

Untersuchungen zur Kellystrategie für Wetten und Investitionen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Kirsten Albrecht
aus Husum

Verlag Dr. Hut, München
2012

Berichterstatter: Prof. Dr. U. Faigle
(Gutachter) Prof. Dr. R. Seydel

Tag der mündlichen Prüfung: 27.01.2012

Kurzzusammenfassung

Ausgehend von der in [Kel56] entwickelten Kellystrategie für Quellen, die unabhängige Zeichen ausgeben, wird in dieser Arbeit ein Modell zur Bestimmung der Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension entwickelt. Auf diese Weise wird Investoren ermöglicht, auch auf die Ausgaben von Quellen zu setzen, deren Ausgabezeichen abhängige Wahrscheinlichkeiten besitzen.

Die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension wird zudem dazu verwendet, optimale Wettanteile für Totalisator-Wetten auf Quellen mit n -elementigem Alphabet zu bestimmen. Totalisator-Wetten liegen vor, wenn die Quoten, die im Gewinnfall ausgezahlt werden, nicht zum Zeitpunkt bekannt sind, an dem der Investor seinen Einsatz anlegt, sondern erst später anhand aller Einsätze bestimmt werden. Auch für Quellen, die durch Hidden Markov Modelle beschrieben werden können, wird dargestellt, wie sich Investoren gemäß der Kellystrategie optimal verhalten.

Für das ermittelte Modell wird gezeigt, dass sich einige der ursprünglichen Eigenschaften hierauf übertragen lassen. Insbesondere gilt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit des Investors bei Anwendung der Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension gleich null ist und dass diese Strategie unter bestimmten Voraussetzungen die langfristige Wachstumsrate des Kapitals maximiert.

Die Verteilung des erwirtschafteten Kapitals zu einem festen Zeitpunkt ist aufgrund der multiplikativen Struktur schief. Dies wird durch einen Vergleich des Medians mit dem Erwartungswert illustriert. Abschließend wird die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension anhand eines konstruierten Beispiels sowie historischer Aktienkurse numerisch getestet.

Abstract

Starting from the Kelly criterion described in [Kel56] for sources that emit independent symbols, a model is developed that determines the Kelly criterion for sources of finite evolution dimension. This way, investors are able to bet on sources, whose symbols possess dependent probabilities.

The Kelly criterion for sources of finite evolution dimension is used to determine optimal betting fractions in the case of parimutuel betting on sources with n symbols. The odds that are paid to the winner are not known in advance in the case of parimutuel betting, but are calculated based on all wagers. For sources that can be described by hidden Markov processes, the behaviour of investors who act according to the Kelly criterion is described, too.

Some of the original properties of the Kelly criterion can be applied to the newly derived model. In particular, it is shown that the probability of ruin for an investor who uses the Kelly criterion for sources of finite evolution dimension equals zero. Additionally, the Kelly criterion for sources of finite evolution dimension maximizes the long-term capital growth rate under certain assumptions.

The distribution of the resulting capital at a fixed moment is skewed because of its multiplicative structure. This fact is illustrated by a comparison between the median and the expectation value. Finally, the Kelly criterion for sources with finite evolution dimension is tested numerically for a constructed example as well as historical stock prices.

Danksagung

Als erstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Faigle für die Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit bedanken. Ihm ist es immer gelungen, durch die richtigen Fragen auf neue und interessante Aspekte hinzuweisen, durch die diese Arbeit sehr bereichert wurde. Auch Herrn Prof. Dr. Seydel danke ich sehr für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. Faigle und Herrn Prof. Dr. Schrader, dass sie mir ermöglicht haben, meine Arbeit in ihrer Arbeitsgruppe zu erstellen.

Meine ehemaligen und jetzigen Kollegen in der Bauspargruppe und in der Arbeitsgruppe haben mir die Zeit, die ich in Köln verbracht habe, sehr angenehm gestaltet. So bin ich jeden Morgen gern zur Arbeit gegangen, weil ich wusste, dass dort immer angenehme Gespräche und eine freundliche Atmosphäre auf mich warten. Insbesondere seien hier Dr. Thomas Chevalier, Dr. Martin Lätsch, Dr. Stefan Neuhaus, Marcel Schwalb, Dominique Ziegelmayer und Andrea Oversberg erwähnt.

Auch meinen Eltern möchte ich danken. Einerseits für ihre Geduld und ihr Verständnis, dass wir uns in den letzten Jahren nicht allzu häufig gesehen haben sowie für ihre ständige (oft telefonische) Unterstützung, andererseits dafür, dass sie der Meinung sind, dass sie an dieser Stelle eigentlich gar nicht erwähnt werden müssen.

Ein ganz besonderer Dank gilt Björn Hüpping. Mit ihm habe ich in den letzten Jahren viele fachliche Diskussionen geführt, deren Ergebnisse sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Wenn mal wieder etwas nicht so geklappt hat, wie es sollte, konnte ich immer darauf zählen, ein offenes Ohr zu finden und aufmunternde Worte zu hören. Nicht zuletzt danke ich ihm für das Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie	3
1.1. Das Grundmodell	3
1.2. Historische Entwicklung der Kellystrategie	19
1.3. Eigenschaften der Kellystrategie	43
1.4. Beispiele zur Berechnung der Kellystrategie	46
1.4.1. Investitionen in Optionen	54
1.4.1.1. Das Binomialmodell	54
1.4.1.2. Die Kellystrategie für Investitionen in Optionen	56
2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie	65
2.1. Abhängige Eingabezeichen	65
2.2. Reihenschaltung	68
2.2.1. Die optimale Strategie nach Beobachtung bestimmter Zeichen	70
2.3. Analyse für n Zeichen	73
2.4. Wachstumsabschätzung	97
2.5. Erwarteter Gewinn des Buchmachers	99
2.6. Totalisator-Wetten	100
2.7. Hidden Markov Modelle (HMMs)	102
2.8. Eigenschaften der Kellystrategie im Grundmodell	106
3. Numerische Ergebnisse	113
3.1. Unabhängige Bernoulliversuche	113
3.2. Markovquelle mit Vorgeschichte	114
3.3. Anwendung auf Börsendaten	136
4. Zusammenfassung und Ausblick	149
Anhang	
A. Lange Version von Tabelle 1.3	151
B. Ergebnisse der Anwendung auf Börsendaten aus Abschnitt 3.3	155
Literaturverzeichnis	167

Notation

Σ, S, R	: Alphabete
$ \Sigma $: Mächtigkeit des Alphabets, Anzahl möglicher Ausgabezeichen
Σ^k	: Menge aller Wörter der Länge k
$u := (u_1, \dots, u_k)$ $= u_1 \dots u_k$: mit $u_i \in \Sigma, i = 1, \dots, k$: Wort der Länge k
\square	: leeres Wort
Σ^*	: Menge aller Wörter endlicher Länge mit Zeichen aus Σ
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: Wahrscheinlichkeitsraum
Ω, \mathcal{X}	: Stichprobenräume
$\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$: σ -Algebren
$\mathbb{P}, \mathbb{P}_X, \mathbb{Q}$: Wahrscheinlichkeitsmaße
F^C	: Komplement der Menge F
(X_t)	: diskrete stochastische Quelle
\mathbb{B}	: Borel σ -Algebra
\mathcal{G}_1	: Menge der halboffenen Intervalle in \mathbb{R}
$\sigma(F)$: kleinste σ -Algebra, die die Teilmenge F enthält
X, Y	: Zufallsvariablen
$\mathcal{T} := \{1, 2, \dots\}$: Indexmenge
$T : \Omega \rightarrow \Omega$: messbare Transformation, Schiebeoperator
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$: dynamisches System
$\mathbb{P}(A B)$: bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
$\mathbb{P}(AB)$: gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B
$p(v w)$: bedingte Prognosewahrscheinlichkeit von $v \in \Sigma^k$ unter $w \in \Sigma^t$
$p(wv)$: gemeinsame Wahrscheinlichkeit von $w \in \Sigma^t$ und $v \in \Sigma^k$
$\mathbf{g}_w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Zustand der Quelle
\mathcal{P}	: Prognosematrix
\mathcal{V}	: Prognoseraum der Quelle
\mathcal{S}	: Zustandsraum
$\mathbf{g}^t \in \mathcal{S}$: t -ter Grundzustand der Quelle, $t \geq 0$
ψ	: Evolutionsoperator

\mathcal{G}	: Menge der Grundzustände
\mathcal{E}	: Evolutionsraum
$e \dim(X_t)$: Evolutionsdimension der Quelle (X_t)
\mathcal{G}_d	: Evolutionsbasis von (X_t)
E	: Evolutionsmatrix
T_f	: Träger (im strengen Sinne)
T_r	: Träger (im weiteren Sinne)
\overline{E}	: Cesàro-Limes der Evolutionsmatrix E
(\overline{X}_t)	: stationärer Grenzprozess der Quelle (X_t)
\mathfrak{S}	: Zustandsmenge einer Markovquelle
M	: Übergangsmatrix einer homogenen Markovkette
$\mathcal{P}(\mathcal{X})$: Potenzmenge von \mathcal{X}
$\mathbf{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$: gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n unter \mathbf{P}
$a_i^{(t)}$: Geldbetrag, der im Zeitpunkt t auf Zeichen $i \in \Sigma$ gesetzt wird
$\alpha_i^{(t)}$: Quote für Zeichen $i \in \Sigma$ im Zeitpunkt t , $\alpha_i^{(t)} \geq 0$
C_0	: Startkapital, $C_0 := 1$
C_t	: Kapital zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$
a	: Strategie
$a(v w)$: Strategie für Zeichen $v \in \Sigma$, unter der Bedingung, dass $w \in \Sigma^t$ bekannt ist
$\mathbb{E}[X]$: Erwartungswert der Zufallsvariable X
$G(a)$: exponentielle Wachstumsrate bei Verwendung der Strategie a
$h_t(A)$: relative Häufigkeit des Ereignisses A zum Zeitpunkt t
$H(X)$: Entropie von X
$H(X Y)$: bedingte Entropie von X , Äquivokation
$I(X; Y)$: gegenseitige Information, Transinformation
\mathbf{P}^X	: Randverteilung der Zufallsvariable X
$D(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})$: Divergenz, relative Entropie
b	: Anteil des Kapitals des Spielers, der als Bargeld zurückgehalten wird
Γ	: Gitter
$\text{Var}[X]$: Varianz der Zufallsvariable X
$\sigma[X]$: Standardabweichung der Zufallsvariable X
$\mathbf{P}^{Y X}$: Übergangswahrscheinlichkeitsmaß, bedingte Verteilung von Y bei gegebenem X
$\mathbb{E}[g(Y) X]$: durch X bedingter Erwartungswert von $g(Y)$

\mathcal{I}	: Unter- σ -Algebra der bezüglich des Schiebeoperators T invarianten Ereignisse
\bar{P}	: stationäres Mittel
$\text{median}[X]$: Median der Zufallsvariable X
$b(w; M, p)$: Binomialverteilung
∇f	: Gradient der Funktion f
μ	: KKT-Multiplikator
O_T	: Wert einer Kaufoption zum Fälligkeitszeitpunkt T
O	: aktueller Wert einer Kaufoption
S	: aktueller Aktienkurs
K	: Ausübungspreis der Kaufoption
Δ	: Anzahl an Aktienanteilen
B	: Anzahl risikoloser festverzinslicher Wertpapiere
$D(P \parallel Q)$: Divergenz
$\Phi[a; n, p]$: komplementäre Binomialverteilung
M	: aktueller Marktpreis einer Kaufoption
$\det(A)$: Determinante der Matrix A
$\text{rang}(A)$: Rang der Matrix A
$Lös$: Lösungsraum
V_t	: Ertrag zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$
W_t	: logarithmischer Ertrag zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$
l	: Anteil, der gemäß der Greedy-Strategie eingesetzt wird
D	: Menge aller Erträge X_t , für die $X_t \leq 1$ gilt
U	: Menge aller Erträge X_t , für die $X_t > 1$ gilt

Einleitung

Schon seit langer Zeit versuchen Investoren, Gewinne durch Einsätze in risikobehaftete Prozesse zu erzielen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass zukünftige Erträge im Entscheidungszeitpunkt nicht bekannt sind, sondern sich zufällig ergeben. Diese zufälligen Effekte werden in der vorliegenden Arbeit durch diskrete stochastische Quellen beschrieben. Wenn sich das Kapital eines Anlegers multiplikativ entwickelt, bietet es sich an, die erwartete logarithmische Wachstumsrate des Kapitals zu untersuchen. Diese Idee wurde bereits 1738 von Daniel Bernoulli in seinem Artikel „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis“ beschrieben, worin sie dazu benutzt wird, das Sankt-Petersburg-Paradoxon zu lösen ([Ber54], vgl. S. 25 ff.). Gut 200 Jahre später entwickelte John L. Kelly in seinem Artikel „A New Interpretation of Information Rate“ [Kel56] verschiedene Verhaltensmuster, bei deren Befolgung ein Investor durch Einsätze auf Zeichen einer diskreten stochastischen Quelle mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten seine erwartete logarithmische Wachstumsrate maximiert. Diese Verhaltensmuster werden in der Literatur meist als *Kellystrategie* bezeichnet, sie sind aber auch unter diversen anderen Namen bekannt, wie z.B. Kapitalwachstumsstrategie oder Kelly-Breiman-Bernoulli-Latané-Strategie [Tho71, S. 599].

Nach dem Erscheinen dieses grundlegenden Artikels wurden verschiedene theoretische Eigenschaften der Kellystrategie bewiesen. Besonders bemerkt werden sollen hier die Artikel [Bre60, Bre61] von Leo Breiman, in denen sowohl bewiesen wird, dass die Kellystrategie asymptotisch die langfristige Wachstumsrate maximiert, als auch, dass die Kellystrategie asymptotisch die Zeit minimiert, die ein Anleger benötigt, um einen festgelegten Geldbetrag zu erwirtschaften.

Die praktische Anwendbarkeit der Kellystrategie wurde hauptsächlich im Bereich der Glücksspiele erprobt. Zu dieser Entwicklung trug nicht zuletzt das Buch „Beat the Dealer“ von Edward O. Thorp [Tho66] bei. Die Anwendung bietet sich insbesondere an, da in diesem Bereich häufig die vorliegenden Wahrscheinlichkeiten ziemlich genau bestimmt werden können und die im Erfolgsfall ausbezahlten Quoten bereits zum Zeitpunkt des Einsatzes bekannt sind. Eine zweite Anwendungsmöglichkeit besteht in Investitionen an der Börse. Hierzu gibt es jedoch weniger Untersuchungen (vgl. [Tho69, Tho06]) und die Anwendung der Kellystrategie wird sehr dadurch erschwert, dass im Allgemeinen die an der Börse vorliegenden Wahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind.

Allen uns bekannten Beweisen ist gemein, dass sie unabhängige Wahrscheinlichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten von Markovketten erster Ordnung (s. S. 16) voraussetzen. Da es in der Realität jedoch Quellen gibt, die abhängige Zeichen ausgeben, entstand die Idee, in dieser Arbeit zu untersuchen, inwieweit sich die Kellystrategie auf derartige Quellen übertragen lässt. Um die Untersuchungen möglichst allgemein zu halten, werden Quellen mit endlicher Evolutionsdimension betrachtet.

Im ersten Kapitel der Arbeit spezifizieren wir hierzu zunächst das betrachtete Grundmodell und führen alle für dessen Verständnis benötigten Begriffe ein. Alle Definitionen

treten in der Arbeit an der Stelle auf, wo sie benötigt werden. Im nachfolgenden Text wird dann durch Verweise das Finden der jeweiligen Definitionen erleichtert. In Abschnitt 1.2 stellen wir die bereits bestehenden Arbeiten zur Kellystrategie vor und setzen diese in Beziehung zu unserem Grundmodell. Abschnitt 1.3 enthält dann eine übersichtliche Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften der Kellystrategie. Danach wird diese an ausgesuchten Beispielen verdeutlicht, wobei ein besonderer Fokus auf Investitionen in Optionen liegt.

Kapitel 2 enthält die theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit. In den ersten beiden Abschnitten werden hierzu Investitionen betrachtet, die von Anlegern durchgeführt werden, die Zusatzinformationen über einen Kanal erhalten, welche in ihre Investitionsentscheidung einfließen. Abschnitt 2.3 bildet das Herzstück des Kapitels, in dem ausgearbeitet wird, wie die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension aussieht. Dies mündet in der Formulierung der Lemmata 2.11 und 2.13, die die Kellystrategie in diesem Fall beinhalten. In den dann folgenden Abschnitten werden zunächst Schranken für die Wachstumsrate des Kapitals bei Verwendung der Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension angegeben und der erwartete Gewinn des Buchmachers betrachtet. In Abschnitt 2.6 wird gezeigt, dass die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension auch für sogenannte Totalisator-Wetten angewendet werden kann. Totalisator-Wetten liegen vor, wenn es vor dem Spiel keine festen Quoten gibt, sondern diese über die investierten Einsätze nachträglich berechnet werden. Wie ein Investor sein Geld verteilen sollte, wenn er auf die Ausgaben einer Quelle setzen möchte, die durch ein Hidden Markov Modell beschrieben werden kann, erläutert Abschnitt 2.7. Schließlich wird in Abschnitt 2.8 dargestellt, welche der in Abschnitt 1.3 aufgezählten Eigenschaften der Kellystrategie sich auch für die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension zeigen lassen.

Kapitel 3 dient dazu, die erzielten theoretischen Ergebnisse auch numerisch zu überprüfen. In Abschnitt 3.1 wird kurz darauf eingegangen, wie stark der Erwartungswert vom Median abweicht, wenn ein Investor auf unabhängige Bernoulliversuche setzt. Hier werden statt abhängiger Wahrscheinlichkeiten unabhängige verwendet, da diese die Rechnungen vereinfachen. Die Ergebnisse gelten aber auch für abhängige Wahrscheinlichkeiten, wie Abschnitt 3.2 illustriert. In diesem wird eine Markovkette dritter Ordnung implementiert. Für die Ausgaben dieser diskreten stochastischen Quelle wird dann untersucht, welche Ergebnisse die Kelly- sowie eine Vergleichsstrategie liefern. Abschließend widmen wir uns in Abschnitt 3.3 der Frage, welche Ergebnisse ein Investor mit der Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension an der Börse erzielen könnte. Hierzu werden verschiedene historische Aktienkurse verwendet und die Kellystrategie aus Kapitel 2 entsprechend angepasst. Die Ergebnisse werden tabellarisch dargestellt und diskutiert.

Im Anhang befinden sich Tabellen, die ausgelagert wurden, um den Textfluss in den Kapiteln nicht zu stören.

In dieser Arbeit werden alle benötigten, nicht elementaren Begriffe durch Definitionen eingeführt. Grundkenntnisse im Bereich der Stochastik, Linearen Algebra und der Optimierung werden vorausgesetzt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns in der gesamten Arbeit auf die männliche Version von Personen.

Kapitel 1.

Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie

In diesem Kapitel beschreiben wir zunächst das Grundmodell, auf dem diese Arbeit aufbaut. Im zweiten Abschnitt geben wir einen Überblick über den Ursprung und die historische Entwicklung der Kellystrategie und stellen dar, wie diese Arbeiten im Hinblick auf das betrachtete Grundmodell interpretiert werden können. Danach werden einige wichtige Eigenschaften der Kellystrategie komprimiert vorgestellt und der Ansatz wird durch die Berechnung ausgewählter einfacher Beispiele veranschaulicht.

1.1. Das Grundmodell

In dieser Arbeit wird grundsätzlich die folgende Situation untersucht: Wir versetzen uns in die Lage eines Spielers oder Investors (diese Begriffe werden im Folgenden häufig synonym verwendet), der einen bestimmten Kapitalbetrag besitzt und diesen oder Teile davon auf die verschiedenen Ausgänge eines Zufallsexperiments verteilen möchte. Für jeden tatsächlich aufgetretenen Ausgang erhält der Spieler ein vorher festgelegtes Vielfaches seines Einsatzes ausbezahlt. Der Spieler verfolgt das Ziel, die langfristige exponentielle Wachstumsrate seines Kapitals zu maximieren. In dieser Situation soll eine optimale Aufteilung des vorhandenen Kapitals auf die verschiedenen zufälligen Ausgänge und eine risikolose Alternative bestimmt werden.

Zur Illustration kann man sich folgendes Beispiel vorstellen: Ein Spieler geht immer wieder zu einem Pferderennen mit denselben fünf Pferden. Er besitzt einen bestimmten Geldbetrag, den er bereit ist, zu investieren und sucht nach einer Aufteilung des Geldes zwischen den fünf Pferden und Bargeld, die die langfristige exponentielle Wachstumsrate seines Kapitals maximiert.

Für diese Situation formulieren wir nun unser Grundmodell, welches dem Modell in [FS07, Sch07, Sch08] nachempfunden ist: Die zufälligen Ereignisse, auf die der Spieler setzen kann, werden als mögliche Ausgaben einer diskreten stochastischen Quelle aufgefasst. Diese kann man sich als Gegenstand vorstellen, der zu diskreten Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots$ je ein Zeichen ausgibt. Bevor wir eine formale Definition des Begriffs geben, stellen wir die Notation für einige Grundbegriffe der Informationstheorie sowie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes zur Verfügung, da diese für das Verständnis der Definition benötigt werden. Zunächst werden die betrachteten Zeichenvorräte gemäß [Gra90, S. 1] charakterisiert.

Definition 1.1 (Alphabet)

Die Menge Σ , die alle möglichen Ausgabezeichen der Quelle enthält, heißt Alphabet. Wir bezeichnen mit $|\Sigma|$ die Anzahl der möglichen Ausgabezeichen.

Sofern nicht anders vermerkt, gehen wir in dieser Arbeit immer von endlichen Alphabeten $\Sigma := \{1, 2, \dots, n\}$ aus. Die Elemente von Σ werden meistens Zeichen, seltener Symbole genannt. Unter einem *Wort* verstehen wir jede Aneinanderreihung von Symbolen. Die folgende Definition stammt aus [HQ95, S. 8].

Definition 1.2 (Wort)

Unter einem Wort der Länge k versteht man ein k -Tupel $u := (u_1, u_2, \dots, u_k)$ mit $u_i \in \Sigma$, $i = 1, \dots, k$, aus dem k -fachen kartesischen Produkt

$$\Sigma^k = \prod_{i=1}^k \Sigma = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma}_{k\text{-mal}}$$

wobei Σ^k die Menge aller Wörter der Länge k mit Zeichen aus Σ genannt wird. Für ein Element $u \in \Sigma^k$ schreiben wir $|u| = k$, um zu verdeutlichen, dass das Wort u die Länge k besitzt.

Zur Vereinfachung der Notation wird das Wort $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ im Folgenden auch mit $u = u_1 u_2 \dots u_k$ bezeichnet.

Im Grundmodell wird angenommen, dass die betrachtete Quelle im Zeitpunkt $t = 0$ das *leere Wort* \square ausgibt. Daher bezeichne $\Sigma^0 := \{\square\}$ die Menge aller Wörter der Länge 0. Ferner sei $\Sigma^* := \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$ die Menge aller Wörter endlicher Länge mit Zeichen aus Σ . Mehrere Wörter können miteinander verkettet werden. Für zwei Wörter $u \in \Sigma^k$ und $s \in \Sigma^m$ lautet die Verkettungsoperation

$$u \in \Sigma^k, \quad s \in \Sigma^m \quad \Rightarrow \quad us = (u_1, \dots, u_k, s_1, \dots, s_m) \in \Sigma^{k+m}.$$

Die verkürzte Schreibweise $us = u_1 \dots u_k s_1 \dots s_m$ benutzen wir auch für verkettete Wörter.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung von Teilmengen eines Stichprobenraums in das Intervall $[0, 1]$, die auf einer σ -Algebra definiert ist. Die zugehörigen Definitionen entstammen [Gra88, S. 2-4].

Definition 1.3 (Wahrscheinlichkeitsraum und Maßraum)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Tripel, welches aus einem Stichprobenraum Ω , einer σ -Algebra \mathcal{F} von Teilmengen von Ω , die auch Ereignissystem genannt wird, und einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} , das auf der σ -Algebra definiert ist, besteht. Das bedeutet, dass $\mathbb{P}(F)$ jedem Element F aus \mathcal{F} eine reelle Zahl zuordnet, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

Nichtnegativität: $\mathbb{P}(F) \geq 0$, für alle $F \in \mathcal{F}$, (1.1)

Normierung: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. (1.2)

σ -Additivität: Für disjunkte $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i). \quad (1.3)$$

Eine Abbildung \mathbb{P} , die lediglich (1.1) und (1.3), aber nicht notwendigerweise (1.2) erfüllt, wird Maß genannt. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt dann Maßraum.

Definition 1.4 (σ -Algebra)

Eine σ -Algebra \mathcal{F} ist eine Menge von Teilmengen von Ω mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Omega &\in \mathcal{F}, \\ F \in \mathcal{F} &\Rightarrow F^C = \{\omega \mid \omega \notin F\} \in \mathcal{F}, \\ F_i \in \mathcal{F}; i = 1, 2, \dots &\Rightarrow \bigcup F_i \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Mit diesen Begriffen können wir diskrete stochastische Quellen gemäß [Gra90, S. 1, 5] definieren.

Definition 1.5 (Diskrete stochastische Quelle)

Eine diskrete stochastische Quelle (X_t) ist ein mathematisches Modell für ein Objekt, welches zu diskreten Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots$ auf zufällige Art und Weise eine Abfolge von Zeichen produziert. Daher kann eine Quelle als Zuordnung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (vgl. Definition 1.3) zu Ereignissen aufgefasst werden, wobei Ereignisse aus Mengen von Zeichenfolgen des Alphabets (vgl. Definition 1.1) bestehen.

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, Quellen mathematisch zu modellieren, die für einen gegebenen Prozess äquivalent sind. Die bekanntere ist diejenige, Quellen als Zufallsprozesse bzw. als Abfolgen von Zufallsvariablen aufzufassen. Obwohl in dieser Arbeit der zweite Modellierungsansatz gewählt wird, wollen wir kurz die zugehörigen Definitionen liefern, da die Begriffe des ersten Modellierungsansatzes insbesondere bei der Darstellung der historischen Entwicklung in Abschnitt 1.2 häufiger auftreten. Die Definitionen sind [Gra88, S. 2, 5] und [BN95, S. 81, 165, 173] entnommen.

Definition 1.6 (Borel σ -Algebra \mathbb{B} über \mathbb{R})

Mit dem Mengensystem

$$\mathcal{G}_1 := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq b\}$$

erzeugen wir die Borel σ -Algebra \mathbb{B} über \mathbb{R} gemäß

$$\mathbb{B} := \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}_1) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-Algebra über } \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{G}_1} \mathcal{F}.$$

Definition 1.7 (Zufallsvariable, messbare Funktion)

Seien (Ω, \mathcal{F}) und $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ zwei Messräume, also jeweils Paare von einem Stichprobenraum und einer σ -Algebra. Eine Zufallsvariable oder Zufallsgröße, die auf (Ω, \mathcal{F}) definiert ist und Werte in $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ annimmt, ist eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft, dass

$$B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \quad \Rightarrow \quad X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

X wird dann auch \mathcal{F} - $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ -messbare Funktion genannt.

Eine Zufallsvariable X über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ heißt diskret, wenn das induzierte Zufallsexperiment $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \mathbb{P}_X)$ ein diskretes Zufallsexperiment ist, vgl. Definition 1.17.

Ist $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{F} - \mathbb{B} -messbare Funktion, so nennen wir X eine reellwertige Zufallsvariable (\mathbb{R} -wertige Zufallsvariable).

Die Ausgänge einer Zufallsvariablen werden durch einen Zufallsprozess beschrieben, siehe z. B. [EM02, S. 1521 f.]:

Definition 1.8 (Zufallsprozess)

Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (vgl. Definition 1.3) mit Werten in $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$. Dann induziert X einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \mathbb{P}_X)$. Hierbei bezeichnet \mathcal{X} den Stichprobenraum und $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ ist die Borel σ -Algebra offener Teilmengen von \mathcal{X} . Ein Zufallsprozess in diskreter Zeit X_t wird definiert durch $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$, wobei $\mathcal{T} := \{1, 2, \dots\}$ eine Indexmenge bezeichnet.

Wie bereits erwähnt, beschäftigen wir uns in dieser Arbeit überwiegend mit dem zweiten Ansatz, in dem Quellen (s. Definition 1.5) durch dynamische Systeme beschrieben werden (vgl. [Gra90, S. 6]).

Definition 1.9 (Dynamisches System)

Ein abstraktes dynamisches System besteht aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zusammen mit einer messbaren Transformation $T : \Omega \rightarrow \Omega$ von Ω in sich selbst. Eine Transformation heißt messbar, wenn für $F \in \mathcal{F}$ auch $T^{-1}F = \{\omega \mid T\omega \in F\} \in \mathcal{F}$ ist. Jedes Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$, das die genannten Voraussetzungen erfüllt, heißt in der Ergodentheorie dynamisches System.

Die Ergodentheorie ist hierbei das Forschungsgebiet, welches die Effekte der Halbgruppe von Transformationen $(T^k : \Omega \rightarrow \Omega \mid k \in \mathbb{N})$ auf Maßräume $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (s. Definition 1.3) untersucht (vgl. [Sch07, S. 6]). Die Transformation T ist in dieser Arbeit grundsätzlich der *Schiebeoperator* (vgl. [EM02, S. 1522], [Sch07, S. 26]):

Definition 1.10 (Schiebeoperator)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Der Stichprobenraum sei $\Omega = \Sigma^{\mathbb{N}}$ und das Wort $v = v_1 v_2 \dots$ (vgl. Definition 1.2) sei Element des Stichprobenraums. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \quad \Omega &\rightarrow \Omega, \\ v = v_1 v_2 \dots &\mapsto v_2 v_3 \dots \end{aligned}$$

Schiebeoperator. Dieser ist also die Abbildung, die eine Zeichensequenz um eine Stelle nach links verschiebt.

In engem Zusammenhang mit dem Schiebeoperator steht der Begriff des *invarianten Ereignisses* (vgl. [EM02, S. 1522 f.]).

Definition 1.11 (Invariantes Ereignis)

Ein Ereignis $F \in \mathcal{F}$ heißt invariant, wenn $F = T^{-1}F$, oder wenn $v \in F$ genau dann gilt, wenn auch $T(v) \in F$ ist.

Ein einfaches Beispiel für ein invariantes Ereignis ist $F = \{(1, 2, 1, 2, \dots), (2, 1, 2, 1, \dots)\}$. Dieses Ereignis wird nicht durch die Anwendung des Schiebeoperators T verändert. Als nächstes müssen wir festlegen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten verschiedene Zeichen und Wörter auftreten. Dazu definieren wir wie in [FS07, S. 2342] eine Funktion

$$p : \Sigma^* \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}, \text{ so dass}$$

$$\sum_{a \in \Sigma} p(wa) = p(w) \quad \forall w \in \Sigma^*.$$

Hierbei wird gefordert, dass $p(\square) = 1$ gilt, was besagt, dass die Quelle (vgl. Definition 1.5) im Zeitpunkt $t = 0$ mit Sicherheit das leere Wort \square ausgibt. Daher gilt

$$\sum_{w \in \Sigma^t} p(w) = 1 \quad \forall t = 0, 1, \dots$$

Zur Zeit $t \geq 1$ hat die Quelle bereits ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_t \in \Sigma^t$ (s. Definition 1.2) ausgegeben, dessen Wahrscheinlichkeit

$$p(w) = \mathbb{P}[X_1 = w_1, X_2 = w_2, \dots, X_t = w_t]$$

beträgt. Wir wollen in dem Grundmodell auch mit bedingten Wahrscheinlichkeiten rechnen. Daher definieren wir diese zunächst allgemein wie in [BN95, S. 64 f.].

Definition 1.12 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (s. Definition 1.3). Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ wird die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B , kurz $\mathbb{P}(A|B)$, definiert durch

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \quad (1.4)$$

wobei $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A \cap B)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B bezeichnet. Gilt $\mathbb{P}(B) = 0$, so folgt wegen $(A \cap B) \subset B$ auch $\mathbb{P}(AB) = 0$. Mit der in der Stochastik üblichen Konvention $0/0 = 0$ liefert (1.4) dann $\mathbb{P}(A|B) := 0$.

Um die totale Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses und die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von mehreren Ereignissen berechnen zu können, sind die folgenden Sätze hilfreich (siehe [BN95, S. 66]).

Satz 1.13 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Ist $I \neq \emptyset$ eine endliche oder abzählbar unendliche Indexmenge und sind die Ereignisse $B_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$ paarweise disjunkt mit der Eigenschaft $\sum_{i \in I} B_i = \Omega$, so gilt die Gleichheit

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i). \quad (1.5)$$

Satz 1.14 (Multiplikationsregel)

Für beliebige Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt die Gleichheit

$$\mathbb{P}(A_1 \dots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \mathbb{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

Aus diesem Satz oder auch durch Umstellen der Gleichung (1.4) kann direkt die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von zwei Ereignissen A und B abgeleitet werden als

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A).$$

In unserem Grundmodell verwenden wir bedingte Wahrscheinlichkeiten als *Prognosewahrscheinlichkeiten* [FS07, S. 2343].

Definition 1.15 ((Bedingte) Prognosewahrscheinlichkeit)

Gegeben sei $w \in \Sigma^t$. Dann bezeichnet die (bedingte) Prognosewahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle (s. Definition 1.5) in den nächsten k Perioden das Wort $v = v_1 \dots v_k \in \Sigma^k$ (s. Definition 1.2) ausgibt. Diese beträgt

$$p(v|w) := \mathbb{P}[X_{t+1} = v_1, \dots, X_{t+k} = v_k | w] \\ = \begin{cases} 0, & \text{falls } p(w) = 0, \\ \frac{p(wv)}{p(w)}, & \text{falls } p(w) \neq 0. \end{cases}$$

Für die bedingte Prognosewahrscheinlichkeit gilt

$$\sum_{v \in \Sigma^k} p(v|w) = 1, \quad \text{falls } p(w) \neq 0. \quad (1.6)$$

Ein Spieler, der auf die Ausgänge einer Quelle setzen möchte, sollte sich vorher ein Bild darüber machen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Zeichen in Zukunft auftreten. Unter der Annahme, dass der Spieler im Zeitpunkt t das bereits ausgegebene Wort $w = w_1 \dots w_t \in \Sigma^t$ kennt, kann er mithilfe der Prognosewahrscheinlichkeiten einen Vektor bilden, in dem die Wahrscheinlichkeiten aller zukünftig möglichen Wörter aufgelistet sind. Dieser unendlichdimensionale Vektor enthält die Prognosewahrscheinlichkeiten für alle Wörter $v \in \Sigma^*$ unter der Voraussetzung, dass bisher $w \in \Sigma^t$ ausgegeben wurde:

$$\mathbf{g}_w = [p(v|w)_{v \in \Sigma^*}] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Wir nehmen an, dass sich die Quelle zu jedem Zeitpunkt in einem bestimmten *Zustand* befindet, der ausschließlich von allen bisher ausgegebenen Zeichen abhängt und mit dem die Wahrscheinlichkeiten für alle zukünftig möglichen Wörter beschrieben werden können. Daher ist es naheliegend, die Zustände der Quelle mit den Vektoren \mathbf{g}_w zu identifizieren. Da der Spieler die Prognosewahrscheinlichkeiten nicht nur für ein Wort $w \in \Sigma^t$, sondern für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ wissen möchte, bilden wir die *Prognosematrix*, die die verschiedenen Vektoren \mathbf{g}_w als Spaltenvektoren für alle $w \in \Sigma^*$ enthält

$$\mathcal{P} = [p(v|w)_{v, w \in \Sigma^*}].$$

Wir definieren den *Prognoseraum* \mathcal{V} der Quelle (X_t) als den Spaltenraum der Prognosematrix \mathcal{P} . Der Prognoseraum ist somit die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen der Zustände \mathbf{g}_w . Da wir für die folgende Analyse nicht den gesamten Prognoseraum benötigen, bezeichnen wir mit dem *Zustandsraum* \mathcal{S} den affinen Unterraum derjenigen Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, deren Komponenten $\mathbf{v}(a)$, $a \in \Sigma$, sich zu 1 addieren, also

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} \left| \sum_{a \in \Sigma} \mathbf{v}(a) = 1 \right. \right\}.$$

Wir wissen bereits aus (1.6), dass $\sum_{v \in \Sigma} p(v|w) = 1$ für alle $w \in \Sigma^*$ mit $p(w) \neq 0$. Aus diesem Grund sind alle Zustände $\mathbf{g}_w \neq \mathbf{0}$ Elemente der Menge \mathcal{S} .

Um zu zeigen, dass sich nicht nur die Zustände \mathbf{g}_w selbst, sondern auch ihre Konvexkombinationen im Zustandsraum \mathcal{S} befinden, benötigen wir das folgende Lemma gemäß [FS07, S. 2343].

Lemma 1.16

Es seien $\mathbf{g}_{w_1}, \dots, \mathbf{g}_{w_k}$ beliebige Zustandsvektoren und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ Skalare. Dann gilt

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{g}_{w_i} \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Wir wollen nun beschreiben, wie sich die Quelle (X_t) (vgl. Definition 1.5) im Laufe der Zeit entwickelt. Hierzu wird angenommen, dass sie sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\mathbf{g}^0 = \mathbf{g}_\square$ befindet. Der erwartete Zustand zur Zeit $t \geq 1$ wird t -ter Grundzustand genannt und berechnet sich durch

$$\mathbf{g}^t := \sum_{w \in \Sigma^t} p(w) \mathbf{g}_w \in \mathcal{S}.$$

Mithilfe der Grundzustände kann der Spieler schon vor der ersten Ausgabe für jeden Zeitpunkt t den erwarteten Zustand der Quelle bestimmen. Er ist aber auch daran interessiert, den erwarteten nächsten Zustand von einem bestimmten Zustand \mathbf{g}_w zu ermitteln. Hierzu führen wir den *Evolutionsoperator* ψ der Quelle (X_t) wie in [FS07, S. 2343] ein. Die Quelle (X_t) sei im Zustand $\mathbf{g}_w \neq \mathbf{0}$. Dann ist der erwartete nächste Zustand

$$\psi(\mathbf{g}_w) = \sum_{a \in \Sigma} p(a|w) \mathbf{g}_{wa} \in \mathcal{S}.$$

Der Operator ψ kann auf folgende Weise zu einem linearen Operator auf \mathcal{V} erweitert werden:

$$\psi \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{g}_{w_i} \right) := \sum_{i=1}^k \alpha_i \psi(\mathbf{g}_{w_i}).$$

In [FS07, S. 2343] wird gezeigt, dass sich alle Grundzustände ausgehend von \mathbf{g}^0 durch die wiederholte Anwendung von ψ ergeben, so dass

$$\mathbf{g}^{t+1} = \psi(\mathbf{g}^t) = \psi^2(\mathbf{g}^{t-1}) = \dots = \psi^{t+1}(\mathbf{g}^0)$$

gilt. Wir betrachten die Menge der Grundzustände \mathcal{G} mit

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{g}^0, \dots, \mathbf{g}^t, \dots\} = \{\psi^0 \mathbf{g}^0, \dots, \psi^t \mathbf{g}^0, \dots\}.$$

Dann definieren wir den *Evolutionraum* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$ als die Menge aller Linearkombinationen der Grundzustände in \mathcal{G} . Die *Evolutiondimension* der Quelle (X_t) ist die Dimension von \mathcal{E} , d.h.

$$e \dim(X_t) := \dim \mathcal{E}.$$

Wenn die Evolutiondimension einer Quelle (X_t) endlich ist, gibt es ein minimales d , so dass Skalare $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{g}^d = c_0 \mathbf{g}^0 + \dots + c_{d-1} \mathbf{g}^{d-1}$$

existieren. Weil d minimal ist, ist die Menge $\mathcal{G}_d = \{\mathbf{g}^0, \dots, \mathbf{g}^{d-1}\}$ linear unabhängig. Außerdem wird in [FS07, S. 2344] gezeigt, dass \mathcal{G}_d eine Basis von \mathcal{E} ist und daher $d =$

$e \dim(X_t)$ gilt. Wir nennen \mathcal{G}_d die *Evolutionbasis* von (X_t) . Der Evolutionsoperator ψ agiert als linearer Operator auf dem Evolutionsraum \mathcal{E} . Bezüglich der Basis \mathcal{G}_d wird der Operator $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ durch die *Evolutionmatrix* E mit

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

beschrieben. An dieser Stelle haben wir alle Modellelemente beisammen, um das Verhalten der diskreten stochastischen Quelle zu untersuchen. Bevor wir nun die Eigenschaften der betrachteten Quelle (X_t) (s. Definition 1.5) im Rahmen des Grundmodells beschreiben, wollen wir uns kurz mit ein paar stochastischen Grundlagen beschäftigen, die für die gesamte Arbeit Relevanz besitzen. Da die diskrete stochastische Quelle im Grundmodell zu diskreten Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots$ Zeichen ausgibt, muss auch der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum (s. Definition 1.3) des dynamischen Systems (vgl. Definition 1.9) durch ein diskretes Modell abgebildet werden. Eine Beschreibung diskreter stochastischer Modelle findet sich in [BN95, S. 72 f.].

Definition 1.17 (Diskrete Modelle)

Gegeben seien ein Messraum (Ω, \mathcal{F}) und eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit der Eigenschaft

$$T_f := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\} \quad \text{ist abzählbar.} \tag{1.7}$$

Wenn für die Abbildung f

$$\sum_{t \in T_f} f(t) = 1 \tag{1.8}$$

gilt, dann wird durch

$$\mu(F) := \sum_{t \in T_f} f(t) \mathbf{1}_F(t) \quad \forall F \in \mathcal{F}, \tag{1.9}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf (Ω, \mathcal{F}) definiert (s. Definition 1.3), wobei $\infty \cdot 0 = 0$ gilt. Man nennt einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ diskret und μ ein diskretes Maß, wenn es eine Darstellung von μ mit $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ gemäß (1.7) und (1.9) gibt. Jede solche Abbildung f heißt *Zähldichte* von μ .

Falls für f zusätzlich die Normierungsbedingung (1.8) gilt, also μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so spricht man von einer *Wahrscheinlichkeitszähldichte*.

Die Menge $T_f := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$ nennt man einen *Träger* (im strengen Sinne) von μ . Jede abzählbare Menge $T_r \supset T_f$ wird als ein *Träger* von μ (im weiteren Sinne) bezeichnet. Es wird nicht gefordert, dass Träger auch Elemente von \mathcal{F} sein müssen.

In Bezug auf die Eigenschaften der Quellen im Grundmodell stellen wir als erstes fest, dass Quellen mit endlicher Evolutionsdimension im folgenden Sinne *asymptotisch stabil* sind (vgl. [FS07, S. 2344, Theorem 2.1]).

Satz 1.18

Für stochastische Quellen (X_t) (vgl. Definition 1.5) mit endlicher Evolutionsdimension $d = e \dim(X_t)$ besitzt die zugehörige Evolutionsmatrix E den Cesàro-Limes

$$\bar{E} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E^k \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Wir wollen später die Kapitalentwicklung von Spielern untersuchen, die unendlich lange auf die Ausgaben einer Quelle setzen. Daher benötigen wir Aussagen darüber, wie sich die Ausgabewahrscheinlichkeiten der Quelle asymptotisch verhalten. Hierzu finden sich diverse Aussagen in Abschnitt III.A von [FS07, S. 2345-2347].

Definition 1.19 (Punktweise asymptotisch im Mittel stationär)

Eine nicht notwendigerweise endlichdimensionale stochastische Quelle (X_t) mit endlichem Alphabet Σ (s. Definition 1.1) wird punktweise asymptotisch im Mittel stationär genannt, wenn die Mittelwerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{m=0}^{t-1} \mathbb{P}[X_{m+1} = v_1, \dots, X_{m+k} = v_k] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{m=0}^{t-1} \mathbf{g}^m(v) = \bar{\mathbf{g}}(v)$$

für alle $v = v_1 \dots v_k \in \Sigma^*$ konvergieren. Wir nennen die zugehörige Grenzfunktion $\bar{\mathbf{g}} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ den Cesàro-Limes der Grundzustände \mathbf{g}^t .

Für das dann folgende Lemma benötigen wir zunächst die Definition von Stationarität sowie ein Lemma (beides aus [Sch07, S. 88]), aus dem hervorgeht, wann ein dynamisches System (vgl. Definition 1.9) stationär ist.

Definition 1.20 (Stationarität)

Eine stochastische Quelle mit Werten in einem endlichen Alphabet Σ bezeichnet man als stationär, falls das durch sie induzierte dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ stationär ist.

Lemma 1.21

Ein dynamisches System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ ist genau dann stationär, falls

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[T^{-1}F] = \mathbb{P}[F]$$

gilt. Dies bedeutet, dass das System invariant (vgl. Definition 1.11) bezüglich T auf den Ereignissen der zugehörigen σ -Algebra (vgl. Definition 1.4) ist.

Lemma 1.22 (Lemma 3.1 in [FS07])

Angenommen, der Cesàro-Limes $\bar{\mathbf{g}}$ der Grundzustände \mathbf{g}^t von (X_t) existiere. Dann ist $\bar{\mathbf{g}}$ der Grundzustand einer stationären diskreten stochastischen Quelle (\bar{X}_t) mit Alphabet Σ , die Grenzprozess von (X_t) genannt wird.

Stationäre diskrete stochastische Quellen (X_t) besitzen nur einen einzigen Grundzustand, denn für sie gilt gemäß [FS07, S. 2343 f.]

$$\mathbf{g}^0 = \mathbf{g}^1 = \mathbf{g}^2 = \dots \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^0 = \psi \mathbf{g}^0 = \psi^2 \mathbf{g}^0 = \dots$$

Da alle Elemente in der Menge der Grundzustände gleich sind, besteht die Evolutionsbasis nur aus einem Element. Es gilt also

$$(X_t) \text{ ist stationär} \quad \Leftrightarrow \quad e \dim(X_t) = 1.$$

Ein wichtiger Satz zum langfristigen Verhalten von stochastischen Quellen ist der folgende aus [FS07, S. 2346].

Satz 1.23

Jede diskrete stochastische Quelle (X_t) (s. Definition 1.5) mit endlichem Alphabet Σ (vgl. Definition 1.1) und endlicher Evolutionsdimension $d = e \dim(X_t)$ ist punktweise asymptotisch im Mittel stationär (vgl. Definition 1.19).

Neben der Eigenschaft, punktweise asymptotisch im Mittel stationär zu sein, gibt es auch die in der Literatur häufiger verwendete Eigenschaft, asymptotisch im Mittel stationär zu sein. Dies geht mit der folgenden Definition einher.

Definition 1.24 (Asymptotisch im Mittel stationär (AMS))

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (s. Definition 1.3). Eine stochastische Quelle (X_t) mit endlichem Alphabet Σ heißt asymptotisch im Mittel stationär, falls

$$\bar{\mathbf{g}}(F) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(F)$$

für jedes $F \in \mathcal{F}$ existiert, wobei $\bar{\mathbf{g}}$ stationäres Mittel genannt wird.

Für stochastische Quellen mit endlicher Evolutionsdimension kann man aus der Eigenschaft, punktweise asymptotisch im Mittel stationär zu sein, folgern, dass (X_t) auch AMS ist. Daher ergibt sich folgendes Korollar wie in [FS07, S. 2346].

Korollar 1.25

Jede diskrete stochastische Quelle (X_t) mit endlichem Alphabet Σ und endlicher Evolutionsdimension $d = e \dim(X_t)$ ist asymptotisch im Mittel stationär.

Die Voraussetzung der endlichen Evolutionsdimension muss für die Gültigkeit von Satz 1.23 und Korollar 1.25 erfüllt sein. Es gibt nämlich stochastische Quellen mit endlichem Alphabet, die nicht AMS sind. Ein Beispiel hierfür mit einer deterministischen Quelle (X_t) und binärem Alphabet Σ wird in [FS07, S. 2346] angeführt.

Beispiel 1.26

Es wird eine Quelle betrachtet, die im ersten Zeitschritt das Zeichen a ausgibt ($X_1 = a$) und danach das Zeichen b sendet, bis der Anteil der b 's die Grenze $2/3$ erreicht oder übersteigt. Danach folgen Zeichen a , bis deren Anteil die Grenze $2/3$ erreicht bzw. übersteigt usw. Die Ausgabe der Quelle lautet dann

$$X = a \text{ } bb \text{ } aaa \text{ } bbbbbb \text{ } aaaaaaaaaaaaaa \text{ } bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb \text{ } a \dots$$

Da die Quelle immer wieder bei ihrer Ausgabe zwischen den beiden Zeichen wechselt und dies so geschieht, dass die relative Häufigkeit der einzelnen Zeichen a und b immer zwischen $1/3$ und $2/3$ schwankt, ist die betrachtete Quelle nicht asymptotisch im Mittel stationär.

Ein Spieler, der auf die Ausgaben einer stochastischen Quelle (X_t) setzen möchte, kann demnach nur Aussagen über das langfristige Verhalten der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten bzw. der Grundzustände treffen, wenn die Quelle ein endliches Alphabet Σ und endliche Evolutionsdimension besitzt. In dieser Arbeit werden ausschließlich Quellen mit endlichem Alphabet untersucht. Die Voraussetzung der endlichen Evolutionsdimension ist jedoch für beliebige stochastische Quellen nicht gegeben. Um dies zu verdeutlichen, führen wir ein Beispiel aus [FS07, S. 2347] bzw. [Sch07, S. 109 ff.] an.

Beispiel 1.27

Es sei (X_t) eine diskrete stochastische Quelle (vgl. Definition 1.5) mit binärem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Die Quelle besitze eine unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die wie folgt berechnet wird:

$$\mathbb{P}[X_1 = v_1, \dots, X_t = v_t] = \mathbb{P}[X_1 = v_1] \mathbb{P}[X_2 = v_2] \dots \mathbb{P}[X_t = v_t].$$

Wir wählen ein beliebiges $p \in (0, 1)$ und setzen

$$\mathbb{P}[X_t = a] = p^t \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_t = b] = 1 - p^t.$$

Dann kann gezeigt werden, dass der resultierende Prozess AMS ist (vgl. Definition 1.24), die Quelle jedoch eine unendliche Evolutionsdimension besitzt. Der entsprechende Beweis für allgemeine $p \in (0, 1)$ findet sich in [Sch07, S. 109 ff.].

Wir wollen Beispiel 1.27 veranschaulichen, indem wir für ein festes p , nämlich $p = 1/2$, zeigen, dass der resultierende Prozess AMS ist. Hierzu ermitteln wir zunächst für allgemeine p die Menge $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^t, \dots\}$ aller Grundzustände. Die Grundzustände besitzen für $t = 0, 1, \dots$ die Form:

$$\mathbf{g}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ p^{t+1} \\ 1 - p^{t+1} \\ p^{t+1} p^{t+2} \\ p^{t+1} (1 - p^{t+2}) \\ (1 - p^{t+1}) p^{t+2} \\ (1 - p^{t+1}) (1 - p^{t+2}) \\ p^{t+1} p^{t+2} p^{t+3} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Um nachzuweisen, dass die Quelle (X_t) AMS ist, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert

$$\bar{\mathbf{g}}(F) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(F)$$

für jedes $F \in \mathcal{F}$ existiert. Wir müssen also einen Vektor $\bar{\mathbf{g}}$ finden, für den

$$\bar{\mathbf{g}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k \tag{1.10}$$

gilt. Wir behaupten, dass $\bar{\mathbf{g}}$ derjenige Vektor ist, für den

$$\bar{\mathbf{g}}(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v = b^t \text{ für } v \in \Sigma^t, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet b^t das Wort (s. Definition 1.2), welches die Länge t besitzt und nur Zeichen b enthält. Für die betrachtete Quelle hätte $\bar{\mathbf{g}}$ dann folgende Form:

$$\bar{\mathbf{g}} = \left(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \right)^\top.$$

Die Eigenschaft (1.10) gilt insgesamt, wenn sie für jede Komponente der betrachteten Vektoren gültig ist. Wir wollen uns zunächst mit den Komponenten beschäftigen, für die $\bar{\mathbf{g}} = 0$ behauptet wird.

Hierzu betrachten wir die Zeilen $\mathbf{g}^t(v)$, für die $v \neq b^t$ ist. Da die Quelle nur zwei Buchstaben ausgibt, muss in diesem Fall jedes betrachtete Wort v mindestens ein Zeichen a beinhalten. Da die erste Komponente aller Zustandsvektoren $\mathbf{g}^t(\square)$ gleich null ist, sieht man sofort, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(\square) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} 0 = 0 = \bar{\mathbf{g}}(\square)$$

ist. Falls $p \neq 1$ gilt, erhalten wir für $v = a$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(a) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} p^{k+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} p \sum_{k=0}^{t-1} p^k \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p}{t} \frac{1-p^t}{1-p} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p}{1-p} \frac{1-p^t}{t} = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(a) = 0 = \bar{\mathbf{g}}(a).$$

Für jede weitere Summe über die Einträge der Vektoren $\mathbf{g}^t(v)$, mit $v \neq b^t$, erhalten wir die Abschätzung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(v) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p^k = 1. \quad (1.11)$$

Aufgrund der Wahl von $p \in (0, 1)$ und der Vorschrift für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zeichen der Quelle, sind alle Einträge $\mathbf{g}^t(v) \in (0, 1)$, $t \geq 0$, $v \in \Sigma^* \setminus \Sigma^0$. Da alle Summanden positiv sind, sind die betrachteten Reihen streng monoton wachsend. Alle betrachteten Reihen sind auch, wie in (1.11) gezeigt, nach oben beschränkt. Daher existiert für jede Reihe ein Grenzwert. Der gesuchte Grenzwert $\bar{\mathbf{g}}(v)$ ergibt sich dann durch die Multiplikation des Grenzwertes der Nullfolge $1/t$ mit dem Grenzwert der Summe $\sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(v)$. Daher ist $\bar{\mathbf{g}}(v) = 0$ für alle Wörter $v \neq b^t$.

Betrachten wir nun die Grenzwerte $\bar{\mathbf{g}}(v)$ für Wörter $v = b^t$. Wir beginnen mit $v = b \in \Sigma$. Hier gilt

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}(b) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{g}^k(b) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} (1 - p^{k+1}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{t-1} 1 - \sum_{k=0}^{t-1} p^{k+1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} p^{k+1} = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Für allgemeine $v = b^m$, $m \geq 1$, suchen wir den Grenzwert

$$\bar{\mathbf{g}}(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \prod_{j=1}^m (1 - p^{k+j}). \quad (1.12)$$

Auch in diesem Fall wissen wir, dass alle auftretenden Summanden im Intervall $(0, 1)$ liegen. Daher sind die betrachteten Reihen streng monoton wachsend. Wir formen Gleichung (1.12) zu

$$\bar{\mathbf{g}}(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} (1 + a(p, k))$$

um. Hierbei ist $|a(p, k)| \leq p^{k+1}$ und daraus folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |a(p, k)|$ von der geometrischen Reihe majorisiert wird und daher endlich ist. An dieser Stelle können wir wieder die Argumentation wie zuvor benutzen und erhalten

$$\bar{\mathbf{g}}(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} a(p, k) = 1 + 0 = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass die betrachtete Quelle (X_t) für $p = 1/2$ AMS ist (s. Definition 1.24).

Obwohl Beispiel 1.27 gezeigt hat, dass schon recht einfache Quellen (X_t) eine unendliche Evolutionsdimension besitzen können, wollen wir an dieser Stelle herausstellen, dass es Klassen von diskreten stochastischen Quellen (vgl. Definition 1.5) gibt, deren Mitglieder alle eine endliche Evolutionsdimension besitzen. Ein Beispiel für eine solche Klasse sind Markovquellen, deren Definition [KR81, S. 304] entstammt.

Definition 1.28 (Markovquelle)

Eine einseitige Quelle (X_t) , $t \geq 1$, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (s. Definition 1.3) heißt Markovquelle, wenn sie einen endlichen Stichprobenraum Ω besitzt, wenn eine endliche Menge \mathfrak{S} sowie eine Abbildung $f : \mathfrak{S} \rightarrow \Omega$ existieren und wenn es eine homogene Markovkette Y_1, Y_2, \dots mit Zustandsmenge \mathfrak{S} gibt, so dass die gemeinsame Verteilung von $f(Y_1), f(Y_2), \dots$ gleich \mathbb{P} ist.

Die Definitionen der Begriffe „homogene Markovkette“ und „gemeinsame Verteilung“ entstammen [HQ95, S. 78] und [BN95, S. 120 f., 21].

Definition 1.29 (Homogene Markovkette)

Ein diskreter Zufallsprozess $(X_t), t \geq 1$ (vgl. Definition 1.8), heißt endliche homogene Markovkette, falls der Prozess sich auf einer endlichen Zustandsmenge $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ bewegt und seine Bewegungen unabhängig von der Zeit t durch die Einträge einer stochastischen $n \times n$ -Matrix $M = (m_{k,j})$ beschrieben werden, die auch Übergangsmatrix genannt wird.

Definition 1.30 (Gemeinsame Verteilung)

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei gegeben (vgl. Definition 1.3). Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$ sei X_i eine Abbildung von Ω in den Stichprobenraum \mathcal{X}_i .

Jede Komponente X_i des Tupels $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei eine diskrete Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (s. Definition 1.7) mit Werten in $(\mathcal{X}_i, \mathcal{P}(\mathcal{X}_i))$, wobei $\mathcal{P}(\mathcal{X}_i)$ die Potenzmenge von \mathcal{X}_i , also das System aller Teilmengen von \mathcal{X}_i , bezeichne: $\mathcal{P}(\mathcal{X}_i) = 2^{\mathcal{X}_i}$.

Das von $X = (X_1, \dots, X_n)$ und \mathbb{P} über $\mathfrak{X}_{i=1}^n \mathcal{X}_i$ induzierte diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$ heißt gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n unter \mathbb{P} .

Markovquellen und -ketten zeichnen sich durch die *Markoveigenschaft* aus, welche vorliegt, wenn die Wahrscheinlichkeiten eines Systems nur davon abhängen, in welchem Zustand sich das System zur Zeit befindet, jedoch nicht davon, welche Zustände davor besucht wurden. Die zukünftigen Wahrscheinlichkeiten sind also nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit abhängig. Markovketten mit dieser Eigenschaft werden auch *Markovketten erster Ordnung* genannt.

Ein einfaches Beispiel für eine Markovquelle ist ein System, in dem eine Markovkette mit zwei Zuständen betrachtet wird, und die Markovquelle das Zeichen a ausgibt, wenn sich die Markovkette im Zustand 1 befindet, und ein b , wenn die Markovkette im Zustand 2 ist.

Desweiteren können durch Markovquellen auch Prozesse beschrieben werden, deren Wahrscheinlichkeiten von den letzten k ausgegebenen Zeichen abhängen. Solche Quellen heißen *Markovquellen der Rückwirkung k* . Für ihre Wahrscheinlichkeiten gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_{t+1} = v_{t+1} \mid X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_t = v_t] \\ &= \mathbb{P}[X_{t+1} = v_{t+1} \mid X_{t-k+1} = v_{t-k+1}, X_{t-k+2} = v_{t-k+2}, \dots, X_t = v_t] \end{aligned}$$

für Zeichen $v_t \in \Sigma, t = 1, 2, \dots$. In diesem Fall besagt die *Markoveigenschaft*, dass die Wahrscheinlichkeiten der Markovkette ebenso gut durch die Kenntnis der letzten k Zeichen bestimmt werden können wie durch die Kenntnis der letzten $t \geq k$ Zeichen.

Eine dritte Anwendungsmöglichkeit von Markovquellen sind *Hidden Markov Modelle*. Dies sind stochastische Prozesse, die ebenfalls aus einer zugrundeliegenden Markovkette zusammen mit einer Ausgabefunktion bestehen. Der Unterschied zu den bisher beschriebenen Prozessen besteht darin, dass die Zustände der Markovkette versteckt („hidden“) sind, so dass ein Beobachter des Systems diese nicht sehen kann. Der Beobachter ist daher darauf angewiesen, durch die sichtbaren Ausgaben der Quelle auf ihre stochastischen Eigenschaften zurückzuschließen. Hidden Markov Modelle werden in Abschnitt 2.7 genauer behandelt. Dort wird auch eine formale Definition gegeben.

Anschaulich wollen wir uns ein Hidden Markov Modell folgendermaßen vorstellen: Die betrachtete Markovkette bewegt sich auf der endlichen Menge der versteckten Zustände $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, n\}$. Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 1$ befindet sie sich in einem eindeutigen, aber versteckten Zustand $j \in \mathfrak{S}$. Wenn die Markovkette im Zustand $j \in \mathfrak{S}$ ist, gibt die Quelle

(X_t) genau ein bestimmtes Zeichen aus, welches durch die Funktion $X : \mathfrak{S} \rightarrow \Sigma$ festgelegt wird. Dieses Zeichen wird im Zeitpunkt t durch den Wert $X_t = X(j)$ beobachtet. Danach bewegt sich die Markovkette in den Zustand $i \in \mathfrak{S}$ und die Quelle gibt das Zeichen $X_{t+1} = X(i)$ aus. In jedem Zeitschritt findet also eine Bewegung der Markovkette und eine Ausgabe der Markovquelle statt. Die Bewegung der Markovkette kann auch darin bestehen, in einem Zustand zu bleiben.

Wir setzen $X_0 = \square$ und nehmen an, dass (X_t) ein *linearer* Zufallsprozess ist. Dies bedeutet, dass für eine bis t beobachtete Zeichenkette $v = v_1 \dots v_t$ das gesamte Wissen über den Prozess in einem Vektor $\pi_v \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst werden kann, so dass

$$p(v) = \mathbb{P}[X_1 = v_1, \dots, X_t = v_t] = \sum_{j=1}^n \pi_v(j)$$

gilt. Um den Vektor π_v zu veranschaulichen, betrachten wir eine Quelle mit binärem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und Zustandsmenge $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, n\}$. Die Funktion X sei derart, dass

$$X(j) = \begin{cases} a, & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ b, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit des ersten Zeichens. Falls wir ein a gesehen haben, besitzt π_a das folgende Aussehen. Für j gerade gilt $\pi_a(j) = 0$ und für j ungerade stehen in π_a gerade die Anfangswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Zustände. Analog ergibt sich π_b , falls b das erste Zeichen war. Dann ist $\pi_b(j) = 0$ für j ungerade und für gerade j enthält $\pi_b(j)$ die Anfangswahrscheinlichkeiten der Zustände j .

Für die beschriebenen Prozesse gilt gemäß [FS07, S. 2347] folgender Satz.

Satz 1.31

Eine lineare zufällige Quelle (X_t) mit n versteckten Zuständen besitzt eine endliche Evolutionsdimension $e \dim(X_t) \leq n$ und ist daher asymptotisch im Mittel stationär (vgl. Definition 1.24).

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes kurz zusammenfassen. Ein Spieler, der immer wieder auf die Ausgänge einer diskreten stochastischen Quelle (X_t) (s. Definition 1.5) mit endlichem Alphabet Σ (vgl. Definition 1.1) setzen möchte, sollte sich über die langfristigen stochastischen Eigenschaften der Quelle informieren. Hierüber können nur Aussagen getroffen werden, falls die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in irgendeiner Weise konvergieren. Der allgemeinste Konvergenzbegriff ist in diesem Zusammenhang die Eigenschaft, asymptotisch im Mittel stationär zu sein. Ein Prozess ist AMS, wenn der Cesàro-Limes der Grundzustände für alle Elemente der zugehörigen σ -Algebra (s. Definition 1.4) existiert.

Aus Korollar 1.25 weiß der Spieler, dass die betrachtete Quelle AMS ist, sofern sie eine endliche Evolutionsdimension besitzt.

Falls die Evolutionsdimension jedoch unendlich ist, lässt sich eine solche Aussage nicht treffen. Es gibt allgemeine stochastische Quellen mit unendlicher Evolutionsdimension, die nicht AMS sind (vgl. Beispiel 1.26). Andererseits zeigt Beispiel 1.27, dass auch Quellen mit unendlicher Evolutionsdimension existieren, die AMS sind.

Um sicherzugehen, dass die in dieser Arbeit betrachteten diskreten stochastischen Quellen asymptotisch im Mittel stationär sind, nehmen wir im Folgenden immer an, dass die untersuchten Quellen eine endliche Evolutionsdimension besitzen.

Bereits am Anfang dieses Abschnitts wurde beschrieben, dass der betrachtete Investor in jeder Spielrunde die Einsätze bestimmt, die er auf die verschiedenen Zeichen $i \in \Sigma$ der betrachteten stochastischen Quelle (X_t) setzt. Falls das Zeichen i dann tatsächlich von der Quelle ausgegeben wird, erhält der Spieler ein vorher festgelegtes Vielfaches seines Einsatzes zurück. Dieses Vielfache wird im Folgenden als *Quote* bezeichnet, da dieser Begriff bei Glücksspielen bereits existiert. Wir verstehen darunter folgendes:

Definition 1.32 (Quote)

Es sei (X_t) eine diskrete stochastische Quelle mit endlichem Alphabet Σ . Es sei $a_i^{(t)}$ der Geldbetrag, den der Spieler zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$ auf Zeichen $i \in \Sigma$ setzt. Falls die Quelle das Zeichen i ausgibt, erhält der Spieler den Betrag $\alpha_i^{(t)} a_i^{(t)}$ vom Buchmacher ausbezahlt. Dann sei $\alpha_i^{(t)} \geq 0$ die Quote für Zeichen $i \in \Sigma$ zum Zeitpunkt t .

So führt z.B. die Quote $\alpha_i^{(t)} = 2$ dazu, dass der Spieler seinen Einsatz verdoppelt, falls Zeichen i zur Zeit t auftritt. Um zu berechnen, wie sich das Kapital des Spielers dadurch entwickelt, betrachten wir einen Spieler, der am Anfang eine Geldeinheit besitzt, den Anteil $a_i^{(1)} < 1$ auf Zeichen i setzt und den Rest als Bargeld behält. Dann beträgt sein Kapital $1 - a_i^{(1)}$, sobald er den Einsatz investiert hat. Nach dem Gewinn besitzt er $1 - a_i^{(1)} + \alpha_i^{(1)} a_i^{(1)}$. Wenn Zeichen $j \neq i$ auftritt, verliert der Spieler seinen Einsatz. In dem Beispiel beträgt sein Kapital nach einer Spielrunde dann $1 - a_i^{(1)}$. Falls die Quoten sich im Laufe der Zeit nicht verändern, wird der Index (t) weggelassen. Wenn die Quote $\alpha_i^{(t)}$ vorliegt, sprechen wir gelegentlich auch von Quoten von $\alpha_i^{(t)} : 1$. Später werden wir sehen, wie man nur anhand der Quoten bestimmen kann, ob das betrachtete Spiel eher vorteilhaft für den Spieler oder für den Buchmacher ist.

Der Investor wählt immer bestimmte Geldbeträge, die er auf die verschiedenen Ereignisse setzt. Für die mathematische Beschreibung ist es jedoch einfacher, nicht die absoluten Beträge zu betrachten, sondern diese zu normieren und mit relativen Anteilen zu arbeiten. Dies ändert am betrachteten Problem und dessen Lösung nichts. Wir gehen also grundsätzlich von Investoren mit Startkapital $C_0 = 1$ aus. Um in jeder Spielrunde seine Einsätze zu bestimmen, benötigt der Investor eine Strategie.

Definition 1.33 (Strategie)

Eine Strategie a ist eine Funktion $a : \Sigma \times \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$, $(s, r) \mapsto a(s|r)$, mit $r = r_1 \dots r_{t-1}$ und $a(s|r) \geq 0$, sowie $\sum_{s \in \Sigma} a(s|r) \leq 1$.

Durch die Strategie erhält der Spieler für jeden Zeitpunkt eine Handlungsanleitung, welchen Anteil er auf die verschiedenen Zeichen der Quelle setzen soll. Dies geschieht im Allgemeinen abhängig von den bereits ausgegebenen Zeichen der Quelle, welche in der Definition durch das Wort r bezeichnet werden. Auf diese Weise können nicht nur unabhängige Zeichenfolgen untersucht werden, sondern auch solche, die durch bedingte Wahrscheinlichkeiten (vgl. Definition 1.12) beschrieben werden, z.B. Markovquellen (s. Definition 1.28). Alle eingesetzten Anteile sind nichtnegativ, was bedeutet, dass z.B. Leerverkäufe nicht erlaubt sind. Der Spieler darf jedoch einen Teil seines verfügbaren Kapitals als Bargeld zurückbehalten, da die Summe aller eingesetzten Anteile auch kleiner als 1 sein kann.

Falls die Summe $\sum_{s \in \Sigma} a(s|r) = 1$ ist, bedeutet dies, dass der Investor sein gesamtes Geld anlegt.

In dieser Arbeit soll folgendes Grundmodell betrachtet werden:

Ein Spieler möchte unendlich lange auf die Ausgaben $s \in \Sigma$ einer diskreten stochastischen Quelle (X_t) setzen, für die er die Quoten $\alpha_s^{(t)}$ kennt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle zum Zeitpunkt t das Zeichen $i \in \Sigma$ ausgibt, wenn bereits das Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ erschienen ist, beträgt $P[X_t = i | X_1 = r_1, \dots, X_{t-1} = r_{t-1}]$. Der Spieler beginnt mit dem Startkapital $C_0 = 1$, entnimmt kein Geld und fügt auch keines hinzu. Daher entwickelt sich das Kapital multiplikativ. Der Spieler möchte die exponentielle Wachstumsrate seines Kapitals maximieren (vgl. Abschnitt 1.2). Dies erreicht er, indem er aus der Menge aller Strategien eine optimale Strategie (s. Definition 2.4) bestimmt, gemäß der er sich verhält. Es soll also erläutert werden, wie in dieser Situation optimale Strategien bestimmt werden können.

Im nächsten Abschnitt wird beschrieben, welche Autoren sich bereits mit diesem Problem auseinandergesetzt haben und welche Ergebnisse sie erzielt haben.

1.2. Historische Entwicklung der Kellystrategie

Im Jahr 1956 schrieb John L. Kelly [Kel56] seinen grundlegenden Artikel “*A new interpretation of information rate*”, in welchem er die erwartete exponentielle Wachstumsrate des Kapitals eines Investors betrachtet, der auf den Ausgang einer Zufallsvariable wettet (z. B. bei einem Pferderennen). Ein zentraler Begriff ist daher im Folgenden der Erwartungswert einer Zufallsvariablen. Da in dieser Arbeit fast ausschließlich diskrete Zufallsvariablen X betrachtet werden (vgl. Definition 1.7), benutzen wir die Beschreibung gemäß [BN95, S. 207]:

Definition 1.34 (Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable)

Für eine diskrete, reellwertige Zufallsvariable X über (Ω, \mathcal{F}, P) wird der Erwartungswert definiert gemäß

$$E[X] = \sum_{x \in T_r} x P[X = x], \quad \text{falls } \sum_{x \in T_r} |x| P[X = x] < \infty,$$

wobei $T_r \subset \mathbb{R}$ den Träger (vgl. Definition 1.17) von P bezeichnet.

John L. Kelly geht davon aus, dass der Spieler bzw. Investor einen privaten Übertragungskanal besitzt, über den er Insiderinformationen erhält. So bekommt der Spieler einen Vorteil gegenüber den anderen Wetttern, welcher nur dadurch verringert wird, dass er mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p vom Übertragungskanal ein falsches Zeichen empfängt. Um die von John L. Kelly untersuchte Situation zu beschreiben, benötigen wir die folgende Notation:

- S das Alphabet (s. Definition 1.1), auf welches der Spieler wetten kann (alle möglichen Elementarereignisse)
- R das Alphabet, welches vom Übertragungskanal ausgegeben wird
- a $a = a(s|r)$ ist der Anteil des Kapitals, den der Spieler auf $s \in S$ setzt, nach-

Kapitel 1. Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie

- dem $r \in R$ empfangen wurde
- $p(s|r)$ Wahrscheinlichkeit, dass Zeichen $s \in S$ auftritt, nachdem Zeichen $r \in R$ übertragen wurde
- $p(s, r)$ gemeinsame Wahrscheinlichkeit, dass $s \in S$ auftritt und $r \in R$ übertragen wurde
- $p(s)$ Wahrscheinlichkeit, dass $s \in S$ auftritt
- $p(r)$ Wahrscheinlichkeit, dass $r \in R$ übertragen wird
- α_s Quote, die für das Auftreten von $s \in S$ bezahlt wird (vgl. Definition 1.32)
- C_0 Startkapital, es wird angenommen, dass $C_0 = 1$
- C_t Kapital zur Zeit $t = 1, 2, \dots$

In seinem Grundmodell nimmt John L. Kelly an, dass sich die Summe der Kehrwerte der Quoten zu eins addiert: $\sum_{s \in S} 1/\alpha_s = 1$, es ist jedoch möglich, dass $p(s) \neq 1/\alpha_s$. Außerdem investiert der Spieler sein gesamtes verfügbares Kapital, so dass $\sum_{s \in S} a(s|r) = 1$ für jedes r . Dann entwickelt sich das Kapital des Spielers auf folgende Weise:

$$C_t = \prod_{r \in R, s \in S} (\alpha_s a(s|r))^{|rs|} C_0, \quad t = 1, 2, \dots$$

Hierbei bezeichnet $|rs|$ die Anzahl der Ereignisse, bei denen Zeichen $s \in S$ auftrat und $r \in R$ übertragen wurde. Man beachte, dass diese Anzahl eine Zufallsvariable (s. Definition 1.7) ist. Anwenden der Logarithmusfunktion auf beiden Seiten unter Beachtung, dass $C_0 = 1$, führt auf

$$\log(C_t) = \sum_{r \in R, s \in S} |rs| \log(\alpha_s a(s|r))$$

mit dem zugehörigen Grenzwert

$$G(a(s|r)) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r \in R, s \in S} \frac{|rs|}{t} \log(\alpha_s a(s|r)),$$

wobei die Funktion $G(a(s|r))$ die exponentielle Wachstumsrate genannt wird. Die Anteile $\frac{|rs|}{t}$ sind die relativen Häufigkeiten dieser Ereignisse, welche durch die Folge $h_t(|rs|) = \frac{|rs|}{t}$ für $t = 1, 2, \dots$ beschrieben werden können. Wenn man diese Folge für wachsende t betrachtet, gewinnt man den Eindruck, dass sie gegen einen Grenzwert konvergiert, der die gesammelte Information über das Eintreten bzw. Nichteintreten des Ereignisses $|rs|$ beinhaltet. Diese Grenzwertvermutung heißt *empirisches Gesetz der großen Zahlen* [BN95, S. 17 f.]. Für ein beliebiges Ereignis A ist man demnach überzeugt, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_t(A) =: P(A)$$

für alle „vorkommenden“ Folgen von Versuchsergebnissen existiert und einen Wert $P(A)$ liefert, den man als Wahrscheinlichkeit von A interpretiert. Aufgrund des empirischen Gesetzes der großen Zahlen argumentiert John L. Kelly, dass die relativen Häufigkeiten $\frac{|rs|}{t}$ für $t \rightarrow \infty$ gegen ihre Wahrscheinlichkeiten $p(s, r)$ konvergieren, so dass

$$G(a) = \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s a(s|r))$$

gilt. Der Spieler möchte seine exponentielle Wachstumsrate maximieren und muss daher das folgende Optimierungsproblem lösen:

$$\max_a G(a) = \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s a(s|r)). \quad (1.13)$$

Die exponentielle Wachstumsrate $G(a)$ lässt sich folgendermaßen umformen.

$$\begin{aligned} G(a) &= \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s) + \sum_{r \in R, s \in S} p(s|r)p(r) \log(a(s|r)) \\ &= \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s) + \underbrace{\sum_{r \in R} p(r)}_{=1} \left[\sum_{s \in S} p(s|r) \log(a(s|r)) \right] \end{aligned}$$

Zunächst stellen wir fest, dass die exponentielle Wachstumsrate maximal wird, wenn der zweite Summand maximal ist, da der erste Summand nicht von $a(s|r)$ abhängt. Der zweite Summand ist von der Form $\sum_i X_i \log Y_i$ unter der Nebenbedingung, dass $\sum_i Y_i = Y$ gilt. Ein solcher Ausdruck wird maximal, wenn

$$Y_i = \frac{Y}{X} X_i \quad \text{für jedes } i$$

gesetzt wird (vgl. [Kel56, S. 919 f.] und Satz 2.3, wo auch der Beweis zu finden ist), wobei $\sum_i X_i = X$ ist. In unserem Fall gilt $\sum_{s \in S} a(s|r) = 1$ und $\sum_{s \in S} p(s|r) = 1$, so dass die exponentielle Wachstumsrate $G(a)$ maximal wird, wenn wir $a^*(s|r) = p(s|r)$ setzen und es ergibt sich die zugehörige maximale Wachstumsrate als

$$\begin{aligned} G(a^*) &= \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s p(s|r)) \\ &= \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log(\alpha_s) + \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log p(s|r) \\ &= \sum_{s \in S} p(s) \log(\alpha_s) - H(X|Y), \quad \text{da } \sum_{r \in R} p(s, r) = p(s) \quad (\text{vgl. (1.5)}) \\ &= H(\alpha) - H(X|Y). \end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \sum_{s \in S} p(s) \log(\alpha_s) \quad \text{und} \\ H(X|Y) &:= - \sum_{r \in R, s \in S} p(s, r) \log \left(\frac{p(s, r)}{p(r)} \right) \end{aligned}$$

ist die bedingte Entropie bzw. Äquivokation, wie sie von Claude E. Shannon [Sha48, S. 395] definiert wird (siehe Definition 1.35), wobei X und Y als diejenigen Zufallsvariablen betrachtet werden, die Werte in $s \in S$ bzw. $r \in R$ annehmen.

Definition 1.35 (Bedingte Entropie)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (s. Definition 1.3). Dann definieren wir die bedingte Entropie von Y , $H(Y|X)$, als die

durchschnittliche Entropie von Y für jeden Wert von X gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, dass dieser Wert von X auftritt. Also ist

$$H(Y|X) := - \sum_{i,j \in \Omega} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \log \mathbb{P}(Y = j|X = i).$$

Wenn für die Quoten $\alpha_s = 1/p(s)$ für jedes $s \in S$ gilt, spricht John L. Kelly von „fairen“ Quoten. Dann gilt

$$H(\alpha) = - \sum_{s \in S} p(s) \log(p(s)) =: H(X),$$

wobei $H(X)$ die Entropie der Zufallsvariable X bezeichnet, welche in [Sha48, S. 393 f.] bzw. [Gra90, S. 22] folgendermaßen definiert wird.

Definition 1.36 (Entropie)

Die Entropie einer diskreten Zufallsvariable X (vgl. Definition 1.7), die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert ist, wird für $F \in \mathcal{F}$ bestimmt durch

$$H(X) := - \sum_{i \in F} \mathbb{P}(X = i) \log \mathbb{P}(X = i).$$

Wenn faire Quoten vorliegen, gilt

$$\begin{aligned} G(a^*) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= I(X; Y) \end{aligned}$$

und die maximale Wachstumsrate ist gleich der gegenseitigen Information oder Transinformation $I(X; Y)$, wie sie von Claude E. Shannon [Sha48, S. 407 ff.] definiert wird (vgl. auch [CT06, S. 19 f.]).

Definition 1.37 (Transinformation)

Gegeben seien zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y (s. Definition 1.7) mit Werten in \mathcal{X} und \mathcal{Y} sowie einer gemeinsamen Verteilung $\mathbb{P}^{(X,Y)}$ (vgl. Definition 1.30) und Randverteilungen \mathbb{P}^X und \mathbb{P}^Y . Die Transinformation $I(X; Y)$ ist die relative Entropie zwischen der gemeinsamen Verteilung und dem Produktmaß $\mathbb{P}^X \mathbb{P}^Y$:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &:= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathbb{P}^{(X,Y)} \log \frac{\mathbb{P}^{(X,Y)}}{\mathbb{P}^X \mathbb{P}^Y} \\ &= H(X) - H(X|Y). \end{aligned}$$

Zum Verständnis dieser Definition wollen wir die darin enthaltenen Begriffe nacheinander erläutern. Zunächst geben wir eine Definition der relativen Entropie, welche auch unter dem Namen Divergenz bekannt ist, gemäß [Gra90, S. 27].

Definition 1.38 (Divergenz, relative Entropie)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Stichprobenraum Ω und \mathbb{Q} sei ein weiteres Maß auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (vgl. Definition 1.3). Dann wird die Divergenz von \mathbb{P} bezüglich \mathbb{Q} als die relative Entropie der Identität bezüglich dieser zwei Maße definiert:

$$D(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) := \sum_{i \in \Omega} \mathbb{P}(i) \log \frac{\mathbb{P}(i)}{\mathbb{Q}(i)}.$$

Die Idee, die Divergenz für statistische Anwendungen der Informationstheorie zu benutzen, stammt von Solomon Kullback (vgl. z.B. [Kul68, S. 6 f., 22-26]).

Als nächstes wird erklärt, was wir unter einer Randverteilung verstehen (vgl. [BN95, S. 121]).

Bemerkung 1.39 (Randverteilung von Tupeln)

Ist das Tupel $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine diskrete Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (vgl. Definition 1.7) mit Werten in $(\mathbb{X}_{i=1}^n \mathcal{X}_i, \mathcal{P}(\mathbb{X}_{i=1}^n \mathcal{X}_i))$, so stimmt für $i = 1, \dots, n$ wegen

$$\{X_i = x_i\} = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{X}_{j=1}^{i-1} \mathcal{X}_j \times \{x_i\} \times \mathbb{X}_{j=i+1}^n \mathcal{X}_j\}$$

gerade die i -te Randverteilung von $\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$ mit der von X_i und \mathbb{P} über $(\mathcal{X}_i, \mathcal{P}(\mathcal{X}_i))$ induzierten Verteilung \mathbb{P}^{X_i} überein.

Als letztes wollen wir uns mit dem Begriff Produktmaß auseinandersetzen. Anschaulich ist dieses gerade das Wahrscheinlichkeitsmaß, was entsteht, wenn man mehrere Zufallsexperimente hintereinander ausführt, die jeweils unabhängig voneinander sind. Wir betrachten z.B. eine stochastische Quelle (vgl. Definition 1.5) mit zwei Zeichen a und b , für die

$$\mathbb{P}[X_t = a] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[X_t = b] = \frac{3}{4}, \quad t = 1, 2, \dots$$

gilt, wobei die angegebenen Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind. Dann können wir die Wahrscheinlichkeitszähldichte für zwei Ausgabezeichen der Quelle gemäß

$$f(aa) = \frac{1}{16}, \quad f(bb) = \frac{9}{16}, \quad f(ab) = f(ba) = \frac{3}{16}$$

angeben. Die Hintereinanderausführung von Zufallsexperimenten wird *Koppelung* genannt und der Name Produktmaß stammt daher, dass bei der Koppelung unabhängiger Zufallsexperimente die vorliegenden Wahrscheinlichkeiten jeweils miteinander multipliziert werden. Eine formale Definition dieser Begriffe findet sich in [BN95, S. 97 f., 115 f.].

Satz 1.40 (Koppelung diskreter Zufallsexperimente)

Bei fester Stufenzahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ seien die Stichprobenräume $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ gegeben. Weiter sei $f_1^0(\cdot)$ eine Wahrscheinlichkeitszähldichte auf Ω_1 mit zugehörigem diskreten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_1^0(\cdot)$ (s. Definition 1.17) (Modell für die erste Stufe).

Für $i = 2, \dots, n$ und alle gegebenen $(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1}$ sei $f_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \cdot)$ eine Wahrscheinlichkeitszähldichte auf Ω_i mit zugehörigem diskreten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \cdot)$ (Modell für die i -te Stufe, falls $\omega_1, \dots, \omega_{i-1}$ die Ergebnisse der vorhergehenden Stufen sind).

Benutzen wir dann

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n = \mathbb{X}_{i=1}^n \Omega_i$$

als (Gesamt-) Stichprobenraum (s. Definition 1.3) und definieren $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ für alle $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ gemäß

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) := f_1^0(\omega_1) f_2^1(\omega_1, \omega_2) \cdots f_n^{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

so ist f eine Wahrscheinlichkeitszähldichte auf Ω .

Das zugehörige diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß P über Ω nennen wir Koppelung von $P_1^0, P_2^1, \dots, P_n^{n-1}$. Wir bezeichnen es mit

$$P_1^0 \otimes P_2^1 \otimes \dots \otimes P_n^{n-1} \quad \text{bzw. mit} \quad \bigotimes_{i=1}^n P_i^{i-1}.$$

Definition 1.41 (Unabhängige Koppelung)

Gegeben sei die n -stufige Situation aus Satz 1.40. Sind dann für $i = 2, \dots, n$ die Wahrscheinlichkeitszähldichten $f_i(\cdot) := f_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \cdot)$ bzw. die zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße $P_i(\cdot) := P_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \cdot)$ unabhängig von $(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1}$, so nennen wir (mit $f_1 := f_1^0$ bzw. $P_1 := P_1^0$) das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_n := P_1^0 \otimes P_2^1 \otimes \dots \otimes P_n^{n-1}$$

über $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ die unabhängige Koppelung der diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße P_i über Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Analog zum allgemeinen Fall benutzen wir für die unabhängige Koppelung auch die Bezeichnung $\bigotimes_{i=1}^n P_i$.

Korollar 1.42 (Unabhängige Koppelung und Produktmaß)

Für Produktereignisse $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ mit $A_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, gilt im Fall der unabhängigen Koppelung die Gleichheit

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n P_i \right) (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) P_2(A_2) \dots P_n(A_n).$$

Wegen dieser Faktorisierungseigenschaft heißt die unabhängige Koppelung $\bigotimes_{i=1}^n P_i$ auch Produktmaß zu den Wahrscheinlichkeitsmaßen P_1, \dots, P_n .

In einer Verallgemeinerung des bisher untersuchten Modells betrachtet John L. Kelly den Fall, dass die Wettfirma einen Prozentsatz der Wetteinsätze als Gewinn einbehält. In dieser Situation gilt $\sum_{s \in S} 1/\alpha_s > 1$ und es muss dem Spieler erlaubt werden, einen Teil seines Geldes zurückzubehalten, da sich andernfalls sein Kapital mit der Zeit immer weiter verringern würde. Dieser Anteil wird mit b bezeichnet. Dann gilt $\sum_{s \in S} a(s|r) + b = 1$. Die Wachstumsrate des Kapitals des Spielers wird maximiert, indem er das folgende Problem löst:

$$\max_a G(a) = \sum_{s \in S} p(s) \log(b + \alpha_s a(s)).$$

Die optimalen Investitionsanteile $a^*(s)$ können durch das folgende Vorgehen ermittelt werden:

1. Permutiere die Indizes so, dass $p(s)\alpha_s \geq p(s+1)\alpha_{s+1}$.
2. Setze b gleich dem kleinsten positiven Wert von

$$\frac{1 - p_t}{1 - \sigma_t}, \quad \text{mit } p_t = \sum_{s=1}^t p(s), \quad \sigma_t = \sum_{s=1}^t \frac{1}{\alpha_s}.$$

3. Setze $a^*(s) = \max\{0, p(s) - \frac{b}{\alpha_s}\}$, dann gilt $\sum_{s \in S} a(s) = 1 - b$.

Die zugehörige optimale Wachstumsrate kann als

$$G(a^*) = \sum_{s=1}^t p(s) \log(p(s)\alpha_s) + (1 - p_t) \log\left(\frac{1 - p_t}{1 - \sigma_t}\right)$$

berechnet werden, wobei t den kleinsten Index bezeichnet, bei dem $\frac{1-p_t}{1-\sigma_t}$ seinen kleinsten positiven Wert erreicht.

John L. Kelly betrachtet immer die Situation, dass ein Spieler auf die zufälligen Zeichen $s \in S$ setzen möchte, die mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten $p(s)$ auftreten. Zusätzlich erhält der Spieler Zeichen $r \in R$ aus einem gestörten Kanal, in den die Zeichen $s \in S$ eingegeben wurden. Es sei n der Zeichenvorrat der Menge S und m die Anzahl der Zeichen in der Menge R . Dann können wir diese Situation in unserem Grundmodell z.B. durch ein Hidden Markov Modell beschreiben, in dem es nm versteckte Zustände gibt. Aus Satz 1.31 wissen wir dann, dass die Evolutionsdimension der zugrundeliegenden Quelle $e \dim(X_t) \leq nm$ und somit endlich ist. Daher kann der Spieler Aussagen über das langfristige Verhalten der Quelle treffen. Da sich die Wahrscheinlichkeiten $p(s|r)$ im Laufe der Zeit nicht ändern, sind dies auch bereits die langfristig geltenden Wahrscheinlichkeiten.

Die Betrachtungen von John L. Kelly sind auf unabhängig voneinander erzeugte Zeichen beschränkt, die in einem gestörten Kanal übertragen werden. Daher sind die optimalen Investitionsanteile zeitunabhängig. Aus diesem Grund haben andere Autoren die vorhandene Theorie erweitert. Einige der bestehenden Ergebnisse sollen in den folgenden Absätzen beschrieben werden.

Bereits vor 1956 wurde in einigen Artikeln vorgeschlagen, den Erwartungswert des geometrischen Mittels von Zufallsvariablen (s. Definition 1.7) zu betrachten. Insbesondere sollen hier zwei Artikel erwähnt werden.

Der älteste bekannte Artikel zu diesem Thema wurde schon 1738 von Daniel Bernoulli verfasst [Ber54]. Hierin stellt Daniel Bernoulli eine Methode vor, den Wert von risikobehafteten Spielen über deren Nutzen zu bestimmen. Dies geschieht mithilfe der folgenden Regel:

Der Nutzen jeder möglichen Gewinnerwartung wird zunächst multipliziert mit der Anzahl der Fälle, in denen diese realisiert wird. Danach wird die Summe dieser Produkte durch die Anzahl aller möglichen Fälle dividiert, wodurch man einen mittleren Nutzen erhält. Der Gewinn, der zu diesem Nutzen gehört, ist gleich dem Wert des betrachteten risikobehafteten Spiels.

Wir wollen diesen Ansatz veranschaulichen: Seien $(x_i, u(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, Elemente aus dem Graph einer Nutzenfunktion u , wobei x_i das Kapital und $u(x_i)$ den zugehörigen Nutzen beschreibt. Zunächst möchten wir untersuchen, welche Form die Nutzenfunktion besitzt. Hierzu wählen wir ein weiteres Tupel $(\gamma, u(\gamma))$, welches den Anfangszustand beschreibt. Es wird also jemand betrachtet, der das Kapital γ besitzt und daraus den Nutzen $u(\gamma)$ erhält. Hiervon ausgehend gibt es die Punkte $(x_i, u(x_i))$ und $(x_i + dx, u(x_i + dx))$, wobei $x_i > 0$ sowie $u(x_i) > 0$ gilt, dx eine infinitesimale Vergrößerung des Kapitals beschreibt und $u(x_i + dx) - u(x_i)$ der Zuwachs des Nutzens bei der Vergrößerung des Kapitals von x_i nach $x_i + dx$ ist. Daniel Bernoulli stellt dann folgende Forderungen:

Kapitel 1. Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie

1. Der Nutzenzuwachs $u(x_i + dx) - u(x_i)$ soll ceteris paribus proportional zur Vergrößerung des Kapitals dx sein: $(u(x_i + dx) - u(x_i)) \sim dx$. Dies bedeutet, dass auch für kleine Zuwächse mehr Kapital zu mehr Nutzen führt und ist gleichbedeutend damit, dass für jedes x_i der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} u(x_i + h)/h > 0$ existiert. Dies besagt, dass eine positive Ableitung $u'(x_i) > 0$ für alle x_i existiert.
2. Der Nutzenzuwachs soll umgekehrt proportional zum bisher vorhandenen Kapital x_i sein: $(u(x_i + dx) - u(x_i)) \sim 1/x_i$. Dies bedeutet, dass der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} u(x_i + h)/h = c/x_i$ sein soll und besagt, dass für die Ableitung der Nutzenfunktion $u'(x_i) = c/x_i$ gilt. Hierbei bezeichnet c eine Konstante.

Aus diesen beiden Forderungen ergibt sich, dass wir eine Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ finden müssen, für die $u(\gamma) = y_0$ und $u'(x) = c/x$ für jedes x gilt. Wir erhalten die Funktion $u(x_i)$, indem wir das folgende Integral bilden:

$$\begin{aligned} u(x_i) &= \int_{\gamma}^{x_i} u'(x) dx = \int_{\gamma}^{x_i} \frac{c}{x} dx \\ &= c \int_{\gamma}^{x_i} \frac{1}{x} dx = c \ln(x_i) - c \ln(\gamma) = c \ln \frac{x_i}{\gamma}. \end{aligned}$$

Daher schließt Daniel Bernoulli, dass der betrachtete Nutzen durch eine logarithmische Funktion erklärt wird, so dass gilt

$$u(x_i) = c \ln \frac{x_i}{\gamma},$$

wobei γ das anfangs vorhandene Kapital bezeichnet. Nachdem wir die Nutzenfunktion kennen, wollen wir uns wieder den risikobehafteten Spielen zuwenden. Sei hierzu m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, die Anzahl der Fälle, in denen der Nutzen $y_i = u(x_i)$ erreicht wird. Dann kann der durchschnittliche Nutzen \tilde{y} durch

$$\tilde{y} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j y_j}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

bestimmt werden. Für den durchschnittlichen Nutzen gilt außerdem aufgrund der logarithmischen Nutzenfunktion $\tilde{y} = c \ln \tilde{x}/\gamma$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} c \ln \frac{\tilde{x}}{\gamma} &= \frac{c \sum_{j=1}^n m_j \ln x_j / \gamma}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \Rightarrow \tilde{x}^{(\sum_{i=1}^n m_i)} &= \prod_{j=1}^n x_j^{m_j}, \end{aligned}$$

wodurch sich \tilde{x} ergibt. Die Größe $\tilde{x} - \gamma$ bezeichnet dann den Wert des risikobehafteten Spiels, welcher gleich dem erwarteten Kapitalzuwachs durch das Spiel ist.

Dieser Ansatz wird von Daniel Bernoulli zunächst dazu benutzt, die Vorteilhaftigkeit von Versicherungen zu analysieren und anschließend verwendet, um das Sankt-Petersburg-Paradoxon zu lösen, bei dem es um die Diskrepanz zwischen dem unendlichen mathematischen Erwartungswert und dem wahrgenommenen Wert eines Spiels geht.

Die logarithmische Beziehung zwischen Kapital und Nutzen einer Person kann man als Vorläufer von „Fechners Gesetz“ auffassen. Gustav Th. Fechner publizierte gut 100 Jahre später in [Fec60] seine Überlegungen, wie man die Stärke von Reizen und die dadurch ausgelösten Empfindungen mathematisch verbinden könnte. Er bezeichnet den Reiz mit β und dessen infinitesimalen Zuwachs mit $d\beta$, sowie die Empfindung und deren Zuwachs mit γ und $d\gamma$ und erhält so die Beziehung

$$d\gamma = \frac{Kd\beta}{\beta},$$

welche er Fundamentalformel [Fec60, S. 10] nennt. Hierbei bezeichnet K eine Konstante. Durch Umformung der Fundamentalformel wird dann die sogenannte Maßformel abgeleitet [Fec60, S. 12]

$$\gamma = k(\log \beta - \log b) = k \log \frac{\beta}{b},$$

wobei k und b Konstanten sind und b den Schwellenwert bezeichnet, welcher die Nullstelle der Funktion beschreibt. Gustav Th. Fechner kommt so zu dem Schluss, dass Empfindungen und Intensitäten auf einer logarithmischen Skala wahrgenommen werden.

Der zweite Artikel, der an dieser Stelle kurz erwähnt werden soll, heißt “Speculation and the Carryover” von John B. Williams [Wil36] aus dem Jahre 1936. In diesem befasst sich der Autor mit der Preisbildung auf Märkten, in denen es für Investoren möglich ist, einen gewissen Anteil des Angebots aufzukaufen, zu lagern und in späteren Jahren wieder zu verkaufen. Am Ende dieses Artikels werden die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen analysiert und John B. Williams kommt zu dem Schluss, dass Investoren auf den Durchschnittswert des Preises des betrachteten Gutes setzen sollten, da auf diese Weise langfristig zufällige Abweichungen ausgeglichen werden. Investoren, die sowohl ihr Kapital als auch ihre Gewinne (bzw. Verluste) einsetzen, sollten das geometrische anstelle des arithmetischen Mittels wählen. Das Kapital C_t im Jahr t eines Investors, der jeweils zum Preis P einkauft, zu den verschiedenen zufälligen Preisen P_t im Jahr t verkauft und ein Startkapital C_0 besitzt, wird beschrieben durch

$$C_t = C_0 \frac{P_1}{P} \frac{P_2}{P} \cdots \frac{P_t}{P}.$$

Die zukünftigen zufälligen Preise des Gutes hängen von der jeweiligen Ernte bzw. dem Wetter des jeweiligen Jahres ab. Der Investor möchte das mit dem Wetter verbundene Risiko möglichst eliminieren und sollte daher eine Strategie einsetzen, bei der bezüglich der zukünftigen Preise P_t das Startkapital gleich dem Endkapital ist. Dann gilt

$$C_0 = C_t = C_0 \frac{P_1}{P} \frac{P_2}{P} \cdots \frac{P_t}{P}$$

und daher

$$P = \sqrt[t]{P_1 P_2 P_3 \cdots P_t},$$

so dass der Investor den geometrischen Mittelwert der zukünftigen Preise als Einkaufspreis wählen sollte, wenn er alle Transaktionen direkt hintereinander ausführt und hierbei

weder neues Kapital von außen in den Prozess einbringt, noch Gewinne oder Verluste aus dem Prozess herausnimmt. Hierbei sollte beachtet werden, dass das geometrische Mittel jener Wert ist, bei dem der durchschnittliche Prozentsatz des Fehlers null wird.

Drei Jahre nach dem Artikel von John L. Kelly erschien „Criteria for choice among risky ventures“ von Henry A. Latané [Lat59]. In dem Artikel werden Handlungsvorschläge für risikobehaftete Situationen erarbeitet. Hierzu wird angenommen, dass jeder Mensch Ziele und Unterziele verfolgt. Strategien werden zunächst nach den Zielen ausgewählt und sofern keine dominante Strategie vorliegt nach den Unterzielen. In dem Artikel wird das folgende Unterziel analysiert: Maximiere die Wahrscheinlichkeit P' , dass die verwendete Strategie zu mindestens so viel Wohlstand führt wie irgendeine signifikant verschiedene Strategie nach einer langen Reihe von Entscheidungen. Hierzu wird angenommen, dass sich die betrachtete Person einer Auszahlungsmatrix gegenüber sieht, welche die Einträge a_{ij} , $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k$, sowie eine zusätzliche Zeile mit Einträgen p_j , $j = 1, \dots, k$, besitzt. Hierbei bezeichnet t die Anzahl der Portfolios, aus denen gewählt werden kann, und k die Anzahl aller relevanten zukünftigen Ereignisse, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_j auftreten. Der Wert a_{ij} beschreibt die Auszahlung, falls Portfolio i gewählt wird und Ereignis j eintritt. Henry Latané betrachtet dann den Wert eines beliebigen Portfolios i , welches ursprünglich den Wert 1 besitzt und in jedem folgenden Jahr mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_k die Auszahlungen a_{i1}, \dots, a_{ik} erreicht und dessen Erträge n Perioden lang immer wieder angelegt werden. Der Wert dieser Investition nach n Perioden, W_i^n , „konvergiert in Wahrscheinlichkeit“ gegen $G_i^n = a_{i1}^{p_1 n} a_{i2}^{p_2 n} \dots a_{ik}^{p_k n}$. Dies bedeutet, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|W_i^n - G_i^n| < \epsilon] = 1,$$

für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$. Diese Beziehung ergibt sich aus dem empirischen Gesetz der großen Zahlen, gemäß dem die relativen Häufigkeiten gegen ihre Wahrscheinlichkeiten streben (vgl. S. 20). Sei hierzu n_j die Anzahl, mit der Ereignis j auftritt, und $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n} = p_j \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n} \log a_{ij} = p_j \log a_{ij}.$$

Außerdem gilt $\log W_i = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} \log a_{ij}$ und $\log G_i = \sum_{j=1}^k p_j \log a_{ij}$, so dass sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log W_i = \log G_i \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_i = G_i$$

ergibt. Daraus folgt: Wenn $G_i > G_j$ für $i \neq j$ ist, dann konvergiert die Wahrscheinlichkeit P' , dass $W_i^n > W_j^n$ nach n Perioden gilt, gegen 1 für $n \rightarrow \infty$. Daher ist das Unterziel, P' zu maximieren, äquivalent zur Maximierung der erwarteten logarithmischen Erträge. Der Autor stellt im Folgenden die Arbeit von Daniel Bernoulli [Ber54] vor und zeigt, wie das von ihm untersuchte Unterziel dazu genutzt werden kann, ein von Daniel Bernoulli vorgestelltes Problem zu lösen. Daniel Bernoullis Annahme einer logarithmischen Nutzenfunktion geht nach Meinung des Autors jedoch zu weit; man dürfe nicht einfach annehmen, dass sich der Nutzen umgekehrt proportional zum bisherigen Wohlstand verhält [Lat59, S. 152 f.]. Zuletzt werden noch weitere Ansätze zur Portfoliooptimierung vorgestellt. Zum Beispiel bestimmt Harry M. Markowitz [Mar59] die Menge effizienter Portfolios, liefert jedoch kein Kriterium zur Auswahl eines optimalen effizienten Portfolios. Henry A. Latané

kommt zu dem Schluss, dass die Maximierung der Wahrscheinlichkeit P' ein objektives, rationales Kriterium ist, das sich als nützlich für die Lösung diverser Probleme erweist.

Die nächsten Arbeiten, die weitere theoretische Eigenschaften der Kellystrategie beweisen, stammen von Leo Breiman [Bre60, Bre61]. Wir werden an dieser Stelle nur die wichtigsten Ergebnisse aus [Bre61] vorstellen, da dieser Artikel im Wesentlichen die Ergebnisse aus [Bre60] mit beinhaltet. Leo Breiman betrachtet fast ausschließlich vorteilhafte Spiele. Ein Spiel wird vorteilhaft genannt, falls es eine Strategie gibt, für die $\lim_{t \rightarrow \infty} C_t = \infty$ P -fast sicher gilt, wobei C_t das Kapital des Spielers nach t Spielrunden bezeichnet. Die Definition von P -fast sicher gültigen Aussagen wurde [BN95, S. 218] entnommen.

Definition 1.43 (P-fast sicher gültige Aussagen)

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Maßraum (s. Definition 1.3) und R bezeichne eine Aussageform, die für jedes $\omega \in \Omega$ erklärt ist und nur die Werte „wahr“ oder „falsch“ annehmen kann. Gibt es dann eine Menge $N \in \mathcal{F}$ mit $P(N) = 0$ (P -Nullmenge) und der Eigenschaft

$$\{R = \text{falsch}\} := \{\omega \in \Omega \mid R(\omega) = \text{falsch}\} \subset N,$$

so sagt man: R gilt P -fast sicher (kurz: R P -f.s.).

In jeder Spielrunde k gibt eine Zufallsvariable X_k (vgl. Definition 1.7) einen Wert aus der Menge $\Sigma = \{1, \dots, s\}$ aus, wobei $P(X_k = i) = p_i$. Es werden also unabhängige Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Zu Σ gibt es r Teilmengen A_j , $j = 1, \dots, r$, so dass $\cup_{j=1}^r A_j = \Sigma$ und zusätzlich gibt es r positive Quoten $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Der Spieler kann in jeder Runde auf die Teilmengen A_j setzen. Die gesetzten Anteile seines Kapitals in der n -ten Runde werden mit $\bar{\lambda}_n = (\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_r^{(n)})$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass in jeder Runde das gesamte Kapital eingesetzt wird. Wenn das Ereignis $\{X_n = i\}$ auftritt, erhält der Spieler eine Auszahlung von $\sum_{i \in A_j} \lambda_j^{(n)} \alpha_j$, wobei die Summe über alle j läuft, für die $i \in A_j$. Die bisher ausgegebenen Zeichen werden mit $R_n = (X_1, \dots, X_n)$ bezeichnet. Eine Strategie wird dann definiert als $\Lambda = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots)$. Obwohl Leo Breiman ebenfalls den Begriff „Strategie“ verwendet, unterscheidet sich dieser von Definition 1.33, da hier angenommen wird, dass in jeder Runde das gesamte Kapital eingesetzt werden muss. Während wir eine Strategie als Handlungsanweisung pro Zeichen auffassen, versteht Leo Breiman unter einer Strategie eine Handlungsanweisung für alle Zeichen und alle Zeitpunkte. Die Zufallsvariablen W_n werden gemäß

$$W_n := \log \left(\sum_{i \in A_j} \lambda_j^{(n)} \alpha_j \right), \quad X_n = i$$

definiert. Zusätzlich sei für die Menge F aller Vektoren $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ mit $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ und $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$

$$W := \max_{\bar{\lambda} \in F} W(\bar{\lambda}) \quad \text{mit}$$

$$W(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^s p_i \log \left(\sum_{i \in A_j} \lambda_j \alpha_j \right).$$

Dann sei die Strategie Λ^* definiert als $\Lambda^* := (\bar{\lambda}^*, \bar{\lambda}^*, \dots)$, wobei für $\bar{\lambda}^*$ gilt, dass $W = W(\bar{\lambda}^*)$. Die Strategie Λ^* ist folglich diejenige, die den Erwartungswert (vgl. Definition 1.34) der Logarithmen der Erträge maximiert. Hierfür beweist Leo Breiman zunächst, dass die Strategie Λ^* asymptotisch die Zeit minimiert, die ein Anleger benötigt, um einen festgelegten Geldbetrag zu erwirtschaften. Für eine beliebige Strategie Λ und eine beliebige Zahl $x > 1$ wird die Zufallsvariable $T(x)$ gemäß

$$T(x) = \{\text{das kleinste } t, \text{ für das } C_t \geq x \text{ gilt}\}$$

definiert. Analog bezeichnet $T^*(x)$ die entsprechende Zufallsvariable, wenn die Strategie Λ^* benutzt wird. Um den folgenden Satz zu zeigen [Bre61, S. 68], benötigen wir zunächst eine Definition (vgl. [Neu06, S. 25]), die wir an unsere Bedürfnisse angepasst haben.

Definition 1.44 (Gitter)

Es sei \mathbb{R} die Menge aller reellen Zahlen und $v \in \mathbb{R}_+$, $v \neq 0$, ein beliebiger Punkt hieraus. Ein Gitter in \mathbb{R} ist definiert durch

$$\Gamma := \{av \mid a \in \mathbb{N}\}.$$

Anschaulich liegt also eine Zufallsvariable auf einem Gitter, wenn sie nur Werte von ganzzahligen Vielfachen einer Zahl annimmt. Wenn eine Zufallszahl nicht auf einem Gitter liegt, bedeutet dies, dass auch Werte dazwischen vorkommen.

Satz 1.45

Wenn die Zufallsvariablen W_1^*, W_2^*, \dots nicht auf einem Gitter liegen, dann gilt für eine beliebige Strategie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\mathbb{E} T(x) - \mathbb{E} T^*(x)] = \frac{1}{W} \sum_{n=1}^{\infty} (W - \mathbb{E} W_n)$$

und es existiert eine Konstante c unabhängig von Λ und x , so dass

$$\mathbb{E} T^*(x) - \mathbb{E} T(x) \leq c.$$

Hierbei bezeichnen die W_i^* , $i = 1, 2, \dots$, die Größe W_i , wenn das Kapital gemäß $\bar{\lambda}^*$ verteilt wird.

Im nächsten Abschnitt des Artikels wird das Kapital C_t^* nach t Spielen genauer untersucht, das sich bei Anwendung der Strategie Λ^* ergibt. Es lässt sich zeigen, dass dieses asymptotisch genauso groß ist wie das Kapital C_t , das sich für ein beliebiges Λ einstellt, und falls Λ nicht asymptotisch nah bei Λ^* liegt, dann ist C_t^* unendlich größer als C_t . Dies wird in den folgenden Sätzen verdeutlicht [Bre61, S. 72 f.], die auch für nicht vorteilhafte Spiele gelten.

Satz 1.46

Sei Λ eine beliebige Strategie, die nach t Spielen zum Wohlstand C_t führt. Dann existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} C_t/C_t^*$ P-fast sicher (s. Definition 1.43) und $\mathbb{E}[\lim_{t \rightarrow \infty} C_t/C_t^*] \leq 1$.

Eine unendliche Strategie liegt vor, wenn es ausgeschlossen ist, dass der Spieler in einer Runde sein gesamtes Kapital verliert. Auch bei dieser Definition sei auf die Unterschiede zu Definition 1.33 hingewiesen.

Definition 1.47 (Unendliche Strategie)

Wenn $\bar{\lambda}_n$ keine Werte annimmt, so dass $\sum_{i \in A_j} \lambda_j^{(n)} \alpha_j = 0$ für beliebige n gilt, nennen wir Λ eine unendliche Strategie.

Satz 1.48

Wenn Λ eine unendliche Strategie ist, dann gilt P-fast sicher

$$\sum_{k=1}^{\infty} (W - E[W_k | R_{k-1}]) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t^*}{C_t} = \infty.$$

Im letzten Abschnitt werden Probleme betrachtet, die entstehen, wenn man einen endlichen Zeithorizont beim Münzwurf betrachtet. Hierzu wird angenommen, dass eine unfaire Münze geworfen wird, deren Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Kopf“ gleich $p > 1/2$ und für das Ereignis „Zahl“ gleich $q = 1 - p$ ist. Es wird zunächst für ein festes $t > 0$ und zwei Zahlen $y > x > 0$ eine Strategie gesucht, die $P[C_t \geq y | C_0 = x]$ maximiert. Dann wird der Lösungsweg für dieses Problem gezeigt und eine der vielen optimalen Strategien explizit dargestellt. Für die Strategie Λ^* gilt: In jeder Runde wird der Anteil $p - q$ auf das Ereignis „Kopf“ gewettet. Die Strategie Λ^* ist im endlichen Fall suboptimal in dem Sinne, dass sie eine gleichmäßig gute Näherung für die optimale Lösung liefert. Als letztes wird für ein festes ξ mit $0 < \xi < 1$ und für

$$T(\xi) = E[\text{das erste } t \text{ mit } C_t \geq 1 | C_0 = \xi]$$

eine Strategie gesucht, die $T(\xi)$ minimiert. Der Autor kann für dieses Problem jedoch keine Lösung, sondern lediglich eine Vermutung angeben.

In dem beschriebenen Artikel wird angenommen, dass die betrachtete Zufallsvariable Zeichen ausgibt, die mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten vorkommen. Wenn wir diese Ergebnisse im Kontext unseres Grundmodells betrachten wollen (s. S. 19), müssen wir also eine diskrete stochastische Quelle (X_t) zugrunde legen, deren Zeichen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ausgegeben werden: $P[X_t = i] = p_i$ für alle Zeitpunkte $t = 1, 2, \dots$ und alle Zeichen $i \in \Sigma$. Daher sind für diese Quelle alle Grundzustände gleich und die Quelle ist stationär (vgl. Definition 1.20). Sie besitzt somit die Evolutionsdimension $\dim(X_t) = 1$ (s. S. 11) und wir können die Konvergenzsätze aus Abschnitt 1.1 anwenden.

In [Hak71] vergleicht Nils H. Hakansson Portfolios, die sich aus der Mittelwert-Varianz-Analyse gemäß Harry M. Markowitz [Mar59] ergeben, mit solchen, die die erwarteten logarithmischen Erträge maximieren (vgl. [Kel56]). Hierzu betrachtet der Autor folgendes Portfolioproblem: Es sei x_j das Investitionskapital zum Entscheidungszeitpunkt j , M_j bezeichne die Anzahl der Investitionsmöglichkeiten in Periode j , der Zinssatz in Periode j sei $r_j - 1$, mit $r_j > 1$. Ferner bezeichne β_{ij} die zufälligen Erträge, die sich aus einer in Möglichkeit $i = 2, \dots, M_j$ investierten Geldeinheit in Periode j ergeben und v_{ij} sei der relative Anteil des Investitionskapitals, der in Möglichkeit $i = 2, \dots, M_j$ in Periode j investiert wird. Dann beschreibt $R_j(\bar{v}_j) = \sum_{i=2}^{M_j} (\beta_{ij} - r_j)v_{ij} + r_j$ die Erträge des gesamten Portfolios \bar{v}_j in Periode j plus 1. Das Portfolio \bar{v}_j , welches $E[\log(R_j(\bar{v}_j))]$ maximiert, heißt *wachstumsoptimales* Portfolio und wird mit \bar{v}_j^* bezeichnet. Andererseits werden alle Portfolios \bar{v}_j'' als *effizient* bezeichnet, für die kein Portfolio \bar{v}_j' existiert, so dass

$$E[R_j(\bar{v}_j'')] > E[R_j(\bar{v}_j')] \quad \text{und} \quad \text{Var}[R_j(\bar{v}_j'')] \leq \text{Var}[R_j(\bar{v}_j')]$$

oder

$$E[R_j(\bar{v}'_j)] \geq E[R_j(\bar{v}''_j)] \quad \text{und} \quad \text{Var}[R_j(\bar{v}'_j)] < \text{Var}[R_j(\bar{v}''_j)]$$

gelten. Es sei $H_j(y) := P(R_j(\bar{v}_j) \leq y)$ die Verteilungsfunktion von $R_j(\bar{v}_j)$. Diese dominiert eine andere Verteilungsfunktion $H'_j(y)$ stochastisch genau dann, wenn $H_j(y) \leq H'_j(y)$ für alle y und $H_j(y) < H'_j(y)$ für mindestens ein y . In verschiedenen Beispielen weist Nils H. Hakansson nach, dass das wachstumsoptimale Portfolio außerhalb der Menge der effizienten Portfolios liegen kann. Außerdem gibt es effiziente Portfolios, die von nicht effizienten Portfolios stochastisch dominiert werden. Als weiteres Kriterium wird betrachtet, ob ein bestimmtes Portfolio die Möglichkeit bietet, dass der Investor insolvent wird. Wenn gefordert wird, dass ein Investor in Periode j solvent ist, ist dies äquivalent dazu, dass $P(x_{j+1} \geq 0) = 1$ gilt. In dem hierzu betrachteten Beispiel ergibt sich, dass alle effizienten Portfolios entweder stochastisch dominiert werden oder mit positiver Wahrscheinlichkeit zu Insolvenz führen, während das wachstumsoptimale Portfolio undominiert ist und Solvenz sicherstellt. Unter gewissen Voraussetzungen wird dann gezeigt, dass ein ertragsmaximierendes Portfolio \bar{v}_j^* existiert, welches endlich und eindeutig für jedes j ist. Um festzustellen, ob das wachstumsoptimale Portfolio auch im kurz- bis mittelfristigen Bereich zufriedenstellende Ergebnisse liefert, vergleicht Nils H. Hakansson die Verteilungen desselben mit denen verschiedener effizienter Portfolios nach sechs Investitionsperioden. Hierbei ergibt sich, dass mit dem wachstumsoptimalen Portfolio sehr große Gewinne möglich sind bei geringer Wahrscheinlichkeit, große Verluste zu erleiden. Diejenigen effizienten Portfolios, die ebenso hohe Gewinne ermöglichen, besitzen demgegenüber eine positive Wahrscheinlichkeit, das gesamte Kapital zu verlieren. Der Autor geht danach noch auf verschiedene allgemeine Eigenschaften von wachstumsoptimalen bzw. effizienten Portfolios ein und weist darauf hin, dass die Frage, ob reale Portfolios auf der Effizienzkurve liegen, von verschiedenen Autoren unterschiedlich beantwortet wird.

Edward O. Thorp hat sich der Kellystrategie insbesondere vom spieltheoretischen Aspekt her genähert. In seinem Buch "Beat the Dealer" [Tho66] beschreibt er eine Gewinnstrategie für das Spiel Blackjack. Ein Jahr später erschien das Buch "Beat the Market" [TK67], in dem erläutert wird, wie Investoren mit Optionsscheinen Gewinne machen können, die durch Deckungsgeschäfte abgesichert sind.

In dem Artikel [Tho69] stellt Edward O. Thorp im ersten Teil diverse vorteilhafte Spiele vor. Für vorteilhafte Spiele gilt $P(\lim_{t \rightarrow \infty} C_t = \infty) > 0$, wobei C_t das Kapital des Spielers nach t Spielrunden beschreibt. Edward O. Thorp beschreibt Blackjack, Baccarat, Roulette, Glücksrad und Investitionen an der Börse. Im zweiten Teil stellt er zunächst Strategien für unabhängige Bernoulliversuche vor, die zum maximalen erwarteten Ertrag (vgl. Definition 1.34) führen bzw. die Ruinwahrscheinlichkeit minimieren. Um die unerwünschten Effekte dieser Strategien (P-fast sicherer Ruin (vgl. Definition 1.43) bzw. minimaler erwarteter Ertrag) zu umgehen, wird dann die Kellystrategie für unabhängige Bernoulliversuche eingeführt. Die Anwendung dieser Strategie wird danach an einem Beispiel mit Aktien verdeutlicht und es wird kurz beschrieben, wie ein Investor die Strategie für den Handel mit Optionsscheinen anwenden kann. Danach wird gezeigt, wie man die Kellystrategie für Portfolioauswahl und -optimierung benutzen kann. Edward O. Thorp zeigt, dass die Kellystrategie Lösungen in Fällen bietet, in denen die klassische Theorie der effizienten Portfolios von Harry M. Markowitz (vgl. [Mar59]) keine Handlungsanweisungen bereit hält.

Zwei Jahre später wurde der Artikel [Tho71] veröffentlicht. Hierin beschreibt Edward O. Thorp zunächst die Ergebnisse von Leo Breiman [Bre60, Bre61] und geht danach auf verschiedene Missverständnisse bzw. Kritikpunkte gegenüber der Kellystrategie ein. Er stellt fest, dass logarithmischer Nutzen für ihn zum Gebiet der normativen Nutzentheorie zählt und daher weder deskriptiv noch prädiktiv sein muss. Es wird durch die Annahme der logarithmischen Nutzenfunktion also kein beobachtetes Verhalten beschrieben oder erklärt, sondern eine Handlungsanleitung gegeben, um ein bestimmtes Ziel (die Maximierung der exponentiellen Wachstumsrate) zu erreichen. Danach geht Edward O. Thorp auf diverse Kritikpunkte von Paul A. Samuelson (vgl. [Sam63, Sam69, Sam71], sowie S. 42) ein. Edward O. Thorp kommt dann zu dem Schluss, dass der von ihm gewählte Ansatz durch die verschiedenen Kritikpunkte nicht berührt wird. Im Anschluss wird die Theorie des logarithmischen Nutzens zunächst für den binomialen Fall und danach für k -dimensionale Zufallsvariablen beschrieben und es werden Hinweise zur numerischen Umsetzung gegeben. Danach bestimmt Edward O. Thorp Bedingungen, unter denen die optimale Kellystrategie nahezu auf der Effizienzkurve gemäß Harry M. Markowitz liegt [Mar59]. Gemäß diesem ist ein Portfolio P_1 besser als ein Portfolio P_2 , falls sein Erwartungswert mindestens so groß ist, d.h.

$$\mathbb{E}[P_1] \geq \mathbb{E}[P_2]$$

und die Standardabweichung σ nicht größer ist, d.h.

$$\sigma[P_1] \leq \sigma[P_2],$$

wobei mindestens eine der Ungleichungen strikt sein muss. Ein Portfolio, für das kein besseres Portfolio existiert, wird *effizient* genannt. Alle effizienten Portfolios bilden in der E - σ -Ebene die Effizienzkurve. Edward O. Thorp betrachtet dann ein Portfolio P mit den folgenden Eigenschaften. Es sei $E = \mathbb{E}[R]$ und $R = P - 1$ sei der Ertrag pro in Portfolio P investierter Einheit, dann lässt sich $\log(P) = \log(R + 1) = \log((1 + E) + (R - E))$ schreiben. Die Bestimmung der Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $1 + E$ führt auf

$$\log(P) = \log(1 + E) + \frac{R - E}{1 + E} - \frac{1}{2} \frac{(R - E)^2}{(1 + E)^2} + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Wenn in diesem Ausdruck die Terme höherer Ordnung weggelassen werden und der Erwartungswert gebildet wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \log(P) &\approx \log(1 + E) + \frac{\mathbb{E}[R - E]}{1 + E} - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{E}[(R - E)^2]}{(1 + E)^2} \\ &= \log(1 + E) - \frac{1}{2} \frac{\text{Var}[R]}{(1 + E)^2}, \end{aligned}$$

wobei $\text{Var}[R]$ die Varianz von R bezeichnet, welche durch $\text{Var}[R] = \mathbb{E}[(R - E)^2]$ berechnet wird. Außerdem ist $\mathbb{E}[R - E] = \mathbb{E}[R] - \mathbb{E}[E] = E - E = 0$. Dann erfüllen konstante Werte der Wachstumsrate $G = \mathbb{E} \log(P)$ näherungsweise $G = \log(1 + E) - \text{Var}[R]/(2(1 + E)^2)$. Dies lässt sich als konkave Kurvenschar in der E - σ -Ebene darstellen. Zusätzlich lässt sich die Effizienzkurve durch die Koordinaten $(\mathbb{E}[P], \sigma[P])$ aller effizienten Portfolios beschreiben. Die Effizienzkurve ist wachsend und konvex. Durch den Berührungspunkt der

Effizienzkurve mit der Kurve, die zum größten G gehört, wird das effiziente Portfolio, das den logarithmischen Nutzen maximiert, identifiziert. Aufgrund der Konvexität der Effizienzkurve und der Konkavität der Kurven für feste G ist dieser Wert eindeutig. Die beschriebene Approximation von G funktioniert jedoch für einige Praxisbeispiele nicht; es kann auch vorkommen, dass es ein eindeutiges wachstumsoptimales Portfolio gibt, welches nicht auf der Effizienzkurve liegt. Um die Möglichkeiten der Anwendung der Kellystrategie zu veranschaulichen, beschreibt der Autor das Beispiel eines privaten institutionellen Investors, der große Gewinne durch Deckungsgeschäfte mit Wandelanleihen erzielt hat. Im Artikel [Tho06] stellt Edward O. Thorp die Kellystrategie zunächst für den Fall unabhängiger Münzwürfe vor und erläutert ihre wichtigsten Eigenschaften. Danach zeigt Edward O. Thorp, wie bestimmte Größen berechnet werden, die im Hinblick auf die Anwendung der Kellystrategie von Nutzen sein können. Hierzu berechnet er die Wahrscheinlichkeit, einen festgelegten Betrag in höchstens n unabhängigen Spielrunden zu erreichen, die Wahrscheinlichkeit, jemals das Spielkapital auf einen Bruchteil des Anfangskapitals zu reduzieren, die Wahrscheinlichkeit, nach einer festgelegten Anzahl an Spielrunden mindestens einen bestimmten Geldbetrag erreicht zu haben und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Strategie mit festen Anteilen nach n Spielrunden besser ist als eine andere Strategie mit festen Anteilen (vgl. Definition 1.33). Danach wird für das Spiel Blackjack dargestellt, wie der Spieler mit „Wartewetten“ umgehen kann. Dies sind Situationen mit negativem Erwartungswert, auf die der Spieler jedoch setzen muss, damit er am Spieltisch bleiben kann. In Bezug auf Sportwetten geht Edward O. Thorp darauf ein, wie sich die Kellystrategie verändert, wenn der Spieler gleichzeitig auf mehrere unabhängige Spiele wettet. Außerdem wird der Effekt der Kovarianz betrachtet. Danach wird gezeigt, wie man für Investitionen an der Börse stetige statt diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Zielfunktion verwenden kann. Dies führt auf die Funktion

$$g_{\infty}(f) = r + f(m - r) - \frac{s^2 f^2}{2},$$

wobei $g_{\infty}(f)$ die momentane Wachstumsrate des Kapitals bezeichnet, wenn der Anteil f eingesetzt wird, r sei der momentane Zinssatz für risikofreie Anlagen, m sei die momentane Drift und s^2 die momentane Varianz. Edward O. Thorp illustriert dann sehr anschaulich, wie hoch die Gewinne und Verluste sind, die auftreten, falls die Zielfunktion nicht exakt geschätzt wird bzw. die Berechnung des eingesetzten Anteils mit der maximalen Wachstumsrate f^* fehlerhaft ist. Aus diesen Überlegungen wird deutlich, dass Investoren im Zweifelsfall einen geringeren Anteil als f^* einsetzen sollten. Wenn nur die Hälfte des optimalen Anteils gewettet wird, verringert sich die Wachstumsrate um ein Viertel. Im Gegenzug verringert sich die Wahrscheinlichkeit großer Verluste deutlich stärker. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Startkapital jemals halbiert, beim Einsatz von f^* ungefähr gleich $1/2$ und wenn man $0.5f^*$ einsetzt, verringert sich diese Wahrscheinlichkeit auf $1/8$ [Tho06, S. 415]. Am Ende des Artikels stellt Edward O. Thorp eine Fallstudie und seine persönlichen Erfahrungen mit der Anwendung der Kellystrategie vor.

Ein weiterer Autor, der sich recht ausführlich mit der Kellystrategie beschäftigt hat, ist Thomas M. Cover. Der älteste Artikel [BC80], der hier erwähnt werden soll, wurde von Robert M. Bell und Thomas M. Cover im Jahre 1980 verfasst. Nach einer allgemeinen Einführung der Kellystrategie mit den von Leo Breiman [Bre61] ermittelten Eigenschaf-

ten und diversen Kritikpunkten, die u. a. von Paul A. Samuelson (s. S. 42) stammen, wird folgendes Nullsummenspiel für zwei Spieler beschrieben: Es sei \mathcal{B} die Menge aller Zufallsvariablen mit $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_m)^\top$, $\mathbf{B} \geq 0$ P-fast sicher (vgl. Definition 1.43) und $\mathbb{E} \sum_{i=1}^m B_i = 1$. Es sei der Investitionsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^\top$ eine Zufallsvariable (s. Definition 1.7) mit bekannter Verteilungsfunktion $F(\mathbf{x})$ und $\mathbf{X} \geq 0$ P-fast sicher. Außerdem gelte $-\infty < \sup_{\mathbf{b}} \mathbb{E} \ln \mathbf{b}^\top \mathbf{X} < \infty$, wobei der Vektor \mathbf{b} das Portfolio, also die eingesetzten Anteile, beinhaltet. Spieler 1 und Spieler 2 wählen $\mathbf{B}_{(1)} \in \mathcal{B}$ und $\mathbf{B}_{(2)} \in \mathcal{B}$ und Spieler 1 erhält die Auszahlung $\mathbb{P}(\mathbf{B}_{(1)}^\top \mathbf{X} \geq \mathbf{B}_{(2)}^\top \mathbf{X})$. Die Vektoren $\mathbf{B}_{(1)}$, $\mathbf{B}_{(2)}$ und \mathbf{X} seien jeweils unabhängig. Dann ist es optimal, $\mathbf{B}^* = U\mathbf{b}^*$ zu setzen, wobei U gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2]$ ist, unabhängig von \mathbf{X} , und \mathbf{b}^* maximiert $\mathbb{E} \ln \mathbf{b}^\top \mathbf{X}$. Durch die Multiplikation des deterministischen Vektors \mathbf{b}^* mit dem zufälligen Faktor U wird der Vektor \mathbf{B}^* , der die Handlungsanweisung für die Spieler beinhaltet, randomisiert. Daher wird in diesem Artikel $\mathbf{B} = U\mathbf{b}$ *randomisierte Strategie* und $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ *nicht randomisierte Strategie* genannt. Aus der oben ermittelten Optimalitätsaussage lassen sich zwei weitere Ergebnisse direkt ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X} \geq cU\mathbf{b}^{*\top} \mathbf{X}) &\leq \frac{1}{2}c, & \text{für alle } \mathbf{B} \in \mathcal{B}, c > 0, \\ \mathbb{P}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X} \geq c\mathbf{b}^{*\top} \mathbf{X}) &\leq \frac{1}{c}, & \text{für alle } \mathbf{B} \in \mathcal{B}, c > 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ergebnis (1.14) ist das beste, was mit einer nicht randomisierten Strategie erreicht werden kann. Am Ende des Artikels wird erläutert, wie groß der optimale Anteil b^* im St. Petersburg Spiel ist, abhängig vom Betrag c , den der Spieler für die Teilnahme an dem Spiel bezahlen muss. Der Artikel zeigt, dass die Strategie \mathbf{b}^* auch gute kurzfristige Eigenschaften besitzt. Die Autoren sind der Meinung, dass es für praktische Anwendungen ausreichend ist, lediglich die Strategie \mathbf{b}^* ohne die Randomisierung U zu verwenden.

Die spieltheoretischen Untersuchungen werden in [BC88] von denselben Autoren weiter vertieft. Hierzu wird das „ ϕ -Börsenspiel“ betrachtet, welches ein Nullsummenspiel für zwei Spieler ist und die Auszahlungsfunktion $\mathbb{E}\phi(S_1/S_2)$ besitzt, wobei ϕ eine beliebige steigende Funktion ist und $S_i = \mathbf{b}_i^\top \mathbf{X}$, $i = 1, 2$ die zufälligen Vermögen bezeichnet, die sich durch die Anwendung der Strategien \mathbf{b}_i auf einen Investitionsvektor $\mathbf{X} \geq 0$ ergeben, welcher gemäß einer bekannten Verteilungsfunktion $F(\mathbf{x})$ gezogen wird. Jeder Spieler beginnt mit einer Geldeinheit. Zur Erklärung des Spielverlaufs benötigen wir zunächst den Begriff der „fairen“ Verteilungsfunktion, welche nicht mit den fairen Quoten von Seite 22 verwechselt werden sollte.

Definition 1.49 (Faire Verteilungsfunktion)

Eine Verteilungsfunktion $G(w)$ wird fair genannt, wenn sie die Eigenschaften $G(0^-) = 0$ und $\int w dG(w) \leq 1$ besitzt.

Eine Strategie für Spieler i besteht aus der Wahl einer fairen Verteilungsfunktion und der Wahl eines Portfolios $\mathbf{b}_i \in \mathbf{B} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid b_i \geq 0, \sum_{i=1}^m b_i = 1\}$. Spieler i tauscht demnach seine Geldeinheit gegen die faire Zufallsvariable $W_i \sim G_i(w)$, die die faire Verteilungsfunktion $G_i(w)$ besitzt, und verteilt sein resultierendes Vermögen W_i gemäß \mathbf{b}_i auf den Investitionsvektor. Es wird angenommen, dass die Zufallsvariablen W_1 , W_2 und \mathbf{X} unabhängig sind. Die Auszahlung für Spieler 1 wird definiert als

$$\mathbb{E}\phi(W_1\mathbf{b}_1^\top \mathbf{X}/W_2\mathbf{b}_2^\top \mathbf{X}) = \int \phi(w_1\mathbf{b}_1^\top \mathbf{x}/w_2\mathbf{b}_2^\top \mathbf{x})dG_1(w_1)dG_2(w_2)dF(\mathbf{x}).$$

Es werde $-\infty < \sup_{S \in \mathbf{S}} E \ln S < \infty$ angenommen für ein $S^* \in \mathbf{S}$, wobei \mathbf{S} eine konvexe Familie sei. Die Menge \mathbf{S} wird als konvexe Familie von Zufallsvariablen bezeichnet, wenn die Elemente von \mathbf{S} auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (s. Definition 1.3) definiert sind und wenn für $S_1, S_2 \in \mathbf{S}$ gilt, dass $\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2 \in \mathbf{S}$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann sind für die Elemente einer konvexen Familie \mathbf{S} die folgenden Aussagen äquivalent: $E \ln(S/S^*) \leq 0$ für alle $S \in \mathbf{S}$ und $E(S/S^*) \leq 1$ für alle $S \in \mathbf{S}$. Es lassen sich dann drei äquivalente Charakterisierungen von S^* ermitteln:

- S^* maximiert $E \ln S$,
- $E(S/S^*) \leq 1$ für alle $S \in \mathbf{S}$,
- $E(X_i/S^*) \leq 1$ für alle i und $b_i^* = 0$, wenn $E(X_i/S^*) < 1$.

Für das ϕ -Börsenspiel können die Autoren zeigen, dass die Portfoliowahl optimal ist, wenn beide Spieler \mathbf{b}^* wählen, welches $E \ln \mathbf{b}^\top \mathbf{X}$ maximiert. Anschließend wird das Spiel durch die Betrachtung von n Investitionsperioden verallgemeinert. Hierzu wird der Marktprozess $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n$, $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}_+^m$ mit bekannter gemeinsamer Verteilungsfunktion $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \sim F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ betrachtet. Spieler i wählt sequenzielle Portfolios $\mathbf{b}_1^{(i)}, \mathbf{b}_2^{(i)}(\mathbf{X}_1), \dots, \mathbf{b}_n^{(i)}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n-1})$ und eine faire Randomisierung $W_i \sim G_i(w)$, also eine Zufallsvariable W_i mit der fairen Verteilung $G_i(w)$. So erhält er das Kapital $W_i S_n^{(i)} = W_i \prod_{j=1}^n \mathbf{b}_j^{(i)\top} \mathbf{X}_j$. Die Auszahlung an Spieler 1 wird durch $E\phi(W_1 S_n^{(1)}/W_2 S_n^{(2)})$ beschrieben. Die Zufallsvariablen W_1, W_2 und $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ seien unabhängig. Dann lauten die optimalen Portfoliostrategien für Spieler 1 und 2 $\mathbf{b}_k^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$ und \mathbf{b}_k^* maximiert den bedingten erwarteten logarithmischen Ertrag $E(\ln \mathbf{b}^\top \mathbf{X}_k | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k-1})$. Dieses Ergebnis bleibt sogar erhalten, wenn den Spielern nach jeder Spielrunde alle momentanen Kapitalstände bekannt gegeben werden. Beim erwarteten logarithmischen Ertrag handelt es sich um einen bedingten Erwartungswert, welcher in engem Zusammenhang mit der bedingten Verteilung steht. Die zugehörigen Definitionen entstammen [BN95, S. 265, 267].

Definition 1.50 (Bedingte Verteilung)

X und Y seien Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1)$ bzw. $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2)$, wobei \mathcal{X} und \mathcal{Y} vollständige separable, metrische Räume (polnische Räume) seien und \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 die zugehörigen Borel σ -Algebren (vgl. Definition 1.6). In der Darstellung der gemeinsamen Verteilung von X und Y (s. Definition 1.30) gemäß

$$\mathbb{P}^{(X,Y)} = \mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^{Y|X}$$

bezeichnet $\mathbb{P}^{Y|X}$ ein Übergangswahrscheinlichkeitsmaß von $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1)$ nach $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2)$, welches bedingte Verteilung von Y bei gegebenem X genannt wird. Bei vorgegebenem $x \in \mathcal{X}$ wird das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{Y|X}(x, \cdot)$ über $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2)$ meistens mit $\mathbb{P}^{Y|X=x}$ bezeichnet.

Definition 1.51 (Bedingter Erwartungswert)

Die Zufallsvariablen X und Y seien wie in Definition 1.50 gegeben und für die \mathcal{B}_2 -messbare Abbildung $g : \mathcal{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ existiere $E[g(Y)]$. Dann heißt

$$h(x) := E[g(Y) | X = x] := \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y) \mathbb{P}^{Y|X=x} \tag{1.15}$$

bedingter Erwartungswert von $g(Y)$ bei gegebenem $X = x$. Die P -fast überall definierte numerische Zufallsvariable

$$E[g(Y) | X] := h \circ X$$

mit h aus (1.15) heißt durch X bedingter Erwartungswert von $g(Y)$.

Die beiden gerade beschriebenen Artikel [BC80] und [BC88] behandeln im Gegensatz zu den meisten vorher behandelten Artikeln kurz- statt langfristige Eigenschaften. Dadurch, dass fast ausschließlich das optimale Verhalten in einem einmalig durchgeführten Spiel betrachtet wird, können wir diese Ergebnisse nicht auf die Ermittlung langfristiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen anwenden.

Im Artikel [Cov91] ermittelt Thomas M. Cover eine Strategie, die verwendet werden kann, ohne dass der Investor die zugrundeliegende Verteilungsfunktion des Investitionsvektors kennt. Es wird gefordert, dass diese asymptotisch ebenso gut funktioniert, bzw. zu demselben Vermögen führt, wie die beste stetig angepasste Strategie \mathbf{b} , welche das Kapital $S_n(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b}^\top \mathbf{x}_i$ und daher maximal das Vermögen $S_n^* = \max_{\mathbf{b}} S_n(\mathbf{b})$ erbringt. Diese universelle adaptive Portfoliostrategie $\hat{\mathbf{b}}_k$ erzeugt das Kapital \hat{S}_n und wird definiert als

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right), \quad \hat{\mathbf{b}}_{k+1} = \frac{\int \mathbf{b} S_k(\mathbf{b}) d\mathbf{b}}{\int S_k(\mathbf{b}) d\mathbf{b}},$$

wobei m die Anzahl der Investitionsalternativen bezeichnet, $S_k(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^k \mathbf{b}^\top \mathbf{x}_i$ ist und das Integral über die Menge der $(m-1)$ -dimensionalen Portfolios gebildet wird:

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid b_i \geq 0, \sum_{i=1}^m b_i = 1 \right\}.$$

Es wird gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln \hat{S}_n - (1/n) \ln S_n^* = 0$ für beliebige beschränkte Aktienfolgen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ gilt. Das Kapital, das in n Perioden erreicht wird, wenn der Investor sein gesamtes Geld in die j -te Aktie investiert, lässt sich durch $S_n(\mathbf{e}_j) = \prod_{k=1}^n \mathbf{e}_j^\top \mathbf{x}_k = \prod_{k=1}^n x_{kj}$ beschreiben, wobei \mathbf{e}_j den j -ten Einheitsvektor bezeichnet. Für die Größe S_n^* gilt: S_n^* übertrifft die beste Aktie, denn $S_n^* \geq \max_{j=1,2,\dots,m} S_n(\mathbf{e}_j)$. Außerdem übertrifft S_n^* das arithmetische Mittel mehrerer Aktien: Wenn $\kappa_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^m \kappa_j = 1$, dann folgt $S_n^* \geq \sum_{j=1}^m \kappa_j S_n(\mathbf{e}_j)$. Eine weitere Eigenschaft besteht darin, dass $S_n^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ invariant gegenüber Permutationen von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ist. Im Verlauf des Artikels wird die Größe \hat{S}_n/S_n^* zunächst für zwei Aktien und danach für den allgemeinen Fall mit m Aktien untersucht. Dies resultiert in einer Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von \hat{S}_n/S_n^* . Zusätzlich kann für unabhängig identisch verteilte Aktienvektoren mit unbekannter Verteilungsfunktion F gezeigt werden, dass das universelle Portfolio $\hat{\mathbf{b}}_k$ in der Lage ist, F zu erlernen und so die gleiche asymptotische Wachstumsrate des Kapitals zu erreichen, die möglich wäre, wenn der Investor F kennt.

Im folgenden Abschnitt wird die Güte des universellen Portfolios an mehreren Beispielen getestet. Es ergibt sich in jedem Fall, dass das universelle Portfolio am Ende der Beobachtungsperiode mehr Kapital erzeugt hat, als ein Investor erhalten hätte, der sein gesamtes Geld in die Aktie investiert hätte, die im betrachteten Zeitraum die größte Wachstumsrate aufweist. Das Kapital, das sich ergibt, wenn ein Investor im Nachhinein die beste stetig

angepasste Strategie wählen würde, ist immer größer als das Vermögen des universellen Portfolios. Zusammenfassend stellt der Autor fest, dass das universelle Portfolio das Vermögen $\widehat{S}_n = \exp(n(W_n^* - O((\ln n)/n)))$ erzeugt, wobei W_n^* die maximale Wachstumsrate in n Perioden bei Verwendung eines stetig angepassten Portfolios bezeichnet. Das erzeugte Vermögen strebt gegen unendlich und weist bis auf Terme der Ordnung $(\ln n)/n$ dasselbe Wachstum wie S_n^* auf. Trotz dieses Ergebnisses muss für tatsächliche Investitionen bedacht werden, dass n eventuell sehr groß werden muss, bevor sich seine exponentielle Dominanz tatsächlich zeigt.

In [AC88] erzielten Paul H. Algoet und Thomas M. Cover sehr allgemeine theoretische Ergebnisse. Der Artikel beginnt mit der Aufstellung der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Problem optimaler erwarteter logarithmischer Erträge (vgl. Definition 1.34). Diese Bedingungen wurden ebenfalls in [BC80] ermittelt. Danach werden die Stetigkeit und Erreichbarkeit des maximalen erwarteten logarithmischen Ertrags untersucht und über Martingaleigenschaften das asymptotische Verhalten desselben bestimmt. So können die Autoren zeigen, dass es asymptotisch optimal ist, in jeder Runde den unter der momentan verfügbaren Information bedingten erwarteten logarithmischen Ertrag (vgl. Definition 1.51) zu maximieren. Dies gilt ohne Einschränkung für jede Verteilungsfunktion des Marktprozesses. Hierbei ist ein Marktprozess ein m -dimensionaler Zufallsprozess (\mathbf{X}_t) , der mithilfe eines dynamischen Systems $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ beschrieben wird. Eine der Hauptaussagen des Artikels ist das asymptotische Optimalitätsprinzip. Für dieses benötigen wir zunächst die Definition von perfekten Wahrscheinlichkeitsräumen gemäß [RR96, S. 2223].

Definition 1.52 (Perfekter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen \mathbb{P} und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ perfekt, wenn wir für jede \mathcal{F} -messbare, reellwertige Funktion f auf Ω (vgl. Definition 1.7) eine Borel-Teilmenge B_f der reellen Achse finden können, so dass $B_f \subset f(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[f^{-1}(B_f)] = 1$ gilt.

Im folgenden Satz seien $\mathbf{X}_t, \mathbf{b}_t, \mathbf{b}_t^* \in \mathbb{R}^m, 0 \leq t < \infty$, und besitzen ausschließlich nicht-negative Einträge.

Satz 1.53 (Asymptotisches Optimalitätsprinzip [AC88, S. 888])

Die zufälligen Ausgänge $\{\mathbf{X}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ seien auf einem perfekten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert und $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ sei eine aufsteigende Folge von Unter- σ -Algebren von \mathcal{F} , so dass $\sigma(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{t-1}) \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $0 \leq t < \infty$. Außerdem sei das Vermögen nach n Investitionsperioden gemäß der logarithmisch optimalen Strategie $\{\mathbf{b}_t^*\}_{0 \leq t < \infty}$ und einer konkurrierenden nicht vorgreifenden Strategie $\{\mathbf{b}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ bezeichnet durch

$$C_n^* = \prod_{0 \leq t < n} \mathbf{b}_t^{*\top} \mathbf{X}_t \quad \text{und} \quad C_n = \prod_{0 \leq t < n} \mathbf{b}_t^\top \mathbf{X}_t.$$

Dann ist $\{C_n/C_n^*, \mathcal{F}_n\}_{0 \leq n < \infty}$ ein nichtnegatives Supermartingal, das \mathbb{P} -fast sicher (s. Definition 1.43) gegen eine Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}[Y] \leq 1$ konvergiert. Außerdem gilt $\mathbb{E}[C_n/C_n^*] \leq 1$ für alle n und

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left(\frac{C_n}{C_n^*} \right) \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Durch diesen Satz wird sichergestellt, dass die logarithmisch optimale Strategie, welche den erwarteten logarithmischen Ertrag maximiert, langfristig jede andere Strategie dominiert. Bezüglich der Wahrscheinlichkeit gilt, dass $\mathbb{P}[\sup_n C_n/C_n^* \geq \lambda] \leq 1/\lambda$, $\lambda > 0$, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - 1/\lambda$ beträgt, dass ein Konkurrent niemals das Vermögen C_n^* um mehr als einen Faktor λ übertreffen wird. Ein Marktprozess (\mathbf{X}_t) wird stationär und ergodisch genannt, wenn das zugehörige dynamische System, welches von den Autoren auch als Markt bezeichnet wird, stationär und ergodisch ist. Aus Definition 1.20 und Lemma 1.21 wissen wir bereits, wann ein dynamisches System stationär ist. Wann es ergodisch ist, beschreibt die folgende Definition [Sch07, S. 116].

Definition 1.54 (Ergodizität)

Für ein dynamisches System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ die Unter- σ -Algebra der bezüglich des Schiebeoperators (vgl. Definition 1.10) invarianten Ereignisse (s. Definition 1.11), d.h. $T^{-1}I = I$ für $I \in \mathcal{I}$. Wir nennen ein dynamisches System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ ergodisch, falls

$$\forall I \in \mathcal{I} : \quad \mathbb{P}(I) \in \{0, 1\}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ ist also ergodisch, falls alle invarianten Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 auftreten.

Für stationäre, ergodische Märkte kann gezeigt werden, dass die zeitlich gemittelte Wachstumsrate des Kapitals und ihr Erwartungswert gegen denselben Grenzwert konvergieren:

Satz 1.55 (Asymptotische Gleichverteilungseigenschaft [AC88, S. 890])

Wenn die Folge der Vektoren der Aktienerträge $\{\mathbf{X}_t\}$ stationär und ergodisch ist, dann wächst das Kapital bei Anwendung der logarithmisch optimalen Strategie exponentiell und \mathbb{P} -fast sicher (vgl. Definition 1.43) mit konstanter asymptotischer Rate, die dem maximalen erwarteten logarithmischen Ertrag mit unendlicher Vorgeschichte entspricht,

$$\frac{1}{n} \log C_n^* \rightarrow \overline{W}_\infty^* = W^*(\mathbf{X}_0 | \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_{-2}, \dots) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

mit

$$\begin{aligned} W^*(\mathbf{X}_0 | \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_{-2}, \dots) &= \lim_t \uparrow W^*(\mathbf{X}_0 | \mathbf{X}_{-1}, \dots, \mathbf{X}_{-t}) \\ &= \lim_t \uparrow W^*(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_0) \\ &= \lim_n \uparrow n^{-1} W^*(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{n-1}). \end{aligned}$$

Dieser Satz besagt, dass in stationären, ergodischen Märkten die maximale Kapitalwachstumsrate eine Konstante ist, die \mathbb{P} -fast sicher gleich dem maximal erwarteten logarithmischen Ertrag unter unendlicher Vorgeschichte ist. Für das Verhalten des Kapitals lassen sich sogar Aussagen treffen, wenn der Markt zwar stationär, aber nicht notwendigerweise ergodisch ist, sowie für asymptotisch im Mittel stationäre Märkte (s. Definition 1.24). Um dies zu zeigen, wird ein dynamisches System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ (vgl. Definition 1.9) betrachtet, für das die Cesàro-Mittel $n^{-1} \sum_{0 \leq t < n} \mathbb{P}(T^{-t}F)$ für beliebige Ereignisse $F \in \mathcal{F}$ konvergieren. Der zugehörige Grenzwert ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\overline{\mathbb{P}}$, die als stationäres Mittel bezeichnet wird. Die Maße \mathbb{P} und $\overline{\mathbb{P}}$ (s. Definition 1.3) besitzen dieselbe Beschränkung auf der invarianten σ -Algebra $\mathcal{I} = \{F \in \mathcal{F} | T^{-1}F = F\}$ (vgl. Definition 1.11).

Satz 1.56 ([AC88, S. 893 f.]

Der betrachtete Markt sei stationär (s. Lemma 1.21) und $\bar{\mathbf{b}}_\infty^*$ sei ein logarithmisch optimales Portfolio für Periode 0 unter der unendlichen Vorgeschichte $\bar{\mathcal{F}}_\infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \log C_n^* \rightarrow \mathbb{E}[\log(\bar{\mathbf{b}}_\infty^{*\top} \mathbf{X}_0) \mid \mathcal{I}] \quad \text{P-fast sicher.}$$

Das gleiche Ergebnis gilt für asymptotisch im Mittel stationäre Märkte, wenn $\bar{\mathbf{b}}_\infty^*$ logarithmisch optimal unter dem stationären Mittel ist, wenigstens, wenn $n^{-1} \log C_{k_n}^* \rightarrow 0$ P-fast sicher für eine Folge $\{k_n\}$, so dass $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/n \rightarrow 0$.

Als Anwendung der erreichten Ergebnisse werden im letzten Abschnitt Glücksspiele als Investitionen betrachtet. Hierbei geht der Autor u.a. darauf ein, wie das Setzen auf den Ausgang eines Pferderennens in dem betrachteten Kontext beschrieben werden kann. Dieses Problem wurde ebenfalls in [Kel56] untersucht.

In diesem Artikel werden die untersuchten Marktprozesse mithilfe von dynamischen Systemen analysiert. Daher gelten die ermittelten Erkenntnisse auch für diskrete stochastische Quellen, wie sie in Abschnitt 1.1 untersucht wurden.

In [Lue93] beschreibt David G. Luenberger einen Ansatz, die Maximierung der erwarteten logarithmischen Erträge (vgl. Definition 1.34) im Hinblick auf ökonomische Theorien zu betrachten, indem er eine Präferenzordnung zugrunde legt, aufgrund welcher der Investor seine Investitionsstrategie wählt. Hierzu werden zunächst unendliche deterministische Folgen $w = (w_1, w_2, \dots)$ betrachtet, die in der Menge Γ zusammengefasst sind und die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$0 \leq w_k \leq c^k \quad \text{für alle } k,$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist. Dann wird auf $\Gamma \times \Gamma$ eine Präferenzrelation \succsim aufgestellt, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (P.1) *Vollständigkeit*: Für jedes Paar $v, w \in \Gamma$ gilt entweder $w \succsim v$ oder $v \succsim w$.
- (P.2) *Reflexivität*: Für jedes $w \in \Gamma$ gilt $w \succsim w$.
- (P.3) *Transitivität*: Für alle $u, v, w \in \Gamma$ gilt: Falls $u \succsim v$ und $v \succsim w$, dann ist $u \succsim w$.
- (P.4) *Endeigenschaft*: Die Präferenzrelation hängt nur vom Ende der Sequenzen in Γ ab. D.h., falls $w, v \in \Gamma$ und $w \succsim v$, dann ist $\bar{w} \succsim \bar{v}$ für beliebige $\bar{w}, \bar{v} \in \Gamma$, die sich höchstens in endlich vielen Elementen von w und v unterscheiden.

Danach wird eine Präferenzordnung für stochastische Folgen auf der Menge $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ eingeführt, wobei \mathcal{W} die Menge der stochastischen Investitionsprozesse bezeichnet. Hierzu wird bemerkt, dass $\Gamma \times \Gamma$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ ist und die Menge \mathcal{B} sei die zugehörige Teilmenge der Borel σ -Algebren auf $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ (vgl. Definition 1.6). Es wird folgende zusätzliche Eigenschaft benötigt:

- (P.5) *Messbarkeit*: Die Teilmenge $\{(w, v) \mid w \succsim v\}$ von $\Gamma \times \Gamma$ befindet sich in \mathcal{B} .

Im nächsten Abschnitt des Artikels werden *einfache* Nutzenfunktionen definiert, welche die Form

$$U(w) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{\rho}(w_n, n) \quad \text{oder} \quad U(w) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\rho}(w_n, n)$$

oder algebraische Kombinationen hiervon besitzen. Hierbei ist $\bar{\rho}$ eine stetige, steigende Funktion der w_n für jedes n . Es wird gezeigt, dass der Nutzen für einfache Nutzenfunktionen äquivalent zum erwarteten logarithmischen Ertrag sein muss. Dies liegt darin begründet, dass, abgesehen von monotonen Transformationen, die einzige reellwertige einfache Nutzenfunktion mit Endeigenschaft $m = \mathbb{E} \log X_1$ ist, wobei X_1 die zufälligen Erträge der ersten Periode beschreibt. Danach werden zusammengesetzte Nutzenfunktionen der Form

$$U(W) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \psi(\log W_n - nm, m, n) \quad \text{P-fast sicher,} \quad (1.16)$$

$$U(W) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(\log W_n - nm, m, n) \quad \text{P-fast sicher} \quad (1.17)$$

vorge stellt. Hierbei ist ψ stetig und steigend in den ersten beiden Argumenten. Mit zusammengesetzten Nutzenfunktionen lassen sich insbesondere Ergebnisse für $m = 0$ herleiten, welche für einfache Nutzenfunktionen nicht ermittelt werden konnten. Dann lässt sich folgendes Ergebnis zeigen: Investoren, deren Nutzenfunktion die Form (1.16) besitzt, werden für ein gegebenes m eine Investitionsstrategie auswählen, die zu einem möglichst großen σ führt, wobei $\sigma^2 = \text{Var}[\log X_1]$. Wenn ein Investor seinen Nutzen jedoch gemäß (1.17) bewertet, wird er für ein gegebenes m eine Investitionsstrategie mit möglichst kleinem σ auswählen. Insgesamt ist eine zusammengesetzte Nutzenfunktion immer äquivalent zu einer Funktion $f(m, \sigma)$ des erwarteten Logarithmus m und der Standardabweichung des Logarithmus σ . Obwohl hierfür einige Voraussetzungen erfüllt sein müssen, kommt David G. Luenberger zu dem Schluss, dass eine Nutzenfunktion mit Endeigenschaft, die die Grenzwerte der gesamten Erträge berücksichtigt, äquivalent zu einer logarithmischen Mittelwert-Varianz-Strategie sein muss.

Ein relativ aktueller Artikel ist [Eth04], in dem Stewart N. Ethier beweist, dass die Kellystrategie den Median des Kapitals maximiert. Dies wurde vom Autor bereits 1988 unter asymptotischen Annahmen gezeigt und wird in [Eth04] unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen. Nachdem zuerst der frühere Ansatz beschrieben wird, geht der Autor im folgenden Abschnitt auf den Fall ein, dass es lediglich zwei mögliche Ausgänge pro Spiel gibt. Danach werden mehr als zwei Ausgänge betrachtet und der Autor erhält folgendes Ergebnis:

$$\frac{\text{median}[F_n(f^*)]}{\text{median}[F_n(f_0)]} = \exp\{n[\mu(f^*) - \mu(f_0)] + o(\sqrt{n})\} \rightarrow \infty$$

mit exponentieller Geschwindigkeit. Hierbei bezeichnet f^* den optimalen Anteil gemäß John L. Kelly, $f_0 \in [0, 1)$ sei ungleich f^* . Außerdem sei

$$F_n(f) = \prod_{l=1}^n (1 + fX_l)$$

das Kapital eines Spielers nach n Spielen, wenn er den Anteil f auf die unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots (vgl. Definition 1.7) mit den Werten $[-1, \infty)$ und $0 < \mathbb{E}[X_1] < \infty$ setzt. Es gilt für $0 \leq f < 1$

$$\mu(f) := \mathbb{E}[\ln(1 + fX_1)], \quad \sigma^2(f) := \text{Var}[\ln(1 + fX_1)].$$

Dieses Ergebnis wird im folgenden Abschnitt des Artikels für simultane Wetten auf mehrdimensionale Zufallsvariablen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ mit $\mathbf{X}_l \in [-1, \infty)^d$ unter gewissen Annahmen

noch verbessert.

Neben allen bisher vorgestellten Ergebnissen zur Kellystrategie gibt es Artikel, in denen die Verwendung der Kellystrategie abgelehnt wird. Mehrere kritische Artikel stammen von Paul A. Samuelson [Sam63, Sam69, Sam71, Sam79].

Sowohl in [Sam63, S. 4] als auch in [Sam69, S. 246] stellt er fest, dass das Ordnungsprinzip, zwischen zwei Ereignissen dasjenige zu wählen, welches die größere Wahrscheinlichkeit eines besseren Ergebnisses besitzt, nicht transitiv ist. Es lassen sich Beispiele konstruieren, in denen gilt: $P[A > B] > 1/2$, $P[B > C] > 1/2$ und $P[C > A] > 1/2$, wobei durch die Buchstaben A , B und C deren jeweilige Erträge bezeichnet werden (siehe [Sam63, S. 4]). Zur Illustration stellen wir uns die folgenden drei Ereignisse vor, die jeweils unabhängig voneinander sind.

- $P[A = 1] = 0.51$, $P[A = -100] = 0.49$
- $P[B = 0] = 1$
- $P[C = -1] = 0.51$, $P[C = 100] = 0.49$

Dann gilt $P[A > B] = 0.51 > 1/2$, $P[B > C] = 0.51 > 1/2$, aber auch $P[C > A] = 0.49 + 0.51 \cdot 0.49 = 0.7399 > 1/2$. Edward O. Thorp [Tho71, S. 603 f.] entgegnet darauf, dass die Eigenschaft, P-fast sicher (s. Definition 1.43) ein besseres Ergebnis zu erzielen, transitiv ist und dass bei den asymptotischen Ergebnissen zur Kellystrategie eben diese Eigenschaft zugrunde gelegt wird.

Paul A. Samuelson [Sam63, S. 5 f.] merkt an, dass Investoren in der Realität nicht unendlich lang investieren können, sondern lediglich $N < \infty$ Perioden. Dadurch gelten die asymptotischen Ergebnisse nicht exakt, sondern nur näherungsweise und die Eigenschaft der Transitivität ist nicht mehr unbedingt gegeben. Edward O. Thorp zeigt in [Tho71, S. 604], dass in diesem Fall eine approximative Form der Transitivität gilt. Paul A. Samuelsons Antwort [Sam79, S. 306] lautet, dass Intransitivität für endliche N immer möglich ist, auch wenn die Wahrscheinlichkeit des Auftretens immer geringer wird für wachsendes N .

In den beiden Artikeln [Sam69, S. 246] und [Sam71, S. 2494 f.] bezeichnet Paul A. Samuelson es als Fehler, den folgenden Schluss zu ziehen: Wenn der Einsatz des Anteils f^* P-fast sicher zu einem besseren Ergebnis führt als der Einsatz von f , dann liefert f^* auch einen größeren erwarteten Nutzen (vgl. Definition 1.34), vorausgesetzt, die Anzahl der Investitionsperioden ist groß genug. Wenn die zugrundeliegende Nutzenfunktion logarithmisch ist, kann der beschriebene Schluss gezogen werden. Für andere Nutzenfunktionen lassen sich Beispiele finden, in denen der Schluss nicht richtig ist und von denen Paul A. Samuelson verschiedene erläutert. Auch gemäß Edward O. Thorp [Tho71, S. 602 f.] ist der genannte Schluss im Allgemeinen falsch. Er führt weiter aus, dass Paul A. Samuelsons Kritikpunkt die Anwendung des logarithmischen Nutzens nicht beeinträchtigt, da hier die Voraussetzung gilt, dass Investoren ihre exponentielle Wachstumsrate maximieren wollen. Dieses Ziel führt dann zur Maximierung der erwarteten logarithmischen Erträge. Investoren, deren Nutzenfunktion inkompatibel mit der logarithmischen ist, können das genannte Ziel nicht haben und verfolgen daher andere Strategien, um ihren erwarteten Nutzen zu maximieren. Auch in [Sam79] stellt Paul A. Samuelson heraus, dass es nicht

für jeden Investor optimal ist, die Kellystrategie anzuwenden, sondern lediglich für diejenigen mit logarithmischer Nutzenfunktion. So können sehr risikoaverse Investoren mit dieser Strategie nicht ihren erwarteten Nutzen maximieren.

1.3. Eigenschaften der Kellystrategie

Dieser Abschnitt dient dazu, die bereits beschriebenen Eigenschaften und einige weitere in übersichtlicher Form darzustellen (vgl. [MTZ11]). Daher werden zu den einzelnen Punkten keine Erklärungen, sondern nur Verweise, gegeben.

- Die Kellystrategie maximiert asymptotisch die langfristige Wachstumsrate ([Bre61], vgl. S. 29 - 31).
- Die Kellystrategie minimiert asymptotisch die erwartete Zeit bis zu einem festgelegten Ziel ([Bre61], vgl. S. 29 - 31).
- Die Kellystrategie maximiert asymptotisch den Median des Kapitals ([Eth04], vgl. S. 41 - 42).
- Die Kellystrategie führt im Allgemeinen zu Diversifikation [Bre61, S. 66], denn danach sollten Investoren normalerweise das verfügbare Kapital auf mehrere oder alle Investitionsmöglichkeiten verteilen, statt alles auf eine Investitionsalternative zu setzen.
- Für die Kellystrategie ist die Ruinwahrscheinlichkeit des Investors gleich null, wobei Ruin eintritt, sobald das Kapital des Investors gleich null ist [HM75, S. 399 f.].
- Unter der Annahme, dass sich die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ereignisse mit der Zeit nicht ändern, besitzt die Kellystrategie in jeder Periode dieselben festen Anteile. Hieraus lässt sich schließen, dass es sich um eine konservative Strategie handelt [Bre61, S. 66]. Dies gilt jedoch nicht mehr, falls bedingte Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden. Denn sogar für eine binäre diskrete stochastische Quelle mit Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und beliebigen, aber festen Wahrscheinlichkeiten $P[a|a] \neq P[a|b]$ und $P[b|a] \neq P[b|b]$, für die es optimal ist, das gesamte Kapital einzusetzen, ändern sich die eingesetzten Anteile abhängig vom zuletzt ausgegebenen Zeichen.
- Falls die Ausgänge der zufälligen Erträge pro Zeitschritt unabhängig voneinander sind oder die Markoveigenschaft besitzen, es sich also um Markovketten erster Ordnung handelt (s. Seite 16), kann der Investor die optimale Kellystrategie zu jeder Zeit $t - 1$ für die nächste Periode t , $t \geq 1$, sequentiell berechnen [HZ95]. Dies ist ebenso möglich, wenn die zufälligen Erträge von der Vorgeschichte abhängen, indem bedingte Erwartungswerte (vgl. Definition 1.51) verwendet werden ([AC88], vgl. S. 38 - 40).
- Der Investor kann sein Risiko verringern, indem er statt des berechneten (vollen) Kellyanteils einen anteiligen Kellyanteil einsetzt. Dies bedeutet, dass er lediglich einen Bruchteil des vollen Kellyanteils investiert und das übrige Geld als Bargeld zurückbehält. Auf diese Weise wird ebenfalls die Wachstumsrate verringert ([Tho06],

vgl. S. 34). Als Risikomaß wird in [Tho06] die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass sich das Startkapital jemals halbiert. Es sind jedoch auch andere Risikomaße denkbar, wie z.B. die erwartete Zeit, bis sich das Startkapital auf einen Bruchteil verringert.

- Die Kellystrategie liefert auch im kurzfristigen Bereich gute Ergebnisse. Untersuchungen hierzu finden sich in [BC80, BC88] für gewisse spieltheoretische Betrachtungen (vgl. S. 34 - 37).
- Das erwartete Verhältnis zwischen dem Vermögen C , das durch eine beliebige andere Strategie erreicht wird, und dem Kapital C^* , das sich mit der Kellystrategie ergibt, ist höchstens 1: $E[C/C^*] \leq 1$ ([BC80, BC88], vgl. S. 34 - 37).
- Die optimalen Anteile der Kellystrategie können sehr groß sein. Dies geschieht bei vorteilhaften Spielen, für die das Risiko relativ klein ist [MTZ11].
- Für Münzwürfe gilt für jede Strategie, die feste Anteile f verwendet: Wenn nach einer beliebigen Spielrunde die Anzahl der Gewinne und Verluste gleich ist, besitzt der Spieler weniger Geld als sein Startkapital C_0 . Für n Gewinne und n Verluste ergibt sich das Kapital $C_{2n} = C_0(1 - f^2)^n$ [MTZ11].
- Die Kellystrategie maximiert den erwarteten Nutzen, wenn der Investor eine logarithmische Nutzenfunktion besitzt ([Tho71, Sam69, Sam71], vgl. S. 32, 42).
- Die Kellystrategie befindet sich nicht unbedingt auf der Effizienzkurve nach Harry M. Markowitz ([Hak71, Tho71], vgl. S. 32, 34).
- In Simulationen mit endlich vielen Perioden ergab sich, dass die Anwendung der Kellystrategie zu einer starken Verringerung des Startkapitals führen kann [MTZ11]. Je mehr Perioden betrachtet werden, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, mit der solche großen Verluste auftreten.
- Die Zeit, bis die Kellystrategie mit einem ausreichend hohen Konfidenzniveau besser ist als eine wesentlich andere Strategie, kann sehr lang sein. In [Tho06, S. 399] wird folgendes Beispiel für Münzwürfe gegeben: Spiel 1 habe einen Vorteil von 1%, d.h., dass für Spiele mit der Quote $\alpha = 2$ die Wahrscheinlichkeiten $p = 0.505$ und $q = 1 - p = 0.495$ vorliegen. Spiel 2 habe einen Vorteil von 1.1%, also Wahrscheinlichkeiten $p = 0.5055$ und $q = 0.4945$ bei derselben Quote. Dann werden 2 Mio. Würfe benötigt, bis die Ergebnisse von Spiel 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 84% besser sind als diejenigen von Spiel 1.

Die Aufzählung der Eigenschaften der Kellystrategie wird durch die beiden folgenden Bemerkungen abgerundet. Die Eigenschaften in den Bemerkungen wurden ausgegliedert, da für ihre Begründungen der Platz der Tabelle nicht ausreichend ist.

Bemerkung 1.57

Es liege ein Spiel vor, in dem der Spieler auf die zufälligen Ausgaben einer diskreten stochastischen Quelle (X_t) setzen kann, die in jedem Zeitpunkt t ein Zeichen $s \in \Sigma$ mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten $p(s)$ ausbebe. Die ausbezahlten Quoten seien $\alpha_s = 1/p(s)$ für alle Zeichen $s \in \Sigma$. Zusätzlich bekommt der Spieler die Ergebnisse der Quelle durch

einen gestörten Kanal übermittelt, in dem Fehler in der Übertragung vorkommen. Die übermittelten Zeichen $r \in R$ werden durch die Quelle (Y_t) beschrieben. Es wird angenommen, dass (X_t) und (Y_t) stochastisch unabhängig sind. Dann besitzt das betrachtete Spiel eine maximale Wachstumsrate von 0. Quoten mit der beschriebenen Eigenschaft werden von John L. Kelly als „fair“ bezeichnet (vgl. [Kel56], sowie S. 19 - 22). Das betrachtete Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \max_a G(a) &= \sum_{r \in R, s \in \Sigma} p(s, r) \log(\alpha_s a(s|r)) \\ &= \sum_{r \in R, s \in \Sigma} p(s, r) \log\left(\frac{a(s|r)}{p(s)}\right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dieses Optimierungsproblem besitzt als Lösung die optimalen Anteile $a^*(s|r) = p(s|r)$ und so erhalten wir als maximale Wachstumsrate

$$\begin{aligned} G(a^*) &= \sum_{r \in R, s \in \Sigma} p(s, r) \log\left(\frac{p(s|r)}{p(s)}\right) \\ &= \sum_{r \in R, s \in \Sigma} p(s, r) \log\left(\frac{p(s, r)}{p(s)p(r)}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da (X_t) und (Y_t) stochastisch unabhängig sind und daher $p(s, r) = p(s)p(r)$ ist. Das folgende Argument ergibt sich aus der Divergenzungleichung, die für die Divergenz (s. Definition 1.38) zweier Wahrscheinlichkeitsmaße (vgl. Definition 1.3) gilt und [Gra90, S. 27] entnommen wurde.

Satz 1.58 (Divergenzungleichung)

Seien beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{P} und \mathbb{Q} auf einem gemeinsamen, diskreten, endlichen Wahrscheinlichkeitsraum gegeben, dann gilt

$$D(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) \geq 0, \quad (1.18)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Aufgrund der Divergenzungleichung gilt für beliebige (X_t) und (Y_t) , dass

$$G(a^*) = \sum_{r \in R, s \in \Sigma} p(s, r) \log\left(\frac{p(s, r)}{p(s)p(r)}\right) \geq 0,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $p(s, r) = p(s)p(r)$ für alle $s \in \Sigma$ und $r \in R$.

Bemerkung 1.59

Die Kellystrategie führt asymptotisch zu mehr Kapital als jede wesentlich andere Strategie. Insbesondere im kurzfristigen Bereich lassen sich jedoch Strategien konstruieren, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein größeres Endkapital generieren. Zunächst wollen wir eine Strategie angeben, die nur endlich oft von der Kellystrategie abweicht (vgl. [Tho11]). Wir betrachten das Werfen einer unfairen Münze mit $X_t = 1$ für das Ereignis

„Kopf“ und $X_t = -1$ für das Ereignis „Zahl“, $t = 1, 2, \dots$, wobei $P[X_t = 1] = p > 1/2$ und $P[X_t = -1] = q = 1 - p > 0$. Es sei f^* der Kellyanteil, der in jeder Spielrunde eingesetzt wird, und g_t , $t = 1, 2, \dots$ eine Strategie mit den folgenden Eigenschaften: $g_t \neq f^*$ für mindestens ein $t \leq T$ und $g_t = f^*$ für $t > T$. In dieser Bemerkung verstehen wir also unter einer Strategie $g_t \in [0, 1]$, $t = 1, 2, \dots$, je einen Wert pro Spielrunde t , der angibt, welchen Anteil des derzeit vorhandenen Kapitals wir auf das Ereignis „Kopf“ setzen sollen. Dann existiert eine positive Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie g_t nach Runde T und damit auch für alle folgenden Runden mehr Kapital besitzt als die Kellystrategie. Dies tritt zum Beispiel ein, falls $g_t < f^*$, wenn $X_t = -1$ und $g_t > f^*$, wenn $X_t = 1$.

Es gibt aber auch Strategien, die mit positiver Wahrscheinlichkeit zu mehr Kapital führen als die Kellystrategie und in jeder Spielrunde von dieser abweichen. Ein Beispiel hierfür wurde von John Leib entwickelt (vgl. [Tho11]), dessen Strategie nach einer endlichen Anzahl an Spielrunden mit Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an 1 zu mehr Kapital führt als die Kellystrategie und in allen folgenden Runden weiterhin mehr Vermögen behält. Leibs Strategie lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Angenommen, Kapital sei unendlich oft teilbar, dann existiert für ein gegebenes $\epsilon > 0$ ein $N > 0$ und eine Folge $\{f_t\}$ mit $f_t \neq f^*$ für alle $t = 1, 2, \dots$, so dass $P[C_t^* < C_t \text{ für alle } t \geq T] > 1 - \epsilon$, wobei $C_t = \prod_{i=1}^t (1 + f_i X_i)$ und $C_t^* = \prod_{i=1}^t (1 + f^* X_i)$. Außerdem gibt es ein $b > 1$, so dass $P[C_t/C_t^* \geq b, t \geq T] > 1 - \epsilon$ und $P[C_t - C_t^* \rightarrow \infty] > 1 - \epsilon$. Dies bedeutet, dass es für ein beliebiges T eine Folge gibt, die nicht die Kellystrategie ist, und für $t \geq T$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \epsilon$ zu einem unendlich viel größeren Vermögen führt als diese.

Der Beweis befindet sich in [Tho11], an dieser Stelle soll lediglich skizziert werden, wie die Strategie konstruiert wird. Hierzu verfolge Spieler 1 die Kellystrategie und Spieler 2 die von Leib vorgestellte Strategie. Zunächst setzt Spieler 2 in jeder Spielrunde einen geringeren Anteil als den Kellyanteil ein. Dieser sollte nach Möglichkeit so konstruiert sein, dass Spieler 2 nach dem Eintreten der ersten Verlustsituation direkt mehr Kapital besitzt als Spieler 1. Solange Spieler 2 in der ersten Spielrunde die Differenz zwischen f^* und f_1 klein genug wählt, kann er für ein beliebiges gegebenes T diese Strategie bis zu T Spielrunden beibehalten. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie fehlschlägt, beträgt p^T , mit $1/2 < p < 1$. Sobald Spieler 2 mehr Geld besitzt als Spieler 1, teilt er dieses in zwei Teile. Für den einen Teil bC_t^* , $b > 1$, berechnet Spieler 2 den Kellyanteil und setzt diesen ein, zuzüglich eines Bruchteils des übrigen Kapitals $a > 0$, der abhängig von t berechnet wird, so dass der zweite Kapitalteil niemals gleich null wird. Auf diese Weise bleibt das Kapital von Spieler 2 immer größer als das Kapital von Spieler 1.

Die hier beschriebenen Strategien sind aufgrund der gezeigten Eigenschaften nicht wesentlich anders als die Kellystrategie.

1.4. Beispiele zur Berechnung der Kellystrategie

In diesem Abschnitt werden für diverse Beispiele die optimalen Kellyanteile berechnet. So lässt sich ein intuitiver Zugang zu den theoretischen Betrachtungen im nächsten Kapitel herstellen. Es werden sowohl Beispiele mit nur einer diskreten stochastischen Quelle als auch mehrere Quellen betrachtet (vgl. Definition 1.5). Um die Rechnungen möglichst einfach zu halten, wird grundsätzlich stochastische Unabhängigkeit unterstellt. Für die ersten Beispiele wird folgende Notation verwendet:

$(X_t), (Y_t)$	diskrete stochastische Quellen, deren Ausgaben das Ergebnis eines Spiels bzw. Kursverläufe an der Börse darstellen
n	Anzahl der möglichen Zeichen bzw. Kardinalität des Alphabets
$p_i \in (0, 1)$	Wahrscheinlichkeiten, mit denen die verschiedenen Zeichen $i \in \{1, \dots, n\}$ auftreten, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
α_i	Quote, die für die Ausgabe von Zeichen i ausgezahlt wird (es wird angenommen, dass sich die Quoten mit der Zeit nicht verändern)
a_i	Anteil des Kapitals, der in jeder Runde auf die Ausgabe von Zeichen i gesetzt wird
C_0	Startkapital, Annahme: $C_0 := 1$
C_t	Kapital nach t Spielrunden

Eine diskrete stochastische Quelle mit drei Zeichen

Wir nehmen an, dass wir auf die verschiedenen Ausgaben einer diskreten stochastischen Quelle (X_t) wetten können, die $n = 3$ Zeichen, $(X_t) \in \{1, 2, 3\}$, besitzt. Die verschiedenen Zeichen tauchen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten auf, so dass die Ausgabe der Quelle nicht von der Zeit t abhängt. Daher lassen wir den Index weg und bezeichnen die Quelle im Folgenden mit X . Die Quoten seien $\alpha_i = 1/p_i$, $i = 1, 2, 3$, und es wird angenommen, dass das gesamte Kapital eingesetzt wird, so dass $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Dann kann das Vermögen C_t nach t Spielrunden folgendermaßen dargestellt werden:

$$C_t = (a_1 \alpha_1)^{|L|} (a_2 \alpha_2)^{|M|} (a_3 \alpha_3)^{|N|} C_0,$$

wobei $|L|$, $|M|$ und $|N|$ die Anzahlen bezeichnen, mit denen die Ausgänge $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$ und $\{X = 3\}$ eingetreten sind. Um die erwartete geometrische Wachstumsrate (vgl. Definition 1.34) zu berechnen, bilden wir zunächst den Logarithmus von C_t/C_0 und erhalten

$$\log \left(\frac{C_t}{C_0} \right) = |L| \log(a_1 \alpha_1) + |M| \log(a_2 \alpha_2) + |N| \log(a_3 \alpha_3).$$

Jetzt kann die erwartete geometrische Wachstumsrate $G(a)$ berechnet werden, indem wir den folgenden Grenzwert bilden

$$\begin{aligned} G(a) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{C_t}{C_0} \right) \\ &= p_1 \log(a_1 \alpha_1) + p_2 \log(a_2 \alpha_2) + p_3 \log(a_3 \alpha_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 p_i \log \left(\frac{a_i}{p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 -p_i \log(p_i) + \sum_{i=1}^3 p_i \log(a_i) \\ &= H(X) + \sum_{i=1}^3 p_i \log(a_i), \end{aligned}$$

wobei $H(X)$ die Entropie von X bezeichnet (vgl. Definition 1.36). Die zweite Gleichung gilt aufgrund des empirischen Gesetzes der großen Zahlen (vgl. S. 20 und 28), nach dem relative Häufigkeiten gegen die mit ihnen assoziierten Wahrscheinlichkeiten konvergieren sollten. Da der Logarithmus für Basen größer als 1 konkav ist, kann gezeigt werden, dass (vgl. Bemerkung 1.57)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 p_i \log \left(\frac{a_i}{p_i} \right) &\leq \log \left(\sum_{i=1}^3 p_i \frac{a_i}{p_i} \right) \\ &= \log \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right) \\ &= \log(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist eine Form der Jensenschen Ungleichung (vgl. [HLP73, S. 69 ff.] und [Hö89]) für konkave Funktionen. Angepasst auf unseren Fall lautet sie:

Satz 1.60 (Jensensche Ungleichung)

Es sei f eine konkave Funktion und es gebe positive Skalare λ_i , $i = 1, \dots, n$, so dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt

$$f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Wir erhalten somit die maximale erwartete geometrische Wachstumsrate, wenn wir $a_i = p_i$, $i = 1, 2, 3$, setzen. Dieselbe Wachstumsrate ließe sich jedoch auch erreichen, wenn überhaupt kein Geld in das Spiel investiert würde, $a_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Mehrere diskrete stochastische Quellen mit je zwei Zeichen

Dieses Beispiel stammt aus dem Artikel [MPZ08], in dem M unabhängige, gleichzeitige Spiele mit jeweils zwei Ausgängen untersucht werden. Eine solche Situation liegt z.B. vor, wenn ein Spieler pro Spielrunde auf M verschiedene, unabhängige Münzwürfe Geld setzen kann. Es wird angenommen, dass alle Spiele identisch sind. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten für „Kopf“ bzw. „Zahl“ für alle M Münzen gleich sind. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, mit der in Spiel i , $i = 1, \dots, M$, der Ertrag $R_i = 1$ auftritt und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ tritt der negative Ertrag $R_i = -1$ ein. Dies entspricht der Quote $\alpha_i = 2$. Es wird angenommen, dass der Investor den Anteil a_i im i -ten Spiel einsetzt. Da sich die Wahrscheinlichkeiten und Quoten mit der Zeit nicht ändern, ist es optimal, in jeder Spielrunde denselben Anteil einzusetzen. Außerdem ist es optimal, das investierte Geld gleichmäßig auf alle Spiele zu verteilen, weil diese identisch sind. Somit ist es ausreichend, lediglich eine Entscheidungsvariable $a_i = a$ zu betrachten. Wir nehmen an, dass in einer Spielrunde w Spiele den Ertrag $R_i = 1$ aufweisen und daher $M - w$ Spiele mit negativem Ertrag $R_i = -1$ auftreten. Dann wird das bisherige Kapital des Spielers mit dem Faktor $1 + (w - (M - w))a = 1 + (2w - M)a$ multipliziert und es ergibt sich die Wachstumsrate

$$G(a) = \sum_{w=0}^M b(w; M, p) \log(1 + (2w - M)a),$$

mit $b(w; M, p) := \binom{M}{w} p^w (1-p)^{M-w}$, $w = 0, \dots, M$, da die Ausgänge der Spiele durch eine Binomialverteilung beschrieben werden können. Wir bilden die partielle Ableitung von $G(a)$ nach a und setzen diese gleich null:

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \sum_{w=0}^M \frac{b(w; M, p)(2w - M)}{1 + (2w - M)a} = 0. \quad (1.19)$$

Wie in [MPZ08, S. 6153] schreiben wir $2w - M = (a(2w - M) + 1 - 1)/a$ und nutzen aus, dass $\sum_{w=0}^M b(w; M, p) = 1$ gilt. Dann lässt sich (1.19) umformen zu

$$\sum_{w=0}^M \frac{b(w; M, p)}{1 + (2w - M)a} = 1.$$

Für $M = 1$ ergibt sich der optimale Anteil $a_1^* = 2p - 1$ und $M = 2$ führt auf $a_2^* = (2p - 1)/(4p^2 - 4p + 2)$. Für $p < 1/2$ erhalten wir daher negative Werte für a_1^* und a_2^* . Da dies ausgeschlossen sein soll, setzen wir $a_1^* = a_2^* = 0$ für $p \in [0, 1/2)$. Für $M = 3$ und $M = 4$ lassen sich ebenfalls Lösungen berechnen, die jedoch so lang sind, dass sie hier nicht explizit aufgeführt werden. Für $M \geq 5$ lassen sich keine geschlossenen Lösungen mehr angeben, so dass in [MPZ08] Approximationen für die analytischen Lösungen angegeben werden. Hieraus wird bereits deutlich, dass die explizite Berechnung optimaler Anteile gemäß der Kellystrategie recht schnell an ihre Grenzen stößt.

Zwei diskrete stochastische Quellen mit je zwei Zeichen

In diesem Beispiel kann der Investor sein Geld gleichzeitig auf zwei Spiele verteilen, es ist jedoch nicht möglich, auf die verschiedenen Ausgänge der einzelnen Spiele zu setzen. Dies ist z.B. der Fall, wenn ein Spieler pro Spielrunde auf zwei unabhängige, gleichzeitige Münzwürfe setzen kann, deren Quoten unterschiedlich sind. Pro Spiel darf der Spieler jedoch nicht auf „Kopf“ und „Zahl“ gleichzeitig setzen, sondern muss sich für einen Ausgang entscheiden. Solange die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ausgänge nicht gleich sind, gibt es nur eine vorteilhafte Wette pro Spiel, so dass dies keine Einschränkung für den Spieler bedeutet. Der Spieler investiert den Anteil a_i im i -ten Spiel, $i = 1, 2$. Wir betrachten zwei unterschiedliche Situationen. Zunächst gehen wir wieder davon aus, dass der Investor sein gesamtes Kapital anlegt, so dass $a_2 = 1 - a_1$ gilt (Situation 1). Danach betrachten wir den Fall, dass der Spieler einen Teil a_3 seines Geldes zurückbehalten kann, so dass $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (Situation 2). In t Spielrunden trete $|L|$ Mal ein Gewinn in Spiel 1 und Spiel 2 ein, es gebe $|M|$ Situationen, in denen der Spieler in Spiel 1 gewinnt und in Spiel 2 verliert, $|N|$ sei die Häufigkeit, mit der der Investor in Spiel 1 verliert und in Spiel 2 gewinnt und in $|O|$ Runden verliert er in beiden Spielen. In Spiel 1 betragen die Quoten 2:1 und in Spiel 2 erhält der Investor entweder das 1.5-fache seines Einsatzes oder verliert die Hälfte des Einsatzes. Die Gewinnwahrscheinlichkeit in Spiel 1 wird mit p_1 bezeichnet, die entsprechende Verlustwahrscheinlichkeit mit $q_1 = 1 - p_1$. Spiel 2 besitze die Wahrscheinlichkeiten p_2 und $q_2 = 1 - p_2$. Es wird angenommen, dass die beiden Spiele stochastisch unabhängig sind. Dann ergibt sich das Kapital nach t Spielrunden als

$$C_t = \left(2a_1 + \frac{3}{2}a_2\right)^{|L|} \left(2a_1 + \frac{1}{2}a_2\right)^{|M|} \left(\frac{3}{2}a_2\right)^{|N|} \left(\frac{1}{2}a_2\right)^{|O|} C_0.$$

Kapitel 1. Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie

Damit können wir die langfristige Wachstumsrate $G(a)$ berechnen. Diese beträgt

$$\begin{aligned} G(a) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{C_t}{C_0} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[|L| \log \left(2a_1 + \frac{3}{2}a_2 \right) + |M| \log \left(2a_1 + \frac{1}{2}a_2 \right) + |N| \log \left(\frac{3}{2}a_2 \right) + |O| \log \left(\frac{1}{2}a_2 \right) \right] \\ &= p_1 p_2 \log \left(2a_1 + \frac{3}{2}a_2 \right) + p_1 q_2 \log \left(2a_1 + \frac{1}{2}a_2 \right) + q_1 p_2 \log \left(\frac{3}{2}a_2 \right) + q_1 q_2 \log \left(\frac{1}{2}a_2 \right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus dem empirischen Gesetz der großen Zahlen (s. S. 20) folgt. Wir ersetzen $a_2 = 1 - a_1$ und erhalten das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max_{a_1} \quad G(a_1) &= p_1 p_2 \log \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2} \right) + p_1 q_2 \log \left(\frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{2} \right) + q_1 p_2 \log \left(-\frac{3}{2}a_1 + \frac{3}{2} \right) \\ &\quad + q_1 q_2 \log \left(-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} \right) \\ \text{u.d.N.} \quad &0 \leq a_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Um Optima zu finden, für die $0 < a_1 < 1$ gilt, bilden wir die partielle Ableitung von G nach a_1 und setzen diese gleich null. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(a_1)}{\partial a_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 p_2}{\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}} + \frac{3p_1 q_2}{\frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{2}} - \frac{3q_1 p_2}{-\frac{3}{2}a_1 + \frac{3}{2}} - \frac{q_1 q_2}{-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}} \right) = 0 \\ \Rightarrow \quad a_1^2 &+ \left(-\frac{8}{3}p_1 p_2 - \frac{4}{3}p_1 + \frac{10}{3} \right) a_1 + \frac{8}{3}p_1 p_2 - 4p_1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Dieses Polynom zweiten Grades besitzt die beiden Nullstellen

$$a_1^{*1/2} = \frac{4}{3}p_1 p_2 + \frac{2}{3}p_1 - \frac{5}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{4p_1^2 p_2^2 + 4p_1^2 p_2 - 16p_1 p_2 + p_1^2 + 4p_1 + 4}.$$

Für $p_1 \in [0, 1]$ und $p_2 \in [0, 1]$ besitzt a_1^{*2} ausschließlich negative Werte. Daher ist es für gegebene Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 optimal, den Anteil a_1^{*1} in Spiel 1 einzusetzen und $1 - a_1^{*1}$ in Spiel 2. Falls der optimale Anteil a_1^{*1} die Nebenbedingung verletzt, kann die optimale Strategie bestimmt werden, indem die Zielfunktionswerte von $a_1 = 0$ und $a_1 = 1$ verglichen werden und das a_1 gewählt wird, das zum größeren Zielfunktionswert führt. Da die gegebene Zielfunktion Werte annimmt, die gegen $-\infty$ streben, falls $a_1 \rightarrow 1$, ist es in dem Beispiel für diese Fälle immer optimal, $a_1^* = 0$ zu wählen. In den ersten fünf Spalten von Tabelle 1.3 werden die Anteile a_1^* und a_2^* mit der zugehörigen langfristigen Wachstumsrate $G(a^*)$ für verschiedene p_1 und p_2 dargestellt. Eine längere Version der Tabelle befindet sich in Anhang A. Die Tabelle zeigt, dass a_1^* eine fallende Funktion von p_2 für feste p_1 ist. Für $p_1 = p_2 \in \{0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ ist es optimal, mehr Geld in Spiel 2 zu investieren als in Spiel 1: $a_2^* > a_1^*$. Nur für $p_1 = p_2 \in \{0.9, 1\}$ ist der größere mögliche Gewinn in Spiel 1 so wahrscheinlich, dass $a_1^* > a_2^*$ gilt. Hieraus wird deutlich, dass die Kellystrategie implizit Risikobetrachtungen beinhaltet.

Als nächstes untersuchen wir den Fall, dass der Investor in jeder Spielrunde einen Teil seines Geldes zurückbehalten kann (Situation 2). Dann gilt $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, wobei die

1.4. Beispiele zur Berechnung der Kellystrategie

p_1	p_2	a_1^*	a_2^*	$G(a^*)$	a_1^*	a_2^*	a_3^*	$G(a^*)$
0.1	0	0	1	-1	0	0	1	0
0.1	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.1	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.1	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.3	0	0.0667	0.9333	-0.9908	0	0	1	0
0.3	0.2	0.0143	0.9857	-0.6826	0	0	1	0
0.3	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.3	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.4	0.1	0.1722	0.8278	-0.7856	0	0	1	0
0.4	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.4	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.4	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.5	0	0.3333	0.6667	-0.7925	0	0	1	0
0.5	0.4	0.2000	0.8000	-0.3049	0	0	1	0
0.5	0.6	0.1016	0.8984	-0.0351	0	0.4000	0.6000	0.0290
0.5	0.7	0.0376	0.9624	0.1112	0	0.8000	0.2000	0.1187
0.5	≥ 0.75	0	1	≥ 0.1887	0	1	0	≥ 0.1887
0.6	0	0.4667	0.5333	-0.6049	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.6	0.2423	0.7577	0.0204	0.1923	0.3846	0.4231	0.0569
0.6	0.8	0.0894	0.9106	0.2754	0.0894	0.9106	0	0.2754
0.6	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.7	0	0.6000	0.4000	-0.3568	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.5	0.4518	0.5482	0.0357	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.6	0.4038	0.5962	0.1242	0.3865	0.3382	0.2754	0.1431
0.7	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.8	0	0.7333	0.2667	-0.0389	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.6	0.5853	0.4147	0.2884	0.5844	0.2597	0.1558	0.2967
0.8	0.7	0.5386	0.4614	0.3526	0.5386	0.4614	0	0.3526
0.8	1	0.2000	0.8000	0.5951	0.2000	0.8000	0	0.5951
0.9	0	0.8667	0.1333	0.3725	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.6	0.7848	0.2152	0.5390	0.7882	0.1478	0.0640	0.5415
0.9	0.7	0.7589	0.2411	0.5715	0.7589	0.2411	0	0.5715
0.9	1	0.6000	0.4000	0.6895	0.6000	0.4000	0	0.6895

Tabelle 1.3.: Optimale Anteile a_i^* , $i = 1, 2, 3$, mit zugehöriger Wachstumsrate $G(a^*)$ für verschiedene Werte von p_1 und p_2 in Situation 1 und 2

Kapitel 1. Entwicklung, Eigenschaften und Beispiele der Kellystrategie

zusätzliche Variable a_3 den Bargeldanteil bezeichnet. Indem wir $a_3 = 1 - a_1 - a_2$ setzen, ergibt sich folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_a \quad G(a) &= p_1 p_2 \log \left(a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1 \right) + p_1 (1 - p_2) \log \left(a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1 \right) \\ &\quad + (1 - p_1) p_2 \log \left(-a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1 \right) + (1 - p_1) (1 - p_2) \log \left(-a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1 \right) \\ \text{u.d.N.} \quad g(a) &= \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 + 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $G(a)$ und die Nebenbedingungen $g(a)$ besitzen die folgenden Gradienten:

$$\begin{aligned} \nabla G_1(a) &= \frac{p_1 p_2}{a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1} + \frac{p_1 (1 - p_2)}{a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1} - \frac{(1 - p_1) p_2}{-a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1} - \frac{(1 - p_1) (1 - p_2)}{-a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1} \\ \nabla G_2(a) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 p_2}{a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1} - \frac{p_1 (1 - p_2)}{a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1} + \frac{(1 - p_1) p_2}{-a_1 + \frac{1}{2} a_2 + 1} - \frac{(1 - p_1) (1 - p_2)}{-a_1 - \frac{1}{2} a_2 + 1} \right) \\ \nabla g(a) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die notwendigen KKT-Bedingungen (vgl. Satz 2.7) besagen, dass es Multiplikatoren μ_i , $i = 1, 2, 3$, gibt, so dass

$$\begin{aligned} \nabla G_1(a) - \mu_1 + \mu_2 &= 0, & \mu_1 (-a_1 - a_2 + 1) &= 0, \\ \nabla G_2(a) - \mu_1 + \mu_3 &= 0, & \mu_2 a_1 = 0, \quad \mu_3 a_2 = 0, \quad \mu_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

gilt. Hieraus lassen sich Kandidaten \bar{a}_1 und \bar{a}_2 für die optimalen Anteile, sowie Aussagen über μ_i , $i = 1, 2, 3$, p_1 und p_2 für alle möglichen Szenarien ableiten. Dies wird in der folgenden Aufzählung dargestellt:

1. $a_1 = 0, a_2 = 0, a_1 + a_2 < 1 \Rightarrow \bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0, \mu_1 = 0, p_1 \leq 1/2, p_2 \leq 1/2$
2. $a_1 = 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow \bar{a}_1 = 0, \bar{a}_2 = 1, \mu_3 = 0, p_2 \geq 3/4$
3. $a_1 = 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 < 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_3 = 0, p_1 \leq 1/2, p_2 \geq 1/2, \bar{a}_1 = 0, \bar{a}_2 = (2p_2 - 1)/(1/2 + p_2)$
4. $a_1 > 0, a_2 = 0, a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow \bar{a}_1 = 1, \bar{a}_2 = 0, \mu_2 = 0$
5. $a_1 > 0, a_2 = 0, a_1 + a_2 < 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0, p_1 \geq 1/2, p_2 \leq 1/2, \bar{a}_1 = 2p_1 - 1, \bar{a}_2 = 0$
6. $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = \mu_3 = 0, \bar{a}_1 = \frac{4}{3} p_1 p_2 + \frac{2}{3} p_1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{4p_1^2 p_2^2 + 4p_1^2 p_2 - 16p_1 p_2 + p_1^2 + 4p_1 + 4}, \bar{a}_2 = 1 - \bar{a}_1$
7. $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 < 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,$

$$\bar{a}_1 = \frac{-p_2^2 + 2p_1 p_2^2 + p_2 - 2p_1 p_2}{p_2^2 + p_1^2 - 4p_1 p_2^2 - 4p_1^2 p_2 - p_1 + 4p_1 p_2 + 4p_1^2 p_2^2 - p_2},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{4p_1^2 p_2 + 2p_1 - 4p_1 p_2 - 2p_1^2}{p_2^2 + p_1^2 - 4p_1 p_2^2 - 4p_1^2 p_2 - p_1 + 4p_1 p_2 + 4p_1^2 p_2^2 - p_2}$$

Aus diesen Kandidaten wird die optimale Strategie a_i^* , $i = 1, 2, 3$, ermittelt (s. Definition 2.4), indem die jeweiligen Zielfunktionswerte bestimmt und miteinander verglichen werden. Die Spalten 6-8 von Tabelle 1.3 zeigen einige optimale Anteile a_i^* , $i = 1, 2, 3$ und die zugehörige langfristige Wachstumsrate $G(a^*)$ (Spalte 9). Weitere Werte finden sich in den entsprechenden Spalten der Tabelle in Anhang A. Durch die Möglichkeit, Bargeld zurückzubehalten, ist die optimale langfristige Wachstumsrate des Spielers niemals negativ.

Situation 1 lässt sich als Teilproblem von Situation 2 auffassen. Dies wird deutlich, wenn man erkennt, dass der Spieler in Situation 1 auf die Fälle 2., 4. und 6. aus der obigen Aufzählung beschränkt ist, während Situation 2 alle Fälle umfasst. Aus diesem Grund ist die langfristige optimale Wachstumsrate in Situation 2 immer mindestens so groß wie in Situation 1.

Bemerkung 1.61

Dieses Beispiel kann auch angewendet werden, um Strategien (vgl. Definition 1.33) zur Investition in zwei Aktien zu bestimmen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Aktien sich gemäß dem Binomialmodell (vgl. Unterabschnitt 1.4.1.1) verhalten, in dem der Kurs von Aktie 1 in jedem Zeitschritt entweder mit Wahrscheinlichkeit p_1 um den Faktor $l > 1$ steigt oder sich mit Wahrscheinlichkeit $q_1 = 1 - p_1$ um den Faktor $m < 1$ verringert. Aktie 2 verhält sich entsprechend, die jeweiligen Faktoren werden mit $n > 1$ und $o < 1$ bezeichnet und die Wahrscheinlichkeiten seien p_2 und $q_2 = 1 - p_2$. Dann können analog zu den obigen Rechnungen die Anteile a_1 in Aktie 1 und a_2 in Aktie 2 berechnet werden, falls der Investor sein gesamtes Kapital anlegt ($a_1 + a_2 = 1$). Ebenso können die Anteile a_1 , a_2 und a_3 mit $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ bestimmt werden, falls die Möglichkeit besteht, einen Teil des Kapitals als Bargeld zurückzubehalten.

Wenn wir $l := 2$, $m := 0$, $n := 3/2$ und $o := 1/2$ setzen, erhalten wir direkt das bereits berechnete Beispiel. Für allgemeine Werte muss der Investor in Situation 1 das folgende Optimierungsproblem lösen:

$$\begin{aligned} \max_{a_1} \quad & G(a_1) = p_1 p_2 \log((l - n)a_1 + n) + p_1(1 - p_2) \log((l - o)a_1 + o) \\ & + (1 - p_1)p_2 \log((m - n)a_1 + n) + (1 - p_1)(1 - p_2) \log((m - o)a_1 + o) \\ \text{u.d.N.} \quad & 0 \leq a_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Für Situation 2 ergibt sich entsprechend das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_a \quad & G(a) = p_1 p_2 \log((l - 1)a_1 + (n - 1)a_2 + 1) \\ & + p_1(1 - p_2) \log((l - 1)a_1 + (o - 1)a_2 + 1) \\ & + (1 - p_1)p_2 \log((m - 1)a_1 + (n - 1)a_2 + 1) \\ & + (1 - p_1)(1 - p_2) \log((m - 1)a_1 + (o - 1)a_2 + 1) \\ \text{u.d.N.} \quad & g(a) = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 + 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Beide Optimierungsprobleme können genau wie im Beispiel gelöst werden.

1.4.1. Investitionen in Optionen

Als weiteres Beispiel für eine mögliche Anwendung der Kellystrategie sollen in diesem Unterabschnitt Investitionen in Optionen untersucht werden. Hierzu wird zunächst beschrieben, wie Optionspreise berechnet werden, wenn man annimmt, dass sich der zugrundeliegende Basiswert gemäß dem Binomialmodell (vgl. [CRR79] und [Sey09, Abschnitte 1.4, 1.5]) verhält. Im Binomialmodell bewegt sich der Preis des Basiswertes zu jedem diskreten Zeitschritt t mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit um einen festen Faktor nach oben und mit der Gegenwahrscheinlichkeit um einen anderen Faktor nach unten. Ausgehend hiervon wird dann untersucht, wie ein Investor in Optionen investieren sollte, wenn er gemäß der Kellystrategie handelt.

1.4.1.1. Das Binomialmodell

Der Preis einer Kaufoption zum Fälligkeitszeitpunkt T wird im Allgemeinen (vgl. [Sey00]) als

$$O_T = \max[0, S - K],$$

bestimmt, wobei S den aktuellen Aktienkurs (oder den Preis eines anderen Basiswertes) und K den Ausübungspreis der Kaufoption bezeichnet. Es wird angenommen (vgl. [CRR79]), dass der Preis einer Kaufoption durch eine Anzahl an Aktienanteilen Δ und eine Anzahl risikoloser festverzinslicher Wertpapiere B nachgebildet werden kann, so dass

$$O = \Delta S + B$$

gilt. Falls nur noch eine Periode bis zum Fälligkeitszeitpunkt der Kaufoption übrig ist und angenommen wird, dass der Preis des Basiswertes steigt, dann gelten die beiden folgenden Gleichungen:

$$O_u = \max[0, uS - K] \tag{1.20}$$

$$= \Delta uS + rB, \tag{1.21}$$

hierbei bezeichnet $u > 1$ den Faktor, mit dem sich der Preis des Basiswertes in der letzten Periode verändert, und $r - 1$ ist der risikolose Zinssatz. O_u sei der Preis der Kaufoption, wenn der Aktienkurs steigt.

Wenn der Preis des Basiswertes fällt und nur noch eine Periode bis zum Fälligkeitszeitpunkt übrig ist, wird der Preis der Kaufoption durch

$$O_d = \max[0, dS - K] \tag{1.22}$$

$$= \Delta dS + rB \tag{1.23}$$

bestimmt. Mithilfe dieser zwei Gleichungen können die Werte für Δ und B bestimmt werden:

$$\Delta = \frac{O_u - O_d}{(u - d)S}, \quad B = \frac{uO_d - dO_u}{(u - d)r}. \tag{1.24}$$

Es sei q die Wahrscheinlichkeit, mit der der Aktienkurs in der nächsten Periode steigt. Dann wird der Erwartungswert des Kaufoptionspreises O (vgl. Definition 1.34) durch

$$E[O] = q O_u + (1 - q) O_d = q (\Delta uS + rB) + (1 - q) (\Delta dS + rB)$$

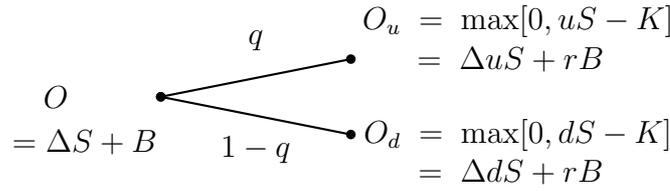


Abbildung 1.1.: Werte einer Kaufoption eine Periode vor dem Fälligkeitszeitpunkt (vgl. [CRR79, S. 233])

bestimmt. Da der aktuelle Wert der Kaufoption O diskontiert werden muss, wird er auf folgende Weise berechnet:

$$O = (p O_u + (1 - p) O_d)/r$$

mit

$$p = \frac{r - d}{u - d}, \quad 1 - p = \frac{u - r}{u - d}. \quad (1.25)$$

Um Arbitragemöglichkeiten zu verhindern, muss $u > r > d$ gelten. Diese Eigenschaft stellt auch sicher, dass $p \in [0, 1]$ gilt. Hierbei ist p der Wert, den q im Gleichgewicht annehmen würde, wenn die Investoren risikoneutral wären. Unter der Annahme von Risikoneutralität würde der Erwartungswert des Aktienkurses S mit dem risikolosen Zinssatz wachsen (siehe [CRR79], S. 235), so dass

$$\begin{aligned} q uS + (1 - q) dS &= rS \\ \Leftrightarrow q &= \frac{r - d}{u - d} = p \end{aligned}$$

gilt.

Daher kann der Wert einer Kaufoption als der Erwartungswert ihres diskontierten zukünftigen Wertes in einer risikoneutralen Welt interpretiert werden [CRR79, S. 235 f.]. Abbildung 1.1 zeigt die verschiedenen Werte einer Kaufoption, wenn nur noch eine Periode bis zum Fälligkeitszeitpunkt übrig ist.

Wenn noch zwei Perioden bis zum Fälligkeitszeitpunkt übrig sind, ist der momentane Kaufoptionspreis gleich

$$O = [p^2 O_{uu} + 2p(1 - p) O_{ud} + (1 - p)^2 O_{dd}]/r^2, \quad (1.26)$$

wobei die Werte O_{uu} , O_{ud} und O_{dd} wie in Abbildung 1.2 bestimmt werden.

Wenn noch n Perioden übrig sind, wird diese Gleichung zu

$$O = \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \right] / r^n. \quad (1.27)$$

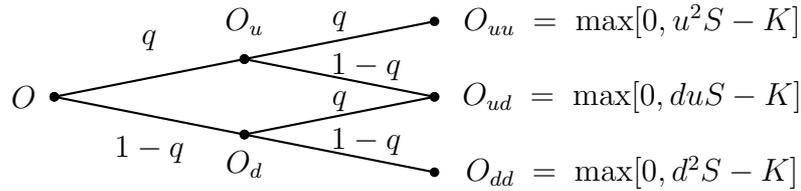


Abbildung 1.2.: Werte einer Kaufoption zwei Perioden vor dem Fälligkeitszeitpunkt (vgl. [CRR79, S. 236])

Es sei a die kleinste nichtnegative ganze Zahl, für die $a > \frac{\ln(K/Sd^n)}{\ln(u/d)}$ gilt (vgl. [CRR79], S. 238). Dann beschreibt a die kleinste Anzahl an Aufwärtsbewegungen, die nötig ist, um einen Kaufoptionspreis zum Fälligkeitszeitpunkt größer gleich 0 zu erreichen. Daher führen alle Terme der Summe in Gleichung (1.27), für die $n < a$ ist, zu einem Kaufoptionspreis von $O = 0$. Aus diesem Grund können wir Gleichung (1.27) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 O &= \left[\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - K] \right] / r^n & (1.28) \\
 &= S \left[\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) \right] \\
 &\quad - Kr^{-n} \left[\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \right].
 \end{aligned}$$

Weil der zweite Term in Klammern die komplementäre Binomialverteilung $\Phi[a; n, p]$ ist, können wir (1.28) weiter zu

$$O = \begin{cases} S\Phi[a; n, p'] - Kr^{-n}\Phi[a; n, p], & \text{falls } a \leq n, \\ 0, & \text{falls } a > n \end{cases}$$

umformen, wobei

$$p := \frac{r-d}{u-d}, \quad p' := \frac{u}{r} p \quad \text{gilt.}$$

1.4.1.2. Die Kellystrategie für Investitionen in Optionen

Im letzten Unterabschnitt wurde beschrieben, wie der Wert einer Kaufoption im Binomialmodell berechnet wird. Davor wurde bereits in einigen Beispielen demonstriert, wie ein Investor durch Anwendung der Kellystrategie die langfristige Wachstumsrate seines Kapitals maximieren kann. Dieser Abschnitt dient dazu, die Kellystrategie für Investitionen in Kaufoptionen zu bestimmen.

Damit die Rechnungen möglichst übersichtlich bleiben, werden nur zwei Investitionsmöglichkeiten betrachtet. Der Investor kann zwischen einer risikolosen Anlage mit Zinssatz r , einer Kaufoption mit zufälligem Ertrag α und Kombinationen dieser beiden Investitionen

1.4. Beispiele zur Berechnung der Kellystrategie

wählen. Da nur zwei Investitionsmöglichkeiten bestehen, ist es sinnvoll, anzunehmen, dass der erwartete Ertrag der Kaufoption größer ist als der risikolose Zinssatz, $E[\alpha] > r$, da der Investor ansonsten keinerlei Anreiz hätte, in die Option zu investieren.

Angenommen, wir besitzen einen festen Kapitalbetrag, den wir zwischen einer risikolosen Anlage und einer Option aufteilen können. Welcher Anteil des Kapitals sollte dann in die Option investiert werden, damit wir die langfristige Kapitalwachstumsrate maximieren? Da die Kellystrategie myopisch ist (Optionspreise besitzen die Markoveigenschaft (vgl. Seite 16), da die zugrunde liegenden Aktienkurse diese ebenfalls besitzen), wird die gesamte Kapitalwachstumsrate maximiert, wenn wir den erwarteten Logarithmus der angenommenen Erträge in jeder Periode t maximieren.

Wir benutzen das Binomialmodell aus Unterabschnitt 1.4.1.1 als Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen. Für eine beliebige Periode t lassen sich die Erträge einer Option, α_t , durch

$$\alpha_t = \begin{cases} \frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q \\ \frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1-q) \end{cases}$$

berechnen, wobei r_t den deterministischen risikolosen Zinssatz in Periode t beschreibt. Es wird angenommen, dass sich die Wahrscheinlichkeit q sowie der risikolose Zinssatz im Laufe der Zeit nicht verändern. Daher trifft der Investor in jeder Periode t dieselbe Investitionsentscheidung. Da wir den Fall untersuchen, in dem der Investor nur eine einzige Option zur Auswahl hat, besitzt das zugehörige Optimierungsproblem zwei Entscheidungsvariablen a_1 und a_2 , wobei a_1 den Anteil des Kapitals bezeichnet, der in die Option investiert wird und a_2 den Anteil, der in der risikolosen Alternative angelegt wird. Es gelte $a_1 + a_2 = 1$. Für die risikolose Alternative erhalte der Investor in jeder Periode den Ertrag $1 + r_t$. Dann ist der Gesamtertrag in Periode t , $R_t(a_1)$, gleich

$$R_t(a_1) = \begin{cases} \left(\frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} \right) a_1 + (1+r_t)(1-a_1) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q, \\ \left(\frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} \right) a_1 + (1+r_t)(1-a_1) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-q. \end{cases}$$

Dies führt zur Zielfunktion

$$G(a_1) = E[\log R_t(a_1)] = q \left\{ \log \left(\left(\frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right) a_1 + 1 + r_t \right) \right\} \\ + (1-q) \left\{ \log \left(\left(\frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right) a_1 + 1 + r_t \right) \right\}.$$

Wir wollen die Zielfunktion bezüglich a_1 maximieren. Hierzu bilden wir die Ableitung $G'(a_1)$ und setzen diese gleich null.

$$G'(a_1) = \frac{q \left(\frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right)}{\left(\frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right) a_1 + 1 + r_t} + \frac{(1-q) \left(\frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right)}{\left(\frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} - 1 - r_t \right) a_1 + 1 + r_t} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.29)$$

Wir definieren

$$r_u := \frac{u\Delta S + (1 + r_t)B}{\Delta S + B} \quad \text{und} \quad r_d := \frac{d\Delta S + (1 + r_t)B}{\Delta S + B}.$$

Dann ist Gleichung (1.29) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \frac{q(r_u - 1 - r_t)}{(r_u - 1 - r_t)a_1^* + 1 + r_t} = \frac{-(1 - q)(r_d - 1 - r_t)}{(r_d - 1 - r_t)a_1^* + 1 + r_t} \\ \Leftrightarrow \quad a_1^* &= \frac{-q(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t) - (1 - q)(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)}{(r_d - 1 - r_t)(r_u - 1 - r_t)}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Wegen der Bedingung der *Arbitragefreiheit* gilt, dass $(r_u - 1) > r_t > (r_d - 1)$ bzw. $r_u > r_t + 1 > r_d$. Außerdem ist $r_t \geq 0$, so dass $(r_u - 1 - r_t) > 0$ und $(r_d - 1 - r_t) < 0$ gilt. Daher ist der erste Term des Zählers in Gleichung (1.30) negativ und der zweite ist positiv. Unter den gegebenen Annahmen ist der Nenner < 0 , so dass der optimale Anteil a_1^* positiv ist, wenn der Betrag des ersten Terms im Zähler größer ist als der Betrag des zweiten Terms darin. Dann muss also gelten

$$\begin{aligned} |q(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t)| &> |(1 - q)(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)| \\ |q(r_u - 1 - r_t)| &> (1 - q)|(r_d - 1 - r_t)| \\ |q(r_u - 1 - r_t)| &> |(r_d - 1 - r_t)| - q|(r_d - 1 - r_t)| \\ q(r_u - 1 - r_t) + q|(r_d - 1 - r_t)| &> |(r_d - 1 - r_t)| \\ q &> \frac{|(r_d - 1 - r_t)|}{(r_u - 1 - r_t) + |(r_d - 1 - r_t)|} \\ q &> \frac{-(r_d - 1 - r_t)}{(r_u - 1 - r_t) - (r_d - 1 - r_t)} \\ q &> \frac{-r_d + 1 + r_t}{r_u - r_d} =: p^* \end{aligned} \quad (1.31)$$

Hierbei ist p^* genau der Wert, den wir in Gleichung (1.25) als Gleichgewichtswert von q ermittelt haben. Hieraus lässt sich folgern: Falls die tatsächlich auftretenden Optionspreise immer gleich ihren berechneten Preisen im Gleichgewicht sind, darf der Investor, der seine langfristige Kapitalwachstumsrate maximieren möchte, kein Kapital in Optionen anlegen. Wenn Optionen angemessen bewertet sind, ist der Erwartungswert ihrer Erträge (vgl. Definition 1.34) gleich dem risikolosen Zinssatz, daher sollte man das gesamte Vermögen in die risikolose Alternative investieren, um die langfristige Wachstumsrate zu maximieren. Als nächstes möchten wir die langfristige Wachstumsrate $G(a_1^*)$ berechnen, die sich für den optimalen Anteil a_1^* ergibt. Es gilt:

$$E[\log R_t(a_1^*)] = q(\log((r_u - 1 - r_t)a_1^* + 1 + r_t)) + (1 - q)(\log((r_d - 1 - r_t)a_1^* + 1 + r_t)). \quad (1.32)$$

Einsetzen von a_1^* ergibt

$$q \left(\log \left[\frac{-q(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_d - 1 - r_t} - (1 - q)(1 + r_t) + 1 + r_t \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - q) \left(\log \left[-q(1 + r_t) - \frac{(1 - q)(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_u - 1 - r_t} + 1 + r_t \right] \right) \\
 & = q \left(\log \left[\frac{-q(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_d - 1 - r_t} + q(1 + r_t) \right] \right) \\
 & + (1 - q) \left(\log \left[\frac{(1 - q)(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t) - (1 - q)(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_u - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & = q \left(\log \left[\frac{-q(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t) + q(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_d - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & + (1 - q) \left(\log \left[\frac{(1 - q)(r_u - 1 - r_t)(1 + r_t) - (1 - q)(r_d - 1 - r_t)(1 + r_t)}{r_u - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & = q \left(\log \left[\frac{q(1 + r_t)(r_d - 1 - r_t - r_u + 1 + r_t)}{r_d - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & + (1 - q) \left(\log \left[\frac{(1 - q)(1 + r_t)(r_u - 1 - r_t - (r_d - 1 - r_t))}{r_u - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & = q \left(\log \left[\frac{q(1 + r_t)(r_d - r_u)}{r_d - 1 - r_t} \right] \right) + (1 - q) \left(\log \left[\frac{(1 - q)(1 + r_t)(r_u - r_d)}{r_u - 1 - r_t} \right] \right) \\
 & = q \left(\log \left[q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} \right] \right) + (1 - q) \left(\log \left[(1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Aus dem letzten Ausdruck sieht man direkt, dass die Terme in den Logarithmen beide positiv sind, solange $q \in (0, 1)$ und $p^* \in (0, 1)$ gilt.

Um herauszufinden, ob die maximale langfristige Wachstumsrate positiv ist, zeigen wir, dass $E[\log R_t(a_t^*)]$ eine konvexe Funktion ist und untersuchen anschließend, unter welchen Bedingungen das Minimum dieser Funktion positiv ist.

Eine Funktion $f(x)$ ist streng konvex, wenn ihre zweite Ableitung $f''(x) > 0 \quad \forall x$ ist. Um dies für den Fall der betrachteten Zielfunktion zu zeigen, müssen wir die ersten beiden Ableitungen berechnen. Wir betrachten die Funktion

$$f(q) = q \left(\log \left[q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} \right] \right) + (1 - q) \left(\log \left[(1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*} \right] \right).$$

Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
 f'(q) & = \log \left[q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} \right] - \log \left[(1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*} \right], \\
 f''(q) & = \frac{1}{q} + \frac{1}{1 - q} > 0 \quad \forall q \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Solange $q \in (0, 1)$ gilt, ist die Funktion $f(q)$ streng konvex.

Um das Minimum von $f(q)$ zu berechnen, setzen wir die erste Ableitung $f'(q)$ gleich null.

$$\begin{aligned}
 f'(q) & = \log \left[q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} \right] - \log \left[(1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow & \quad \log \left[q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} \right] = \log \left[(1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*} \right] \\
 \Leftrightarrow & \quad q(1 + r_t) \frac{1}{p^*} = (1 - q)(1 + r_t) \frac{1}{1 - p^*}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{q}{1-q} = \frac{p^*}{1-p^*} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{q}-1} = \frac{p^*}{1-p^*} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1-p^*}{p^*} + 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{p^*} \\
 &\Leftrightarrow q = p^*
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $f(q)$ ein eindeutiges Minimum bei $q = p^*$ besitzt. Daher berechnen wir als nächstes den Funktionswert in diesem Punkt.

$$\begin{aligned}
 f(p^*) &= p^* \left(\log \left[p^*(1+r_t) \frac{1}{p^*} \right] \right) + (1-p^*) \left(\log \left[(1-p^*)(1+r_t) \frac{1}{1-p^*} \right] \right) \\
 &= p^* \log(1+r_t) + (1-p^*) \log(1+r_t) \\
 &= \log(1+r_t) > 0, \quad \text{falls } r_t > 0.
 \end{aligned}$$

Somit können wir schließen, dass es notwendig und hinreichend für Strategie a_1^* (s. Definitionen 1.33 und 2.4) ist, dass der risikolose Zinssatz positiv ist, um eine positive Wachstumsrate $G(a_1^*)$ zu erzeugen.

Damit es vorteilhaft für einen Investor ist, in eine risikobehaftete Option zu investieren, muss deren erwarteter Ertrag größer als der risikolose Zinssatz sein. Der erwartete Ertrag $E[\alpha_t]$ einer Option zum Zeitpunkt t beträgt

$$\begin{aligned}
 E[\alpha_t] &= q \left(\frac{u\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} \right) + (1-q) \left(\frac{d\Delta S + (1+r_t)B}{\Delta S + B} \right) \\
 &= qr_u + r_d - qr_d \\
 &= q(r_u - r_d) + r_d \\
 &> 1 + r_t \\
 \Leftrightarrow q(r_u - r_d) &> 1 + r_t - r_d \\
 \Leftrightarrow q &> \frac{1 + r_t - r_d}{r_u - r_d} = p^* > 0
 \end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit q größer als die Gleichgewichtswahrscheinlichkeit p^* sein muss, damit es wachstumsoptimal ist, in Optionen zu investieren. Da *Arbitragefreiheit* angenommen wird, gilt

$$\begin{aligned}
 &r_u - r_d > r_t + 1 - r_d \\
 \Leftrightarrow \underbrace{r_u - r_d}_{>0} &\geq \underbrace{\delta + r_t + 1 - r_d}_{>0}, \quad \delta > 0.
 \end{aligned}$$

Wegen der letzten Ungleichung muss $q \in (0, 1]$ gelten. Je geringer der Abstand zwischen $1 + r_t$ und r_u ist, desto größer muss q sein.

Alle bisherigen Rechnungen führen auf das folgende Ergebnis: Wenn die tatsächlichen Optionspreise gleich ihren berechneten Preisen im Gleichgewicht sind, bieten Optionen

keine vorteilhafte Investitionsmöglichkeit. Wenn ein Investor trotzdem sein Kapital durch die Investition in Optionen vergrößern möchte, muss er eine andere Investitionsstrategie wählen. Hierfür kann die folgende Idee nützlich sein (vgl. [CRR79, S. 241 ff.]):

Aus den bisherigen Überlegungen wissen wir, dass wir in der Lage sind, eine vorteilhafte Strategie zu bestimmen, wenn der aktuelle Marktpreis M vom berechneten momentanen Kaufoptionswert $\Delta S + B = O$ abweicht.

Falls die Kaufoption zu hoch bewertet ist ($M > O$), existiert eine Konstante $a > 1$, für die $M = aO$ gilt. Wir können a Kaufoptionen verkaufen und die Gewinne, nämlich $aO = a(\Delta S + B)$, in ein Absicherungsportfolio investieren. Wenn wir dieses Absicherungsportfolio jede Periode gemäß den Anteilen aus (1.24) anpassen, können wir die Position spätestens zum Fälligkeitszeitpunkt auflösen.

Falls die Kaufoption andererseits zu niedrig bewertet ist ($M < O$), gibt es eine Konstante $b > 1$, für die $bM = O$ gilt. Wir können b Kaufoptionen kaufen und das zugehörige Absicherungsportfolio verkaufen. Auch hier müssen wir das Portfolio in jedem Zeitschritt anpassen.

Daraus ergibt sich die folgende Investitionsstrategie:

Wann immer es möglich ist, passen wir unsere Position an, indem wir zu hoch bewertete Optionen verkaufen oder zu niedrig bewertete Optionen kaufen, da dieses Vorgehen unseren Gewinn maximiert. Wir können außerdem einen risikolosen Gewinn erwirtschaften, indem wir zu hoch bewertete Kaufoptionen verkaufen oder zu niedrig bewertete Kaufoptionen kaufen, den hieraus erwirtschafteten Ertrag in festverzinsliche Wertpapiere investieren und das Absicherungsportfolio zu jedem Zeitpunkt gemäß (1.24) anpassen. Diese Möglichkeit wird hier jedoch nicht weiter betrachtet, da sie die langfristige Kapitalwachstumsrate nicht maximiert.

Sei nun $M < \Delta S + B$. Der Fall $M > \Delta S + B$ kann analog mit umgekehrten Ungleichheitszeichen behandelt werden. Die Wachstumsraten r_u und r_d verändern sich dann zu

$$\begin{aligned} r_u^M &= \frac{u\Delta S + (1 + r_t)B}{M}, & r_d^M &= \frac{d\Delta S + (1 + r_t)B}{M} \\ \Rightarrow r_u &< r_u^M, & r_d &< r_d^M. \end{aligned}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit q^M muss dann der Bedingung

$$q^M > \frac{r_t + 1 - r_d^M}{r_u^M - r_d^M}$$

genügen. Falls angenommen wird, dass M und $\Delta S + B$ jeweils größer als null sind (was sinnvoll ist, da ansonsten die Kaufoption wertlos wäre), gilt wegen $M < \Delta S + B$

$$\begin{aligned} & M((u\Delta S + (1 + r_t)B) - (d\Delta S + (1 + r_t)B)) \\ & < (\Delta S + B)((u\Delta S + (1 + r_t)B) - (d\Delta S + (1 + r_t)B)) \quad \text{und daher} \\ \frac{u\Delta S + (1 + r_t)B}{\Delta S + B} - \frac{d\Delta S + (1 + r_t)B}{\Delta S + B} & < \frac{u\Delta S + (1 + r_t)B}{M} - \frac{d\Delta S + (1 + r_t)B}{M} \\ r_u - r_d & < r_u^M - r_d^M. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass $q^M \leq q$ gilt. Unter den beschriebenen Bedingungen ergeben sich vorteilhafte Situationen für die Investition in Kaufoptionen, wenn der Marktpreis

M kleiner ist als der momentane Optionspreis im Gleichgewicht $\Delta S + B$. Diese können sogar auftreten, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs der zugrundeliegenden Aktie ansteigt (q^M) geringer ist als die Gleichgewichtswahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs steigt (q).

Wir wollen nun die Kellystrategie für die Situation $M < \Delta S + B$ berechnen. Da sich lediglich die Erträge der Kaufoption r_u und r_d verändert haben, können wir Gleichung (1.30) fast ohne Änderungen benutzen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1^{*M} &= \frac{-q(r_u^M - 1 - r_t)(1 + r_t) - (1 - q)(r_d^M - 1 - r_t)(1 + r_t)}{(r_d^M - 1 - r_t)(r_u^M - 1 - r_t)} \\ &= -q \frac{1 + r_t}{r_d^M - 1 - r_t} - (1 - q) \frac{1 + r_t}{r_u^M - 1 - r_t}. \end{aligned}$$

Jetzt können wir a_1^{*M} mit a_1^* vergleichen. Hierbei besteht der einfachste Weg darin, beide Terme einzeln zu vergleichen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -q \frac{1 + r_t}{r_d^M - 1 - r_t} &> -q \frac{1 + r_t}{r_d - 1 - r_t} \quad \text{und} \\ (1 - q) \frac{1 + r_t}{r_u^M - 1 - r_t} &< (1 - q) \frac{1 + r_t}{r_u - 1 - r_t}. \end{aligned}$$

Hieraus können wir folgern, dass $a_1^{*M} > a_1^*$. Dies ist jedoch nicht allzu überraschend, weil wir nun eine vorteilhafte Situation betrachten. Hierfür ist die Annahme naheliegend, dass ein größerer Teil des zur Verfügung stehenden Kapitals investiert werden sollte.

Das gleiche Ergebnis tritt ein, wenn wir über zusätzliche Informationen verfügen, die die anderen Marktteilnehmer nicht kennen, und wir daher die Wahrscheinlichkeit q höher einschätzen als der übrige Markt. Dann können wir unsere Schätzung der Wahrscheinlichkeit in Gleichung (1.30) einsetzen und den entsprechenden optimalen Anteil a_1^* berechnen.

Beziehung zu unabhängigen Bernoulliversuchen

In [Tho71] wird angemerkt, dass die verschiedenen Anteile des Investitionskapitals auf einfache Weise berechnet werden können, wenn unabhängige Bernoulliversuche angenommen werden. Die Erfolgswahrscheinlichkeit wird mit $0 < p < 1$ bezeichnet und es gilt $1 - p = q$. Dann lautet die eindeutige optimale Strategie (vgl. Definition 2.4), in jedem Versuch n den Anteil $x^* = p - q$ einzusetzen, wenn $p > 1/2$ ist, und ansonsten nichts einzusetzen.

Der binomiale Prozess der Optionspreisbestimmung kann als Folge von unabhängigen Bernoulliversuchen aufgefasst werden. Um die obige Formel anzuwenden, müssen jedoch zunächst einige Änderungen durchgeführt werden. Eine Änderung besteht in der Auszahlung von Zinsen. Im Modell der Bernoulliversuche werden die Einsätze nicht verzinst. Im Binomialmodell zur Optionspreisbestimmung wächst das gesamte Investitionskapital in jeder Periode um den Faktor $(1 + r_t)$. Der Anteil, der in Optionen investiert wird, steigt oder fällt entweder um den Faktor r_u oder um r_d , abhängig vom Verhalten des Basiswertes. Um die Beziehung zwischen den beiden Modellen zu zeigen, wird im Folgenden angenommen, dass $r_t = 0$ ist. Dann wird ein beliebiger Investitionsbetrag C_0 in der nächsten Periode entweder zu $C_0(1 + (r_u - 1)x)$ oder zu $C_0(1 + (r_d - 1)x)$, abhängig von der zugrundeliegenden Aktie. Auch hier bezeichnet x den Anteil, der in die risikobehaftete

1.4. Beispiele zur Berechnung der Kellystrategie

Alternative investiert wird. Dadurch ändert sich der Erwartungswert der Wachstumsrate (vgl. Definition 1.34) zu

$$G(x) = p \log(1 + (r_u - 1)x) + (1 - p) \log(1 + (r_d - 1)x), \quad r_u > 0, \quad r_d > 0.$$

Wir berechnen den optimalen Anteil x^* , indem wir die Ableitung bilden. Dies führt zu

$$x^* = -\frac{p}{r_d - 1} - \frac{1 - p}{r_u - 1}. \quad (1.33)$$

Dieser Ausdruck ähnelt dem bereits ermittelten optimalen Anteil im Binomialmodell a_1^* , denn:

$$a_1^* = -q \frac{1 + r_t}{r_d - 1 - r_t} - (1 - q) \frac{1 + r_t}{r_u - 1 - r_t}.$$

Hieraus lässt sich direkt erkennen, dass für $p = q$ und $r_t = 0$ gilt, dass $x^* = a_1^*$ ist. Falls also die zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten beider Modelle gleich sind und keine Verzinsung angenommen wird, erhalten wir dieselben optimalen Investitionsanteile für das Binomialmodell und für unabhängige Bernoulliversuche.

Kapitel 2.

Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Nachdem im letzten Kapitel die Kellystrategie zusammen mit ihrer historischen Entwicklung und einigen Beispielen beschrieben wurde, dient dieses Kapitel dazu, Verallgemeinerungen der Kellystrategie vorzustellen. Alle betrachteten Personen verfolgen das Ziel, die langfristige exponentielle Wachstumsrate ihres Kapitals zu maximieren. In Abschnitt 2.1 wird untersucht, wie ein Spieler seine Einsätze verteilen sollte, der auf die Zeichen einer diskreten stochastischen Quelle wetten möchte, deren Ausgaben durch eine Markovkette erster Ordnung (vgl. Seite 16) dargestellt werden können. Zusätzlich werden diesem Spieler die Ausgaben der Quelle über einen gestörten Kanal zugeschickt. In Abschnitt 2.2 werden statt eines Kanals zwei Kanäle in Reihenschaltung untersucht. Es wird auch die Frage behandelt, wie sich die Strategie (vgl. Definition 1.33) eines Spielers ändert, wenn er die Ausgangszeichen des ersten Kanals kennt. Abschnitt 2.3 enthält ein umfassendes Modell zur Bestimmung der Kellystrategie für Alphabete (vgl. Definition 1.1) mit n Zeichen. Hierbei wird angenommen, dass die Sendewahrscheinlichkeit eines Zeichens von den bereits gesendeten Zeichen abhängt und dass sich die Quoten im Laufe der Zeit ändern können. In Abschnitt 2.4 wird berechnet, wie groß die langfristige Wachstumsrate des Kapitals ist, wenn die Kellystrategie angewendet wird. Danach wird in Abschnitt 2.5 die Situation des Buchmachers und dessen erwarteter Gewinn untersucht. Als Buchmacher bezeichnet man Personen oder Unternehmen, die Wetten anbieten.

Für die Maximierung der langfristigen Wachstumsrate ist es immer nötig, Aussagen über das asymptotische Verhalten der Quelle zu treffen. In Kapitel 1 wurde dies meist mithilfe des empirischen Gesetzes der großen Zahlen (vgl. Seite 20) erreicht. Dieses kann jedoch nur Anwendung finden, wenn die Quelle Zeichen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ausgibt. In diesem Kapitel wollen wir fast ausschließlich Quellen betrachten, deren Zeichenausgabe abhängig von bereits ausgegebenen Zeichen ist. Diese Quellen können mit bedingten Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden, für die das empirische Gesetz der großen Zahlen nicht gilt. Ein Ausweg besteht jedoch in dem in Abschnitt 1.1 vorgestellten Modell, mit dessen Hilfe wir Aussagen über das langfristige Verhalten solcher Quellen treffen können, solange diese eine endliche Evolutionsdimension besitzen (vgl. Seite 17).

2.1. Abhängige Eingabezeichen

Als Ursprung der Kellystrategie können die Untersuchungen von John L. Kelly angesehen werden (vgl. [Kel56] und S. 19 - 25). Dieser hat untersucht, wie ein Spieler seine Einsätze verteilen sollte, der auf eine diskrete stochastische Quelle (vgl. Definition 1.5) wettet, die

Zeichen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ausgibt. Der betrachtete Spieler erhält zusätzliche Informationen über die Quelle, da ihm die Ausgaben der Quelle über einen gestörten Kanal übermittelt werden. Ausgehend von dieser Situation ist es naheliegend, zu fragen, inwiefern sich die Strategie des Spielers ändert, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Zeichen der Quelle nicht mehr unabhängig sind, die Übertragung der Zeichen durch den Kanal jedoch weiterhin besteht. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Daher nehmen wir an, dass die ausgegebenen Zeichen die Markoveigenschaft (s. Seite 16) besitzen. Wir betrachten eine stochastische Quelle (X_t) , die Zeichen aus der Zeichenmenge $s \in S$ ausgibt, und eine weitere Quelle (Y_t) , die die empfangenen Zeichen $r \in R$ am Ende des Kanals beschreibt. Die Abhängigkeit der Zeichen der Quelle (X_t) wird durch die Wahrscheinlichkeiten $p(s|u) := \mathbb{P}[X_t = s | X_{t-1} = u]$, $s \in S$, $u \in S$, beschrieben. Es sei $p(s, r)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Zeichen s in den Kanal eingegeben wurde und Zeichen r empfangen wird. Außerdem gelte für die Quoten $\alpha_s = 1/p(s|u)$, da angenommen wird, dass der Buchmacher die Verteilung der Zeichen $s \in S$ kennt und seine Quoten entsprechend wählt. Wir bezeichnen mit $A_{rs} := \{X_t = s, Y_t = r\}$, $t = 1, 2, \dots$, das Ereignis, dass die Quelle (X_t) das Zeichen $s \in S$ ausgegeben hat und das Zeichen $r \in R$ übermittelt wurde. Zudem nehmen wir an, dass der Spieler sein gesamtes Kapital einsetzt, so dass $\sum_{s \in S} a(s|r) = 1$ gilt. Dann beschreibt die folgende Gleichung die Wachstumsrate des Kapitals.

$$\begin{aligned} G(a) &= \mathbb{E} \left[\log \frac{C_t(a)}{C_0} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{rs} \mathbf{1}_{A_{rs}}(X_t, Y_t) \log \alpha_s a(s|r) \right] \\ &= \sum_{rs} p(s, r) \log a(s|r) - \sum_{rs} p(s, r) \log p(s|u) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}_{A_{rs}}(X_t, Y_t)$ die Indikatorfunktion von Ereignis A_{rs} , deren Definition [Gra88, S. 7] entnommen ist.

Definition 2.1 (Indikatorfunktion)

Sei $F \in \mathcal{F}$. Dann ist die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_F$ von F definiert als

$$\mathbf{1}_F(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in F, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

An dieser Stelle nehmen wir an, dass die in den Kanal eingegebenen Zeichen unabhängig voneinander gestört werden. Dies ist der Fall, wenn das Verhalten des Kanals durch die Wahrscheinlichkeiten $p(r|s)$ für Eingabezeichen $s \in S$ und Ausgabezeichen $r \in R$ beschrieben werden kann. Wenn das Zeichen s in den Kanal eingegeben wurde, wandelt der Kanal dieses mit Wahrscheinlichkeit $p(r|s)$ in das Zeichen r um. Da die Eingabezeichen des Kanals die Zeichen sind, die die Quelle (X_t) ausgibt, besitzen sie die Wahrscheinlichkeiten $p(s|u)$. Insgesamt führt dies zum folgenden Ausdruck

$$G(a) = \sum_{rs} p(r|s)p(s|u) \log a(s|r) - \sum_{rs} p(s, r) \log p(s|u),$$

wenn u das zuletzt von (X_t) ausgegebene Zeichen ist. Wir wollen $G(a)$ bezüglich $a(s|r)$ maximieren, daher brauchen wir nur den ersten Term der letzten Gleichung betrachten. Um die optimalen Anteile zu finden, benötigen wir den folgenden Satz, dessen Beweis auf der logarithmischen Summenungleichung (siehe [HK02], S. 25 f.) basiert:

Satz 2.2 (Logarithmische Summenungleichung)

Für beliebige nichtnegative Zahlen X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n werden $X := \sum_{i=1}^n X_i < \infty$ und $Y := \sum_{i=1}^n Y_i < \infty$ definiert. Dann gilt, dass

$$\sum_{i=1}^n X_i \log \frac{X_i}{Y_i} \geq X \log \frac{X}{Y}. \quad (2.1)$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die X_i positiv sind. Auch die Y_i seien positiv. Weiterhin nehmen wir an, dass $X = Y$, da die Ungleichung gültig bleibt, wenn jedes der Y_i mit einer Konstante multipliziert wird. Daher reicht es aus, die Ungleichung für $X = Y$ zu zeigen. Wir müssen also zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^n X_i \log \frac{X_i}{Y_i} \geq 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{X_i}{Y_i} &= - \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{Y_i}{X_i} \\ &\geq - \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{Y_i}{X_i} - 1 \right) \log e \\ &= \log e \left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) \\ &= \log e (X - Y) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung wegen $\log x \leq (x - 1) \log e$ folgt. Damit ist die logarithmische Summenungleichung bewiesen. Falls X und Y ungleich sind, dann gilt Ungleichung (2.1) mit Gleichheit genau dann, wenn (X_i) und (Y_i) für jedes i proportional sind. ■

Jetzt sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.3 (Siehe [Kel56], S. 919 f.)

Der maximale Wert bezüglich der Y_i einer Größe der Form $Z = \sum_i X_i \log Y_i$ unter der Nebenbedingung, dass $\sum_i Y_i = Y$ gilt, wird erreicht, wenn für jedes i

$$Y_i = \frac{Y}{X} X_i \quad (2.2)$$

gesetzt wird, wobei $X = \sum_i X_i$ gilt.

Beweis. Um die behauptete Optimalität zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^n X_i \log Y_i \leq \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{Y}{X} X_i$ für jedes i gilt. Dies ergibt sich auf direktem Weg. Wir beginnen mit der logarithmischen Summenungleichung (2.1):

$$\sum_{i=1}^n X_i \log \frac{X_i}{Y_i} \geq - \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{Y}{X} = X \log \frac{X}{Y}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \left(\log \frac{X_i}{Y_i} + \log \frac{Y}{X} \right) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \log \left(\frac{Y X_i}{X Y_i} \right) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{Y}{X} X_i - \sum_{i=1}^n X_i \log Y_i \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \log Y_i \leq \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{Y}{X} X_i
 \end{aligned}$$

■

In der von uns betrachteten Situation gilt $Y = \sum_s a(s|r) = 1$ aufgrund der getroffenen Annahmen. Außerdem ist

$$X = \sum_{r,s} p(r|s)p(s|u) = \sum_s p(s|u) \underbrace{\left(\sum_r p(r|s) \right)}_{=1} = \sum_s p(s|u) = 1.$$

Einsetzen in Gleichung (2.2) ergibt

$$a^*(s|r) = p(r|s)p(s|u) \quad \forall r, s, \text{ falls } u \text{ das zuletzt von } (X_t) \text{ ausgegebene Zeichen ist.}$$

Daher ist es optimal für den Spieler, falls das letzte Zeichen $u \in S$ ist, sein Kapital gemäß den Wahrscheinlichkeiten $p(r|s)p(s|u)$ für alle Zeichen $r \in R$ und $s \in S$ aufzuteilen.

2.2. Reihenschaltung

In diesem Abschnitt wollen wir herausfinden, wie sich unser Kapital entwickelt, wenn wir die übertragenen Zeichen nicht direkt empfangen, sondern über zwei Kanäle, die in Reihe geschaltet sind. Daher betrachten wir Zeichen $s \in S$, die in den ersten Kanal eingegeben werden, Zeichen $r \in R$, die den ersten Kanal verlassen und in den zweiten Kanal eingegeben werden, und Zeichen $u \in U$, die nach Verlassen des zweiten Kanals empfangen werden. Die Zeichen $s \in S$ werden mithilfe der Quelle (X_t) beschrieben, die Zeichen $r \in R$ durch (Y_t) und für die Zeichen $u \in U$ wählen wir die Quelle (Z_t) . Eine Reihenschaltung mit den entsprechenden Zeichen wird in Abbildung 2.1 illustriert. Wir befinden uns also hinter dem zweiten Kanal, kennen daher die Zeichen $u \in U$ und möchten anhand dieser Zeichen mithilfe der Annahmen über die vorliegenden Wahrscheinlichkeiten unsere Wetteinsätze auf die Zeichen $s \in S$ optimal verteilen.

Wir nehmen an, dass die Zeichen unabhängig voneinander übertragen werden und dass beide Kanäle gestört sind. Für Zeichen $s \in S$ und $u \in U$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit folgendermaßen definiert (vgl. Definition 1.12):

$$p(u|s) := \sum_{r \in R} p(u|r)p(r|s).$$

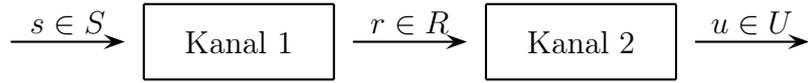


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung einer Reihenschaltung

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Zeichen s in den ersten Kanal eingegeben wird, das Zeichen r den ersten Kanal verlässt und in den zweiten eingegeben wird und das Zeichen u den zweiten Kanal verlässt, ist durch

$$p(sru) = p(s)p(r|s)p(u|r), \quad s \in S, r \in R, u \in U$$

gegeben. Da es für unser Problem irrelevant ist, welches Zeichen $r \in R$ zwischen dem ersten und dem zweiten Kanal auftritt, definieren wir das Ereignis $A_{us} := \{X_t = s, Z_t = u\}$, dass wir Zeichen $u \in U$ empfangen und Zeichen $s \in S$ ursprünglich in den ersten Kanal eingegeben wurde, mit einem beliebigen Zeichen $r \in R$ dazwischen. In dieser Situation kann die Entwicklung des eingesetzten Kapitals auf folgende Weise beschrieben werden:

$$\begin{aligned} C_t(a) &= \prod_{s,u} (a(s|u)\alpha_s)^{\mathbf{1}_{A_{us}}(X_t, Z_t)} C_0 \\ \Rightarrow \log \frac{C_t(a)}{C_0} &= \sum_{s,u} (\mathbf{1}_{A_{us}}(X_t, Z_t)) \log[\alpha_s a(s|u)], \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1}_{A_{us}}(X_t, Z_t)$ die Indikatorfunktion für das Ereignis A_{us} bezeichnet (vgl. Definition 2.1). Mit diesen Annahmen erhalten wir die folgende langfristige Wachstumsrate:

$$\begin{aligned} G(a) &= \mathbb{E} \left[\log \frac{C_t(a)}{C_0} \right] = \sum_{s,u} \left(\sum_r p(sru) \right) \log[\alpha_s a(s|u)] \\ &= \sum_{s,u} \left(\sum_r p(s)p(r|s)p(u|r) \right) \log[\alpha_s a(s|u)] \\ &= \sum_{s,u} \left(p(s) \underbrace{\sum_r p(u|r)p(r|s)}_{=p(u|s)} \right) \log[\alpha_s a(s|u)] \\ &= \sum_{s,u} p(s)p(u|s) \log[\alpha_s a(s|u)] \\ &= \sum_{s,u} p(s, u) \log[\alpha_s a(s|u)]. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Wachstumsrate, die für einen einzigen Kanal gilt. Also ist es in diesem Fall optimal, wenn der Spieler sein Geld so auf die verschiedenen Zeichen verteilt, als gäbe es nur einen Kanal. Er ignoriert die Wahrscheinlichkeiten, die mit den Zeichen $r \in R$ zusammenhängen, und teilt sein Kapital gemäß den Wahrscheinlichkeiten $p(s|u)$ unter allen Zeichen $s \in S$ auf.

Wenn wir also die verschiedenen Zeichen mithilfe der drei diskreten stochastischen Quellen (X_t) , (Y_t) und (Z_t) beschreiben (s. Definition 1.5), erhalten wir das folgende Ergebnis für die maximale exponentielle Wachstumsrate einer Reihenschaltung:

$$\begin{aligned} G(a^*) &= \sum_{s,u} p(s,u) \log p(s|u) + H(X_t) \\ &= H(X_t) - H(X_t|Z_t) \\ &= I(X_t; Z_t), \end{aligned}$$

wobei $I(X_t; Z_t)$ die Transinformation zwischen X_t und Z_t (vgl. Definition 1.37), $H(X_t)$ die Entropie von (X_t) (s. Definition 1.36) und $H(X_t|Z_t)$ die bedingte Entropie von (X_t) (vgl. Definition 1.35) bezeichnet.

Für den Fall, dass es nur einen Kanal zur Übertragung gibt, dessen Eingangszeichen mit der Quelle X und Ausgangszeichen mit Y unabhängig von t beschrieben werden, fand John L. Kelly [Kel56] heraus, dass die optimale exponentielle Wachstumsrate durch $I(X; Y)$ bestimmt wird (vgl. S. 22).

Jetzt lässt sich leicht beweisen, dass ein Spieler, der Zeichen aus einer Reihenschaltung von Kanälen erhält, niemals mehr Geld erwerben kann als ein Spieler, der auf die Eingangszeichen eines einzelnen Kanals wettet. Dieses Ergebnis kann direkt aus der Datenverarbeitungsungleichung (vgl. [HQ95, S. 124]) abgeleitet werden, welche folgendes besagt: Für drei diskrete stochastische Quellen (X_t) , (Y_t) und (Z_t) , wie oben definiert, gilt, dass

$$I(X_t; Y_t) \geq I(X_t; Z_t).$$

Daher ist in der betrachteten Situation die maximale exponentielle Wachstumsrate, die erreicht wird, wenn ein Spieler auf die übertragenen Zeichen eines Kanals wettet, immer größer oder gleich der maximalen Wachstumsrate im Fall zweier Kanäle.

2.2.1. Die optimale Strategie nach Beobachtung bestimmter Zeichen

In diesem Unterabschnitt soll untersucht werden, ob und wie sich die optimale Strategie (vgl. Definition 2.4) eines Spielers ändert, wenn ihm erlaubt wird, einige der übertragenen Zeichen zu sehen. Dazu stellen wir uns folgende Situation vor: Ein Spieler beobachtet die Ausgangszeichen des zweiten Kanals einer Reihenschaltung und setzt sein Geld dementsprechend ein. Nachdem er seine optimalen Wettanteile gewählt hat (genau wie im letzten Abschnitt), darf er die Ausgangszeichen des ersten Kanals sehen und seine Einsätze verändern. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass der Spieler durch die Veränderung seiner Wettanteile imstande ist, seine (ursprünglich maximale) exponentielle Wachstumsrate zu erhöhen. Dieses Ergebnis entspricht der Intuition, weil der Spieler mit mehr Informationen in der Lage sein sollte, seinen Ertrag zu vergrößern.

Wir nehmen an, dass es nur zwei Zeichen gibt, die übertragen werden können („0“ und „1“). Im Fall zweier ungestörter Kanäle, in dem jedes eingegebene Zeichen unverändert aus jedem Kanal herauskommt, hat der Spieler keinen Vorteil davon, sich die Ausgabezeichen des ersten Kanals anzusehen, da der erste Kanal genau dieselben Zeichen ausgibt wie der zweite. Dasselbe gilt für einen total gestörten Kanal. In diesen Fällen erhält der Spieler keine zusätzliche Information. Daher untersuchen wir den Fall, in dem jedes Zeichen in

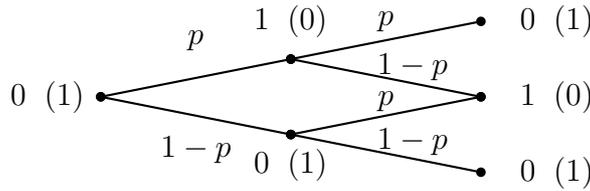


Abbildung 2.2.: Wahrscheinlichkeiten in einer Reihenschaltung, in der jedes Zeichen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ verändert wird

jedem Kanal mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ verändert wird. Diese Situation ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Die ersten Zahlen zeigen, was passiert, wenn eine 0 in den ersten Kanal eingegeben wird, und die Zahlen in Klammern sind die Ergebnisse, wenn eine 1 von der Quelle (vgl. Definition 1.5) ausgegeben wird.

Wenn wir Abbildung 2.2 betrachten, lassen sich folgende Punkte erkennen: Angenommen, der Spieler befindet sich hinter dem ersten Kanal. Dann sieht er sich folgender Situation gegenüber: Wenn er eine 1 empfängt, wurde diese mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ von der Quelle ausgegeben und eine 0 wurde mit Wahrscheinlichkeit p ausgegeben. Die Situation ist analog, wenn er eine 0 empfängt. Nun nehmen wir an, dass der Spieler sich hinter dem zweiten Kanal befindet. Wenn er jetzt eine 1 empfängt, ist die Wahrscheinlichkeit gleich $(1 - p)^2 + p^2$, dass eine 1 von der Quelle ausgegeben wurde, und die Wahrscheinlichkeit, dass ursprünglich eine 0 gesendet wurde, beträgt $2(1 - p)p$. Analoge Ergebnisse gelten, wenn der Spieler eine 0 empfängt.

An dieser Stelle wollen wir die langfristige Wachstumsrate des Vermögens des Spielers ermitteln. Zunächst betrachten wir die Rate für den Spieler, der hinter dem ersten Kanal steht. Wir bezeichnen mit q_i die Wahrscheinlichkeit, dass Zeichen $i = 0, 1$ gesendet wird. Mit p bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Zeichen in einem beliebigen Kanal verändert wird. Außerdem nennen wir den Anteil des verfügbaren Kapitals, der auf das i -te Zeichen gesetzt wird, nachdem das j -te Zeichen empfangen wurde, $a(i|j)$, $i, j \in \{0, 1\}$, während α_i die Quote für das i -te Zeichen ist. Das Spiel sei dergestalt, dass der Spieler in jeder Runde sein gesamtes Kapital einsetzt, d.h. $\sum_{i=0}^1 a(i|j) = 1$, $j \in \{0, 1\}$. Mit dieser Notation erhalten wir

$$G_1(a) = q_0(1 - p) \log(\alpha_0 a(0|0)) + q_1 p \log(\alpha_1 a(1|0)) \\ + q_0 p \log(\alpha_0 a(0|1)) + q_1(1 - p) \log(\alpha_1 a(1|1)).$$

Für zwei Kanäle ist die Wachstumsrate gleich

$$G_2(a) = q_0(1 - 2p + 2p^2) \log(\alpha_0 a(0|0)) + q_1(2p - 2p^2) \log(\alpha_1 a(1|0)) \\ + q_0(2p - 2p^2) \log(\alpha_0 a(0|1)) + q_1(1 - 2p + 2p^2) \log(\alpha_1 a(1|1)).$$

Aufgrund der Rechenregeln für Logarithmen lassen sich die beiden Gleichungen zu

$$G_1(a) = q_0(1 - p) \log(\alpha_0) + q_0(1 - p) \log(a(0|0)) + q_1 p \log(\alpha_1) + q_1 p \log(a(1|0))$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

$$\begin{aligned}
& + q_0 p \log(\alpha_0) + q_0 p \log(a(0|1)) + q_1(1-p) \log(\alpha_1) + q_1(1-p) \log(a(1|1)) \\
= & q_0 \log(\alpha_0) + q_1 \log(\alpha_1) + q_0[(1-p) \log(a(0|0)) + p \log(a(0|1))] \\
& + q_1[p \log(a(1|0)) + (1-p) \log(a(1|1))]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
G_2(a) = & q_0 \log(\alpha_0) + q_1 \log(\alpha_1) \\
& + q_0[(1-2p+2p^2) \log(a(0|0)) + (2p-2p^2) \log(a(0|1))] \\
& + q_1[(2p-2p^2) \log(a(1|0)) + (1-2p+2p^2) \log(a(1|1))]
\end{aligned}$$

umformen. Wir wollen $G_1(a)$ und $G_2(a)$ bezüglich $a(i|j)$ maximieren, daher ist es ausreichend, den zweiten Teil der Gleichungen zu untersuchen. Dieser kann zu $Z = \sum X_i \log Y_i$ umgeformt werden, wobei $X = \sum X_i = \sum_{i,j} p(i,j) = 1$ und $Y = \sum Y_i = \sum_{i,j} a(i|j) = 1$ aufgrund der getroffenen Annahmen gilt. Z wird bezüglich Y_i maximiert, indem

$$Y_i = \frac{Y}{X} X_i$$

gesetzt wird (vgl. Satz 2.3). Daher folgt für die betrachtete Situation, dass $Y_i = \frac{1}{1} X_i = X_i$ gilt. Dies führt zu den maximalen exponentiellen Wachstumsraten von

$$\begin{aligned}
G_1(a^*) = & q_0 \log(\alpha_0) + q_1 \log(\alpha_1) + q_0(1-p) \log(q_0(1-p)) \\
& + q_0 p \log(q_0 p) + q_1 p \log(q_1 p) + q_1(1-p) \log(q_1(1-p))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
G_2(a^{**}) = & q_0 \log(\alpha_0) + q_1 \log(\alpha_1) + q_0(1-2p+2p^2) \log(q_0(1-2p+2p^2)) \\
& + q_0(2p-2p^2) \log(q_0(2p-2p^2)) + q_1(2p-2p^2) \log(q_1(2p-2p^2)) \\
& + q_1(1-2p+2p^2) \log(q_1(1-2p+2p^2)).
\end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass der Spieler einen Vorteil erhält, wenn er die ausgegebenen Zeichen des ersten Kanals sieht, müssen wir zeigen, dass $G_1(a^*) > G_2(a^{**})$ gilt. Hierfür ist es ausreichend, zu zeigen, dass $\widehat{G}_1(a^*) > \widehat{G}_2(a^{**})$ ist, mit

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_1(a^*) = & q_0(1-p) \log(q_0(1-p)) + q_0 p \log(q_0 p) \\
& + q_1 p \log(q_1 p) + q_1(1-p) \log(q_1(1-p)), \\
\widehat{G}_2(a^{**}) = & q_0(1-2p+2p^2) \log(q_0(1-2p+2p^2)) + q_0(2p-2p^2) \log(q_0(2p-2p^2)) \\
& + q_1(2p-2p^2) \log(q_1(2p-2p^2)) + q_1(1-2p+2p^2) \log(q_1(1-2p+2p^2)).
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\log x \leq (x-1) \log e$ gilt, daher können wir $\widehat{G}_1(a^*)$ und $\widehat{G}_2(a^{**})$ durch

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_1(a^*) \leq & q_0(1-p)(q_0(1-p)-1) \log e + q_0 p(q_0 p-1) \log e \\
& + q_1 p(q_1 p-1) \log e + q_1(1-p)(q_1(1-p)-1) \log e
\end{aligned}$$

und

$$-\widehat{G}_2(a^{**}) \geq -q_0(1-2p+2p^2)(q_0(1-2p+2p^2)-1) \log e$$

$$\begin{aligned}
 & - q_0(2p - 2p^2)(q_0(2p - 2p^2) - 1) \log e \\
 & - q_1(2p - 2p^2)(q_1(2p - 2p^2) - 1) \log e \\
 & - q_1(1 - 2p + 2p^2)(q_1(1 - 2p + 2p^2) - 1) \log e
 \end{aligned}$$

abschätzen. Mit diesen Umformungen genügt es, zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 & q_0(1 - p)(q_0(1 - p) - 1) \log e + q_0p(q_0p - 1) \log e + q_1p(q_1p - 1) \log e \\
 & + q_1(1 - p)(q_1(1 - p) - 1) \log e - q_0(1 - 2p + 2p^2)(q_0(1 - 2p + 2p^2) - 1) \log e \\
 & - q_0(2p - 2p^2)(q_0(2p - 2p^2) - 1) \log e - q_1(2p - 2p^2)(q_1(2p - 2p^2) - 1) \log e \\
 & - q_1(1 - 2p + 2p^2)(q_1(1 - 2p + 2p^2) - 1) \log e > 0 \\
 \Leftrightarrow & -2(1 - 2q_0 + 2q_0^2)(1 - 2p)^2(p - 1)p > 0
 \end{aligned}$$

gilt. Der Term $(1 - 2q_0 + 2q_0^2) > 0 \forall q_0 \in [0, 1]$. Daher wird der Ausdruck auf der linken Seite nur gleich null, falls $p = 0$ oder $p = 1$ oder $p = \frac{1}{2}$ ist. Also können wir folgern, dass

$$\begin{aligned}
 & -2(1 - 2q_0 + 2q_0^2)(1 - 2p)^2(p - 1)p > 0 \\
 & \text{für } \left(0 \leq q_0 \leq 1 \wedge 0 < p < \frac{1}{2}\right) \vee \left(0 \leq q_0 \leq 1 \wedge \frac{1}{2} < p < 1\right)
 \end{aligned}$$

gilt. Dies zeigt, dass der Spieler für fast alle betrachteten Störwahrscheinlichkeiten $p \in (0, 1)$ und alle Ausgabewahrscheinlichkeiten $q_0 \in [0, 1]$ einen Vorteil erhält, wenn er die Ausgabe des ersten Kanals sehen kann, statt nur anhand der Ausgabe des zweiten Kanals zu wetten. Für $p = \frac{1}{2}$ ist der Spieler, der die Ausgabe des zweiten Kanals sieht, genauso gut informiert wie der Spieler, der die Ausgabe des ersten Kanals beobachten darf. Für beide Spieler ist die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$, dass ein bestimmtes Zeichen, das sie sehen, auch tatsächlich gesendet wurde. Dies ist aber ebenfalls die Wahrscheinlichkeit, dass das jeweils andere Zeichen gesendet wurde.

2.3. Analyse für n Zeichen

In diesem Abschnitt wird ein umfassendes Modell erarbeitet, anhand dessen ein Spieler seine Strategie bestimmen kann, der auf die Ausgaben einer diskreten stochastischen Quelle mit n -elementigem Alphabet wetten und seine langfristige exponentielle Wachstumsrate maximieren möchte. Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels gibt es jetzt keinen Kanal mehr, über den der Spieler Informationen erhält. Daher muss er seine Entscheidung ausschließlich abhängig von den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Quelle Zeichen ausgibt, und den vorliegenden Quoten treffen.

Wir betrachten eine diskrete stochastische Quelle (X_t) (vgl. Definition 1.5), deren Ausgabe zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$ dem Alphabet $\Sigma := \{1, \dots, n\}$ (s. Definition 1.1) entstammt. Es wird angenommen, dass die betrachtete Quelle (X_t) pro Zeitschritt genau ein Zeichen $s \in \Sigma$ ausgibt. Wir bezeichnen mit $X^t := (u_1, \dots, u_t)$ die ersten t Zeichen, die die Quelle ausgibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort $u \in \Sigma^t$ (s. Definition 1.2) am Anfang des Prozesses ausgegeben wird, wird definiert als $p(u) := \mathbb{P}[X^t = (u_1, \dots, u_t)]$. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit, dass zunächst das Wort $u \in \Sigma^t$ und danach das Zeichen $s \in \Sigma$ ausgegeben wird, durch die gemeinsame Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse definiert: $p(us) := \mathbb{P}[X^t = (u_1, \dots, u_t), X_{t+1} = s]$. Dann können bedingte Wahrscheinlichkeiten für

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

das Auftreten von Zeichen $s \in \Sigma$, nachdem bereits $u \in \Sigma^t$ beobachtet wurde, wie bereits in Definition 1.12 beschrieben werden als

$$p(s|u) := \mathbb{P}[X_{t+1} = s \mid X^t = (u_1, \dots, u_t)] = \begin{cases} \frac{p(us)}{p(u)}, & \text{falls } p(u) > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Zeichen $s \in \Sigma$ zu einem Zeitpunkt t auftritt, hängt von der Vorgeschichte des Prozesses, also von den bisher ausgegebenen Zeichen ab.

Es soll nun ein Investor betrachtet werden, der auf die Ausgänge dieser Quelle wetten möchte. Der Investor verhält sich zu jedem Zeitpunkt gemäß einer von ihm gewählten Strategie, wie bereits in Definition 1.33 beschrieben. Durch die Strategie wird der Investor in die Lage versetzt, abhängig von der bisher bekannten Vorgeschichte für jedes Zeichen des Alphabets einen bestimmten Anteil seines Investitionskapitals zu bestimmen, den er auf dieses Zeichen setzt. Hierbei dürfen die Anteile nicht negativ sein. Negative Anteile entsprächen bei Investitionen an der Börse Leerverkäufen, welche hier ausgeschlossen sind. Außerdem darf der Investor nicht mehr als sein gesamtes Kapital einsetzen, was durch die Forderung $\sum_{s \in \Sigma} a(s|r) \leq 1$ gewährleistet wird.

Die Quoten, die für das Vorkommen der einzelnen Zeichen gezahlt werden, werden mit α_s für $s \in \Sigma$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass sich die Quoten mit der Zeit verändern können, daher sei $\alpha_s^{(t)}$ die Quote für das Zeichen $s \in \Sigma$, die zum Zeitpunkt t gezahlt wird. Es sei $\Sigma_t := \{u \in \Sigma^* \mid |u| \leq t\}$ die Menge aller Wörter, die höchstens die Länge t besitzen. Das Ereignis A_{rs} , dass zunächst das Wort $r \in \Sigma_{t-1}$ beobachtet wurde und danach Zeichen s ausgegeben wird, sei definiert als die Menge $A_{rs} := \{X^t = (rs)\}$. Es sei C_0 das Startkapital des Investors, welches gleich 1 angenommen wird, falls nichts anderes angegeben ist. Der Investor handelt stets gemäß der von ihm gewählten Strategie und setzt daher den Anteil $a(s|r)$ auf Zeichen $s \in \Sigma$, falls er das Wort $r \in \Sigma_{t-1}$ beobachtet hat. Wenn das Zeichen s tatsächlich ausgegeben wird, also das Ereignis A_{rs} eintritt, erhält der Investor die Quote $\alpha_s^{(t)}$, mit der sein eingesetzter Anteil multipliziert wird. Zusätzlich behält er das Kapital, das er nicht investiert hat: $1 - \sum_{s \in \Sigma} a(s|r)$. Daher kann das Kapital des Investors zum Zeitpunkt t dargestellt werden als

$$C_t(a) = \prod_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right)^{\mathbf{1}_{A_{rs}}(X^t)} C_0. \quad (2.3)$$

Man beachte, dass es sich bei $C_t(a)$ um eine Zufallsvariable handelt (s. Definition 1.7).

Das aktuelle Kapital setzt sich jeweils zusammen aus dem Kapital einen Zeitschritt früher, multipliziert mit dem Produkt aus der Quote des neu ausgegebenen Zeichens und dem Anteil, der darauf gesetzt wurde, zuzüglich des Anteils, der überhaupt nicht investiert wurde ($1 - \sum_{s \in \Sigma} a(s|r)$). Da die Indikatorfunktion eine Zufallsvariable ist, können wir auf beiden Seiten von Gleichung (2.3) zunächst die Logarithmusfunktion anwenden und danach den Erwartungswert (vgl. Definition 1.34) bilden. Mit der Vereinbarung, dass $C_0 = 1$ sei, ergibt dies

$$\mathbb{E}[\log(C_t(a))] = \mathbb{E} \left[\sum_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} (\mathbf{1}_{A_{rs}}(X^t)) \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right) \right].$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes kann dieser auf der rechten Seite in die Summe gezogen werden. Die Größen $\alpha_s^{(t)}$ und $a(s|r)$ sind deterministisch und daher ergibt sich

$$\mathbb{E}[\log(C_t(a))] = \sum_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{rs}}(X^t)] \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right).$$

Aus den Definitionen der Indikatorfunktion (Definition 2.1) und des Erwartungswertes (Definition 1.34) ergibt sich direkt, dass der Erwartungswert der Indikatorfunktion eines Ereignisses gleich der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log(C_t(a))] &= \sum_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} \mathbb{P}[A_{rs}] \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right) \\ &= \sum_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} p(rs) \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right) \\ &= \sum_{r \in \Sigma_{t-1}, s \in \Sigma} p(r)p(s|r) \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right). \end{aligned}$$

Für die weitere Betrachtung benötigen wir den Begriff der optimalen Strategie.

Definition 2.4 (Optimale Strategie)

Eine Strategie \bar{a} wird optimal genannt, wenn $\mathbb{E}[\log(C_t(\bar{a}))] \geq \mathbb{E}[\log(C_t(a))]$ für alle $t = 1, 2, \dots$ gilt, wobei C_t eine Zufallsvariable ist, die das Investitionskapital zur Zeit t beschreibt.

Es wird angenommen, dass der Investor sich stets gemäß einer optimalen Strategie verhalten möchte. Um in der beschriebenen Situation eine optimale Strategie \bar{a} zu bestimmen, müsste der Investor theoretisch vor dem Spiel alle möglichen Zeichenkombinationen rs mit $r \in \Sigma^*$ und $s \in \Sigma$ bestimmen und die obige Funktion für alle Zeichenketten maximieren. Da dies in der Praxis nicht durchführbar ist, kann der Investor jedoch auch folgendermaßen verfahren, um dasselbe Ergebnis zu erhalten: Vor der ersten Runde maximiert er die obige Funktion mithilfe der als bekannt vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_1 = s | X_0 = \square]$ für alle $s \in \Sigma$. Vor jeder späteren Spielrunde $t \geq 2$ kennt er bereits das bisher ausgegebene Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ (s. Definition 1.2) und kann daher die Wahrscheinlichkeit $p(r)$ für die Optimierung ignorieren und obige Funktion mithilfe der dann geltenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(s|r)$ (vgl. Definition 1.12) maximieren. So muss er vor jeder Runde für jedes $s \in \Sigma$ genau eine Variable und damit insgesamt n Variablen bestimmen. Die Strategie unter der Vorgeschichte $r \in \Sigma^{t-1}$ bezeichnen wir mit $a(\cdot|r) \in \mathbb{R}^n$. Das zu lösende Optimierungsproblem für ein beliebiges aber festes $r \in \Sigma^{t-1}$ lautet dann

Problem 2.5

$$\max_{a(\cdot|r)} f(a(\cdot|r)) = \sum_{s \in \Sigma} p(s|r) \log \left(\alpha_s^{(t)} a(s|r) + 1 - \sum_{\tilde{s} \in \Sigma} a(\tilde{s}|r) \right)$$

$$\text{u.d.N. } \mathbf{g}(a(\cdot|r)) = \begin{pmatrix} -\sum_{s=1}^n a(s|r) + 1 \\ a(1|r) \\ a(2|r) \\ \vdots \\ a(n|r) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},$$

$$a(\cdot|r) \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ergeben sich die aufgeführten Ungleichungsnebenbedingungen direkt aus Definition 1.33, welche die Strategie beschreibt. Die zugehörigen Gradienten sind

$$\nabla \mathbf{f}(a(\cdot|r)) = \begin{pmatrix} \frac{p(1|r)(\alpha_1^{(t)} - 1)}{\alpha_1^{(t)} a(1|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} - \sum_{k \neq 1}^n \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} a(k|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} \\ \vdots \\ \frac{p(n|r)(\alpha_n^{(t)} - 1)}{\alpha_n^{(t)} a(n|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} - \sum_{k \neq n}^n \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} a(k|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

$$\nabla \mathbf{g}(a(\cdot|r)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

Für die folgende Argumentation wollen wir einige grundlegende Begriffe definieren (siehe z. B. [FKS02, S. 105 f.], [LY08, S. 322], [Jun08, S. 107]).

Definition 2.6 (Zulässige Strategie, aktive Nebenbedingung)

Eine Strategie $a \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässig, wenn sie alle Nebenbedingungen erfüllt. Es sei $S := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(a) \geq \mathbf{0}\}$ die Menge aller zulässigen Strategien.

Eine Ungleichungsnebenbedingung $g_i(a) \geq 0$ für eine zulässige Strategie $a \in \mathbb{R}^n$ wird aktiv genannt, falls $g_i(a) = 0$ gilt, ansonsten heißt sie inaktiv. Es sei $I = I(a) := \{i \in \{1, \dots, n+1\} \mid g_i(a) = 0\}$ die Indexmenge aller in $a \in S$ aktiven Nebenbedingungen.

Für die Analyse des Optimierungsproblems 2.5 benötigen wir den folgenden Satz aus [FKS02, S. 106 f.], welcher für Maximierungsprobleme mit linearen Nebenbedingungen formuliert wurde. Diese besitzen die folgende Form:

$$\begin{aligned} (\text{MP}^{\geq}) \quad & \max && f(\mathbf{x}) \\ & \text{unter} && -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \\ & && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Wir nennen $\bar{\mathbf{x}} \in S$ einen *lokalen Maximierer* bzw. kurz *Maximierer*, wenn für ein beliebiges $\epsilon > 0$

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in S \text{ mit } \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \epsilon$$

gilt.

Satz 2.7 (Notwendige KKT-Bedingungen)

Jeder Maximierer $\bar{\mathbf{x}} \in S$ von (\mathbf{MP}^{\geq}) erfüllt die folgende Bedingung: Es existieren Multiplikatoren $\mu_i \geq 0$, $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$, so dass

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\mathbf{x}})} \mu_i \mathbf{a}_i^{\top} = \mathbf{0}^{\top},$$

wobei \mathbf{a}_i^{\top} die i -te Zeile von \mathbf{A} bezeichnet. Dies ist äquivalent zu den sogenannten KKT-Bedingungen

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^{\top} \mathbf{A} = \mathbf{0}^{\top}, \quad \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mu}^{\top} (-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = 0.$$

Wir setzen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt Problem 2.5 dieselbe Form wie Problem (\mathbf{MP}^{\geq}) und wir können Satz 2.7 anwenden. Die notwendigen KKT-Bedingungen für Problem 2.5 lauten somit

$$\nabla f_i(a) - \mu_1 + \mu_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\mu_1 \left(-\sum_{i=1}^n a(i|r) + 1 \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$\mu_{i+1} a(i|r) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad (2.6)$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (2.7)$$

Wir wollen nun Problem 2.5 mithilfe der notwendigen KKT-Bedingungen lösen. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist es für den Investor optimal, sein gesamtes Kapital anzulegen, oder es ist optimal, einen Teil des Kapitals zurückzubehalten. Daher gilt im Optimum

$$\sum_{i=1}^n a(i|r) = 1 \quad \text{oder} \\ \sum_{i=1}^n a(i|r) < 1.$$

Sei zunächst $\sum_{i=1}^n a(i|r) = 1$. Dann lautet die Zielfunktion

$$\begin{aligned} \max_{a(\cdot|r)} f(a(\cdot|r)) &= \sum_{s \in \Sigma} p(s|r) \log(\alpha_s^{(t)} a(s|r)) \\ &= \sum_{s \in \Sigma} p(s|r) \log(\alpha_s^{(t)}) + \sum_{s \in \Sigma} p(s|r) \log(a(s|r)). \end{aligned}$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Da der erste Summand nicht von $a(s|r)$ abhängt, wird f maximiert, wenn der zweite Summand maximal ist. Ein Ausdruck der Form $Z = \sum X_i \log Y_i$ unter der Nebenbedingung, dass $\sum Y_i = Y$ gilt, wird maximiert durch

$$Y_i = \frac{Y}{X} X_i,$$

mit $X = \sum X_i$ (vgl. [Kel56, S. 919 f.] und Satz 2.3). In unserem Fall sind sowohl $\sum_{i=1}^n p(i|r) = 1$ als auch $\sum_{i=1}^n a(i|r) = 1$, daher ergibt sich $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$, $i = 1, \dots, n$ als optimale Lösung.

Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit $p(i|r) > 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Ein solches i gibt es immer, da $p(i|r) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^n p(i|r) = 1$. Dann ist auch $\bar{a}(i|r) > 0$ und wegen (2.6) gilt $\mu_{i+1} = 0$. Auflösen von (2.4) nach μ_1 unter Beachtung, dass wegen (2.7) $\mu_1 \geq 0$ gilt, führt auf

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{p(i|r) (\alpha_i^{(t)} - 1)}{\alpha_i^{(t)} p(i|r)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} p(k|r)} \geq 0 \\ \Rightarrow \quad 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} &\geq 0 \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} &\leq 1. \end{aligned}$$

Der Fall, dass es optimal ist, das gesamte Kapital einzusetzen, kann also nur eintreten, wenn $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \leq 1$ gilt.

Sei nun $\sum_{i=1}^n a(i|r) < 1$. In diesem Fall gilt $g_1(a(\cdot|r)) \neq 0$ und daher wegen (2.5) $\mu_1 = 0$. Die erste Nebenbedingung ist dann immer inaktiv (vgl. Definition 2.6). Daher gilt $|I| \in \{0, 1, \dots, n\}$, wobei $|I|$ die Kardinalität der Menge I bezeichnet. Um die optimalen Strategien (vgl. Definition 2.4) für diesen Fall zu finden, werden wir die Fälle $|I| = n$, $|I| \in \{1, \dots, n-1\}$ und $|I| = 0$ getrennt untersuchen.

Fall $|I| = n$

Sei $|I| = n$. Dies bedeutet, dass alle Nebenbedingungen aktiv sind (vgl. Definition 2.6), so dass $\bar{a} = \mathbf{0}$ gilt und es optimal ist, überhaupt kein Geld zu investieren. Es gilt wegen (2.7) $\mu_i \geq 0$, $i = 2, \dots, n+1$ und Umformen von (2.4) ergibt für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} &= -p(i|r)\alpha_i^{(t)} + \sum_{k=1}^n p(k|r) \geq 0 \\ \Rightarrow \quad p(i|r)\alpha_i^{(t)} &\leq 1, \quad \text{da } \sum_{i=1}^n p(i|r) = 1. \end{aligned}$$

Falls also $\bar{a} = \mathbf{0}$ ein lokales Maximum ist, dann folgt daraus, dass $p(i|r)\alpha_i^{(t)} \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Fall $|I| \in \{1, \dots, n-1\}$

Sei nun $|I| = k \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann kann man die Einträge der optimalen Strategie (s. Definition 2.4) zu zwei Mengen Λ und Λ' zuordnen, so dass gilt

$$\begin{aligned} i \in \Lambda &\Leftrightarrow \bar{a}(i|r) > 0 \quad \text{und} \\ i \in \Lambda' &\Leftrightarrow \bar{a}(i|r) = 0. \end{aligned}$$

Für Indizes $i \in \Lambda$ gilt $\mu_{i+1} = 0$. Dann ergibt sich aus (2.4) für alle $i \in \Lambda$

$$\frac{p(i|r) \left(\alpha_i^{(t)} - 1 \right)}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} a(k|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} = 0.$$

Ohne Einschränkung sei $\Lambda = \{1, \dots, k\}$ und $\Lambda' = \{k+1, \dots, n\}$. Dann gilt für jedes $i \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \frac{p(i|r) \left(\alpha_i^{(t)} - 1 \right)}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k \frac{p(l|r)}{\alpha_l^{(t)} a(l|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} \\ - \sum_{l=k+1}^n \frac{p(l|r)}{\alpha_l^{(t)} a(l|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} = 0. \end{aligned}$$

Für jedes $l \in \Lambda'$ gilt $\bar{a}(l|r) = 0$ und außerdem $\sum_{l=k+1}^n p(l|r) = 1 - \sum_{l=1}^k p(l|r)$. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{p(i|r) \left(\alpha_i^{(t)} - 1 \right)}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j \in \Lambda} a(j|r)} - \sum_{\substack{l \in \Lambda \\ l \neq i}} \frac{p(l|r)}{\alpha_l^{(t)} a(l|r) + 1 - \sum_{j \in \Lambda} a(j|r)} = \frac{1 - \sum_{l \in \Lambda} p(l|r)}{1 - \sum_{l \in \Lambda} a(l|r)}.$$

Wir substituieren

$$z_i := \frac{1}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j \in \Lambda} a(j|r)} \quad (2.8)$$

und erhalten so ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p(1|r) \left(\alpha_1^{(t)} - 1 \right) & -p(2|r) & \dots & -p(k|r) \\ -p(1|r) & p(2|r) \left(\alpha_2^{(t)} - 1 \right) & \dots & -p(k|r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p(1|r) & -p(2|r) & \dots & -p(k|r) \left(\alpha_k^{(t)} - 1 \right) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda := (1 - \sum_{k \in \Lambda} p(k|r)) / (1 - \sum_{k \in \Lambda} a(k|r))$. Die folgende Definition des Lösungsraumes eines Gleichungssystems entstammt [Fis10, S. 129].

Definition 2.8 (Lösungsraum)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $b = (b_1, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Für das Gleichungssystem $Ax = b$ heißen dann die Mengen

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \subset \mathbb{R}^n$$

Lösungsräume.

Falls es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems gibt, kann diese mithilfe der Cramerschen Regel bestimmt werden [Fis10, S. 205].

Satz 2.9 (Cramersche Regel)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $z = (z_1, \dots, z_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$Az = b.$$

Bezeichnen a^1, \dots, a^n die Spaltenvektoren der Matrix A , so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$z_i = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A}.$$

Hierbei bezeichnet \det die Determinante, welche häufig auch folgendermaßen notiert wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Determinante der Koeffizientenmatrix A . Laut der Definition von Determinanten können Skalare, die sich auf Spaltenvektoren der betreffenden Matrix beziehen, als Faktoren aus der Determinante herausgezogen werden, so dass gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^k p(i|r) \begin{vmatrix} (\alpha_1^{(t)} - 1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (\alpha_2^{(t)} - 1) & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & (\alpha_k^{(t)} - 1) \end{vmatrix}.$$

Für Determinanten von Matrizen dieser Form gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.10

Die Matrizen \mathbf{A}_n , $n \geq 1$, seien folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{A}_n := \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (\alpha_2 - 1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & (\alpha_3 - 1) & \dots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & (\alpha_n - 1) \end{pmatrix}$$

Dann ist die Determinante von \mathbf{A}_n für $n \geq 1$

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \det \mathbf{A}_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage direkt aus der Definition der Determinante, da für eine Zahl deren Determinante gleich der Zahl selbst ist.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j$.

Induktionsschritt: Wir betrachten $\det \mathbf{A}_{n+1}$. Durch Subtraktion der letzten von der vorletzten Zeile der betrachteten Determinante ergibt sich

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = \det \mathbf{A}_{n+1} = \begin{vmatrix} (\alpha_1 - 1) & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & (\alpha_2 - 1) & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & (\alpha_n - 1) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_n & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}$$

und Entwicklung nach der letzten Zeile liefert

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} \det(\mathbf{A}_n) + \alpha_n \det(\mathbf{A}_n^0),$$

mit

$$\det(\mathbf{A}_n^0) := \begin{vmatrix} (\alpha_1 - 1) & -1 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ -1 & (\alpha_2 - 1) & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & (\alpha_{n-1} - 1) & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & (0 - 1) \end{vmatrix}.$$

Dann folgt mithilfe der Induktionsvoraussetzung unter Berücksichtigung, dass $\det(\mathbf{A}_n^0)$ gleich $\det(\mathbf{A}_n)$ für $\alpha_n = 0$ ist, dass

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) &= \alpha_{n+1} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j \right) - \alpha_n \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i - \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j - \prod_{i=1}^n \alpha_i \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \alpha_j \end{aligned}$$

und somit die Behauptung für alle $n \geq 1$. ■

Hieraus ergibt sich direkt, dass

$$\det A = \prod_{i=1}^k p(i|r) D(\alpha_1^{(t)}, \dots, \alpha_k^{(t)}).$$

Es gilt

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang } A = k,$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

wobei der Ausdruck $\text{rang } A$ den Rang der Matrix A bezeichnet, welcher zum Beispiel in [Fis10, S. 114 f.] definiert ist.

Wenn $\text{rang } A = k$ gilt, besitzt das zugehörige inhomogene Gleichungssystem $Az = b$ eine eindeutige Lösung. Wir nehmen im Folgenden an, dass $\det A \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt $p(i|r) \neq 0$, $i = 1, \dots, k$ sowie $\sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)} \neq 1$ und das System hat eine eindeutige Lösung. Zur einfacheren Notation setzen wir $A_i := (a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^k)$. Aufgrund der Form von A , A_i und $b = \lambda(1, 1, \dots, 1)^\top$ wird direkt deutlich, dass $\det A_i$ für alle $i = 1, \dots, k$ von der gleichen Form ist. Diese lautet für ein beliebiges i

$$\det A_i = -\lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p(j|r) \det(a^1, \dots, a^{i-1}, (-1, \dots, -1)^\top, a^{i+1}, \dots, a^k).$$

Die Determinante $\det(a^1, \dots, a^{i-1}, (-1, \dots, -1)^\top, a^{i+1}, \dots, a^k)$ kann gemäß Lemma 2.10 berechnet werden als $D(\alpha_1^{(t)}, \dots, \alpha_k^{(t)})$ mit $\alpha_i^{(t)} = 0$. Dies ergibt

$$\det A_i = -\lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p(j|r) \left(- \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \alpha_j^{(t)} \right).$$

Daher erhalten wir als Lösung des betrachteten Gleichungssystems

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p(j|r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \alpha_j^{(t)}}{\prod_{j=1}^k p(j|r) \left(\prod_{l=1}^k \alpha_l^{(t)} - \sum_{l=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k \alpha_j^{(t)} \right)} \\ &= \frac{\lambda}{p(i|r) \left(\alpha_i^{(t)} - \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_i^{(t)}}{\alpha_j^{(t)}} \right)} = \frac{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)}{\left(1 - \sum_{j=1}^k a(j|r) \right) p(i|r) \alpha_i^{(t)} \left(1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha_j^{(t)}} \right)}. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2.8) ergibt sich damit

$$z_i = \frac{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)}{\left(1 - \sum_{j=1}^k a(j|r) \right) p(i|r) \alpha_i^{(t)} \left(1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha_j^{(t)}} \right)} = \frac{1}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^k a(j|r)}$$

und Auflösen nach $a(i|r)$ ergibt

$$a(i|r) = \left(1 - \sum_{j=1}^k a(j|r) \right) \left[p(i|r) \frac{1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha_j^{(t)}}}{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right].$$

Jetzt bilden wir die Summe über alle Anteile $a(i|r)$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^k a(i|r) = \left(1 - \sum_{j=1}^k a(j|r) \right) \sum_{i=1}^k \left(p(i|r) \frac{1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha_j^{(t)}}}{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right)$$

$$= \left(1 - \sum_{j=1}^k a(j|r) \right) \frac{\sum_{i=1}^k p(i|r) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)}.$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a(i|r) \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^k p(i|r) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)} \right) &= \frac{\sum_{i=1}^k p(i|r) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}{1 - \sum_{j=1}^k p(j|r)} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^k a(i|r) &= \frac{\sum_{i=1}^k p(i|r) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}{1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Sei } R := 1 - \sum_{i=1}^k a(i|r) = \frac{1 - \sum_{i=1}^k p(i|r)}{1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}},$$

dann ergibt sich die optimale Strategie \bar{a} (vgl. Definition 2.4) als

$$\begin{aligned} \bar{a}(i|r) &= R \left[\frac{p(i|r)}{R} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right] \\ &= p(i|r) - \frac{R}{\alpha_i^{(t)}}. \end{aligned}$$

Da die eben durchgeführte Rechnung für jedes $i \in \Lambda$ gilt, lassen sich die Ergebnisse für diesen Fall folgendermaßen zusammenfassen

$$\bar{a}(i|r) = p(i|r) - \frac{R}{\alpha_i^{(t)}} \quad \forall i \in \Lambda \quad (2.9)$$

$$\bar{a}(i|r) = 0 \quad \forall i \in \Lambda' \quad (2.10)$$

$$R = 1 - \sum_{i=1}^n \bar{a}(i|r) = \frac{1 - \sum_{i \in \Lambda} p(i|r)}{1 - \sum_{i \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}. \quad (2.11)$$

Für alle $i \in \Lambda'$ gilt $\mu_{i+1} \geq 0$, also ergibt sich aus (2.4)

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} &= \frac{-p(i|r)(\alpha_i^{(t)} - 1)}{R} + \sum_{k \in \Lambda} \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} \bar{a}(k|r) + R} + \sum_{\substack{k \in \Lambda' \\ k \neq i}} \frac{p(k|r)}{R} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{p(i|r)\alpha_i^{(t)}}{R} + \sum_{k \in \Lambda} \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} \left(p(k|r) - \frac{R}{\alpha_k^{(t)}} \right) + R} + \sum_{k \in \Lambda'} \frac{p(k|r)}{R} &\geq 0 \\ \Rightarrow -p(i|r)\alpha_i^{(t)} + R \sum_{k \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_k^{(t)}} + 1 - \sum_{k \in \Lambda} p(k|r) &\geq 0 \\ \Rightarrow -p(i|r)\alpha_i^{(t)} + \left(1 - \sum_{k \in \Lambda} p(k|r) \right) \left(1 + \frac{\sum_{i \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}}{1 - \sum_{i \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}} \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

$$\Rightarrow \frac{1 - \sum_{k \in \Lambda} p(k|r)}{1 - \sum_{k \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_k^{(t)}}} = R \geq p(i|r)\alpha_i^{(t)} \quad \forall i \in \Lambda'$$

Da aufgrund der getroffenen Annahmen $R \in (0, 1)$ gelten muss, lässt sich dieser Ausdruck für $\alpha_i^{(t)} > 0$ weiter umformen zu

$$\frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \geq \frac{p(i|r)}{R}$$

und die Summe über alle $i \in \Lambda'$ führt zur folgenden Bedingung

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Lambda'} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} &\geq \frac{1}{R} \sum_{i \in \Lambda'} p(i|r) \\ \Rightarrow \sum_{i \in \Lambda'} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} &\geq 1 - \sum_{i \in \Lambda} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} &\geq 1. \end{aligned}$$

Als Ergebnis können wir festhalten, dass die optimale Strategie \bar{a} (s. Definition 2.4) in diesem Fall mithilfe von (2.9)-(2.11) bestimmt werden kann. Hierzu muss der Investor jedoch wissen, welche Zeichen der Menge Λ und welche der Menge Λ' angehören. Dies lässt sich nicht direkt aus den Parametern des Problems ableiten. John L. Kelly erläutert jedoch einen Weg, wie alle Zeichen den beiden Mengen zugeordnet werden können [Kel56, S. 924 f.]. Hierzu müssen zunächst die Indizes so permutiert werden, dass $p(s|r)\alpha_s^{(t)} \geq p(s+1|r)\alpha_{s+1}^{(t)}$ gilt. Dann wird R bestimmt als dasjenige R_t , welches den kleinsten positiven Wert besitzt. Hierbei ist

$$R_t = \frac{1 - p_t}{1 - \sigma_t}, \quad \text{wobei } p_t = \sum_{s=1}^t p(s|r), \quad \sigma_t = \sum_{s=1}^t \frac{1}{\alpha_s^{(t)}}. \quad (2.12)$$

Dann erhalten wir mit $\bar{a}(s|r) = \max \left\{ 0, p(s|r) - R/\alpha_s^{(t)} \right\}$ die gesuchte optimale Strategie.

Fall $|I| = 0$

Zuletzt betrachten wir den Fall, dass $|I| = 0$ gilt, so dass alle Nebenbedingungen inaktiv sind (vgl. Definition 2.6). Dann sind alle $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, n+1$. Um ein Optimum zu bestimmen, muss der Gradient der Zielfunktion gleich null gesetzt werden. Daher gilt für jedes $i = 1, \dots, n$

$$\frac{p(i|r)(\alpha_i^{(t)} - 1)}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{i=1}^n a(i|r)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{p(k|r)}{\alpha_k^{(t)} a(k|r) + 1 - \sum_{i=1}^n a(i|r)} = 0.$$

Wir setzen

$$z_i := \frac{1}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{i=1}^n a(i|r)} \quad (2.13)$$

und erhalten ein homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p(1|r) (\alpha_1^{(t)} - 1) & -p(2|r) & \dots & -p(n|r) \\ -p(1|r) & p(2|r) (\alpha_2^{(t)} - 1) & \dots & -p(n|r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p(1|r) & -p(2|r) & \dots & p(n|r) (\alpha_n^{(t)} - 1) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Homogene Gleichungssysteme $Ax = 0$ besitzen stets die triviale Lösung $(x_1, \dots, x_n)^\top = \mathbf{0}$. Wenn die Koeffizientenmatrix vollen Rang hat, ist dies auch die einzige Lösung (vgl. [Fis10, S. 134]). Da wir nichttriviale Lösungen ermitteln wollen, muss $\text{rang } A < n$ gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det A = 0$ [Fis10, S. 180]. Gemäß Lemma 2.10 gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^n p(i|r) \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{(t)} - \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^{(t)} \right).$$

Hieraus folgt, dass $\det A$ genau dann gleich null ist, wenn einer der folgenden drei Fälle eintritt:

- Mindestens ein $p(i|r) = 0$, $i = 1, \dots, n$.
- Es gilt $p(i|r) > 0$, $i = 1, \dots, n$ und mindestens zwei Quoten $\alpha_i^{(t)}$ und $\alpha_j^{(t)}$, $i \neq j$ sind gleich null.
- Es gilt $p(i|r) > 0$ und $\alpha_i^{(t)} > 0$, $i = 1, \dots, n$ und außerdem

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \alpha_i^{(t)} &= \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^{(t)} \\ \Leftrightarrow 1 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^{(t)}}. \end{aligned}$$

Im ersten Fall gilt für jedes $i \in \Sigma$ mit $p(i|r) = 0$, dass der entsprechende Summand in der Zielfunktion gleich null ist. Dadurch verringert ein positiver Anteil $a(i|r)$ den Zielfunktionswert, so dass es optimal ist, $\bar{a}(i|r) = 0$ zu setzen.

Im zweiten Fall sind die Produkte $\alpha_i^{(t)} a(i|r) = \alpha_j^{(t)} a(j|r) = 0$ und der Zielfunktionswert wird durch positive $a(i|r)$ bzw. $a(j|r)$ kleiner, so dass $\bar{a}(i|r) = \bar{a}(j|r) = 0$.

In beiden Fällen können die Summanden zu den jeweiligen Zeichen i und j aus der Zielfunktion entfernt werden. Dann lässt sich ein äquivalentes Optimierungsproblem formulieren, das den Annahmen des dritten Falls genügt und entsprechend weniger Dimensionen umfasst.

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Es seien nun die Voraussetzungen des dritten Falls erfüllt. Dann lässt sich die Koeffizientenmatrix A durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Form bringen:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} p(1|r)\alpha_1^{(t)} & -p(2|r)\alpha_2^{(t)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p(2|r)\alpha_2^{(t)} & -p(3|r)\alpha_3^{(t)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(n-1|r)\alpha_{n-1}^{(t)} & -p(n|r)\alpha_n^{(t)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus direkt abgelesen werden kann, dass $\text{rang } A = n - 1$. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten

$$z_i = \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} z_n, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Dies lässt sich gemäß (2.13) umformen zu

$$\begin{aligned} & \frac{p(i|r)\alpha_i^{(t)}}{\alpha_i^{(t)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} = \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_n^{(t)} a(n|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)} \\ \Leftrightarrow a(i|r) &= \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) + \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) a(n|r) + \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)\alpha_n^{(t)}} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a(j|r) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wir wollen $a(i|r)$ in Abhängigkeit von $a(n|r)$ darstellen. Daher benötigen wir zunächst einen Ausdruck für den Investitionsanteil $1 - \sum_{i=1}^{n-1} a(i|r)$, der nicht auf die ersten $n - 1$ Zeichen gesetzt wird. Hierzu berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a(i|r) &= a(n|r) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) + \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) \\ &+ \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a(j|r) \right) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)\alpha_n^{(t)}} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a(i|r) \frac{1}{p(n|r)\alpha_n^{(t)}} &= a(n|r) \left(\frac{1}{p(n|r)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) \right) - 1 + \frac{1}{p(n|r)\alpha_n^{(t)}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a(i|r) &= a(n|r)\alpha_n^{(t)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) - p(n|r)\alpha_n^{(t)} + 1 \\ \Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a(i|r) &= -a(n|r) (\alpha_n^{(t)} - 1) + p(n|r)\alpha_n^{(t)} \end{aligned}$$

Dies können wir in (2.14) einsetzen und erhalten

$$a(i|r) = \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) + \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) a(n|r)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{p(i|r)}{p(n|r)\alpha_n^{(t)}} - \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \right) (-a(n|r)(\alpha_n^{(t)} - 1) + p(n|r)\alpha_n^{(t)}) \\
 \Leftrightarrow \quad a(i|r) & = a(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}}
 \end{aligned}$$

Der Lösungsraum $Lös$ (vgl. Definition 2.8) aller optimalen Strategien (s. Definition 2.4), die das betrachtete Gleichungssystem erfüllen, kann somit als

$$\begin{aligned}
 Lös = \left\{ \bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{a}(i|r) & = \bar{a}(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \right. \\
 \left. \bar{a}(i|r) > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \bar{a}(i|r) < 1 \right\}
 \end{aligned}$$

beschrieben werden. Der Zielfunktionswert für Strategien in $Lös$ errechnet sich dann als

$$\begin{aligned}
 f(\bar{a}) & = \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \log \left(\alpha_i^{(t)} \left(\bar{a}(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 1 - \bar{a}(n|r) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\bar{a}(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \right) \right) \\
 & \quad + p(n|r) \log \left(\alpha_n^{(t)} \bar{a}(n|r) + 1 - \bar{a}(n|r) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\bar{a}(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \right) \right) \\
 & = \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \log \left(\alpha_n^{(t)} \bar{a}(n|r) + p(i|r)\alpha_i^{(t)} - p(n|r)\alpha_n^{(t)} \right. \\
 & \quad \left. + 1 - \bar{a}(n|r) - (\bar{a}(n|r)\alpha_n^{(t)} - p(n|r)\alpha_n^{(t)}) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} - \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \right) \\
 & \quad + p(n|r) \log \left(\alpha_n^{(t)} \bar{a}(n|r) + 1 - \bar{a}(n|r) - \alpha_n^{(t)} (\bar{a}(n|r) - p(n|r)) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} - \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \right) \\
 & \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \log \left(\alpha_n^{(t)} \bar{a}(n|r) + p(i|r)\alpha_i^{(t)} - p(n|r)\alpha_n^{(t)} \right. \\
 & \quad \left. + 1 - \bar{a}(n|r) - \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) (\bar{a}(n|r)\alpha_n^{(t)} - p(n|r)\alpha_n^{(t)}) - 1 + p(n|r) \right) \\
 & \quad + p(n|r) \log \left(\alpha_n^{(t)} \bar{a}(n|r) + 1 - \bar{a}(n|r) - \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) (\bar{a}(n|r)\alpha_n^{(t)} - p(n|r)\alpha_n^{(t)}) \right. \\
 & \quad \left. - 1 + p(n|r) \right) \\
 & = \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) \log \left(p(i|r)\alpha_i^{(t)} \right) + p(n|r) \log \left(p(n|r)\alpha_n^{(t)} \right) = \sum_{i=1}^n p(i|r) \log \left(p(i|r)\alpha_i^{(t)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Hierbei gilt (*) wegen $\sum_{i=1}^{n-1} 1/\alpha_i^{(t)} = 1 - 1/\alpha_n^{(t)}$ und $\sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) = 1 - p(n|r)$.

Ergebnisse für Problem 2.5

Die gesamten bisherigen Betrachtungen dieses Abschnitts lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Annahmen	Kandidat für optimale Strategie	Folgerungen
$\sum_{i=1}^n a(i r) = 1$	$\bar{a}(i r) = p(i r)$	$\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \leq 1$
$\sum_{i=1}^n a(i r) < 1,$ $ I = n,$ $\alpha_i^{(t)} \neq 0, i = 1, \dots, n$	$\bar{a}(i r) = 0, \quad i = 1, \dots, n$	$\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \geq 1$
$\sum_{i=1}^n a(i r) < 1,$ $ I = k \in \{1, \dots, n-1\},$ $p(i r) \neq 0, i = 1, \dots, n,$ $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \neq 1$	$\bar{a}(i r) = p(i r) - \frac{R}{\alpha_i^{(t)}}, \quad i \in \Lambda,$ $\bar{a}(i r) = 0, \quad i \in \Lambda'$	$\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$
$\sum_{i=1}^n a(i r) < 1,$ $ I = 0,$ $p(i r) \neq 0, \quad \alpha_i^{(t)} \neq 0,$ $i = 1, \dots, n$	$\bar{a}(i r) =$ $\frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \bar{a}(n r) + p(i r) - \frac{p(n r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}}$	$\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} = 1$

Tabelle 2.1.: Kandidaten für eine optimale Strategie mit den getroffenen Annahmen und abgeleiteten Folgerungen

Hieraus lassen sich die folgenden beiden Lemmata formulieren:

Lemma 2.11

Für Problem 2.5 sei $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \leq 1$. Dann besteht eine optimale Strategie (vgl. Definition 2.4) darin,

$$\bar{a}(i|r) = p(i|r), \quad i \in \Sigma, \quad r \in \Sigma^{t-1}$$

zu setzen.

Beweis. Zunächst sei $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} < 1$. Da diese Bedingung in Tabelle 2.1 nur ein einziges Mal auftaucht, ergibt sich die zugehörige Strategie $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$, $i = 1, \dots, n$, direkt daraus.

Sei nun $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} = 1$. In diesem Fall gibt es mehrere Kandidaten für eine optimale Strategie. Um die optimale Strategie zu finden, müssen diese Kandidaten bezüglich ihres Zielfunktionswertes miteinander verglichen werden. Falls $\bar{a}(i|r) = 0$, $i = 1, \dots, n$, gilt, ergibt sich

$$f(\mathbf{0}) = \sum_{i=1}^n p(i|r) \log(1) = 0.$$

Für den Fall $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$, $i = 1, \dots, n$, erhalten wir

$$\bar{a}(i|r) = p(i|r) = p(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} + p(i|r) - p(n|r) \frac{\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} \in L\ddot{o}s.$$

Aus Gleichung (2.15) wissen wir, dass alle Punkte in $L\ddot{o}s$ denselben Zielfunktionswert besitzen, nämlich

$$\begin{aligned} f(\bar{a}) &= \sum_{i=1}^n p(i|r) \log\left(\alpha_i^{(t)} p(i|r)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p(i|r) \log(p(i|r)) - \sum_{i=1}^n p(i|r) \log\left(\frac{1}{\alpha_i^{(t)}}\right) \\ &\stackrel{(1.18)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall kann die Divergenzungleichung (1.18) angewendet werden, da $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} = 1$ gilt und die Summanden $1/\alpha_i^{(t)}$ ohne Einschränkung als nichtnegativ angenommen werden können. Daher kann $1/\alpha_i^{(t)}$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden. Da der Zielfunktionswert für Elemente aus $L\ddot{o}s$ immer ≥ 0 ist, wird er maximal, wenn $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$ für $i = 1, \dots, n$. ■

Bemerkung 2.12

Obwohl wir in Lemma 2.11 gezeigt haben, dass die Strategie $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$, $i = 1, \dots, n$, im Fall $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} = 1$ optimal ist, wollen wir an dieser Stelle darauf hinweisen, dass die Strategie

$$\bar{a}(n|r) = 0, \quad \bar{a}(i|r) = p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

zu derselben langfristigen exponentiellen Wachstumsrate führt. Dies ergibt sich direkt daraus, dass sich beide Strategien in der Menge $L\ddot{o}s$ befinden. Außerdem können wir zeigen, dass der erwartete Ertrag pro Spielrunde für diese beiden Strategien gleich ist. Wir bezeichnen die Strategie $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$ mit \bar{a}_1 und die andere mit \bar{a}_2 . Den erwarteten Ertrag pro Spielrunde einer Strategie \bar{a} nennen wir $K(\bar{a})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} K(\bar{a}_1) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(t)} p(i|r)^2 \\ K(\bar{a}_2) &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(t)} p(i|r) \left(p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \right) + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \left(p(i|r) - \frac{p(n|r)\alpha_n^{(t)}}{\alpha_i^{(t)}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(t)} p(i|r)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r)p(n|r)\alpha_n^{(t)} + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p(i|r) + p(n|r)\alpha_n^{(t)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(t)} p(i|r)^2 - p(n|r)\alpha_n^{(t)}(1 - p(n|r)) + p(n|r) + p(n|r)\alpha_n^{(t)} \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^{(t)}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(t)} p(i|r)^2. \end{aligned}$$

Mit der Strategie \bar{a}_2 muss der Investor nur einen Teil seines Geldes pro Spielrunde einsetzen. Dies ermöglicht ihm, pro Spielrunde mit dem restlichen Teil andere Investitionen zu tätigen. Weitere Aspekte hierzu finden sich in Abschnitt 2.6.

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Nun bleibt nur noch übrig, eine optimale Strategie (vgl. Definition 2.4) zu bestimmen unter der Annahme, dass $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$. Hierfür gibt es laut Tabelle 2.1 zwei mögliche Kandidaten. Wir haben in den bisherigen Berechnungen bereits folgendes Ergebnis erzielt: Falls $\bar{a} = \mathbf{0}$ ein lokales Optimum ist, dann gilt $p(i|r)\alpha_i^{(t)} \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Der zweite Kandidat $\bar{a}(i|r) = 0$ für $i \in \Lambda'$ und $\bar{a}(i|r) = p(i|r) - R/\alpha_i^{(t)}$ für $i \in \Lambda$ ist analog zu dem Ergebnis von John L. Kelly (vgl. [Kel56, S. 924]). Welche Elemente Λ bzw. Λ' zugeordnet werden, wird in (2.12) beschrieben. Daher können wir als Ergebnis festhalten:

Lemma 2.13

Für Problem 2.5 sei $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$. Dann besteht eine optimale Strategie darin, falls $p(i|r)\alpha_i^{(t)} \leq 1$ für alle $i \in \Sigma$

$$\bar{a}(i|r) = 0, \quad i \in \Sigma, \quad r \in \Sigma^{t-1}$$

und falls $p(i|r)\alpha_i^{(t)} > 1$ für mindestens ein $i \in \Sigma$

$$\bar{a}(i|r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \in \Lambda' \\ p(i|r) - R/\alpha_i^{(t)}, & \text{falls } i \in \Lambda \end{cases}$$

zu setzen.

Beweis. Es seien zunächst $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$ und $p(i|r)\alpha_i^{(t)} \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Um die optimale Strategie in diesem Fall zu finden, müssen wir zunächst bestimmen, welche Zeichen der Menge Λ angehören und welche aus Λ' sind. Wir dürfen hierzu annehmen, dass $\alpha_i^{(t)} > 0$ für Zeichen $i \in \Lambda$ gilt, da es bei einer Quote von $\alpha_i^{(t)} = 0$ immer optimal ist, $\bar{a}(i|r) = 0$ zu setzen, weil der Spieler auf jeden Fall das eingesetzte Geld verlieren würde und daher ein positiver Einsatz zu einem geringeren Zielfunktionswert führt. Wir nehmen an, k sei die Anzahl der Elemente in Λ . Wir sortieren alle Zeichen so, dass

$$p(1|r)\alpha_1^{(t)} \geq p(2|r)\alpha_2^{(t)} \geq \dots \geq p(k|r)\alpha_k^{(t)} \geq \dots \geq p(n|r)\alpha_n^{(t)}$$

gilt. Dann gilt $\alpha_i^{(t)} > 0$ für $i = 1, \dots, k$. Außerdem gilt

$$1 \geq p(1|r)\alpha_1^{(t)} \geq p(2|r)\alpha_2^{(t)} \geq \dots \geq p(k|r)\alpha_k^{(t)} \geq \dots \geq p(n|r)\alpha_n^{(t)}.$$

Wir definieren wie in (2.12)

$$R_k := \frac{1 - p_k}{1 - \sigma_k}, \quad \text{mit} \quad p_k = \sum_{s=1}^k p(s|r), \quad \sigma_k = \sum_{s=1}^k \frac{1}{\alpha_s^{(t)}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & -\sigma_k \leq -p_k \\ \Rightarrow & 1 - \sigma_k \leq 1 - p_k \\ \Rightarrow & 1 \leq \frac{1 - p_k}{1 - \sigma_k} = R_k. \end{aligned}$$

Somit ist $R_k = 1$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und es gilt $\Lambda' = \{1, \dots, n\}$ und $\bar{a}(i|r) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Sei nun $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$ und $p(i|r)\alpha_i^{(t)} > 1$ für mindestens ein $i \in \Sigma$. Es sei $k \in \{1, \dots, n\}$ derjenige Index, für den gilt

$$\Lambda = \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{und} \quad \Lambda' = \{k+1, \dots, n\}.$$

Der Zielfunktionswert der zweiten Strategie des Lemmas ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} f(\bar{a}) &= \sum_{i=1}^k p(i|r) \log \left(p(i|r)\alpha_i^{(t)} \right) + \sum_{i=k+1}^n p(i|r) \log(R) \\ &= - \sum_{i=1}^k p(i|r) \log \left(\frac{1}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} \right) - \left(1 - \sum_{i=1}^k p(i|r) \right) \log \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)}}{1 - \sum_{i=1}^k p(i|r)} \right). \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $f(\bar{a}) \geq 0$ gilt. Hierzu führen wir die folgenden Umformungen durch:

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} + \sum_{i=1}^k p(i|r) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} - \sum_{i=1}^k p(i|r) \\ &= - \sum_{i=1}^k p(i|r) \left(\frac{1 - p(i|r)\alpha_i^{(t)}}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} - \sum_{i=1}^k p(i|r) \\ &= - \sum_{i=1}^k p(i|r) \left(\frac{1 - p(i|r)\alpha_i^{(t)}}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} \right) \log e \\ &\quad - \left(1 - \sum_{i=1}^k p(i|r) \right) \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)} - 1 + \sum_{i=1}^k p(i|r)}{1 - \sum_{i=1}^k p(i|r)} \right) \log e \\ &= - \sum_{i=1}^k p(i|r) \left(\frac{1}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} - 1 \right) \log e - \left(1 - \sum_{i=1}^k p(i|r) \right) \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)}}{1 - \sum_{i=1}^k p(i|r)} - 1 \right) \log e \\ &\leq - \sum_{i=1}^k p(i|r) \log \left(\frac{1}{p(i|r)\alpha_i^{(t)}} \right) - \left(1 - \sum_{i=1}^k p(i|r) \right) \log \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)}}{1 - \sum_{i=1}^k p(i|r)} \right) \\ &= f(\bar{a}). \end{aligned}$$

Hierbei gilt die Ungleichung wegen $\log x \leq (x-1) \log e$ (vgl. Seite 67). Die maximale Wachstumsrate für die Strategie $\bar{a}(i|r) = 0$, $i = 1, \dots, n$, beträgt $f(\bar{a}) = 0$. Daher lautet die optimale Strategie in diesem Fall $\bar{a}(i|r) = 0$ für $i \in \Lambda'$ und $\bar{a}(i|r) = p(i|r) - R/\alpha_i^{(t)}$ für $i \in \Lambda$. ■

Die Gültigkeit von Lemma 2.13 ergibt sich auch aus den Rechnungen in [Kel56, S. 923 - 925].

Mit den bisherigen Ergebnissen sind wir in der Lage, für jedes vorliegende Spiel unsere optimale Strategie \bar{a} zu bestimmen. Hierzu müssen wir lediglich in jedem Zeitpunkt t das bisher ausgegebene Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(s|r)$,

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

$s \in \Sigma$, $r \in \Sigma^{t-1}$, kennen. Nun könnte man sich aber auch eine Situation vorstellen, in der der Spieler zusätzlich über einen privaten Übertragungskanal verfügt. Es wird daher wie im Artikel von [Kel56] angenommen, dass das Zeichen $s \in \Sigma$ in einen gestörten Kanal eingegeben wird, aus dem das Zeichen $k \in \Sigma$ ausgegeben wird. Dann kennt der Spieler sowohl das Zeichen $k \in \Sigma$ als auch das Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ und muss hieraus die optimalen Anteile bestimmen, die er auf die Zeichen des Alphabets setzen möchte.

Um diese Situation zu untersuchen, definieren wir zunächst drei Ereignisse.

$$\begin{aligned} R &:= \{X_1 = r_1, X_2 = r_2, \dots, X_{t-1} = r_{t-1}\}, \\ S &:= \{X_t = s\}, \\ K &:= \{Y_{t-1} = k\} \end{aligned}$$

Das Ereignis R tritt also ein, wenn die Quelle bisher das Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ ausgegeben hat. Das Ereignis S beschreibt das Zeichen, das die Quelle als nächstes ausgibt und das Ereignis K tritt ein, wenn der Kanal, dessen Ausgaben durch Y_t dargestellt werden, das Zeichen k ausgegeben hat. Unter diesen Annahmen suchen wir einen Wert für

$$\mathbb{P}[S|K \cap R].$$

Nach der Definition von bedingten Wahrscheinlichkeiten (vgl. Definition 1.12) können wir hierfür schreiben

$$\mathbb{P}[S|K \cap R] = \frac{\mathbb{P}[S \cap K \cap R]}{\mathbb{P}[K \cap R]} = \frac{\mathbb{P}[R] \mathbb{P}[S|R] \mathbb{P}[K|S]}{\mathbb{P}[R] \mathbb{P}[K|R]} = \frac{\mathbb{P}[S|R] \mathbb{P}[K|S]}{\mathbb{P}[K|R]}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[S|R] = p(s|r)$ und $\mathbb{P}[K|S] = p(k|s)$ werden als bekannt vorausgesetzt. Dies gilt jedoch nicht für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[K|R] = p(k|r)$ von Zeichen $k \in \Sigma$ unter Wort $r \in \Sigma^{t-1}$. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich jedoch mithilfe von

$$p(k|r) = \sum_{s \in \Sigma} p(k|s)p(s|r)$$

berechnen. Durch den zusätzlichen Kanal verändert sich die Zielfunktion von Problem 2.5 zu

$$\max_{a(\cdot|r,k)} f(a(\cdot|r,k)) = \sum_{i=1}^n p(i|r,k) \log \left(\alpha_i^{(t)} a(i|r,k) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r,k) \right).$$

Da sich nur die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zeichen des Alphabets verändert haben, kann der Spieler die in Lemma 2.11 und Lemma 2.13 bestimmten optimalen Strategien \bar{a} spielen, wenn er die Wahrscheinlichkeiten $p(s|r)$ durch $p(s|r,k)$, $s \in \Sigma$, $r \in \Sigma^{t-1}$, $k \in \Sigma$, ersetzt.

Um zu verdeutlichen, dass es durchaus Situationen gibt, in denen es optimal ist, nicht das gesamte vorhandene Geld einzusetzen, betrachten wir nun einige Beispiele. Aus Lemmata 2.11 und 2.13 wissen wir, dass diese Situationen nur eintreten können, falls $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns zunächst auf Alphabete (vgl. Definition 1.1) mit lediglich zwei Buchstaben. Es sei $\Sigma := \{1, 2\}$ und

$$\alpha_1^{(t)} = 2.5 \quad \alpha_2^{(t)} = 1.5 \quad p(1|r) = 0.6$$

Da $p(1|r)\alpha_1^{(t)} > 1$, ist es optimal, einen Teil des Geldes einzusetzen. Um diesen zu bestimmen, ermitteln wir zunächst den Teil des Geldes, der nicht eingesetzt werden soll. Dies geschieht wie in (2.12) dargestellt (vgl. auch [Kel56, S. 925]). Es ist $R_0 := 1$, $R_1 = 2/3$ und $R_2 = 0$ und daher ist $R = 2/3$ der kleinste positive Wert. Für Alphabete mit zwei Buchstaben gilt sogar immer:

Lemma 2.14

Es sei $n = 2$ die Größe des betrachteten Alphabets. Zudem gelte $p(2|r) \neq 0$, $p(1|r)\alpha_1^{(t)} \geq p(2|r)\alpha_2^{(t)}$, $p(1|r)\alpha_1^{(t)} > 1$, $R_0 := 1$ und $R_k = \frac{1-p_k}{1-\sigma_k}$ mit $p_k := \sum_{i=1}^k p(i|r)$ und $\sigma_k := \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i^{(t)}$. Ferner bezeichne R den kleinsten positiven Wert aller R_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Dann gilt $R = R_1$.

Beweis. Für $n = 2$ gilt wegen $1 - p_2 = 1 - p(1|r) - p(2|r) = 0$, dass $R_2 = 0$ und damit nicht positiv ist. Außerdem ist $R_1 = \frac{1-p_1}{1-\sigma_1} = \frac{p(2|r)}{1-1/\alpha_1^{(t)}}$. Es gilt $p(2|r) > 0$ und

$$\begin{aligned} p(1|r)\alpha_1^{(t)} &> 1 \\ \Rightarrow \alpha_1^{(t)} &> 1 \\ \Rightarrow 1 &> \frac{1}{\alpha_1^{(t)}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha_1^{(t)}} &> 0. \end{aligned}$$

Daher ist $R_1 > 0$. Außerdem ist $R_1 < 1$, da nur für $p(1|r)\alpha_1^{(t)} \leq 1$ und $p(2|r)\alpha_2^{(t)} \leq 1$ das gesamte Kapital zurückgehalten wird und diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Somit ist für $n = 2$ der Wert R_1 immer die kleinste positive Zahl von R_k , $k = 0, 1, 2$. ■

Falls wie in unserem Beispiel $p(1|r)\alpha_1^{(t)} > p(2|r)\alpha_2^{(t)}$ gilt, folgt direkt aus Lemma 2.14, dass $\Lambda = \{1\}$ und $\Lambda' = \{2\}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \bar{a}(1|r) &= 0.6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3}, \\ \bar{a}(2|r) &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt kann der zugehörige Zielfunktionswert errechnet werden. Als Logarithmus wird hier der duale Logarithmus verwendet.

$$\begin{aligned} f(\bar{a}) &= 0.6 \log \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + 0.4 \log \left(0 + \frac{2}{3} \right) \\ &= 0.6 \log(1.5) - 0.4 \log(1.5) = 0.2 \log(1.5) \approx 0.117. \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Würde der Investor sein gesamtes Kapital einsetzen, sollte er dies gemäß den vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten verteilen. Dann wäre $\bar{a} = (0.6, 0.4)$. In diesem Fall ergäbe sich jedoch ein geringerer Zielfunktionswert:

$$\begin{aligned} f(0.6, 0.4) &= 0.6 \log \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} \right) + 0.4 \log \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \right) \\ &= 0.6 \log(1.5) + 0.4 \log \left(\frac{3}{5} \right) \approx 0.056. \end{aligned}$$

Die folgende Aufzählung veranschaulicht weitere Zahlenbeispiele:

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

- $\alpha_1^{(t)} = \frac{5}{2}, \quad \alpha_2^{(t)} = \frac{3}{2}, \quad p(1|r) = 0.45 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \left(\frac{1}{12}, 0\right), \quad f(\bar{a}) \approx 0.007,$
- $\alpha_1^{(t)} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2^{(t)} = 2, \quad p(1|r) = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \left(\frac{1}{4}, 0\right), \quad f(\bar{a}) \approx 0.024,$
- $\alpha_1^{(t)} = 2, \quad \alpha_2^{(t)} = \frac{3}{2}, \quad p(1|r) = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \left(0, \frac{1}{4}\right), \quad f(\bar{a}) \approx 0.024,$
- $\alpha_1^{(t)} = 2, \quad \alpha_2^{(t)} = \frac{3}{2}, \quad p(1|r) = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \left(\frac{1}{5}, 0\right), \quad f(\bar{a}) \approx 0.029,$
- $\alpha_1^{(t)} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2^{(t)} = 2, \quad p(1|r) = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \left(0, \frac{1}{5}\right), \quad f(\bar{a}) \approx 0.029.$

Beispiel 2.15

Als letztes Beispiel wollen wir ein Alphabet (s. Definition 1.1) mit fünf Zeichen betrachten $\Sigma := \{1, 2, \dots, 5\}$, es sei $p(i|r) = 1/5, i = 1, \dots, 5$, und für die Quoten gelte

$$\alpha_1^{(t)} = 8, \quad \alpha_2^{(t)} = 6, \quad \alpha_3^{(t)} = 5, \quad \alpha_4^{(t)} = 4 \quad \text{und} \quad \alpha_5^{(t)} = 2.$$

In diesem Beispiel ist $R = R_4 = 24/31$ und wir erhalten die optimale Strategie (s. Definition 2.4)

$$\bar{a} = \left(\frac{16}{155}, \frac{11}{155}, \frac{7}{155}, \frac{1}{155}, 0 \right)$$

und den zugehörigen Zielfunktionswert

$$f(\bar{a}) = \frac{1}{5} \log \left(\frac{4608}{3875} \right) \approx 0.05.$$

Bei diesem Beispiel sollte beachtet werden, dass die optimale Strategie auch positive Anteile für Investitionsmöglichkeiten enthält, die für sich genommen nicht vorteilhaft sind (Buchstabe 3 und 4).

Wenn ein Investor seinen erwarteten Ertrag (und nicht seinen erwarteten logarithmischen Ertrag) maximieren möchte, sollte er aus diesem Grund kein Geld in diejenigen Anlagen investieren, die für sich genommen nicht vorteilhaft sind. Auf diese Weise kann er sich besser stellen. Aus Gründen der einfacheren Notation setzen wir im Folgenden $p_i := p(i|r)$ und $\alpha_i := \alpha_i^{(t)}, i \in \Sigma$.

Bemerkung 2.16

Die Strategie \hat{a} (vgl. Definition 1.33) sei folgendermaßen definiert:

$$\hat{a}_i := \begin{cases} 0, & \text{falls } p_i \alpha_i \leq 1, \\ p_i - R/\alpha_i, & \text{falls } p_i \alpha_i > 1. \end{cases}$$

Dann führt die Strategie \hat{a} zu einem mindestens ebenso hohen erwarteten Ertrag (vgl. Definition 1.34) pro Spielrunde wie die Kellystrategie \bar{a} .

Wir bezeichnen den erwarteten Ertrag pro Spielrunde für die Strategie a mit $K(a)$. Dann gilt

$$K(\bar{a}) = \sum_{i \in \Lambda} p_i \alpha_i \bar{a}_i + R \quad \text{und}$$

$$K(\hat{a}) = \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ p_i \alpha_i > 1}} p_i \alpha_i \hat{a}_i + \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ p_i \alpha_i \leq 1}} \bar{a}_i + R$$

und hieraus ergibt sich direkt

$$K(\hat{a}) \geq K(\bar{a}),$$

da

$$\sum_{\substack{i \in \Lambda \\ p_i \alpha_i \leq 1}} \bar{a}_i \geq \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ p_i \alpha_i \leq 1}} p_i \alpha_i \bar{a}_i.$$

Die Ungleichung ist strikt erfüllt, wenn es mindestens eine Investitionsmöglichkeit $i \in \Sigma$ gibt, für die $p_i \alpha_i < 1$ gilt.

Für Beispiel 2.15 ergibt sich die Strategie (vgl. Definition 1.33)

$$\hat{a} = \left(\frac{16}{155}, \frac{11}{155}, 0, 0, 0 \right)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} K(\hat{a}) &= \frac{1}{5} \left(8 \cdot \frac{16}{155} + 6 \cdot \frac{11}{155} \right) + \frac{128}{155} = \frac{834}{775} \approx 1.076 \\ &> K(\bar{a}) &= \frac{1}{5} \left(8 \cdot \frac{16}{155} + 6 \cdot \frac{11}{155} + 5 \cdot \frac{7}{155} + 4 \cdot \frac{1}{155} \right) + \frac{120}{155} = \frac{833}{775} \approx 1.075, \end{aligned}$$

also liefert die Strategie \hat{a} in diesem Fall einen höheren erwarteten Ertrag pro Spielrunde als die Kellystrategie \bar{a} .

Für Beispiel 2.15 gilt $f(\bar{a}) \approx 0.05 > f(\hat{a}) \approx 0.044 > 0$. Leider ist eine positive langfristige Wachstumsrate für die Strategie \hat{a} nicht in jedem Fall gegeben. Hierzu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:

Wir betrachten eine Quelle, die drei Zeichen ausgeben kann. Es liegen folgende Quoten und Wahrscheinlichkeiten vor:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}, \quad p_1 = 0.7, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.1.$$

Mit diesen Parametern sind wir in der Lage, die Strategien \bar{a} und \hat{a} zu bestimmen.

$$\bar{a} = (0.2, 0.05, 0), \quad R = \frac{3}{4}, \quad \hat{a} = (0.2, 0, 0), \quad \hat{R} = 0.8$$

Hierbei bezeichnet \hat{R} denjenigen Anteil, der bei Anwendung der Strategie \hat{a} zurückbehalten wird. Für die langfristige exponentielle Wachstumsrate gilt

$$f(\bar{a}) = 0.7 \log \left(\frac{3}{2} \cdot 0.2 + 0.75 \right) + 0.2 \log (5 \cdot 0.05 + 0.75) + 0.1 \log(0.75) \approx 0.0078 > 0$$

$$f(\hat{a}) = 0.7 \log \left(\frac{3}{2} \cdot 0.2 + 0.8 \right) + 0.3 \log(0.8) \approx -0.0003 < 0.$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

In diesem Fall besitzt die Strategie \hat{a} also eine negative langfristige Wachstumsrate, während die Strategie \bar{a} langfristig zu positivem Wachstum führt.

Wir haben soeben festgestellt, dass es Strategien gibt, die von der Kellystrategie abweichen und einen höheren erwarteten Ertrag pro Spielrunde generieren. Ob dies auch für andere Strategien möglich ist, soll im Folgenden untersucht werden. Angenommen, Kapital sei unendlich oft teilbar. Dann kann ein Investor, der wiederholt einen Bruchteil $f < 1$ seines Kapitals auf eine vorteilhafte Investitionsmöglichkeit setzt, niemals sein gesamtes Geld verlieren. Diese Eigenschaft gilt ebenso für die Kellystrategie. Wir betrachten die Strategie

$$a'_j := \begin{cases} f/l, & \text{falls } p_j \alpha_j = \max\{p_i \alpha_i \mid i = 1, \dots, n\}, \text{ mit } f < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei l die Anzahl der vorhandenen Maxima bezeichnet. Falls nur ein Maximum existiert, setzt der Investor mit dieser Strategie in jeder Spielrunde den Faktor $f < 1$ auf die Investitionsmöglichkeit j mit dem höchsten erwarteten Ertrag. Falls das Maximum nicht eindeutig ist, kann der Spieler dieselben Ergebnisse erzielen, indem er f durch die Anzahl der maximalen Investitionsmöglichkeiten teilt und den Wert f/l auf jede dieser Investitionsmöglichkeiten setzt.

Wir betrachten erneut eine stochastische Quelle (X_t) (vgl. Definition 1.5) mit Alphabet $\Sigma := \{1, \dots, n\}$, den Wahrscheinlichkeiten $P[X_t = j] = p_j$, $t = 1, 2, \dots$, und den Quoten $\alpha_j > 0$ für $j \in \Sigma$. Für die Quoten gelte $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i > 1$ und es gebe mindestens ein $i \in \Sigma$, für das $p_i \alpha_i > 1$ ist. Dann lauten die erwarteten Erträge pro Spielrunde für die Kellystrategie \bar{a} und die Strategie a'

$$K(\bar{a}) = \sum_{i \in \Lambda} p_i \alpha_i \left(p_i - \frac{R}{\alpha_i} \right) + R \quad \text{und}$$

$$K(a') = p_j \alpha_j f + 1 - f = 1 + f(p_j \alpha_j - 1).$$

Für $K(\bar{a})$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren und wegen $R - R(\sum_{i \in \Lambda} p_i) = R(\sum_{i \in \Lambda'} p_i)$

$$K(\bar{a}) = \sum_{i \in \Lambda} p_i^2 \alpha_i + R \left(\sum_{k \in \Lambda'} p_k \right).$$

Wir möchten den Wert von f ermitteln, für den die beiden erwarteten Erträge gleich sind, also $K(a') = K(\bar{a})$ gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1 + f(p_j \alpha_j - 1) &= \sum_{i \in \Lambda} p_i^2 \alpha_i + R \left(\sum_{k \in \Lambda'} p_k \right) \\ \Leftrightarrow f &= \underbrace{\frac{\sum_{i \in \Lambda} p_i^2 \alpha_i + R(\sum_{k \in \Lambda'} p_k) - 1}{p_j \alpha_j - 1}}_{=: f^*}, \quad \text{da } p_j \alpha_j - 1 > 0. \end{aligned}$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass $K(a') > K(\bar{a})$, falls $f > f^*$, und $K(a') < K(\bar{a})$, falls $f < f^*$, gilt. Also kann ein Investor einen größeren erwarteten Ertrag pro Spielrunde als mit der

Kellystrategie erzielen, sofern er einen Anteil f wählt, der größer als der Referenzwert f^* ist.

Um dies zu veranschaulichen, verwenden wir erneut die Zahlen aus Beispiel 2.15. Für $K(a') = K(\bar{a})$ ergibt sich der Wert

$$f^* = \frac{\frac{1}{25}(8 + 6 + 5 + 4) + \frac{24}{31} \cdot \frac{1}{5} - 1}{8 \cdot \frac{1}{5} - 1} = \frac{58}{465} \approx 0.125$$

und somit erhält ein Spieler, der den Anteil $f > 58/465$ setzt, einen größeren erwarteten Ertrag pro Spielrunde als ein Spieler, der sein Geld gemäß der Kellystrategie verteilt. Es sollte hierbei jedoch berücksichtigt werden, dass die Alternativstrategie keine Diversifikation zulässt, da in jeder Runde nur auf eine Möglichkeit gesetzt wird, die mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ eintritt, während mit Wahrscheinlichkeit $4/5$ das eingesetzte Geld verloren wird. Demgegenüber bekommt der Spieler mit der Kellystrategie mit Wahrscheinlichkeit $4/5$ wenigstens einen Teil des Einsatzes zurück und nur mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ ist der gesamte Einsatz verloren. Daher wird das Kapital des Spielers mit dem größeren erwarteten Ertrag pro Spielrunde größeren Schwankungen unterliegen.

2.4. Wachstumsabschätzung

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie groß die maximale Wachstumsrate ist, die sich bei Anwendung der Kellystrategie ergibt. Hierzu betrachten wir eine diskrete stochastische Quelle (X_t) (s. Definition 1.5) mit n -elementigem Alphabet $\Sigma = \{1, \dots, n\}$. Im Gegensatz zu vorher wird jetzt jedoch angenommen, dass sich die Ausgabewahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zeichen mit der Zeit nicht verändern, so dass

$$P[X_t = j] = p_j, \quad t = 1, 2, \dots, \quad j \in \Sigma$$

gilt. Daher lassen wir im Folgenden den Index t weg und bezeichnen die Quelle mit X . Auch die Quoten α_j , die für das Auftreten von Zeichen $j \in \Sigma$ gezahlt werden, seien zeitunabhängig und es gelte $\alpha_j > 0$. Dann definieren wir für ein Quotenschema $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$B(\alpha) = B(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}.$$

Falls $B(\alpha) < 1$ ist, kann der Investor garantiert positive Gewinne realisieren. Wenn er den Betrag $\alpha^{(j)} := \prod_{i \neq j} \alpha_i$ auf das Ereignis $(X = j)$ für alle $j \in \Sigma$ setzt, erhält er den Nettogewinn

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j \prod_{i=1}^n \alpha_i \right) - \sum_{j=1}^n \alpha^{(j)} = (1 - B(\alpha)) \prod_{j=1}^n \alpha_j > 0.$$

Aus diesem Grund werden solche Quoten in der Realität gewöhnlich nicht auftreten. Wir betrachten daher den Fall $B(\alpha) \geq 1$. Dann ergeben sich die folgenden Größen für die maximale Wachstumsrate $f(\bar{a})$, wenn der Investor sein Kapital gemäß der optimalen Strategie \bar{a} (vgl. Definition 2.4) aufteilt:

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Satz 2.17

Es sei $B(\alpha) = 1$. Dann ist

$$f(\bar{a}) = H(1/\alpha) - H(X),$$

mit $H(1/\alpha) := \sum_{j=1}^n p_j \log(\alpha_j)$ und $H(X) := \sum_{j=1}^n p_j \log(1/p_j)$.

Es sei $B(\alpha) > 1$ und es gebe mindestens ein $j \in \Sigma$, für das $p_j \alpha_j > 1$ ist. Dann gilt

$$f(\bar{a}) = [H(1/\alpha) - H(X)] + \sum_{i=k+1}^n p_i \log\left(\frac{R}{p_i \alpha_i}\right)$$

mit $R := (1 - \sum_{i=1}^k p_i) / (1 - \sum_{i=1}^k 1/\alpha_i)$, wobei die Zeichen aus Σ wie bisher in zwei Mengen aufgeteilt werden, so dass $\Lambda := \{1, \dots, k\}$ und $\Lambda' := \{k+1, \dots, n\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} i \in \Lambda &\Rightarrow \bar{a}_i > 0, \\ i \in \Lambda' &\Rightarrow \bar{a}_i = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Falls $B(\alpha) = 1$ ist, wissen wir aus Lemma 2.11, dass eine optimale Strategie darin besteht, $\bar{a}_j = p_j$ für alle $j \in \Sigma$ zu setzen. Für diese Strategie ergibt sich die langfristige Wachstumsrate als

$$\begin{aligned} f(\bar{a}) &= \sum_{j=1}^n p_j \log(p_j \alpha_j) \\ &= H(1/\alpha) - H(X). \end{aligned}$$

Sei nun $B(\alpha) > 1$. Dann kennen wir aus Lemma 2.13 eine optimale Strategie mit

$$\bar{a}_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \in \Lambda', \\ p_i - R/\alpha_i, & \text{falls } i \in \Lambda. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet R wie im vorigen Abschnitt das nicht eingesetzte Kapital. Für die Strategie \bar{a} ergibt sich die folgende maximale Wachstumsrate

$$\begin{aligned} f(\bar{a}) &= \sum_{i=1}^k p_i \log(\alpha_i p_i - R + R) + \sum_{i=k+1}^n p_i \log(R) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \log(p_i) + \sum_{i=1}^k p_i \log(\alpha_i) + \sum_{i=k+1}^n p_i \log\left(\frac{R p_i \alpha_i}{p_i \alpha_i}\right) \\ &= H(1/\alpha) - H(X) + \sum_{i=k+1}^n p_i \log\left(\frac{R}{p_i \alpha_i}\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand ≥ 0 ist, da $p_j \alpha_j \leq R$ für alle $j \in \Lambda'$. ■

2.5. Erwarteter Gewinn des Buchmachers

Falls $B(\alpha) > 1$ gilt, handelt es sich für den Spieler um ein unvorteilhaftes Spiel, da der Buchmacher nicht das gesamte Geld auszahlt, sondern einen Teil einbehält. Daher wollen wir in diesem Abschnitt den erwarteten Gewinn des Buchmachers F untersuchen (vgl. Definition 1.34). Um diesen zu bestimmen, definieren wir die Größe K_i als das Kapital, das insgesamt in einer Spielrunde auf die i -te Investitionsmöglichkeit gesetzt wird. Es gelte $K_i \geq 0$. Dies ergibt

$$F = \sum_{i=1}^n K_i - \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i K_i = \sum_{i=1}^n K_i (1 - p_i \alpha_i).$$

Hieraus wird deutlich, dass die Frage, ob der Buchmacher einen positiven erwarteten Gewinn besitzt, hauptsächlich von den Größen $1 - p_i \alpha_i$ abhängt. Zunächst können wir festhalten:

$$1 - p_i \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad F \geq 0.$$

Falls es mindestens eine Investitionsmöglichkeit i gibt, für die $1 - p_i \alpha_i > 0$ und $K_i > 0$, dann gilt $F > 0$.

Sobald es jedoch mindestens eine Alternative i gibt, für die $1 - p_i \alpha_i < 0$ ist, existiert auch eine Strategie (vgl. Definition 1.33), durch die der erwartete Gewinn des Buchmachers negativ wird, wenn alle Spieler sie anwenden. Ein Beispiel hierfür lautet:

$$a_i := \begin{cases} f, & 0 < f < 1, \text{ falls } p_i \alpha_i > 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass m Personen diese Strategie benutzen. Dann berechnet sich der erwartete Gewinn des Buchmachers als

$$F = \sum_{i, p_i \alpha_i > 1} m f (1 - p_i \alpha_i) < 0.$$

Da jede Investitionsmöglichkeit, für die $1 - p_i \alpha_i < 0$ gilt, zu einem negativen Summanden in der erwarteten Gewinnfunktion des Buchmachers führt, wenn ein positiver Betrag K_i darauf gesetzt wird, sollte der Buchmacher die Quoten so auswählen, dass es möglichst wenige solcher Möglichkeiten gibt. Wir nehmen daher an, dass nur eine Möglichkeit j mit $1 - p_j \alpha_j < 0$ angeboten wird. Dann erhält der Buchmacher den erwarteten Gewinn

$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \underbrace{K_i (1 - p_i \alpha_i)}_{\geq 0} + \underbrace{K_j (1 - p_j \alpha_j)}_{\leq 0}.$$

Wenn der Buchmacher die Quoten frei wählen kann, ist es immer möglich, diese so festzulegen, dass

$$-1 + p_j \alpha_j = 1 - p_i \alpha_i \tag{2.16}$$

für jedes $i \neq j$ gilt. Für beliebige Quotenschemata α ist allerdings die Voraussetzung $B(\alpha) > 1$ in diesem Fall nicht unbedingt erfüllt. Es ist jedoch durch die Wahl einiger

ausreichend kleiner α_i immer möglich, ein Quotenschema α zu finden, das die Voraussetzung (2.16) erfüllt und für das außerdem $B(\alpha) > 1$ und $\alpha_i > 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Sobald der Buchmacher ein solches Quotenschema bestimmt hat, ergibt sich für seinen erwarteten Gewinn

$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K_i(1 - p_i \alpha_i) + K_j(1 - p_j \alpha_j) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K_i - K_j > 0.$$

Wenn es dem Buchmacher also gelingt, dass die Summe aller auf sämtliche Möglichkeiten außer j eingesetzten Gelder den Betrag übersteigt, der in Alternative j investiert wurde, erwartet er immer einen positiven Gewinn.

2.6. Totalisator-Wetten

Eine etwas andere Wettform als die bisher betrachtete sind Totalisator-Wetten. Hierbei wird nicht gegen einen Buchmacher gewettet, sondern die Spieler wetten gegeneinander. Diese Wettform heißt daher im Englischen „parimutuel betting“. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass es keine vorher festgelegten Quoten gibt, sondern diese erst bestimmt werden können, wenn alle Einsätze gemacht wurden. Alle gezahlten Einsätze werden zunächst gesammelt. Dann gibt eine diskrete stochastische Quelle (X_t) ein Zeichen $i \in \Sigma$ aus und danach werden die gesamten Einsätze anteilig auf diejenigen Spieler verteilt, die auf $i \in \Sigma$ gesetzt haben. In der Realität werden vor der Auszahlung Steuern, Gebühren etc. abgezogen. Dies soll in unserer Betrachtung jedoch vernachlässigt werden. Die Quoten für die Zeichen $i \in \Sigma$ werden dann als Quotient aus allen Einsätzen und den Einsätzen auf Zeichen i berechnet.

Wie die Kellystrategie für diese Wetten aussieht, wenn die Ausgänge einer binären Zufallsvariable mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden, wurde von Edward W. Piotrowski und Małgorzata Schroeder [PS07] analysiert. In diesem Abschnitt wollen wir das Modell aus [PS07] mit unserem Grundmodell aus Abschnitt 1.1 zusammenfügen, um dadurch auf einfache Weise Ergebnisse für diskrete stochastische Quellen mit n -elementigem Alphabet zu erhalten.

Wir betrachten also eine diskrete stochastische Quelle (X_t) mit Alphabet $\Sigma := \{1, \dots, n\}$. Es wird angenommen, dass m Spieler an dem Spiel teilnehmen. Dann bezeichne h_i^m , $m \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, den Betrag, den Spieler m auf Zeichen $i \in \Sigma$ setzt. Durch

$$H_i := \sum_m h_i^m > 0$$

wird das insgesamt auf Zeichen i gesetzte Kapital beschrieben. Die Quote für Zeichen $i \in \Sigma$ und Spieler m nennen wir α_i^m . Außerdem werden zwei Annahmen zur Beschreibung der Eigenschaften des Spiels getroffen. Einerseits soll ein proportionaler Zusammenhang zwischen dem gesetzten Betrag und der entsprechenden Quote bestehen. Andererseits wird die Gesamtsumme der eingezahlten Einsätze wieder ausgezahlt, es treten also keine Gebühren etc. auf. Daher gilt:

Annahme 1: $\alpha_i^m = c_i h_i^m \quad \forall i, m, \quad c_i \in \mathbb{R}_+$

Annahme 2: $\sum_{i=1}^n H_i = \sum_m \alpha_j^m, \quad j = 1, \dots, n.$

Aus den bisher getroffenen Annahmen lässt sich bereits ein Wert für c_i ermitteln, denn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n H_i &\stackrel{\text{Ann.1}}{=} \sum_m c_i h_i^m = c_i \sum_m h_i^m = c_i H_i \\ \Leftrightarrow \quad c_i &= \frac{\sum_{j=1}^n H_j}{H_i}. \end{aligned}$$

Hieraus können wir schließen, dass

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = 1 \quad (2.17)$$

gilt. In der folgenden Untersuchung wird nur ein Spieler betrachtet, so dass ab jetzt der Index m weggelassen wird. Wir betrachten zunächst nur eine Spielrunde. Es sei C_0 das Kapital vor der Spielrunde und C_j das Kapital nach der Spielrunde, wenn Zeichen $j \in \Sigma$ ausgegeben wurde. Dann gilt

$$C_j = C_0 - \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) + \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Das neue Kapital ist also das vorherige Kapital abzüglich aller Einsätze plus den Gewinn. Da sich das Kapital mit der Zeit multiplikativ entwickelt, wird der Gewinn von Zeichen j durch

$$z_j := \log(C_j) - \log(C_0) = \log\left(\frac{C_j}{C_0}\right)$$

definiert. Außerdem bezeichnen wir mit $a_i := h_i/C_0$ den relativen Anteil, der auf Zeichen $i \in \Sigma$ gesetzt wird. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_k &= \log\left(\frac{C_k}{C_0}\right) = \log\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i + \frac{\alpha_k}{C_0}\right) \\ &= \log\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i + \frac{a_k}{h_k} \alpha_k\right) \\ &= \log\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i + a_k c_k\right). \end{aligned}$$

Wie bisher bezeichnen wir mit $p(j|r)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle im Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots$ das Zeichen j ausgibt, wenn bisher bereits das Wort $r \in \Sigma^{t-1}$ gesendet wurde. Dann können wir den erwarteten Gewinn für das Spiel als den Erwartungswert über die Gewinne der einzelnen Zeichen berechnen.

$$f(z_k) := \sum_{k=1}^n p(k|r) z_k = \sum_{k=1}^n p(k|r) \log\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i + a_k c_k\right)$$

Es wird nun gefordert, dass der Spieler den erwarteten Gewinn des Spiels maximieren möchte. Wenn wir die Funktion $f(z_k)$ mit der Zielfunktion aus Problem 2.5 vergleichen, stellen wir fest, dass diese äquivalent sind, wenn wir den Proportionalitätsfaktor c_k als die Quote $\alpha_k^{(t)}$ auffassen. Daher können wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 verwenden, um eine optimale Strategie \bar{a} für Totalisator-Wetten zu bestimmen. Wir nehmen wie bisher an, dass keine Leerverkäufe erlaubt sind, so dass $\bar{a}_i \geq 0$ für alle $i \in \Sigma$ gilt. Wegen (2.17) betrachten wir eine Situation, die in unserem Grundmodell äquivalent zu der Annahme

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^{(t)}} = 1$$

ist. In [PS07] treffen die Autoren die zusätzliche Annahme, dass der Spieler immer den minimal möglichen Anteil seines Kapitals einsetzen möchte. Aus diesem Grund scheidet $\bar{a}_i = p(i|r)$ als optimale Strategie aus (vgl. auch Bemerkung 2.12). Wir entnehmen Tabelle 2.1, dass in diesem Fall Strategie \bar{a}^1 mit

$$\bar{a}_i^1 = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

und Strategie \bar{a}^2 mit

$$\bar{a}_n^2 = 0, \quad \bar{a}_i^2 = p(i|r) - p(n|r) \frac{H_i}{H_n}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Kandidaten für eine optimale Strategie sind. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Lemma 2.11 können wir zeigen, dass $f(\bar{a}^2) \geq 0$ ist, während $f(\bar{a}^1) = 0$ gilt. Daher haben wir mit \bar{a}^2 eine optimale Strategie gefunden. Der Spieler sollte bei der Anwendung dieser Strategie das Zeichen n , auf welches kein Geld gesetzt wird, so wählen, dass $p(i|r)H_n \geq p(n|r)H_i \forall i \neq n$ gilt. Dadurch ist sichergestellt, dass für $i = 1, \dots, n$ alle Anteile $\bar{a}_i^2 \geq 0$ sind.

2.7. Hidden Markov Modelle (HMMs)

In diesem Abschnitt betrachten wir Hidden Markov Modelle, um ihre Ausgaben zu analysieren und eine Strategie zu entwickeln, auf die Ausgaben zu wetten. Hidden Markov Modelle werden im Allgemeinen durch fünf Parameter beschrieben (siehe z.B. [EM02]): $\mathcal{M} = (\Sigma, S, \pi, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ mit

- $\Sigma = \{1, \dots, n\}$: endliches Alphabet (Beobachtungsraum),
- $S = \{1, \dots, M\}$: Menge der versteckten Zustände,
- $\pi \in \mathbb{R}^M$: Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung,
- $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in S} \in \mathbb{R}^{M \times M}$: Zustandsübergangsmatrix und
- $\mathbf{B} = (b_{iv})_{i \in S, v \in \Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times n}$: Beobachtungsmatrix, wobei b_{iv} die Wahrscheinlichkeit angibt, im Zustand $i \in S$ das Zeichen $v \in \Sigma$ zu beobachten.

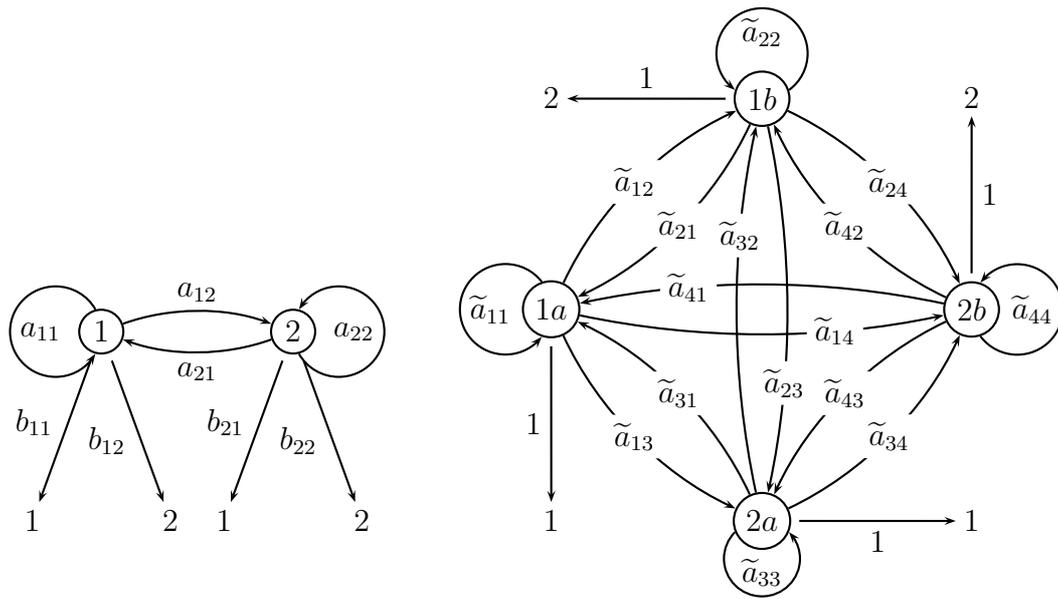


Abbildung 2.3.: Links: Schematische Darstellung eines Hidden Markov Modells, rechts: Alternative Modellierung für dasselbe HMM

Dieser Prozess besteht aus zwei Teilen: Seine Ausgabe Y_t zur Zeit t ist ein beobachtbares Zeichen aus dem endlichen Alphabet Σ . Diese Ausgaben hängen jedoch von den Zuständen einer Markovkette ab, die versteckt („hidden“), also nicht beobachtbar, sind. Die Markovkette wird durch die Übergangsmatrix \mathbf{A} und die Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung π beschrieben, während die Ausgaben der Zustände durch die Einträge der Beobachtungsmatrix \mathbf{B} bestimmt werden.

Eine zweite Methode zur Modellierung von Hidden Markov Modellen besteht darin, den Zustandsraum S auf \tilde{S} zu vergrößern und die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} in einer Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ zu vereinigen. Dahinter steht der Gedanke, dass dann jeder Zustand des Zustandsraumes \tilde{S} mit Sicherheit ein bestimmtes Zeichen ausgibt. Es gilt $\tilde{S} := \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, n\}$ und die Einträge der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ergeben sich durch $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{(ik)(i'k')} = a_{ii'}b_{i'k'}$ für $i, i' \in S$ und $k, k' \in \Sigma$ (vgl. [BP66, S. 1555]). Abbildung 2.3 zeigt die beiden Modellierungsarten für ein Hidden Markov Modell mit ursprünglich zwei Zuständen 1 und 2 und zwei Zeichen, $\Sigma = \{1, 2\}$. Der Zustandsraum \tilde{S} umfasst in diesem Fall vier Elemente, $\tilde{S} = \{1a, 1b, 2a, 2b\}$, wovon die Zustände 1a und 2a mit Sicherheit Zeichen 1 ausgeben, während 1b und 2b Zeichen 2 ausgeben. In der folgenden Betrachtung werden wir die zweite Modellierungsmethode verwenden.

Zunächst wollen wir die stochastischen Grundlagen von Hidden Markov Modellen kurz zusammenfassen. Diese wurden [EM02, S. 1524] entnommen und auf die zweite Modellierungsmethode angepasst.

Wir bezeichnen die Folge der Zustände der Markovkette mit $(S_t)_{t \geq 1}$, $S_t \in \tilde{S}$. Die Bewegungen von einem Zustand in einen anderen werden durch die Einträge in der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ beschrieben. Hierfür gilt

$$\tilde{a}_{ij} = \mathbb{P}[S_t = j \mid S_{t-1} = i].$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Die ausgegebenen Zeichen werden durch die Quelle (X_t) beschrieben. Mit s_t und x_t werden Realisationen der jeweiligen Prozesse bezeichnet. Wenn für die Markovkette eine bestimmte Realisation s_t eingetreten ist, steht fest, welches Zeichen x_t dann ausgegeben wird. Diesen Zusammenhang beschreiben wir durch die deterministische Funktion

$$h(s_t) = x_t.$$

Im Folgenden bezeichnen obere Indizes die gesamte Sequenz $x^n := (x_1, \dots, x_n)$, während die unteren Indizes nur ein Ausgabezeichen x_n zum Zeitpunkt $t = n$ beschreiben. Als nächstes wollen wir die n -dimensionale Dichte von (X^n, S^n) betrachten. Da der Prozess (X^n) deterministisch von (S^n) abhängt, ist diese gleich der Dichte von (S^n) und es gilt

$$p(x^n, s^n) = p(s^n) = p(s_1) \prod_{t=2}^n p(s_t | s_{t-1}),$$

$$\text{mit } p(s_1) = \tilde{\pi}_{s_1} = \pi_{s_1} b(x_1 | s_1),$$

$$p(s_t | s_{t-1}) = \tilde{a}_{s_{t-1}s_t}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Wir setzen $\tilde{\pi}_{s_1} := \tilde{a}_{s_0s_1} \forall s_1 \in \tilde{S}$. Dann können wir die n -dimensionale Dichte von (X^n) als

$$p(x^n) = \sum_{s^n, h(s^n)=x^n} \prod_{t=1}^n \tilde{a}_{s_{t-1}s_t}$$

beschreiben. Dies kann weiter umgeformt werden zu

$$p(x^n) = p(x_1) \prod_{t=1}^n p(x_t | x^{t-1})$$

$$\text{mit } p(x_1) = \sum_{s_1 \in \tilde{S}, h(s_1)=x_1} \tilde{\pi}_{s_1}, \quad p(x_t | x^{t-1}) = \sum_{s_t \in \tilde{S}, h(s_t)=x_t} p(s_t | x^{t-1}), \quad t = 2, 3, \dots$$

Mit diesen Vorarbeiten sind wir in der Lage, die Situation eines Spielers zu beschreiben, der auf die Ausgaben (X_t) , $t = 1, 2, \dots$, eines Hidden Markov Modells mit Alphabet $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ wetten möchte. Hierzu wird angenommen, dass die Quoten α_i , $i = 1, \dots, n$, betragen und der Spieler die Strategie a verfolgt und daher die Anteile $a(i|x^{t-1})$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots$, einsetzt. Im Zeitpunkt 0 werde mit Sicherheit das leere Wort \square beobachtet, es gilt also $P[X_0 = \square] = 1$ und das Startkapital des Spielers sei $C_0 := 1$. Dann können wir dieselbe Argumentation durchführen wie am Anfang von Abschnitt 2.3. Wir definieren uns das Ereignis $A_{xi} = \{X^t = (xi)\}$, welches eintritt, wenn zunächst das Wort $x \in \Sigma_{t-1}$ und danach das Zeichen $i \in \Sigma$ beobachtet wird. Dann kann das Kapital des Spielers durch

$$C_t(a) = \prod_{i \in \Sigma, x \in \Sigma_{t-1}} \left(\alpha_i a(i|x) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|x) \right)^{\mathbf{1}_{A_{xi}}(X^t)} C_0, \quad t = 1, 2, \dots$$

beschrieben werden. Wir interessieren uns für die erwartete logarithmische Wachstumsrate des Kapitals und betrachten daher

$$\mathbb{E}[\log(C_t(a))] = \sum_{i \in \Sigma, x \in \Sigma_{t-1}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{xi}}(X^t)] \log \left(\alpha_i a(i|x) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|x) \right).$$

Da der Erwartungswert der Indikatorfunktion eines Ereignisses gleich der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist, ergibt sich

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{xi}}(X^t)] = \mathbb{P}[A_{xi}] = p(xi) = p(x)p(i|x), \quad x \in \Sigma_{t-1}, i \in \Sigma$$

und somit

$$\mathbb{E}[\log(C_t(a))] = \sum_{i \in \Sigma, x \in \Sigma_{t-1}} p(x)p(i|x) \log \left(\alpha_i a(i|x) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|x) \right).$$

Statt vor dem Spiel alle möglichen Zeichenkombinationen $x \in \Sigma_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots$, auszuprobieren, kann der Spieler auch folgendes tun, um eine optimale Strategie zu bestimmen: Vor der ersten Runde maximiert er die vorliegende Funktion mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_1 = i | X_0 = \square]$, $i = 1, \dots, n$. Für $t \geq 2$ kennt er bereits die bisher ausgegebene Sequenz $x^{t-1} \in \Sigma^{t-1}$. Daher kann er die Wahrscheinlichkeit $p(x^{t-1})$ ignorieren und die Funktion mithilfe der bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(i|x^{t-1})$ maximieren. Wir bezeichnen mit $a(\cdot|x^{t-1})$ eine Strategie unter der Vorgeschichte $x^{t-1} \in \Sigma^{t-1}$. Dann muss der Spieler für das eingetretene $x^{t-1} \in \Sigma^{t-1}$ folgendes Optimierungsproblem lösen:

$$\begin{aligned} \max_{a(\cdot|x^{t-1})} f(a(\cdot|x^{t-1})) &= \sum_{i=1}^n p(i|x^{t-1}) \log \left(\alpha_i a(i|x^{t-1}) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|x^{t-1}) \right) \\ \text{u.d.N.} \quad a(i|x^{t-1}) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a(j|x^{t-1}) \leq 1. \end{aligned}$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems können wir die Verfahren aus Abschnitt 2.3 erneut benutzen. Wir erhalten dann aufgrund von Lemma 2.11 und Lemma 2.13 die folgenden optimalen Strategien für den betrachteten Spieler:

1. Falls $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i \leq 1$ gilt, lautet eine optimale Strategie

$$\bar{a}(i|x^{t-1}) = p(i|x^{t-1}) = \sum_{s_t \in \tilde{S}, h(s_t)=i} p(s_t|x^{t-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Falls $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i > 1$ gilt, lauten die optimalen Strategien

- falls $p(i|x^{t-1})\alpha_i \leq 1 \forall i \in \Sigma$: Setze $\bar{a}(i|x^{t-1}) = 0$ für alle $i \in \Sigma$.
- falls $p(i|x^{t-1})\alpha_i > 1$ für mindestens ein $i \in \Sigma$: Setze

$$\bar{a}(i|x^{t-1}) = \begin{cases} 0, & i \in \Lambda' \\ p(i|x^{t-1}) - R/\alpha_i, & i \in \Lambda. \end{cases}$$

Hierbei gilt wie in Abschnitt 2.3, dass die Mengen Λ und Λ' so definiert sind, dass

$$\begin{aligned} i \in \Lambda &\Leftrightarrow \bar{a}(i|x^{t-1}) > 0, \\ i \in \Lambda' &\Leftrightarrow \bar{a}(i|x^{t-1}) = 0 \end{aligned}$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

gilt. Wenn für alle $i \in \Sigma$ die Produkte $p(i|x^{t-1})\alpha_i$ so geordnet werden, dass $p(i|x^{t-1})\alpha_i \geq p(i+1|x^{t-1})\alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, gilt, dann wird wie in (2.12) die Größe R als der kleinste positive Wert aller R_k bestimmt, wobei

$$R_k := \frac{1 - p_k}{1 - \sigma_k}, \quad \text{mit} \quad p_k = \sum_{i=1}^k p(i|x^{t-1}), \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i}$$

gilt. Aus dieser Aufzählung kann der Spieler seine optimale Strategie für alle möglichen Situationen bestimmen.

Für praktische Anwendungen taucht an dieser Stelle jedoch ein Problem auf. Für Hidden Markov Modelle werden die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten nämlich als unbekannt angenommen. Wenn der Spieler diese Wahrscheinlichkeiten aber nicht kennt, ist er nicht in der Lage, seine optimale Strategie auszurechnen. Ein möglicher Ausweg ist, dass der Spieler die Wahrscheinlichkeiten schätzt. Hierzu muss er zunächst eine Zeichensequenz beobachten. Dann kann er die Parameter des Hidden Markov Modells bestimmen, die mit der größten Wahrscheinlichkeit zu dieser Ausgabesequenz geführt haben. Dies kann mithilfe des Baum(-Welch)-Algorithmus durchgeführt werden (vgl. [EM02, S. 1541 ff.]). Nachdem der Spieler die Parameter des Hidden Markov Modells geschätzt hat, kann er mit dem Vorwärts-Algorithmus die Wahrscheinlichkeiten $p(s_t|x^{t-1})$ schätzen und danach seine optimale Strategie berechnen.

2.8. Eigenschaften der Kellystrategie im Grundmodell

In diesem Abschnitt sollen einige der Aussagen, die in Abschnitt 1.3 aufgezählt wurden, für die optimale Strategie im Grundmodell bewiesen werden. Wir wollen also herausfinden, welche der Eigenschaften für Quellen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten weiterbestehen, wenn Quellen mit endlicher Evolutionsdimension betrachtet werden. Wir bezeichnen hierbei die in Abschnitt 2.3 entwickelte optimale Strategie \bar{a} als Kellystrategie.

Satz 2.18

Für die Kellystrategie ist die Ruinwahrscheinlichkeit des Investors gleich null, d.h.

$$C_t(\bar{a}) > 0 \quad \text{P} - \text{fast sicher.}$$

Beweis. Falls $\alpha_i^{(t)} = 0$ für $i \in \Sigma$ auftritt, benutzen wir die Konvention, dass

$$\frac{a}{0} = +\infty, \quad \text{für } a \in (0, \infty].$$

Wir bezeichnen mit $C_t(\bar{a})$ das Kapital des Investors, der die Kellystrategie verwendet, im Zeitpunkt t . Daher gilt

$$C_t(\bar{a}) = \prod_{k=1}^t V_k(\bar{a}), \quad \text{mit}$$

$$V_k(\bar{a}) = \alpha_i^{(k)} \bar{a}(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n \bar{a}(j|r), \quad \text{falls } X_k = i, \quad \text{mit } i \in \Sigma, \quad r \in \Sigma^{k-1}.$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle aus Lemma 2.11 und Lemma 2.13.

Sei zunächst $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} \leq 1$. Dann setzt der Investor gemäß der Kellystrategie $\bar{a}(i|r) = p(i|r)$, so dass $\sum_{j=1}^n \bar{a}(j|r) = 1$ ist. Man beachte, dass unter dieser Annahme aufgrund der oben getroffenen Konvention alle Quoten $\alpha_i^{(t)} > 0$ sind. Es sind zwei verschiedene Situationen möglich:

1. Für alle $i \in \Sigma$ gilt $p(i|r) > 0$.

Da alle Quoten positiv sind, gilt auch für alle Erträge pro Spielrunde

$$V_k(\bar{a}) = \alpha_i^{(k)} p(i|r) > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Aus diesem Grund sind auch die Produkte der Erträge positiv und es gilt $C_t(\bar{a}) > 0$ für $t = 1, 2, \dots$ und somit $\mathbb{P}[C_t(\bar{a}) = 0] = 0$.

2. Es existiert mindestens ein Zeichen $i \in \Sigma$ mit $p(i|r) = 0$.

Der Investor würde in diesem Fall nichts auf die Zeichen $i \in \Sigma$ setzen, für die $p(i|r) = 0$ gilt. Solange ausschließlich Zeichen $j \in \Sigma$ mit $p(j|r) > 0$ ausgegeben werden, ist $C_t(\bar{a}) > 0$ für alle $t = 1, 2, \dots$, da erneut $\alpha_j^{(t)} > 0$ gilt. Falls im Zeitschritt t ein Zeichen i auftritt, für das $p(i|r) = 0$ gilt, so ist $C_t(\bar{a}) = 0$. Dies ist jedoch nur auf einer Nullmenge der Fall, da jedes dieser Ereignisse Wahrscheinlichkeit 0 besitzt. Daher gilt auch hier $C_t(\bar{a}) > 0$ P-fast sicher.

Sei nun $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} > 1$. Dann setzt der Investor laut der Kellystrategie entweder

$$\bar{a}(i|r) = 0, \quad i \in \Sigma, \quad r \in \Sigma^{t-1},$$

falls $p(i|r)\alpha_i^{(t)} \leq 1$ für alle $i \in \Sigma$ gilt, oder er setzt

$$\bar{a}(i|r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \in \Lambda', \\ p(i|r) - R/\alpha_i^{(t)}, & \text{falls } i \in \Lambda, \end{cases}$$

falls $p(i|r)\alpha_i^{(t)} > 1$ für mindestens ein $i \in \Sigma$.

Im ersten Fall setzt der Investor überhaupt kein Geld ein, so dass er auch nie Geld verlieren kann und daher ist $\mathbb{P}[C_t(\bar{a}) = 0] = 0$.

Im zweiten Fall behält der Spieler immer einen positiven Betrag R zurück, welcher durch

$$1 - \sum_{j=1}^n \bar{a}(j|r) = R, \quad j \in \Sigma, \quad r \in \Sigma^{t-1},$$

berechnet werden kann. Falls nun im Zeitschritt t das Zeichen $i \in \Lambda'$ ausgegeben wird, ergibt sich $V_t(\bar{a}) = R > 0$. Falls andererseits im Zeitschritt t das Zeichen $i \in \Lambda$ ausgegeben wird, ergibt sich $V_t(\bar{a}) = p(i|r)\alpha_i^{(t)} > 0$, da aufgrund der Eigenschaften der Menge Λ (vgl. (2.12), S. 84) nur Zeichen darin enthalten sind, für die das Produkt $p(i|r)\alpha_i^{(t)} > 0$ ist. Da somit alle Erträge $V_t(\bar{a})$, $t = 1, 2, \dots$, positiv sind, ist auch deren Produkt positiv und es gilt $\mathbb{P}[C_t(\bar{a}) = 0] = 0$.

Damit ist die Aussage für alle auftretenden Fälle bewiesen. ■

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Um den folgenden Satz 2.23 zu beweisen, sind zunächst einige Vorarbeiten nötig. Hierzu führen wir den Begriff der gleichmäßigen Integrierbarkeit wie in [Gra88, S. 108] ein und geben ein zugehöriges Lemma an (vgl. [Gra88, S. 109]), welches wir für den Beweis des nachfolgenden Lemmas benötigen.

Definition 2.19 (Gleichmäßig integrierbar)

Eine Folge X_n von Zufallsvariablen wird gleichmäßig integrierbar genannt, wenn

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|X_n| \geq r} |X_n| d\mathbf{P} = 0$$

gleichmäßig in n gilt. Dies bedeutet, dass für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ein R existiert, so dass

$$\int_{|X_n| \geq r} |X_n| d\mathbf{P} < \varepsilon, \quad \text{für alle } r \geq R \text{ und alle } n.$$

Lemma 2.20

Wenn eine integrierbare Funktion g (z.B. eine Konstante) existiert, für die $|X_n| \leq g$ für alle n ist, dann sind die X_n gleichmäßig integrierbar.

Lemma 2.21

Es sei a eine Strategie, deren Ruinwahrscheinlichkeit gleich null ist. Die Zufallsvariable $W_k(a)$ bezeichne die logarithmischen Erträge der Strategie a zum Zeitpunkt k . Es gilt also $W_k(a) = \log(V_k(a))$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Strategie a erfülle zusätzlich die folgenden Voraussetzungen: Falls $\sum_{j=1}^n a(j|r) = 1$ für $j \in \Sigma$ und $r \in \Sigma^{t-1}$ gilt, dann ist $a(i|r) \geq \varepsilon$, für alle $i \in \Sigma$. Dies bedeutet, dass die Einsätze auf ein Zeichen keine Nullfolge bilden dürfen, wenn das gesamte Kapital eingesetzt wird. Falls andererseits $\sum_{j=1}^n a(j|r) < 1$, dann gilt $1 - \sum_{j=1}^n a(j|r) \geq \varepsilon$, für $j \in \Sigma$, $r \in \Sigma^{t-1}$. Behält der Investor also einen Teil des Kapitals zurück, dann darf dieser Rest keine Nullfolge bilden. Außerdem gelte $1 < \alpha_i^{(t)} \leq c_1 < \infty$ für alle $t = 1, 2, \dots$, $i \in \Sigma$. Dann ist die Folge

$$\frac{1}{t} \left(\sum_{k=1}^t W_k(a) \right)$$

gleichmäßig integrierbar bezüglich \mathbf{P} .

Beweis. Durch die Annahme, dass die Ruinwahrscheinlichkeit der Strategie \mathbf{P} -fast sicher gleich null ist, sind die Erträge $V_k(a) > 0$ für alle Zeitpunkte k . Dies ergibt sich sofort, da das Kapital durch

$$C_t(a) = \prod_{k=1}^t V_k(a)$$

berechnet wird. Sei nun $0 < V_k(a) < 1$. Dies kann in zwei Fällen vorkommen:

- Es gilt $\sum_{j=1}^n a(j|r) = 1$ im Zeitpunkt k . In diesem Fall hat der Investor sein ganzes Geld eingesetzt. Für die Zufallsgröße $W_k(a)$ gilt dann

$$W_k(a) = \log \left(\alpha_i^{(t)} a(i|r) \right), \quad \text{falls } X_k = i.$$

Aufgrund der getroffenen Annahmen können wir dies abschätzen durch

$$W_k(a) \geq \log \left(\alpha_i^{(t)} \varepsilon \right) \geq \log(\varepsilon).$$

In diesem Fall finden wir also immer eine Konstante $c_2 = |\log(\varepsilon)|$ mit $|W_k(a)| \leq c_2$.

- Es gilt $\sum_{j=1}^n a(j|r) < 1$ im Zeitpunkt k . Dann erhält der Investor $1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)$, falls $X_k = i$ und $a(i|r) = 0$ auftreten, oder er bekommt $\alpha_i^{(k)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r)$, falls $X_k = i$ und $a(i|r) > 0$ eingetreten sind. In jedem Fall lässt sich mit den oben genannten Forderungen die Zufallsvariable $W_k(a)$ durch

$$W_k(a) \geq \log \left(1 - \sum_{j=1}^n a(j|r) \right) \geq \log(\varepsilon)$$

abschätzen, so dass auch in diesem Fall $|W_k(a)| \leq c_2$ gilt.

Durch die obere Beschränkung der Quoten gilt für alle Zeitpunkte k

$$W_k(a) = \log \left(\alpha_i^{(k)} a(i|r) + 1 - \sum_{j=1}^n a(j|r) \right) \leq \log(c_1 + 1),$$

da sowohl $a(i|r) \in [0, 1]$ als auch $\sum_{j=1}^n a(j|r) \in [0, 1]$ erfüllt sein muss. Sei nun $c_3 := c_2 + \log(c_1 + 1)$. Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t |W_k(a)| &\leq t c_3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t} \left(\sum_{k=1}^t |W_k(a)| \right) &\leq c_3 < \infty \quad \text{für alle } t \geq 1. \end{aligned}$$

Mit der Konstante c_3 haben wir somit eine integrierbare Funktion gefunden, die die Bedingungen von Lemma 2.20 erfüllt und daher ist die betrachtete Folge gleichmäßig integrierbar. ■

Zum Beweis des Satzes 2.23 benötigen wir außerdem noch ein Korollar, welches [Gra88, S. 222] entstammt.

Korollar 2.22

Das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ sei asymptotisch im Mittel stationär mit stationärem Mittel $\bar{\mathbb{P}}$ (vgl. Definition 1.24) und die Folge $t^{-1} \sum_{i=0}^{t-1} fT^i$ sei gleichmäßig integrierbar bezüglich \mathbb{P} . Dann existiert der folgende Grenzwert \mathbb{P} -fast sicher und $\bar{\mathbb{P}}$ -fast sicher:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} fT^i = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[f | \mathcal{I}],$$

wobei $\mathcal{I} := \{F \in \mathcal{F} | T^{-1}F = F\}$ die Unter- σ -Algebra der invarianten Ereignisse bezeichnet. Außerdem gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[f | \mathcal{I}]] = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[f | \mathcal{I}]] = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}[f]. \quad (2.18)$$

Kapitel 2. Verallgemeinerungen der Kellystrategie

Wenn das System zusätzlich ergodisch ist, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} fT^i = \mathbb{E}_{\bar{P}}[f].$$

In Satz 2.18 haben wir bereits festgestellt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit der Kellystrategie gleich null ist. Allgemeine Strategien a können jedoch durchaus eine positive Ruinwahrscheinlichkeit besitzen, so dass $\mathbb{P}[C_t(a) = 0] > 0$ für alle $t = 1, 2, \dots$ gilt. Dies ist z.B. der Fall, wenn sich $V_t(a) = 0$ ergibt, falls $X_t = i$ für ein festes $i \in \Sigma$ mit $p(i|r) > 0$ für alle $r \in \Sigma^{t-1}$ sowie $V_t(a) > 0$, falls $X_t = j$ mit $j \in \Sigma, j \neq i$. Mit der Multiplikationsregel 1.14 lässt sich in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass der Spieler zu einem festen Zeitpunkt t ruiniert ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[C_t(a) = 0] &= 1 - \mathbb{P}[C_t(a) > 0] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X_1 \neq i] \mathbb{P}[X_2 \neq i | X_1 \neq i] \dots \mathbb{P}[X_t \neq i | X_1 \neq i, \dots, X_{t-1} \neq i]. \end{aligned}$$

Da die Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite der Gleichung alle kleiner als eins sind, wird die Ruinwahrscheinlichkeit bei Anwendung der Strategie a im Zeitverlauf immer größer. Es gilt sogar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[C_t(a) = 0] = 1.$$

Dies bedeutet, dass ein Spieler, der eine Strategie mit positiver Ruinwahrscheinlichkeit unendlich oft anwendet, tatsächlich irgendwann ruiniert sein wird. Aus diesem Grund kann aber die erwartete langfristige Wachstumsrate einer solchen Strategie a niemals größer sein als die der Kellystrategie. Im folgenden Satz schließen wir ebenfalls Strategien aus, deren mögliche Verluste zu groß sind und beschränken uns daher auf Strategien a , die die Voraussetzungen von Lemma 2.21 erfüllen.

Satz 2.23

Es gelte $1 < \alpha_i^{(t)} < \infty$ für alle $t \geq 1, i \in \Sigma$. Dann maximiert die Kellystrategie \bar{a} im Erwartungswert asymptotisch die langfristige Wachstumsrate des Kapitals unter allen Strategien, die die Voraussetzungen von Lemma 2.21 erfüllen, d.h.

$$\mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(\bar{a})) \right] \geq \mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(a)) \right].$$

Beweis. Wir betrachten das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ mit Stichprobenraum $\Omega := \Sigma^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \omega_i \in \Sigma, i = 1, 2, \dots\}$. Es bezeichne T den Schiebeoperator aus Definition 1.10. Für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ sei f die Koordinatenfunktion, für die

$$f(\omega) = \omega_1$$

gilt. Zusammen mit dem Schiebeoperator ergibt sich daraus $f(T^{t-1}\omega) = \omega_t$. Mit dieser Notation können wir die Strategie im Zeitpunkt t als

$$a(f(T^{t-1}\omega) \mid f(T^0\omega), f(T^1\omega), \dots, f(T^{t-2}\omega))$$

2.8. Eigenschaften der Kellystrategie im Grundmodell

beschreiben. Die Zufallsvariable $W_t(a)$, die die logarithmischen Erträge der Strategie a im Zeitpunkt t beschreibt, ergibt sich durch

$$W_t(a) = W(a)T^{t-1} = \log \left(\alpha_{f(T^{t-1}\omega)} a (f(T^{t-1}\omega) | f(T^0\omega), \dots, f(T^{t-2}\omega)) \right. \\ \left. + 1 - \sum_{f(T^{t-1}\omega)=1}^n a (f(T^{t-1}\omega) | f(T^0\omega), \dots, f(T^{t-2}\omega)) \right), \quad t \geq 1.$$

Die Erträge der Strategie a zur Zeit t werden im Folgenden mit $V_t(a)$ bezeichnet, es gilt daher $W_t(a) = \log(V_t(a))$. Wir bezeichnen außerdem mit $C_t(a)$, $t = 1, 2, \dots$, das Kapital im Zeitpunkt t bei Anwendung der Strategie a , wobei $C_0 = 1$ gesetzt wird. Für Strategien a , die den Voraussetzungen von Lemma 2.21 genügen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(a)) \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\prod_{k=1}^t V_k(a) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=1}^t W_k(a) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{t-1} W(a)T^k \right) \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}} [W(a) | \mathcal{I}]] \\ &\stackrel{(**)}{=} \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}} [\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}} [W(a) | \mathcal{I}]] \\ &\stackrel{(***)}{=} \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}} [W(a)]. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{I} erneut die Unter- σ -Algebra der invarianten Ereignisse und $\bar{\mathbb{P}}$ ist das stationäre Mittel des dynamischen Systems. Gleichung (*) gilt aufgrund von Korollar 2.22, welches angewendet werden kann, da wir nur Strategien betrachten, deren mittlere logarithmische Erträge gemäß Lemma 2.21 gleichmäßig integrierbar sind. Dass das betrachtete System AMS ist, ergibt sich aus Korollar 1.25 in Verbindung mit der Tatsache, dass die Quelle ein endliches Alphabet und eine endliche Evolutionsdimension besitzt. Die Gleichungen (**) und (***) ergeben sich direkt aus (2.18).

Wir haben in Abschnitt 2.3 die Kellystrategie \bar{a} durch das Lösen von Problem 2.5 ermittelt. Dieses ergab sich aus der Überlegung, dass der Investor durch die Maximierung über die bedingten Wahrscheinlichkeiten dieselben Ergebnisse erzielt, die er bekäme, wenn er vor Spielbeginn alle möglichen Ausgabesequenzen der Quelle und deren Wahrscheinlichkeiten bestimmt hätte und eine Optimierung darüber durchgeführt hätte. Wir definieren die Ereignisse G_i durch $G_i := \{\omega \in \Omega | \omega_1 = i\}$ für die Zeichen $i \in \Sigma$. Dann gilt für alle $i \in \Sigma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{r \in \Sigma_{t-1}} p(ri) \right) = \bar{\mathbb{P}}(G_i)$$

und damit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{r \in \Sigma_{t-1}, i \in \Sigma} p(ri) \right) = \sum_{i=1}^n \bar{P}(G_i).$$

Hieraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p(i|r) W_t(a) = \sum_{i=1}^n \bar{P}(G_i) W(a) = \mathbb{E}_{\bar{P}}[W(a)].$$

Da die Kellystrategie \bar{a} diejenige ist, die in jedem Zeitpunkt t den Term $\sum_{i=1}^n p(i|r) W_t(a)$ maximiert, maximiert sie auch dessen Grenzwert $\mathbb{E}_{\bar{P}}[W(a)]$ und somit im Erwartungswert asymptotisch die langfristige Wachstumsrate des Kapitals. ■

Korollar 2.24

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ ein ergodisches dynamisches System. Desweiteren gelten die Voraussetzungen von Satz 2.23. Dann maximiert die Kellystrategie \bar{a} asymptotisch die langfristige Wachstumsrate des Kapitals, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(\bar{a})) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(a)).$$

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.23 wissen wir, dass für alle Strategien a , die die Voraussetzungen von Lemma 2.21 erfüllen, die Gleichheit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(C_t(a)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{t-1} W(a) T^k \right)$$

gilt. Da das betrachtete dynamische System ergodisch ist, ergibt sich dann direkt aus dem letzten Teil von Korollar 2.22, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{t-1} W(a) T^k \right) = \mathbb{E}_{\bar{P}}[W(a)].$$

Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 2.23 können wir dann zeigen, dass die Kellystrategie \bar{a} asymptotisch die langfristige Wachstumsrate des Kapitals maximiert. ■

Die Kellystrategie \bar{a} aus Abschnitt 2.3 führt ebenso wie im Fall der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten im Allgemeinen zu Diversifikation. Laut Lemma 2.11 sollte der Investor sein Geld auf alle Zeichen verteilen, die eine positive bedingte Wahrscheinlichkeit zum betrachteten Zeitpunkt t besitzen. Auch gemäß Lemma 2.13 soll der Spieler, sofern er überhaupt Geld einsetzt, dieses auf alle Elemente aus der Menge Λ verteilen, die im Normalfall mehrere Elemente besitzt. Trotzdem sollte in diesem Zusammenhang auch Bemerkung 2.12 beachtet werden, welche im Fall $\sum_{i=1}^n 1/\alpha_i^{(t)} = 1$ besagt, dass der Investor dieselben Erträge erzielt, wenn er auf ein Zeichen kein Geld setzt und die Anteile der übrigen Zeichen im Verhältnis verkleinert. Solange die Anzahl der möglichen Zeichen n jedoch groß genug ist, widerspricht diese Bemerkung dem Gedanken der Diversifikation nicht.

Obwohl im betrachteten Modell die zufälligen Erträge von der Vorgeschichte abhängen, kann der Investor die optimale Kellystrategie zu jeder Zeit $t - 1$ für die nächste Periode t , $t \geq 1$, sequentiell berechnen, da die jeweils nötige Vorgeschichte dann bekannt ist.

Kapitel 3.

Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel soll einige numerische Resultate darstellen, um die bisherigen theoretischen Ergebnisse zu veranschaulichen.

Hierzu werden zunächst unabhängige Bernoulliversuche modelliert, was auch bereits von anderen Autoren (z.B. in [Tho69]) durchgeführt wurde. Die Berechnung der Kellystrategie stimmt in diesem Abschnitt mit dem traditionellen Weg überein, da die vorkommenden Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind. Es ergeben sich hierbei einige interessante Aspekte, auf die kurz hingewiesen werden soll.

In Abschnitt 3.2 wird mit den in Kapitel 2 bestimmten Strategien auf eine binäre diskrete stochastische Quelle gewettet und die zugehörige Kapitalentwicklung untersucht. Hierbei wurde der Fokus insbesondere darauf gelegt, dass ein Spieler in realen Wettsituationen weder die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgaben kennt, noch etwas über deren stochastische Struktur weiß. Daher ist es entscheidend, dass der Spieler möglichst gute Schätzungen für die echten Ausgabewahrscheinlichkeiten der Quelle ermittelt.

Abschließend wird anhand von historischen Aktienkursen untersucht, ob und wie sich die allgemeine Kellystrategie an der Börse anwenden lässt. Hierzu müssen die in dieser Arbeit ermittelten Strategien so modifiziert werden, dass sie für derartige Investitionen verwendet werden können. Zuletzt wird ein Vergleich der Ergebnisse der Abschnitte 3.2 und 3.3 durchgeführt.

3.1. Unabhängige Bernoulliversuche

Wir betrachten die Kapitalentwicklung eines Spielers, der nacheinander auf N unabhängige Bernoulliversuche setzt, die alle dieselbe Erfolgswahrscheinlichkeit $p > 1/2$ besitzen. Wir nehmen an, dass die Quoten für Erfolg und für Misserfolg jeweils 2 betragen und dass der Spieler mit einem Anfangskapital von einer Geldeinheit beginnt. Dann wissen wir aus Lemma 2.11, dass eine optimale Strategie darin besteht, den Anteil p auf Erfolg und den Anteil $1 - p$ auf Misserfolg zu setzen, und das zufällige Kapital des Spielers nach N Spielen lässt sich durch die Zufallsvariable C_N beschreiben mit

$$C_N = (2p)^X (2(1-p))^{N-X} = 2^N p^X (1-p)^{N-X},$$

wobei die Zufallsvariable X die Anzahl der Erfolge bei N Versuchen beschreibt. Es soll nun der Erwartungswert für die Kapitalentwicklung C_N bestimmt werden. Hierfür gilt

$$\mathbb{E}[C_N] = \sum_{k=0}^N 2^N p^k (1-p)^{N-k} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^N \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^{2k} (1-p)^{2(N-k)} \\
 &= 2^N \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (p^2)^k ((1-p)^2)^{N-k} \\
 &= 2^N (p^2 + (1-p)^2)^N = (2p^2 + 2(1-p)^2)^N.
 \end{aligned}$$

Bei einer Versuchsanzahl von $N = 10000$ und Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0.51$ ergibt sich somit beispielsweise der Erwartungswert $E[C_N] \approx 54.55$, woraus bereits deutlich wird, dass sich das Kapital stark vergrößern kann, wenn der Spieler sehr viele Runden nacheinander spielt.

In diesem Zusammenhang ist es interessant, den Median der Zufallsvariable C_N zu bestimmen. Dieser ergibt sich als

$$\text{median}[C_N] = 2^N p^{\text{median}[X]} (1-p)^{N-\text{median}[X]}.$$

Für das eben gewählte Zahlenbeispiel ist $\text{median}[X] = 5100$ und somit $\text{median}[C_N] \approx 7.39$, so dass der Median deutlich geringer als der Erwartungswert ist. Die Kapitalentwicklung C_N besitzt daher eine schiefe Verteilung. Diese Tatsache sollten Spieler immer berücksichtigen. Für Ausgabesequenzen, in denen viele Erfolge auftreten, wird das Kapital aufgrund des exponentiellen Wachstums sehr groß. Bei Sequenzen mit vielen Misserfolgen bleibt das Kapital auf jeden Fall größer als 0. Daher ist der Erwartungswert größer als der Median. Aus diesem Grund sollten Spieler auch den Median berücksichtigen, um eine bessere Übersicht über die Chancen und Risiken ihrer Investitionen zu erhalten. Hierbei sollte aber auch bedacht werden, dass die Kellystrategie asymptotisch den Median des Kapitals maximiert (vgl. [Eth04] sowie S. 41 - 42).

3.2. Markovquelle mit Vorgeschichte

Ein Problem, dem sich Spieler in der Realität häufig gegenüber sehen, ist die Unkenntnis über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Ausgaben. Bei Pferderennen könnte der Spieler durch Informationen über die Pferde und deren Jockeys eventuell eine persönliche Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen. Bei einer allgemeinen diskreten stochastischen Quelle, die Zeichen aus einem Alphabet ausgibt, ist dies aber nicht mehr möglich. In diesem Fall muss der Spieler die benötigten Wahrscheinlichkeiten schätzen, um die Kellystrategie anwenden zu können. Mit der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten und den zugehörigen Kapitalentwicklungen beschäftigt sich dieser Abschnitt.

Zur Veranschaulichung wurde eine diskrete stochastische Quelle modelliert, die in jedem Zeitschritt ein Zeichen aus dem binären Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ ausgibt, wobei die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zeichen eine Vorgeschichte von drei Zeichen besitzen. Um zu illustrieren, dass der Spieler im Allgemeinen die stochastische Struktur der Quelle nicht kennt, wurden vier verschiedene Investoren betrachtet, nämlich einer, der die Wahrscheinlichkeiten ohne Vorgeschichte schätzt (unabhängige Wahrscheinlichkeiten), einer, der ein Zeichen Vorgeschichte voraussetzt, einer, der zwei Zeichen Vorgeschichte benutzt, und einer, der drei Zeichen Vorgeschichte annimmt.

Jeder der Spieler schätzt die von ihm benötigten Wahrscheinlichkeiten, indem alle die ersten n Ausgaben der Quelle sehen, die jeweils aufgetretenen Ereignisse zählen und dann über die relativen Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeiten bestimmen.

Danach wurde die Kellystrategie aus Kapitel 2 implementiert und die Kapitalentwicklung für 100 Simulationen und verschiedene zufällig generierte Endzeitpunkte ermittelt. Wenn man die Kapitalstände nur zu einem Zeitpunkt betrachten würde, ist es möglich, dass gerade an dem betrachteten Zeitpunkt die Kellystrategie bessere Ergebnisse liefert als eine andere Strategie, obwohl sie vielleicht zu allen anderen Zeitpunkten schlechter ist. Um diesen Effekt nach Möglichkeit zu verhindern, wurde in dieser Arbeit mit mehreren zufällig generierten Endzeitpunkten gearbeitet.

Zum Vergleich wurde eine weitere Strategie implementiert, die im Folgenden ‘Greedy-Strategie’ genannt wird, und bei der der Spieler folgendermaßen handelt: Für jedes Zeichen $i \in \Sigma$ sei p_i die Wahrscheinlichkeit, mit der das Zeichen im nächsten Spiel auftritt, und α_i bezeichne die Quote für Zeichen i . Dann berechnet der Spieler die Produkte $p_i\alpha_i$ für alle $i \in \Sigma$. Es sei $p_j\alpha_j := \max_i\{p_i\alpha_i\}$. Falls $p_j\alpha_j \leq 1$ gilt, investiert der Spieler gar kein Kapital. Falls jedoch $p_j\alpha_j > 1$ ist und das Maximum eindeutig ist, setzt der Spieler den Anteil l auf Zeichen j . Falls $p_j\alpha_j > 1$ und es k Maxima gibt, $k \geq 2$, setzt der Spieler den Anteil l/k auf jedes dieser Zeichen.

Ausgangssimulation

In einem ersten Durchlauf wurde mit den folgenden Größen gerechnet: $n = 100$, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$, $l = 0.8$. Hierfür zeigt Tabelle 3.1 für unterschiedliche Zeitpunkte t die Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände für die Spieler, die die Kellystrategie anwenden, während Tabelle 3.2 die Ergebnisse für die Greedy-Strategie enthält.

Wie zu erwarten war, führt die Kellystrategie mit drei Zeichen Vorgeschichte in jedem betrachteten Zeitpunkt sowohl durchschnittlich als auch im Median und Maximum zu mehr Kapital als die Kellystrategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Andererseits besitzt diese Strategie auch in jedem Zeitpunkt deutlich kleinere Minima als die anderen Strategien. Da die Summe der Kehrwerte der Quoten für die vorliegenden Parameter größer als eins ist, liegt der Fall von Lemma 2.13 vor. Weil die Quelle binär ist, wird der Spieler, der die Kellystrategie verwendet, nur auf ein Zeichen Geld setzen. Je nachdem, ob dieses Zeichen in der tatsächlich auftretenden Sequenz häufig oder selten vorkommt, wächst oder schrumpft das Kapital des Spielers exponentiell. Dies führt dazu, dass die Spanne zwischen dem maximalen und dem minimalen Kapitalstand mit der Zeit immer größer wird. So besitzt z.B. zur Zeit $t = 753$ der Spieler, der bei der Anwendung der Kellystrategie mit drei Zeichen Vorgeschichte am meisten Glück hatte, das $2.5E + 20$ -fache seines Geldes, während ein anderer nur noch den Faktor $2.1E - 47$ besitzt und damit in der Realität ruiniert ist.

In Bezug auf den Median wird deutlich, dass die Strategien ohne Vorgeschichte und mit einem Zeichen Vorgeschichte für mindestens die Hälfte aller Spieler keinen Gewinn einbringen. Ein Grund hierfür könnte sein, dass die Schätzungen der Wahrscheinlichkeiten so sehr von den echten Wahrscheinlichkeiten abweichen, dass dadurch jeglicher Gewinn verhindert wird. Außerdem wird der langfristige Charakter der Kellystrategie deutlich: Während sich das Kapital zur Zeit $t = 11$ kaum vermehrt hat, liegt der Median zur Zeit $t = 753$ für die Kellystrategie mit drei Zeichen Vorgeschichte bereits bei 212.

Kapitel 3. Numerische Ergebnisse

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.325735E + 000$	$1.217493E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$2.233279E + 000$	$3.860485E + 000$	$1.164445E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$6.963157E + 000$	$7.462945E + 006$	$9.091162E + 010$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.193620E + 001$	$2.817313E + 008$	$2.520200E + 020$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.114652E - 001$	$2.248328E - 002$	$1.181201E - 007$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.323490E - 001$	$2.033466E - 005$	$9.909696E - 013$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.471234E - 001$	$2.248090E - 007$	$2.866326E - 013$
Kellystr. mit Vorg. 3	$3.814263E - 005$	$9.457429E - 015$	$2.148054E - 047$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.003195E + 000$	$8.962355E - 001$	$1.000472E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.000472E + 000$	$7.826449E - 001$	$6.267148E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.357803E + 000$	$8.160215E + 004$	$9.208247E + 008$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.113396E + 000$	$3.083842E + 006$	$3.898406E + 018$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.180242E + 000$	$4.310687E + 000$	$2.621781E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.658392E + 000$	$3.340963E + 001$	$2.120731E + 002$

Tabelle 3.1.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$

Auch für die Greedy-Strategie wird aus Tabelle 3.2 deutlich, dass diese für drei Zeichen Vorgeschichte höhere Kapitalstände generiert als für weniger Zeichen Vorgeschichte. Dies gilt für alle Zeitpunkte, das Maximum und das arithmetische Mittel. Der Median ist allerdings für die Greedy-Strategie mit zwei und drei Zeichen Vorgeschichte zu allen Zeitpunkten kleiner als eins und wird dazu im Verlauf der Zeit kleiner. Dies bedeutet, dass mindestens die Hälfte der Spieler, die gemäß der Greedy-Strategie spielen, im Laufe der Zeit immer größere Verluste erleidet.

Dass die Greedy-Strategie deutlich riskanter ist als die Kellystrategie, erkennt man daran, dass alle Minima der Greedy-Strategie unter den jeweiligen der Kellystrategie liegen. Durch die großen Verluste kommt es bei der Greedy-Strategie sieben Mal vor, dass die Spieler im Mittel weniger Geld besitzen als am Anfang, während dieser Fall für die Kellystrategie nur drei Mal auftritt. Bemerkenswert ist auch, dass für die Greedy-Strategie in fünf Fällen das Maximum gleich dem Anfangskapital ist. In diesen Fällen haben alle Spieler, die Geld eingesetzt haben, Verluste erlitten.

Durchschnittsintegrale in der Ausgangssimulation

Wir sind nicht nur an den Kapitalständen zu einzelnen Zeitpunkten interessiert, sondern wollen auch wissen, wie sich die verschiedenen Strategien über den gesamten betrachteten Zeitraum verhalten. Um hierüber Aussagen treffen zu können, wurden für die verschiedenen Endzeitpunkte die Integrale der Kapitalentwicklung berechnet.

Hierzu wird die Kapitalentwicklung als Treppenfunktion mit Sprüngen an allen ganzzahligen Abszissenwerten aufgefasst. Dadurch kann das Integral als Summe der betreffenden Kapitalstände berechnet werden. Da wir nicht so sehr an den absoluten Werten interessiert sind, sondern an durchschnittlichen Werten, wurde das ermittelte Kapital am Ende durch die Anzahl der Zeitschritte dividiert. Die Ergebnisse hierfür finden sich in den Tabellen 3.3 für die Kellystrategie und 3.4 für die Greedy-Strategie.

Tabelle 3.3 bestätigt, dass sich für die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte größere Werte ergeben als für die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Auch hier sieht man wieder, dass die minimalen Durchschnittsintegrale für die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte geringer sind als für die anderen Strategien.

Als zusätzliche Information lässt sich aus den Werten des arithmetischen Mittels ablesen, dass die Kellystrategie ohne Vorgeschichte und mit einem Zeichen Vorgeschichte für viele Zeitschritte geringer als das Startkapital gewesen sein muss, da sich für diese Strategien fünf Werte kleiner als eins ergeben. In zwei Fällen sind die Durchschnittsintegrale kleiner als eins, während die entsprechenden Kapitalstände größer als eins sind (ein Zeichen Vorgeschichte und $t = 11$ sowie keine Vorgeschichte und $t = 753$). Die Werte für die Mediane der Durchschnittsintegrale liegen für die Kellystrategie mit zwei Zeichen Vorgeschichte etwas unter denen der Mediane der Kapitalstände. Für drei Zeichen Vorgeschichte sind die Durchschnittsintegrale hingegen eher größer als die Kapitalstände.

Auch für die Greedy-Strategie ergibt sich aus Tabelle 3.4, dass die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte zu höheren mittleren und maximalen Durchschnittsintegralen führt als die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Die Mediane der Durchschnittsintegrale für die Greedy-Strategie mit zwei bzw. drei Zeichen Vorgeschichte sind jedoch erneut kleiner als eins. Für die minimalen Durchschnittsintegrale zeigt sich, dass diese pro

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.049760E + 001$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.600301E + 001$	$6.110191E + 003$	$9.274392E - 008$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.136590E + 001$	$3.822673E + 004$	$1.406388E + 010$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.492992E - 005$	$2.535478E - 073$	$7.868959E - 219$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.304000E - 005$	$1.212711E - 066$	$2.743736E - 209$
Greedy-Str., Vorg. 2	$8.128512E - 005$	$1.882200E - 047$	$3.910111E - 153$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.225600E - 005$	$2.345065E - 039$	$2.188446E - 125$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$8.218058E - 001$	$8.100000E - 001$	$8.100000E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 1	$8.027497E - 001$	$5.300000E - 001$	$5.300000E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.020717E + 000$	$6.110223E + 001$	$1.405753E - 009$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.010042E + 000$	$3.850084E + 002$	$1.406388E + 008$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.436480E - 001$	$4.024838E - 017$	$1.538936E - 057$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.246063E - 001$	$1.920263E - 012$	$2.777075E - 043$

Tabelle 3.2.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.8$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.181382E + 000$	$1.155289E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.666771E + 000$	$2.307655E + 000$	$1.586532E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$3.028951E + 000$	$1.364484E + 006$	$8.294510E + 010$
Kellystr. mit Vorg. 3	$6.734432E + 000$	$1.008516E + 008$	$1.124364E + 019$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.722913E - 001$	$2.316554E - 001$	$7.727630E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$3.514337E - 001$	$6.349204E - 002$	$1.888950E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 2	$3.149375E - 001$	$4.269143E - 002$	$1.348029E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 3	$8.652823E - 002$	$4.274793E - 003$	$1.271652E - 003$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000422E + 000$	$9.381665E - 001$	$8.828245E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.942236E - 001$	$8.490925E - 001$	$7.308809E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.170090E + 000$	$1.425624E + 004$	$8.299573E + 008$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.568626E + 000$	$1.111473E + 006$	$1.299233E + 017$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.141987E + 000$	$3.784723E + 000$	$2.281940E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.455041E + 000$	$4.882514E + 001$	$1.464881E + 004$

Tabelle 3.3.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$4.801018E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$6.457594E + 000$	$6.434822E + 003$	$2.411909E + 004$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.002028E + 001$	$3.078810E + 004$	$1.272042E + 011$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.448402E - 002$	$1.202558E - 003$	$3.577330E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.380311E - 002$	$1.171296E - 003$	$3.484332E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.302294E - 002$	$1.176867E - 003$	$3.500905E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.306728E - 002$	$1.171743E - 003$	$3.485663E - 004$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$8.560863E - 001$	$8.124241E - 001$	$8.107211E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 1	$8.406509E - 001$	$5.517556E - 001$	$5.364718E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.140960E + 000$	$6.469138E + 001$	$2.412930E + 002$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.448818E + 000$	$3.297750E + 002$	$1.272042E + 009$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$9.294869E - 001$	$5.911388E - 002$	$1.758505E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 3	$7.899776E - 001$	$1.029522E - 001$	$3.350275E - 002$

Tabelle 3.4.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.8$

Zeitpunkt sehr homogen sind. Im Gegensatz zur Kellystrategie sind die Minima für die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte nicht unbedingt geringer als die Minima für die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte.

Aus der Tabelle wird auch deutlich, dass die Greedy-Strategie ohne Vorgeschichte eher nicht angewendet werden sollte, da die Investoren im Maximalfall ihr Startkapital behalten und im Mittel Geld verloren haben. Bei dieser Strategie gab es in den hundert Simulationen keine Ausgabesequenz der Quelle, bei der positive Gewinne erwirtschaftet werden konnten. Auch die Spieler, die die Greedy-Strategie mit einem Zeichen Vorgeschichte verwendet haben, haben im Mittel zu jedem Zeitpunkt Geld verloren. Da auch der Maximalwert nur zu einem Zeitpunkt größer als 1 ist, sollte diese Strategie ebenfalls eher nicht benutzt werden.

Höhere Quoten

Als nächstes soll die Frage untersucht werden, ob die beiden Strategien bessere Ergebnisse liefern, wenn die Quoten erhöht werden. Hierzu betrachten wir dasselbe Szenario, wobei jetzt Quoten von $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_1 = 2$ zugrunde gelegt werden. Die Ergebnisse für die Kellystrategie finden sich in Tabelle 3.5, während die Ergebnisse für die Greedy-Strategie in Tabelle 3.6 aufgelistet sind.

Für die Kellystrategie sieht man aus Tabelle 3.5, dass die Vergrößerung der Auszahlungsquote alle Maxima und arithmetischen Mittel erhöht hat. Für die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ und alle Strategien mit wenigstens einem Zeichen Vorgeschichte sind sogar auch die Minimalwerte größer geworden, so dass sich hier die Gefahr großer Verluste etwas verringert hat.

Bei den Durchschnitten gibt es nun keinen Fall mehr, in dem sich das Kapital des Spielers verringert. Für alle Zeitpunkte und Strategien wurde ein durchschnittlicher positiver Gewinn erzielt und wieder ist dieser bei Anwendung der Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte am größten.

Anhand der Medianwerte sieht man, dass die Spieler, die die Kellystrategie ohne Vorgeschichte oder mit einem Zeichen Vorgeschichte anwenden, jetzt eher Geld einsetzen. Dies führt jedoch für die Strategie mit einem Zeichen Vorgeschichte und die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ zu Medianen, die geringer als das Startkapital sind, so dass in diesen Fällen mindestens die Hälfte aller Spieler Verluste realisiert hat. Auch im Median liefert die Kellystrategie mit drei Zeichen Vorgeschichte die besten Ergebnisse.

Tabelle 3.6 veranschaulicht die folgenden Ergebnisse: Auch für die Greedy-Strategie ist die Strategie mit Berücksichtigung von drei Zeichen Vorgeschichte immer besser oder gleich gut im Vergleich zu den anderen Strategien.

Für die arithmetischen Mittel gibt es jetzt mehr Fälle, in denen der Spieler weniger Geld als sein Startkapital besitzt. Dies geschieht in neun von zwölf Fällen. In all diesen Fällen hat sich das durchschnittliche Kapital gegenüber den Simulationen mit den niedrigeren Auszahlungsquoten verringert. Offensichtlich führt die Erhöhung von Quoten für die Greedy-Strategie also nicht unbedingt zu einer Erhöhung der Kapitalstände. Dies könnte daran liegen, dass die Greedy-Strategie sehr risikoreich agiert, indem immer ein sehr großer Anteil des Kapitals gesetzt wird.

Bezüglich der Minima können wir festhalten, dass sich diese nur für die Greedy-Strategie

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$2.328962E + 000$	$4.812022E + 001$	$6.496979E + 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$5.288051E + 000$	$1.699127E + 001$	$1.083080E + 003$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.650526E + 001$	$2.147208E + 011$	$5.223139E + 021$
Kellystr. mit Vorg. 3	$6.525103E + 001$	$7.195504E + 013$	$2.317355E + 035$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$4.368225E - 001$	$1.656425E - 004$	$3.570446E - 011$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.093371E - 001$	$5.160761E - 005$	$1.552060E - 012$
Kellystr. mit Vorg. 2	$6.407888E - 002$	$2.363418E - 007$	$9.110141E - 011$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.190613E - 005$	$1.292846E - 011$	$6.895713E - 042$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.118251E + 000$	$2.249761E + 000$	$1.229856E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.149787E + 000$	$1.563681E + 000$	$1.435894E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$2.377472E + 000$	$2.186610E + 009$	$6.316520E + 019$
Kellystr. mit Vorg. 3	$4.722731E + 000$	$7.375341E + 011$	$2.317750E + 033$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.025319E + 000$	$1.050603E + 000$	$1.000000E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.003731E + 000$	$7.579588E - 001$	$1.207886E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.631731E + 000$	$1.531839E + 003$	$3.628475E + 009$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.326523E + 000$	$1.152874E + 004$	$1.409416E + 010$

Tabelle 3.5.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$7.934372E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$7.140934E + 001$	$5.098973E - 016$	$1.681088E - 063$
Greedy-Str., Vorg. 2	$7.140934E + 001$	$1.087384E - 002$	$2.724276E - 030$
Greedy-Str., Vorg. 3	$7.140934E + 001$	$6.838732E + 001$	$7.322617E + 001$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.492992E - 005$	$2.535478E - 073$	$7.868959E - 219$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.658880E - 006$	$1.212711E - 066$	$2.743736E - 209$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.492992E - 005$	$1.820215E - 049$	$2.956448E - 168$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.492992E - 005$	$4.164067E - 036$	$5.473980E - 115$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$4.319387E - 001$	$6.000000E - 002$	$6.000000E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.703369E + 000$	$5.103519E - 018$	$1.682426E - 065$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.965727E + 000$	$1.102556E - 004$	$4.047268E - 032$
Greedy-Str., Vorg. 3	$5.220411E + 000$	$9.833599E - 001$	$7.322617E - 001$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.088391E - 002$	$8.706030E - 043$	$2.122428E - 144$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.088391E - 002$	$9.673367E - 044$	$3.993723E - 150$
Greedy-Str., Vorg. 2	$9.795521E - 002$	$5.880278E - 024$	$6.649344E - 077$
Greedy-Str., Vorg. 3	$9.795521E - 002$	$5.602977E - 016$	$2.709760E - 048$

Tabelle 3.6.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.8$

mit drei Zeichen Vorgeschichte und die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ vergrößert haben. Daher eliminiert die Erhöhung der Quoten für die Greedy-Strategie nicht unbedingt das Risiko sehr großer Verluste. Außerdem haben sich alle Medianwerte gegenüber dem Fall mit geringeren Quoten verkleinert. Durch die folgende Argumentation werden die schlechteren Werte der Greedy-Strategie bei höheren Quoten erklärt: Wegen $\alpha_0 = \alpha_1 = 2$ gilt für alle Wahrscheinlichkeiten, in denen nicht $p_0 = p_1 = 1/2$ ist, dass $p_j \alpha_j > 1$ ist, mit $p_j \alpha_j = \max_i \{\alpha_i p_i\}$, $i = 0, 1$. Daher wird der Spieler, der die Greedy-Strategie verfolgt, jetzt in fast allen Fällen Geld einsetzen, wobei er immer 80% seines vorhandenen Kapitals auf ein einzelnes Zeichen setzt. Gerade wenn die Wahrscheinlichkeiten nahe bei $1/2$ liegen, wird jedoch in der tatsächlichen Ausgabesequenz auch das andere Zeichen auftauchen und in jedem dieser Fälle bleiben dem Spieler nur 20% seines letzten Kapitals. Insbesondere die Medianwerte aus Tabelle 3.6 zeigen, dass dieses Verhalten im Allgemeinen im Laufe der Zeit zu immer größeren Verlusten führt. Diese Verluste fallen bei geringeren Quoten kleiner aus, da der Spieler dann seltener setzt.

Durchschnittsintegrale für höhere Quoten

Auch für diese Parameterkonstellation wurden die Durchschnittsintegrale für die Kellystrategie und die Greedy-Strategie berechnet. Die entsprechenden Ergebnisse finden sich in Tabelle 3.7 und Tabelle 3.8.

Aus Tabelle 3.7 wird deutlich, dass erneut die Maxima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale für die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte größer sind als diejenigen für die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Im Vergleich mit den Durchschnittsintegralen bei geringeren Quoten haben sich alle Maxima und Mittelwerte erhöht. Außer für die Kellystrategie mit einem Zeichen Vorgeschichte haben sich ebenso alle Mediane der Durchschnittsintegrale vergrößert. Bemerkenswert ist, dass jetzt alle arithmetischen Mittel größer als das Startkapital sind, so dass die Spieler unabhängig von der Vorgeschichte im Mittel ein positives Wachstum erwarten können. Der Effekt der größeren Minima, der bei den Kapitalständen beobachtet werden konnte, überträgt sich jedoch nicht auf die Durchschnittsintegrale. Nur für die Kellystrategie mit Vorgeschichte 2 kommen größere Minima vor als bei den Durchschnittsintegralen für geringere Quoten.

Insgesamt lässt sich für die Kellystrategie feststellen, dass eine Erhöhung der Quoten positive Effekte für die Spieler hat.

Tabelle 3.8 zeigt auch für die Durchschnittsintegrale der Greedy-Strategie, dass die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte immer mindestens ebenso gut und in den meisten Fällen besser als die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte ist. Im Vergleich zu den Durchschnittsintegralen bei geringeren Quoten haben sich die Maxima, Mittel und Mediane für $t = 753$ bis auf zwei Werte alle verringert. Dies bestätigt das bereits dargestellte Problem, dass der Spieler, der die Greedy-Strategie anwendet, durch die vielen hohen Einsätze langfristig eher Geld verliert als gewinnt. Die Minima der Durchschnittsintegrale sind im Vergleich zu den Minima bei geringeren Quoten annähernd gleich geblieben.

Längerer Schätzzeitraum

Dass die Greedy-Strategie für höhere Quoten nicht unbedingt mehr Kapital generiert, könnte auch damit zusammenhängen, dass die geschätzten Wahrscheinlichkeiten ziem-

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$2.328387E + 000$	$1.037072E + 001$	$1.412645E + 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$2.410005E + 000$	$7.002002E + 000$	$1.342095E + 002$
Kellystr. mit Vorg. 2	$5.634130E + 000$	$2.106501E + 010$	$2.546352E + 021$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.614007E + 001$	$7.335404E + 012$	$2.306367E + 033$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$7.284057E - 001$	$1.786732E - 001$	$5.317235E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$3.230096E - 001$	$4.979112E - 002$	$1.481731E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.114318E - 001$	$8.069431E - 002$	$2.400642E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 3	$5.708995E - 002$	$2.835962E - 003$	$8.436329E - 004$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.065625E + 000$	$1.512877E + 000$	$5.638887E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.071001E + 000$	$1.247454E + 000$	$3.832072E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.609366E + 000$	$2.132876E + 008$	$2.563264E + 019$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.460191E + 000$	$7.544022E + 010$	$2.307001E + 031$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.001307E + 000$	$1.087979E + 000$	$1.496717E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.969152E - 001$	$8.738361E - 001$	$7.140089E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.467100E + 000$	$3.253563E + 002$	$4.194650E + 008$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.755122E + 000$	$8.502758E + 003$	$1.438972E + 012$

Tabelle 3.7.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.482078E + 001$	$1.262605E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$3.443820E + 001$	$3.312062E + 000$	$9.852614E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.866775E + 001$	$1.983997E + 001$	$5.901929E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.443820E + 001$	$4.068126E + 003$	$4.363428E + 006$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.279684E - 002$	$1.132851E - 003$	$3.369968E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.303909E - 002$	$1.131389E - 003$	$3.365620E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.314164E - 002$	$1.289575E - 003$	$3.836186E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.323936E - 002$	$1.239876E - 003$	$3.688341E - 004$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.157606E + 000$	$1.463858E - 001$	$8.569777E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.348569E + 000$	$1.157716E - 001$	$3.443935E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.715612E + 000$	$7.541946E - 001$	$2.243571E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.418800E + 000$	$8.000451E + 001$	$4.365466E + 004$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$3.635934E - 001$	$2.243849E - 002$	$6.674929E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 1	$3.635934E - 001$	$2.095807E - 002$	$6.234537E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 2	$7.745901E - 001$	$6.956206E - 002$	$2.069309E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 3	$8.898334E - 001$	$1.032163E - 001$	$3.079384E - 002$

Tabelle 3.8.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.8$

lich stark von den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten abweichen. Um dies zu überprüfen, wurde der Wert für n vergrößert, so dass die Schätzungen der Spieler auf mehr Daten beruhen. Dazu wurden die Parameter $n = 200$, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$ und $l = 0.8$ benutzt. Die Ergebnisse für die Kellystrategie finden sich in Tabelle 3.9, während die Ergebnisse für die Greedy-Strategie in Tabelle 3.10 aufgeführt sind.

Auch Tabelle 3.9 zeigt, dass die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte höhere Maxima, Mittel und Mediane generiert als die Strategien mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Die Erwartung, dass durch mehr sichtbare Ausgänge bessere Schätzungen der Wahrscheinlichkeiten und damit höhere Gewinne ermöglicht werden, bestätigt sich jedoch nicht. Insbesondere sind für $t = 753$ alle Maximalwerte kleiner geworden und auch die arithmetischen Mittel für zwei und drei Zeichen Vorgeschichte haben sich verringert. Andererseits wurden für $t = 753$ die Minimalwerte zum Teil deutlich größer, was zu einer Vergrößerung aller Medianwerte geführt hat. Es lässt sich also feststellen, dass mehr beobachtete Zeichen zu einer Verringerung des Risikos großer Verluste für den Spieler führen.

Die Daten in Tabelle 3.10 zeigen nicht eindeutig, dass die Greedy-Strategie mit mehr Schätzdaten größere Gewinne erwirtschaftet. Für den Zeitpunkt $t = 753$ ist für die Maxima, Mittel und Mediane die Zahl der Werte, die sich vergrößert haben, gleich der Zahl der Werte, die gleich geblieben oder kleiner geworden sind. Die Minima haben sich für diesen Zeitpunkt über alle Strategien hinweg vergrößert. Die Veränderungen fallen jedoch geringer aus als bei der Kellystrategie. Bemerkenswert ist, dass der Maximalwert für die Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte zur Zeit $t = 753$ deutlich gesunken ist, so dass in keiner der hundert Simulationen ein positiver Gewinn aufgetreten ist. Für alle Zeitpunkte sind die Mediane geringer als das Startkapital, was zeigt, dass mit der Greedy-Strategie eher Verluste als Gewinne erwirtschaftet wurden. Sogar im Mittel besitzt der Spieler nach 753 Spielen bei allen Varianten der Greedy-Strategie weniger als sein Startkapital.

Durchschnittsintegrale für den längeren Schätzzeitraum

Für die betrachtete Parameterkonstellation wurden erneut die Durchschnittsintegrale berechnet und die Ergebnisse in Tabelle 3.11 für die Kellystrategie und in Tabelle 3.12 für die Greedy-Strategie festgehalten.

Die Analyse von Tabelle 3.11 zeigt, dass sich die für die Kapitalstände beschriebenen Effekte auch in den Daten der Durchschnittsintegrale wiederfinden lassen. Hier gilt für $t = 753$, dass alle Maximalwerte kleiner und alle Minimalwerte größer geworden sind. Durch die geringere Spanne zwischen den Extremen haben sich auch alle Medianwerte erhöht. Die arithmetischen Mittel für die Strategien mit zwei und drei Zeichen Vorgeschichte sind jedoch leicht zurückgegangen. Insgesamt lässt sich dennoch festhalten, dass die Kellystrategien mit zwei und mit drei Zeichen Vorgeschichte für die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ gute Gewinne erwirtschaften, wobei die auftretenden Verluste nicht allzu groß sind.

Tabelle 3.12 zeigt, dass auch für die Durchschnittsintegrale der Greedy-Strategie mehr Datenpunkte nicht unbedingt zu größeren Werten führen. So hat sich für $t = 753$ beim Maximum, Mittelwert und Median je nur einer der vier Werte vergrößert. Die Minima haben sich lediglich für die Greedy-Strategie ohne Vorgeschichte leicht vergrößert. Da

Kapitel 3. Numerische Ergebnisse

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$2.007803E + 000$	$7.877031E + 001$	$4.252149E + 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$2.150575E + 000$	$1.540785E + 002$	$1.052844E + 003$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.025094E + 001$	$2.559819E + 010$	$2.256380E + 020$
Kellystr. mit Vorg. 3	$4.915559E + 001$	$1.257542E + 014$	$1.495198E + 034$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$4.144240E - 001$	$6.891073E - 003$	$1.769210E - 004$
Kellystr. mit Vorg. 1	$4.164517E - 001$	$2.016595E - 003$	$7.287306E - 007$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.869199E - 002$	$1.184381E - 002$	$3.236004E - 004$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.604248E - 002$	$6.568003E - 011$	$1.408877E - 014$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.028921E + 000$	$4.225487E + 000$	$1.484281E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.022710E + 000$	$4.448166E + 000$	$2.035360E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$2.175963E + 000$	$2.595228E + 008$	$2.583477E + 018$
Kellystr. mit Vorg. 3	$5.113221E + 000$	$2.837067E + 012$	$3.029519E + 032$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.014196E + 000$	$1.223863E + 000$	$1.984860E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.845066E - 001$	$1.105877E + 000$	$7.192821E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.581749E + 000$	$6.104327E + 003$	$3.137925E + 011$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.696828E + 000$	$5.564969E + 006$	$2.519501E + 020$

Tabelle 3.9.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 200$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$7.140934E + 001$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$7.934372E + 000$	$5.742058E - 015$	$3.701159E - 058$
Greedy-Str., Vorg. 2	$7.140934E + 001$	$1.158145E - 003$	$2.627581E - 027$
Greedy-Str., Vorg. 3	$7.140934E + 001$	$4.486892E + 005$	$2.040287E - 006$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.492992E - 005$	$1.848364E - 070$	$5.736471E - 216$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.658880E - 006$	$5.800361E - 060$	$8.610135E - 199$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.343693E - 004$	$1.326936E - 046$	$1.392525E - 140$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.658880E - 006$	$9.673367E - 044$	$1.852448E - 101$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$9.396602E - 001$	$4.000000E - 002$	$4.000000E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.138440E - 001$	$5.830351E - 017$	$3.705635E - 060$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.753696E + 000$	$1.314731E - 005$	$2.627581E - 029$
Greedy-Str., Vorg. 3	$4.232347E + 000$	$4.487584E + 003$	$2.040293E - 008$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.088391E - 002$	$8.706030E - 043$	$2.358254E - 145$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.088391E - 002$	$4.836683E - 043$	$2.911424E - 147$
Greedy-Str., Vorg. 2	$9.795521E - 002$	$1.058450E - 023$	$6.649344E - 077$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.460009E - 001$	$3.321528E - 013$	$4.732429E - 047$

Tabelle 3.10.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 200$, $l = 0.8$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.778108E + 000$	$2.565304E + 001$	$9.572849E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.791743E + 000$	$2.966002E + 001$	$8.662223E + 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$5.510737E + 000$	$8.467533E + 008$	$1.433947E + 020$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.424364E + 001$	$3.121380E + 012$	$5.134297E + 032$
Minima			
Kellystr. ohne Vorg.	$4.930383E - 001$	$1.632841E - 001$	$5.711411E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 1	$5.809326E - 001$	$1.432174E - 001$	$5.205713E - 002$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.984540E - 001$	$4.777116E - 001$	$5.134991E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$4.295564E - 002$	$1.718473E - 002$	$5.119003E - 003$
Arithmetische Mittel			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.009934E + 000$	$2.105494E + 000$	$6.273978E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.015170E + 000$	$2.059822E + 000$	$6.175006E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.610322E + 000$	$8.802861E + 006$	$1.503411E + 018$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.673514E + 000$	$7.014923E + 010$	$6.517795E + 030$
Mediane			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000826E + 000$	$1.230965E + 000$	$1.545149E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.940695E - 001$	$1.120787E + 000$	$1.145254E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.407831E + 000$	$9.722659E + 002$	$1.844349E + 010$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.149972E + 000$	$1.591179E + 006$	$1.411940E + 019$

Tabelle 3.11.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Kellystrategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 200$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$3.443820E + 001$	$1.811752E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.482078E + 001$	$1.233575E + 000$	$3.669600E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.482078E + 001$	$8.858086E + 003$	$2.635075E + 003$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.443820E + 001$	$5.697849E + 005$	$1.695237E + 005$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.300663E - 002$	$1.156025E - 003$	$3.438906E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.272854E - 002$	$1.116169E - 003$	$3.320345E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.280770E - 002$	$1.131692E - 003$	$3.366519E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.272787E - 002$	$1.116581E - 003$	$3.321569E - 004$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.291000E + 000$	$1.236398E - 001$	$6.488090E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$9.752510E - 001$	$6.884713E - 002$	$2.048042E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.203632E + 000$	$8.901779E + 001$	$2.648073E + 001$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.913550E + 000$	$9.195725E + 003$	$2.778475E + 003$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.375982E - 001$	$1.237514E - 002$	$3.681317E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 1	$2.462906E - 001$	$1.249840E - 002$	$3.717983E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 2	$5.202472E - 001$	$5.037683E - 002$	$1.498594E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.071411E + 000$	$2.361308E - 001$	$7.025620E - 002$

Tabelle 3.12.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 200$, $l = 0.8$

die Medianwerte der Durchschnittsintegrale fast ausschließlich geringer sind als der Wert des Startkapitals, sollte die Greedy-Strategie eher nicht verwendet werden, da sie in den meisten Fällen zu Verlusten führt. Dies gilt für alle Vorgeschichten.

Kleinerer Anteil l für die Greedy-Strategie

Die letzten vier Tabellen zeigen, was bei der Greedy-Strategie passiert, wenn der eingesetzte Anteil verringert wird. Insbesondere für den Fall der Quoten $\alpha_0 = \alpha_1 = 2$ könnten die relativ schlechten Ergebnisse der Greedy-Strategie damit zusammenhängen, dass die Spieler einen zu großen Anteil ihres Kapitals einsetzen und so zu risikoreich agieren. Tabelle 3.13 zeigt die Kapitalstände für die Greedy-Strategie mit $l = 0.6$.

Im Vergleich zu den Kapitalständen beim Einsatz des Anteils $l = 0.8$ ergibt Tabelle 3.13, dass die Maxima, Mittel und Mediane der Kapitalstände für die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ und alle Greedy-Strategien mit wenigstens einem Zeichen Vorgeschichte größer geworden sind. Diese Verbesserung führt dazu, dass ein Spieler, der die Greedy-Strategie mit zwei oder drei Zeichen Vorgeschichte anwendet, im Mittel eine Vermehrung seines Kapitals erwarten kann. Jedoch zeigen die Medianwerte, dass die meisten Spieler bei Verwendung der Greedy-Strategie immer noch Verluste erleiden. Dass jedoch jetzt das Risiko sehr großer Verluste schon geringer geworden ist, zeigt sich darin, dass alle Minimalwerte vergrößert wurden. Trotz dieser Verbesserung sind aber insbesondere die Minimalwerte zur Zeit $t = 753$ immer noch so klein, dass die Investoren bei einer derartigen Realisierung ruiniert wären.

Tabelle 3.14 zeigt die Durchschnittsintegrale für die Greedy-Strategie mit anteiligem Einsatz von $l = 0.6$.

Die meisten Durchschnittsintegrale für die Greedy-Strategie in Tabelle 3.14 haben sich gegenüber denen aus Tabelle 3.8 ebenfalls vergrößert. Lediglich für den Zeitpunkt $t = 11$ treten kleinere maximale und mittlere Durchschnittsintegrale auf. Dies bedeutet, dass es kurzfristig zu größeren Erträgen führen kann, wenn der Spieler seine Einsätze risikoreicher investiert. Langfristig führt das Setzen sehr großer Anteile im Allgemeinen jedoch nicht zu großen Gewinnen. Auch für den Faktor $l = 0.6$ ist die Hälfte aller Werte der Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale immer noch geringer als das Startkapital, so dass die Greedy-Strategie nicht als erfolgversprechend angesehen werden kann. Die einzige Ausnahme bildet hier die Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte, die für alle Zeitpunkte Maxima, Mittel und Mediane erreicht, die größer als eins sind. Für diese Strategie bleiben die aufgetretenen Minima auch im Rahmen.

Als letztes soll überprüft werden, ob eine weitere Verringerung des Faktors l auf 0.4 zu größeren Erträgen der Greedy-Strategie führt. Die Kapitalstände für diesen Fall beinhaltet Tabelle 3.15.

Tabelle 3.15 belegt, dass die Verringerung des Faktors l von 0.6 auf 0.4 für alle Greedy-Strategien mit wenigstens einem Zeichen Vorgeschichte und die Zeitpunkte $t = 224$ und $t = 753$ zu größeren Maxima, Mitteln und Medianen führt. Für alle Strategien und alle Zeitpunkte haben sich zudem die Minima erhöht. Auch für diesen Fall sind die Mediane der Kapitalstände für die Strategien ohne Vorgeschichte und mit einem Zeichen Vorgeschichte immer noch geringer als das Startkapital, so dass die Spieler, die diese Strategien anwenden, im Allgemeinen mit Verlusten rechnen müssen. Jedoch weisen die Strategien mit mindestens zwei Zeichen Vorgeschichte im Mittel und im Median durchweg Werte grö-

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.099512E + 001$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$4.398047E + 001$	$6.610560E - 005$	$1.364188E - 022$
Greedy-Str., Vorg. 2	$4.398047E + 001$	$9.893216E + 005$	$9.497115E + 005$
Greedy-Str., Vorg. 3	$4.398047E + 001$	$6.359114E + 010$	$1.298286E + 023$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$2.684355E - 003$	$6.961732E - 037$	$6.554668E - 106$
Greedy-Str., Vorg. 1	$6.710886E - 004$	$1.140610E - 032$	$6.873067E - 100$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.684355E - 003$	$7.838213E - 022$	$5.317778E - 074$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.684355E - 003$	$2.104054E - 013$	$1.126083E - 042$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$9.199331E - 001$	$6.000000E - 002$	$6.000000E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.563627E + 000$	$6.656982E - 007$	$1.364816E - 024$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.640768E + 000$	$1.092694E + 004$	$1.411590E + 004$
Greedy-Str., Vorg. 3	$4.646836E + 000$	$8.368135E + 008$	$1.697803E + 021$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.717987E - 001$	$1.284213E - 017$	$5.987286E - 059$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.717987E - 001$	$3.210532E - 018$	$1.461740E - 062$
Greedy-Str., Vorg. 2	$6.871948E - 001$	$3.530017E - 006$	$5.215662E - 017$
Greedy-Str., Vorg. 3	$6.871948E - 001$	$2.787826E - 001$	$1.503312E + 000$

Tabelle 3.13.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.6$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.260604E + 001$	$5.046631E + 000$	$1.501256E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.822854E + 001$	$4.452445E + 000$	$1.324499E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.522987E + 001$	$5.262515E + 004$	$2.747287E + 008$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.822854E + 001$	$2.806026E + 010$	$4.482108E + 021$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$6.354442E - 002$	$3.884415E - 003$	$1.155523E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 1	$6.641150E - 002$	$3.273524E - 003$	$9.737973E - 004$
Greedy-Str., Vorg. 2	$7.075832E - 002$	$4.602257E - 003$	$1.369065E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 3	$7.368671E - 002$	$1.073335E - 002$	$3.192924E - 003$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.127688E + 000$	$2.840802E - 001$	$1.266587E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.221643E + 000$	$2.217051E - 001$	$6.595229E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.799109E + 000$	$1.521918E + 003$	$2.760450E + 006$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.304482E + 000$	$2.840255E + 008$	$6.744315E + 019$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$5.887810E - 001$	$3.951861E - 002$	$1.175587E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$5.921378E - 001$	$3.746577E - 002$	$1.114520E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.228322E + 000$	$3.565457E - 001$	$1.683536E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.268026E + 000$	$8.090703E + 000$	$2.488181E + 003$

Tabelle 3.14.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.6$

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$7.437977E + 000$	$1.000000E + 000$	$1.000000E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.735528E + 001$	$1.443515E + 000$	$2.759539E - 005$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.735528E + 001$	$2.199286E + 007$	$3.700900E + 016$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.735528E + 001$	$2.454858E + 011$	$5.146848E + 028$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$4.608866E - 002$	$4.873458E - 018$	$6.373723E - 049$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.975228E - 002$	$1.835163E - 015$	$3.049025E - 045$
Greedy-Str., Vorg. 2	$4.608866E - 002$	$7.713595E - 009$	$2.028443E - 029$
Greedy-Str., Vorg. 3	$4.608866E - 002$	$1.093785E - 003$	$2.092916E - 011$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.157802E + 000$	$7.391174E - 002$	$6.000000E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.298349E + 000$	$2.696133E - 002$	$2.799713E - 007$
Greedy-Str., Vorg. 2	$2.304882E + 000$	$5.072185E + 005$	$5.798035E + 014$
Greedy-Str., Vorg. 3	$3.067583E + 000$	$4.069377E + 009$	$1.174163E + 027$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$5.854967E - 001$	$2.904653E - 006$	$3.210572E - 020$
Greedy-Str., Vorg. 1	$5.854967E - 001$	$1.197257E - 006$	$1.989398E - 022$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.366159E + 000$	$2.848743E + 001$	$3.380678E + 005$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.366159E + 000$	$5.762027E + 003$	$1.562516E + 015$

Tabelle 3.15.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Kapitalstände zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.4$

ßer als eins auf. Bemerkenswert ist weiterhin, dass der Median für die Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte im Zeitpunkt $t = 753$ deutlich über dem Median für die Kellystrategie mit drei Zeichen Vorgeschichte zum selben Zeitpunkt liegt. Insgesamt können wir schließen, dass die Greedy-Strategie mit zwei bzw. drei Zeichen Vorgeschichte durchaus benutzt werden kann, wenn die Spieler lange genug spielen und jeweils einen Anteil l setzen, der nicht zu groß ist.

Abschließend werden in Tabelle 3.16 die Durchschnittsintegrale für die Greedy-Strategie mit Anteil $l = 0.4$ dargestellt.

Hieraus wird ersichtlich, dass sich alle Minima und Mediane der Durchschnittsintegrale vergrößert haben. Die Maxima und Mittelwerte der Durchschnittsintegrale sind für $t = 11$ für alle Greedy-Strategien kleiner geworden, ebenso für die Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte im Zeitpunkt $t = 224$. Dies bestätigt erneut, dass risikoreichere Strategien kurzfristig zu größeren Gewinnen führen können. Wenn wir die Mediane und Mittelwerte betrachten, lässt sich auch aufgrund der Entwicklung der Durchschnittsintegrale feststellen, dass die Greedy-Strategie mit zwei oder drei Zeichen Vorgeschichte für $l = 0.4$ durchaus attraktive Ergebnisse liefert.

Wenn wir die Kapitalstände der Greedy-Strategie für $l = 0.4$ (Tabelle 3.15) mit denen der Kellystrategie (Tabelle 3.5) vergleichen, wird deutlich, dass hierbei die Kellystrategie immer noch deutlich besser abschneidet. Nur die Minima der Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte und der Median der Greedy-Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte zum Zeitpunkt $t = 753$ sind deutlich größer als die jeweiligen Werte der Kellystrategie. Dies scheint jedoch keine systematischen Gründe zu haben, sondern ein zufälliges Ergebnis der durchgeführten Simulationen zu sein.

Fazit

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Kenntnis der stochastischen Struktur elementar für den Anlageerfolg ist. Sowohl die Kelly- als auch die Greedy-Strategie haben für drei Zeichen Vorgeschichte deutlich bessere Ergebnisse geliefert als mit weniger Zeichen Vorgeschichte. Die Strategien mit höchstens einem Zeichen Vorgeschichte haben zum Teil sogar Verluste erzeugt und sollten daher nach Möglichkeit nicht verwendet werden. Die Erhöhung der Quote α_0 hat zu besseren Ergebnissen der Kellystrategie geführt, während bei der Greedy-Strategie eher das Gegenteil eintrat. Die Erhöhung der sichtbaren Ausga-bezeichen n führte bei keiner der beiden Strategien zu einer offensichtlichen Verbesserung der Ergebnisse. Jedoch bewirkte die Verringerung des eingesetzten Anteils l von 0.8 auf 0.4 eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse der Greedy-Strategie. Hierdurch wird deutlich, dass es langfristig vorteilhaft ist, die investierten Anteile nicht zu groß zu wählen, sondern eher restriktiv zu setzen und damit das Risiko sehr großer Verluste zu verringern. Diese Erkenntnis stimmt mit den aus der Literatur bekannten Handlungsempfehlungen (vgl. [Tho06]) überein.

3.3. Anwendung auf Börsendaten

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit sich die in Kapitel 2 entwickelte Kellystrategie für Investitionen an der Börse eignet. Im letzten Kapitel konnte der Anleger stets auf verschiedene Ereignisse setzen, von denen eins mit Sicherheit eintritt. Das Geld,

Strategie	$t = 11$	$t = 224$	$t = 753$
Maxima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$5.955263E + 000$	$9.309862E + 000$	$2.769815E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 1	$7.887205E + 000$	$9.309862E + 000$	$2.769815E + 000$
Greedy-Str., Vorg. 2	$6.985632E + 000$	$4.537692E + 006$	$7.075783E + 014$
Greedy-Str., Vorg. 3	$7.887205E + 000$	$2.293613E + 010$	$2.306411E + 027$
Minima			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.613185E - 001$	$1.481718E - 002$	$4.407766E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.691099E - 001$	$9.888548E - 003$	$2.941613E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.970424E - 001$	$2.690412E - 002$	$8.003351E - 003$
Greedy-Str., Vorg. 3	$2.100776E - 001$	$1.016144E - 001$	$3.317611E - 002$
Arithmetische Mittel			
Greedy-Str. o. Vorg.	$1.117175E + 000$	$6.372152E - 001$	$2.322366E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 1	$1.118725E + 000$	$4.983702E - 001$	$1.716464E - 001$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.616718E + 000$	$7.848659E + 004$	$1.651265E + 013$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.863462E + 000$	$2.662492E + 008$	$3.088284E + 025$
Mediane			
Greedy-Str. o. Vorg.	$8.411247E - 001$	$1.241806E - 001$	$3.694104E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 1	$8.055234E - 001$	$9.372141E - 002$	$2.787998E - 002$
Greedy-Str., Vorg. 2	$1.423074E + 000$	$2.490305E + 001$	$1.049105E + 005$
Greedy-Str., Vorg. 3	$1.447619E + 000$	$4.061151E + 003$	$1.510922E + 014$

Tabelle 3.16.: Maxima, Minima, Mittel und Mediane der Durchschnittsintegrale zu zufälligen Zeitpunkten t für die Greedy-Strategie mit verschiedenen Vorgeschichten, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $n = 100$, $l = 0.4$

das auf die anderen Ereignisse gesetzt wird, verliert der Anleger. An der Börse verlieren Anleger jedoch im Normalfall nicht ihr gesamtes Geld, sondern nur einen Teil, wenn der Aktienkurs sinkt. Andererseits kommt es vor, dass zu einem festen Zeitpunkt alle Kurse sinken, so dass der Anleger dann auf jeden Fall Geld verliert, wenn er Kapital eingesetzt hat. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die vorliegenden Quoten bisher immer als bekannt vorausgesetzt wurden. Auch dies ist bei Aktien nicht gegeben, da der Anleger den zukünftigen Kurs nicht kennt und er die Quote aus dem Quotienten des zukünftigen und des aktuellen Kurses bestimmen müsste. Daher haben wir die Kellystrategie modifiziert. Wenn der Investor nur auf eine Aktie setzen möchte, wurde die folgende Modellierung implementiert:

Eine Aktie - Ausgangssimulation

Als Eingabedaten werden die historischen Tageskurse der betrachteten Aktie verwendet. Im ersten Schritt werden hieraus Erträge ermittelt, indem der Kurs im Zeitpunkt $t + 1$, S_{t+1} , durch den Kurs einen Zeitpunkt früher, S_t , $t = 1, 2, \dots$, dividiert wird. Es wird angenommen, dass der Investor einen Teil der Erträge

$$X_t = \frac{S_{t+1}}{S_t}, \quad t = 1, 2, \dots$$

kennt. Die bekannten Erträge werden zum Schätzen der Wahrscheinlichkeiten und erwarteten Erträge benutzt. Hierzu wurden die ersten 261 Daten verwendet, da dies der Anzahl der Handelstage in einem Jahr entspricht. Die Schätzdaten werden zunächst sortiert und in zwei Teilmengen D und U aufgeteilt, so dass $D := \{X_t \mid X_t \leq 1\}$ und $U := \{X_t \mid X_t > 1\}$, $t = 1, \dots, 261$, gelten. Für die Schätzwerte kann dann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, mit der Erträge in der Menge D bzw. U liegen. Dies geschieht durch Zählen der Elemente pro Menge und Division durch die Gesamtanzahl aller Schätzwerte. Der mittlere Ertrag der Aktie wird durch das arithmetische Mittel berechnet.

Analog werden bedingte Wahrscheinlichkeiten mit unterschiedlich langen Vorgeschichten geschätzt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit einem Zeitschritt Vorgeschichte lauten $P[X_t \in U \mid X_{t-1} \in D]$ bzw. $P[X_t \in D \mid X_{t-1} \in D]$ sowie $P[X_t \in U \mid X_{t-1} \in U]$ bzw. $P[X_t \in D \mid X_{t-1} \in U]$, $t = 2, 3, \dots$. Bei zwei Zeitschritten Vorgeschichte wird entsprechend zusätzlich X_{t-2} und bei drei Zeitschritten X_{t-3} einbezogen. Auch für die verschiedenen Vorgeschichten werden die bedingten mittleren Erträge ermittelt.

Die Wahrscheinlichkeiten und mittleren Erträge werden zunächst für die ersten 261 Datenpunkte bestimmt und danach in jedem Zeitpunkt mit den dann verfügbaren zusätzlichen Daten aktualisiert.

Nach dem Abschluss des Schätzverfahrens wird die Strategie bestimmt. Wie bereits im letzten Abschnitt gehen wir davon aus, dass es vier verschiedene Anleger gibt, von denen einer keine Vorgeschichte und somit unbedingte Wahrscheinlichkeiten annimmt. Ein zweiter Anleger geht davon aus, dass die Aktienkurse nur vom zuletzt gesehenen Ertrag abhängen und die anderen legen die letzten zwei bzw. drei Erträge zugrunde. Alle Anleger betrachten zur Bestimmung ihrer Strategie in jeder Periode die zutreffenden bedingten oder unbedingten mittleren Erträge. Falls diese größer als eins sind, setzt der Anleger den Anteil, der gleich der geschätzten bedingten oder unbedingten Wahrscheinlichkeit ist, dass sich X_t in U befindet. Wenn die mittleren Erträge jedoch ≤ 1 sind, muss der Investor damit rechnen, Verluste zu erleiden, und setzt daher kein Geld ein. Pro Zeitschritt wird

dann der tatsächlich auftretende Ertrag mit dem eingesetzten Anteil multipliziert und der zurückbehaltene Anteil addiert. Die so berechneten Kapitalveränderungen des Anlegers werden abschließend miteinander multipliziert, um den Kapitalstand des Investors zu einem bestimmten Zeitpunkt t zu bestimmen.

Einige Ergebnisse für die Simulationen mit einer einzelnen Aktie sind in Tabelle 3.17 dargestellt. Da es sehr risikoreich ist, sein Geld ausschließlich in eine Aktie zu investieren, wurden zunächst Indizes von Aktien betrachtet, da diese geringeren Schwankungen unterliegen. Tabelle 3.17 zeigt daher die Ergebnisse für den Index des DAX (Deutscher Aktienindex) sowie für den Index des SDAX (Small-Cap-DAX). Neben der Darstellung des Kapitalstandes zu verschiedenen Zeitpunkten werden wie in Abschnitt 3.2 erneut die Durchschnittsintegrale gebildet (vgl. S. 117), um einen möglichst umfassenden Überblick über die Kapitalentwicklung zu erhalten.

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$7.731426E - 001$	$7.261738E - 001$	$8.348788E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$7.428892E - 001$	$8.478692E - 001$	$9.275491E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$7.016227E - 001$	$8.462531E - 001$	$1.011146E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.036562E - 001$	$9.030476E - 001$	$1.004572E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.044047E - 001$	$7.868954E - 001$	$7.841719E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.998581E - 001$	$7.832255E - 001$	$8.018267E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.812631E - 001$	$8.002986E - 001$	$8.241578E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.228193E - 001$	$9.465161E - 001$	$9.444463E - 001$
Kapitalstände Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.265768E - 001$	$9.565262E - 001$	$1.191863E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.094592E + 000$	$2.117136E + 000$	$3.174253E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.062374E + 000$	$2.058256E + 000$	$3.090862E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.020651E + 000$	$2.030658E + 000$	$2.889637E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000261E + 000$	$1.091067E + 000$	$1.081242E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.049584E + 000$	$1.545283E + 000$	$1.751262E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.031567E + 000$	$1.501827E + 000$	$1.702759E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.014248E + 000$	$1.466805E + 000$	$1.644323E + 000$

Tabelle 3.17.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für den Index des DAX und den Index des SDAX

Die Werte in Tabelle 3.17 zeigen, dass die Investitionen in den Index des DAX für den Investor nicht vorteilhaft waren. Nur zum Zeitpunkt $t = 2714$ werden unter Berücksichtigung von zwei bzw. drei Zeichen Vorgeschichte keine Verluste realisiert. Der erwirtschaftete Betrag liegt jedoch deutlich unter dem, den der Anleger über denselben Zeitraum mit einem geringen risikolosen Zinssatz erzielt hätte. Auch die Werte der Durchschnittsintegrale belegen, dass alle gewählten Strategien eher zu Verlusten als zu Gewinnen geführt haben und nicht nur die zufällig gewählten Zeitpunkte besonders geringe Kapitalstände aufweisen. Aufgrund dieser Zahlen können wir schließen, dass die Kellystrategie in diesem Fall insgesamt nicht empfehlenswert ist, wobei die verschiedenen langen Vorgeschichten keine deutlich unterschiedlichen Kapitalstände erzeugen.

Für Investitionen in den Index des SDAX sieht man sofort, dass es einen Unterschied gibt zwischen der Strategie ohne Vorgeschichte und den Strategien mit Vorgeschichte. Bis zum Zeitpunkt $t = 454$ erwirtschaftet der Investor kaum Gewinne, danach vergrößert sich das Kapital für die Strategien mit Vorgeschichte, bis es nach 2714 Zeitschritten ungefähr auf das Dreifache des Startkapitals gewachsen ist. Die Strategie mit einem Zeichen Vorgeschichte führt in diesem Fall zum besten Ergebnis.

Um die Güte der Strategien weiter zu überprüfen, wurden diese auch auf einzelne Aktien angewendet. Da insbesondere das Verhalten in Extremfällen interessant erschien, wurden die beiden Aktien des DAX ausgesucht, die im betrachteten Zeitraum (01.01.2003-30.07.2010) das größte und das geringste Wachstum aufwiesen. Die Firma mit dem größten Wachstum war K+S, diejenige mit dem geringsten Wachstum war Infineon Technologies AG. Die Ergebnisse für diese beiden Aktien befinden sich in Tabelle 3.18.

Die Kapitalstände für die Aktien von K+S zeigen ein relativ großes und durchgehendes Wachstum. Auch die im Zeitverlauf größer werdenden Durchschnittsintegrale weisen auf ein stabiles Wachstum hin. Lediglich die Werte der Kellystrategie mit drei Zeitschritten Vorgeschichte sind etwas geringer als die der anderen Strategien. Die Ergebnisse der Kellystrategie müssen allerdings auch im Kontext der Entwicklung der Aktie betrachtet werden. Hierzu sei angemerkt, dass ein Investor, der am Anfang der Berechnungen die Hälfte seines Kapitals in die Aktie investiert, die andere Hälfte als Bargeld zurückbehält und das investierte Geld erst im Zeitpunkt $t = 454$ wieder abhebt, sein Startkapital verdoppelt. Für die Zeitpunkte $t = 1297$ und $t = 1681$ hätte er dieses sogar verfünffacht bzw. einen Kapitalstand von etwa 5.7 erwirtschaftet.

Investitionen in Aktien der Firma Infineon Technologies AG führen in den ersten fünf Jahren nicht zu nennenswerten Gewinnen. Tatsächlich weisen alle vier aufgeführten Strategien von $t = 131$ bis $t = 767$ und von $t = 988$ bis $t = 1328$ Kapitalstände auf, die geringer sind als das Startkapital. Erst danach steigen die Kapitalstände der Strategien mit Vorgeschichte an, wobei die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte das stärkste Wachstum verzeichnet. Zum Vergleich betrachten wir erneut den Investor, der die Hälfte seines Geldes anlegt und dieses zum Zeitpunkt $t = 454$, $t = 1297$ bzw. $t = 1681$ wieder abhebt, wobei er die andere Hälfte als Bargeld behält. Ein solcher Investor besäße Kapitalstände von 0.86, 0.53 bzw. 0.74, was in etwa den Kapitalständen der Kellystrategie ohne Vorgeschichte entspricht. Für die Aktie der Infineon Technologies AG lassen sich durch die Berücksichtigung der Vorgeschichte also Gewinne generieren, was ansonsten nicht der Fall ist.

Wenn wir die verschiedenen Kellystrategien im direkten Vergleich betrachten, führt in acht Fällen die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte, in zwei Fällen die Strategie mit

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.725709E + 000$	$3.320190E + 000$	$3.681936E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.715911E + 000$	$3.336159E + 000$	$3.685230E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.642178E + 000$	$2.860474E + 000$	$3.156748E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.623526E + 000$	$2.526632E + 000$	$2.636316E + 000$
Durchschnittsintegrale K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.342354E + 000$	$2.193117E + 000$	$2.523636E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.335574E + 000$	$2.199612E + 000$	$2.532083E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.314137E + 000$	$1.990582E + 000$	$2.250802E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.295069E + 000$	$1.887715E + 000$	$2.060035E + 000$
Kapitalstände Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.708671E - 001$	$5.757932E - 001$	$7.669887E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.556543E - 001$	$8.596451E - 001$	$2.075101E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.690783E - 001$	$7.297364E - 001$	$1.756420E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.012450E - 001$	$6.309100E - 001$	$1.627519E + 000$
Durchschnittsintegrale Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.083453E - 001$	$8.883832E - 001$	$8.315204E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.497684E - 001$	$9.121509E - 001$	$1.090061E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.891906E - 001$	$8.185062E - 001$	$9.597838E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.341390E - 001$	$8.794407E - 001$	$9.830552E - 001$

Tabelle 3.18.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für die Aktien von K+S und Infineon Technologies AG

Kapitel 3. Numerische Ergebnisse

drei Zeichen Vorgeschichte und jeweils in einem Fall die Strategie ohne Vorgeschichte bzw. mit zwei Zeichen Vorgeschichte zum höchsten Kapitalstand. Aus diesem Grund wurde untersucht, ob die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte einen systematischen Vorteil gegenüber den anderen Strategien aufweist. Hierzu wurden alle Strategien mit dem folgenden Punktesystem bewertet. Eine Strategie erhält einen Pluspunkt für jeden Zeitschritt, in dem

- der Investor einen Anteil > 0.5 setzt und der Ertrag $X_t > 1$ vorliegt,
- der Investor nichts setzt und der Ertrag $X_t < 1$ auftritt.

Dagegen erhält die Strategie einen Minuspunkt für jeden Zeitschritt, in dem

- der Investor einen Anteil > 0.5 setzt und der Ertrag $X_t < 1$ auftritt,
- der Investor nichts setzt und der Ertrag $X_t > 1$ vorliegt.

Zusätzlich wurden für alle Zeitpunkte, in denen der Investor einen Anteil > 0 und < 0.5 gesetzt hat, die jeweiligen Erträge multipliziert, um zu bewerten, ob diese Investitionen insgesamt eher vorteilhaft oder nachteilig waren. Für die zuletzt genannten Zeitpunkte wurden keine Plus- oder Minuspunkte vergeben, da der Investor einerseits gemäß der berechneten Wahrscheinlichkeiten davon ausgeht, dass der Aktienkurs im nächsten Zeitschritt eher sinkt als steigt, andererseits setzt er aber trotzdem einen gewissen Anteil, da die berechneten mittleren Erträge größer als 1 sind.

Mithilfe der Plus- und Minuspunkte wurde derjenige Anteil der Entscheidungen bestimmt, in denen der Anleger das zukünftige Verhalten der Aktie richtig eingeschätzt hat. Dieser Anteil lag insgesamt zwischen 0.492 und 0.575. Nur für die Investition in die Aktie von K+S war dieser Anteil für die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte etwas größer (0.54) als für die Strategien ohne Vorgeschichte oder mit mindestens zwei Zeitschritten Vorgeschichte (0.52 – 0.53).

Bezüglich der berechneten Produkte ergaben sich jeweils acht Werte > 1 und ≤ 1 . Davon lagen für die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte je zwei Werte über 1 und zwei waren ≤ 1 .

Aus diesem Grund kommen wir zu dem Schluss, dass die größeren Kapitalstände der Strategie mit einem Zeichen Vorgeschichte lediglich dadurch begründet sind, dass die tatsächlichen Erträge in den Zeitpunkten, in denen Geld eingesetzt wurde, größer waren als bei den anderen Strategien. Insgesamt deuten die durchgeführten Analysen darauf hin, dass die stochastischen Eigenschaften realer Aktienkurse nicht durch die berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können, so dass sich die ermittelten Gewinne eher zufällig eingestellt haben und kein zwingendes Ergebnis der betrachteten Investitionsstrategie darstellen.

Eine Aktie - Halbe Kellystrategie

Da für reale Zeitreihen das Schätzen der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten sehr schwer ist und die Schätzungen häufig fehlerbehaftet sind, wird in der Literatur oft dazu geraten, lediglich einen Teil des berechneten Kellyanteils zu investieren (vgl. S. 34, 44), da auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit sehr großer Verluste verringert wird. Um zu überprüfen, welche Auswirkungen sich für die von uns betrachteten Aktien ergeben,

wurde die halbe Kellystrategie implementiert. Die Ergebnisse wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit in die Tabellen B.1 und B.2 im Anhang B ausgelagert.

Falls die zu setzenden Anteile bereits richtig geschätzt wurden, geht die Verringerung dieser und damit des Risikos auch immer mit kleineren Wachstumsraten einher. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die meisten Kapitalstände beim Einsatz des halben Kellyanteils kleiner sind als beim Einsatz des vollen. Eine Ausnahme bildet hier der Index des DAX, für den in allen betrachteten Zeitpunkten alle vier Strategien zu größeren Kapitalständen führen (vgl. Tabelle B.1). Dies ist ein Anzeichen dafür, dass die Wahrscheinlichkeiten für Erträge > 1 für diesen Index ursprünglich tatsächlich zu hoch eingeschätzt wurden, was zu einer Verringerung des Kapitalwachstums führen kann.

Jedoch generiert der Investor durch den Einsatz des halben Kellyanteils keine deutlich größeren Gewinne, sondern grenzt eher seine Verluste ein, da auch in diesem Fall fast alle Kapitalstände geringer als das Anfangskapital sind. Auch für die Investition in Aktien von Infineon Technologies AG zeigt sich, dass sämtliche mit der vollen Kellystrategie realisierten Verluste mit der halben Kellystrategie geringer ausfallen (s. Tabelle B.2).

Dass das Setzen des halben Kellyanteils zu geringeren Schwankungen im Kapitalverlauf führen kann, belegen die Durchschnittsintegrale des Kapitals bei Investitionen in die Firma Infineon Technologies AG (Tabellen 3.18 und B.2). Hier kommt es vor, dass im Zeitpunkt $t = 1681$ die vollen Kellystrategien mit mindestens zwei Zeitschritten Vorgeschichte höhere Kapitalstände und gleichzeitig geringere Durchschnittsintegrale aufweisen als die jeweiligen Strategien mit halbem Kellyanteil.

Eine Aktie - Kürzere Schätzzeiträume

Für die bisherigen Berechnungen wurden die Schätzungen auf allen bis dahin bekannten Daten durchgeführt. Da die verwendeten Zeitreihen ziemlich lang sind (z.T. wurden die täglichen Einsätze über einen Zeitraum von ungefähr zehn Jahren berechnet), liegt die Vermutung nahe, dass die ältesten Datenpunkte ab einem gewissen Zeitpunkt nur noch zu einer Verfälschung der aktuellen Schätzungen führen. Um diese Vermutung zu überprüfen, wurden zur Berechnung der geschätzten Wahrscheinlichkeiten und erwarteten Erträge maximal die letzten 300 Datenpunkte verwendet. Die zugehörigen Ergebnisse finden sich in den Tabellen B.5 und B.6.

Diese Berechnungen führten jedoch nicht zu eindeutigen Ergebnissen. Vielmehr ergeben sich für die Strategie ohne Vorgeschichte und Investitionen in den Index des DAX, des SDAX und in Aktien von Infineon Technologies AG größere Kapitalstände für alle betrachteten Zeitpunkte. Dies gilt auch für die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte und Investitionen in den Index des DAX. Demgegenüber ergeben sich für alle Zeitpunkte geringere Kapitalstände für die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte und Investitionen in Aktien der Infineon Technologies AG, für die Strategie mit zwei Zeitschritten Vorgeschichte und Investitionen in den Index des DAX, sowie für die Strategie mit drei Zeichen Vorgeschichte und Investitionen in den Index des SDAX und in Aktien von K+S. Alle anderen Strategien weisen im Zeitverlauf sowohl größere als auch kleinere Kapitalstände auf. Ein Grund dafür, dass die Verringerung der Anzahl der Schätzdaten für die Strategie ohne Vorgeschichte eher zu besseren Ergebnissen führt, während sie für Strategien mit längerer Vorgeschichte eher zu schlechteren Ergebnissen führt, könnte darin liegen, dass für längere Vorgeschichten mehr Schätzdaten benötigt werden.

Ebenso führte die gleichzeitige Verwendung der kürzeren Datenhistorie für die Schätzungen und der Einsatz des halben Kellyanteils sowohl zu größeren als auch zu kleineren Kapitalständen im Vergleich zur Verwendung des halben Kellyanteils bei längeren Zeitreihen für die Schätzungen. Auffällig ist hier, dass in den Fällen, in denen die Verkürzung der Schätzzeiträume für die volle Kellystrategie zu einem größeren Kapitalstand führt, dieses fast immer auch beim Einsatz des halben Kellyanteils der Fall ist. Die Aussage gilt analog für geringere Kapitalstände.

Mehrere Aktien - Ausgangssimulation

Da Investoren an der Börse im Allgemeinen nicht nur auf eine Aktie setzen möchten, sondern auf mehrere Aktien, wurden entsprechende Erweiterungen des Programms implementiert. Hierzu werden die Mächtigkeiten der Mengen D und U zunächst für jede Aktie bestimmt. Die Wahrscheinlichkeiten, dass die Erträge einer Aktie in der Menge D bzw. U liegen, sowie der mittlere Ertrag werden dann für jede Aktie separat berechnet. Auch die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten und bedingten mittleren Erträge werden für jede Aktie bestimmt.

Wie auch im Fall einer Aktie werden diese Werte zunächst anhand der ersten 261 Datenpunkte berechnet und danach in jedem Zeitschritt mit den dann neu verfügbaren Daten aktualisiert.

Um seine Strategie zu bestimmen, betrachtet jeder der vier Anleger dann in jedem Zeitschritt den Vektor, der die bedingten bzw. unbedingten mittleren Erträge aller Aktien mit der passenden Vorgeschichte enthält. Falls alle Einträge dieses Vektors größer als eins sind, summiert er die Einträge auf und setzt auf jede Aktie den Anteil, der sich durch Division des betreffenden Wertes durch die gebildete Summe ergibt. Wenn alle Einträge des Vektors kleiner oder gleich eins sind, setzt der Investor in diesem Zeitschritt kein Kapital ein. Wenn der Vektor jedoch sowohl Werte kleiner als eins als auch größer als eins besitzt, dann verfährt der Investor mit den Werten, die größer als eins sind, so wie im ersten Fall und setzt kein Geld auf diejenigen Aktien, deren mittlere Erträge kleiner oder gleich eins sind. Als Sonderfall sei hier noch bemerkt, dass der Investor die Strategie für eine Aktie verwendet, falls es nur eine Aktie gibt, deren mittlerer Ertrag größer als eins ist.

Die aus der Strategie resultierende Kapitalentwicklung wird danach analog zum Fall mit einer Aktie berechnet.

Da angenommen wird, dass Anleger in ähnliche Aktien investieren wollen, wurden zunächst alle Aktien des DAX (30 Aktien) und danach alle Aktien des SDAX (34 Aktien) als Auswahl betrachtet. Danach wurde simuliert, wie sich das Kapital eines Anlegers verhält, der zwischen den drei Indizes des DAX, SDAX und MDAX (drei Aktien) wählen kann. Die Ergebnisse für die ersten beiden Simulationen befinden sich in Tabelle 3.19, während die Resultate für die dritte Simulation in Tabelle 3.20 aufgelistet sind.

Beim Vergleich von Tabelle 3.19 mit 3.17 fällt auf, dass die Kapitalstände aller Strategien zu allen Zeitpunkten größer sind, wenn es erlaubt ist, auf die einzelnen Aktien des DAX bzw. SDAX zu setzen, anstatt auf deren Index. Dies gilt ebenso für alle Durchschnittsintegrale. Für die Aktien des DAX ist es nun möglich, zu allen Zeitpunkten und mit allen Strategien Gewinne zu erwirtschaften, die größer sind als diejenigen, die eine risikolose Anlage mit niedrigem Zinssatz generieren würde.

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.519115E + 000$	$1.971806E + 000$	$3.090590E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.580980E + 000$	$2.358810E + 000$	$3.874759E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.612494E + 000$	$2.222130E + 000$	$3.627622E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.615827E + 000$	$1.698700E + 000$	$2.831457E + 000$
Durchschnittsintegrale DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.169119E + 000$	$2.120502E + 000$	$2.237468E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.178762E + 000$	$2.287027E + 000$	$2.518387E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.188821E + 000$	$2.197409E + 000$	$2.416157E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.177975E + 000$	$1.964380E + 000$	$2.063056E + 000$
Kapitalstände SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$2.192352E + 000$	$1.695578E + 000$	$2.791998E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$2.952295E + 000$	$3.026190E + 000$	$5.730199E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$3.099040E + 000$	$3.273915E + 000$	$5.451646E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.607068E + 000$	$2.964826E + 000$	$4.947013E + 000$
Durchschnittsintegrale SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.523396E + 000$	$2.298839E + 000$	$2.280484E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.854716E + 000$	$3.366454E + 000$	$3.556952E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.942783E + 000$	$3.514996E + 000$	$3.649520E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.746629E + 000$	$3.050118E + 000$	$3.241806E + 000$

Tabelle 3.19.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für alle Aktien des DAX und des SDAX

Kapitel 3. Numerische Ergebnisse

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$7.621374E - 001$	$8.133298E - 001$	$1.144163E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.513096E - 001$	$2.289372E + 000$	$4.283785E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.021223E - 001$	$1.832152E + 000$	$3.449846E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.997195E - 001$	$2.110840E + 000$	$3.769006E + 000$
Durchschnittsintegrale Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.570552E - 001$	$9.602604E - 001$	$9.544340E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.795137E - 001$	$1.670689E + 000$	$1.949433E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.557492E - 001$	$1.500159E + 000$	$1.696765E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.041635E + 000$	$1.837922E + 000$	$1.998911E + 000$

Tabelle 3.20.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für die drei Aktienindizes des DAX, SDAX und MDAX

In Bezug auf den SDAX lässt sich erneut feststellen, dass sich die Strategie ohne Vorgeschichte von denen mit Vorgeschichte anhand der Kapitalstände unterscheidet.

Tabelle 3.20 verdeutlicht, dass das Kapitalwachstum für Investitionen in die drei Aktienindizes erst nach ca. zwei Jahren einsetzt. Die Kapitalstände zum Zeitpunkt $t = 2714$ sind alle geringer als diejenigen des SDAX zum Zeitpunkt $t = 1681$ und in zwei Fällen auch geringer als die des DAX in $t = 1681$. Dies bedeutet, dass es durch Investitionen in den SDAX in deutlich kürzerer Zeit möglich war, höhere Gewinne zu realisieren als durch Investitionen in die Aktienindizes.

Wenn erneut die vier Strategien direkt miteinander verglichen werden, führt die Strategie mit einem Zeichen Vorgeschichte fünf Mal zu den höchsten Kapitalständen, während die Strategien mit mehr Vorgeschichte dies jeweils nur zweimal erreichen. Die Strategie ohne Vorgeschichte scheint in diesem Fall schlechtere Ergebnisse zu erzielen, da sie in keinem Fall zum höchsten Kapitalstand führt und in sieben Fällen sogar den geringsten Kapitalstand aufweist.

Dies wurde anhand der gesetzten Anteile in die Aktienindizes überprüft. Hierfür wurde pro Aktie für jeden Zeitschritt, in dem der Investor etwas setzt und gleichzeitig der Aktienkurs steigt, sowie in dem Fall, dass der Investor nichts setzt und der Aktienkurs sinkt, ein Pluspunkt vergeben. Für die Fälle, in denen der Investor etwas setzt und der Aktienkurs gleichzeitig sinkt und in denen der Investor nichts setzt und der Aktienkurs steigt, wurden jeweils Minuspunkte vergeben.

Aus dieser Analyse ergab sich, dass die Strategie ohne Vorgeschichte insgesamt einen ebenso großen Anteil richtiger Entscheidungen generiert wie die anderen Strategien. Der berechnete Anteil lag für alle betrachteten Strategien bei knapp 54 %. Auch für mehrere Aktien scheint es dem Anleger daher nicht möglich zu sein, das Sinken oder Steigen des Aktienkurses anhand der geschätzten Werte zuverlässig vorherzusagen.

Mehrere Aktien - Halbe Kellystrategie

In den Tabellen B.3 und B.4 im Anhang B befinden sich die Ergebnisse für den Fall, dass der Investor lediglich die Hälfte des berechneten Kellyanteils einsetzt. Im Vergleich zu den Ergebnissen für den Einsatz des vollen Kellyanteils ergibt sich: Wenn ein Wert beim Einsatz des vollen Kellyanteils für eine bestimmte Strategie und einen festen Zeitpunkt größer als 1 ist, dann ergibt sich für den Einsatz des halben Kellyanteils ein geringerer Wert. Falls sich jedoch beim Einsatz des vollen Kellyanteils ein Wert kleiner als 1 ergibt, dann ergibt sich beim Einsatz des halben Kellyanteils ein größerer Wert. Dieses Ergebnis entspricht genau unseren Erwartungen, da der Einsatz des halben Kellyanteils im Normalfall sowohl zu kleineren Gewinnen als auch zu kleineren Verlusten führt.

Mehrere Aktien - Kürzere Schätzzeiträume

Die resultierenden Werte für den Fall, dass maximal 300 Daten zur Parameterschätzung verwendet werden, sind in den Tabellen B.7 und B.8 zusammengefasst. Für diese Variante ergeben sich erneut keine eindeutigen Ergebnisse.

Die Strategie ohne Vorgeschichte liefert in sieben von neun Fällen größere Kapitalstände im Vergleich zur Verwendung längerer Schätzzeiträume. Für die Strategien mit Vorgeschichte ergeben sich 14 größere Kapitalstände und 13 kleinere Kapitalstände. Insbesondere gibt es kein Zeitpunkt-Strategie-Tupel, das sich immer verbessert oder immer verschlechtert hat. Im Gegensatz zur Betrachtung von Investitionen in eine Aktie lässt sich hier nicht mehr konstatieren, dass die Ergebnisse für Strategien mit längerer Vorgeschichte schlechter geworden sind. Demgegenüber führt die Verwendung kürzerer Schätzzeiträume für die Strategie ohne Vorgeschichte auch bei der Investition in mehrere Aktien zu besseren Ergebnissen.

Abschließend wird in den Tabellen B.11 und B.12 dargestellt, welche Ergebnisse die Investoren erzielen, wenn sie gleichzeitig kürzere Schätzzeiträume verwenden und den halben Kellyanteil einsetzen. Auch in diesem Fall lässt sich nicht eindeutig sagen, ob Investoren mit dieser Variante mehr Kapital erwirtschaften können. Auch hier gilt wie im Fall der Investition in eine Aktie: Wenn die Verkürzung der Schätzzeiträume für den Einsatz des vollen Kellyanteils zu größeren Kapitalständen oder Durchschnittsintegralen führt, dann erhöht sie diese Werte fast immer auch beim Einsatz des halben Kellyanteils. Gleiches gilt für die Verringerung dieser Werte.

Fazit

In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, dass die Kellystrategie bei Kenntnis der zugrundeliegenden bedingten Wahrscheinlichkeiten schon nach 753 Zeitschritten im Median das Kapital eines Anlegers um den Faktor 212 vervielfachen kann, während im arithmetischen Mittel sogar der Faktor $3.9E+018$ möglich ist. Für die Durchschnittsintegrale ergeben sich Werte in derselben Größenordnung (vgl. Tabellen 3.1 und 3.3). Für die nun betrachteten Investitionen an der Börse ergaben sich bis zum Zeitpunkt $t = 1297$ lediglich Faktoren von etwa 3.5 für das Kapital (s. Tabelle B.6) bzw. die Durchschnittsintegrale der Anleger (vgl. Tabelle B.7). Auch dies ist ein Indiz dafür, dass die zugrunde liegenden stochastischen Eigenschaften der Aktienkurse durch das von uns betrachtete Modell nicht ausreichend beschrieben werden.

Kapitel 3. Numerische Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Simulationen gehen davon aus, dass der Investor sein Portfolio täglich anpasst, indem er alle Gewinne bzw. Verluste aus dem eingesetzten Kapital realisiert und die neu berechneten Anteile einsetzt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass es keine Transaktionskosten gibt. Wenn Transaktionskosten einbezogen werden sollen, müssten diese bereits in der betrachteten Zielfunktion aufgenommen werden. Dies würde jedoch einen erheblichen Mehraufwand bedeuten, da der Investor dann ein Interesse daran hat, pro Zeitschritt möglichst wenig an seinem Portfolio zu verändern, um die Transaktionskosten gering zu halten. Er möchte in diesem Fall eine Aufteilung seines Kapitals finden, die ihm für gegebene Transaktionskosten ein optimales Kapitalwachstum sichert.

Außerdem ist die Realisation von Verlusten nicht unbedingt realitätsnah. Ein Anleger, der in eine Aktie investiert hat, deren Kurs sinkt, wird zunächst eher sein Geld in der Aktie belassen und hoffen, dass der Kurs wieder steigt, als die Verluste direkt zu realisieren. Die Realisierung von Verlusten tritt im Allgemeinen nur dann ein, wenn der Anleger davon ausgeht, dass der Kurs der betreffenden Aktie immer weiter fallen wird, und nicht bereits nach einem Tag.

Wie bereits beschrieben, scheinen die hier berechneten Wahrscheinlichkeiten nicht denen zu entsprechen, mit denen Aktienkurse tatsächlich fallen oder steigen. Dass die Strategie mit einem Zeitschritt Vorgeschichte teilweise bessere Ergebnisse erzielt als die Strategien mit längerer Vorgeschichte, kann ein Zeichen dafür sein, dass es an der Börse kurzfristige Trends gibt, deren Wirkung einen Tag lang andauert und die dem Investor zu höheren Gewinnen verhelfen. Allerdings beschreiben längere Vorgeschichten die Entwicklung zum Teil sogar schlechter.

Insgesamt bleibt zu prüfen, ob die Strategien durch Modellanpassungen effizienter bestimmt werden können. Der hier verfolgte Ansatz lässt sich nur für kurze Vorgeschichten verwenden, da alle möglichen Vorgeschichten einbezogen wurden.

Schließlich sei bemerkt, dass die in diesem Abschnitt auftretenden Verluste sehr begrenzt blieben. Im Allgemeinen konnten die Investoren ihr Kapital über den gesamten Zeitraum sogar vervielfachen. Demgegenüber könnte ein risikoaverser Investor bei einem jährlichen Zinssatz von 5% über einen Zeitraum von zehn Jahren lediglich Kapital in Höhe von $1.05^{10} \approx 1.63$ generieren.

Kapitel 4.

Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von der 1956 veröffentlichten Kellystrategie [Kel56] für diskrete stochastische Quellen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten wurde in der Arbeit untersucht, ob sich diese auch auf Quellen mit abhängigen Wahrscheinlichkeiten verallgemeinern lässt. Hierzu wurde zunächst in Kapitel 1 ein Grundmodell formuliert, durch welches sich das Verhalten von Quellen mit endlicher Evolutionsdimension im Zeitverlauf beschreiben lässt.

In Abschnitt 2.3 wurde dann gezeigt, auf welchem Weg eine solche Verallgemeinerung möglich ist. Insbesondere ist es gelungen, für alle möglichen vorgegebenen Quoten festzulegen, welche Anteile ein Investor anlegen sollte, um seine erwartete logarithmische Wachstumsrate zu maximieren. In diesem Zusammenhang wurde auch darauf eingegangen, dass die resultierenden Anteile in bestimmten Fällen nicht eindeutig sind. Hieraus ergeben sich keine Komplikationen, da wir primär an der Kapitalentwicklung des Investors interessiert sind und die erwarteten Kapitalbeträge für die verschiedenen in Frage kommenden Anteile identisch sind. Vielmehr ergibt sich hieraus für den Anleger die Möglichkeit, einen größeren Teil seines Geldes als Bargeld zurückzubehalten und evtl. in andere Investitionen einzubringen (vgl. Bemerkung 2.12).

Mithilfe der ermittelten Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension war es dann in Abschnitt 2.6 möglich, eine einfache Verallgemeinerung der Kellystrategie für Totalisator-Wetten zu bestimmen, für welche bisher in [PS07] nur der Fall binärer Quellen mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten behandelt wurde.

Den Abschluss des Theorieteils bildet Abschnitt 2.8, in welchem die Gültigkeit einiger Eigenschaften der ursprünglichen Kellystrategie auch für die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension gezeigt wird. Insbesondere wurde hier bewiesen, dass diese asymptotisch im Erwartungswert die Wachstumsrate des Kapitals maximiert.

Ein wichtiges Anliegen dieser Arbeit war es, die theoretischen Erkenntnisse auch numerisch zu überprüfen. Dies wurde in Kapitel 3 durchgeführt. Hier lassen sich insbesondere Abschnitt 3.2 und Abschnitt 3.3 kontrastieren, da im ersten ein Beispiel theoretisch konstruiert wird, während im zweiten mit historischen Aktienkursen gearbeitet wird. Die Ergebnisse von Abschnitt 3.2 belegen, dass ein enormes Kapitalwachstum möglich ist, wenn ein Investor die stochastischen Eigenschaften einer diskreten Quelle kennt. Im Gegensatz hierzu investieren die Anleger in Abschnitt 3.3 unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Aktienkurse bestimmte festgelegte Vorgeschichten besitzen, ohne dass bekannt ist, ob dies der Realität entspricht. Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass die Investition in Aktien zu kleineren Gewinnen führt als die Investition in die Markovquelle aus Abschnitt 3.2 mit den dort festgelegten Quoten. Dies liegt meiner Meinung nach darin begründet, dass die verschiedenen geschätzten Wahrscheinlichkeiten für die Investitionen an der Börse nicht den tatsächlich vorliegenden entsprechen. Dennoch ist es mit der in

Kapitel 4. Zusammenfassung und Ausblick

Abschnitt 3.3 implementierten Modifikation der Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension in den meisten Fällen möglich, mehr Kapital zu erwirtschaften als dies bei risikolosen Investitionen der Fall wäre. Positiv wirkt sich hierbei meinem Eindruck nach besonders aus, dass die Kellystrategie eine implizite Risikobewertung einschließt. Insgesamt können wir die in dieser Arbeit entwickelte Strategie denjenigen Investoren empfehlen, die auf die Ausgaben einer Quelle mit endlicher Evolutionsdimension wetten möchten, deren Wahrscheinlichkeiten abhängig und deren stochastische Eigenschaften (z.B. die Länge der Vorgeschichte) bekannt sind. Auch für Investitionen an der Börse ist die Strategie anwendbar, hier kann es jedoch vorkommen, dass der Investor am Ende des (endlichen) betrachteten Zeitraums weniger als sein Startkapital besitzt (vgl. Tabelle 3.18, Kellystrategie ohne Vorgeschichte für Investitionen in Aktien von Infineon Technologies AG).

In der Arbeit wurde immer wieder deutlich, dass Investoren die vorliegenden Wahrscheinlichkeiten kennen müssen, um sich optimal verhalten zu können. In der Realität sind diese Wahrscheinlichkeiten in den meisten Fällen jedoch nicht bekannt, sondern müssen geschätzt werden. Dies kann wie in Abschnitt 3.3 durchgeführt werden, es sind jedoch auch andere Möglichkeiten denkbar. Das hier verwendete Verfahren wurde aufgrund seiner Einfachheit gewählt. Daher könnte es aufschlussreich sein, zu untersuchen, welchen Einfluss verschiedene Schätzverfahren auf die Kapitalentwicklung besitzen.

Auch der Einfluss der Quoten könnte noch näher untersucht werden, da man sich diesbezüglich die Frage stellen kann, ob einem Anleger Nachteile entstehen, wenn er an Spielen teilnimmt, bei denen die Quoten nicht im Vorfeld bekannt sind, sondern von ihm geschätzt werden müssen.

Auch im theoretischen Bereich gibt es noch offene Fragen. So wurde in dieser Arbeit nicht geklärt, ob die Kellystrategie für Quellen mit endlicher Evolutionsdimension auch asymptotisch die Zeit minimiert, die ein Anleger benötigt, um einen vorgegebenen Geldbetrag zu erreichen, oder ob durch diese Strategie der Median des Kapitals maximiert wird, auf dessen Relevanz in Abschnitt 3.1 hingewiesen wurde.

Durch Beantwortung der eben aufgeworfenen Fragen wird es dann hoffentlich möglich, die in dieser Arbeit entwickelte Strategie und ihre Anwendbarkeit in der Praxis genauer zu bewerten.

Anhang A.

Lange Version von Tabelle 1.3

p_1	p_2	a_1^*	a_2^*	$G(a^*)$	a_1^*	a_2^*	a_3^*	$G(a^*)$
0	0	0	1	-1	0	0	1	0
0	0.1	0	1	-0.8415	0	0	1	0
0	0.2	0	1	-0.6830	0	0	1	0
0	0.3	0	1	-0.5245	0	0	1	0
0	0.4	0	1	-0.3660	0	0	1	0
0	0.5	0	1	-0.2075	0	0	1	0
0	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680
0	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.1	0	0	1	-1	0	0	1	0
0.1	0.1	0	1	-0.8415	0	0	1	0
0.1	0.2	0	1	-0.6830	0	0	1	0
0.1	0.3	0	1	-0.5245	0	0	1	0
0.1	0.4	0	1	-0.3660	0	0	1	0
0.1	0.5	0	1	-0.2075	0	0	1	0
0.1	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.1	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.1	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680
0.1	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.1	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.2	0	0	1	-1	0	0	1	0
0.2	0.1	0	1	-0.8415	0	0	1	0
0.2	0.2	0	1	-0.6830	0	0	1	0
0.2	0.3	0	1	-0.5245	0	0	1	0
0.2	0.4	0	1	-0.3660	0	0	1	0
0.2	0.5	0	1	-0.2075	0	0	1	0
0.2	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.2	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.2	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680

Anhang A. Lange Version von Tabelle 1.3

p_1	p_2	a_1^*	a_2^*	$G(a^*)$	a_1^*	a_2^*	a_3^*	$G(a^*)$
0.2	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.2	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.3	0	0.0667	0.9333	-0.9908	0	0	1	0
0.3	0.1	0.0415	0.9585	-0.8380	0	0	1	0
0.3	0.2	0.0143	0.9857	-0.6826	0	0	1	0
0.3	0.3	0	1	-0.5245	0	0	1	0
0.3	0.4	0	1	-0.3660	0	0	1	0
0.3	0.5	0	1	-0.2075	0	0	1	0
0.3	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.3	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.3	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680
0.3	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.3	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.4	0	0.200	0.800	-0.9219	0	0	1	0
0.4	0.1	0.1722	0.8278	-0.7856	0	0	1	0
0.4	0.2	0.1417	0.8583	-0.6464	0	0	1	0
0.4	0.3	0.1082	0.8918	-0.5039	0	0	1	0
0.4	0.4	0.0709	0.9291	-0.3575	0	0	1	0
0.4	0.5	0.0290	0.9710	-0.2061	0	0	1	0
0.4	0.6	0	1	-0.0490	0	0.1818	0.8182	0.0203
0.4	0.7	0	1	0.1095	0	1	0	0.1095
0.4	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680
0.4	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.4	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.5	0	0.3333	0.6667	-0.7925	0	0	1	0
0.5	0.1	0.3053	0.6947	-0.6752	0	0	1	0
0.5	0.2	0.2742	0.7258	-0.5552	0	0	1	0
0.5	0.3	0.2394	0.7606	-0.4320	0	0	1	0
0.5	0.4	0.2000	0.8000	-0.3049	0	0	1	0
0.5	0.5	0.1547	0.8453	-0.1731	0	0	1	0
0.5	0.6	0.1016	0.8984	-0.0351	0	0.4000	0.6000	0.0290
0.5	0.7	0.0376	0.9624	0.1112	0	0.8000	0.2000	0.1187
0.5	0.8	0	1	0.2680	0	1	0	0.2680
0.5	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.5	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.6	0	0.4667	0.5333	-0.6049	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.1	0.4407	0.5593	-0.5086	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.2	0.4115	0.5885	-0.4099	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.3	0.3783	0.6217	-0.3084	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.4	0.3403	0.6597	-0.2035	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.5	0.2957	0.7043	-0.0943	0.2000	0	0.8000	0.0290
0.6	0.6	0.2423	0.7577	0.0204	0.1923	0.3846	0.4231	0.0569

p_1	p_2	a_1^*	a_2^*	$G(a^*)$	a_1^*	a_2^*	a_3^*	$G(a^*)$
0.6	0.7	0.1762	0.8238	0.1424	0.1691	0.7729	0.0580	0.1431
0.6	0.8	0.0894	0.9106	0.2754	0.0894	0.9106	0	0.2754
0.6	0.9	0	1	0.4265	0	1	0	0.4265
0.6	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.7	0	0.6000	0.4000	-0.3568	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.1	0.5780	0.4220	-0.2830	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.2	0.5530	0.4470	-0.2072	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.3	0.5244	0.4756	-0.1292	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.4	0.4912	0.5088	-0.0484	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.5	0.4518	0.5482	0.0357	0.4000	0	0.6000	0.1187
0.7	0.6	0.4038	0.5962	0.1242	0.3865	0.3382	0.2754	0.1431
0.7	0.7	0.3434	0.6566	0.2186	0.3434	0.6566	0	0.2186
0.7	0.8	0.2623	0.7377	0.3213	0.2623	0.7377	0	0.3213
0.7	0.9	0.1396	0.8604	0.4381	0.1396	0.8604	0	0.4381
0.7	1	0	1	0.5850	0	1	0	0.5850
0.8	0	0.7333	0.2667	-0.0389	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.1	0.7171	0.2829	0.0112	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.2	0.6986	0.3014	0.0627	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.3	0.6771	0.3229	0.1158	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.4	0.6520	0.3480	0.1708	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.5	0.6220	0.3780	0.2281	0.6000	0	0.4000	0.2781
0.8	0.6	0.5853	0.4147	0.2884	0.5844	0.2597	0.1558	0.2967
0.8	0.7	0.5386	0.4614	0.3526	0.5386	0.4614	0	0.3526
0.8	0.8	0.4761	0.5239	0.4222	0.4761	0.5239	0	0.4222
0.8	0.9	0.3835	0.6165	0.5002	0.3835	0.6165	0	0.5002
0.8	1	0.2000	0.8000	0.5951	0.2000	0.8000	0	0.5951
0.9	0	0.8667	0.1333	0.3725	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.1	0.8578	0.1422	0.3980	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.2	0.8477	0.1523	0.4241	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.3	0.8359	0.1641	0.4511	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.4	0.8219	0.1781	0.4791	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.5	0.8053	0.1947	0.5083	0.8000	0	0.2000	0.5310
0.9	0.6	0.7848	0.2152	0.5390	0.7882	0.1478	0.0640	0.5415
0.9	0.7	0.7589	0.2411	0.5715	0.7589	0.2411	0	0.5715
0.9	0.8	0.7248	0.2752	0.6066	0.7248	0.2752	0	0.6066
0.9	0.9	0.6768	0.3232	0.6452	0.6768	0.3232	0	0.6452
0.9	1	0.6000	0.4000	0.6895	0.6000	0.4000	0	0.6895
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0.1	1	0	1	1	0	0	1
1	0.2	1	0	1	1	0	0	1
1	0.3	1	0	1	1	0	0	1
1	0.4	1	0	1	1	0	0	1

Anhang A. Lange Version von Tabelle 1.3

p_1	p_2	a_1^*	a_2^*	$G(a^*)$	a_1^*	a_2^*	a_3^*	$G(a^*)$
1	0.5	1	0	1	1	0	0	1
1	0.6	1	0	1	1	0	0	1
1	0.7	1	0	1	1	0	0	1
1	0.8	1	0	1	1	0	0	1
1	0.9	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1

Tabelle A.1.: Optimale Anteile a_i^* , $i = 1, 2, 3$ mit zugehöriger Wachstumsrate $G(a^*)$ für verschiedene Werte von p_1 und p_2 für Situation 1 und 2

Anhang B.

Ergebnisse der Anwendung auf Börsendaten aus Abschnitt 3.3

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.823320E - 001$	$8.598585E - 001$	$9.279745E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.650326E - 001$	$9.299353E - 001$	$9.762503E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.405663E - 001$	$9.306559E - 001$	$1.022563E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.533127E - 001$	$9.599552E - 001$	$1.016925E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.517298E - 001$	$8.893789E - 001$	$8.895009E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.492306E - 001$	$8.877847E - 001$	$8.995435E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.388379E - 001$	$8.976581E - 001$	$9.125408E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.615856E - 001$	$9.775567E - 001$	$9.779532E - 001$
Kapitalstände Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.631358E - 001$	$9.830060E - 001$	$1.101093E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.046571E + 000$	$1.459173E + 000$	$1.790156E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.031123E + 000$	$1.438805E + 000$	$1.766591E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.010710E + 000$	$1.429771E + 000$	$1.709062E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.000242E + 000$	$1.042802E + 000$	$1.039514E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.024660E + 000$	$1.229784E + 000$	$1.304152E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.015891E + 000$	$1.212666E + 000$	$1.286171E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.007334E + 000$	$1.197943E + 000$	$1.264931E + 000$

Tabelle B.1.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für den Index des DAX und den Index des SDAX bei Einsatz des halben Kellyanteils

Anhang B. Ergebnisse der Anwendung auf Börsendaten aus Abschnitt 3.3

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.317910E + 000$	$1.884615E + 000$	$2.002452E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.314021E + 000$	$1.889532E + 000$	$2.004025E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.285032E + 000$	$1.748731E + 000$	$1.853847E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.277417E + 000$	$1.642322E + 000$	$1.691190E + 000$
Durchschnittsintegrale K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.157793E + 000$	$1.461828E + 000$	$1.581266E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.154833E + 000$	$1.463082E + 000$	$1.583309E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.145841E + 000$	$1.398131E + 000$	$1.499051E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.137562E + 000$	$1.365812E + 000$	$1.439496E + 000$
Kapitalstände Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.373217E - 001$	$7.732718E - 001$	$9.009983E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.803215E - 001$	$9.404051E - 001$	$1.479157E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.344458E - 001$	$8.658730E - 001$	$1.360046E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.518806E - 001$	$8.043483E - 001$	$1.311187E + 000$
Durchschnittsintegrale Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.545720E - 001$	$9.461155E - 001$	$9.167078E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.760977E - 001$	$9.583786E - 001$	$1.041931E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.437902E - 001$	$9.066421E - 001$	$9.781941E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.673978E - 001$	$9.404561E - 001$	$9.942059E - 001$

Tabelle B.2.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für die Aktien von K+S und Infineon Technologies AG bei Einsatz des halben Kellyanteils

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.237295E + 000$	$1.454646E + 000$	$1.842460E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.262372E + 000$	$1.594618E + 000$	$2.068399E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.275199E + 000$	$1.543150E + 000$	$1.995967E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.276409E + 000$	$1.347891E + 000$	$1.762592E + 000$
Durchschnittsintegrale DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.081874E + 000$	$1.436700E + 000$	$1.494208E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.085959E + 000$	$1.487441E + 000$	$1.580584E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.090592E + 000$	$1.461712E + 000$	$1.549994E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.085428E + 000$	$1.390491E + 000$	$1.440430E + 000$
Kapitalstände SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.484370E + 000$	$1.329772E + 000$	$1.716403E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.723807E + 000$	$1.779518E + 000$	$2.464279E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.766447E + 000$	$1.847728E + 000$	$2.398454E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.619972E + 000$	$1.758735E + 000$	$2.285817E + 000$
Durchschnittsintegrale SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.230088E + 000$	$1.504901E + 000$	$1.508613E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.351069E + 000$	$1.806779E + 000$	$1.872297E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.381321E + 000$	$1.845711E + 000$	$1.896513E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.314346E + 000$	$1.723762E + 000$	$1.790305E + 000$

Tabelle B.3.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in alle Aktien des DAX und SDAX bei Einsatz des halben Kellyanteils

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.774848E - 001$	$9.235425E - 001$	$1.116982E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.274712E - 001$	$1.541202E + 000$	$2.132870E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.001007E - 001$	$1.382426E + 000$	$1.922141E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.004170E + 000$	$1.485838E + 000$	$2.011490E + 000$
Durchschnittsintegrale Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.787255E - 001$	$9.795939E - 001$	$9.826567E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.914578E - 001$	$1.264704E + 000$	$1.366662E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.787487E - 001$	$1.205592E + 000$	$1.285708E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.022194E + 000$	$1.334830E + 000$	$1.399785E + 000$

Tabelle B.4.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in die Indizes DAX, SDAX und MDAX bei Einsatz des halben Kellyanteils

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.142685E - 001$	$1.235833E + 000$	$1.277985E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.354231E - 001$	$1.169974E + 000$	$1.236935E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$7.008573E - 001$	$8.173713E - 001$	$8.349317E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.077111E - 001$	$1.235642E + 000$	$1.386771E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.378649E - 001$	$1.046593E + 000$	$1.082259E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.048649E - 001$	$1.007496E + 000$	$1.040742E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.630247E - 001$	$7.635839E - 001$	$7.789054E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.114567E - 001$	$1.102388E + 000$	$1.140353E + 000$
Kapitalstände Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.913145E - 001$	$1.529982E + 000$	$1.714454E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.088096E + 000$	$2.153781E + 000$	$2.743707E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.067508E + 000$	$1.860836E + 000$	$2.250790E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.017719E + 000$	$1.723336E + 000$	$2.131176E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.015251E + 000$	$1.233608E + 000$	$1.293183E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.050622E + 000$	$1.502763E + 000$	$1.677301E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.039625E + 000$	$1.420169E + 000$	$1.530309E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.019923E + 000$	$1.373925E + 000$	$1.462284E + 000$

Tabelle B.5.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für den Index des DAX und den Index des SDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten

Anhang B. Ergebnisse der Anwendung auf Börsendaten aus Abschnitt 3.3

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.774524E + 000$	$3.526349E + 000$	$3.446936E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.762361E + 000$	$2.843753E + 000$	$3.092956E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.729564E + 000$	$2.610110E + 000$	$2.583988E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.606835E + 000$	$2.258422E + 000$	$2.634342E + 000$
Durchschnittsintegrale K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.353784E + 000$	$2.281519E + 000$	$2.606183E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.345797E + 000$	$2.024872E + 000$	$2.284176E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.335219E + 000$	$1.949113E + 000$	$2.104037E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.301268E + 000$	$1.757404E + 000$	$1.963459E + 000$
Kapitalstände Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$8.969357E - 001$	$8.935397E - 001$	$1.169203E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.087393E - 001$	$6.972061E - 001$	$1.699292E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.638923E - 001$	$8.907767E - 001$	$1.850615E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$8.620655E - 001$	$7.558088E - 001$	$1.613709E + 000$
Durchschnittsintegrale Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.329944E - 001$	$9.364127E - 001$	$9.474229E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$8.913651E - 001$	$8.392776E - 001$	$9.600598E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.821216E - 001$	$8.693850E - 001$	$1.026131E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.162611E - 001$	$8.907906E - 001$	$1.006052E + 000$

Tabelle B.6.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für die Aktie von K+S und die von Infineon Technologies AG bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.557754E + 000$	$2.041206E + 000$	$2.414362E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.522121E + 000$	$1.794788E + 000$	$3.135837E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.624662E + 000$	$2.795420E + 000$	$4.785291E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.586669E + 000$	$2.156439E + 000$	$3.302819E + 000$
Durchschnittsintegrale DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.179432E + 000$	$2.225273E + 000$	$2.218362E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.151468E + 000$	$2.116244E + 000$	$2.241607E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.186366E + 000$	$2.362523E + 000$	$2.752590E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.170243E + 000$	$2.078041E + 000$	$2.265502E + 000$
Kapitalstände SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$2.211664E + 000$	$1.902199E + 000$	$2.518686E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$3.139941E + 000$	$3.230626E + 000$	$5.928174E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$3.250883E + 000$	$2.575792E + 000$	$4.582186E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$2.949189E + 000$	$2.873741E + 000$	$5.503762E + 000$
Durchschnittsintegrale SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.529842E + 000$	$2.263752E + 000$	$2.217616E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.905380E + 000$	$3.466028E + 000$	$3.669861E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.978207E + 000$	$3.526751E + 000$	$3.526975E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.837672E + 000$	$3.156913E + 000$	$3.415163E + 000$

Tabelle B.7.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in alle Aktien des DAX und des SDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.364547E - 001$	$1.782418E + 000$	$2.021413E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.549737E - 001$	$2.930829E + 000$	$4.050949E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$7.634601E - 001$	$1.760246E + 000$	$2.526172E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.462714E - 001$	$2.293132E + 000$	$3.071511E + 000$
Durchschnittsintegrale Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.934234E - 001$	$1.363341E + 000$	$1.446919E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.945131E - 001$	$1.911764E + 000$	$2.178648E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.247837E - 001$	$1.326136E + 000$	$1.455610E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.861047E - 001$	$1.839412E + 000$	$1.964234E + 000$

Tabelle B.8.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in die Indizes des DAX, SDAX und MDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.578013E - 001$	$1.118850E + 000$	$1.139132E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.157898E - 001$	$1.090109E + 000$	$1.122241E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.390730E - 001$	$9.122665E - 001$	$9.247837E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.552523E - 001$	$1.123545E + 000$	$1.194091E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.695405E - 001$	$1.023348E + 000$	$1.041289E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.519831E - 001$	$1.004138E + 000$	$1.021482E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.287393E - 001$	$8.755229E - 001$	$8.855266E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.556765E - 001$	$1.053063E + 000$	$1.072372E + 000$
Kapitalstände Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.960832E - 001$	$1.241836E + 000$	$1.315819E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.043470E + 000$	$1.472625E + 000$	$1.664145E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.033609E + 000$	$1.369076E + 000$	$1.508094E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.009243E + 000$	$1.317939E + 000$	$1.468261E + 000$
Durchschnittsintegrale Index des SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.007850E + 000$	$1.106190E + 000$	$1.133095E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.025189E + 000$	$1.214535E + 000$	$1.279638E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.019858E + 000$	$1.183738E + 000$	$1.228076E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.010168E + 000$	$1.164258E + 000$	$1.201410E + 000$

Tabelle B.9.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für den Index des DAX und den Index des SDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten und Investition des halben Kellyanteils

Anhang B. Ergebnisse der Anwendung auf Börsendaten aus Abschnitt 3.3

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.336890E + 000$	$1.949026E + 000$	$1.940407E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.332179E + 000$	$1.749393E + 000$	$1.836621E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.319427E + 000$	$1.671907E + 000$	$1.673357E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.271477E + 000$	$1.552842E + 000$	$1.687615E + 000$
Durchschnittsintegrale K+S			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.162579E + 000$	$1.489313E + 000$	$1.607448E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.159128E + 000$	$1.414142E + 000$	$1.514199E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.154723E + 000$	$1.388277E + 000$	$1.455770E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.140491E + 000$	$1.324505E + 000$	$1.408424E + 000$
Kapitalstände Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.491422E - 001$	$9.516577E - 001$	$1.098290E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.015653E - 001$	$8.418111E - 001$	$1.335039E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.315173E - 001$	$9.530595E - 001$	$1.397296E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.309187E - 001$	$8.801235E - 001$	$1.308867E + 000$
Durchschnittsintegrale Infineon Technologies AG			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.672175E - 001$	$9.709653E - 001$	$9.779590E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.450651E - 001$	$9.188463E - 001$	$9.795386E - 001$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.399499E - 001$	$9.354919E - 001$	$1.011630E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.578029E - 001$	$9.472188E - 001$	$1.005933E + 000$

Tabelle B.10.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für die Aktien von K+S und Infineon Technologies AG bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten und Investition des halben Kellyanteils

Strategie	$t = 454$	$t = 1297$	$t = 1681$
Kapitalstände DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.252894E + 000$	$1.472082E + 000$	$1.619542E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.238587E + 000$	$1.380910E + 000$	$1.849659E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.279817E + 000$	$1.732017E + 000$	$2.294068E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.264752E + 000$	$1.518323E + 000$	$1.904777E + 000$
Durchschnittsintegrale DAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.086339E + 000$	$1.467640E + 000$	$1.483342E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.073518E + 000$	$1.434173E + 000$	$1.492858E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.089266E + 000$	$1.510541E + 000$	$1.644746E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.081849E + 000$	$1.425695E + 000$	$1.504632E + 000$
Kapitalstände SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.490962E + 000$	$1.411821E + 000$	$1.634151E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.777638E + 000$	$1.835479E + 000$	$2.502841E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.809367E + 000$	$1.639489E + 000$	$2.201544E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.723012E + 000$	$1.734888E + 000$	$2.417334E + 000$
Durchschnittsintegrale SDAX			
Kellystr. ohne Vorg.	$1.232621E + 000$	$1.495888E + 000$	$1.490507E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$1.367231E + 000$	$1.832675E + 000$	$1.900694E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$1.392282E + 000$	$1.848282E + 000$	$1.864684E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$1.345141E + 000$	$1.756274E + 000$	$1.839301E + 000$

Tabelle B.11.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in alle Aktien des DAX und des SDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten und des halben Kellyanteils

Strategie	$t = 454$	$t = 2230$	$t = 2714$
Kapitalstände Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.700324E - 001$	$1.354176E + 000$	$1.447955E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.805682E - 001$	$1.745676E + 000$	$2.062917E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$8.768961E - 001$	$1.352279E + 000$	$1.633594E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.764634E - 001$	$1.546709E + 000$	$1.805265E + 000$
Durchschnittsintegrale Indizes			
Kellystr. ohne Vorg.	$9.980548E - 001$	$1.158442E + 000$	$1.196838E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 1	$9.989610E - 001$	$1.351046E + 000$	$1.445774E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 2	$9.619355E - 001$	$1.137006E + 000$	$1.195169E + 000$
Kellystr. mit Vorg. 3	$9.943845E - 001$	$1.334599E + 000$	$1.387510E + 000$

Tabelle B.12.: Kapitalstände und deren Durchschnittsintegrale zu verschiedenen Zeitpunkten t für Investitionen in die Indizes DAX, SDAX und MDAX bei Verwendung von maximal 300 Schätzdaten und Einsatz des halben Kellyanteils

Literaturverzeichnis

- [AC88] ALGOET, PAUL H. und THOMAS M. COVER, *Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment*: Annals of Probability, **16**, S. 876 – 898 (1988)
- [BC80] BELL, ROBERT M. und THOMAS M. COVER, *Competitive Optimality of Logarithmic Investment*: Mathematics of Operations Research, **5** (2), S. 161 – 166 (1980)
- [BC88] BELL, ROBERT M. und THOMAS M. COVER, *Game-Theoretic Optimal Portfolios*: Management Science, **34** (6), S. 724 – 733 (1988)
- [Ber54] BERNOULLI, DANIEL, *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*: Econometrica, **22** (1), S. 23 – 36, übersetzt von Louise Sommer (1954)
- [BN95] BEHNEN, KONRAD und GEORG NEUHAUS, *Grundkurs Stochastik*: 3. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart (1995)
- [BP66] BAUM, LEONARD E. und TED PETRIE, *Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains*: The Annals of Mathematical Statistics, **37** (6), S. 1554–1563 (1966)
- [Bre60] BREIMAN, LEO, *Investment Policies for Expanding Business Optimal in a Long-Run Sense*: In: WILLIAM T. ZIEMBA und R. G. VICKSON (Hrsg.), *Stochastic Optimization Models in Finance*, Academic, New York, S. 593 – 598 (1960)
- [Bre61] BREIMAN, LEO, *Optimal Gambling Systems for Favorable Games*: Fourth Symposium on Probability and Statistics, Berkeley, **1**, S. 65 – 78 (1961)
- [Cov91] COVER, THOMAS M., *Universal Portfolios*: Mathematical Finance, **1** (1), S. 1 – 29 (1991)
- [CRR79] COX, JOHN C., STEPHEN A. ROSS und MARK RUBINSTEIN, *Option Pricing: A Simplified Approach*: Journal of Financial Economics, **7**, S. 229 – 263 (1979)
- [CT06] COVER, THOMAS M. und JOY A. THOMAS, *Elements of Information Theory*: 2. Auflage, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ (2006)
- [EM02] EPHRAIM, YARIV und NERI MERHAV, *Hidden Markov Processes*: IEEE Transactions on Information Theory, **48** (6), S. 1518 – 1569 (2002)
- [Eth04] ETHIER, STEWART N., *The Kelly System Maximizes Median Fortune*: Journal of Applied Probability, **41** (4), S. 1230 – 1236 (2004)

Literaturverzeichnis

- [Fec60] FECHNER, GUSTAV TH., *Elemente der Psychophysik, Band 2*: Breitkopf und Härtel, Leipzig (1860)
- [Fis10] FISCHER, GERD, *Lineare Algebra - Eine Einführung für Studienanfänger*: 17., aktualisierte Auflage, Vieweg + Teubner, Wiesbaden (2010)
- [FKS02] FAIGLE, ULRICH, WALTER KERN und GEORG STILL, *Algorithmic Principles of Mathematical Programming*: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (2002)
- [FS07] FAIGLE, ULRICH und ALEXANDER SCHÖNHUTH, *Asymptotic Mean Stationarity of Sources With Finite Evolution Dimension*: IEEE Transactions on Information Theory, **53** (7), S. 2342 – 2348 (2007)
- [Gra88] GRAY, ROBERT M., *Probability, Random Processes, and Ergodic Properties*: Springer-Verlag, New York (1988)
- [Gra90] GRAY, ROBERT M., *Entropy and Information Theory*: Springer-Verlag, New York (1990)
- [Hak71] HAKANSSON, NILS H., *Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection*: Journal of Finance and Quantitative Analysis, **6**, S. 517 – 557 (1971)
- [HK02] HAN, TE SUN und KINGO KOBAYASHI, *Mathematics of Information and Coding*: American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2002)
- [HLP73] HARDY, GODFREY H., J. E. LITTLEWOOD und GEORGE PÓLYA, *Inequalities*: 2., nachgedruckte Auflage, University Press, Cambridge (1973)
- [HM75] HAKANSSON, NILS H. und BRUCE L. MILLER, *Compound-return mean-variance efficient portfolios never risk ruin*: Management Science, **22** (4), S. 391 – 400 (1975)
- [HQ95] HEISE, WERNER und PASQUALE QUATTROCCHI, *Informations- und Codierungstheorie: Mathematische Grundlagen der Daten-Kompression und -Sicherheit in diskreten Kommunikationssystemen*: 3. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg (1995)
- [HZ95] HAKANSSON, NILS H. und WILLIAM T. ZIEMBA, *Capital growth theory*: In: R. A. JARROW, V. MAKSIMOVIC und WILLIAM T. ZIEMBA (Hrsg.), *Finance*, Kapitel 3, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, S. 65 – 86 (1995)
- [Hö89] HÖLDER, OTTO, *Ueber einen Mittelwerthssatz*: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, **2**, S. 38 – 47 (1889)
- [Jun08] JUNGnickel, DIETER, *Optimierungsmethoden*: Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage (2008)

- [Kel56] KELLY, JOHN L., *A new interpretation of information rate*: Bell System Technical Journal, **35**, S. 917 – 926 (1956)
- [KR81] KIEFFER, JOHN C. und MAURICE RAHE, *Markov Channels are Asymptotically Mean Stationary*: SIAM Journal on Mathematical Analysis, **12 (3)**, S. 293 – 305 (1981)
- [Kul68] KULLBACK, SOLOMON, *Information Theory and Statistics*: Dover, New York, Nachdruck der 1959 von Wiley veröffentlichten Auflage (1968)
- [Lat59] LATANÉ, HENRY A., *Criteria for Choice Among Risky Ventures*: Journal of Political Economy, **67**, S. 144 – 155 (1959)
- [Lue93] LUENBERGER, DAVID G., *A preference foundation for log mean-variance criteria in portfolio choice problems*: Journal of Economic Dynamics and Control, **17**, S. 887 – 906 (1993)
- [LY08] LUENBERGER, DAVID G. und YINYU YE, *Linear and nonlinear programming*: Springer, New York, 3. Auflage (2008)
- [Mar59] MARKOWITZ, HARRY M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*: Wiley, New York (1959)
- [MPZ08] MEDO, MATÚŠ, YURY M. PIS'MAK und YI-CHENG ZHANG, *Diversification and limited information in the Kelly game*: Physica A, **387 (24)**, S. 6151 – 6158 (2008)
- [MTZ11] MACLEAN, LEONARD C., EDWARD O. THORP und WILLIAM T. ZIEMBA, *Good and bad properties of the Kelly criterion*: In: LEONARD C. MACLEAN, EDWARD O. THORP und WILLIAM T. ZIEMBA (Hrsg.), *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice, World Scientific Handbook in Financial Economics Series - Vol. 3*, World Scientific, S. 563 – 573 (2011)
- [Neu06] NEUKIRCH, JÜRGEN, *Algebraische Zahlentheorie*: Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2006)
- [PS07] PIOTROWSKI, EDWARD W. und MALGORZATA SCHROEDER, *Kelly Criterion revisited: optimal bets*: The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems, **57 (2)**, S. 201 – 203 (2007)
- [RR96] RAMACHANDRAN, D. und L. RÜSCHENDORF, *Duality and Perfect Probability Spaces*: Proceedings of the American Mathematical Society, **124 (7)**, S. 2223 – 2228 (1996)
- [Sam63] SAMUELSON, PAUL A., *Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers*: Scienta (Milan), **57**, S. 1 – 6, reproduziert in: Collected scientific papers of Paul A. Samuelson - I (MIT Press, Cambridge, MA), Seiten 153 - 158, 1966 (1963)
- [Sam69] SAMUELSON, PAUL A., *Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming*: Review of Economics and Statistics, **51 (3)**, S. 239 – 246 (1969)

- [Sam71] SAMUELSON, PAUL A., *The “fallacy” of maximizing the geometric mean in long sequences of investing or gambling*: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **68 (10)**, S. 2493 – 2496 (1971)
- [Sam79] SAMUELSON, PAUL A., *Why we should not make mean log of wealth big though years to act are long*: Journal of Banking and Finance, **3 (4)**, S. 305 – 307 (1979)
- [Sch07] SCHÖNHUTH, ALEXANDER, *Diskretwertige stochastische Vektorräume: Grundlagen, Ergodentheorie und Darstellungen*: Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität zu Köln (2007)
- [Sch08] SCHÖNHUTH, ALEXANDER, *Simple and efficient solution of the identifiability problem for hidden Markov sources and quantum random walks*: IEEE, Information Theory and Its Applications, S. 1 – 6 (2008)
- [Sey00] SEYDEL, RÜDIGER, *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten: computational finance*: Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2000)
- [Sey09] SEYDEL, RÜDIGER, *Tools for Computational Finance*: 4. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg (2009)
- [Sha48] SHANNON, CLAUDE E., *A mathematical theory of communication*: Bell System Technical Journal, **27**, S. 379 – 423, 623 – 656 (1948)
- [Tho66] THORP, EDWARD O., *Beat the Dealer: a winning strategy for the game of twenty one*: 2. Auflage, Vintage Books, New York (1966)
- [Tho69] THORP, EDWARD O., *Optimal Gambling Systems for Favorable Games*: Review of the International Statistical Institute, **37 (3)**, S. 273 – 293 (1969)
- [Tho71] THORP, EDWARD O., *Portfolio choice and the Kelly Criterion*: In: WILLIAM T. ZIEMBA und R. G. VICKSON (Hrsg.), *Stochastic Optimization Models in Finance*, Academic, New York, S. 599 – 619 (1971)
- [Tho06] THORP, EDWARD O., *The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market*: In: S. A. ZENIOS und WILLIAM T. ZIEMBA (Hrsg.), *Handbook of Asset and Liability Management, Volume 1: Theory and Methodology*, Kapitel 9, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, S. 385 – 428 (2006)
- [Tho11] THORP, EDWARD O., *Understanding the Kelly Criterion*: In: LEONARD C. MACLEAN, EDWARD O. THORP und WILLIAM T. ZIEMBA (Hrsg.), *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice, World Scientific Handbook in Financial Economics Series - Vol. 3*, World Scientific, S. 509 – 524 (2011)
- [TK67] THORP, EDWARD O. und S. KASSOUF, *Beat the Market*: Random House, New York (1967)

- [Wil36] WILLIAMS, JOHN B., *Speculation and the Carryover*: Quarterly Journal of Economics, **50 (3)**, S. 436 – 455 (1936)

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. U. Faigle betreut worden.