ und $P_n(z) := (z - z_n)P_{n-1}(z)$ für $n \in \mathbb{N}$, so ergibt sich aus der für $\xi \neq z, z_{n+1}$ gültigen Gleichung

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_{n+1}} + \frac{z - z_{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_{n+1})}$$

induktiv bei $\xi \neq z, z_1, z_2, \ldots$

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_\nu(z)}{P_{\nu+1}(\xi)} + \frac{P_n(z)}{(\xi - z)P_n(\xi)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Es sei nun f eine ganze Funktion. Multipliziert man die vorstehende Gleichung mit $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ und integriert dann über $|\xi| = r$ mit einem $r \in \mathbb{R}_+$, welches so groß gewählt sei, dass sämtliche Nullstellen von $P_n(\xi)$ und $(\xi - z)P_n(\xi)$ innerhalb von $|\xi| = r$ liegen, so erhält man für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu P_\nu(z) + R_n(z) \tag{1.14}$$

mit

$$A_\nu := A_\nu(f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{P_{\nu+1}(\xi)} \tag{1.15}$$

und

$$R_n(z) := \frac{P_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)P_n(\xi)}. \tag{1.16}$$

Konvergiert $R_n(z)$ bei $n \to \infty$ lokal gleichmäßig gegen die Nullfunktion, so gilt in ganz $\mathbb{C}$ die eindeutige Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu P_\nu(z). \tag{1.17}$$

Definition
Die Reihe rechts in (1.17) heißt die Newton*sche Interpolationsreihe von f bezüglich der Folge* (z_n). Die z_n heißen die *Interpolationsstellen*, und die $A_\nu(f)$ heißen die *Interpolationskoeffizienten von f bezüglich der Interpolationsstellenfolge* (z_n).

Als erste Anwendung der Newtonschen Interpolationsreihe einer ganzen Funktion wollen wir einen alternativen Beweis für Satz 1.3 (i) geben.

Es seien $\varepsilon, \tau, \lambda \in \mathbb{R}_+, \varepsilon < \tau$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| > 1$. Für $\mu \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $t_\mu := \left[\exp((\tau - \varepsilon)\mu^\lambda)\right]$. Dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte $m \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \{1, \dots, t_m\}$, so dass $n = \sum_{\mu=0}^{m-1} t_\mu + t$ ist. Wir setzen $z_n := q^m$ und erhalten

$$P_{m,t}(z) := P_n(z) = (z - q^m)^t \prod_{\mu=0}^{m-1} (z - q^\mu)^{t_\mu}.$$

Ist f eine ganze Funktion, so gilt nach (1.14) für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n P_n(z) + R_N(z) \\ &=: \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{t=1}^{t_m} A_{m,t} P_{m,t}(z) + \sum_{t=1}^{T-1} A_{M,t} P_{M,t}(z) + R_{M,T}(z), \end{aligned}$$

falls $N = \sum_{\mu=0}^{M-1} t_\mu + T$ mit $T \in \{1, \ldots, t_M\}$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun folgendes

Lemma 1.10 (Ein Konvergenzlemma)
Ist $\rho_\lambda(f) < \frac{\tau-\varepsilon}{\log^\lambda |q|}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{t_m} A_{m,t} P_{m,t}(z). \tag{1.18}$$

Beweis
Wegen $\rho_\lambda(f) < \frac{\tau-\varepsilon}{\log^\lambda |q|}$ gilt

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma \frac{\log^\lambda r}{\log^\lambda |q|}\right)$$

mit einen $0 < \gamma < \tau - \varepsilon$ für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}_+$. Folglich kann man $\theta \in \mathbb{R}_{>1}$ so wählen, dass $\gamma\theta^\lambda < \tau - \varepsilon$ ist.

Es sei nun $\delta \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \delta$.

Wir setzen $r_M := |q|^{\theta M}$. Nach (1.16) gilt

$$R_N(z) = R_{M,T}(z) = \frac{P_{M,T}(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_M} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z) P_{M,T}(\xi)},$$

wenn $N = \sum_{\mu=0}^{M-1} t_\mu + T$ mit einem $T \in \{1, \ldots, t_M\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass $R_n(z)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Wir können also annehmen, dass N und somit auch M groß sind. Folglich können wir $|z| \leq r_M/2$ und somit auch

$$|\xi - z| \geq r_M/2 \tag{1.19}$$

auf $|\xi| = r_M$ annehmen.

Weiter haben wir für große M

$$|f|_{r_M} \leq \exp\left(e^{\gamma\theta^\lambda M^\lambda}\right) \leq \exp\left(\left[e^{(\tau-\varepsilon)(M-1)^\lambda}\right]\right) = \exp(t_{M-1}) \leq \exp(N). \tag{1.20}$$

Es ist

$$\begin{aligned} |P_{M,T}(z)| \leq & \left(|z| + |q|^M\right)^T \prod_{\mu=0}^{M-1} (|z| + |q|^\mu)^{t_\mu} \\ \leq & |q|^{\sum_{\mu=0}^{M-1} \mu t_\mu + MT} \prod_{\mu=0}^{M-1} \left(\frac{\delta}{|q|^\mu} + 1\right)^{t_\mu} \left(\frac{\delta}{|q|^M} + 1\right)^T \\ \leq & c(q,\delta)^N \, |q|^{MN} \end{aligned} \tag{1.21}$$

mit $c(q,\delta) := \prod_{n=0}^\infty (1 + \delta\,|q|^{-n}) > 1$. Das unendliche Produkt konvergiert, da die Reihe $\sum_{n=0}^\infty q^{-n}$ absolut konvergiert.

Auf $|\xi| = r_M$ gilt

$$\begin{aligned} |P_{M,T}(\xi)| \geq & \prod_{\mu=0}^{M-1} \left(|q|^{\theta M} - |q|^\mu\right)^{t_\mu} \left(|q|^{\theta M} - |q|^M\right)^T \\ = & |q|^{\theta M \sum_{\mu=0}^{M-1} t_\mu + \theta M T} \prod_{\mu=0}^{M-1} \left(1 - |q|^{\mu - \theta M}\right)^{t_\mu} \left(1 - |q|^{(1-\theta)M}\right)^T \\ \geq & c_1(q,\theta)^N \, |q|^{\theta M N} \end{aligned} \tag{1.22}$$

mit $0 < c_1(q,\theta) := (1 - |q|^{1-\theta}) < 1$.

Aus (1.19), (1.20), (1.21) und (1.22) folgt nun mittels der Standardabschätzung

$$|R_{M,T}(z)| \leq \exp\left((1-\theta)MN \log|q| + \mathcal{O}(N)\right)$$

und somit $\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ wegen $\theta > 1$.

□

Hieraus folgt nun Satz 1.3 (i) wie folgt:
Ist f eine ganze Funktion mit $\tau_0(f;q;\lambda) \geq \tau$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > N_0$

$$\mathrm{ord}_0(f, q^m) \geq t_m$$

gilt.

Wir setzen nun $Q(z) := \prod_{\mu=0}^{N_0}(z-q^\mu)^{t_\mu}$ und betrachten die ganze Funktion $F(z) := Q(z)f(z)$. Offensichtlich gilt

$$\operatorname{ord}_0(F, q^m) \geq t_m \tag{1.23}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Ist $\rho_\lambda(f) < \tau/\log^\lambda|q|$, so wählen wir ε so klein, dass sogar $\rho_\lambda(f) < (\tau-\varepsilon)/\log^\lambda|q|$ gilt. Nach Lemma 1.2 ist auch $\rho_\lambda(F) < (\tau-\varepsilon)/\log^\lambda|q|$ und somit lässt sich F nach dem Konvergenzlemma als Interpolationsreihe (1.18) darstellen mit

$$A_{m,t}(F) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_m} \frac{F(\xi)d\xi}{P_{m,t+1}(\xi)}, & \text{falls } 1 \leq t < t_m \\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_m} \frac{F(\xi)d\xi}{P_{m+1,1}(\xi)}, & \text{falls } t = t_m. \end{cases} \tag{1.24}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt also für $1 \leq t < t_m$

$$\begin{aligned} A_{m,t}(F) =& \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\sigma=0}^{t_\mu-1} \frac{1}{(t_\mu-1)!}\left[\frac{d^{t_\mu-1-\sigma}}{d\xi^{t_\mu-1-\sigma}}\left(\frac{(\xi-q^\mu)^{t_\mu}}{P_{m,t+1}(\xi)}\right)\right]_{\xi=q^\mu} F^{(\sigma)}(q^\mu) \\ &+ \sum_{\sigma=0}^{t}\frac{1}{t!}\left[\frac{d^{t-\sigma}}{d\xi^{t-\sigma}}\left(\frac{(\xi-q^m)^{t+1}}{P_{m,t+1}(\xi)}\right)\right]_{\xi=q^m} F^{(\sigma)}(q^m) \end{aligned} \tag{1.25}$$

und für $t = t_m$

$$\begin{aligned} A_{m,t_m}(F) =& \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\sigma=0}^{t_\mu-1} \frac{1}{(t_\mu-1)!}\left[\frac{d^{t_\mu-1-\sigma}}{d\xi^{t_\mu-1-\sigma}}\left(\frac{(\xi-q^\mu)^{t_\mu}}{P_{m,t+1}(\xi)}\right)\right]_{\xi=q^\mu} F^{(\sigma)}(q^\mu) \\ &+ \frac{1}{P'_{m+1,1}(q^{m+1})}F(q^{m+1}). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Nach (1.23) ist $F^{(\sigma)}(q^m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in \{0, \ldots, t_m - 1\}$. Aus (1.25) und (1.26) folgt somit $A_{m,t} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \{1, \ldots, t_m\}$. Also ist nach dem Konvergenzlemma $F \equiv 0$. Dies impliziert aber $f \equiv 0$, da die Polynomfunktion Q nur endlich viele Nullstellen hat.

1.6 Beweis von Satz 1.6

1.6.1 Das Beweisprinzip

Wir wollen zuerst kurz die Idee skizzieren, die den Beweisen der Sätze 1.6, 2.5 und 3.4 zugrundeliegt.

Die Aufgabe, die in den Beweisen dieser Sätze zu lösen ist, lässt sich wie folgt beschreiben: Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $O_{\mathbb{K}}$ sein Ganzheitsring. Zu einer gegebenen Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von paarweise verschiedenen Zahlen in $O_{\mathbb{K}}$ soll nun eine ganztranszendente Funktion $g(z)$ mit der Eigenschaft $g^{(\sigma)}(u_n) \in O_{\mathbb{K}}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$ und einem möglichst geringen Wachstum konstruiert werden.

Dazu konstruieren wir zunächst eine *geeignete* Interpolationsstellenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{u_j | j \in \mathbb{N}_0\}$. *Geeignet* bedeutet hier, dass zu jedem Tupel $(\sigma, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existieren soll, so dass

$$\mathrm{card}(\{j \in \{1, \dots, N\} \,|z_j = u_n\}) = \sigma$$

gilt.

Wir betrachten dann die NEWTONsche Interpolationsreihe einer ganzen Funktion f bezüglich der Interpolationsstellenfolge (z_n). Wie bei den Gleichungen (1.25) und (1.26) sind die Interpolationskoeffizienten $A_n(f)$ Linearkombinationen in gewissen $f^{(\sigma)}(u_j)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, die von der gewählten ganzen Funktion f unabhängig sind, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren von f unabhängige $a_{j,\sigma}(n-1) \in \mathbb{K}$, so dass

$$A_{n-1}(f) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{t_j} a_{j,\sigma}(n-1) f^{(\sigma)}(u_j).$$

Ist nun $z_{n+1} = u_{j^*}$, so existiert ein $\sigma^* \in \mathbb{N}_0$ und ein Polynom $Q_{n+1}(z) \in \mathbb{K}[z]$ mit $Q_{n+1}(u_{j^*}) \neq 0$, so dass $P_{n+1}(z) = (z - z_{n+1})P_n(z) = (z - u_{j^*})^{\sigma^*+1} Q_{n+1}(z)$ ist. Es ist $a_{j^*,\sigma^*}(n) = (\sigma^*!\, Q_{n+1}(u_{j^*}))^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und mit gewissen $a_{j,\sigma}(n) \in \mathbb{K}$ gilt

$$A_n(f) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{t_j} a_{j,\sigma}(n) f^{(\sigma)}(u_j) + a_{j^*,\sigma^*}(n) f^{(\sigma^*)}(u_{j^*}). \tag{1.27}$$

Die Idee ist nun folgende: Man ersetzt die $f^{(\sigma)}(u_j)$ durch $g_{j,\sigma} \in O_{\mathbb{K}}$, die man rekursiv definieren kann, da, wie wir gerade gesehen haben, bei dem

Übergang von $n-1$ nach n genau ein $f^{(\sigma^*)}(u_{j^*})$ neu hinzukommt. Die $g_{j,\sigma}$ werden dabei so gewählt, dass die Linearformen

$$B_{n-1} := \sum_{j=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{t_j} a_{j,\sigma}(n-1) g_{j,\sigma} \tag{1.28}$$

betraglich möglichst klein sind, aber ungleich Null.

Die rekursive Wahl der $g_{j,\sigma}$ geschieht wie folgt: Sind die $g_{j,\sigma}$ in (1.28) bereits gewählt worden, so muss nach (1.27) als nächstes g_{j^*,σ^*} gewählt werden. Zu dem Zahlkörper $\mathbb{K}$ existiert eine Konstante $C := C(\mathbb{K})$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $z \in \mathbb{K}$ existiert ein $\omega \in O_{\mathbb{K}}$, so dass $0 < |z-\omega| \leq C$ ist. Wir setzen $d_n := a_{j^*,\sigma^*}(n)$. Wie wir oben gesehen haben, ist stets $d_n \neq 0$, und somit hat die Gleichung

$$\tilde{B}_n := \sum_{j=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{t_j} a_{j,\sigma}(n) g_{j,\sigma} + d_n \tilde{g}_{j^*,\sigma^*} = 0$$

eine eindeutige Lösung $\tilde{g}_{j^*,\sigma^*}$ in $\mathbb{K}$. Wählen wir nun $g_{j^*,\sigma^*} \in O_{\mathbb{K}}$ so, dass

$$0 < |g_{j^*,\sigma^*} - \tilde{g}_{j^*,\sigma^*}| \leq C$$

ist, so erhalten wir

$$0 < |B_n| = \left| \tilde{B}_n + d_n g_{j^*,\sigma^*} - d_n \tilde{g}_{j^*,\sigma^*} \right| \leq C \, |d_n| \, . \tag{1.29}$$

Dann betrachten wir die durch die Reihe

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(z)$$

definierte Funktion. Wenn wir zeigen können, dass g eine ganze Funktion mit dem im zu beweisenden Satz angegebenen Wachstum ist, so ist der Satz komplett bewiesen. Wegen der Eindeutigkeit der Interpolationsreihendarstellung gilt nämlich $A_n(g) = B_n$ und somit $g^{(\sigma)}(u_j) = g_{j,\sigma}$ für alle $\sigma, j \in \mathbb{N}_0$. Außerdem ist g eine transzendente Funktion, da alle B_n ungleich Null sind.

Nachdem wir nun das Beweisprinzip dargestellt haben, müssen wir in den Beweisen der Sätze 1.6, 2.5 und 3.4 also zwei Aufgaben lösen:

- Konstruktion einer geeigneten Interpolationsstellenfolge.

- Zeigen, dass die durch diese Interpolationsstellenfolge definierte Funktion g eine ganze Funktion mit dem im Satz angegebenen Wachstumsverhalten ist. Dazu zeigen wir, dass die g definierende Reihe auf $\mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Gleichzeitig erhalten wir eine Abschätzung von $|g|_r$ für alle großen $r \in \mathbb{R}_+$.

1.6.2 Konstruktion der Funktion

Wir setzen $t_m := \left[\exp\left(\frac{1}{2}m^2 \log q\right)\right]$ für $m \in \mathbb{N}$. $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Somit gilt $mt_m < mt_{m+1} < (m+1)t_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ trifft genau einer der folgenden beiden Fälle zu:[1]

Fall I: Es ist $mt_m < n \leq mt_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir können n dann eindeutig als

$$n = mt + l$$

mit $t \in \{t_m, \dots, t_{m+1} - 1\}$ und $l \in \{1, \dots, m\}$ schreiben.

Fall II: Es ist $mt_{m+1} < n \leq (m+1)t_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wir können n dann eindeutig als

$$n = mt_{m+1} + s$$

mit $s \in \{1, \dots, t_{m+1}\}$ schreiben.

Setzen wir nun $z_n := q^{l-1}$ im Fall I und $z_n := q^m$ im Fall II, so ergibt sich

$$P_n(z) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{m-1} (z - q^k)^t \prod_{h=0}^{l-1} (z - q^h) & , \text{ im Fall I} \\ \prod_{k=0}^{m-1} (z - q^k)^{t_{m+1}} (z - q^m)^s & , \text{ im Fall II.} \end{cases} \tag{1.30}$$

Setzen wir nun

$$\mu := \begin{cases} m - 1 & , \text{ im Fall I} \\ m & , \text{ im Fall II} \end{cases}$$

und

$$\tau_j := \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} t & , \quad 0 \leq j \leq l-1 \\ t-1 & , \quad l \leq j \leq m-1 \end{array}\right\} & \text{im Fall I} \\ \left.\begin{array}{ll} t_{m+1} - 1 & , \quad 0 \leq j \leq m-1 \\ s-1 & , \quad j = m \end{array}\right\} & \text{im Fall II,} \end{cases}$$

[1] Im Folgenden hängen die Größen m, t, l, s und somit auch μ, die τ_j und die $a_{j,\sigma}$ offensichtlich von n ab. Wir wollen diese Abhängigkeit aber nicht kenntlich machen.

so können wir (1.30) als

$$P_n(z) = \prod_{j=0}^{\mu} (z - q^j)^{\tau_j + 1}$$

schreiben. Aus (1.15) ergibt sich mittels des Residuensatzes dann für ganze Funktionen f

$$\begin{aligned} A_{n-1}(f) &= \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{\tau_j!} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j} \binom{\tau_j}{\sigma} \left[\frac{d^{\tau_j - \sigma}}{dz^{\tau_j - \sigma}} \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{\mu} (\xi - q^k)^{-\tau_k - 1} \right) \right]_{\xi = q^j} f^{(\sigma)}(q^j) \\ &=: \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j} a_{j,\sigma} f^{(\sigma)}(q^j). \end{aligned}$$

A_{n-1} ist also eine Linearkombination der $f^{(\sigma)}(q^j)$ mit rationalen Koeffizienten, die von der gewählten Funktion f unabhängig sind.

Wir setzen $d_{n-1} := a_{l-1,t} \neq 0$ im Fall I und $d_{n-1} := a_{m,s-1} \neq 0$ im Fall II.

Bemerkung
In [55] tritt an dieser Stelle ein Fehler in der Konstruktion von g auf. Im Fall I wird dort $d_{n-1} := a_{m-1,\tau_{m-1}}$ gesetzt. Es ist allerdings nicht q^{m-1}, sondern q^{l-1} die n-te Interpolationsstelle. Also kommt bei dem Schritt von B_{n-2} nach B_{n-1} nicht $g_{m-1,\tau_{m-1}}$, sondern $g_{l-1,t}$ neu hinzu.

Wie wir in Abschnitt 1.6.1 ausgeführt haben, können wir induktiv eine Folge $(g_{j,\sigma})$ von ganzrationalen Zahlen so definieren, dass die Linearformen

$$B_{n-1} := \sum_{j=0}^{\mu(n)} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(n)} a_{j,\sigma} g_{j,\sigma} \tag{1.31}$$

den Bedingungen

$$0 < |B_{n-1}| \leq |d_{n-1}| \tag{1.32}$$

genügen. Wir zeigen nun, dass

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} P_{n-1}(z) \tag{1.33}$$

eine ganze Funktion mit dem im Satz angegebenen Wachstum definiert.

1.6.3 Ein Hilfssatz

Um den zweiten Punkt der in Abschnitt 1.6.1 formulierten Aufgabenstellung in Angriff nehmen zu können, wollen wir zunächst ein Lemma beweisen, auf das wir bei unseren Abschätzungen immer wieder zurückgreifen werden.

Lemma 1.11
Es seien $m, m_0 \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann existiert eine Konstante c, die nur von q abhängt, so dass

$$\prod_{k=0}^{m-1} \left(q^{m_0} + q^k\right) < \begin{cases} cq^{mm_0} & , m \leq m_0 \\ cq^{\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}m(m-1)} & , m > m_0. \end{cases}$$

Beweis
Für $m \leq m_0$ ist

$$\prod_{k=0}^{m-1} \left(q^{m_0} + q^k\right) = q^{mm_0} \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 + q^{k-m_0}\right) < q^{mm_0} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + q^{-k}\right)$$

und für $m > m_0$ gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{m-1} \left(q^{m_0} + q^k\right) &= q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{k=0}^{m_0} \left(q^k + 1\right) \prod_{k=m_0+1}^{m-1} \left(q^{m_0-k} + 1\right) \\ &= q^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}m_0(m_0+1)} \prod_{k=0}^{m_0} \left(1 + q^{-k}\right) \prod_{k=1}^{m-m_0-1} \left(q^{-k} + 1\right) \\ &< q^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}m_0(m_0+1)} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + q^{-k}\right)^2, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

□

1.6.4 Abschätzungen

Bei den folgenden Abschätzungen bezeichnet c immer eine positive, von m_0 unabhängige Konstante, die aber an unterschiedlichen Stellen des Beweises, selbst innerhalb einer Ungleichungskette, verschiedene Werte haben kann. Wir sparen uns so eine Indexierung der Konstanten.

Abschätzung von $|\mathbf{d_{n-1}}|$. Für $l \in \{0, \ldots, m\}$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\prod_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{m-1}\left(q^l-q^k\right)\right| &= \prod_{k=0}^{l-1}\left(q^l-q^k\right)\prod_{k=l+1}^{m-1}\left(q^k-q^l\right) \\ &= q^{l^2}\prod_{k=0}^{l-1}\left(1-q^{k-l}\right)q^{\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}l(l+1)}\prod_{k=l+1}^{m-1}\left(1-q^{l-k}\right) \\ &> q^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}l(l-1)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{-k}\right)^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir im Fall I

$$\begin{aligned} |d_{n-1}| &= \frac{1}{t!}\left|\prod_{\substack{k=0\\k\neq l-1}}^{m-1}(q^{l-1}-q^k)^{-t}\prod_{h=0}^{l-2}(q^{l-1}-q^h)^{-1}\right| \\ &\leq \frac{c^t}{t!}q^{-t\left(\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(l-1)(l-2)\right)-(l-1)^2}, \end{aligned}$$

und in Fall II gilt

$$\begin{aligned} |d_{n-1}| &= \frac{1}{(s-1)!}\left|\prod_{k=0}^{m-1}(q^m-q^k)^{-t_{m+1}}\right| \\ &\leq \frac{c^{t_{m+1}}}{(s-1)!}q^{-m^2 t_{m+1}}. \end{aligned}$$

Abschätzung von $|\mathbf{P_{n-1}(z)}|$ auf $|\mathbf{z}| \leq \mathbf{r}$. Sei nun $r \in \mathbb{R}_+$ groß. Wir definieren $m_0 := m_0(r)$ durch $q^{m_0-1} \leq r < q^{m_0}$.

Im Fall I ergibt sich für $m \leq m_0$ aus Lemma 1.11

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| &= \left|\prod_{k=0}^{m-1}(z-q^k)^t\prod_{h=0}^{l-2}(z-q^h)\right| \\ &\leq \prod_{k=0}^{m-1}(q^{m_0}+q^k)^t\prod_{h=0}^{l-2}(q^{m_0}+q^h) \\ &\leq c^t q^{mm_0t+(l-1)m_0}. \end{aligned}$$

Ist $m > m_0$, so gilt für $l \leq m_0 + 1$

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| &= \left|\prod_{k=0}^{m-1}(z-q^k)^t \prod_{h=0}^{l-2}(z-q^h)\right| \\ &\leq \prod_{k=0}^{m-1}(q^{m_0}+q^k)^t \prod_{h=0}^{l-2}(q^{m_0}+q^h) \\ &\leq c^t q^{(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}m(m-1))t+(l-1)m_0} \end{aligned}$$

und für $l > m_0 + 1$

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| &= \left|\prod_{k=0}^{m-1}(z-q^k)^t \prod_{h=0}^{l-2}(z-q^h)\right| \\ &\leq \prod_{k=0}^{m-1}(q^{m_0}+q^k)^t \prod_{h=0}^{l-2}(q^{m_0}+q^h) \\ &\leq c^t q^{(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}m(m-1))t+\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}l(l-1)}. \end{aligned}$$

Im Fall II gilt für $m \leq m_0$

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| &= \left|\prod_{k=0}^{m-1}(z-q^k)^{t_{m+1}}(z-q^m)^{s-1}\right| \\ &\leq \prod_{k=0}^{m-1}(q^{m_0}+q^k)^{t_{m+1}}(q^{m_0}+q^m)^{s-1} \\ &\leq c^{t_{m+1}} q^{m m_0 t_{m+1}}(2q^{m_0})^{s-1}. \end{aligned}$$

Für $m > m_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| &= \left|\prod_{k=0}^{m-1}(z-q^k)^{t_{m+1}}(z-q^m)^{s-1}\right| \\ &\leq \prod_{k=0}^{m-1}(q^{m_0}+q^k)^{t_{m+1}}(q^{m_0}+q^m)^{s-1} \\ &\leq c^{t_{m+1}} q^{\left(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}m(m-1)\right)t_{m+1}}(2q^m)^{s-1}. \end{aligned}$$

Jetzt haben wir alles beisammen, um $|g(z)|$ auf $|z| \le r$ abzuschätzen. Es ist

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |B_{n-1}|\,|P_{n-1}(z)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |d_{n-1}|\,|P_{n-1}(z)| \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}|\,\left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&= \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
&\quad + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
&\quad + \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}|\,\left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&\quad + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}|\,\left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&=: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4.
\end{aligned}$$

Abschätzung von $\boldsymbol{\Sigma_1 + \Sigma_2}$. Im Fall I gilt für $m \le m_0$

$$\begin{aligned}
& |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
\le\ & \frac{c^t}{t!} q^{-t\left(\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(l-1)(l-2)\right)-(l-1)^2+mm_0t+(l-1)m_0} \\
=\ & \frac{c^t}{t!} q^{t\left(mm_0-\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}(l-1)(l-2)\right)-(l-1)^2+(l-1)m_0} \\
\le\ & \frac{c^t}{t!} q^{\frac{m_0^2}{2}t+\frac{m_0^2}{2}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \le \frac{c^t}{t!} q^{\frac{m_0^2}{2}t+\mathcal{O}\left(m_0^2\right)}.$$

Ist $m > m_0$, so ist

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
= & \sum_{l=1}^{m_0+1} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| + \sum_{l=m_0+2}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
\leq & \sum_{l=1}^{m_0+1} \frac{c^t}{t!} q^{-t\left(\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(l-1)(l-2)\right)-(l-1)^2} q^{(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}m(m-1))t+(l-1)m_0} \\
+ & \sum_{l=m_0+2}^{m} \frac{c^t}{t!} q^{(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)-\frac{1}{2}(l-1)(l-2))t+\frac{1}{2}m_0(m_0+1)+\frac{1}{2}l(l-1)-(l-1)^2} \\
\leq & \frac{c^t}{t!} q^{\frac{1}{2}m_0(m_0+1)t+\mathcal{O}\left(m_0^2\right)}.
\end{aligned}$$

Kombiniert man die obigen Abschätzungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 + \Sigma_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\
&\leq \sum_{t=t_1}^{\infty} \frac{1}{t!} q^{(\frac{1}{2}m_0^2+\mathcal{O}(m_0))t+\mathcal{O}\left(m_0^2\right)} \\
&\leq \exp\left(\exp\left(\frac{1}{2}m_0^2 \log q + \mathcal{O}\left(m_0\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Abschätzung von Σ_3. Im Fall II gilt für $m \leq m_0$

$$\begin{aligned}
& |a_{m,s-1}|\left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
\leq & \frac{c^{t_{m+1}}}{(s-1)!} q^{-m^2 t_{m+1}+m m_0 t_{m+1}} (2q^{m_0})^{s-1} \\
\leq & \frac{c^{t_{m+1}}}{(s-1)!} q^{\frac{1}{4}m_0^2 t_{m+1}} (2q^{m_0})^{s-1},
\end{aligned}$$

womit sich sofort

$$\Sigma_3 \leq (c t_{m_0+1})^{t_{m_0+1}}$$

ergibt.

Abschätzung von Σ_4. Für $m > m_0$ haben wir

$$\begin{aligned} & |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\ \leq \quad & \frac{c^{t_{m+1}}}{(s-1)!} q^{\left(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right)t_{m+1}} (2q^m)^{s-1}. \end{aligned}$$

Also folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &= \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\ &\leq \sum_{m=m_0+1}^{\infty} c^{t_{m+1}} q^{\left(\frac{1}{2}m_0(m_0+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right)t_{m+1}} \exp\left(2q^m\right) \\ &\leq \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left(cq^{-m_0(m-m_0)}\right)^{t_{m+1}}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung $\exp(2q^m) < e^{t_m}$ für alle großen m ausgenutzt haben. Ist m_0 genügend groß, so ist $cq^{-m_0} < 1/2$ und somit $\Sigma_4 = \mathcal{O}(1)$ bei $m_0 \to \infty$.

Die Abschätzungen für $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ und Σ_4 ergeben

$$|g|_r \leq (ct_{m_0+1})^{t_{m_0+1}}.$$

Berücksichtigt man noch $m_0 = \frac{\log r}{\log q} + \mathcal{O}(1)$ und die Definition von t_{m_0+1}, so erhält man

$$\log\log |g|_r \leq \frac{\log^2 r}{2\log q} + \mathcal{O}(\log r).$$

Also ist g eine ganze Funktion mit $\rho_2(g) \leq \frac{1}{2\log q}$.

Kapitel 2

Der additive Fall

2.1 Definitionen und Ergebnisse

Fridman untersuchte 1968 in [18] ganze Funktionen, die mit sämtlichen Ableitungen an allen nicht-negativen ganzrationalen Zahlen ganzrationale Werte annehmen. Er zeigte

Satz 2.1 (Fridman, 1968)
Für jede ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$A(f) := \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_+ \log_+ |f|_r}{r} \geq \log(1 + e^{-1}) \approx 0,31.$$

Bemerkung
Fridman hat außerdem gezeigt, dass eine ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$ und $A(f) \leq \pi$ existiert.

Wir werden in diesem Kapitel dieses Ergebnis verbessern und genau wie im multiplikativen Fall zeigen, dass man die arithmetischen Voraussetzungen abschwächen kann.

Dazu wollen wir wieder einige Bezeichnungen einführen. Es sei f eine ganze Funktion. Dann setzen wir für $\kappa \in \mathbb{R}_+$

$$A_\kappa(f) := \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_+ \log_+ |f|_r}{r^\kappa}.$$

$A_1(f)$ ist also das $A(f)$ bei FRIDMAN in [18]. Wir notieren die folgenden einfachen Eigenschaften von $A_\kappa(f)$.

Lemma 2.2
Es sei P eine Polynomfunktion, und f, g seien ganze Funktionen. Dann gilt für jedes $\kappa \in \mathbb{R}_+$

(i) $A_\kappa(P) = 0$,

(ii) $A_\kappa(f+g) \leq \max\{A_\kappa(f), A_\kappa(g)\}$,

(iii) $A_\kappa(fg) \leq \max\{A_\kappa(f), A_\kappa(g)\}$.

Beweis
Der Beweis sei wieder dem Leser überlassen.

□

Bemerkung
In diesem und im nächsten Kapitel gibt es viele Analogien zum multiplikativen Fall. So gilt für die Größen $\lambda_0(f), \lambda_{\mathbb{Z}}(f), \ldots$, die wir im Folgenden definieren werden, und ihre Entsprechungen im imaginär-quadratischen Fall offensichtlich eine zu Lemma 1.4 analoge Aussage. Auch viele Bemerkungen, die wir zu den Sätzen im multiplikativen Fall gemacht haben, können in offensichtlich angepasster Form übernommen werden. Um Redundanz zu vermeiden, werden wir uns daher in diesem und im nächsten Kapitel an den entsprechenden Stellen kurz fassen und lediglich auf die Unterschiede zum multiplikativen Fall aufmerksam machen.

Wir wollen zuerst wieder einen Eindeutigkeitssatz herleiten, den wir zum Beweis unseres Ganzwertigkeitsresultats benötigen. Dazu setzen wir

$$\lambda_0(f) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \operatorname{ord}_0(f,n)}{\log n}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ setzen wir

$$\tau_0(f;\lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \operatorname{ord}_0(f,n)}{n^\lambda}.$$

Weiter sei $\tau_0(f) := \tau_0(f;\lambda_0(f))$, falls $\lambda_0(f) \in \mathbb{R}_+$ ist. Nun gilt der folgende

Satz 2.3
Es sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(i) *Für jede ganze, nicht konstante Funktion* f *mit* $\lambda_0(f) \geq \lambda$ *gilt*

$$A_\lambda(f) \geq \tau_0(f;\lambda).$$

(ii) *Zu jedem* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *existiert eine ganztranszendente Funktion* g *mit* $\lambda_0(g) = \lambda, \tau_0(g) = \tau$ *und* $A_\lambda(g) \leq \tau e^{\lambda-1}/\lambda$.

Bemerkung
Teil (ii) zeigt, dass (i) für $\lambda = 1$ bestmöglich ist. Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sehen wir lediglich, dass unter den Voraussetzungen von (i) im Allgemeinen nicht $A_\lambda(f) = +\infty$ gefolgert werden kann.

Um die Ganzwertigkeitseigenschaften der Funktionen zu beschreiben, die wir im Folgenden untersuchen wollen, setzen wir

$$\lambda_{\mathbb{Z}}(f) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f,n)}{\log n}.$$

Weiter definieren wir für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau_{\mathbb{Z}}(f;\lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log_+ \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f,n)}{n^\lambda}$$

und $\tau_{\mathbb{Z}}(f) := \tau_{\mathbb{Z}}(f;\lambda_{\mathbb{Z}}(f))$, falls $\lambda_{\mathbb{Z}}(f) \in \mathbb{R}_+$ ist.

Nun gilt der folgende

Satz 2.4
Es sei $\lambda \in]0,1], \tau \in \mathbb{R}_+$ *und* f *eine ganztranszendente Funktion mit* $\tau_{\mathbb{Z}}(f;\lambda) \geq \tau$. *Dann gilt:*

(i) *Ist* $\lambda < 1$, *so ist* $A_\lambda(f) \geq \tau$.

(ii) *Ist* $\lambda = 1$, *so ist* $A_1(f) \geq \frac{\tau}{\tau+\log 2}\log 2$.
Insbesondere ist $A_1(f) \geq \log 2$, *falls* $\tau_{\mathbb{Z}}(f;1) = +\infty$ *ist.*

Bemerkungen

(i) Im Gegensatz zum multiplikativen Fall können wir hier für kein λ zeigen, dass das vorstehende Resultat bestmöglich ist.

(ii) Der Zusatz in (ii) verschärft Satz 2.1 in zweierlei Weise, da zum einen die arithmetischen Voraussetzungen an f abgeschwächt und zum anderen die Unterschranke für $A_1(f)$ vergrößert wird.

Wie bereits zuvor erwähnt wurde, hat Fridman gezeigt, dass man die Unterschranke $\log 2$ nicht durch eine Konstante ersetzen kann, die größer als π ist. Wir können diese Oberschranke ein bisschen verbessern, denn es gilt

Satz 2.5
Es existiert eine ganztranszendente Funktion g mit $g^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und $A_1(g) < 2,638$.

Die Methode, mit der dieser Satz in Abschnitt 2.4 bewiesen wird, ist dieselbe wie die, die wir in Abschnitt 1.6 benutzt haben. Versuche, mit dieser Methode eine Funktion g zu konstruieren, bei der statt $g^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ lediglich $g^{(\sigma)}(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{Z}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ sichergestellt ist, scheitern immer daran, dass die konstruierten Reihen nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren. Der nächste Satz zeigt aber, dass man mit einer Konstruktion, wie wir sie in Abschnitt 2.4 durchführen, niemals zeigen kann, dass der Zusatz in Satz 2.4 (ii) bestmöglich ist.

Satz 2.6
Für jede ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$A_1(f) \geq \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0,96.$$

Bemerkung
Pólya [38] hat gezeigt, dass für ganztranszendente Funktionen f mit $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log |f|_r}{r} \geq \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

gilt.

2.2 Beweis von Satz 2.3

2.2.1 Beweis des Teils (i)

Die Behauptung folgt aus

Satz 2.7 (CARLEMAN**sche Formel)**
Es sei f eine auf $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ holomorphe Funktion. Es sei $\rho \in \mathbb{R}_+$ so gewählt, dass f auf dem Halbkreis $|z| = \rho$ in $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ keine Nullstelle hat. $z_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ seien die Nullstellen von f in $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, welche betraglich größer als ρ sind, wobei jede gemäß ihrer Vielfachheit aufgeführt sei. Setzt man

$$\begin{aligned}
\Sigma(f,R) &:= \sum_{\substack{z_n \\ r_n < R}} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{r_n}{R^2} \right) \cos\theta_n, \\
I(f,R) &:= \frac{1}{2\pi} \int_\rho^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log|f(it)f(-it)|\, dt, \\
J(f,R) &:= \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log\left|f(Re^{i\theta})\right| \cos\theta\, d\theta,
\end{aligned}$$

so gilt

$$\Sigma(f,R) = I(f,R) + J(f,R) + \mathcal{O}(1), \tag{2.1}$$

wobei $\mathcal{O}(1)$ eine Funktion von ρ und R bezeichnet, welche für festes ρ bei $R \to \infty$ beschränkt ist.

Beweis
Diesen Satz ist in der Theorie der ganzen Funktionen wohlbekannt. Man findet ihn z.B. in den Monographien von BOAS [10] oder LEVIN [33].

□

Es seien $\lambda, \tau \in \mathbb{R}_+$, und f sei eine ganze Funktion mit $\tau_0(f;\lambda) \geq \tau$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 := N_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$\mathrm{ord}_0(f,n) \geq \exp\left((\tau - \varepsilon)n^\lambda\right) \tag{2.2}$$

ist. Wir nehmen an, dass mit einem $\gamma < \tau$

$$\log|f|_r \leq \exp\left(\gamma r^\lambda\right) \tag{2.3}$$

für alle genügend großen $r \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Wir fixieren $\rho \in \mathbb{R}_+$ so, dass es den Voraussetzungen in der CARLEMANschen Formel genügt.

Es sei $R \in \mathbb{R}_+$ groß, insbesondere größer als N_0 und ρ.

Dann ist wegen (2.2)

$$\Sigma(f, R) \quad \geq \quad \sum_{n=N_0}^{[R]} \exp\left((\tau - \varepsilon)n^\lambda\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{R^2}\right) \geq \exp\left((\tau - 2\varepsilon)R^\lambda\right).$$

Andererseits folgt aus (2.3)

$$I(f, R) \quad \leq \quad \exp\left(\gamma R^\lambda + \mathcal{O}(1)\right)$$

und

$$J(f, R) \quad \leq \quad \exp\left(\gamma R^\lambda\right)$$

für alle großen R. Wenn f nicht identisch verschwindet, so folgt aus (2.1)

$$\exp\left(R^\lambda(\tau - 2\varepsilon - \gamma)\right) = \mathcal{O}(1) \quad \text{bei } R \to \infty.$$

Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch zu $\gamma < \tau$, falls ε genügend klein gewählt wird. Also muss f identisch verschwinden.

2.2.2 Beweis von Teil (ii)

Wir betrachten die durch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1 - \frac{z}{n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{n}\right)^j\right)\right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

definierte Funktion $g(z)$.

Zu jedem $r \in \mathbb{R}_+$ existiert genau ein $m := m(r) \in \mathbb{N}$, so dass $m - 1 < r \leq m$ ist. Wir schätzen jetzt $|g|_r$ für große r ab.

Es sei $|z| \leq r$.

Für $1 \leq n \leq m$ ist

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j}\left(\frac{m}{n}\right)^j\right) \leq (m+1)\exp\left(\left[\tau n^\lambda\right]\left(\frac{m}{n}\right)^{[\tau n^\lambda]}\right).$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{m}\left|\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^{\lambda}\right]}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{n}\right)^{j}\right)\right|^{\left[e^{\tau n^{\lambda}}\right]} \\
\leq\ & \exp\left(\sum_{n=1}^{m}\exp(\tau n^{\lambda}(1+\log m-\log n)+\mathcal{O}\left(\log m\right))\right).
\end{aligned}$$

Die Funktion einer reellen Veränderlichen $h(x) := x^{\lambda}(1+\log m-\log x)$ nimmt ihr Maximum auf $\mathbb{R}_{+}$ in $x = m\cdot\exp(1-1/\lambda) =: m\cdot\alpha(\lambda)$ an und ist auf $]0,\alpha(\lambda)m[$ streng monoton wachsend und auf $x > \alpha(\lambda)m$ streng monoton fallend. Wir erhalten also für $\lambda \leq 1$

$$\log\prod_{n=1}^{m}\left|\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^{\lambda}\right]}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{n}\right)^{j}\right)\right|^{\left[e^{\tau n^{\lambda}}\right]} \leq \exp\left(\frac{\tau}{\lambda}e^{\lambda-1}m^{\lambda}+\mathcal{O}\left(\log m\right)\right)$$

und für $\lambda > 1$

$$\log\prod_{n=1}^{m}\left|\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^{\lambda}\right]}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{n}\right)^{j}\right)\right|^{\left[e^{\tau n^{\lambda}}\right]} \leq \exp\left(\tau m^{\lambda}+\mathcal{O}\left(\log m\right)\right).$$

Für $n > m$ gilt $|z/n| < 1$, und wir haben

$$\log\left(1-\frac{z}{n}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{n}\right)^{j}$$

und

$$\sum_{j=\left[\tau n^{\lambda}\right]+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{m}{n}\right)^{j} \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{\left[\tau n^{\lambda}\right]+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{j} = (m+1)\left(\frac{m}{n}\right)^{\left[\tau n^{\lambda}\right]+1}.$$

Hieraus ergibt sich für $n > m$

$$\begin{aligned}
& \log \left| \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq \;& \exp\left(\tau n^\lambda\right) \sum_{j=\left[\tau n^\lambda\right]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{m}{n}\right)^j \\
\leq \;& \exp\left(\tau n^\lambda (1 + \log m - \log n) + \mathcal{O}(\log m)\right) \\
= \;& \exp\left(\tau h(n) + \mathcal{O}(\log m)\right).
\end{aligned}$$

Die Funktion h hat eine Nullstelle in $x = em$. Ist $n \geq 2em$, so ist $h(n) = n^\lambda(1 + \log m - \log n) \leq -\log 2 \cdot n^\lambda$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
& \log \prod_{n=[2em]+1}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq \;& \exp\left(\mathcal{O}(\log m)\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\tau \log 2 \cdot n^\lambda\right) = \exp\left(\mathcal{O}(\log m)\right).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty z^{\left[n^\lambda\right]}$ den Konvergenzradius 1 hat.

Wir müssen schließlich noch

$$\prod_{n=m+1}^{[2em]} \left| \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

abschätzen.

Da auch hier $n > m$ gilt, ergibt sich wie zuvor

$$\begin{aligned}
& \log \prod_{n=m+1}^{[2em]} \left| \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq \;& (2e - 1)m \max_{m < n \leq [2em]} \exp\left(\tau h(n) + \mathcal{O}(\log m)\right) \\
\leq \;& \begin{cases} \exp\left(\tau h(m) + \mathcal{O}(\log m)\right), & \text{falls } \lambda \leq 1 \\ \exp\left(\tau h(\alpha(\lambda) m) + \mathcal{O}(\log m)\right), & \text{falls } \lambda > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Abschätzungen ergibt sich nun $A_\lambda(g) \leq \tau e^{\lambda-1}/\lambda$. $\lambda_0(g) = \lambda$ und $\tau_0(g) = \tau$ sind nach Konstruktion klar. Da g offensichtlich nicht die Nullfunktion ist, muss g eine transzendente Funktion sein.

2.3 Beweis von Satz 2.4

Es sei $\lambda \in]0,1], \tau \in \mathbb{R}_+$ und f eine ganze Funktion mit $\tau_{\mathbb{Z}}(f;\lambda) \geq \tau$ und

$$A_\lambda(f) < \begin{cases} \tau, & \text{falls } \lambda < 1 \\ \frac{\log 2}{\tau + \log 2}\tau, & \text{falls } \lambda = 1. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass f unter diesen Voraussetzungen keine ganztranszendente Funktion sein kann.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_0 := N_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}}(f,n) \geq \exp\left((\tau - \varepsilon)n^\lambda\right) \tag{2.4}$$

gilt.

Aus der Voraussetzung an $A_\lambda(f)$ ergibt sich, dass

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma r^\lambda\right) \tag{2.5}$$

für alle genügend großen $r \in \mathbb{R}_+$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}_+$ gilt, das

$$\gamma < \begin{cases} \tau, & \text{falls } \lambda < 1 \\ \frac{\log 2}{\tau + \log 2}\tau, & \text{falls } \lambda = 1 \end{cases}$$

genügt. Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass sogar

$$\gamma < \begin{cases} \tau - \varepsilon, & \text{falls } \lambda < 1 \\ \frac{\log 2}{\tau + \log 2}(\tau - \varepsilon), & \text{falls } \lambda = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

gilt.

Es sei N stets hinreichend groß gewählt.

Wir setzen nun $S_n := \left[e^{(\tau-\varepsilon)n^\lambda}\right]$ für $n \in \mathbb{N}$, $H := \left[S_N \log^2 N\right] + 1$ und $K := \left[\frac{N}{\log N}\right] + 1$.

$T, \theta \in \mathbb{R}_{>1}$ sind Parameter, an die wir im Verlauf des Beweises Bedingungen stellen werden und die wir dann am Ende des Beweises für $\lambda < 1$ und $\lambda = 1$ gesondert festsetzen werden.

1. Schritt: Es existieren $a_{h,k} \in \mathbb{Z}$, $(h = 0, \ldots, H-1;\ k = 0, \ldots, K-1)$, mit

$$0 < \max_{h,k} |a_{h,k}| \leq \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(\frac{N}{\log N}\right)\right),$$

so dass die ganze Funktion

$$F(z) := \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} z^h f(z)^k$$

für alle $n \in \{N, \ldots, [TN]\}$ der Bedingung

$$\mathrm{ord}_0(F, n) \geq S_N$$

genügt.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$0 = F^{(\sigma)}(n) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} \sum_{\substack{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ |\underline{\varkappa}| = \sigma}} \sigma! \binom{h}{\varkappa_{k+1}} n^{h-\varkappa_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \frac{f^{(\varkappa_j)}(n)}{\varkappa_j!}$$

für $n = N, \ldots, [TN]$ und $\sigma = 0, \ldots, S_N - 1$. Dies sind $S_N([TN] - N + 1)$ Gleichungen in den $HK \geq S_N N \log N$ Unbekannten $a_{h,k}$. Ist $\gamma T^\lambda < \tau - \varepsilon$, so ist $\log |f|_{TN} \leq S_N$ und für obige n und σ gilt

$$\left|f^{(\sigma)}(n)\right| = \left| \frac{\sigma!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi| = n+1} \frac{f(\xi)}{(\xi - n)^{\sigma+1}} \right| \leq \sigma! \exp\left(S_N + \mathcal{O}(\log N)\right).$$

Hieraus ergibt sich für die Koeffizienten des obigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ |\underline{\varkappa}| = \sigma}} \sigma! \binom{h}{\varkappa_{k+1}} n^{h-\varkappa_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \frac{f^{(\varkappa_j)}(n)}{\varkappa_j!} \right| \\ \leq\ & \sigma! 2^{\sigma+K+H} \exp\left(H \log N + K S_N + \mathcal{O}(N)\right) \\ \leq\ & \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}(N)\right). \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus dem SIEGELschen Lemma, da der SIEGEL–Exponent von der Größenordnung $\mathcal{O}\left((\log N)^{-1}\right)$ ist.

2. Schritt: Für alle $M \geq N$ und $S \in \{S_{M-1}, \ldots, S_M\}$ gilt

$$\forall m \in \{M, \ldots, [TM]\} : \ \mathrm{ord}_0(F, m) \geq S. \tag{$I_{M,S}$}$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Der 1. Schritt liefert uns die Induktionsverankerung (I_{N,S_N}).

Es sei $(I_{M,S})$ bereits gezeigt.

Wir zeigen nun:

1.) Ist $S_{M-1} \leq S < S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M,S+1})$.

2.) Ist $S = S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M+1,S})$.

Zu 1.): Es ist $S_{M-1} \leq S < S_M$.

Wir wollen $F^{(S)}(m) = 0$ für $m \in \{M, \ldots, [TM]\}$ zeigen. Dies erledigen wir wieder, indem wir zeigen, dass $\left|F^{(S)}(m)\right| < 1$ ist. Im Beweis des multiplikativen Analogons haben wir dazu $|F|_r$ für einen geeigneten Radius r mittels des SCHWARZschen Lemmas abgeschätzt. Im Prinzip könnten wir diese Vorgehensweise hier kopieren. Wir würden aber eine schlechtere Unterschranke für $A_\lambda(f)$ bei ganztranszendentem f erhalten. Deshalb werden wir nun nicht $|F|_r$, sondern $\left|F^{(S)}(m)\right|$ direkt abschätzen. Dazu benötigen wir eine geeignete Darstellung von $F^{(S)}(m)$, die wir aus dem Residuensatz erhalten.

Nach dem Residuensatz und $(I_{M,S})$ gilt für $m \in \{M, \ldots, [TM]\}$

$$F^{(S)}(m) = \frac{S!}{2\pi i} \prod_{\substack{\mu=M \\ \mu \neq m}}^{[TM]} (m-\mu)^S \int\limits_{|\xi|=\theta TM} \frac{F(\xi)d\xi}{\prod\limits_{\mu=M}^{[TM]} (\xi-\mu)^S (\xi - m)}.$$

Wegen der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) \;=\; z\Gamma(z) \tag{2.7}$$

der Γ–Funktion haben wir auf $|\xi| = \theta TM$

$$\left|\prod_{\mu=M}^{[TM]} (\xi-\mu)\right| \geq \prod_{\mu=M}^{[TM]} \frac{\Gamma(\theta TM - \mu + 1)}{\Gamma(\theta TM - \mu)} = \frac{\Gamma(\theta TM - M + 1)}{\Gamma(\theta TM - [TM])}.$$

Andererseits haben wir

$$\left|\prod_{\substack{\mu=M\\ \mu\neq m}}^{[TM]}(m-\mu)\right| = (m-M)!([TM]-m)! \leq ([TM]-M)!.$$

Aus der STIRLINGschen Formel folgt

$$\log\left(\frac{([TM]-M)!\Gamma(\theta TM-[TM])}{\Gamma(\theta TM-M+1)}\right) = h(\theta,T)\,M + \mathcal{O}\left(\log M\right),$$

wenn wir

$$h(\theta,T) := (T-1)\log(T-1) + (\theta-1)T\log((\theta-1)T) - (\theta T-1)\log(\theta T-1)$$

setzen.

Ist $\gamma T^{\lambda}\theta^{\lambda} < \tau-\varepsilon$, so ist $\log|f|_{\theta TM} \leq \exp\left(\gamma T^{\lambda}\theta^{\lambda}M^{\lambda}\right) \leq S_{M-1}$, falls nur N hinreichend groß gewählt worden ist, und somit gilt

$$\begin{aligned} |F|_{\theta TM} &\leq HK\max|a_{h,k}|\,(\theta TM)^{H}(|f|_{\theta TM}+1)^{K} \\ &= \exp\left(S\cdot\mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M}\right)\right). \end{aligned}$$

Wenden wir auf die obige Integraldarstellung von $F^{(S)}(m)$ die Standardabschätzung an, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \left|F^{(S)}(m)\right| &\leq S!\,|F|_{\theta TM}\exp\left(S\left(h(\theta,T)M+\mathcal{O}\left(\log M\right)\right)\right) \\ &\leq \exp\left(S\left((\tau-\varepsilon)M^{\lambda}+h(\theta,T)M+\mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Kann man nun unter Berücksichtigung der übrigen an T und θ gestellten Bedingungen T und θ so wählen, dass $h(\theta,T)<0$ im Fall $\lambda<1$ und $\tau-\varepsilon+h(\theta,T)<0$ für $\lambda=1$ gilt, so ist $\left|F^{(\sigma)}(m)\right|<1$, falls N hinreichend groß gewählt wurde, und somit $F^{(\sigma)}(m)=0$, da $F^{(\sigma)}(m)\in\mathbb{Z}$ ist. Die Wahl der Parameter erfolgt in Schritt 4.

Zu 2.): Es ist $S=S_M$. Wir zeigen nun, dass $(I_{M+1,S})$ aus $(I_{M,S})$ folgt. Dies geht aber weitgehend analog zu dem vorstehendem Beweis. Wir fassen uns deshalb kurz.

Es sei $m\in\{[TM]+1,\ldots,[T(M+1)]\}$ und $0\leq\sigma\leq S-1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass σ die kleinste Zahl in $\{0,\ldots,S-1\}$

ist, für die wir noch nicht gezeigt haben, dass $F^{(\sigma)}(m) = 0$ ist, d.h. es gilt $F^{(t)}(m) = 0$ für $t = 0, \dots, \sigma - 1$. Dann erhalten wir wieder aus dem Residuensatz und $(I_{M,S})$

$$F^{(\sigma)}(m) = \frac{\sigma!}{2\pi i} \prod_{\mu=M}^{[TM]} (m-\mu)^S \int\limits_{|\xi|=T\theta(M+1)} \frac{F(\xi)d\xi}{\prod\limits_{\mu=M}^{[TM]} (\xi-\mu)^S (\xi-m)^{\sigma+1}}.$$

Es ist auf $|\xi| = T\theta(M+1)$

$$\left| \prod_{\mu=M}^{[TM]} (\xi - \mu) \right| \geq \frac{\Gamma(\theta T(M+1) - M + 1)}{\Gamma(\theta T(M+1) - [TM])}$$

und

$$\prod_{\mu=M}^{[TM]} (m-\mu) \leq ([T(M+1)] - M)!.$$

$F^{(\sigma)}(m) = 0$ folgt nun genau wie zuvor, indem man mittels STIRLINGscher Formel und Standardabschätzung aus obiger Integraldarstellung $\left|F^{(\sigma)}(m)\right| < 1$ herleitet. Insbesondere ergeben sich dieselben Bedingungen an T und θ.

3. Schritt: Es ist $F \equiv 0$. Somit ist f eine algebraische Funktion.

Dies folgt sofort aus dem Teil (i) von Satz 2.3. Denn nach Lemma 2.2, (2.5) und der Konstruktion von F gilt $A_\lambda(F) \leq \gamma < \tau - \varepsilon$. Andererseits ergibt sich aus dem 2. Schritt $\lambda_0(F) \geq \lambda$ und $\tau_0(F;\lambda) \geq \tau - \varepsilon$. Somit ist F nach dem Eindeutigkeitssatz konstant.

4. Schritt: Wahl der Parameter T und θ.

zu (i): $\lambda < 1$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma T^\lambda \theta^\lambda < \tau - \varepsilon \quad \text{und} \quad h(\theta, T) < 0$$

ist. Setzt man nun $\theta := T := 1 + \delta$ mit einem von γ, τ und λ abhängigen $\delta \in \mathbb{R}_+$, so ist beides offensichtlich wegen (2.6) erfüllt.

zu (ii): $\lambda = 1$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma T\theta < \tau - \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau - \varepsilon + h(\theta, T) < 0$$

ist.

Dazu maximieren wir diesmal die Funktion

$$g(\theta, T) := \frac{1}{\theta T}$$

unter der Nebenbedingung $h(\theta, T) + \tau = 0$. Mittels der LAGRANGEschen Multiplikatorenregel erhält man

$$T = 1 + \frac{\tau}{2\log 2} \quad \text{und} \quad \theta = 1 + \frac{T-1}{T}.$$

Wegen (2.6) gilt nun

$$\gamma < \frac{\tau - \varepsilon}{\tau + \log 2} \log 2 = \frac{\tau - \varepsilon}{\theta T},$$

und außerdem ist $h(\theta, T) + \tau - \varepsilon = -\varepsilon < 0$.

2.4 Beweis von Satz 2.5

2.4.1 Konstruktion einer geeigneten Funktion

Der Beweis dieses Satzes verläuft nach dem in Abschnitt 1.6.1 beschriebenen Beweisprinzip. Wir müssen also zunächst eine geeignete Interpolationsstellenfolge definieren.

Wir setzen $t_m := [\exp(2\log 2 \cdot m)]$ für $m \in \mathbb{N}$. Somit ist $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Also gilt $mt_m < mt_{m+1} < (m+1)t_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ trifft genau einer der folgenden beiden Fälle zu:[1]

Fall I: Es ist $mt_m < n \leq mt_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir können n dann eindeutig in der Form

$$n = mt + l$$

mit $t \in \{t_m, \ldots, t_{m+1} - 1\}$ und $l \in \{1, \ldots, m\}$ schreiben.

[1] Im Folgenden hängen die Größen m, t, l, s offensichtlich von n ab. Wir wollen diese Abhängigkeit aber nicht kenntlich machen.

Fall II: Es ist $mt_{m+1} < n \leq (m+1)t_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wir können n dann eindeutig in der Form

$$n = mt_{m+1} + s$$

mit $s \in \{1, \ldots, t_{m+1}\}$ schreiben.

Setzen wir nun $z_{2n-1} := l-1$ und $z_{2n} := -(l-1)$ im Fall I und $z_{2n-1} := m$ und $z_{2n} := -m$ im Fall II, so ergibt sich

$$P_{2n-1}(z) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{m-1} (z^2 - k^2)^t \prod_{h=0}^{l-2} (z^2 - h^2)(z - (l-1)) & \text{, im Fall I} \\ \prod_{k=0}^{m-1} (z^2 - k^2)^{t_{m+1}} (z^2 - m^2)^{s-1} (z - m) & \text{, im Fall II} \end{cases} \tag{2.8}$$

und

$$P_{2n}(z) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{m-1} (z^2 - k^2)^t \prod_{h=0}^{l-1} (z^2 - h^2) & \text{, im Fall I} \\ \prod_{k=0}^{m-1} (z^2 - k^2)^{t_{m+1}} (z^2 - m^2)^{s} & \text{, im Fall II.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Es sei mit $\tau_k(n) + 1$ die Nullstellenordnung des Polynoms $P_n(z)$ an $z = k$ bezeichnet.

Aus der Definition der Interpolationskoeffizienten (vgl. (1.15)) bezüglich der vorstehend definierten Interpolationsstellenfolge ergibt sich wieder, dass für eine ganze Funktion f die Interpolationskoeffizienten A_{2n-2} und A_{2n-1} Linearkombinationen in gewissen $f^{(\sigma)}(j)$ mit rationalen von f unabhängigen Koeffizienten sind. D.h. wir haben im Fall I

$$\begin{aligned} A_{2n-2} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_n} \frac{f(\xi) d\xi}{\prod_{k=0}^{m-1} (\xi^2 - k^2)^t \prod_{h=0}^{l-2} (\xi^2 - h^2)(\xi - (l-1))} \\ &= \sum_{\substack{j=-(m-1) \\ \mu \neq l-1}}^{m-1} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(2n-1)} a_{j,\sigma}(2n-2) f^{(\sigma)}(j) + \sum_{\sigma=0}^{\tau_{l-1}(2n-1)} a_{l-1,\sigma}(2n-2) f^{(\sigma)}(l-1) \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
A_{2n-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_n} \frac{f(\xi)d\xi}{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(\xi^2-k^2)^t \prod\limits_{h=0}^{l-1}(\xi^2-h^2)} \\
&= \sum_{\substack{j=-(m-1) \\ \mu\neq-(l-1)}}^{m-1} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(2n)} a_{j,\sigma}(2n-1)f^{(\sigma)}(j) + \sum_{\sigma=0}^{\tau_{-l+1}(2n)} a_{-l+1,\sigma}(2n-1)f^{(\sigma)}(-l+1)
\end{aligned}
$$

mit gewissen rationalen $a_{j,\sigma}(2n-2)$ und $a_{j,\sigma}(2n-1)$. Und im Fall II erhalten wir

$$
\begin{aligned}
A_{2n-2} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_n} \frac{f(\xi)d\xi}{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(\xi^2-k^2)^{t_{m+1}}(\xi^2-m^2)^{s-1}(\xi-m)} \\
&= \sum_{j=-m}^{m-1} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(2n-1)} a_{j,\sigma}(2n-2)f^{(\sigma)}(j) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} a_{m,\sigma}(2n-2)f^{(\sigma)}(m)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
A_{2n-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_n} \frac{f(\xi)d\xi}{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(\xi^2-k^2)^{t_{m+1}}(\xi^2-m^2)^{s}} \\
&= \sum_{j=-m+1}^{m} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(2n)} a_{j,\sigma}(2n-1)f^{(\sigma)}(j) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} a_{-m,\sigma}(2n-2)f^{(\sigma)}(-m).
\end{aligned}
$$

Wir setzen im Fall I

$$
\begin{aligned}
d_{2n-2} &:= \begin{cases} a_{0,2t}(2n-2), & \text{falls } l=1 \\ a_{l-1,t}(2n-2), & \text{falls } l\neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(2t)!}\prod_{k=1}^{m-1}(k^2)^{-t} = \frac{1}{(2t)!}((m-1)!)^{-2t}, & \text{falls } l=1 \\ \frac{1}{t!}\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq l-1}}^{m-1}((l-1)^2-k^2)^{-t}\prod\limits_{h=0}^{l-2}((l-1)^2-h^2)^{-1}(2(l-1))^{-t}, & \text{falls } l\neq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und

$$d_{2n-1} \;:=\; \begin{cases} a_{0,2t+1}(2n-1), & \text{falls } l = 1 \\ a_{-l+1,t}(2n-1), & \text{falls } l \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2t+1)!}\prod_{k=1}^{m-1}(k^2)^{-t} = \frac{1}{(2t)!}((m-1)!)^{-2t}, & \text{falls } l = 1 \\ \frac{1}{t!}\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq -l+1}}^{m-1}((l-1)^2-k^2)^{-t}\prod\limits_{h=0}^{l-2}((l-1)^2-h^2)^{-1}(-2(l-1))^{-t-1}, & \text{falls } l \neq 1. \end{cases}$$

Im Fall II setzen wir

$$\begin{aligned} d_{2n-2} &:= a_{m,s-1}(2n-2) \\ &= \frac{1}{(s-1)!}\prod_{k=0}^{m-1}(m^2-k^2)^{-t_{m+1}}(2m)^{-s+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_{2n-1} &:= a_{-m,s-1}(2n-1) \\ &= \frac{1}{(s-1)!}\prod_{k=0}^{m-1}(m^2-k^2)^{-t_{m+1}}(-2m)^{-s}. \end{aligned}$$

Nun können wir wieder, wie in Abschnitt 1.6.1 beschrieben, induktiv eine Folge $(g_{j,\sigma})$ definieren, so dass die Linearformen

$$B_{n-1} := \sum_{j=0}^{\mu(n)}\sum_{\sigma=0}^{\tau_j(n)} a_{j,\sigma}(n-1)g_{j,\sigma}, \tag{2.10}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$0 < |B_{n-1}| \leq |d_{n-1}| \tag{2.11}$$

genügen.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass durch

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}P_{n-1}(z) \tag{2.12}$$

eine ganze Funktion mit dem im Satz angegebenen Wachstumsverhalten definiert wird.

2.4.2 Ein Hilfssatz

Ziel dieses Abschnitts ist es Ausdrücke der Form $\prod_{k=0}^{m-1}(m_0^2+k^2)$ mit $m, m_0 \in \mathbb{N}$ möglichst gut abzuschätzen. Es gilt das folgende

Lemma 2.8
Sind $m, m_0 \in \mathbb{N}$, so ist

$$\log \prod_{k=0}^{m-1} (m_0^2 + k^2) = h(m; m_0) + \mathcal{O}\left(\log(m + m_0)\right), \tag{2.13}$$

wobei

$$h(m; m_0) := m \log(m^2 + m_0^2) - 2m_0 \arctan\left(\frac{m_0}{m}\right) - 2m + \pi m_0$$

gesetzt ist.

Beweis

Aus der Funktionalgleichung (2.7) der Γ–Funktion folgt

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{m-1} (m_0^2 + k^2) &= \prod_{k=0}^{m-1} (k - im_0)(k + im_0) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k + 1 - im_0)}{\Gamma(k - im_0)} \frac{\Gamma(k + 1 + im_0)}{\Gamma(k + im_0)} \\ &= \frac{\Gamma(m - im_0)}{\Gamma(-im_0)} \frac{\Gamma(m + im_0)}{\Gamma(im_0)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nach der Stirlingschen Formel gilt bekanntermaßen für $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$ bei festem $\delta > 0$

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

wobei die Konstante im $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$-Ausdruck nur von δ abhängt.

Hiermit ergibt sich

$$|\Gamma(z)| = \exp\left(\mathrm{Re}(z \log z - z) + \mathcal{O}\left(\log |z|\right)\right).$$

Wegen

$$\mathrm{Re}(z\log z) = \mathrm{Re}(z)\log|z| - \mathrm{Im}(z)\mathrm{arg}(z)$$

haben wir also

$$|\Gamma(z)\Gamma(\overline{z})| = \exp\left(2\mathrm{Re}(z)\log|z| - 2\mathrm{Im}(z)\mathrm{arg}(z) - 2\mathrm{Re}(z) + \mathcal{O}\left(\log|z|\right)\right),$$

woraus sich mit (2.14) dann (2.13) ergibt.

□

2.4.3 Abschätzungen

Abschätzung von $|\mathbf{d_{2n-2}}|$ und $|\mathbf{d_{2n-1}}|$. Im Fall I gilt für $l \neq 1$

$$\begin{aligned}
|d_{2n-2}| &= \frac{1}{t!}\left|\prod_{\substack{k=0\\k\neq l-1}}^{m-1}((l-1)^2-k^2)^{-t}\prod_{h=0}^{l-2}((l-1)^2-h^2)^{-1}(2(l-1))^{-t}\right| \\
&= \frac{1}{t!}\left(\frac{4(l-1)}{(m-l)!(m+l-2)!}\right)^t\frac{1}{(2l-3)!(l-1)} \\
&\leq \frac{1}{t!}\left(\frac{4(l-1)}{(m-1)!(m-1)!}\right)^t\frac{1}{(2l-3)!(l-1)} \\
&= \frac{1}{t!}\exp\left(t\left(-2m\log m + 2m + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei wir $\binom{2(m-1)}{m-l} \leq \binom{2(m-1)}{m-1}$ und die Stirlingsche Formel benutzt haben. Ebenso ist für $l \neq 1$

$$\begin{aligned}
|d_{2n-1}| &= \left|\frac{1}{t!}\prod_{\substack{k=0\\k\neq -l+1}}^{m-1}((l-1)^2-k^2)^{-t}\prod_{h=0}^{l-2}((l-1)^2-h^2)^{-1}(-2(l-1))^{-t-1}\right| \\
&\leq \frac{1}{t!}\exp\left(t\left(-2m\log m + 2m + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen für $|d_{2n-2}|$ und $|d_{2n-1}|$ sind aber offensichtlich auch für $l = 1$ gültig.

Im Fall II erhalten wir wiederum mittels der STIRLINGschen Formel

$$\begin{aligned}
|d_{2n-2}| &= \frac{1}{(s-1)!}\prod_{k=0}^{m-1}(m^2-k^2)^{-t_{m+1}}(2m)^{-s+1} \\
&= \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{1}{m\,(2m-1)!}\right)^{t_{m+1}}\frac{1}{(2m)^{s-1}} \\
&= \frac{1}{(s-1)!}\frac{1}{(2m)^{s-1}}\exp\left(t_{m+1}\left(-2m\log(2m)+2m+\mathcal{O}\left(\log m\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|d_{2n-1}| &= \frac{1}{(s-1)!}\prod_{k=0}^{m-1}(m^2-k^2)^{-t_{m+1}}(2m)^{-s} \\
&= \frac{1}{(s-1)!}\frac{1}{(2m)^{s}}\exp\left(t_{m+1}\left(-2m\log(2m)+2m+\mathcal{O}\left(\log m\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Sei nun $r \in \mathbb{R}_+$ groß. Wir wollen $|g(z)|$ auf $|z| \leq r$ abschätzen. Dazu definieren wir $m_0 := m_0(r)$ durch $m_0 - 1 \leq r < m_0$.

Abschätzung von $|\mathbf{P_{2n-2}(z)}|$ und $|\mathbf{P_{2n-1}(z)}|$ auf $|\mathbf{z}| \leq \mathbf{r}$. Es sei $h(m; m_0)$ wie in Lemma 2.8 definiert. Dann ergibt sich aus (2.13) im Fall I

$$\begin{aligned}
&\max\left\{|P_{2n-2}(z)|\,,|P_{2n-1}(z)|\right\} \\
\leq\; &\prod_{k=0}^{m-1}(m_0^2+k^2)^t\prod_{h=0}^{l-2}(m_0^2+h^2)(m_0+l-1) \\
\leq\; &\exp\left(t\left(h(m;m_0)+\mathcal{O}\left(\log(m+m_0)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

da wegen $l \leq m$ und $t \geq t_m$

$$\prod_{h=0}^{l-2}(m_0^2+h^2) \quad\leq\quad \exp\left(t\cdot\mathcal{O}\left(\log(m+m_0)\right)\right)$$

ist.

Im Fall II gilt

$$\begin{aligned}
&\max\left\{|P_{2n-2}(z)|\,,|P_{2n-1}(z)|\right\} \\
=\; &\prod_{k=0}^{m-1}(m_0^2+k^2)^{t_{m+1}}(m_0^2+m^2)^{s-1}(m+m_0) \\
\leq\; &(m_0^2+m^2)^{s-1}\exp\left(t_{m+1}\left(h(m;m_0)+\mathcal{O}\left(\log(m+m_0)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir alles beisammen, um $|g(z)|$ auf $|z| \le r$ abzuschätzen. Es ist

$$\begin{aligned} |g(z)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n-2}|\,|P_{2n-2}(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n-1}|\,|P_{2n-1}(z)| \\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |d_{2mt+2l-2}|\,|P_{2mt+2l-2}(z)| \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} \left|d_{2mt_{m+1}+2s-2}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-2}(z)\right| \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |d_{2mt+2l-1}|\,|P_{2mt+2l-1}(z)| \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} \left|d_{2mt_{m+1}+2s-1}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-1}(z)\right| \\ &=: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_1' + \Sigma_2'. \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass die Abschätzungen von $|d_{2n-1}|$ und $|P_{2n-1}(z)|$ denen von $|d_{2n-2}|$ und $|P_{2n-2}(z)|$ entsprechen. Folglich lassen sich Σ_1' und Σ_2' genau wie Σ_1 und Σ_2 abschätzen.

Wir schätzen nun zuerst Σ_2 ab, da sich hier einige Größen, die im Folgenden auftreten, (z.B. $2\log 2$ und α_0) in natürlicher Weise ergeben.

Abschätzung von $\boldsymbol{\Sigma_2}$. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} k(x; m_0; \gamma) &:= h(x; m_0) - x \log x^2 + 2x - \gamma x \\ &= x \log \frac{x^2 + m_0^2}{x^2} - 2m_0 \arctan\left(\frac{m_0}{x}\right) + \pi m_0 - \gamma x \end{aligned}$$

gesetzt. Dann ergeben die obigen Abschätzungen für $m \ge 1$

$$\begin{aligned} &\left|d_{2mt_{m+1}+2s-2}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-2}(z)\right| \\ \le\ &\frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{m^2 + m_0^2}{2m}\right)^{s-1} \exp\left(t_{m+1}\left(k(m; m_0; 2\log 2) + \mathcal{O}\left(\log(m + m_0)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Es ist

$$\sum_{s=1}^{t_{m+1}} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{m^2 + m_0^2}{2m}\right)^{s-1} \le \exp(m)$$

und somit haben wir

$$\left|d_{2mt_{m+1}+2s-2}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-2}(z)\right| \le \exp\left(k(m; m_0; 2\log 2 - \varepsilon)t_{m+1}\right)$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, falls nur $m \ge m_0$ genügend groß ist.

Es ist $\frac{d}{dx}k(x; m_0; 2\log 2) = \log \frac{x^2+m_0^2}{x^2} - 2\log 2$. Als Funktion in x betrachtet, nimmt $k(x; m_0; 2\log 2)$ also ihr Maximum auf $\mathbb{R}_+$ in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}m_0$ an, ist streng monoton fallend auf $x > \frac{1}{\sqrt{3}}m_0$ und hat eine Nullstelle bei $x = \alpha_0 m_0$ mit $\alpha_0 \approx 1,902859355\ldots$. Es ist also $k(\alpha_0; 1; 2\log 2) = 0$.

Setzen wir $\alpha := \alpha(\delta) := (1+\delta)\alpha_0$ mit einem $\delta > 0$, so ist $k(\alpha; 1; 2\log 2) < 0$.

Wählen wir ε in Abhängigkeit von δ genügend klein, so ist auch $k(x; m_0; 2\log 2 - \varepsilon)$ auf $x \ge \alpha m_0$ negativ und streng monoton fallend. Und für $\varepsilon < -\frac{1}{2}k(\alpha; 1; 2\log 2)$ haben wir $k(\alpha m_0; m_0; 2\log 2 - \varepsilon) = k(\alpha; 1; 2\log 2 - \varepsilon)m_0 < \frac{1}{2}k(\alpha; 1; 2\log 2)m_0$.

Also folgt mittels der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=[\alpha m_0]+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} \left|d_{2mt_{m+1}+2s-2}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-2}(z)\right| \\
\le\ & \sum_{m=[\alpha m_0]+1}^{\infty} \exp\left(k(m; m_0; 2\log 2 - \varepsilon)t_{m+1}\right) \\
\le\ & \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(k(\alpha m_0; m_0; 2\log 2 - \varepsilon)m\right) \\
=\ & \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

bei $m_0 \to +\infty$, wobei die Konstante in dem Ausdruck $\mathcal{O}(1)$ wegen unserer Wahl von α und ε von δ abhängt.

Da $k(x; m_0; 2\log 2)$ ihr Maximum in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}m_0$ annimmt, haben wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{[\alpha m_0]} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} \left|d_{2mt_{m+1}+2s-2}\right| \left|P_{2mt_{m+1}+2s-2}(z)\right| \\
\le\ & \exp\left(t_{[\alpha m_0]+1} \cdot \mathcal{O}(m_0)\right).
\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt dies

$$\Sigma_2 \le \exp\left(t_{[\alpha m_0]+1} \cdot \mathcal{O}(m_0)\right)$$

und somit wegen der Definition der Folge (t_n)

$$\log\log\Sigma_2 \le \alpha 2\log 2\cdot m_0 + o\left(m_0\right).$$

Abschätzung von $\boldsymbol{\Sigma_1}$. Aus den obigen Abschätzungen für $|P_{2n-2}(z)|$ und $|d_{2n-2}|$ im Fall I ergibt sich

$$\begin{aligned} & |d_{2mt+2l-2}|\,|P_{2mt+2l-2}(z)| \\ \le\ & \frac{1}{t!}\exp\left(t\left(k(m;m_0;0)+\mathcal{O}\left(\log(m+m_0)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Die Funktion $k(x;m_0;0) = x\log\frac{x^2+m_0^2}{x^2} - 2m_0\arctan\left(\frac{m_0}{x}\right) + \pi m_0$ ist als Funktion in x monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$, da $\frac{d}{dx}k(x;m_0;0) = \log\frac{x^2+m_0^2}{x^2}$ dort stets positiv ist. Wegen $k(\alpha m_0;m_0;0) = k(\alpha;1;0)m_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{[\alpha m_0]}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\frac{1}{t!}\exp\left(t\left(k(m;m_0;0)+\mathcal{O}\left(\log(m+m_0)\right)\right)\right) \\ \le\ & \sum_{m=1}^{[\alpha m_0]}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\frac{1}{t!}\exp\left(t\left(k(\alpha;1;0)m_0+\mathcal{O}\left(\log(m_0)\right)\right)\right) \\ \le\ & \exp\left(\exp\left(k(\alpha;1;0)m_0+\mathcal{O}\left(\log(m_0)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Mit der STIRLINGschen Formel ergibt sich für den Reihenrest

$$\begin{aligned} & \sum_{m=[\alpha m_0]+1}^{\infty}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\frac{1}{t!}\exp\left(t\left(k(m;m_0;0)+\mathcal{O}\left(\log(m)\right)\right)\right) \\ =\ & \sum_{m=[\alpha m_0]+1}^{\infty}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\exp\left(t\left(k(m;m_0;2\log 2-\varepsilon)\right)\right) \\ \le\ & \sum_{t=0}^{\infty}\exp(k(\alpha;1;2\log 2-\varepsilon)m_0 t) = \mathcal{O}\left(1\right) \end{aligned}$$

bei $m_0\to+\infty$, wobei die Konstante im Ausdruck $\mathcal{O}\left(1\right)$ wegen unserer Wahl von α und ε wieder von δ abhängt.

Wir haben also

$$\Sigma_1 \le \exp\left(\exp\left(k(\alpha;1;0)m_0+\mathcal{O}\left(\log(m_0)\right)\right)\right)$$

und

$$\Sigma_2 \leq \exp\left(\exp\left(\left(\alpha \cdot 2\log 2\right) m_0 + o\left(m_0\right)\right)\right).$$

Nach der Definition von α_0 ist

$$k(\alpha_0; 1; 0) = \alpha_0 \log\left(\frac{\alpha_0^2 + 1}{\alpha_0^2}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{\alpha_0}\right) + \pi = \alpha_0 \cdot 2 \cdot \log 2 < 2,638.$$

Wegen $\alpha = (1+\delta)\alpha_0$ ist $\lim_{\delta\to 0} k(\alpha; 1; 0) = k(\alpha_0; 1; 0)$. Und somit haben wir wegen $m_0 = r + \mathcal{O}\left(1\right)$ gezeigt, dass für jedes $\epsilon > 0$

$$\log\log |g|_r \leq \alpha_0 2 \log 2(1+\epsilon) r$$

gilt, falls nur r genügend groß ist.

2.5 Beweis von Satz 2.6

Es sei f eine ganze Funktion mit $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass für alle großen $r \in \mathbb{R}_+$

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma r\right) \tag{2.15}$$

mit einem $\gamma < \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ gilt. Wir zeigen nun, dass unter diesen Annahmen f eine algebraische Funktion sein muss.

Es sei N stets hinreichend groß gewählt.

$\theta > 1$ ist ein Parameter, der später geeignet gewählt wird.

Wir setzen $S_n := \left[\exp\left(\gamma\theta n\right)\right] + 1$ für $n \in \mathbb{N}$, $H := \left[S_N \log^2 N\right] + 1$ und $K := \left[\frac{N}{\log N}\right] + 1$.

1. Schritt: Es existieren $a_{h,k} \in \mathbb{Z}$, $(h = 0, \ldots, H-1;\ k = 0, \ldots, K-1)$, mit

$$0 < \max_{h,k} |a_{h,k}| \leq \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(\frac{N}{\log N}\right)\right),$$

so dass die ganze Funktion

$$F(z) := \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} z^h f(z)^k$$

für alle $n \in \{-N+1, \ldots, N-1\}$ *der Bedingung*

$$\mathrm{ord}_0(F, n) \geq S_N$$

genügt.

Wir betrachten das folgende System von $(2N-1)S_N$ linearen Gleichungen in den $HK \geq S_N N \log N$ Unbekannten $a_{h,k}$

$$F^{(\sigma)}(n) = 0 \qquad \begin{array}{c}\text{für } n = -N+1, \ldots, N-1 \\ \text{und } \sigma = 0, \ldots, S_N - 1.\end{array}$$

Wegen

$$\log |f|_N \leq \exp(\gamma N) \leq S_N$$

sieht man genau wie im Beweis von Satz 2.4, dass die Beträge der Koeffizienten des obigen Gleichungssystem durch

$$\exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}(N)\right)$$

beschränkt sind, und die Behauptung folgt aus dem SIEGELschen Lemma.

2. Schritt: Für alle $M \geq N$ *und* $S \in \{S_M, \ldots, S_{M+1}\}$ *gilt*

$$\forall m \in \{-M+1, \ldots, M-1\} : \ \mathrm{ord}_0(F, m) \geq S. \qquad (I_{M,S})$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Der 1. Schritt liefert uns die Induktionsverankerung (I_{N,S_N}).

Es sei $(I_{M,S})$ bereits gezeigt.

Wir zeigen nun:

1.) Ist $S_M \leq S < S_{M+1}$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M,S+1})$.

2.) Ist $S = S_{M+1}$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M+1,S})$.

Zu 1.): Es ist $S_M \leq S < S_{M+1}$. Wir definieren

$$P_{M,S}(z) := \prod_{\mu=-(M-1)}^{M-1} (z-\mu)^S.$$

Sei $m \in \{-(M-1), \dots, M-1\}$. Dann ist wieder nach dem Residuensatz und wegen $(I_{M,S})$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\theta M} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - m) P_{M,S}(\xi)} \quad = \quad \frac{1}{S!} F^{(S)}(m) \prod_{\substack{\mu=-(M-1) \\ \mu \neq m}}^{M-1} (m-\mu)^{-S}.$$

Es ist

$$\left| \prod_{\substack{\mu=-(M-1) \\ \mu \neq m}}^{M-1} (m-\mu) \right| \leq (2(M-1))! < \Gamma(2M).$$

Wegen der Funktionalgleichung der Γ–Funktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ gilt für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = \theta M$

$$\begin{aligned} |P_{M,S}(\xi)| &= |\xi|^S \left| \prod_{\mu=1}^{M-1} (\xi^2 - \mu^2)^S \right| \\ &\geq \prod_{\mu=0}^{M-1} \left| \frac{\Gamma(|\xi| - \mu + 1)}{\Gamma(|\xi| - \mu)} \right|^S \prod_{\mu=1}^{M-1} \left| \frac{\Gamma(|\xi| + \mu + 1)}{\Gamma(|\xi| + \mu)} \right|^S \\ &= \left| \frac{\Gamma(|\xi| + M)}{(|\xi| - M + 1)\Gamma(|\xi| - M)} \right|^S . \end{aligned}$$

Mit der Stirlingschen Formel folgt dann sofort

$$\left| \frac{\Gamma(2M)\Gamma(|\xi| - M)}{\Gamma(|\xi| + M)} \right| \quad = \quad \exp\left(M \log\left(\frac{4(\theta-1)^{\theta-1}}{(\theta+1)^{\theta+1}} \right) + \mathcal{O}(\log M) \right).$$

Für große M gilt

$$\log |f|_{\theta M} \leq S_M,$$

und somit haben wir

$$\begin{aligned} |F|_{\theta M} &\leq (H+1)(K+1) \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(\frac{N}{\log N} \right) + H \log(\theta M) + K S_M \right) \\ &\leq \exp\left(S_M \cdot \mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M} \right) \right). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\log S \quad \leq \quad \log S_{M+1}$$

ist, so ergibt sich mittels Standardabschätzung

$$\begin{aligned}\left|F^{(S)}(m)\right| &\leq S!\,|F|_{\theta M}\left(\frac{\Gamma(2M)\Gamma(|\xi|-M)}{\Gamma(|\xi|+M)}\right)^S\\ &\leq \exp\left(S\left(\log S_{M+1}+M\log\left(\frac{4(\theta-1)^{\theta-1}}{(\theta+1)^{\theta+1}}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Wenn wir nun noch die Definition von S_M eintragen, erhalten wir

$$\left|F^{(S)}(m)\right| \leq \exp\left(S\left(\gamma\theta M+M\log\left(4\frac{(\theta-1)^{\theta-1}}{(\theta+1)^{\theta+1}}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M}\right)\right)\right).$$

Die reellwertige Funktion $h(\theta) := -\log\left(4\frac{(\theta-1)^{\theta-1}}{(\theta+1)^{\theta+1}}\right)/\theta$ nimmt ihr Maximum bei $\theta = \sqrt{5}$ an. Wegen $\gamma < h(\sqrt{5}) = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 0,96242365$ folgt, dass $\left|F^{(S)}(m)\right| < 1$ und somit gleich Null ist, falls N (und damit auch M) hinreichend groß ist.

zu 2.): Es ist $S = S_{M+1}$. Es sei $m \in \{-M, M\}$ und $\sigma \in \{0,\ldots,S\}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass σ die kleinste Zahl in $\{0,\ldots,S\}$ ist, für die wir $F^{(\sigma)}(m) = 0$ noch nicht gezeigt haben, d.h. es gilt $F^{(t)}(m) = 0$ für $t = 0,\ldots,\sigma-1$. Dann folgt aus dem Residuensatz und $(I_{M,S})$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\theta M}\frac{F(\xi)d\xi}{(\xi-m)^{\sigma+1}P_{M,S}(\xi)} = \frac{1}{\sigma!}F^{(\sigma)}(m)P_{M,S}(m)^{-1},$$

wobei $P_{M,S}(z)$ wie oben definiert ist. Jetzt verläuft der Beweis vollkommen analog zum Fall $S < S_{M+1}$.

3. Schritt: $F \equiv 0$. Somit ist f eine algebraische Funktion.

Dies ist klar, da $F^{(\sigma)}(0) = 0$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ nach Schritt 2 gilt.

Kapitel 3

Der imaginär-quadratische Fall

3.1 Definitionen und Ergebnisse

Wir wollen nun Analoga zu den Ergebnissen in den ersten beiden Kapiteln in dem Fall finden, dass eine Funktion f und ihre Ableitungen den Ganzheitsring $O_{\mathbb{K}}$ eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{K}$ in sich abbilden. Insbesondere wollen wir ein imaginär-quadratisches Analogon zu den Sätzen 1.1 und 2.1 finden.

In diesem gesamten Kapitel gelten die folgenden **Generalvoraussetzungen**: Es sei $\mathbb{K}$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $O_{\mathbb{K}}$ der Ring der ganzalgebraischen Zahlen in $\mathbb{K}$. Bekanntlich ist der Ganzheitsring $O_{\mathbb{K}}$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Elemente von $O_{\mathbb{K}}$, geordnet nach wachsendem Betrag und Argument, seien mit $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ bezeichnet. Der Flächeninhalt eines Fundamentalparallelogramms von $O_{\mathbb{K}}$ sei mit a bezeichnet.

Wie in den vorangegangenen Kapiteln auch, wollen wir zuerst Funktionen studieren, die an den ζ_n für große $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen von hoher Ordnung haben.

Wir setzen

$$\lambda_0(f; O_{\mathbb{K}}) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \operatorname{ord}_0(f, \zeta_n)}{\log n}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau_0(f; O_{\mathbb{K}}; \lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \operatorname{ord}_0(f, \zeta_n)}{n^\lambda}.$$

Ist $\lambda_0(f; O_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{R}_+$, so definieren wir $\tau_0(f; O_{\mathbb{K}}) := \tau_0(f; O_{\mathbb{K}}; \lambda_0(f; O_{\mathbb{K}}))$. Unser Eindeutigkeitssatz im imaginär-quadratischen Fall lautet dann

Satz 3.1
Es sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$

(i) *Für jede ganze, nicht konstante Funktion f mit $\lambda_0(f; O_{\mathbb{K}}) \geq \lambda$ gilt*

$$A_{2\lambda}(f) \geq \tau_0(f; O_{\mathbb{K}}; \lambda) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\lambda}.$$

(ii) *Zu jedem $\tau \in \mathbb{R}_+$ existiert eine ganztranszendente Funktion g mit $\lambda_0(g; O_{\mathbb{K}}) = \lambda, \tau_0(g; O_{\mathbb{K}}) = \tau$ und*

$$A_{2\lambda}(g) \leq \tau \frac{e^{2\lambda}}{2e\lambda} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\lambda}.$$

Bemerkung
Wie im additiven Fall können wir hier nicht zeigen, dass die Aussage (i) im Allgemeinen bestmöglich ist. Der Teil (ii) zeigt aber, dass (i) für $\lambda = \frac{1}{2}$ bestmöglich ist und dass für ganztranszendentes f mit $\lambda_0(f; O_{\mathbb{K}}) \geq \lambda \in \mathbb{R}_+$ im Allgemeinen nicht $A_{2\lambda}(f) = +\infty$ gilt.

Kommen wir zu den auf $O_{\mathbb{K}}$ ganzwertigen Funktionen. Wir definieren

$$\lambda_{O_{\mathbb{K}}}(f) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \log_+ \operatorname{ord}_{O_{\mathbb{K}}}(f, \zeta_n)}{\log n}.$$

Weiter sei für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau_{O_{\mathbb{K}}}(f; \lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_+ \operatorname{ord}_{O_{\mathbb{K}}}(f, \zeta_n)}{n^{\lambda}}$$

gesetzt, und wir setzen $\tau_{O_{\mathbb{K}}}(f) := \tau_{O_{\mathbb{K}}}(f; \lambda_{O_{\mathbb{K}}}(f))$, falls $\lambda_{O_{\mathbb{K}}}(f) \in \mathbb{R}_+$ ist.

Nun gilt der folgende

Satz 3.2
Es sei $\lambda \in]0, 1]$ und $\tau \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt für jede ganztranszendente Funktion f mit $\tau_{O_{\mathbb{K}}}(f; \lambda) \geq \tau$:

(i) *Ist $\lambda < 1$, so ist $A_{2\lambda}(f) \geq \left(\frac{\pi}{ea}\right)^{\lambda} \tau$.*

(ii) *Ist $\lambda = 1$, so ist $A_2(f) \geq \frac{\pi}{eax_0}\tau$, wobei x_0 die in $\mathbb{R}_{>1}$ eindeutig bestimmte Nullstelle von $k(x) = x - \log x - 2\tau - 1$ bezeichnet.*

Insbesondere ist $A_2(f) \geq \frac{\pi}{2ea}$, falls $\tau_{O_{\mathbb{K}}}(f;1) = +\infty$ ist.

Beweis (der Zusatzbehauptung in (ii))
Es sei $\tau \in \mathbb{R}_+$ und $T = T(\tau)$ die in $\mathbb{R}_{>1}$ eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$T = 1 + 2\tau + \log T.$$

Offensichtlich gilt $T(\tau) \to \infty$ für $\tau \to \infty$. Genauer muss wegen $\lim_{\tau\to\infty}(1 + 2\tau + \log T)/T = 1$ die folgende Asymptotik bei $\tau \to \infty$ gelten

$$T = 2\tau + o(\tau).$$

Hieraus folgt nun der Zusatz.

□

Bemerkung
Interessanterweise unterscheiden sich hier im imaginär-quadratischen Fall die gefundenen Wachstumslücken des Ganzwertigkeitsresultats und des Eindeutigkeitssatzes 3.1 (i) für $\lambda < 1$ um einen Faktor $e^{-\lambda}$. Im multiplikativen und im additiven Fall stimmten die Wachstumslücken in den entsprechenden Resultaten für kleine λ überein.

Hieraus folgt nun sofort ein Analogon zu den Sätzen 1.1 und 2.1 im imaginär-quadratischen Fall.

Korollar 3.3
Für jede ganztranszendente Funktion f mit $f^{(\sigma)}(O_{\mathbb{K}}) \subset O_{\mathbb{K}}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$A_2(f) \geq \frac{\pi}{2ea}.$$

Die Güte von 3.2 (ii) und des vorstehendes Korollars lässt sich am nächsten Satz ablesen.

Satz 3.4
Es existiert eine ganztranszendente Funktion g mit $g^{(\sigma)}(O_{\mathbb{K}}) \subset O_{\mathbb{K}}$ für alle $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und

$$A_2(g) \leq \frac{\pi}{2a}.$$

3.2 Zwei Hilfssätze

Unter den Generalvoraussetzungen dieses Kapitels gelten die folgenden beiden Hilfssätze.

Lemma 3.5
Es gibt eine Konstante C_1, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \theta\,|\zeta_n|$ und $n \geq 2$

$$\left|\log\left|\prod_{j=0}^{n}{}^{*}(z-\zeta_j)\right| - \frac{1}{2}n\log n - nw(\theta)\right| \leq C_1 \max\{1,\theta\}\sqrt{n}\log n$$

gilt, wobei $\prod^*$ bedeutet, dass sich das Produkt nur über die Faktoren erstreckt, deren Betrag ≥ 1 ist, und wo

$$w(\theta) = \begin{cases} \log\theta - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a} & \text{, wenn } \theta \geq 1 \\ \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a} & \text{, wenn } \theta \leq 1. \end{cases}$$

Beweis
Dies ist Lemma 3 in GRAMAIN[27].

□

Lemma 3.6
Es gibt eine Konstante C_2, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left||\zeta_n| - \sqrt{\frac{an}{\pi}}\right| \leq C_2.$$

Beweis
Dies ist Lemma 2 in GRAMAIN[27].

□

3.3 Beweis von Satz 3.1

3.3.1 Beweis von Teil (i)

Wir wenden wieder die CARLEMANsche Formel (Satz 2.7) an.

Es seien $\lambda, \tau \in \mathbb{R}_+$, und f sei eine ganze Funktion mit $\tau_0(f; O_{\mathbb{K}}; \lambda) \geq \tau$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 := N_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$\operatorname{ord}_0(f, \zeta_n) \geq \exp\left((\tau - \varepsilon)n^\lambda\right) \tag{3.1}$$

ist. Wir nehmen an, dass mit einem $\gamma < \tau(\pi/a)^\lambda$

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma r^{2\lambda}\right) \tag{3.2}$$

für alle genügend großen $r \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Wir fixieren $\rho \in \mathbb{R}_+$ so, dass es den Voraussetzungen in der Carlemanschen Formel genügt.

Es sei $R \in \mathbb{R}_+$ groß, insbesondere größer als N_0 und ρ.

Da $O_{\mathbb{K}}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ bildet, gibt es eine Konstante $C := C(\mathbb{K})$, so dass zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $\zeta \in O_{\mathbb{K}}$ mit $|z - \zeta| \leq C$ existiert. Folglich findet man zu jedem großen $R \in \mathbb{R}_+$ ein $\zeta_n \in O_{\mathbb{K}}$ mit $|R - \zeta_n| \leq C$. Wir können somit annehmen, dass $\frac{1}{2} \leq \cos\arg(\zeta_n) \leq 1$ gilt. Nach Lemma 3.6 ist $n = \frac{\pi}{a}R^2 + \mathcal{O}(R)$.

f hat also nach (3.1) an ζ_n eine Nullstelle von hoher Ordnung, und es gilt

$$\Sigma(f, R) \quad \geq \quad \exp\left((\tau(\pi/a)^\lambda - 2\varepsilon)R^{2\lambda}\right).$$

Aus (3.2) folgt

$$\begin{aligned} I(f, R) &\leq \exp\left(\gamma R^{2\lambda} + \mathcal{O}(1)\right) \quad \text{und} \\ J(f, R) &\leq \exp\left(\gamma R^{2\lambda}\right) \end{aligned}$$

für alle großen R. Wenn f nicht identisch verschwindet, so folgt aus (2.1) auf Seite 36

$$\exp\left(R^{2\lambda}(\tau(\pi/a)^\lambda - 2\varepsilon - \gamma)\right) = \mathcal{O}(1) \quad \text{bei } R \to \infty.$$

Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch zu $\gamma < \tau(\pi/a)^\lambda$, falls ε genügend klein gewählt wird.

3.3.2 Beweis von Teil (ii)

Wir betrachten die durch das unendliche Produkt

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j \right) \right)^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

definierte Funktion.

Wir wollen nun $|g|_r$ für große $r \in \mathbb{R}_+$ abschätzen. Es sei $m := m(r) := \min\{n \in \mathbb{N} |\, r \leq |\zeta_n| < |\zeta_{n+1}|\}$. Nach Lemma 3.6 ist dann $m = \frac{\pi}{a} r^2 + \mathcal{O}(r)$.

Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$.

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert nach Lemma 3.6 ein $J \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq J$

$$\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right| \leq \frac{\sqrt{am/\pi} + C_2}{\sqrt{an/\pi} - C_2} \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{m}{n}}$$

ist. Offensichtlich ist

$$\prod_{n=1}^{J-1} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{[e^{\tau n^\lambda}]} \leq \exp\left(\exp\left(\mathcal{O}\left(\log m\right)\right)\right).$$

Für $J \leq n \leq m$ ist

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j}\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|^j\right) \\
\leq &\exp\left(\tau n^\lambda \left((1+\varepsilon)\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^{[\tau n^\lambda]} + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=J}^{m} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{[\tau n^\lambda]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{[e^{\tau n^\lambda}]} \\
\leq \quad &\exp\left(\sum_{n=J}^{m} \exp(\tau n^\lambda(1 + \frac{1}{2}\log m - \frac{1}{2}\log n + \log(1+\varepsilon)) + \mathcal{O}\left(\log m\right))\right).
\end{aligned}$$

Die Funktion einer reellen Veränderlichen $h(x) := x^\lambda(1 + \frac{1}{2}\log m - \frac{1}{2}\log x + \log(1+\varepsilon))$ nimmt ihr Maximum auf $\mathbb{R}_+$ in $x = m \cdot (1+\varepsilon)^2 \exp(2 - 1/\lambda) =: m \cdot \alpha(\lambda, \varepsilon)$ an, ist auf $]0, \alpha(\lambda,\varepsilon)m[$ streng monoton wachsend und auf $x > \alpha(\lambda,\varepsilon)m$ streng monoton fallend.

Wir erhalten also für $\lambda \leq \frac{1}{2}$

$$\log \prod_{n=1}^{m} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \leq \exp\left(\tau h(\alpha(\lambda, \varepsilon) m) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right)$$

und für $\lambda > \frac{1}{2}$

$$\log \prod_{n=1}^{m} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \leq \exp\left(\tau (1+\varepsilon) m^\lambda + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right).$$

Für $n > m$ gilt $|z/\zeta_n| < 1$, und wir haben

$$\log\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j.$$

Dann ist für $n \geq [(1+\varepsilon)m] + 1$

$$\sum_{j=\left[\tau n^\lambda\right]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|^j \leq \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|^{\left[\tau n^\lambda\right]+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{[(1+\varepsilon)m]+1}}\right|^j \leq \frac{\left|\zeta_{[(1+\varepsilon)m]+1}\right|}{\left|\zeta_{[(1+\varepsilon)m]+1}\right| - |\zeta_m|} \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|^{\left[\tau n^\lambda\right]+1}.$$

Da nach Lemma 3.6 $\lim_{m\to\infty} \left|\frac{\zeta_{[(1+\varepsilon)m]+1}}{\zeta_m}\right| > 1$ ist, gilt $\left|\zeta_{[(1+\varepsilon)m]+1}\right| - |\zeta_m| \geq 1$ für alle großen m. Hieraus folgt nun für $n \geq [(1+\varepsilon)m] + 1$, wenn wir auf die vorstehende Formel wiederum Lemma 3.6 anwenden,

$$\begin{aligned}
&\log \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j \right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq\ & \exp\left(\tau n^\lambda\right) \sum_{j=\left[\tau n^\lambda\right]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right|^j \\
\leq\ & \exp\left(\tau n^\lambda (1 + \frac{1}{2}\log m - \frac{1}{2}\log n + \log(1+\varepsilon)) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right) \\
=\ & \exp\left(\tau h(n) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right).
\end{aligned}$$

h hat eine Nullstelle in $x = e^2(1+\varepsilon)^2 m$. Ist $n \geq 4e^2(1+\varepsilon)^2 m$, so ist $h(n) = n^\lambda(1 + \frac{1}{2}\log m - \frac{1}{2}\log n + \log(1+\varepsilon)) \leq -\log 2 \cdot n^\lambda$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
&\log \prod_{n=[4e^2(1+\varepsilon)^2 m]+1}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq\ & \exp\left(\mathcal{O}\left(\log m\right)\right) \sum_{n=[4e^2(1+\varepsilon)^2 m]+1}^{\infty} \exp\left(\tau h(n)\right) \\
\leq\ & \exp\left(\mathcal{O}\left(\log m\right)\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\tau \log 2 \cdot n^\lambda\right) = \exp\left(\mathcal{O}\left(\log m\right)\right).
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei wieder die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{\left[n^\lambda\right]}$ für $|z| < 1$ ausgenutzt.

Als nächstes wollen wir

$$\prod_{n=[(1+\varepsilon)m]+1}^{\left[4e^2(1+\varepsilon)^2 m\right]} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

abschätzen. Es ist

$$\begin{aligned}
&\log \prod_{n=[(1+\varepsilon)m]+1}^{\left[4e^2(1+\varepsilon)^2 m\right]} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq\ & \max_{[(1+\varepsilon)m]+1 \leq n \leq [4e^2(1+\varepsilon)^2 m]} \exp\left(\tau h(n) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right) \\
\leq\ & \begin{cases} \exp\left(\tau h((1+\varepsilon)m) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right), & \text{falls } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(\tau h(\alpha(\lambda,\varepsilon)m) + \mathcal{O}\left(\log m\right)\right), & \text{falls } \lambda > \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch

$$\prod_{n=m+1}^{[(1+\varepsilon)m]} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right)\right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]}$$

abschätzen. Wir haben

$$
\begin{aligned}
&\prod_{n=m+1}^{[(1+\varepsilon)m]} \left| \left(1-\frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\left[\tau n^\lambda\right]} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right)^j\right) \right|^{\left[e^{\tau n^\lambda}\right]} \\
\leq\ & \max_{m<n\leq[(1+\varepsilon)m]} \exp\left(\tau n^\lambda \left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m+1}}\right| e^{\tau((1+\varepsilon)m)^\lambda} + \mathcal{O}(\log m)\right) \\
\leq\ & \exp\left(\exp\left(\tau((1+\varepsilon)m)^\lambda + \mathcal{O}(\log m)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Wegen $m = \frac{\pi}{a} r^2 + \mathcal{O}(r)$ ergibt sich aus den vorstehenden Abschätzungen für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$
\log |g|_r \leq \exp\left(\tau \frac{e^{2\lambda-1}}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{a}\right)^\lambda (1+\varepsilon)^{2\lambda} r^{2\lambda} + \mathcal{O}\left(r^\lambda\right)\right).
$$

Also ist $A_{2\lambda}(g) \leq \tau \left(\frac{\pi}{a}\right)^\lambda \frac{e^{2\lambda}}{2e\lambda}$. $\lambda_0(g) = \lambda$ und $\tau_0(g) = \tau$ sind nach Konstruktion klar. Da g offensichtlich nicht die Nullfunktion ist, muss g eine transzendente Funktion sein.

3.4 Beweis von Satz 3.2

Es sei $\lambda \in]0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ und f sei eine ganze Funktion mit $\tau_{O_\mathbb{K}}(f;\lambda) \geq \tau$.

Somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$
\operatorname{ord}_{O_\mathbb{K}}(f,\zeta_n) \geq \exp\left((\tau-\varepsilon)n^\lambda\right) \tag{3.3}
$$

gilt.

Es sei x_0 wie im Satz. Die reellwertige, auf $\mathbb{R}_+$ stetige Funktion $k(x) := x - \log x - 2\tau - 1$ ist für $x > 1$ streng monoton wachsend, es ist $k(1) = -2\tau < 0$, und es gilt $\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty$. Somit hat die Gleichung $k(x) = 0$ genau eine Nullstelle in $]1,\infty[$, und unser x_0 ist eindeutig definiert.

Wir nehmen weiter an, dass ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit

$$
\gamma < \begin{cases} \left(\frac{\pi}{ea}\right)^\lambda \tau, & \text{falls } \lambda < 1 \\ \frac{\pi}{eax_0}\tau, & \text{falls } \lambda = 1 \end{cases} \tag{3.4}
$$

existiert, so dass

$$\log |f|_r \leq \exp\left(\gamma r^{2\lambda}\right) \tag{3.5}$$

für alle genügend großen $r \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Wir zeigen nun, dass f unter diesen Voraussetzungen eine algebraische Funktion ist.

Sei N stets hinreichend groß; insbesondere $N \geq N_0$ und so groß, dass (3.5) für $r \geq |\zeta_{N-1}|$ gilt.

Weiter sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass statt (3.4) sogar

$$\gamma < \begin{cases} \left(\frac{\pi}{ea}\right)^{\lambda} (\tau - \varepsilon), & \text{falls } \lambda < 1 \\ \frac{\pi}{eax_0}(\tau - \varepsilon), & \text{falls } \lambda = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

gilt.

Wir setzen nun $S_n := \left[e^{(\tau-\varepsilon)n^{\lambda}}\right]$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $H := \left[S_N \log^2 N\right] + 1$ und $K := \left[\frac{N}{\log N}\right] + 1$ gesetzt.

$T, \theta \in \mathbb{R}_{>1}$ sind Parameter, an die wir im Verlauf des Beweises Bedingungen stellen werden und die wir dann am Ende des Beweises für $\lambda < 1$ und $\lambda = 1$ gesondert festsetzen werden.

1. Schritt: Es existieren $a_{h,k} \in O_{\mathbb{K}}$, $(h = 0, \ldots, H-1;\ k = 0, \ldots, K-1)$, mit

$$0 < \max_{h,k} |a_{h,k}| \leq \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(\frac{N}{\log N}\right)\right),$$

so dass die ganze Funktion

$$F(z) := \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} z^h f(z)^k$$

für alle $n \in \{N, \ldots, [TN]\}$ der Bedingung

$$\operatorname{ord}_0(F, \zeta_n) \geq S_N$$

genügt.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$F^{(\sigma)}(\zeta_n) = 0$$

für $n = N, \ldots, [TN]$ und $\sigma = 0, \ldots, S_N - 1$. Dies sind $S_N([TN] - N + 1)$ Gleichungen in den $HK \geq S_N N \log N$ Unbekannten $a_{h,k}$. Ist $\gamma(Ta/\pi)^\lambda < \tau - \varepsilon$, so ist nach (3.5) und Lemma 3.6

$$\log |f|_{|\zeta_{[TN]}|} \leq \exp\left(\gamma\left(T\frac{a}{\pi}\right)^\lambda N^\lambda + o\left(N^\lambda\right)\right) \leq S_N,$$

falls N hinreichend groß ist, und für obige n und σ gilt

$$\left|f^{(\sigma)}(\zeta_n)\right| = \left|\frac{\sigma!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=|\zeta_n|+1} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta_n)^{\sigma+1}}\right| \leq \sigma! \exp\left(S_N + \mathcal{O}\left(\log N\right)\right).$$

Hieraus ergibt sich für die Koeffizienten des obigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} & \left|\sum_{\substack{\underline{\varkappa} \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ |\underline{\varkappa}|=\sigma}} \sigma! \binom{h}{\varkappa_{k+1}} n^{h-\varkappa_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \frac{f^{(\varkappa_j)}(n)}{\varkappa_j!}\right| \\ \leq\ & \sigma! 2^{\sigma+K+H} \exp\left(H \log N + K S_N + \mathcal{O}\left(N\right)\right) \\ \leq\ & \exp\left(S_N \cdot \mathcal{O}\left(N\right)\right) \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus dem Siegelschen Lemma.

2. Schritt: Für alle $M \geq N$ und $S \in \{S_{M-1}, \ldots, S_M\}$ gilt

$$\forall m \in \{M, \ldots, [TM]\} : \ \mathrm{ord}_0(F, m) \geq S. \tag{$I_{M,S}$}$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Der 1. Schritt liefert uns die Induktionsverankerung (I_{N,S_N}).

Es sei $(I_{M,S})$ bereits gezeigt.

Wir zeigen nun:

1.) Ist $S_{M-1} \leq S < S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M,S+1})$.

2.) Ist $S = S_M$, so gilt: $(I_{M,S}) \Longrightarrow (I_{M+1,S})$.

zu 1.): Es ist $S_{M-1} \leq S < S_M$. Nach dem Residuensatz und $(I_{M,S})$ gilt für $m \in \{M, \ldots, [TM]\}$

$$F^{(S)}(\zeta_m) = \frac{S!}{2\pi i} \prod_{\substack{\mu=M \\ \mu \neq m}}^{[TM]} (\zeta_m - \zeta_\mu)^S \int\limits_{|\xi|=\theta\left|\zeta_{[TM]}\right|} \frac{F(\xi) d\xi}{\prod\limits_{\mu=M}^{[TM]} (\xi - \zeta_\mu)^S (\xi - \zeta_m)}. \tag{3.7}$$

Es sei $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = \theta \left|\zeta_{[TM]}\right|$. Ist N hinreichend groß, so ist $|\xi - \zeta_\mu| \geq \theta \left|\zeta_{[TM]}\right| - \left|\zeta_{[TM]}\right| > 1$ für alle $\mu \in \{0, \ldots, [TM]\}$, da $\theta > 1$ ist.

Nun folgt aus Lemma 3.5

$$
\begin{aligned}
& \log \left| \prod_{\mu=M}^{[TM]} (\xi - \zeta_\mu) \right| \\
= \; & \log \left| \prod_{\mu=0}^{[TM]} (\xi - \zeta_\mu) \right| - \log \left| \prod_{\mu=0}^{M-1} (\xi - \zeta_\mu) \right| \\
= \; & \frac{1}{2} TM \log(TM) + TM \left(\log \theta - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \\
& - \frac{1}{2} M \log M - M \left(\log \frac{\theta \left|\zeta_{[TM]}\right|}{|\zeta_{M-1}|} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{M} \log M \right).
\end{aligned}
$$

Weiter ist für $m \in \{M, \ldots, [TM]\}$

$$
\begin{aligned}
& \log \left| \prod_{\substack{\mu=M \\ \mu \neq m}}^{[TM]} (\zeta_m - \zeta_\mu) \right| \leq \log \left| \prod_{\mu=M}^{[TM]}{}^{*} (\zeta_m - \zeta_\mu) \right| \\
= \; & \log \left| \prod_{\mu=0}^{[TM]}{}^{*} (\zeta_m - \zeta_\mu) \right| - \log \left| \prod_{\mu=0}^{M-1}{}^{*} (\zeta_m - \zeta_\mu) \right| \\
= \; & \frac{1}{2} TM \log(TM) + TM \left(\frac{|\zeta_m|^2}{2 \left|\zeta_{[TM]}\right|^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \\
& - \frac{1}{2} M \log M - M \left(\log \frac{|\zeta_m|}{|\zeta_{M-1}|} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{M} \log M \right) \\
\leq \; & \frac{1}{2} TM \log(TM) - \frac{1}{2} TM \log \frac{\pi}{a} \\
& - \frac{1}{2} M \log M - M \left(\log \frac{|\zeta_M|}{|\zeta_{M-1}|} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{M} \log M \right).
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 3.6 gilt

$$
\lim_{M \to \infty} \frac{|\zeta_M|}{|\zeta_{M-1}|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{M \to \infty} \frac{\left|\zeta_{[TM]}\right|}{|\zeta_{M-1}|} = \sqrt{T},
$$

und somit erhält man, wenn man die obigen Abschätzungen kombiniert, für hinreichend groß gewähltes N

$$\begin{aligned}
&\log\left|\prod_{\substack{\mu=M\\ \mu\neq m}}^{[TM]}(\zeta_m-\zeta_\mu)\right| - \log\left|\prod_{\mu=M}^{[TM]}(\xi-\zeta_\mu)\right| \\
\leq\ & M\left((1-T)\log\theta+\frac{1}{2}\log T+\frac{\varepsilon}{4}\right)+\mathcal{O}\left(\sqrt{M}\log M\right).
\end{aligned}$$

Aus (3.7) ergibt sich mittels der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}
&\log\left|F^{(S)}(\zeta_m)\right| \\
\leq\ & S\log S+\log|F|_{\theta|\zeta_{[TM]}|}+SM\left((1-T)\log\theta+\frac{1}{2}\log T+\frac{\varepsilon}{3}\right). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Ist $\gamma\theta^{2\lambda}\left(Ta/\pi\right)^\lambda<\tau-\varepsilon$, so gilt wegen (3.4) und Lemma 3.6

$$\log|f|_{\theta|\zeta_{[TM]}|}\leq\exp\left(\gamma\theta^{2\lambda}\left(Ta/\pi\right)^\lambda M^\lambda+o\left(M^\lambda\right)\right)\leq S_{M-1}\leq S,$$

falls N hinreichend groß ist.

Berücksichtigt man nun noch die Abschätzung der $|a_{h,k}|$ im 1. Schritt, so folgt

$$\begin{aligned}
&\log|F|_{\theta|\zeta_{[TM]}|} \\
\leq\ & \log H+\log K+\log\max|a_{h,k}|+H\log(\theta\left|\zeta_{[TM]}\right|)+K\log|f|_{\theta|\zeta_{[TM]}|} \\
\leq\ & S\cdot\mathcal{O}\left(\frac{M}{\log M}\right),
\end{aligned}$$

und man erhält folglich wegen $S\leq S_M$, wenn man dies in (3.8) einträgt,

$$\begin{aligned}
\log\left|F^{(S)}(\zeta_m)\right| &\leq S\left((\tau-\varepsilon)M^\lambda+M\left((1-T)\log\theta+\frac{1}{2}\log T+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
&= S\left((\tau-\varepsilon)M^\lambda+(h(\theta,T)+\varepsilon/2)M\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$h(\theta,T):=(1-T)\log\theta+\frac{1}{2}\log T$$

gesetzt sei.

Kann man nun unter Berücksichtigung der übrigen an θ und T gestellten Bedingungen diese so wählen, dass $h(\theta, T) + \varepsilon/2 < 0$ im Fall $\lambda < 1$ und $\tau - \varepsilon/2 + h(\theta, T) < 0$ im Fall $\lambda = 1$ gilt, so ist offensichtlich $\left|F^{(S)}(\zeta_m)\right| < 1$, falls N hinreichend groß gewählt wurde. Da $F^{(S)}(\zeta_m)$ aber in $O_{\mathbb{K}}$ liegt, muss $F^{(S)}(\zeta_m) = 0$ gelten. Die Wahl der Parameter erfolgt im 4. Schritt.

zu 2.): Es ist $S = S_M$. Es sei $m \in \{[TM]+1, \ldots, [T(M+1)]\}$ und $0 \le \sigma \le S-1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass σ die kleinste Zahl in $\{0, \ldots, S-1\}$ ist, für die wir noch nicht gezeigt haben, dass $F^{(\sigma)}(\zeta_m) = 0$ ist, d.h. es gilt $F^{(t)}(\zeta_m) = 0$ für $t = 0, \ldots, \sigma - 1$. Dann erhalten wir aus dem Residuensatz und $(I_{M,S})$

$$F^{(\sigma)}(\zeta_m) = \frac{\sigma!}{2\pi i} \prod_{\mu=M}^{[TM]} (\zeta_m - \zeta_\mu)^S \int\limits_{|\xi|=\left|\zeta_{[T\theta(M+1)]}\right|} \frac{F(\xi)d\xi}{\prod\limits_{\mu=M}^{[TM]} (\xi - \zeta_\mu)^S (\xi - \zeta_m)^{\sigma+1}}.$$

Nun verläuft der Beweis vollkommen analog zum Fall $S < S_M$. Insbesondere ergeben sich dieselben Bedingungen an θ und T.

3. Schritt: Es ist $F \equiv 0$. Somit ist f eine algebraische Funktion.

Nach (3.5), (3.4), der Konstruktion von F im 1. Schritt und Lemma 2.2 ist klar, dass $A_{2\lambda}(F) \le \gamma < (\pi/a)^\lambda(\tau - \varepsilon)$ ist. Andererseits ergibt sich aber aus dem 2. Schritt, dass $\lambda_0(F; O_{\mathbb{K}}) \ge \lambda$ und $\tau_0(F; O_{\mathbb{K}}; \lambda) \ge \tau - \varepsilon$ ist. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist F also konstant.

4. Schritt: Wahl der Parameter T und θ.

zu (i): $\lambda < 1$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma\theta^{2\lambda}\left(Ta/\pi\right)^\lambda < \tau - \varepsilon$$

und

$$h(\theta, T) + \frac{\varepsilon}{2} = (1-T)\log\theta + \frac{1}{2}\log T + \frac{\varepsilon}{2} < 0$$

ist. Wir setzen $T := 1 + \delta$ mit einem $\delta \in \mathbb{R}_+$ und $\theta := e^{1/2}$. Dann ist $\theta > \exp\left(\frac{\log(1+\delta)}{2\delta}\right)$ und somit $h(\theta, T) < 0$. Falls ε genügend klein ist, ist dann auch $h(\theta, T) + \varepsilon/2 < 0$. Weiter existiert wegen (3.6) ein $0 < \delta_0 < 1$, so dass $\gamma = \delta_0(\pi/ea)^\lambda(\tau - \varepsilon)$ ist. Wir haben also

$$\gamma\theta^{2\lambda}\left(Ta/\pi\right)^\lambda = \delta_0 T^\lambda(\tau - \varepsilon) = \delta_0(1+\delta)^\lambda(\tau - \varepsilon) < \tau - \varepsilon,$$

falls man δ in Abhängigkeit von δ_0 und λ genügend klein wählt.

zu (ii): $\lambda = 1$
Wir suchen $T, \theta > 1$, so dass

$$\gamma\theta^2\,(Ta/\pi) < \tau - \varepsilon$$

und

$$\tau - \varepsilon/2 + h(\theta, T) = \tau + (1 - T)\log\theta + \frac{1}{2}\log T - \frac{\varepsilon}{2} < 0$$

ist.

Dazu maximieren wir die Funktion

$$g(\theta, T) := \frac{1}{\theta^2 T}$$

unter der Nebenbedingung

$$\tau + h(\theta, T) = (1 - T)\log\theta + \frac{1}{2}\log T + \tau = 0.$$

Aus $\tau + h(\theta, T) = 0$ ergibt sich

$$\theta = \exp\left(\frac{\tau + \frac{1}{2}\log T}{T - 1}\right).$$

Setzt man dies in $g(\theta, T)$ ein, so erhält man nach leichter Rechnung, dass T die Gleichung $T = 2\tau + 1 + \log T$ lösen muss, damit die Funktion $g(\theta, T)$ ein Maximum annimmt. Es ist also $T = x_0$.

Wegen $\log T = T - 2\tau - 1$ ist $\theta = e^{1/2}$, und es ergibt sich mit (3.6)

$$\gamma\theta^2\frac{Ta}{\pi} < \tau - \varepsilon.$$

Schließlich ist $\tau - \varepsilon + h(\theta, T) = -\varepsilon < 0$.

3.5 Beweis von Satz 3.4

3.5.1 Konstruktion einer geeigneten Funktion

Wir folgen wieder dem im Abschnitt 1.6.1 dargestellten Beweisprinzip und müssen also zuerst eine geeignete Interpolationsstellenfolge definieren.

Wir setzen $t_m := \left[\exp\left(\frac{1}{2}m\right)\right]$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Folge (t_m) ist streng monoton wachsend, und somit gilt $mt_m < mt_{m+1} < (m+1)t_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ trifft also genau einer der folgenden beiden Fälle zu: [1]

Fall I: Es ist $mt_m < n \leq mt_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir können n dann eindeutig als

$$n = mt + l$$

mit $t \in \{t_m, \ldots, t_{m+1} - 1\}$ und $l \in \{1, \ldots, m\}$ schreiben.

Fall II: Es ist $mt_{m+1} < n \leq (m+1)t_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wir können n dann eindeutig als

$$n = mt_{m+1} + s$$

mit $s \in \{1, \ldots, t_{m+1}\}$ schreiben.

Setzen wir nun $z_n := \zeta_{l-1}$ im Fall I und $z_n := \zeta_m$ im Fall II, so ergibt sich

$$P_n(z) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{m-1} (z - \zeta_k)^t \prod_{h=0}^{l-1} (z - \zeta_h) & \text{, im Fall I} \\ \prod_{k=0}^{m-1} (z - \zeta_k)^{t_{m+1}} (z - \zeta_m)^s & \text{, im Fall II.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Setzen wir weiter

$$\mu := \begin{cases} m - 1 & \text{, im Fall I} \\ m & \text{, im Fall II} \end{cases}$$

und

$$\tau_j := \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} t & ,\quad 0 \leq j \leq l-1 \\ t-1 & ,\quad l \leq j \leq m-1 \end{array}\right\} & \text{im Fall I} \\ \left.\begin{array}{ll} t_{m+1} - 1 & ,\quad 0 \leq j \leq m-1 \\ s - 1 & ,\quad j = m \end{array}\right\} & \text{im Fall II,} \end{cases}$$

so können wir (3.9) als

$$P_n(z) = \prod_{j=0}^{\mu(n)} (z - \zeta_j)^{\tau_j + 1}$$

[1] Im Folgenden hängen die Größen m, t, l, s und somit auch μ, die τ_j und die $a_{j,\sigma}$ offensichtlich von n ab. Wir wollen diese Abhängigkeit aber nicht kenntlich machen.

schreiben. Mittels des Residuensatzes ergibt sich dann aus (1.15)

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{\tau_j!} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j} \binom{\tau_j}{\sigma} \left[\frac{d^{\tau_j-\sigma}}{dz^{\tau_j-\sigma}} \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\mu} (\xi-\zeta_k)^{-\tau_k-1} \right) \right]_{\xi=\zeta_j} f^{(\sigma)}(\zeta_j) \\ &=: \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j} a_{j,\sigma} f^{(\sigma)}(\zeta_j). \end{aligned}$$

A_{n-1} ist also eine Linearkombination der $f^{(\sigma)}(\zeta_j)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, die von der gewählten Funktion f nicht abhängen.

Wir setzen $d_{n-1} := a_{l-1,t}$ im Fall I und $d_{n-1} := a_{m,s-1}$ im Fall II. Dann können wir, wie in Abschnitt 1.6.1 auf Seite 22 beschrieben, induktiv eine Folge $(g_{j,\sigma})$ von ganzen Zahlen in dem imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ definieren, so dass die Linearformen

$$B_{n-1} := \sum_{j=0}^{\mu(n)} \sum_{\sigma=0}^{\tau_j(n)} a_{j,\sigma} g_{j,\sigma} \tag{3.10}$$

den Bedingungen

$$0 < |B_{n-1}| \leq C\,|d_{n-1}| \tag{3.11}$$

mit einer von dem Zahlkörper abhängigen Konstante C genügen.

Wir zeigen nun, dass

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} P_{n-1}(z) \tag{3.12}$$

eine ganze Funktion mit dem im Satz angegebenen Wachstum definiert. Dass g die im Satz angegebenen Ganzwertigkeitseigenschaften hat und eine ganz-transzendente Funktion ist, ergibt sich aus der Konstruktion. Man vergleiche hierzu unsere Erläuterungen in Abschnitt 1.6.1.

3.5.2 Abschätzungen

Abschätzung von $|\mathbf{d_{n-1}}|$. Nach Lemma 3.5 gilt im Fall I für $l \geq 4$ und $m \geq 3$

$$\begin{aligned}
& |d_{n-1}| \\
= \ & \frac{1}{t!}\left|\prod_{\substack{k=0\\k\neq l-1}}^{m-1}(\zeta_{l-1}-\zeta_k)^{-t}\prod_{h=0}^{l-2}(\zeta_{l-1}-\zeta_h)^{-1}\right| \\
\leq \ & \frac{1}{t!}\exp\left\{-t\left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1)+(m-1)\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{l-1}}{\zeta_{m-1}}\right|^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}\right)\right.\right. \\
& \left.-C_1\sqrt{m-1}\log(m-1)\right)-\frac{1}{2}(l-2)\log(l-2) \\
& \left.-(l-2)\left(\log\left|\frac{\zeta_{l-1}}{\zeta_{l-2}}\right|-\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}\right)+C_1\left|\frac{\zeta_{l-1}}{\zeta_{l-2}}\right|\sqrt{l-2}\log(l-2)\right\}.
\end{aligned}$$

Für alle $m, l \in \mathbb{N}$ gilt also in diesem Fall

$$|d_{n-1}| \ \leq \ \frac{1}{t!}\exp\left\{-t\left(\frac{1}{2}m\log m+m\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}\right)+\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right)\right\}.$$

Im Fall II gilt

$$\begin{aligned}
& |d_{n-1}| \\
= \ & \frac{1}{(s-1)!}\left|\prod_{k=0}^{m-1}(\zeta_m-\zeta_k)^{-t_{m+1}}\right| \\
\leq \ & \frac{1}{(s-1)!}\exp\left\{-t_{m+1}\left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1)\right.\right. \\
& \left.\left.+(m-1)\left(\log\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right|-\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}\right)-C_1\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right|\sqrt{m-1}\log(m-1)\right)\right\} \\
= \ & \frac{1}{(s-1)!}\exp\left\{-t_{m+1}\left(\frac{1}{2}m\log m\right.\right. \\
& \left.\left.+m\left(\log\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right|-\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}\right)+\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Sei nun $r \in \mathbb{R}_+$ groß. Wir wollen $|g(z)|$ auf $|z| \leq r$ abschätzen. Dazu definieren wir $m_0 := m_0(r) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid r \leq |\zeta_n| < |\zeta_{n+1}|\}$. Ohne Einschränkung können wir $m_0 \geq 3$ annehmen. Nach Lemma 3.6 ist $m_0 = \frac{\pi}{a}r^2 + \mathcal{O}(r)$.

Abschätzung von $|\mathbf{P_{n-1}(z)}|$ auf $|\mathbf{z}| \leq \mathbf{r}$. Im Fall I ergibt sich für $3 \leq m \leq m_0 + 1$

$$
\begin{aligned}
& |P_{n-1}(z)| \\
= \;& \left| \prod_{k=0}^{m-1} (z-\zeta_k)^t \prod_{h=0}^{l-2} (z-\zeta_h) \right| \\
\leq \;& \exp \left\{ t \left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1) + (m-1)\left(\log \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \right. \right. \\
& \left. + C_1 \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| \sqrt{m-1} \log(m-1) \right) + \frac{1}{2}(l-2)\log(l-2) \\
& \left. + (l-2)\left(\log \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{l-2}} \right| - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + C_1 \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{l-2}} \right| \sqrt{l-2} \log(l-2) \right\} \\
= \;& \exp \left\{ t \left(\frac{1}{2} m \log m + m \left(\log \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{m_0} \log m_0 \right) \right) \right\}
\end{aligned}
$$

und für $m > m_0 + 1$

$$
\begin{aligned}
& |P_{n-1}(z)| \\
= \;& \left| \prod_{k=0}^{m-1} (z-\zeta_k)^t \prod_{h=0}^{l-2} (z-\zeta_h) \right| \\
\leq \;& \exp \left\{ t \left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1) + (m-1)\left(\frac{1}{2} \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right|^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + C_1 \sqrt{m-1} \log(m-1) \right) + l \log(2 |\zeta_m|) \right\} \\
= \;& \exp \left\{ t \left(\frac{1}{2} m \log m + m \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right|^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{m} \log m \right) \right) \right\} .
\end{aligned}
$$

Im Fall II gilt für $3 \leq m \leq m_0 + 1$

$$
\begin{aligned}
& |P_{n-1}(z)| \\
= \ & \left| \prod_{k=0}^{m-1} (z-\zeta_k)^{t_{m+1}} (z-\zeta_m)^{s-1} \right| \\
\leq \ & \exp \left\{ t_{m+1} \left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1) + (m-1) \left(\log \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + C_1 \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| \sqrt{m-1} \log(m-1) \right) + (s-1) \log |2\zeta_{m_0}| \right\} \\
= \ & \exp \left\{ t_{m+1} \left(\frac{1}{2} m \log m + m \left(\log \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right| - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{m_0} \log m_0 \right) \right) \right\}
\end{aligned}
$$

und für $m > m_0 + 1$

$$
\begin{aligned}
& |P_{n-1}(z)| \\
= \ & \left| \prod_{k=0}^{m-1} (z-\zeta_k)^{t_{m+1}} (z-\zeta_m)^{s-1} \right| \\
\leq \ & \exp \left\{ t_{m+1} \left(\frac{1}{2}(m-1)\log(m-1) + (m-1) \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right|^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + C_1 \sqrt{m-1} \log(m-1) \right) + (s-1) \log |2\zeta_m| \right\} \\
= \ & \exp \left\{ t_{m+1} \left(\frac{1}{2} m \log m + m \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}} \right|^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{m} \log m \right) \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir alles beisammen, um $|g(z)|$ auf $|z| \leq r$ abzuschätzen. Es ist

$$
\begin{aligned}
& |g(z)| \\
\leq \ & \sum_{n=1}^{\infty} |B_{n-1}| \, |P_{n-1}(z)| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |d_{n-1}| \, |P_{n-1}(z)| \\
= \ & C \sum_{m=1}^{m_0+1} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}| \, |P_{mt+l-1}(z)| + C \sum_{m=m_0+2}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}| \, |P_{mt+l-1}(z)| \\
& + C \sum_{m=0}^{m_0+1} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left| P_{mt_{m+1}+s-1}(z) \right| + C \sum_{m=m_0+2}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left| P_{mt_{m+1}+s-1}(z) \right| \\
=: \ & C \left\{ \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 \right\}.
\end{aligned}
$$

Abschätzung von Σ_1. Nach Lemma 3.6 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $J \in \mathbb{N}$, so dass für $m_0, m \geq J$

$$\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right| \leq \sqrt{\frac{m_0}{m}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ist.

Wir zerlegen nun Σ_1 in zwei Summen

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{m=1}^{J}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\sum_{l=1}^{m}|a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\ &\quad+\sum_{m=J+1}^{m_0+1}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\sum_{l=1}^{m}|a_{l-1,t}|\,|P_{mt+l-1}(z)| \\ &=: \Sigma_5+\Sigma_6.\end{aligned}$$

Nach obigen Abschätzungen ist für $1 \leq m \leq J$

$$\begin{aligned}|d_{n-1}P_{n-1}(z)| &\leq \frac{1}{t!}\exp\left\{mt\left(\log\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|+\frac{1}{2}\right)+t\mathcal{O}\left(\sqrt{m_0}\log m_0\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{t!}\exp\left((c(J)\sqrt{m_0}\log m_0)t\right),\end{aligned}$$

wobei die Konstante $c(J)$ nur von J und somit von ε abhängt. Somit haben wir

$$\Sigma_5 \leq \exp\left(e^{c(J)\sqrt{m_0}\log m_0}\right).$$

Wegen unserer Wahl von J und $\log(1+\varepsilon/2) \leq \varepsilon/2$ haben wir weiter

$$\begin{aligned}\Sigma_6 &\leq \sum_{m=J+1}^{m_0+1}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{t!}\exp\left\{mt\left(\log\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|+\frac{1}{2}\right)+t\mathcal{O}\left(\sqrt{m_0}\log m_0\right)\right\} \\ &\leq \sum_{m=J+1}^{m_0+1}\sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1}\frac{1}{t!}\exp\left\{mt\left(\log\sqrt{\frac{m_0}{m}}+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right\} \\ &\leq \exp\exp\left(\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)m_0\right),\end{aligned}$$

falls nur m_0 genügend groß ist. Dabei haben wir benutzt, dass die reelle Funktion $h(x) = x\left(\frac{1}{2}\log\frac{m_0}{x}+\frac{1}{2}\right)$ ihr Maximum im Intervall $[0, m_0]$ in m_0 annimmt.

Abschätzung von Σ_2. Es ist

$$\Sigma_2 \;=\; \sum_{m=m_0+2}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\, |P_{mt+l-1}(z)|\,.$$

Aus den obigen Abschätzungen für $|d_{n-1}|$ und $|P_{n-1}(z)|$ im Fall I ergibt sich für $m > m_0 + 1$, wenn man auf $t!$ die STIRLINGsche Formel anwendet und $t \geq t_m$ berücksichtigt,

$$\begin{aligned}
& |d_{n-1}P_{n-1}(z)| \\
\leq\ & \frac{1}{t!} \exp\left\{ mt\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 + t\,\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right\} \\
\leq\ & \exp\left\{ mt\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 - t\log t + t\,\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right\} \\
\leq\ & \exp\left\{ mt\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 - t\log t_m + t\,\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right\} \\
\leq\ & \exp\left\{ mt\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6 kann man zu ε ein $\delta > 0$ so wählen, dass für $m > (1+\delta)m_0$

$$\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 \leq \left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{[(1+\delta)m_0]}}\right|^2 \leq \frac{1}{1+\delta/2} \leq 1 - 4\varepsilon \tag{3.13}$$

gilt, falls r und somit m_0 genügend groß ist. Man beachte, dass man δ so wählen kann, dass mit $\varepsilon \to 0$ auch $\delta \to 0$ gilt.

Spalten wir nun Σ_2 bei $m = [(1+\delta)m_0] + 1$ auf, also

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 \;=\; & \sum_{m=m_0+2}^{[(1+\delta)m_0]} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\, |P_{mt+l-1}(z)| \\
& + \sum_{m=[(1+\delta)m_0]+1}^{\infty} \sum_{t=t_m}^{t_{m+1}-1} \sum_{l=1}^{m} |a_{l-1,t}|\, |P_{mt+l-1}(z)| \\
=:\; & \Sigma_7 + \Sigma_8,
\end{aligned}$$

so ist offensichtlich

$$\Sigma_7 \leq \exp\left(t_{[(1+\delta)m_0]}\mathcal{O}\left(m_0\right)\right).$$

Außerdem ist

$$\Sigma_8 \leq \sum_{t=t_{m_0+1}}^{\infty} \left(e^{-\varepsilon m_0}\right)^t = \frac{e^{-\varepsilon m_0 t_{m_0+1}}}{1-e^{-\varepsilon m_0}} < 1,$$

falls m_0 nur genügend groß ist.

Abschätzung von $\mathbf{\Sigma_3}$. Wie zuvor bei Σ_1 zerlegen wir die Summe Σ_3 in zwei Summen

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 \quad &\leq \quad \sum_{m=0}^{m_0+1} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&= \quad \sum_{m=0}^{J} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&\quad\quad + \sum_{m=J+1}^{m_0+1} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&=: \quad \Sigma_9 + \Sigma_{10}.
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen von $|d_{n-1}|$ und $|P_{n-1}(z)|$ für $m \leq m_0 + 1$ im Fall II ergeben

$$\begin{aligned}
& |d_{n-1}P_{n-1}(z)| \\
\leq \quad & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{ mt_{m+1} \left(\log\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right| - \log\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right| \right) + t_{m_0+1}\mathcal{O}\left(\sqrt{m_0}\log m_0\right) \right\} \\
= \quad & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{ mt_{m+1} \log\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_m}\right| + t_{m_0+1}\mathcal{O}\left(\sqrt{m_0}\log m_0\right) \right\} \\
\leq \quad & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{ mt_{m+1} \left(\log\sqrt{\frac{m_0}{m}} + \varepsilon \right) \right\} \\
\leq \quad & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left(\left(\frac{1}{2e} + \varepsilon \right) m_0 t_{m_0+1} \right),
\end{aligned}$$

da die Funktion $h_2(x) = \frac{x}{2}\log\frac{m_0}{x}$ ihr Maximum im Intervall $[0, m_0]$ in $e^{-1}m_0$ annimmt.

Wegen

$$\sum_{s=1}^{t_{m+1}} \frac{1}{(s-1)!} < e$$

erhalten wir hieraus

$$\Sigma_{10} \leq \exp\left(t_{m_0+1} \cdot \mathcal{O}\left(m_0\right)\right).$$

Offensichtlich ist wieder

$$\Sigma_9 \le \exp\left(c(J)\sqrt{m_0}(\log m_0)t_{m_0+1}\right)$$

mit einer von J, also von ε abhängigen, positiven Konstanten $C(J)$.

Abschätzung von $\boldsymbol{\Sigma_4}$. Wir spalten auch Σ_4 wie Σ_2 bei $m = [(1+\delta)m_0]+1$ auf. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\Sigma_4 &= \sum_{m=m_0+2}^{[(1+\delta)m_0]} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&\quad + \sum_{m=[(1+\delta)m_0]+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{t_{m+1}} |a_{m,s-1}| \left|P_{mt_{m+1}+s-1}(z)\right| \\
&=: \Sigma_{11} + \Sigma_{12}.
\end{aligned}$$

Für $m_0 + 1 < m \le (1+\delta)m_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&|d_{n-1}P_{n-1}(z)| \\
\le\ & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{ mt_{m+1}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 - \frac{1}{2} - \log\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right|\right) + t_{m+1}\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right\} \\
\le\ & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{t_{[(1+\delta)m_0]+1} \cdot \mathcal{O}\left(m_0\right)\right\}
\end{aligned}$$

und somit auch

$$\Sigma_{11} \le \exp\left(t_{[(1+\delta)m_0]+1} \cdot \mathcal{O}\left(m_0\right)\right).$$

Mit (3.13) folgt für $m > [(1+\delta)m_0]$

$$\begin{aligned}
&|d_{n-1}P_{n-1}(z)| \\
\le\ & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{ mt_{m+1}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\zeta_{m_0}}{\zeta_{m-1}}\right|^2 - \frac{1}{2} - \log\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right|\right) + t_{m+1}\mathcal{O}\left(\sqrt{m}\log m\right)\right\} \\
\le\ & \frac{1}{(s-1)!} \exp\left\{-\varepsilon m t_{m+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{12} &\leq \sum_{m=m_0+2}^{\infty} \sum_{s=0}^{t_{m+1}-1} \frac{1}{s!} \exp\left\{-\varepsilon m t_{m_0+1}\right\} \\
&\leq e \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon t_{m_0+1} m\right) \\
&= e \frac{\exp\left(-\varepsilon t_{m_0+1}(m_0+1)\right)}{1-\exp\left(-\varepsilon t_{m_0+1}\right)} < 1
\end{aligned}
$$

für alle großen m_0.

Berücksichtigt man die Definition der Folge (t_m), so ergeben diese Abschätzungen, dass für beliebiges $\epsilon > 0$

$$
\log\log|g(z)| \leq \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) m_0 + \mathcal{O}\left(\log m_0\right)
$$

ist, falls m_0 genügend groß ist. Und somit haben wir wegen $m_0 = \frac{\pi}{a} r^2 + \mathcal{O}(r)$, dass g eine ganze Funktion mit $A_2(g) \leq \frac{\pi}{2a}$ ist.

Zusammenfassung

Wenn wir die Ergebnisse aus der vorliegenden Arbeit in die Tabelle der Einleitung (vgl. Seite viii) eintragen, so ergibt sich

Fall	$s = 1$	$s = \infty$
add.	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{r} \geq \log 2$ PÓLYA (1915)	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\log\lvert f\rvert_r}{r} \geq \log 2$ WELTER (2002)
mult.	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}$ GEL'FOND (1933)	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\log\lvert f\rvert_r}{\log^2 r} \geq \frac{1}{4\log q}$ WELTER (1999)
imag.-quadr. ($O_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[i]$)	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\lvert f\rvert_r}{r^2} \geq \frac{\pi}{2e}$ GRAMAIN (1981)	$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\log\lvert f\rvert_r}{r^2} \geq \frac{\pi}{2e}$ WELTER (2002)

Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, ist von den in der Spalte $s = 1$ angegebenen Unterschranken bekannt, dass sie alle bestmöglich sind. Die in der Tabelle offensichtlich werdenden Analogien lassen uns vermuten, dass auch unsere in der Spalte $s = \infty$ angegebenen Ergebnisse bestmöglich sind. Ein weiteres Indiz für die Korrektheit dieser Vermutung liefert uns Satz 2.6 und die zugehörige Bemerkung.

Ist $\lambda(f)$ gleich $\lambda_{\mathbb{Z}}(f)$ im additiven Fall, $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q)$ im multiplikativen Fall und $\lambda_{O_{\mathbb{K}}}(f)$ im imaginär-quadratischen Fall, so haben wir gesehen, dass es in jedem der drei Fälle einen "Schwellenwert" Λ gibt, so dass sich die in der obigen Tabelle für $s = \infty$ angegebenen Wachstumslücken bereits unter der wesentlich schwächeren arithmetischen Voraussetzung $\lambda(f) > \Lambda$ ergeben.

In den zugehörigen Eindeutigkeitssätzen gibt es einen solchen "Schwellenwert" nicht. Dort erhalten wir für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gleichartige Wachstumslücken.

Im multiplikativen Fall haben wir außerdem gesehen, dass die Größe der Wachstumslücke für $0 < \lambda(f) < \Lambda$ mit der des Eindeutigkeitssatzes (Satz 1.3(i)) übereinstimmt, wenn man $\lambda_{\mathbb{Z}}(f;q)$ bzw. $\tau_{\mathbb{Z}}(f;q)$ durch $\lambda_0(f;q)$ bzw. $\tau_0(f;q)$ ersetzt, und dass diese Ergebnisse bestmöglich sind. Wir vermuten, dass die Unterschranken in unseren Eindeutigkeitssätzen im additiven und im imaginär-quadratischen Fall, also in den Sätzen 2.3(i) und 3.1(i), ebenfalls bestmöglich sind.

Interessanterweise tritt diese Analogie zwischen Ganzwertigkeitsresultat und Eindeutigkeitssatz für $0 < \lambda(f) < \Lambda$ im imaginär-quadratischen Fall nicht auf. Hier unterscheiden sich unsere erzielten Wachstumsschranken um einen Faktor $e^{-\lambda}$.

Neben der Behandlung der soeben skizzierten offenen Fragen, erscheint uns eine Untersuchung der hier eingeführten Klasse von ganzwertigen ganzen Funktionen im bisher lediglich von Car untersuchten Funktionenkörperfall besonders interessant.

Literaturverzeichnis

[1] ABLY, M.; M'ZARI, M., *Polynômes de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire*. J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 85–105.

[2] AVANISSIAN, V.; GAY, R., *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*. Bull. Soc. Math. France **103** (1975), 341–384.

[3] BAKER, A., *A note on integral-valued functions of several variables*. Proc. Camb. Phil. Soc **63** (1967), 715–720.

[4] BÉZIVIN, J.-P., *Une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de Gel'fond*. Analysis **4** (1984), 125–141.

[5] BÉZIVIN, J.-P., *Sur les points où une fonction analytique prend des valeurs entières*. Ann. Inst. Fourier **40** (1990), 785–809.

[6] BÉZIVIN, J.-P., *Fonctions entières prenant des valeurs entières ainsi que ses dérivées sur des suites recurrentes binaires*. Manuscripta math. **70** (1991), 325–338.

[7] BÉZIVIN, J.-P., *Itération de polynômes et fonctions entières arithmétiques*. Acta Arith. **68** (1994), 11–25.

[8] BÉZIVIN, J.-P., *Suites d'entiers et fonctions entières arithmétiques*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **3** (1994), 313–334.

[9] BÉZIVIN, J.-P., *Sur les fonctions entières q-arithmétiques*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **47** (1998), 447–462.

[10] BOAS, JR., R. P., *Entire functions*. Academic Press Inc., New York, 1954.

[11] Buck, R. C., *Integral valued entire functions.* Duke Math. J. **15** (1948), 879–891.

[12] Bundschuh, P., *Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen.* J. reine angew. Math. **313** (1980), 116–132.

[13] Bundschuh, P., *A theorem of Gel′fond via Schneider's method. New trends in probability and statistics, Vol. 2 (Palanga, 1991)*, VSP, Utrecht, 1992, 9–15.

[14] Bundschuh, P.; Shiokawa, I., *A remark on a theorem of Gel′fond.* Arch. Math. (Basel) **65** (1995), 32–35.

[15] Car, M., *Pólya's theorem for* $\mathbf{F}_q[T]$. J. Number Theory **66** (1997), 148–171.

[16] Car, M., *Gel′fond-Gramain's theorem for function fields. Finite fields and applications (Augsburg, 1999)*, Springer, Berlin, 2001, 70–80.

[17] Carlson, F., *Sur une classe de séries de Taylor.* Thèse. Upsala: K. W. Appelberg. 76 S. 8° , 1914.

[18] Fridman, G. A., *Entire integer-valued functions.* Mat. Sb. (N.S.) **75 (117)** (1968), 417–431.

[19] Fukasawa, S., *Über ganzwertige ganze Funktionen.* Tohoku Math. J. **27** (1926), 41–52.

[20] Gel′fond, A. O., *Sur les nombres transcendants.* C. R. Acad. Sci. (Paris) **189** (1929), 1224–1226.

[21] Gel′fond, A. O., *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières.* Tohoku Math. J. **30** (1929), 280–285.

[22] Gel′fond, A. O., *Sur un théorème de M. G. Polya.* Atti Reale Accad. naz. Lincei **10** (1929), 569–574.

[23] Gel′fond, A. O., *Sur les fonctions entières, qui prennent des valeurs entières dans les points* β^n*,* β *est un nombre entier positif et* $n = 1, 2, \ldots$ *(russ.).* Math. Sb. **40** (1933), 42–47.

[24] Gelfond, A. O., *Sur le septième problème de D. Hilbert.* C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS (1934), 1–3 (russ.), 4–6 (frz.).

[25] Gelfond, A. O., *Sur le septième problème de Hilbert.* Bull. Acad. Sci. URSS, VII. Ser. **4** (1934), 623–630.

[26] Gel′fond, A. O., *On functions assuming integral values.* Mat. Zametki **1** (1967), 509–513.

[27] Gramain, F., *Sur le théorème de Fukasawa-Gel′fond.* Invent. Math. **63** (1981), 495–506.

[28] Gramain, F., *Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique. Cinquante ans de polynômes (Paris, 1988)*, Springer, Berlin, 1990, 123–137.

[29] Gruman, L., *Propriétés arithmétiques des fonctions entières.* Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 421–440.

[30] Hardy, G., *On a theorem of Mr. G. Pólya.* Proc. Camb. Phil. Soc. **19** (1917), 60–63.

[31] Hilliker, D. L.; Straus, E. G., *Some p-adic versions of Polya's theorem on integer valued analytic functions.* Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 395–400.

[32] Laohakosol, V.; Loxton, J. H.; van der Poorten, A. J., *Integer-valued p-adic functions. Number theory, Vol. II (Budapest, 1987)*, North-Holland, Amsterdam, 1990, 829–849.

[33] Levin, B. J., *Distribution of zeros of entire functions.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[34] Masser, D., *Sur les fonctions entières à valeurs entières.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **291** (1980), A1–A4.

[35] Perelli, A.; Zannier, U., *On a theorem of Pólya.* Boll. Un. Mat. Ital. A (5) **18** (1981), 305–307.

[36] Pila, J.; Rodriguez Villegas, F., *Concordant sequences and integral-valued entire functions.* Acta Arith. **88** (1999), 239–268.

[37] Pisot, C., *Über ganzwertige ganze Funktionen.* Jber. Deutsch. Math. Verein. **52** (1942), 95–102.

[38] Pólya, G., *Über ganzwertige ganze Funktionen.* Rend. Circ. Mat. Palermo **40** (1915), 1–16.

[39] Pólya, G., *Über ganzwertige ganze Funktionen.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1920), 1–10.

[40] Robinson, R. M., *Integer-valued entire functions.* Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 451–468.

[41] Sato, D., *Utterly integer valued entire functions. I.* Pacific J. Math. **118** (1985), 523–530.

[42] Schneider, T., *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. Transzendenz von Potenzen.* J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65–69.

[43] Schneider, T., *Einführung in die transzendenten Zahlen.* Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[44] Selberg, A., *Über einen Satz von A. Gelfond.* Arch. Math. Naturvid. **44** (1941), 159–170.

[45] Selberg, A., *Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen.* Arch. Math. Naturvid. **44** (1941), 45–52 und 171–181.

[46] Siegel, C. L., *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen.* Abh. Preuß. Akad. Wiss. No. 1 (1929), 70 S.

[47] Waldschmidt, M., *Pólya's theorem by Schneider's method.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **31** (1978), 21–25.

[48] Waldschmidt, M., *Transcendence methods.* Queen's University, Kingston, Ont., 1979.

[49] Waldschmidt, M., *Extrapolation with interpolation determinants. Special functions and differential equations (Madras, 1997)*, Allied Publ., New Delhi, 1998, 356–366.

[50] Waldschmidt, M., *Integer valued entire functions on Cartesian products. Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, de Gruyter, Berlin, 1999, 553–576.

[51] Wallisser, R., *Verallgemeinerte ganze ganzwertige Funktionen vom Exponentialtypus.* J. Reine Angew. Math. **235** (1969), 189–206.

[52] Wallisser, R., *Über ganze Funktionen, die in einer geometrischen Folge ganze Werte annehmen.* Monatsh. Math. **100** (1985), 329–335.

[53] Wallisser, R. V., *On entire functions assuming integer values in a geometric sequence. Théorie des nombres (Quebec, PQ, 1987)*, de Gruyter, Berlin, 1989, 981–989.

[54] WELTER, M., *Ganzwertigkeit im Komplexen und p-adischen*. Diplomarbeit, Universität zu Köln, 1999.

[55] WELTER, M., *On entire functions whose derivatives are integer-valued on geometric progressions*. Manuscripta Math. **103** (2000), 63–74.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbstständig angefertigt habe, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegeben Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh betreut worden.

Köln, April 2002

(Teilpublikationen siehe Literaturverzeichnis [54, 55])

Kurzzusammenfassung

Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $O_{\mathbb{K}}$ sein Ganzheitsring. In dieser Arbeit studieren wir für gewisse Folgen (u_n) in $O_{\mathbb{K}}$ das Wachstumsverhalten von ganzen Funktionen f, die für alle großen $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$f^{(\sigma)}(u_n) \in O_{\mathbb{K}} \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, s_n - 1$$

genügen, wobei (s_n) eine Folge natürlicher Zahlen ist, die ein exponentielles Wachstum hat. Als ein Korollar beinhalten unsere Ergebnisse eine Verbesserung des FRIDMANschen Satzes von 1968 über das Wachstum von ganzen Funktionen, die zusammen mit allen ihren Ableitungen ganze Werte an den Stellen $z = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen. Außerdem folgen aus unseren Untersuchungen analoge Sätze für ganze Funktionen, die zuammen mit allen ihren Ableitungen ganze Werte an den Stellen einer geometrischen Progression $q^n, n = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen, und für ganze Funktionen, die mit ihren sämtlichen Ableitungen den Ganzheitsring eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers in sich abbilden.

Abstract

Let $\mathbb{K}$ be either the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ or an imaginary quadratic number field, and let $O_{\mathbb{K}}$ denote the ring of integers in $\mathbb{K}$. In this thesis we study for some sequences (u_n) in $O_{\mathbb{K}}$ the growth of entire functions f, that satiesfy for all large $n \in \mathbb{N}$ the condition

$$f^{(\sigma)}(u_n) \in O_{\mathbb{K}} \quad \text{für } \sigma = 0, \ldots, s_n - 1,$$

where (s_n) is a positiv integer sequence of exponential growth. As a corollary our results contain an improvement of FRIDMAN's theorem from 1968 on the growth of entire functions, that take together with all their derivatives integer values at the points $z = 0, 1, 2 \ldots$. Also analogues to FRIDMAN's theorem for entire functions, that take together with all their derivatives integer values on a geometric progression $q^n, n = 0, 1, 2, \ldots$, and for entire functions, that map together with all their derivatives the ring of integers of an imaginary-quadratic field into itself, can be deduced from our results.

Lebenslauf

Name:	Michael Welter
Geburtsdatum, -ort:	08. September 1972 in Geldern
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig
Eltern:	Karl-Heinz Welter und Christina Welter, geb. Niersmann
Schulausbildung:	1979-1983 Kath. Mariengrundschule in Nieukerk 1983-1992 Friedrich-Spee Gymnasium in Geldern
Zivildienst:	1992-1993 beim Caritasverband Geldern-Kevelaer e.V.
Studium:	Oktober 1993: Beginn des Studiums der Mathematik mit Studienziel Diplom und Nebenfach Informatik an der Universität zu Köln
Vordiplom:	17. April 1996
Diplom:	21. September 1999
Beschäftigungen:	Oktober 1996 - September 1999: studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln Oktober 1999 - September 2002: wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh