

## Zusammenfassung

### Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz – genetisch, explorativ, anschaulich

Mathematische Resultate werden häufig in einer Weise dargestellt, die kaum noch Einsicht in die Entdeckungsgeschichte dieser Resultate gewähren. Viele typische Vorgehensweisen und Strategien die beim Betreiben von Mathematik eine wichtige Rolle spielen, wie z.B. Analogiebildung, induktives Schließen, Aufspüren versteckter oder überflüssiger Annahmen, haben in der klassischen Anordnung des Wissens nach dem Schema „Definition, Satz, Beweis“ keinen Platz. Aus solchen Darstellungen erhält der Empfänger dann nur wenig Anhaltspunkte wie mathematisches Forschen funktioniert. Für das Lehren und Lernen von Mathematik als einer schöpferischen Tätigkeit kann daher eine Darstellung des Stoffes, die stärker den Prozess des Entdeckens als das fertige Resultat in den Vordergrund stellt, hilfreich sein. Die vorliegende Arbeit liefert eine solche heuristische Behandlung des Eulerschen Polyedersatzes. Insbesondere werden verschiedene vorstellbare Wege beschrieben, die Formel und einige ihrer Beweise zu entdecken.

Die meisten der bestehenden Unterrichtsvorschläge zum Polyedersatz betonen zum Einen die topologische Natur des Satzes, zum Anderen seine Nützlichkeit als Werkzeug zum Lösen kombinatorischer Probleme. Die Relevanz des Satzes als Unterrichtsgegenstand wird dabei offenbar aus dessen exponierter Stellung innerhalb der Topologie und der Kombinatorik abgeleitet. Das Resultat an sich und seine Bedeutung stehen also im Vordergrund. Diese Arbeit soll dagegen eine Grundlage für die Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen zum Polyedersatz schaffen, die stärker das mathematische Handeln hervorheben. Daher wird untersucht, welchen bedeutsamen mathematischen Verhaltensweisen man bei der Auseinandersetzung mit dem Polyedersatz begegnen kann. Insbesondere wird gezeigt, dass der Polyedersatz, da er in verschiedenen Erfahrungsbereichen auftritt, „einfache“ kontextübergreifende Betrachtungen ermöglicht, ähnlich wie sie „im Großen“ beim Zusammenspiel verschiedener mathematischer Gebiete auftreten.

## Abstract

### Investigations on Euler's polyhedron formula – genetic, explorative, visual

Mathematical results are often presented in a way which allows hardly any insight into the story of invention of these results. Many typical approaches and strategies that play an important role when doing mathematics, as for example analogy, inductive reasoning and tracing of hidden or superfluous assumptions, have no place in the classical arrangement of the knowledge according to the pattern “definition, theorem, proof”. The reader does not learn much about how mathematical research works from such expositions. It could be useful for the purpose of teaching and learning of mathematics as a creative activity to have a presentation of the subject which highlights the process of invention, and not just the final result. The present work gives such a heuristic account of the Euler polyhedron formula. In particular, different conceivable ways to find the formula and to find some of its proofs are described.

Most of the existing teaching units on the polyhedron formula emphasize the topological nature of the result and its utility as a tool for solving combinatorial problems. The relevance of the theorem as a teaching subject is apparently derived from its exposed status within topology and combinatorics. The focus is on the result and its meaning. This work, however, should serve as a basis for the development of teaching units on the polyhedron formula which place more emphasis on the mathematical activities. To this end it will be analyzed what kind of mathematical behavior one can encounter when studying the polyhedron formula. It will be shown, for instance, that the polyhedron formula, since it occurs in different contexts, enables considerations similar to those which appear in the interplay between different mathematical fields.