

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

**Verzweigung periodischer Lösungen bei
rekurrenter neuronaler Dynamik mit
Zeitverzögerungen**

vorgelegt von

Andreas Zapp

aus

Gummersbach

Köln 2001

Erster Berichtstatter: Prof. Dr. Küpper
Zweiter Berichtstatter: Prof. Dr. Seydel
Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juni 2001

Zusammenfassung

Die qualitative Beschreibung eines rekurrenten Netzwerks von Neuronen kann mathematisch durch ein System zeitverzögerter Differentialgleichungen modelliert werden. Dabei repräsentieren die Zeitverzögerungen die Laufzeiten zwischen den Neuronen. In der vorliegenden Arbeit wird die Dynamik zweier spezieller rekurrenter Netzwerke untersucht, die sich in der Netzwerktopologie unterscheiden. Gegenstand des ersten Teils ist ein geschlossene Kette von einer endlichen Zahl von Neuronen, die keine Selbstkopplungen besitzen. Das Netzwerk im zweiten Teil besteht aus einem Ring zweier Neuronen, die beide eine Selbstkopplung aufweisen. Dabei verhält sich das eine Neuron anregend (exzitatorisch) und das andere hemmend (inhibitorisch). Mit Methoden aus der Verzweigungstheorie werden qualitative Eigenschaften der dazugehörigen mathematischen Modelle untersucht. Unter Berücksichtigung der Parameter, die den Kopplungsstärken und Signallaufzeiten zwischen den Neuronen entsprechen, werden wichtige Aspekte der lokalen und globalen Dynamik untersucht.

Für das Modell einer geschlossenen Kette wird die Bedeutung periodischer Lösungen herausgestellt. Dabei bestimmt man Hopf-Verzweigungspunkte, die lokal einen Zweig periodischer Lösungen implizieren. Unter geeigneten Voraussetzungen werden diese Zweige global fortgesetzt. Durch Anwendung eines Fixpunktsatzes wird die Existenz einer langsam oszillierenden periodischen Lösung bewiesen.

Für das zweite Modell zeigt sich, daß durch selbstkoppelnde Neuronen die Dynamik viel komplexer wird. Neben den Untersuchungen von Hopf-Verzweigungspunkten wird besonders Gewicht auf die Analyse einer Codimension 2-Verzweigung gelegt, der sogenannten Bogdanov-Takens-Verzweigung. Dadurch ist es möglich, die Existenz homokliner Lösungen zu beweisen. Durch die Analyse einer weiteren Codimension 2, der degenerierten Bogdanov-Takens-Verzweigung unter \mathbb{Z}_2 -Symmetrie, untersucht man weitere globale Verzweigungen des Systems. So weist man die Existenz weiterer homokliner und periodischer Lösungen nach. Abgeschlossen werden die Untersuchungen des Modells durch ein numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm, das neue Einsichten in das Verzweigungsverhalten liefert.

Zum Abschluß der Arbeit werden numerische Methoden für zeitverzögerte Differentialgleichungen vorgestellt, die im vorherigen Anwendung gefunden haben. Dabei handelt es sich um Fortsetzungsmethoden periodischer und homokliner Lösungen für zeitverzögerte Differentialgleichungen.

Abstract

Qualitative properties of a recurrent neural network can be modelled mathematically by a system of delay differential equations. The time delays reflect the propagation time between neurons. This thesis concerns the dynamics of two special recurrent neural networks, namely a ring consisting of a finite number of neurons without self-connections and a ring of two neurons, one excitatory and one inhibitory, considering self-connections.

By applying methods of bifurcation theory the properties of the mathematical models are characterized. Under consideration of the parameters corresponding to the time delays and the connection weights local and global analysis is carried out.

In the case of a ring of neurons the significance of periodic solutions is exposed. One computes Hopf bifurcation points which locally give rise to branches of periodic solutions. Under suitable assumptions the global continuation of these branches is discussed. Using a fixed point theorem

the existence of a global slowly oscillating periodic solution is proven.

Due to self-connections the dynamics become more complex which is presented for the second model. In addition to Hopf bifurcation curves the existence of codimension 2 bifurcation points is proven. The existence of homoclinic solutions is implied by a Bogdanov-Takens singularity. The analysis of another codimension 2 bifurcation, a degenerate Bogdanov-Takens bifurcation with Z_2 symmetry, implies global bifurcation curves of periodic and homoclinic solutions. Using numerical methods a complete bifurcation diagram is presented which gives insight to some new bifurcations.

Finally the numerical methods applied in the previous analysis are presented. These are continuation methods for periodic and homoclinic solutions of delay differential equations.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Zyklische Systeme mit Zeitverzögerung	11
1.1 Reduktion des Neuronenmodells	12
1.2 Lokale Resultate	16
1.2.1 Die charakteristische Gleichung	16
1.2.2 Die Stabilität der trivialen Lösung	24
1.2.3 Hopf-Verzweigung	27
1.3 Langsam oszillierende periodische Lösungen	34
1.4 Globale Hopf-Verzweigung	48
1.5 Numerische Resultate	54
2 Ein planares System mit Zeitverzögerung und Selbstkopplungen	59
2.1 Stationäre Lösungen	64
2.2 Das lineare System	66
2.2.1 Die Parameter $\operatorname{tr} A$ und $\det A$	67
2.2.2 Stabilität der stationären Lösungen	72
2.3 Bogdanov-Takens-Verzweigung	80
2.4 \mathbb{Z}_2 -Symmetrie	89
2.5 Numerische Resultate	92
3 Numerische Methoden zur Analyse zeitverzögerter Differentialgleichungen	101
3.1 Kollokationsmethoden	102
3.1.1 Fourier-Ansatz	102
3.1.2 Der allgemeine Kollokationsansatz	104
3.2 Homokline Lösungen	105
Literaturverzeichnis	109
Abbildungsverzeichnis	117

Einleitung

Eine Möglichkeit, die zeitliche Entwicklung biologischer, physikalischer oder technischer Vorgänge mathematisch zu beschreiben, besteht darin, ein Differentialgleichungsmodell aufzustellen, welches wichtige Aspekte des zu betrachtenden Vorgangs berücksichtigt. Eine wichtige Klasse von Modellen stellen die Systeme mit Rückkopplungen dar. Rückkopplungen können sowohl künstlich als Regelungselement (Kontrolle) in ein Differentialgleichungsmodell integriert sein als auch dem zu untersuchenden Vorgang inhärent sein. Ein Musterbeispiel eines Systems mit Rückkopplungen stellen die Modelle zur Beschreibung rekurrenter neuronaler Aktivität dar. Gegenstand solcher Modelle ist die qualitative Beschreibung neurophysiologischer Prozesse eines Netzwerks bestehend aus einer endlichen Anzahl von Neuronen. Durch die Verbindungen zwischen den Neuronen über die Synapsen muß man Rückkopplungen in der mathematischen Modellbildung berücksichtigen. Der Begriff der Rekurrenz erklärt sich daraus, daß in dem Netzwerk keine feste Richtung der Kopplungen ausgezeichnet ist, sondern daß in dem Netzwerk auch Ringkopplungen möglich sind. Das einfachste Beispiel einer rekurrenten Kopplung ist die Selbstkopplung eines einzelnen Neurons. In den Neurowissenschaften [4, 94] können viele rekurrente Strukturen innerhalb des menschlichen Gehirns nachgewiesen werden. Man glaubt, daß wichtige Leistungen des Gehirns wie Kognition und Erinnerungsvermögen auf der rekurrenten Kopplung der Neuronen beruhen. Diese Leistungsfähigkeit macht man sich bei der Implementierung künstlicher neuronaler Netze zunutze, um zum Beispiel Verfahren zur Mustererkennung zu entwickeln [3]. Neben der Rekurrenz müssen Signallaufzeiten zwischen den Neuronen bei der Modellbildung berücksichtigt werden, da der Informationsaustausch zweier Neuronen nicht unverzüglich geschieht, sondern durch biochemische Prozesse an den Synapsen realisiert wird. Das bedeutet, daß in dem Modell Zustände des Systems aus der Vergangenheit eingehen müssen.

Mathematisch stellt das Modell eines rekurrenten Netzwerks ein zeitverzögertes oder retardiertes Differentialgleichungssystem dar. Die Existenz von Zeitverzögerungen macht die mathematische Analyse dieses Modells viel schwieriger, da der zu untersuchende Phasenraum $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ im Gegensatz zum n -dimensionalen Phasenraum der gewöhnlichen Differentialgleichung unendlich-dimensional ist. Weitere Schwierigkeiten ergeben sich aus der transzendenten Struktur der charakteristischen Gleichungen, die detaillierte Informationen über das System in der Nähe von Gleichgewichtslösungen und periodischen Lösungen liefern.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir zwei spezielle Modelle rekurrenter Aktivität, die sich in der Netzwerktopologie unterscheiden. Das erste Modell beschreibt die Aktivität einer geschlossenen Kette von Neuronen, wobei die Neuronen keine Selbstkopplungen besitzen. Das zweite Modell untersucht die Situation einer geschlossenen Kette von zwei Neuronen, wobei Selbstkopplungen der beiden Neuronen zugelassen werden. Dabei wird besonders berücksichtigt, daß das eine Neuron anregend (exzitatorisch) und das andere Neuron hemmend (inhibitorisch) wirkt. Das zweite Modell soll den Einfluß von Selbstkopplungen auf eine geschlossene Kette von Neuronen untersuchen. Eine andere Interpretation des zweiten Modells findet sich in der Kopplung dreier geschlossener Ketten. Zwei Ketten bestehen jeweils aus einem einzelnen Neuron,

und die dritte Kette enthält zwei Neuronen. Wir wollen die dynamischen Eigenschaften beider Modelle, insbesondere unter der Berücksichtigung der Signallaufzeiten und Kopplungsstärken, mit Hilfe lokaler und globaler analytischer Methoden aus der Verzweigungstheorie charakterisieren. Bei unseren Untersuchungen wird die Bedeutung periodischer Lösungen für die Dynamik der Modelle hervorgehoben. Gegenüber dem Modell einer geschlossenen Kette von Neuronen erweist sich die Dynamik des Modells mit Selbstkopplungen als vielfältiger. Durch die Analyse von Codimension 2-Verzweigungspunkten wird die Existenz homokliner Lösungen gezeigt. An geeigneter Stelle setzen wir numerische Verfahren ein, um detailliertere Informationen über das Verzweigungsverhalten zu erhalten.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im ersten Kapitel beschäftigen wir uns mit sogenannten zyklischen Systemen unter dem Einfluß von Zeitverzögerungen. Dabei handelt es sich um ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen, wobei nur der unmittelbare Nachbar zyklisch auf die i -te Differentialgleichung einwirkt. Diese Kopplungen geschehen unter dem Einfluß einer Zeitverzögerung. Wir zeigen, daß ein Modell, das die Aktivität einer geschlossenen Kette von n Neuronen beschreibt, in ein solches zyklisches System überführt werden kann und untersuchen anschließend wichtige Aspekte der lokalen Eigenschaften dieses Systems (Kapitel 1.2). Dabei leiten wir Bedingungen für die lokale und globale Stabilität der stationären Lösungen her und bestimmen Parameterkonstellationen, für die das System eine Hopf-Verzweigung durchläuft. Die lokalen Untersuchungen werden mit Überlegungen zur Verzweigungsrichtung der abzweigenden periodischen Lösungen abgeschlossen. In Kapitel 1.3 gehen wir auf globale Eigenschaften des zyklischen Systems ein. Unter der Voraussetzung, daß das System nur monotone (strikte) Kopplungen zuläßt, beweisen wir unter einigen technischen Bedingungen die globale Existenz einer langsam oszillierenden periodischen Lösung. Dabei heißt eine Lösung langsam oszillierend, falls der Abstand zweier Nulldurchgänge einer Komponente größer ist als die Zeitverzögerung. Solche Lösungen spielen oft in den Anwendungen und in den Charakterisierungen globaler Attraktoren eine wichtige Rolle. Kapitel 1 wird mit Überlegungen über die globale Fortsetzbarkeit der Zweige periodischer Lösungen, die aus den Hopf-Singularitäten entstehen und einigen numerischen Untersuchungen abgeschlossen. Die Numerik verdeutlicht die gewonnenen Ergebnisse und gibt weitere Hinweise auf das Verhalten des Systems in Situationen, in denen unsere analytischen Methoden versagen.

Im zweiten Abschnitt gehen wir darauf ein, was geschieht, wenn die zyklische Kopplungsstruktur des Systems gestört wird und Selbstkopplungen in den Differentialgleichungen zugelassen werden. Dabei konzentrieren wir uns auf ein planares System zeitverzögerter Differentialgleichungen, das das qualitative Verhalten eines Netzwerks zweier Neuronen beschreibt. Beide Neuronen können Selbstkopplungen aufweisen. Dabei verhält sich ein Neuron exzitatorisch und das andere inhibitorisch. Bei unseren Untersuchungen stellt sich heraus, daß die Dynamik viel komplexer sein kann als für zyklische Systeme ohne Selbstkopplungen. Es zeigt sich, daß die globalen Methoden, die wir in Kapitel 1 benutzt haben, für das System mit Selbstkopplungen nicht mehr anwendbar sind. Nichtsdestotrotz können wir mit Methoden aus der Verzweigungstheorie globale Eigenschaften des Systems beschreiben. Insbesondere wird unter gewissen Voraussetzungen die Existenz homokliner Lösungen (Kapitel 2.3 und 2.4) und das globale Verzweigen periodischer Lösungen (Kapitel 2.4) bewiesen. Dies geschieht durch eine detaillierte Analyse von Codimension 2-Verzweigungspunkten (Bogdanov-Takens-Verzweigung, degenerierte Bogdanov-Takens-Verzweigung mit \mathbb{Z}_2 -Symmetrie) des planaren Systems zeitverzögerter Differentialgleichungen. In Kapitel 2.2 gehen wir auf die lokalen Eigenschaften des Systems mit Selbstkopplungen ein und skizzieren die möglichen lokalen Verzweigungen, die auftreten können. Wir bestimmen das lokale Stabilitätsverhalten der stationären Lösungen und berechnen Kurven im Parameterraum,

auf denen das System eine Hopf-Verzweigung durchläuft. Das Kapitel wird mit numerischen Ergebnissen abgeschlossen, die wie in Kapitel 1 die analytischen Resultate einerseits verdeutlichen sollen, andererseits aber auch viele Anhaltspunkte über die Dynamik liefern, die mit analytischen Methoden nicht zu erzielen sind. Diese zusätzlichen Informationen betreffen das Bestimmen von Sattel-Knoten-Punkten periodischer Lösungen, homoklinen Lösungen zu einem neutralen Sattel und sogenannten großen homoklinen Lösungen, also Lösungen, die unter der Projektion auf die Ebene mehrere stationäre Lösungen umkreisen.

Im dritten Kapitel gehen wir auf die numerischen Methoden ein, die wir in Kapitel 1.5 und 2.5 benutzen. Es werden zwei (verwandte) Methoden zur Bestimmung und Fortsetzung periodischer Lösungen vorgestellt. Außerdem skizzieren wir eine Methode zur Berechnung und Fortsetzung homokliner Lösungen für retardierte Differentialgleichungen.

Referenzen zur Theorie der zeitverzögerten Differentialgleichungen sind die Bücher von HALE UND LUNEL [61], DIEKMANN ET AL. [27], DRIVER [32] und KOLMANOVSKII UND MYSHKIS [71]. In der Notation folgen wir [61]. Für Ergebnisse aus der Verzweigungstheorie greifen wir insbesondere auf das Buch von KUZNETSOV [76] zurück, das einen Überblick über analytische und numerische Methoden der Verzweigungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt.

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. Küpper für seine Unterstützung während der vergangenen Jahre danken. Zu größtem Dank bin ich Fotios Giannakopoulos verpflichtet, von dem ich sehr viel über angewandte Mathematik gelernt habe und der mich immer angehalten hat, sich auf die wesentlichen Dinge zu konzentrieren. Marion Adam, Yvonne Laufer, Michael Kurth sowie Jörn Rößler bin ich dankbar dafür, daß sie diese Arbeit Korrektur gelesen haben. Zu guter Letzt möchte ich meinen Eltern Ursula und Wolfgang Zapp danken, daß sie mich auf meinem Weg immer unterstützt haben.

1 Zyklische Systeme mit Zeitverzögerung

Im folgenden untersuchen wir wichtige dynamische Eigenschaften von zeitverzögerten Differentialgleichungssystemen des Typs

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -\mu_i x_i(t) + \alpha_{i+1} g_{i+1}(x_{i+1}(t)) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= -\mu_n x_n(t) + \alpha_1 g_1(x_1(t-r))\end{aligned}\tag{1.1}$$

unter den Voraussetzungen:

- $r \geq 0$, $\mu_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- $\alpha_i > 0$ für $i = 2, \dots, n$ und $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Für die Funktionen $g_i \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$ gelte

$$g_i(0) = 0, \quad g'_i(0) = 1.$$

Systeme des Typs (1.1) bezeichnen wir als einfach zyklische Systeme, siehe z.B. [82], da jede Komponente der Differentialgleichung mit ihrem Nachfolger gekoppelt ist. Diese Kopplung ist zyklisch, d.h. die erste Differentialgleichung koppelt in die n -te ein. Koppelt nicht nur die nachfolgende, sondern auch die vorhergehende Komponente in die Differentialgleichung ein, so spricht man von einem zweiseitigen zyklischen System. Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich einfach zyklische Systeme, da einige Methoden, die wir zur Analyse anwenden, für den zweiseitigen Fall versagen, dies gilt insbesondere für die globalen Resultate in Kapitel 1.3. Das System (1.1) stellt eine Standardform einfach zyklischer Systeme dar. Sind die g_i zusätzlich monoton steigend oder erfüllen die positive Rückkopplungsbedingung $x g_i(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so spricht man von einem monoton zyklischem bzw. unidirektionalem Rückkopplungssystem. Ist $\alpha_1 < 0$, so besitzt (1.1) eine negative Rückkopplung und für $\alpha_1 > 0$ spricht man von einer positiven Rückkopplung. Die obigen Voraussetzungen gelten nachfolgend für das gesamte Kapitel und sind ausreichend, um unsere lokalen Untersuchungen (Kapitel 1.2) durchzuführen. Lokal bedeutet, daß diese Resultate nur in einer Umgebung der trivialen stationären Lösung $\bar{x} = 0$ gelten. Für die globalen Ergebnisse in Kapitel 1.3 und Kapitel 1.4 werden wir zusätzlich voraussetzen, daß System (1.1) ein monoton zyklisches Rückkopplungssystem ist. Es sei angemerkt, daß für viele Ergebnisse die obigen Glattheitsvoraussetzungen an die g_i abgeschwächt werden können, was an den entsprechenden Stellen auch deutlich wird. Um aber ein kompletten Überblick geben zu können, setzen wir $g_i \in C^2$ voraus.

Die Dynamik von Rückkopplungssystemen mit Zeitverzögerungen ist in der Vergangenheit Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen. Viele dieser Arbeiten beschäftigen sich mit der Klasse der skalaren zeitverzögerten Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-r))$ unter einer strikten Rückkopplungsbedingung an f , die die einfachsten zyklischen Systeme bilden. Unter gewissen Voraussetzungen an f kann das globale Verhalten dieser Gleichung charakterisiert

werden, siehe z.B. [51, 74, 80, 102]. Ein großer Teil dieser Ergebnisse konnte in der Vergangenheit auf planare Systeme der Form (1.1) übertragen werden, siehe [2, 7, 53, 89]. Für monoton zyklische Systeme beliebiger Dimension gibt [81] ein dem Poincaré-Bendixson-Theorem verwandtes Ergebnis an, d.h. unter gewissen technischen Voraussetzungen können die möglichen ω -Limesmengen von (1.1) beschrieben werden. Für den skalaren Fall liefert [101, 102] ähnliche Ergebnisse. Vernachlässigt man die Zeitverzögerung in (1.1), so kann man auf viele Ergebnisse aus der Theorie kooperativer und kompetitiver Systeme (siehe z.B. [95]) zurückgreifen, um die Dynamik von (1.1) zu untersuchen. So beweist [63] ein Resultat über die globale Existenz einer periodischen Lösung von (1.1) bei negativer Rückkopplung und $r = 0$. In der vorliegenden Arbeit werden wir nur gelegentlich auf den Fall eines zyklischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ($r = 0$) eingehen.

Mit Rückkopplungssystemen unter Berücksichtigung einer (oder mehrerer) Zeitverzögerung(en) können viele dynamische Vorgänge in technischen [71, 72] oder biologischen Regelkreisen, wie zum Beispiel den Herzkreislauf oder die Dynamik neuronaler Netze [1, 2, 46, 83], modelliert werden. Zyklische Systeme finden insbesondere Anwendung in einem Protein-Synthese Modell nach Goodwin [6, 79], daß die selbsthemmende produktregulierte Synthese eines Enzyms innerhalb einer Zelle beschreibt. In diesem Modell sind die g_i , $i = 2, \dots, n$, alle linear zu wählen und g_1 ist von der Form $g_1(x) = \frac{(1+b^m)^2}{mab^{m-1}} \left(-\frac{a}{1+(x+b)^m} + \frac{a}{1+b^m} \right)$ mit $a, b > 0$ geeignet und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. m nennt man auch den Hill-Koeffizienten. Zyklische Systeme ohne Zeitverzögerung spielen eine Rolle bei der Approximation zeitverzögerter Differentialgleichungen durch gewöhnliche Differentialgleichungen. Die skalare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-1))$ kann durch folgenden Ansatz approximativ beschrieben werden: Unterteile das Intervall $[-1, 0]$ in n äquidistante Teile und approximiere jedes Element aus dem Phasenraum $\mathcal{C} = C([-1, 0], \mathbb{R})$ durch eine lineare Approximation auf dem gerade definierten Gitter. Dann erhält man das n -dimensionale zyklische System [45]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_n) \\ \dot{x}_i &= \frac{-x_i + x_{i-1}}{n} \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Eine weitere sehr wichtige Anwendung ist die Möglichkeit, ein Neuronenmodell bei einer geeigneten Netzwerktopologie auf die eingangs erwähnte Klasse zyklischer Systeme zu reduzieren, was wir nun vorstellen wollen.

1.1 Reduktion des Neuronenmodells

Wir betrachten ein Modell, daß die rekurrente Aktivität einer geschlossenen Kette von n Neuronen beschreibt:

$$\begin{aligned} \tau_i \dot{u}_i(t) &= -u_i(t) + \beta_{i+1} f_{i+1}(u_{i+1}(t - T_i)) + e_i \quad i = 2, \dots, n \\ \tau_n \dot{u}_n(t) &= -u_n(t) + \beta_1 f_1(u_1(t - T_n)) + e_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

mit $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T_i \geq 0$, $\tau_i > 0$, $e_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Dabei haben die Bezeichnungen folgende Bedeutungen

- $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt das postsynaptische Potential des i -ten Neurons, $i = 1, \dots, n$, in Abhängigkeit der Zeit t .

- τ_i charakterisiert die dynamischen Eigenschaften der Zellmembran des i -ten Neurons. Diese Konstante beschreibt, wie schnell dieses Neuron auf Einflüsse reagiert.
- $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetig differenzierbare Übergangsfunktion, die die Aktivierung des Neurons in Abhängigkeit des Potentials u_i beschreibt. Es gelte $f'_i(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Typischerweise ist f_i eine sigmoide Funktion, d.h. eine beschränkte, streng monotone Funktion, die bei $x = \theta_i$ einen eindeutigen Wendepunkt besitzt.
- $\beta_i \neq 0$ stellt die Kopplungsstärke zwischen dem i -ten Neuron und dem $(i - 1)$ -ten Neuron dar (bzw. β_1 beschreibt die Kopplung zwischen dem ersten und dem n -ten Neuron), siehe Abbildung 1.1. Ist β_i positiv, so regt das i -te Neuron seinen Vorgänger an (exzitatorisch) und ist β_i negativ, so hemmt es seinen Nachbarn (inhibitorisch).
- Die e_i beschreiben externe Anregungen, die in der Zeit konstant sind.
- $T_i \geq 0$ reflektiert die gesamte Zeitverzögerung beim Einwirken auf das i -te Neuron. Dabei werden die synaptischen und dendritischen Verzögerungen des i -ten Neurons und der axonalen Verzögerung des $(i - 1)$ -ten Neurons berücksichtigt.

Das Modell (1.2) ist ein Spezialfall des Modells

$$\tau_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{i,j} f_j(x_j(t - T_{i,j})) + e_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

welches ein rekurrentes Netzwerk, bestehend aus n Neuronen und beliebigen Kopplungen zwischen den Neuronen mit Kopplungsstärken $w_{i,j}$, darstellt. Systeme des Typs (1.3) werden sowohl zur Modellierung neurophysiologischer Prozesse (siehe [25] für $T_{i,j} = 0$ und [2, 46, 78] bei Berücksichtigung der Zeitverzögerungen) als auch für künstliche neuronale Netzwerke ([67] für $T_{i,j} = 0$ und [83] für $T_{i,j} \neq 0$) benutzt.

Neuronale Netzwerke des Typs (1.3) besitzen Eigenschaften wie Multistabilität und anhaltende Oszillationen, die sie für die Modellierung von neurophysiologischen Prozessen so interessant machen, siehe [25, 92]. Netzwerke, in denen zum Beispiel exzitatorische und inhibitorische Neuronen gekoppelt sind, finden sich in verschiedenen Regionen des Gehirns [94]. Man glaubt, daß sie einen Mechanismus zur Generierung von rhythmischer neuronaler Aktivität [85, 94] ermöglichen. Andererseits können multistabile Netzwerke als Modelle für assoziative Speicher benutzt werden, siehe [67, 68]. Dabei können Attraktoren wie stabile Equilibria oder stabile periodische Lösungen als Speicherinhalte interpretiert werden.

Wir interessieren uns für das System (1.3) unter der Voraussetzung, daß die Neuronen eine geschlossene Kette bilden, wobei die Richtung der Kopplungen fest bleibt (siehe Abbildung 1.1). Setzt man $\beta_i := w_{i,i+1}$ für $i = 2, \dots, n$ und $\beta_1 := w_{n,1}$, so erhält man das System (1.2). Solche Modelle wurden für $n = 2$ in [25] im Falle $T_{i,j} = 0$ und [2, 46] für $T_{i,j} \neq 0$ untersucht.

Bemerkung 1.1 Der Spezialfall $\beta_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ ist von Seiten der Modellierung her nicht von Interesse, da jede Lösung gegen eine eindeutige stationäre Lösung konvergiert. Denn sei oBdA. $\beta_1 = 0$. Dann ist

$$\bar{u}_n = e_n, \quad \bar{u}_j = e_j + \beta_{j+1} f_{j+1}(\bar{u}_{j+1}) \quad j = 1, \dots, n - 1$$

die eindeutige stationäre Lösung, die global attraktiv ist.

Die Konstante $\beta := \prod_{j=1}^n \beta_j$ spiegelt das Gesamtverhalten der Kette wider, ist $\beta < 0$, so spricht man von einer inhibitorischen Kette, für $\beta > 0$ nennt man die Kette exzitatorisch. Typische Aktivierungsfunktionen f_i sind $f_i(x) := \frac{1}{1+\exp(-4x)} - \frac{1}{2}$ oder $f(x) = \arctan(x)$.

In [88] wird mit Hilfe numerischer Methoden das Oszillationsverhalten für exzitatorische Ringe von Neuronen untersucht. Ein Neuronenmodell, welches sehr ähnlich zu dem unsrigen ist, und die Aktivität eines einzelnen Neurons beschreibt, untersucht [78]. Erweitert man dieses Modell durch ein Subsystem, daß das Membranpotential des Neurons am Axonenhügel berücksichtigt, so liefert [47] eine mathematische Analyse. Diese Modellklasse wird hier nicht weiter verfolgt.

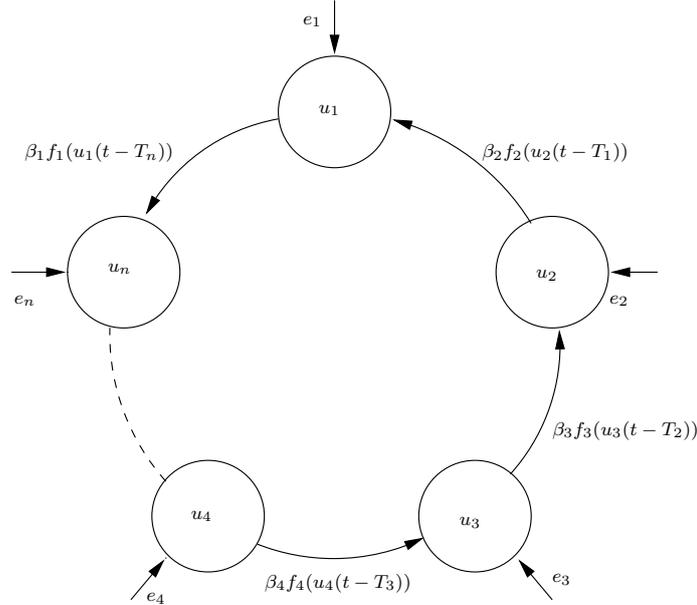


Abbildung 1.1: Modell einer geschlossenen Neuronenkette

Lemma 1.1 Sei $\beta < 0$. Das System (1.2) besitzt genau eine stationäre Lösung $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ für alle $e_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Sei $\beta > 0$ und seien $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ derart, so daß $\inf f_{k_1} > -\infty$ und $\sup f_{k_2} < \infty$, dann besitzt (1.2) mindestens eine stationäre Lösung für alle $e_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Beweis: Wir definieren für $i = 2, \dots, n$ die Funktionen $h_i(x) := \beta_i f_i(x) + e_{i-1}$ und setzen $h_1(x) := \beta_1 f_1(x) + e_n$. Jede stationäre Lösung $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ von (1.2) erfüllt das System algebraischer Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{u}_j &= h_{j+1}(\bar{u}_{j+1}) & j &= 1, \dots, n-1 \\ \bar{u}_n &= h_1(\bar{u}_1). \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu der Existenz eines Fixpunktes der skalaren Gleichung

$$\bar{u}_n = h_1 \circ h_2 \cdots \circ h_n(\bar{u}_n) =: h(\bar{u}_n).$$

Gilt $\beta < 0$, so ist h monoton fallend auf ganz \mathbb{R} und besitzt daher genau einen Fixpunkt. Für $\beta > 0$ gilt unter den zusätzlich Beschränktheitseigenschaften, daß h monoton steigend und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. Daher existiert mindestens ein Fixpunkt von h , der einer stationären Lösung $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ von (1.2) entspricht. \square

Bemerkung 1.2 Verzichtet man auf die Beschränktheitseigenschaften der f_i , so kann man im allgemeinen nicht die Existenz einer stationären Lösung für $\beta > 0$ folgern. Zum Beispiel besitzt das System (1.2) mit

$$\beta_i = e_i = 1.0 \quad f_i(x) = x$$

keine stationäre Lösung.

Wir zeigen nun, wie das Modell rekurrenter Aktivität (1.2) auf die Klasse der zyklischen Systeme mit Zeitverzögerung (1.1) reduziert werden kann. Es bezeichne $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ eine stationäre Lösung von (1.2). Wir führen die folgende Transformation durch, siehe auch [2, 81]:

$$x_i(t) := \sigma_i (u_i(t - r_i) - \bar{u}_i) \quad i = 1, \dots, n$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} &:= \sigma_i \operatorname{sgn}(\beta_{i+1}) & \sigma_1 &:= 1 \\ r_{i+1} &:= r_i + T_i & r_1 &:= 0 \\ \mu_i &:= \frac{1}{\tau_i} \end{aligned}$$

und erhalten für $i = 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sigma_i \dot{u}_i(t - r_i) \\ &= \mu_i \sigma_i (-u_i(t - r_i) + \bar{u}_i + \beta_{i+1} f_{i+1}(u_{i+1}(t - r_i - T_i)) - \beta_{i+1} f_{i+1}(\bar{u}_{i+1}) \\ &\quad + e_i - \bar{u}_i + \beta_{i+1} f_{i+1}(\bar{u}_{i+1})) \\ &= -\mu_i x_i(t) + \mu_i \sigma_{i+1} |\beta_{i+1}| (f_{i+1}(\sigma_{i+1} x_{i+1}(t) + \bar{u}_{i+1}) - f_{i+1}(\bar{u}_{i+1})) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= \sigma_n \dot{u}_n(t - r_n) \\ &= -\mu_n x_n(t) + \mu_n \sigma_n \beta_1 (f_1(x_1(t - r_n - T_1) + \bar{u}_1) - f_1(\bar{u}_1)) . \end{aligned}$$

Setze $r := \sum_{i=1}^n T_i$ und für $i \geq 2$ seien $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_i \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert

$$\begin{aligned} g_i(x) &:= \frac{\sigma_i}{f'_i(\bar{u}_i)} (f_i(\sigma_i x + \bar{u}_i) - f_i(\bar{u}_i)) \\ \alpha_i &:= \mu_{i-1} |\beta_i| f'_i(\bar{u}_i) . \end{aligned}$$

Man beachte, daß $a_i > 0, g_i(0) = 0$ und $g'_i(0) = 1$ gilt. Darüberhinaus setzen wir

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= \frac{1}{f'_1(\bar{u}_1)} (f_1(x + \bar{u}_1) - f_1(\bar{u}_1)) \\ \alpha_1 &:= \mu_n \sigma_n \beta_1 f'_1(\bar{u}_1) . \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich System (1.1).

1.2 Lokale Resultate

In diesem Abschnitt untersuchen wir einige lokale Eigenschaften des zyklischen Systems (1.1), d.h. wir untersuchen die lokalen Stabilitätseigenschaften der stationären Lösung $\bar{x} = 0$ und bestimmen Parameterwerte, an denen das System eine Hopf-Verzweigung durchläuft. Damit kann die lokale Existenz kleiner periodischer Lösungen bewiesen werden. Zum Abschluß des Kapitels geben wir Kriterien an, die die Richtung der abzweigenden periodischen Lösungen und ihre Stabilität bestimmen. Unsere Untersuchungen führen wir in dem Phasenraum $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ durch. Wir verzichten an dieser Stelle auf die oft übliche Zeitskalierung des Systems auf ein System mit konstanter Zeitverzögerung 1. Durch die Skalierung $t \mapsto \frac{t}{r}$ gewinnt man zwar r als neuen multiplikativen Parameter des Systems, aber es wird eine gesonderte Behandlung des Falls gewöhnlicher Differentialgleichungen (d.h. $r = 0$) nötig. Um dies zu umgehen, erarbeiten wir unsere Resultate in dem bisherigen Rahmen. Wir bestimmen die lokale Stabilität der trivialen stationären Lösung $\bar{x} = 0$ in Abhängigkeit der Zeitverzögerung r und der (lokalen) Gesamtückkopplung $\alpha := \prod_{j=1}^n \alpha_j$.

Das Studium der Stabilität von zeitverzögerten Differentialgleichungen führt in der Regel auf die Untersuchung der Verteilung von Lösungen in der komplexen Ebene einer quasi-polynomialen Gleichung

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^q a_{jk} z^j \exp(kz) = 0,$$

die im allgemeinen unendlich viele Lösungen besitzt. Die Analyse solcher Gleichungen ist im allgemeinen aufgrund ihrer transzendenten Struktur schwer. Beispielsweise werden in [11, 27, 97] Methoden vorgestellt, wie man die Verteilung der Lösungen in der komplexen Ebene solcher quasi-polynomialen Gleichungen untersuchen kann. Dabei wird insbesondere analysiert, ob es Lösungen gibt, die positiven Realteil besitzen. Besitzen alle Lösungen negativen Realteil, so besagen Standardresultate aus der Theorie der retardierten Differentialgleichungen [61], daß die dazugehörige stationäre Lösung lokal asymptotisch stabil ist; existiert eine Lösung mit positivem Realteil, so ist sie instabil.

1.2.1 Die charakteristische Gleichung

Das um die stationäre Lösung $\bar{x} = 0$ linearisierte System von (1.1) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= -\mu_i y_i(t) + \alpha_{i+1} y_{i+1}(t) \\ \dot{y}_n(t) &= -\mu_n y_n(t) + \alpha_1 y_1(t-r), \end{aligned} \quad (1.4)$$

oder in Kurzschreibweise

$$\dot{y}(t) = Ly_t$$

mit linearem Operator $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$L\varphi = A\varphi(0) + B\varphi(-r), \quad (1.5)$$

wobei $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ konstante $n \times n$ Matrizen sind, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} b_{n,1} &:= \alpha_1 \\ a_{i,i} &:= -\mu_i \quad i = 1, \dots, n \\ a_{i,i+1} &:= \alpha_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Alle übrigen Matrixeinträge sind gleich Null. Die Stabilität von $\bar{x} = 0$ kann mittels der charakteristischen Gleichung

$$\chi(z) := \det \Delta(z) = \det (zI - A - B \exp(-zr))$$

untersucht werden, siehe z.B. [61].

Lemma 1.2 *Es gilt*

$$\chi(z) = \prod_{j=1}^n (z + \mu_j) - \alpha \exp(-zr) = 0 \quad (1.7)$$

mit $\alpha = \prod_{j=1}^n \alpha_j$.

Beweis: Definiere die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen $\tilde{A} := (\tilde{a}_{i,j})$, $\tilde{B} := (\tilde{b}_{i,j})$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,i} &:= z + \mu_{i+1} \\ \tilde{b}_{i,i} &:= -\alpha_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 \\ \tilde{a}_{i,i+1} &:= -\alpha_{i+2} \\ \tilde{b}_{i+1,i} &:= z + \mu_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Da \tilde{A} , \tilde{B} Dreiecksmatrizen sind, folgt $\det \tilde{A} = \prod_{i=2}^n (z + \mu_i)$ und $\det \tilde{B} = (-1)^{(n-1)} \prod_{j=2}^n \alpha_j$. Dann gilt für die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \det (zI - A - B \exp(-zr)) \\ &= (z + \mu_1) \det \tilde{A} + (-1)^n \alpha_1 \exp(-zr) \det \tilde{B} \\ &= \prod_{j=1}^n (z + \mu_j) - \prod_{j=1}^n \alpha_j \exp(-zr). \end{aligned}$$

□

Der Parameter α reflektiert die gesamte Rückkopplungsstärke des Systems (1.1) und wird in den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen. Zusätzlich definieren wir $\mu := \prod_{j=1}^n \mu_j$. Die charakteristische Gleichung (1.7) fällt in die oben skizzierte Klasse der quasi-polynomialen Gleichungen. Das Ziel der nachstehenden Untersuchung ist es, die (α, r) -Parameterebene in disjunkte Gebiete G_k zu zerlegen, so daß die Anzahl der Lösungen mit positivem Realteil von (1.7) für alle Parameter aus G_k konstant ist. Diese Methode wird in der Literatur auch Departitionsmethode genannt und findet z.B. in [15, 64, 84, 97] Anwendung. Um eine Departition für (1.7) vornehmen zu können, sind einige Vorüberlegungen notwendig.

Lemma 1.3 *Es gilt*

1. Ist $z \in \mathbb{C}$ Lösung von (1.7), so auch \bar{z} .
2. Für $\alpha > \mu$ besitzt (1.7) genau eine reelle Lösung z mit $z > 0$.
3. Für $|\alpha| < \mu$ hat (1.7) nur Lösungen mit negativem Realteil.

4. Für $|\alpha| > \mu$ sind alle Lösungen z mit $\operatorname{Re} z > 0$ beschränkt durch $\operatorname{Re} z < \left(|\alpha|^{\frac{1}{n}} - \mu_{\min}\right)$,
 $|\operatorname{Im} z| < |\alpha|^{\frac{1}{n}}$, wobei $\mu_{\min} := \min \{\mu_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

5. Alle Lösungen von (1.7) mit nicht-negativem Realteil sind einfach.

Beweis: Aus $\chi(z) = 0$ folgt sofort $\overline{\chi(z)} = \chi(\bar{z}) = 0$. Schränkt man χ auf die reelle Achse ein, so ist χ für positive α eine streng monoton wachsende Funktion auf der positiven Halbachse. Folglich besitzt (1.7) für $\alpha > \mu$ genau eine positive reelle Lösung.

Sei $|\alpha| < \mu$ und sei z eine Lösung von (1.7) mit nicht-negativem Realteil. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \left| \exp(zr) \prod_{i=1}^n (z + \mu_i) \right| = |\exp(zr)| \left| \prod_{i=1}^n (z + \mu_i) \right| \\ &\geq \left| \prod_{i=1}^n (z + \mu_i) \right| \geq \mu, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Annahme $|\alpha| < \mu$ steht. Daher besitzt (1.7) für $|\alpha| < \mu$ nur Lösungen mit negativem Realteil.

Nehmen wir nun $|\alpha| > \mu$ an und sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung (1.7) mit $\operatorname{Re} z = x > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \exp(2xr) \prod_{j=1}^n ((x + \mu_j)^2 + y^2) \\ &> \prod_{j=1}^n (x + \mu_j)^2 \geq (x + \mu_{\min})^{2n} \end{aligned}$$

mit $\mu_{\min} := \min_i \mu_i$. Daher gilt $x < \left(|\alpha|^{\frac{1}{n}} - \mu_{\min}\right)$. Desweiteren gilt offensichtlich $|y| < |\alpha|^{\frac{1}{n}}$.

Sei z Lösung von (1.7) mit nicht-negativem Realteil. Differenziert man χ nach z , so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \chi'(z) &= \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (z + \mu_j) + \alpha r \exp(-zr) \\ &= \prod_{i=1}^n (z + \mu_i) \sum_{i=1}^n \frac{1}{z + \mu_i} + \alpha r \exp(-zr) \\ &= \alpha \exp(-zr) \left(r + \sum_{i=1}^n \frac{1}{z + \mu_i} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Daher ist jede Lösung mit nicht-negativem Realteil einfach. □

Für $|\alpha| > \mu$ definieren wir eine Schar von stetig differenzierbaren Funktionen

$$R_k(\alpha) := \begin{cases} \frac{(2k+1)\pi - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right)}{\omega} & \text{für } \alpha < -\mu \\ \frac{(2k+2)\pi - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right)}{\omega} & \text{für } \alpha > \mu \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.8)$$

wobei ω die eindeutige positive Lösung der Gleichung

$$\prod_{j=1}^n (\omega^2 + \mu_j^2) = \alpha^2 \quad (1.9)$$

ist. Dabei ist $\arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bemerkung 1.3 Die Lösung der Gleichung (1.9) ist eindeutig, da das Polynom auf der linken Seite von (1.9) für $\omega > 0$ streng monoton steigend ist. Aus dem Satz über implizit definierte Funktionen folgt, daß ω stetig differenzierbar vom Parameter α für $|\alpha| > \mu$ abhängt. Es gilt $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \omega(\alpha) = \infty$ und $\lim_{|\alpha| \rightarrow \mu} \omega(\alpha) = 0$. Als erste Ableitung berechnet man

$$\frac{d}{d\alpha} \omega(\alpha) = \left(\alpha \omega(\alpha) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega(\alpha)^2 + \mu_j^2} \right)^{-1}. \quad (1.10)$$

Daraus folgt, daß $\omega(\alpha)$ für $\alpha < -\mu$ streng monoton fallend und für $\alpha > \mu$ streng monoton steigend ist.

Im folgenden zeigen wir, daß die charakteristische Gleichung (1.7) für $r = R_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ein Paar rein imaginärer, konjugiert komplexer Lösungen besitzt. Dabei vernachlässigen wir im Moment, daß die Funktionen $R_k(\alpha)$ auch nicht-positive Werte annehmen können, was für die Analyse einer zeitverzögerten Differentialgleichung nicht relevant ist. Auf diese Tatsache gehen wir ein, wenn wir explizit die Stabilität der stationären Lösung $\bar{x} = 0$ untersuchen und Parameterkonstellationen für die Existenz eines Hopf-Verzweigungspunktes bestimmen werden.

Lemma 1.4

1. Für $\alpha < -\mu$ ($\alpha > \mu$) besitzt die Funktion R_k , $k \in \mathbb{N}_0$, höchstens eine Nullstelle. $R_k(\alpha)$ ist streng monoton steigend (fallend), falls $R_k(\alpha)$ nicht-negativ ist.
2. Alle R_k sind disjunkt und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \mu} R_k(\alpha) = \infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} R_k(\alpha) = 0.$$

Beweis: Die Disjunktheit folgt sofort aus der Definition der R_k , $k \in \mathbb{N}_0$, die Grenzwerteigenschaften folgen aus Bemerkung 1.3. Die R_k sind stetig differenzierbare Funktionen mit

$$\frac{d}{d\alpha} R_k(\alpha) = -\frac{\frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha)}{\omega(\alpha)} \left(R_k(\alpha) + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\omega(\alpha)^2 + \mu_j^2} \right). \quad (1.11)$$

Unter der Annahme $R_k(\alpha) = 0$ folgt

$$\frac{d}{d\alpha} R_k(\alpha) \begin{cases} > 0 & , \text{falls } \alpha < -\mu \\ < 0 & , \text{falls } \alpha > \mu. \end{cases}$$

Da die R_k für kleine $|\alpha| > \mu$ positiv sind, besitzen die R_k höchstens eine Nullstelle, und es gilt: $R_k(\alpha)$ ist für $\alpha > \mu$ streng monoton fallend, sofern $R_k(\alpha) \geq 0$, und für $\alpha < -\mu$ streng monoton steigend, falls $R_k(\alpha) \geq 0$. □

Bemerkung 1.4 Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Man kann zeigen, daß für negative α die Funktion R_k genau dann strikt positiv ist, falls $n \leq 2(2k + 1)$. Analog gilt für positive α : $R_k(\alpha)$ ist genau dann positiv für alle $\alpha > \mu$, falls $n \leq 4(k + 1)$. Insbesondere sind alle R_k strikt positiv für $n = 1$ bzw $n = 2$.

Lemma 1.5 Sei $|\alpha| > \mu$ und sei $r = R_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann besitzt die charakteristische Gleichung (1.7) ein Paar rein imaginärer, konjugiert komplexer Lösungen $z = \pm i\omega$, wobei $\omega > 0$ Gleichung (1.9) eindeutig löst. Diese Lösungen sind einfache Lösungen von (1.7). Weitere Lösungen auf der imaginären Achse existieren nicht.

Beweis: Aus Lemma 1.3 folgt, daß wenn $z = i\omega$ Lösung von (1.7) ist, so auch $\bar{z} = -i\omega$. Ebenso folgt die Einfachheit. Mit dem Ansatz $z = i\omega$, $\omega > 0$, ergibt sich aus (1.7) in Polarkoordinatendarstellung

$$\begin{aligned} \alpha &= \prod_{j=1}^n (i\omega + \mu_j) \exp(i\omega r) \\ &= \prod_{j=1}^n \sqrt{\omega^2 + \mu_j^2} \exp\left(i\omega r + i \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right)\right). \end{aligned}$$

mit $\arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nach Bemerkung 1.3 besitzt die Gleichung (1.9) für $|\alpha| > \mu$ eine eindeutige Lösung $\omega > 0$, die stetig differenzierbar von α abhängt. Sei $l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (2l + 1)\pi &= \omega r + \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right) \quad \text{falls } \alpha < -\mu \\ 2l\pi &= \omega r + \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\mu_j}\right) \quad \text{falls } \alpha > \mu. \end{aligned}$$

Man erhält für $r = R_k(\alpha)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ die gewünschten Lösungseigenschaften der charakteristischen Gleichung (1.7). \square

Bemerkung 1.5 Es gibt weitere Kurven in der $(\alpha, \tilde{R}_k(\alpha))$ -Ebene, so daß die charakteristische Gleichung Lösungen auf der imaginären Achse besitzt. Da die Funktionen \tilde{R}_k aber strikt negativ für alle α sind, spielen sie in unserer Analyse keine Rolle.

Lemma 1.6 Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $s > 0$ hinreichend klein und sei $\Gamma : (-s, s) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Kurve in \mathbb{R}^2 mit Komponenten $(\bar{\alpha}(s), \bar{r}(s))$, die die Kurve $(\alpha, R_k(\alpha))$ mit $\alpha < -\mu$ (bzw. $\alpha > \mu$) für $s = 0$ transversal schneidet, d.h.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(0) &= \alpha^* & \bar{r}(0) &= R_k(\alpha^*) \quad \text{mit } |\alpha^*| > \mu \\ \bar{\alpha}'(0) \frac{d}{d\alpha} R_k(\alpha^*) &\neq \bar{r}'(0). \end{aligned}$$

Dann existiert eine C^1 -Kurve $z : (-s, s) \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $z(s)$ die charakteristische Gleichung (1.7) für Parameter $\alpha = \bar{\alpha}(s)$, $r = \bar{r}(s)$ löst und es gilt $\operatorname{Re} z'(0) \neq 0$.

Wählen wir $\bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha} \equiv \text{const}$ und sei $\bar{r}'(0) > 0$, so gilt $\operatorname{Re} z'(0) > 0$.

Beweis: Die Existenz einer C^1 -Kurve $z : (-s, s) \rightarrow \mathbb{C}$ von Lösungen der charakteristischen Gleichung folgt mit Lemma 10.1 aus [61, S. 230]. Somit bleibt nur die Transversalitätseigenschaft zu zeigen. Differenziert man $\chi(z(s)) = 0$ nach s (dabei bedeute \cdot' Differenzieren nach s) und wertet diese Ableitung bei $s = 0$ aus, so erhält man (beachte $z(0) = i\omega(\bar{\alpha}(0))$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\chi(z(s)) &= \sum_{j=1}^n \frac{z'(s) \prod_{k=1}^n (z(s) + \mu_k)}{z(s) + \mu_j} - \bar{\alpha}'(s) \exp(-z(s)\bar{r}(s)) \\ &\quad + \bar{\alpha}(s) \exp(-z(s)\bar{r}(s)) (z'(s)\bar{r}(s) + z(s)\bar{r}'(s)) \\ &= \exp(-z(s)\bar{r}(s)) \left(z'(s)\bar{\alpha}(s) \sum_{j=1}^n \frac{1}{z(s) + \mu_j} + z'(s)\bar{\alpha}(s)\bar{r}(s) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\alpha}'(s) + \bar{\alpha}(s)z(s)\bar{r}(s) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher gilt für $s = 0$

$$\begin{aligned} z'(0) &\left(\sum_{j=1}^n \alpha^* R_k(\alpha^*) + \alpha^* \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\omega(\alpha^*)^2 + \mu_j^2} - i\omega(\alpha^*)\alpha^* \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega(\alpha^*)^2 + \mu_j^2} \right) \\ &= \bar{\alpha}'(0) - i\alpha^*\omega(\alpha^*)\bar{r}'(0). \end{aligned}$$

Nach (1.10) und (1.11) gilt

$$\begin{aligned} &- z'(0) \frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha^*)^{-1} \left(\alpha^*\omega(\alpha^*) \frac{d}{d\alpha} R_k(\alpha^*) + i \right) \\ &= \bar{\alpha}'(0) - i\alpha^*\omega(\alpha^*)\bar{r}'(0). \end{aligned}$$

Definiere $C := \alpha^*\omega(\alpha^*) \frac{d}{d\alpha} R_k(\alpha^*) + i \neq 0$ und bestimme

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} z'(0) \frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha^*)^{-1} |C|^2 &= \alpha'(0) \operatorname{Re} C - \alpha^*\omega(\alpha^*) \operatorname{Im} C \bar{r}'(0) \\ &= \alpha^*\omega(\alpha^*) \left(\bar{\alpha}'(0) \frac{dR_k}{d\alpha}(\alpha^*) - \bar{r}'(0) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z'(0) &= - \frac{\alpha^*\omega(\alpha^*) \frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha^*)}{|C|^2} \left(\bar{\alpha}'(0) \frac{dR_k}{d\alpha}(\alpha^*) - \bar{r}'(0) \right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Wählt man $\bar{\alpha} = \alpha^*$ konstant und \bar{r} derart, daß $\bar{r}'(0) > 0$, so folgt aus der obigen Rechnung $\operatorname{Re} z'(0) > 0$. \square

Nun sind wir in der Lage, die (α, r) -Parameterebene zu departitionieren, d.h. in Gebiete zu zerlegen, so daß für alle Parameter (α, r) aus diesem Gebiet die Anzahl der Lösungen von (1.7)

mit positivem Realteil konstant ist. Wir definieren die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} G_0^- &:= \{(\alpha, r) \in (-\infty, -\mu] \times \mathbb{R}_0^+ : r \leq R_0(\alpha)\} \\ G_k^- &:= \{(\alpha, r) \in (-\infty, -\mu] \times \mathbb{R}_0^+ : R_{k-1}(\alpha) < r \leq R_k(\alpha)\} \quad k \in \mathbb{N} \\ G_0^+ &:= \{(\alpha, r) \in (\mu, \infty) \times \mathbb{R}_0^+ : r \leq R_0(\alpha)\} \\ G_k^+ &:= \{(\alpha, r) \in (\mu, \infty) \times \mathbb{R}_0^+ : R_{k-1}(\alpha) < r \leq R_k(\alpha)\} \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da die R_k disjunkt sind (siehe Lemma 1.4) sind die Mengen $G_k^\pm, k \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert.

Lemma 1.7 Sei $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Für $(\alpha, r) \in G_k^-$ besitzt die charakteristische Gleichung (1.7) genau $2k$ Lösungen mit positivem Realteil.
2. Für $(\alpha, r) \in G_k^+$ besitzt die charakteristische Gleichung (1.7) genau $2k + 1$ Lösungen mit positivem Realteil.
3. Für $|\alpha| < \mu$ und $r \geq 0$ haben alle Lösungen von (1.7) negativen Realteil.

Beweis: Lemma 1.3, 1.5 und 1.6 liefern die gewünschte Departition. □

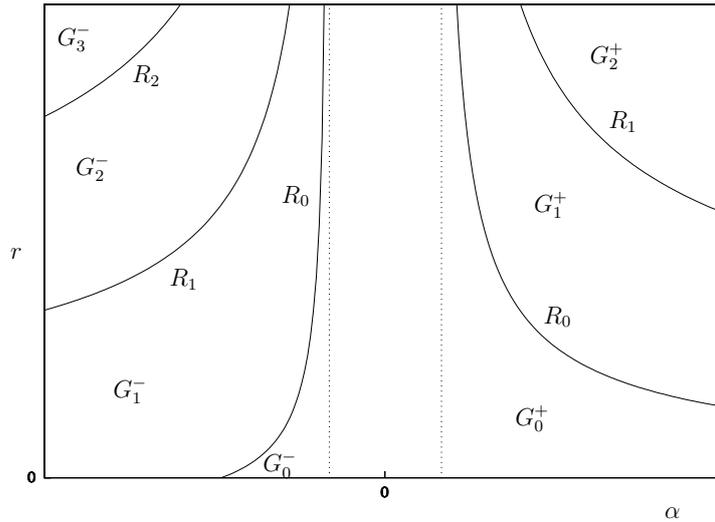


Abbildung 1.2: Departition der (α, r) -Parameterenebene. Die Funktionen R_k können die α -Achse berühren. Innerhalb der Gebiete G_k^\pm ist die Anzahl der Lösungen der charakteristischen Gleichung mit positivem Realteil konstant, siehe Lemma 1.7.

Bemerkung 1.6 Gilt $\mu = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ in System (1.1) bzw. (1.4), so kann man die Departition auch wie folgt finden. Durch $\tilde{y}_i(t) := y_i(t - (1 - \frac{i}{n})r)$ wird System (1.4) in das n -dimensionale System $\dot{\tilde{y}}(t) = -\mu\tilde{y}(t) + C\tilde{y}(t - \frac{r}{n})$ überführt, wobei $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$c_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i+1} & j = i + 1, i = 1, \dots, n - 1 \\ \alpha_1 & i = n, j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Da die Matrizen μI_n und C simultan diagonalisierbar sind, kann man die charakteristische Gleichung (1.7) auch als das Produkt von n quasi-polynomialen Gleichungen $z + \mu - \lambda_j \exp(-z \frac{r}{n})$ schreiben, dabei bezeichne $\lambda_j \in \mathbb{C}$ einen Eigenwert von C . Die Eigenwerte von C sind $\lambda_j = |\alpha|^{1/n} \exp\left(2\pi i \frac{j}{n} + i\theta\right)$ mit $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta), j = 1, \dots, n$. Dieser Typ quasi-polynomialer Gleichungen wird in [15, 52] ausführlich untersucht.

Im folgenden untersuchen wir das lineare System (1.4) detaillierter. Wir zerlegen den komplexifizierten Phasenraum $\mathcal{C}_{\mathbb{C}} := C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ mittels einer einfachen charakteristischen Lösung z_0 , d.h. wir bestimmen invariante Eigenräume P und Q , so daß $\mathcal{C}_{\mathbb{C}} = P \oplus Q$ und geben Projektionen auf diese Eigenräume an. In der Notation folgen wir [61]. Das zu (1.4) adjungierte lineare Problem im dualen Phasenraum $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* = C([0, r], (\mathbb{C}^n)^*)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\mu_1 y_1(t) + \alpha_n y_n(t+1) \\ \dot{y}_j(t) &= -\mu_j y_j(t) + \alpha_{j-1} y_{j-1}(t) \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Das Standardskalarprodukt [61] ist gegeben durch

$$(\Psi, \Phi) = \Psi(0)\Phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \Psi(\xi - \theta) d\eta(\theta) \Phi(\xi) d\xi$$

mit $\Phi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und $\Psi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$.

Sei z_0 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung (1.7). Dann gibt es Vektoren $p, q \in \mathbb{C}^n$, gegeben durch $\Delta(z_0)q = 0$ bzw. $\Delta(z_0)^T p = 0$, so daß $\Phi(\theta) := \exp(z_0 \theta)q$ und $\Psi := \exp(-z_0 s)p^T$ invariante lineare Räume P von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ bzw. P^* von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ aufspannen. Dabei können p und q so gewählt werden, so daß $(\Psi, \Phi) = 1$ gilt. Die Abbildung $\pi_P : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow P$, $\pi_P(\varphi) = \Phi(\Psi, \varphi)$ definiert eine Projektion auf P . Der komplementäre Raum Q ist gegeben durch $Q := \{\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} : (\Psi, \varphi) = 0\}$. Wir bestimmen nun für (1.1) zu einer einfachen charakteristischen Lösung z_0 solche Basen Ψ und Φ . Damit ist es möglich sein, die Richtung der Hopf-Verzweigung zu untersuchen (Kapitel 1.2.3) und die globale Existenz periodischer Lösungen bei negativer Rückkopplung (unter weiteren Voraussetzungen, siehe Kapitel 1.3) nachzuweisen.

Lemma 1.8 *Sei z_0 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung (1.7). Dann gibt es Vektoren $p, q \in \mathbb{C}^n$, so daß*

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \exp(z_0 \theta)q \\ \Psi(s) &= \exp(-z_0 s)p^T \end{aligned}$$

eine Dekomposition des Phasenraums $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ liefern mit $(\Psi, \Phi) = 1$. Dabei sind $p = (p_i)_{i=1, \dots, n}$ und $q = (q_i)_{i=1, \dots, n}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} p_i &= \prod_{j=i+1}^n \frac{z_0 + \mu_j}{\alpha_j} p_n \quad i = 1, \dots, n-1 \\ q_i &= \prod_{j=1}^{i-1} \frac{z_0 + \mu_j}{\alpha_{j+1}} q_1 \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

mit $q_1 \neq 0$ beliebig und $p_n = \frac{\alpha}{\alpha_1 q_1 \frac{dX}{dz}(z_0)}$.

Beweis: Da z_0 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $\chi(z) = 0$ ist, gibt es Vektoren p und q , so daß $\Delta(z_0)q = 0$ bzw. $\Delta(z_0)^T p = 0$, wobei Δ gegeben ist durch

$$\Delta(z) = zI - A - B \exp(-zr),$$

und die Matrizen A und B durch (1.6) gegeben sind. Die Vektoren p und q sind bestimmt durch

$$p_i = \prod_{j=i+1}^n \frac{z_0 + \mu_j}{\alpha_j} p_n \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.13)$$

$$q_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{z_0 + \mu_j}{\alpha_{j+1}} q_1 \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.14)$$

wobei p_1 und q_n frei gewählt werden können mit $p_1 \neq 0$, $q_n \neq 0$. Wähle p_1 und q_n so, so daß gilt

$$\begin{aligned} p \frac{d\Delta}{dz}(z_0)q &= p^T q + r\alpha_1 \exp(-z_0 r) p_n q_1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_1}{\alpha} \prod_{l \neq k} (z_0 + \mu_l) p_n q_1 + r\alpha_1 \exp(-z_0 r) p_n q_1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{\alpha \exp(-z_0 r)}{z_0 + \mu_k} + r\alpha_1 \exp(-z_0 r) \right) p_n q_1 \\ &= \frac{d\chi}{dz}(z_0) \frac{\alpha_1}{\alpha} p_n q_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Beachte, daß aus der Einfachheit von z_0 folgt, daß $\frac{d\chi}{dz}(z_0) \neq 0$. Dann gilt nach [61] $(\Psi, \Phi) = 1$. □

Bemerkung 1.7 In [61] wird gezeigt, wie man zu einer beliebigen Menge von charakteristischen Lösungen den Phasenraum in zwei invariante Unterräume zerlegen kann. Zu den charakteristischen Lösungen $\{-i\omega, i\omega\}$ kann man eine Dekomposition in zwei reelle Unterräume des reellen Phasenraums $\mathcal{C} = P \oplus Q$ finden, wobei der zweidimensionale Unterraum P durch $(\operatorname{Re}(\exp(i\omega\theta)q), (\operatorname{Im}(\exp(i\omega\theta)q)))$ aufgespannt wird.

1.2.2 Die Stabilität der trivialen Lösung

Theorem 1.1 Die stationäre Lösung $\bar{x} = 0$ von System (1.1) ist lokal asymptotisch stabil, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen gilt

1. $|\alpha| < \mu$.
2. $\alpha \leq -\mu$ und $r \in [0, R_0(\alpha))$ mit $R_0(\alpha) > 0$.

Die stationäre Lösung ist instabil, falls entweder $\alpha > \mu$ oder $\alpha < -\mu$ und $r > R_0(\alpha)$.

Beweis: Wendet man das Departitions-Lemma 1.7 an, so ist klar, daß die charakteristische Gleichung nur Lösungen mit negativem Realteil besitzt, falls entweder $|\alpha| < \mu$ oder $\alpha < -\mu$ und $0 \leq r < R_0(\alpha)$ gilt. Andernfalls existiert mindestens eine Lösung mit positivem Realteil. Standardresultate über die linearisierte Stabilität [61] implizieren die Stabilitätsaussagen. □

Bemerkung 1.8 Die Partitionierung der Parameterebene (Lemma 1.7) liefert nicht nur die Stabilität der stationären Lösung, sondern auch die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit (sofern sie existiert). So ist z.B. für $\alpha < -\mu$ und $r \in (R_k(\alpha), R_{k+1}(\alpha))$ ($r \geq 0$) die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit gleich $2k$.

Für $\alpha = \mu$ besitzt die charakteristische Gleichung eine einfache Lösung $z = 0$. Variiert man den Parameter α in einer Umgebung von $\alpha^* = \mu$, so durchläuft das System unter geeigneten Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten g_i eine stationäre Verzweigung (siehe z.B. [76]), d.h. es zweigen zusätzliche stationäre Lösungen von der stationären Lösung $\bar{x} = 0$ ab. Dabei wechselt die triviale Lösung ihre Stabilitätseigenschaften.

Nachdem wir nun die lokalen Stabilitätseigenschaften von $\bar{x} = 0$ in Abhängigkeit der Parameter α, μ und r untersucht haben, möchten wir nun auf die globale Stabilität von $\bar{x} = 0$ eingehen. Wir leiten Bedingungen her, für die System (1.1) sich global asymptotisch stabil verhält, d.h. alle Lösungen gegen die triviale Lösung $\bar{x} = 0$ konvergieren. In der Literatur gibt es eine große Anzahl von Arbeiten, die sich mit Kriterien für die globale Stabilität zeitverzögerter Differentialgleichungen mit Hilfe von Lyapunov-Funktionalen beschäftigen. Einen Überblick über Lyapunov-Funktionale im Zusammenhang mit zeitverzögerten Differentialgleichungen geben beispielsweise [61, 75]. Kriterien für die globale Stabilität zyklischer planarer Systeme werden in [54] untersucht. Globale Stabilitätsaussagen für Systeme, die neuronale Netzwerke modellieren (ähnlich zu System (1.2)) findet man unter Symmetrievoraussetzungen an die Kopplungsmatrix in [9], allgemeine Kopplungen werden unter anderem in [17, 18, 69, 100] behandelt. Aus den Ergebnissen über die globale Stabilität lassen sich Schranken für die Nicht-Existenz periodischer Lösungen bei Variation des Parameters α finden.

Theorem 1.2 *Die Nichtlinearitäten g_i seien global lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L_i . Unter der Voraussetzung*

$$\alpha^2 \prod_{j=1}^n L_j^2 < \mu^2,$$

wobei $\mu := \prod_{j=1}^n \mu_j$, ist die triviale Lösung $\bar{x} = 0$ von (1.1) für alle $r \geq 0$ global asymptotisch stabil.

Beweis: Für $\alpha = 0$ konvergieren alle Lösungen gegen die triviale Lösung $\bar{x} = 0$. Sei g_i global lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_i für alle $i = 1, \dots, n$. Dann transformieren wir System (1.1) wie folgt:

$$y_n := x_n, \quad y_i := \frac{\prod_{j=i}^{n-1} \mu_j}{\prod_{j=i+1}^n \alpha_j L_j} x_i.$$

Man erhält das System

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= -\mu_i y_i(t) + \tilde{g}_{i+1}(y_{i+1}(t)) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n(t) &= -\mu_n y_n(t) + \alpha \tilde{g}_1(y_1(t-r)) \end{aligned} \tag{1.15}$$

mit Nichtlinearitäten

$$\begin{aligned}\tilde{g}_i(x) &:= \alpha_i \frac{\prod_{j=i-1}^{n-1} \mu_j}{\prod_{j=i}^n \alpha_j L_j} g_i \left(\frac{\prod_{j=i+1}^n \alpha_j L_j}{\prod_{j=i}^{n-1} \mu_j} x \right) \quad i = 2, \dots, n \\ \tilde{g}_1(x) &:= \frac{1}{\prod_{j=2}^n \alpha_j} g_1 \left(\frac{\prod_{j=2}^n \alpha_j L_j}{\prod_{j=1}^{n-1} \mu_j} x \right).\end{aligned}$$

Dabei gilt für \tilde{g}_i , $i = 2, \dots, n$, die Lipschitz-Bedingung

$$\begin{aligned}|\tilde{g}_i(x) - \tilde{g}_i(y)| &\leq \alpha_i \frac{\prod_{j=i-1}^{n-1} \mu_j}{\prod_{j=i}^n \alpha_j L_j} L_i \frac{\prod_{j=i+1}^n \alpha_j L_j}{\prod_{j=i}^{n-1} \mu_j} |x - y| \\ &= \mu_{i-1} |x - y| \quad \text{für } i = 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Also besitzt \tilde{g}_i die Lipschitz-Konstante μ_{i-1} für $i = 2, \dots, n$. \tilde{g}_1 ist lipschitzstetig mit der Lipschitz-Konstanten $\prod_{j=1}^n \frac{L_j}{\mu_j}$. Man definiert zu System (1.15) das Lyapunov-Funktional $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ durch (dabei verzichten wir auf die Tilden)

$$V(x_t) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j(t)^2}{\mu_j} + \int_{t-r}^t \frac{\alpha^2}{\mu_n^2} g_1(x_1(s))^2 ds$$

und rechnet nach

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -2 \sum_{j=1}^n x_j(t)^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j(t) g_j(x_{j+1}(t))}{\mu_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g_{j+1}(x_{j+1}(t))^2}{\mu_j^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g_{j+1}(x_{j+1}(t))^2}{\mu_j^2} \\ &\quad + 2 \frac{x_n(t) \alpha g_1(x_1(t-r))}{\mu_n} + \frac{\alpha^2}{\mu_n^2} g_1(x_1(t))^2 - \frac{\alpha^2}{\mu_n^2} g_1(x_1(t-r))^2 \\ &= - \sum_{j=1}^n x_j(t)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_j(t) - \frac{g_{j+1}(x_{j+1}(t))^2}{\mu_j} \right)^2 - \left(x_n(t) - \frac{\alpha g_1(x_1(t-r))^2}{\mu_n} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g_{j+1}(x_{j+1}(t))^2}{\mu_j^2} + \frac{\alpha^2}{\mu_n^2} g_1(x_1(t))^2 \\ &\leq - \sum_{j=1}^n x_j(t)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_j^2 x_{j+1}(t)^2}{\mu_j^2} + \alpha^2 \prod_{j=1}^n \frac{L_j^2}{\mu_j^2} x_1(t)^2 \\ &= \left(-1 + \alpha^2 \prod_{j=1}^n \frac{L_j^2}{\mu_j^2} \right) x_1(t)^2 < 0.\end{aligned}$$

Standardresultate [61] liefern die globale Stabilität der stationären Lösung $\bar{x} = 0$. □

Bemerkung 1.9 Betrachten wir den Fall, daß alle g_i sigmoid sind mit $g_i''(0) = 0$, so ist $\bar{x} = 0$ global asymptotisch stabil, falls $|\alpha| < \mu$, da $L_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Kann man zeigen, daß (1.1) eine invariante Menge $\Sigma \subset \mathcal{C}$ besitzt und sind die g_i auf dieser Menge lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L_i , so ist unter der oben gegebene Bedingung die triviale Lösung auf Σ asymptotisch stabil.

1.2.3 Hopf-Verzweigung

Neben den lokalen Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung kann mit Hilfe des linearen Systems (1.4) bzw. der charakteristischen Gleichung (1.7) die Existenz kleiner periodischer Lösungen bewiesen werden. Wir zeigen, daß solche Lösungen bei Variation der Parameter r bzw. α von der trivialen Lösung abzweigen können. Anschließend untersuchen wir die Verzweigungsrichtung und die Stabilitätseigenschaften der abzweigenden periodischen Lösungen.

Theorem 1.3 *Sei $|\alpha| > \mu$, $k \in \mathbb{N}_0$. Falls $\bar{r} = R_k(\alpha) > 0$, so existiert in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(\bar{x} = 0, \bar{r})$ ein Zweig periodischer Lösungen $x_k(t; r)$ mit $x_k(t; r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \bar{r}$. Für die Periode $p_k(\alpha, r)$ von $x_k(t; r)$ gilt: $p_k(\alpha, r) \rightarrow \frac{2\pi}{\omega(\alpha)}$ für $r \rightarrow \bar{r}$. $\omega(\alpha)$ wird durch Gleichung (1.9) eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus Lemma 1.5 und 1.6 folgen die Voraussetzungen des Hopf-Theorems für zeitverzögerte Differentialgleichungen, siehe [61, S. 332]. \square

Bemerkung 1.10

1. Beachte, daß der Fall $\bar{r} = 0$ nicht in diesem Rahmen behandelt werden kann, da das System nicht in einer offenen Umgebung von $\bar{r} = 0$ definiert ist. Zwar existiert eine Singularität des linearen Systems (1.4), aber es ist ohne Analyse der Terme höherer Ordnung nicht zu entscheiden, ob ein Zweig periodischer Lösungen für positive r existiert.
2. Für $k = 0, \alpha < -1$ folgt aus der Definition von R_0 , daß $\omega(\alpha) < \frac{\pi}{r}$. Dies impliziert das lokale Abzweigen eines Astes langsam oszillierender periodischer Lösungen ($p > 2r$), womit wir uns in Kapitel 1.3 ausführlich beschäftigen.

Analog formuliert man für die Variation des Parameters α das folgende Theorem.

Theorem 1.4

1. Sei $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert genau ein $\bar{\alpha} > \mu$ (bzw. $\bar{\alpha} < -\mu$) mit $r = R_k(\bar{\alpha})$, so daß in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(\bar{x} = 0, \bar{\alpha})$ ein Zweig periodischer Lösungen $x_k(t; \alpha)$ gibt mit $x_k(t; \alpha) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$. Für die Periode $p_k(\alpha, r)$ von $x_k(t; \alpha)$ gilt: $p_k(\alpha, r) \rightarrow \frac{2\pi}{\omega(\bar{\alpha})}$ für $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$. $\omega(\bar{\alpha})$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung (1.9).
2. Sei $r = 0, k \in \mathbb{N}_0$ und existiere ein $\bar{\alpha}$, so daß $R_k(\bar{\alpha}) = 0$. Dann gibt es in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(\bar{x} = 0, \bar{\alpha})$ ein Zweig periodischer Lösungen $x_k(t; \alpha)$ mit $x_k(t; \alpha) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$. Für die Periode $p_k(\alpha, 0)$ von $x_k(t; \alpha)$ gilt: $p_k(\alpha, 0) \rightarrow \frac{2\pi}{\omega(\bar{\alpha})}$ für $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$.

Wir wenden uns nun der Frage zu, in welche Richtung der Zweig periodischer Lösungen abzweigt. Aus der Untersuchung dieser Fragestellung lassen sich lokale Stabilitätsaussagen für die abzweigenden periodischen Lösungen gewinnen. Dabei setzen wir den Schwerpunkt auf die Variation des Parameters α .

Durch einen entsprechenden Ansatz kann man die abzweigenden periodischen Lösungen bei Variation der Zeitverzögerung r untersuchen. Dazu ist eine Zeitskalierung $t \mapsto \frac{t}{r}$ notwendig, um in einem fixen Phasenraum $C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ arbeiten zu können. Die Zeitverzögerung $r > 0$ erscheint in dem neuen System als multiplikativer Parameter. Die bisherigen Ergebnisse über die Stabilität der stationären Lösung $\bar{x} = 0$ und die Bestimmung von Hopf-Verzweigungspunkten in der (α, r) -Parameterenebene bleiben dabei erhalten. Für den Fall $r = 0$ kann man bei Variation von

α auf Standardmethoden aus der Theorie der dynamischen Systeme [55, 62, 76] zurückgreifen. Die Variation von r bei einer Singularität in $\bar{r} = 0$ ist nicht einfach, siehe Bemerkung 1.10, und wird hier nicht weiter verfolgt.

[96] und [39] bieten Verfahren an, um die Verzweigungsrichtung für zeitverzögerte Differentialgleichungen im Falle einer Hopf-Singularität zu bestimmen, die einerseits auf der Lyapunov-Schmidt-Reduktionsmethode [96], andererseits auf der Herleitung eines reduzierten Systems auf der Zentrumsmanigfaltigkeit [39] beruhen. Leider ist es in der vorliegenden Situation nicht möglich, generelle Bedingungen, d.h. direkt nachprüfbare Bedingungen, für die Verzweigungsrichtung zu bestimmen. Wir stellen daher einen algorithmischen Ansatz zur Bestimmung der Verzweigungsrichtung vor, der in einem Computeralgebrasystem wie Maple [103] implementiert werden kann. Dabei folgen wir [96], da diese Methode für unseren algorithmischen Ansatz besser geeignet ist. Die Ergebnisse in [39] hingegen werden in einem abstrakteren Rahmen erzielt, die für beliebige Singularitäten der linearisierten Gleichung Anwendung finden kann, siehe z.B. unsere Untersuchungen der Bogdanov-Takens-Singularität in Kapitel 2.3.

Die Verzweigungsrichtung des skalaren Systems bei Variation der Zeitverzögerung r wird in [9] für negative Rückkopplungen untersucht; [106] betrachten die Verzweigungsrichtung für sowohl negative als auch positive Rückkopplungen unter der Voraussetzung $g''(0) = g_1''(0) = 0$ für die Bestimmung der Verzweigungsrichtung. Explizite Bedingungen für beliebige skalare Rückkopplungssysteme findet man in [51], wo alle möglichen lokalen Verzweigungsszenarien untersucht werden. [37, 87] untersuchen die Verzweigungsrichtung eines sehr speziellen planaren zyklischen Systems (siehe auch [10]).

Wir setzen für unserer Berechnungen $g_i \in C^3$ voraus und wir identifizieren den Parameter α ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\alpha = \alpha_1 = g_1'(0)$ und $\alpha_i = 1, i = 2, \dots, n$. Sollte diese Situation nicht vorliegen, so führen wir die folgende Skalierung für (1.1) durch

$$\tilde{x}_n := x_n, \quad \tilde{x}_i := \frac{x_i}{\prod_{j=i+1}^n \alpha_j}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t) &= -\mu_i \tilde{x}_i(t) + \tilde{g}_{i+1}(\tilde{x}_{i+1}(t)) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n(t) &= -\mu_n \tilde{x}_n(t) + \alpha \tilde{g}_1(\tilde{x}_1(t-r)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i(x) &:= \frac{g_i(\prod_{j=i+1}^n \alpha_j x)}{\prod_{j=i+1}^n \alpha_j} & i = 1, \dots, n-1 \\ \tilde{g}_n(x) &:= g_n(x). \end{aligned}$$

Nun gilt $\tilde{g}'_i(0) = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir betrachten also (1.16) und vernachlässigen im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Tilden. Es sei $\alpha = \alpha^*$ derart gewählt, daß ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $R_k(\alpha^*) = r$ (siehe Theorem 1.4), d.h. es liegt eine Hopf-Singularität vor. Wir untersuchen nun das Verhalten von (1.16) für $|\alpha - \alpha^*|$ klein. (1.16) läßt sich schreiben als

$$\dot{x}(t) = L(\alpha)x_t + H(x_t; \alpha),$$

wobei L der lineare Anteil und H der nichtlineare Anteil von (1.16) ist, also

$$\begin{aligned} L(\alpha)\varphi &= A\varphi(0) + B\varphi(-r) \quad \text{siehe (1.5)} \\ H(\varphi; \alpha) &:= H_2(\varphi; \alpha) + H_3(\varphi; \alpha) + O(\varphi^4) \end{aligned}$$

mit

$$H_2(\varphi, \psi; \alpha) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_2''(0)\varphi_2(0)\psi_2(0) \\ \vdots \\ g_n''(0)\varphi_n(0)\psi_n(0) \\ \alpha g_1''(0)\varphi_1(-r)\psi_1(-r) \end{pmatrix}$$

und

$$H_3(\varphi, \psi, \xi; \alpha) := \frac{1}{6} \begin{pmatrix} g_2'''(0)\varphi_2(0)\psi_2(0)\xi_2(0) \\ \vdots \\ g_n'''(0)\varphi_n(0)\psi_n(0)\xi_n(0) \\ \alpha g_1'''(0)\varphi_1(-r)\psi_1(-r)\xi_1(-r) \end{pmatrix}.$$

In Lemma 1.8 haben wir Basen $\Phi(\theta) = \exp(i\omega\theta)q$ und $\Psi(s) = \exp(-i\omega s)p^T$ für invariante Räume zum linearen bzw. adjungiert linearen System bestimmt, die durch die charakteristische Lösung $z_0 = i\omega$ gegeben sind. Für unsere spezielle Wahl der Parameter α_i gilt

$$q_j = \prod_{k=1}^{j-1} (i\omega + \mu_k)q_1 \quad p_j = \prod_{k=j+1}^n (i\omega + \mu_k)p_n$$

mit $p_n, q_1 \neq 0$. Mit $p_n = \frac{1}{\frac{dx}{dz}(i\omega)q_1}$ gilt für die Basen $(\Psi, \Phi) = 1$, siehe Lemma 1.8. Außerdem gilt für $j = 2, \dots, n$

$$q_j \bar{q}_j = \prod_{k=1}^{j-1} (\omega^2 + \mu_k^2) |q_1|^2.$$

Zum Aufstellen der Verzweigungsgleichung muß man die folgenden linearen Gleichungssysteme lösen [96]:

$$\begin{aligned} \Delta(0)A_{2,0} &= 2H_2(\Phi, \bar{\Phi}) \\ \Delta(2i\omega)A_{2,2} &= H_2(\Phi, \Phi) \end{aligned}$$

mit $A_{2,0} := (\xi_j)_{j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^n$ und $A_{2,2} = (\zeta_j)_{j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^n$. Die beiden Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar, da $\chi(z) = \det \Delta(z) \neq 0$ für alle $z \neq \pm i\omega$ (siehe Lemma 1.5). Für die rechten Seiten gilt

$$\begin{aligned} 2H_2(\Phi, \bar{\Phi}) &= \begin{pmatrix} g_2''(0)|q_2|^2 \\ \vdots \\ g_n''(0)|q_n|^2 \\ \alpha g_1''(0)|q_1|^2 \end{pmatrix} \\ H_2(\Phi, \Phi) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_2''(0)q_2^2 \\ \vdots \\ g_n''(0)q_n^2 \\ \alpha g_1''(0) \exp(-2i\omega r)q_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen

$$\xi_1 = |q_1|^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} g''_{k+1}(0) \frac{\prod_{l=1}^k (\mu_l^2 + \omega^2) \prod_{l=k+1}^n \mu_l}{\chi(0)} + g''_1(0) \frac{\alpha}{\chi(0)} \right)$$

$$\zeta_1 = \frac{q_1^2}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} g''_{k+1}(0) \frac{\prod_{l=1}^k (\mu_l + i\omega)^2 \prod_{l=k+1}^n (\mu_l + 2i\omega)}{\chi(2i\omega)} + g''_1(0) \frac{\alpha}{\chi(2i\omega)} \right)$$

und rekursiv für $j = 1, \dots, n-1$

$$\xi_n = \frac{2H_2(\Phi, \bar{\Phi})_n + \alpha \xi_1}{\mu_n} \quad \zeta_n = \frac{H_2(\Phi, \Phi)_n + \alpha \exp(-2i\omega r) \zeta_1}{\mu_n + 2i\omega}$$

$$\xi_j = \frac{2H_2(\Phi, \bar{\Phi})_j + \xi_{j+1}}{\mu_j} \quad \zeta_j = \frac{H_2(\Phi, \Phi)_j + \zeta_{j+1}}{\mu_j + 2i\omega}.$$

Im nächsten Schritt wertet man den Term N_3 (siehe [96]) aus.

$$N_3 = 3H_3(\Phi^2, \bar{\Phi}) + 2H_2(\bar{\Phi}, A_{2,2} \exp(2i\omega \cdot)) + 2H_2(\Phi, A_{2,0})$$

mit

$$(N_3)_j = \frac{1}{2} g'''_{j+1}(0) |q_{j+1}|^2 q_{j+1} + g''_{j+1}(0) \overline{q_{j+1}} \zeta_{j+1} + g''_{j+1}(0) q_{j+1} \xi_{j+1} \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$(N_3)_n = \alpha \exp(-i\omega r) \left(\frac{1}{2} g'''_1(0) |q_1|^2 q_1 + g''_1(0) \overline{q_1} \zeta_1 + g''_1(0) q_1 \xi_1 \right).$$

Zuletzt bestimmt man den Term K_3 , dessen Vorzeichen die Verzweigungsrichtung bestimmt:

$$K_3 = \text{Re}(p^T N_3).$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Theorem 1.5 *Sei $r > 0, k \in \mathbb{N}_0$ und sei α^* so gewählt, so daß $R_k(\alpha^*) = r$. Außerdem sei $K_3 < 0$ (bzw. $K_3 > 0$). Dann gilt*

1. für $\alpha < -\prod_{j=1}^n \mu_j$: *Der von $\bar{x} = 0$ abzweigende Ast periodischer Lösungen existiert für $\alpha < \alpha^*$ (bzw. für $\alpha > \alpha^*$). Die abzweigenden periodische Lösungen sind für $k = 0$ asymptotisch stabil und für $k \geq 1$ instabil (bzw. instabil für alle $k \in \mathbb{N}_0$).*
2. für $\alpha > \prod_{j=1}^n \mu_j$: *Der von $\bar{x} = 0$ abzweigende Ast periodischer Lösungen existiert für $\alpha > \alpha^*$ (bzw. für $\alpha < \alpha^*$). Die abzweigenden periodische Lösungen sind für alle $k \in \mathbb{N}_0$ instabil.*

Beweis: Der Beweis beruht auf [96] und Lemma 1.7. Betrachte den Fall $\alpha^* < -\prod_{j=1}^n \mu_j$ und $K_3 < 0$. Dann verringert sich die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit von $\bar{x} = 0$ um 2, wenn α die Singularität α^* in positive Richtung passiert (Lemma 1.7). Für $r = R_0(\alpha^*)$ wechselt die stationäre Lösung $\bar{x} = 0$ sogar ihre Stabilitätseigenschaften von instabil zu stabil bei wachsendem α . Andererseits ist die Verzweigung superkritisch, da $K_3 < 0$ (siehe [96]). Daraus ergibt sich, daß für $\alpha < \alpha^*$ ein Ast periodischer Lösungen existiert. Die Stabilitätseigenschaften ergeben sich ebenfalls aus [96]. Die übrigen drei Fälle beweist man analog. \square

In den einleitenden Bemerkungen zur Bestimmung der Hopf-Verzweigung haben wir skizziert, wie man die Zeitverzögerung r als Verzweigungsparameter wählen kann, sofern $r \neq 0$. Rechnet man den obigen Ansatz für das skalierte System durch, so sieht man, daß der Term K_3 bis auf einen multiplikativen positiven Term unverändert bleibt, aber die notwendige Notation unnötig kompliziert wird. Dies ist der Grund, warum wir das unskalierte System betrachtet haben. Wie es im Beweis zu Theorem 1.5 ersichtlich ist, spielt aber nicht nur das Vorzeichen des Terms K_3 bei der Bestimmung der Verzweigungsrichtung eine Rolle, sondern auch die Stabilitätseigenschaften der stationären Lösung bei variierendem Parameter in der Nähe der Singularität. Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir folgendes

Korollar 1.1 *Sei $|\alpha| > \prod_{j=1}^n \mu_j$ und sei $r^* := R_k(\alpha) > 0$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Ist $K_3 < 0$ (bzw. $K_3 > 0$), so existiert für $r > r^*$ (bzw. $r < r^*$) ein Ast periodischer Lösungen. Für $k = 0$ und $\alpha < -\prod_{j=1}^n \mu_j$ sind die abzweigenden periodischen Lösungen asymptotisch stabil. Die übrigen abzweigenden Äste bestehen aus instabilen periodischen Lösungen (bzw. alle abzweigenden Lösungen sind instabil für $K_3 > 0$).*

Beweis: Die Aussagen beweist man ebenso wie in Theorem 1.5. Dabei beachte man, daß für wachsendes r die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit von $\bar{x} = 0$ um zwei erhöht wird, wenn man die Hopf-Singularität $r^* = R_k(\alpha)$ in positiver Richtung passiert (siehe Lemma 1.7). Für $k = 0$ und $\alpha < -\prod_{j=1}^n \mu_j$ ändern sich die Stabilitätseigenschaften der stationären Lösung $\bar{x} = 0$, was die asymptotische Stabilität der abzweigenden periodischen Lösung für $K_3 < 0$ impliziert. \square

An dieser Stelle erkennt man, daß man die Vektoren $A_{2,2}$ und $A_{2,0}$ und auch den Term K_3 zwar explizit bestimmen kann (siehe [65]), daß es aber aufgrund ihrer komplizierten Struktur im allgemeinen nicht möglich ist, explizite Bedingungen für das Vorzeichen von K_3 , welches die Verzweigungsrichtung determiniert, herzuleiten. Nichtsdestotrotz kann man über den oben gezeigten algorithmischen Zugang unter Benutzung eines Computeralgebrasystems wie Maple [103] die Verzweigungsrichtung für gegebene Systemparameter bestimmen. Ein Maple-Programm, das dieses leistet, könnte wie folgt aussehen. Mit dieser Prozedur können die Beispiele aus Kapitel 1.5 untersucht werden.

```
> K3:=proc()
# Prozedur, die den Term K_3 im Falle einer Hopfsingularitaet
# bestimmt. Das Vorzeichen von K_3 entscheidet, ob die Verzweigung sub-
# oder superkritisch ist. Diese Prozedur betrachtet nur die erste
# Singularität alpha_0 bei negativem Feedback, kann aber leicht auf
# andere Situation angepasst werden. Der Prozedur werden vier Argumente
# übergeben
# 1. N-dim Vektor: zweite Ableitungen von g_i bei x=0
# 2. N-dim Vektor: dritte Ableitungen von g_i bei x=0
# 3. N-dim Vektor: mu_i
# 4. Zeitverzoeigerung r
# Definiton lokaler Variablen
> local H2xy,H2xx,r,omega,alpha,p,q,dchi,q1,i,M3,
> N3,pn,A20,A22,N,g2,g3,mu,j,y20,y22,term1, term2:
> options remember,system:
> g2:=args[1]:g3:=args[2]:
> mu:=args[3]:N:=nops(mu);
> q1:=1:r:=args[4]:i:=1:
> omega:=fsolve(r*x-Pi+sum(arctan(x/mu[i]),i=1..N),x);
# Bestimmt omega, Loesung der charakteristischen Gleichung auf der
```

```

# imaginaeren Achse. Will man andere weige als den ersten untersuchen mu
# ß man -Pi entsprechend durch -k*Pi ersetzen. Anschließend wird der
# kritische Wert alpha bestimmt
> alpha:=-sqrt(product(mu[j]*mu[j]+omega^2,j=1..N));
# Bestimme Eigenvektoren q (rechts) und p (links) mit Parametern pn
# und q1, chi'(I omega)
> q[1]:=q1:
> dchi:=alpha*exp(-I*omega*r)*(r+sum(1/(I*omega+mu[j]),j=1..N)):
> p[N]:=1/(q1*dchi):
> q[N]:=product(I*omega+mu[j],j=1..N-1)*q1:
> p[1]:=product(I*omega+mu[j],j=2..N)*p[N]:
> for i from 2 to N-1 do
> q[i]:=product(I*omega+mu[j],j=1..i-1)*q[1]:
> p[i]:=product(I*omega+mu[j],j=i+1..N)*p[N]:
> od:
# Definiere H2(x,bar x),H2(x,x) und bestimme A20, A22
# H2xy[1]:=1/2*g2[1]*q[2]*conjugate(q[2]):
# H2xy[N]:=1/2*alpha*g2[1]*q1*conjugate(q[1]):
# H2xx[1]:=1/2*g2[1]*q[2]*q[2]:
# H2xx[N]:=1/2*alpha*g2[1]*q[1]*q[1]*exp(-2*I*omega*r):
> A20[1]:=y20:A22[1]:=y22:
> A20[N]:=evalc((2*H2xy[N]+alpha*A20[1])/mu[N]):
> A22[N]:=evalc((H2xx[N]+alpha*exp(-2*I*omega*r)*A22[1])/
> (2*I*omega+mu[N])):
> for i from N-1 to 1 by -1 do
> H2xy[i]:=evalc(1/2*g2[i+1]*q[i+1]*conjugate(q[i+1])):
> H2xx[i]:=1/2*g2[i+1]*q[i+1]*q[i+1];
> A20[i]:=evalc((A20[i+1]+2*H2xy[i])/mu[i]):
> A22[i]:=evalc((A22[i+1]+H2xx[i])/(2*I*omega+mu[i])):
> od:
> term1:=solve(A20[1]-y20,y20):term2:=solve(A22[1]-y22,y22):
> for i from 1 to N do
> A20[i]:=subs(y20=term1,A20[i]):A22[i]:=subs(y22=term2,A22[i]):
> od:
# Bestimme N3 und M3
> for i from 1 to N-1 do
> N3[i]:=exp(I*omega*r)*(1/2*g3[i+1]*exp(-I*omega*r)*q[i+1]^2*
> conjugate(q[i+1])+g2[i+1]*exp(-I*omega*r)*conjugate(q[i+1])*A22[i+1]
> +g2[i+1]*exp(-I*omega*r)*q[i+1]*A20[i+1])
> od:
> N3[N]:=alpha*(1/2*g3[1]*exp(-I*omega*r)*q[1]^2*conjugate(q[1])
> +g2[1]*exp(-I*omega*r)*conjugate(q[1])*A22[1]
> +g2[1]*exp(-I*omega*r)*q[1]*A20[1]):
> M3:=sum(N3[j]*p[j],j=1..N):
# Gebe kritischen Parameter alpha und den Term K3 aus
> [alpha,Re(M3)];
> end:

```

Anwendungen

Wir demonstrieren nun Anwendungen von Theorem 1.5 und Korollar 1.1. Dabei wird deutlich, daß es schon in einem sehr einfachen zyklischen System wie dem Goodwin-Modell [6] nicht möglich ist, allgemeine Bedingungen für die Bestimmung der Verzweigungsrichtung anzugeben. Anschließend geben wir explizite Bedingungen für skalare Gleichungen und zyklische Systeme mit einer gewissen Symmetrieeigenschaft an.

Betrachte das Modell von Goodwin, d.h. in System (1.16) wähle wir $g_i(x) = x$ für $i = 2, \dots, n$ (aufgrund unserer Skalierung). Daher gilt $(N_3)_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n-1$. Also folgt $K_3 = \operatorname{Re} p_n(N_3)_n$. Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} \xi_1 &= g_1''(0) \frac{\alpha}{\chi(0)} |q_1|^2 & \zeta_1 &= \frac{1}{2} g_1''(0) \frac{\alpha}{\chi(2i\omega)} q_1^2 \\ (N_3)_n &= \frac{1}{2} \alpha \exp(-i\omega r) |q_1|^2 q_1 \left(g_1'''(0) + \alpha g_1''(0)^2 \left(\frac{1}{\chi(2i\omega)} + \frac{2}{\chi(0)} \right) \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der entscheidende Term K_3 :

$$\begin{aligned} K_3 &= \operatorname{Re} p_n(N_3)_n \\ &= \frac{1}{2} |q_1|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha \exp(-i\omega r)}{\chi'(i\omega)} \left(g_1'''(0) + \alpha g_1''(0)^2 \left(\frac{1}{\chi(2i\omega)} + \frac{2}{\chi(0)} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Es ist nicht möglich, direkt nachprüfbar Bedingungen an $g_1''(0)$ und $g_1'''(0)$ anzugeben, die uns ein negatives bzw. positives Vorzeichen von K_3 garantieren.

Schränken wir uns auf den skalaren zyklischen Fall $n = 1$ ein, so haben wir in [51] explizite Bedingungen für die Hopf-Verzweigung unter Berücksichtigung des Parameters r hergeleitet. Dabei gelte $\mu_1 = 1$. Definiere die Funktionenschar ($k \in \mathbb{N}$)

$$C_k(\alpha) := \begin{cases} \frac{11\alpha^2 + 6\alpha - 2}{(5\alpha + 4)(\alpha - 1)} + 2 \frac{(\alpha + 1)^2}{(5\alpha + 4)(1 + \alpha^2 r)} & \text{für } \alpha < -1 \\ \frac{11\alpha^3 + 35\alpha^2 + 24\alpha - 6}{(\alpha - 1)(5\alpha^2 + 15\alpha + 12)} - 2 \frac{(\alpha + 1)(\alpha^2 - 3)}{(5\alpha^2 + 15\alpha + 12)(1 + \alpha^2 r)} & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

mit $r = R_k(\alpha)$.

Korollar 1.2 Sei $f \in C^3$, $f(0) = 0$ und $\alpha = f'(0)$ mit $|\alpha| > 1$. Dann durchläuft die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-r)) \quad (1.17)$$

eine Hopf-Verzweigung für $r = R_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Gilt

$$f'''(0)\alpha < f''(0)^2 C_k(\alpha),$$

so existiert der abzweigende Ast für $r > R_k(\alpha)$. Für $\alpha < -1$ und $k = 0$ sind die abzweigenden periodischen Lösungen asymptotisch stabil, ansonsten sind sie instabil. Für $f'''(0)\alpha > f''(0)^2 C_k(\alpha)$ existiert der abzweigende Ast für $r < R_k(\alpha)$ und besteht aus instabilen periodischen Lösungen.

Beweis: Siehe [51]. Beachte, daß für alle $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ genau ein $\alpha < -1$ (bzw. $\alpha > 1$) existiert mit $r = R_k(\alpha)$, siehe Lemma 1.5 und Bemerkung 1.4. \square

Bemerkung 1.11

1. In [51] findet man weitere Bedingungen an f , die die möglichen lokalen Verzweigungsszenarien bei Variation der Zeitverzögerung r beschreiben.
2. Gilt $f''(0) = f'''(0) = 0$, so folgt $K_3 = 0$. In diesem Fall muß man Terme höherer Ordnung von f berücksichtigen, um die Verzweigungsrichtung zu berechnen.

Als drittes und letztes Beispiel für die explizite Anwendbarkeit von Theorem 1.5 führen wir das folgende System an. Wir nehmen an, daß alle Nichtlinearitäten in (1.16) die Bedingung $g_i''(0) = 0$ erfüllen. Typischerweise findet man diese Bedingungen in der folgenden Situation vor: $g = g_i$ für alle i , g ist streng monoton steigend und $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. die g_i sind identisch, symmetrisch und erfüllen die Bedingung $xg_i(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. In der Literatur findet man explizite Berechnungen der Hopf-Verzweigung für zweidimensionale zyklische Systeme in [37,87] unter der Voraussetzung, daß die zweiten Ableitungen verschwinden. Wir demonstrieren dies für zyklische Systeme beliebiger Dimension (siehe auch [65]).

Korollar 1.3 *Für alle Nichtlinearitäten $g_i, i = 1, \dots, n$, in System (1.16) gelte $g_i''(0) = 0$ und $g_i'''(0) < 0$ (bzw. $g_i'''(0) > 0$), und sei der Parameter $\alpha = \alpha^*$ so gewählt, so daß eine Hopf-Verzweigung vorliegt, d.h. $r = R_k(\alpha^*)$. Dann gilt:*

1. *für $\alpha < -\prod_{j=1}^n \mu_j$ existiert für $\alpha < \alpha^*$ ($\alpha > \alpha^*$) lokal ein Ast periodischer Lösungen. Dieser Ast besteht aus stabilen (instabilen) periodischen Lösungen, falls $r = R_0(\alpha^*)$. Alle anderen abzweigenden Äste besitzen instabile periodische Lösungen.*
2. *für $\alpha > \prod_{j=1}^n \mu_j$ existiert für $\alpha > \alpha^*$ ($\alpha < \alpha^*$) ein Ast abzweigender periodischer Lösungen, die alle instabil sind.*

Beweis: In der vorliegenden Situation beschränkt sich die Auswertung des Terms N_3 auf die Bestimmung von $N_3 = 3H_3(\Phi^2, \bar{\Phi})$, da die zweiten Ableitungen verschwinden. Also gilt

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{j+1}'''(0) |q_{j+1}|^2 p_j q_{j+1} + p_n \alpha^* g_1'''(0) \exp(-i\omega r) |q_1|^2 q_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \alpha^* \exp(-i\omega r) p_n q_1 \sum_{j=1}^n |q_j|^2 g_j'''(0) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\alpha^* \exp(-i\omega r)}{\chi'(i\omega)} \sum_{j=1}^n g_j'''(0) |q_j|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{r + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\omega^2 + \mu_j^2}}{\left| r + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j - i\omega}{\omega^2 + \mu_j^2} \right|^2} \sum_{j=1}^n g_j'''(0) |q_j|^2 \begin{cases} > 0 & \text{falls } g_j'''(0) > 0 \forall j = 1, \dots, n \\ < 0 & \text{falls } g_j'''(0) < 0 \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem 1.5 liefert die gewünschten Aussagen. □

1.3 Langsam oszillierende periodische Lösungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz einer langsam oszillierenden periodischen Lösung des zyklischen Systems (1.1) bei negativer Rückkopplung unter geeigneten Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten g_i und an die Systemparameter. Dabei heißt eine Lösung langsam oszillierend, falls der Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen jeder Komponente $x_i, i = 1, \dots, n$, größer ist als die Zeitverzögerung r . Eine langsam oszillierende periodische Lösung (um die stationäre Lösung $\bar{x} = 0$) besitzt daher eine Periode T größer als $2r$ (siehe z.B. [61]). Aus diesem Grund gilt für die folgenden Untersuchungen generell $r > 0$. [63] formuliert ein Ergebnis über die globale Existenz periodischer Lösungen für $r = 0, \alpha < 0$, ohne eine Abschätzung der

dazugehörigen Perioden zu geben. In der Literatur der zeitverzögerten Differentialgleichungen finden langsam oszillierende bzw. langsam oszillierende periodische Lösungen eine große Beachtung, da durch sie für einige Modellgleichungen globale Attraktoren charakterisiert werden können, siehe [102]. Desweiteren kann man sehr oft beobachten, daß die langsam oszillierenden periodischen Lösungen eines zeitverzögerten Differentialgleichungsmodells stabil sind, was für Anwendungen sehr wichtig ist [81]. Mit dem Browserschen Satz über ejektive Fixpunkte [16] bietet sich eine der wenigen Methoden an, die Existenz einer periodischen Lösung, welche nicht lokal aus einer Hopf-Verzweigung entstanden ist, zu beweisen. Diese Methode findet im Rahmen der zeitverzögerten Differentialgleichungen für die skalare Gleichung mit $\mu_1 = 0$ in [86] Anwendung. [58] betrachtet das skalare monotone zyklische System mit $\mu_1 \neq 0$. [2] untersucht mit diesem Vorgehen langsam oszillierende periodische Lösungen für planare zyklische Systeme. Eine größere Klasse planarer zeitverzögerte Systeme wird in [7, 53] unter Monotonievoraussetzungen an die Nichtlinearitäten untersucht, aber die dort formulierten Bedingungen lassen sich für praktische Probleme mit Ausnahme der zyklischen Systeme nicht verifizieren. In einfachen zyklischen Systemen der Dimension $n > 2$ zeigt [79] mit Hilfe des ejektiven Fixpunkttheorems die Existenz einer langsam oszillierenden periodischen Lösung, dabei besteht das System aus $n - 1$ positiven linearen Rückkopplungen und einer nichtlinearen negativen Rückkopplung. [65] bestimmt ebenfalls langsam oszillierende Lösungen für zyklische Systeme unter der Voraussetzung, daß das unverzögerte System eine lokal instabile stationäre Lösung $\bar{x} = 0$ besitzt.

Im folgenden wenden wir ebenfalls diese Methode an, um für eine große Klasse zyklischer System mit negativer Rückkopplung die Existenz solcher periodischer Lösungen zu beweisen. Dabei sind keine Informationen über das unverzögerte System notwendig. Wir wählen einen leicht modifizierten Rahmen, in dem wir unsere Ergebnisse präsentieren. Zum einen wird die negative Rückkopplungsbedingung in der Notation besonders berücksichtigt, zum anderen verzichten wir auf eine variable Zeitverzögerung r , sondern normieren die Verzögerung auf 1. Dies kann durch die schon mehrere Male erwähnte Zeitskalierung $t \mapsto \frac{t}{r}$ erreicht werden. Dabei geht r als multiplikativer Faktor in die übrigen Systemparameter ein und wird in der Notation nicht weiter berücksichtigt. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\sigma_i x_i(t) + f_{i+1}(x_{i+1}(t)) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= -\sigma_n x_n(t) - f_1(x_1(t-1)) \end{aligned} \tag{1.18}$$

unter den folgenden Voraussetzungen:

(G1) Für alle $i = 1, \dots, n$ ist $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und erfüllt die Bedingung $x f_i(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f_i ist in $x = 0$ stetig differenzierbar.

(G2) Es existieren $\delta > 0$ und $c_i > 0$ mit

$$|f_i(x)| \geq c_i |x| \quad \forall |x| < \delta, i = 1, \dots, n$$

und

$$\prod_{i=1}^n \frac{c_i}{\sigma_i} > \frac{1}{\exp(\min_j \sigma_j) - 1}.$$

(G3) Mindestens eine Nichtlinearität f_i ist von unten oder von oben beschränkt, d.h. es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und ein $\kappa_i > 0$, so daß

$$\inf f_i(x) \geq -\kappa_i$$

oder

$$\sup f_i(x) \leq \kappa_i.$$

(G4) Sei $\beta_i := f'_i(0)$ und $\beta := \prod_{j=1}^n \beta_j$. Es gilt $\beta > \bar{\beta}$, wobei $\bar{\beta}$ wie folgt eindeutig bestimmt ist. Es gibt ein eindeutiges $\omega \in (0, \pi)$, so daß

$$\omega = \pi - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma_j}\right).$$

Dann sei

$$\bar{\beta} := \sqrt{\prod_{j=1}^n (\omega^2 + \sigma_j^2)}.$$

Der Zusammenhang zwischen System (1.1) und (1.18) ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_i &:= \mu_i r \quad i = 1, \dots, n \\ f_1(x) &:= -\alpha_1 r g_1(x), \quad f_i(x) := r \alpha_i g_i(x) \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

gegeben.

Bemerkung 1.12 1. Die Voraussetzung (G1) beschreibt das strikte Rückkopplungsverhalten von (1.18), (G2) ist eine technische Voraussetzung, um zu zeigen, daß es langsam oszillierende Lösungen gibt. Mit (G3) zeigt man, daß das System (1.18) eine invariante Menge im Phasenraum besitzt, und (G4) ist eine hinreichende Bedingung für die Instabilität der trivialen Lösung $\bar{x} = 0$, siehe auch Theorem 1.1. Später geben wir Voraussetzungen an, die die Bedingungen (G1) und (G3) leicht abschwächen.

2. Die Bedingung (G2) ist für den skalaren Fall ($n = 1$) bzw. planaren Fall ($n = 2$) trivialerweise durch (G4) erfüllt, siehe z.B. [2, 56]. Für $n > 2$ ist dies nicht der Fall. Es ist möglich, Beispiele anzugeben, wo (G4) erfüllt ist, (G2) aber nicht. Man kann auf diese Bedingung verzichten, wenn man zusätzlich fordert: $\sigma_{\min} \geq \ln 2$.

Unter den obigen Voraussetzungen können wir das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

Theorem 1.6 *Es gelte (G1) – (G4). Dann besitzt das System (1.18) eine nicht-triviale T-periodische Lösung mit Periode $T > 2$.*

Definition 1.1 Sei X ein Banachraum. Ein Punkt $\bar{x} \in U \subseteq X$ heißt *ejektiver Punkt* einer Abbildung $A : U \setminus \{\bar{x}\} \rightarrow X$, wenn es eine offene Umgebung $G \subseteq X$ von \bar{x} gibt, so daß es für alle $y \in G \cap U, y \neq \bar{x}$, eine natürliche Zahl $m = m(y)$ mit der Eigenschaft $A^m y \notin G \cap U$ gibt.

Durch Anwendung des ejektiven Fixpunkttheorems [16]

Theorem 1.7 *Sei D eine abgeschlossene, konvexe, beschränkte und unendlich-dimensionale Teilmenge eines Banachraums X , und sei $\mathcal{F} : D \rightarrow D$ eine stetige und kompakte Abbildung. Dann besitzt \mathcal{F} einen Fixpunkt, welcher nicht ejektiv ist.*

beweisen wir die Existenz einer nicht-trivialen periodischen Lösung von (1.18). Dabei gehen wir wie folgt vor. Wir definieren eine konvexe Teilmenge des Phasenraum $C(\mathbb{K}) = C([-1, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ und zeigen, daß die Lösungen von (1.18) mit Anfangswerten aus $K \setminus \{0\}$ langsam oszillierend sind. Für $t_1, t_2 > 0$, $t_1 \neq t_2$ mit $x_i(t_1) = 0, x_i(t_2) = 0$ gilt $|t_1 - t_2| > 1$. Wir führen einen nichtlinearen Operator \mathcal{F} ein, der K nach K im Sinne einer Poincaré-Abbildung abbildet. Die Bezeichnung des Phasenraums $C(\mathbb{K})$ lehnt sich an [81] an, wo mit Hilfe eines diskreten Lyapunov-Funktional ein Poincaré-Bendixson verwandtes Resultat erzielt werden kann. Anschließend zeigen wir, daß der Operator \mathcal{F} kompakt ist und daß die triviale Lösung $\bar{x} = 0$ ein ejektiver Fixpunkt dieses Operators ist. Wir können die Existenz eines weiteren Fixpunktes folgern, der einer langsam oszillierenden periodischen Lösung von (1.18) entspricht.

Im folgenden sei $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ immer die Lösung von (1.18) mit Anfangswert $\varphi \in K_0$ zur Zeit $t \geq 0$. Mit X_t bezeichnen wir ein Element der Lösung im Phasenraum $C(\mathbb{K})$ zur Zeit $t \geq 0$, d.h. $X_t = (x_1(t + \cdot), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei unseren Untersuchung stellt die Variation-der-Konstanten-Formel dar. Auf (1.18) angewendet ergibt sich als Lösung des Anfangswertproblems mit $X_{\bar{t}} = \varphi \in C(\mathbb{K})$ für $t \geq \bar{t}$

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \exp(-\sigma_i(t - \bar{t}))x_i(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \exp(-\sigma_i(t - s))f_{i+1}(x_{i+1}(s))ds \\ x_n(t) &= \exp(-\sigma_n(t - \bar{t}))x_n(\bar{t}) - \int_{\bar{t}}^t \exp(-\sigma_n(t - s))f_1(x_1(s - 1))ds. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Wir betrachten die konvexe Menge $K \subset C(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} K := \{ \varphi \in C(\mathbb{K}) : \varphi_1(-1) = 0, \varphi_1(\theta) \exp(\sigma_1\theta) \text{ ist nicht-fallend und} \\ \varphi_i \geq 0 \quad i = 2, \dots, n \} . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Es sei $K_0 := K \setminus \{0\}$. Wir zeigen, daß (1.18) mit Anfangswerten aus K_0 langsam oszillierende Lösungen besitzt. Beachte, daß alle Komponenten für $\varphi \in K$ nicht-negativ sind. Eine Lösung von (1.18) mit Anfangswert aus K kann den Quadranten $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ nur über die x_n -Komponente verlassen. Genauer: Mit $S(+, +, \dots, +)$ bezeichnen wir den Quadranten $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$, mit $S(+, \dots, +, -)$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n-1, x_n < 0\}$ usw. Die Lösung $x(t, \varphi)$ mit $\varphi \in S(+, \dots, +)$ bleibt entweder für alle $t > 0$ in $S(+, \dots, +)$ oder wechselt nach $S(+, \dots, +, -)$, wo sie anschließend für alle Zeit verweilt oder nach $S(+, \dots, +, -, -)$ wechselt, usw. Diese Beobachtung gewinnt man aus den Formeln der Variation der Konstanten (1.19).

Definiere für alle $i = 1, \dots, n$ die Zahlen $\bar{t}_i := \sup \{t > 0 : x_i(t) \geq 0\}$. Offensichtlich gilt $\bar{t}_i \leq \bar{t}_j$, falls $i > j$, insbesondere gilt $\bar{t}_i < \bar{t}_j$ für $i > j$ und $\varphi_n \neq 0$.

Lemma 1.9 *Es gelte (G1) und (G2) und sei $\varphi \in K_0$. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$*

1. $\bar{t}_i < \infty$ und $\dot{x}_i(\bar{t}_i) \leq 0$, insbesondere gilt $\dot{x}_i(\bar{t}_i) < 0$, falls $\varphi_n \neq 0$.
2. $x_i(t) < 0$ für alle $t \in (\bar{t}_i, \bar{z}_1)$ mit $\bar{z}_1 := \bar{t}_1 + 1$.
3. $x_1(t) \exp(\sigma_1 t)$ ist nicht-wachsend für $t \in [\bar{t}_1, \bar{z}_1]$.

Beweis: Zuerst betrachten wir den Fall $\varphi_n \neq 0$. Unter der Annahme $\bar{t}_n = \infty$ folgt $x_i(t) > 0$ für alle $t > 0$. Demzufolge ist x_n streng monoton fallend für alle $t > 0$ und aus (1.19) folgt $x_n(t) \leq \exp(-\sigma_n t)x_n(0)$ für alle $t > 0$. Somit gilt auch $\lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$.

Induktiv folgt aus (1.19), daß $\lim x_i(t) = 0$ für $t \rightarrow \infty$ ($f_{i+1}(x_{i+1}(s))$ wird beliebig klein und $x_i(\bar{t})$ ist beschränkt). Daher existiert eine Zeit $\tilde{T} > 0$, so daß $\dot{x}_i(t) \leq 0$ für alle $t > \tilde{T}$. Sei $\delta > 0$ wie in (G2) und sei $\tilde{T}_0 > \tilde{T}$ gegeben durch $x_i(t) < \delta$ für alle $t > \tilde{T}_0$. Daher gilt für $t > \tilde{T}_0$ und $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} -\sigma_i x_i(t) + c_{i+1} x_{i+1}(t) &\leq -\sigma_i x_i(t) + f_{i+1}(x_{i+1}(t)) = \dot{x}_i(t) \leq 0 \\ \Leftrightarrow x_i(t) &\geq \frac{c_{i+1}}{\sigma_i} x_{i+1}(t). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$x_1(t) \geq \prod_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1}}{\sigma_i} x_n(t).$$

Betrachte $x_n(t)$ für $\tilde{T}_0 + 1 < t \leq \tilde{T}_0 + 2$. Es gilt nach (1.19)

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \exp(-\sigma_n(t - \tilde{T}_0 - 1)) x_n(\tilde{T}_0 + 1) \\ &\quad - \int_{\tilde{T}_0+1}^t \exp(-\sigma_n(t-s)) f_1(x_1(s-1)) ds \\ &\leq \exp(-\sigma_n(t - \tilde{T}_0 - 1)) x_n(\tilde{T}_0 + 1) - \\ &\quad c_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1}}{\sigma_i} \int_{\tilde{T}_0+1}^t \exp(-\sigma_n(t-s)) x_n(s-1) ds \end{aligned}$$

$x_n(s-1)$ ist monoton fallend

$$\begin{aligned} &\leq \exp(-\sigma_n(t - \tilde{T}_0 - 1)) x_n(\tilde{T}_0 + 1) - \\ &\quad \frac{c_1}{\sigma_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1}}{\sigma_i} x_n(t-1) (1 - \exp(-\sigma_n(t - \tilde{T}_0 - 1))), \end{aligned}$$

Für $t = \tilde{T}_0 + 2$ gilt

$$\begin{aligned} x_n(\tilde{T}_0 + 2) &\leq x_n(\tilde{T}_0 + 1) \exp(-\sigma_n) \left(1 - \prod_{i=1}^n \frac{c_i}{\sigma_i} (\exp(\sigma_n) - 1) \right) \\ &< 0 \quad \text{nach (G2)}. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $\bar{t}_n = \infty$. Damit folgt $\bar{t}_n < \infty$.

Da \bar{t}_n endlich ist, muß nach (1.19) $x_1(\bar{t}_n - 1) > 0$ gelten und somit ist $\dot{x}_n(\bar{t}_n) < 0$. Aus (1.19) schließt man mit $\bar{t} = \bar{t}_n$, daß $x_n(t) < 0$ für alle $t \in (\bar{t}_n, \bar{t}_1 + 1)$. Um zu zeigen, daß auch die Zeit \bar{t}_{n-1} endlich ist, führen wir die folgende Transformation durch:

$$y_n(t) = -x_n(t+1)$$

und betrachten das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\sigma_i x_i(t) + f_{i+1}(x_{i+1}(t)) \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= -\sigma_{n-1} x_{n-1}(t) - \tilde{f}_n(y_n(t-1)) \\ \dot{y}_n(t) &= -\sigma_n y_n(t) + f_1(x_1(t)) \end{aligned} \tag{1.21}$$

für $t \geq \bar{t}_n$ mit Anfangswert $X_{\bar{t}_n}$. Dieses System entspricht bis auf eine Ummumerierung dem System (1.18) mit Anfangswert $(y_n(\bar{t}_n + \cdot), x_1(\bar{t}_n), \dots, x_{n-1}(\bar{t}_n)) \in K_0$. Beachte, $y_n(\bar{t}_n - 1) = 0$ und $y_n(\bar{t}_n + \theta) \exp(\sigma_n \theta)$ ist monoton steigend. Daher kann man zeigen, daß \bar{t}_{n-1} endlich ist mit $\dot{x}_{n-1}(\bar{t}_{n-1}) < 0$ und $x_{n-1}(t) < 0$ für alle $t \in (\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_1 + 1)$. Analog führt man sukzessive die Transformationen $y_i(t) = -x_i(t + 1)$ für $i = 2, \dots, n - 1$ durch und betrachtet das neue System für $t > \bar{t}_i$.

Wenden wir uns dem Spezialfall $\varphi_n = 0$ zu. Es gilt $x_n(t) = 0$, solange $\varphi_1(t - 1) = 0$. Also gilt $\bar{t}_n = \sup\{t > 0 : x_1(t - 1) \neq 0\}$ mit $\dot{x}_n(\bar{t}_n) = 0$. Gilt nun $\varphi_{n-1} \neq 0$, verfährt man wie im vorherigen, gilt $\varphi_{n-1} = 0$, so gilt $\bar{t}_{n-1} = \bar{t}_n$ mit $\dot{x}_{n-1}(\bar{t}_n) = 0$. Ebenso beweist man die Existenz von \bar{t}_{n-2} bis \bar{t}_1 . Wir rechnen nach:

$$\frac{d}{dt} (x_1(t) \exp(\sigma_1 t) = f_2(x_2(t)) \exp(\sigma_1 t) \leq 0$$

für $\bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_1 + 1$. □

Betrachtet man die Lösung von (1.18) für $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_1 + 1]$, d.h. $X_{\bar{z}_1}$ mit $\bar{z}_1 := \bar{t}_1 + 1$, so stellt man fest, daß gilt

$$X_{\bar{z}_1} \in K_1 := \{\varphi \in C(\mathbb{K}) : \varphi_1(-1) = 0, \varphi_1(\theta) \exp(\sigma_1 \theta) \text{ ist nicht-wachsend und} \\ \varphi_i \geq 0, i = 2, \dots, n, \varphi \neq 0\} .$$

Lemma 1.10 Sei $M > 0$ und $\varphi \in K_0$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Darüberhinaus seien die Bedingungen (G1) und (G2) erfüllt mit $\delta < M$. Dann existiert für hinreichend großes \bar{t}_n eine Zeit $s < \bar{t}_n$ mit $x_i(t) \leq \delta$ für $t \in (s, \bar{t}_n)$.

Beweis: Sei $M > 0$ und $\varphi \in K_0$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Aus

$$x_n(t) \leq x_n(0) \exp(-\sigma_n t) \leq M \exp(-\sigma_n t)$$

schließt man

$$x_n(t) \leq \delta$$

für $t \in (t_n^\delta, \bar{t}_n)$ mit $t_n^\delta := -\frac{1}{\sigma_n} \ln \frac{\delta}{M}$. Definiere für $i = 2, \dots, n$ die positiven Zahlen

$$d_i := \max(M\sigma_i, \max\{f_i(x) : 0 \leq x \leq \delta\})$$

und bestimme rekursiv die Zeiten t_i^δ durch

$$x_i(t) = x_i(t_{i+1}^\delta) \exp(-\sigma_i(t - t_{i+1}^\delta)) + \int_{t_{i+1}^\delta}^t f_{i+1}(x_{i+1}(s)) \exp(-(t - s)) ds \\ \leq \left(M - \frac{d_{i+1}}{\sigma_i}\right) \exp(-\sigma_i(t - t_{i+1}^\delta)) + \frac{d_{i+1}}{\sigma_i} .$$

Setze $t_i^\delta := t_{i+1}^\delta + \ln \frac{\delta\sigma_i - d_{i+1}}{M\sigma_i - d_{i+1}} > t_{i+1}^\delta$. Es gilt $0 < x_i(t) \leq \delta$, falls $t_i^\delta < t < \bar{t}_n$. Also gilt $x_i(t) \leq \delta$ für alle $\bar{t}_n > t > s := t_1^\delta$. Beachte, daß die Definition der t_i^δ und d_i unabhängig vom Anfangswert $\varphi \in K_0$ ist. □

Mit Lemma 1.10 kann man zeigen, daß die Zeit \bar{t}_n beschränkt ist, falls der Anfangswert beschränkt ist.

Lemma 1.11 Sei $M > 0$, $\varphi \in K_0$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Dann gibt es eine Konstante $C_n = C_n(M) > 0$, so daß $\bar{t}_n \leq C_n$.

Beweis: Nach Lemma 1.10 gibt es eine Zeit s mit $0 < x_i(t) \leq \delta$ für alle $s < t < \bar{t}_n$. Für $t > s$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n-1}(t) &\geq c_n \int_s^t x_1(\theta) \exp(-\sigma_{n-1})(t - \theta) d\theta \\ &= c_n \exp(-\sigma_{n-1}t) \left(\int_s^t \exp((\sigma_{n-1} - \sigma_n)\theta) x_n(s) \exp(\sigma_n s) d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_s^t \exp((\sigma_{n-1} - \sigma_n)\theta) \int_s^\theta f_1(x_1(\xi - 1)) \exp(\sigma_n \xi) d\xi d\theta \right). \end{aligned}$$

Eine partielle Integration für $\sigma_n \neq \sigma_{n-1}$ liefert

$$\begin{aligned} x_{n-1}(t) &\geq \frac{c_n}{\sigma_{n-1} - \sigma_n} (1 - \exp(-(\sigma_{n-1} - \sigma_n)(t - s))) (x_n(s) \exp(-\sigma_n(t - s)) \\ &\quad - \int_s^t \exp(-\sigma_n(t - s)) f_1(x_1(\theta - 1)) d\theta) \\ &= \frac{c_n}{\sigma_{n-1}} A_n(t) x_n(t) \end{aligned}$$

mit

$$A_n(t) := \frac{1 - \exp(-(\sigma_{n-1} - \sigma_n)(t - s))}{1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}}.$$

Für $\sigma_n = \sigma_{n-1}$ setzt man $A_n(t) := \sigma_{n-1}(t - s)$. Wir zeigen nun, daß es ein $\tilde{t}_n > s$ gibt mit $A_n(t) > 1$ für alle $t > \tilde{t}_n$ (der Fall $\sigma_n = \sigma_{n-1}$ ist trivial).

Es gilt $A_n(t) > 0$ für alle $t > s$ und $\frac{d}{dt} A_n(t) = \sigma_{n-1} \exp(-(\sigma_{n-1} - \sigma_n)(t - s)) > 0$. Ebenso zeigt man, daß gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_n(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \sigma_{n-1} - \sigma_n < 0 \\ \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} - \sigma_n} > 1 & \text{falls } \sigma_{n-1} - \sigma_n > 0 \end{cases},$$

woraus die Existenz von $\tilde{t}_n > s$ folgt. Also gilt für $t \geq \tilde{t}_n$

$$x_{n-1}(t) \geq \frac{c_n}{\sigma_{n-1}} x_n(t).$$

Sukzessive kann man Zeiten \tilde{t}_i definieren, so daß

$$x_i(t) \geq \prod_{j=i}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} x_n(t)$$

für $t \geq \tilde{t}_i$. Für $t \geq \tilde{t}_{i+1}$ gilt

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(\tilde{t}_{i+1}) \exp(-\sigma_i(t - \tilde{t}_{i+1})) + \int_{\tilde{t}_i}^t f_{i+1}(x_{i+1}(\theta)) \exp(-\sigma_i(t - \theta)) d\theta \\ &\geq c_i \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} \int_{\tilde{t}_{i+1}}^t x_n(\theta) \exp(-\sigma_i(t - \theta)) d\theta \end{aligned}$$

$x_n(t) \exp(\sigma_n t)$ ist monoton fallend

$$\geq c_i \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} x_n(t) \exp(-(\sigma_i - \sigma_n)t) \int_{\tilde{t}_{i+1}}^t \exp(-(\sigma_i - \sigma_n)\theta) d\theta$$

für $\sigma_i \neq \sigma_n$ (siehe wie oben)

$$= \prod_{j=i}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} A_j(t) x_n(t)$$

mit

$$A_i(t) := \frac{1 - \exp(-(\sigma_i - \sigma_n)(t - \tilde{t}_{i+1}))}{1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_n}}.$$

Falls $\sigma_i = \sigma_n$ ergibt sich $A_i(t) = \sigma_i(t - \tilde{t}_{i+1})$. Wie schon für A_n kann man zeigen, daß es eine Zeit \tilde{t}_i gibt mit $A_i(t) \geq 1$ für alle $t \geq \tilde{t}_i$. Die \tilde{t}_i sind unabhängig vom Anfangswert $\varphi \in K_0$. Sei $\bar{t}_n > \tilde{t}_1 + 2$ und wende (1.19) für $t > \tilde{t}_1 + 1$ an:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \exp(-\sigma_n(t - \tilde{t}_1 - 1)) x_n(\tilde{t}_1 + 1) \\ &\quad - \int_{\tilde{t}_1+1}^t \exp(-\sigma_n(t - \theta)) f_1(x_1(\theta - 1)) d\theta \\ &\leq \exp(-\sigma_n(t - \tilde{t}_1 - 1)) x_n(\tilde{t}_1 + 1) \\ &\quad - c_1 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} \exp(-\sigma_n(t - 1)) \int_{\tilde{t}_1+1}^t \exp(\sigma_n(\theta - 1)) x_n(\theta - 1) d\theta \end{aligned}$$

$x_n(\theta - 1) \exp(\sigma_n(\theta - 1))$ monoton fallend

$$\leq \exp(-\sigma_n(t - \tilde{t}_1 - 1)) x_n(\tilde{t}_1 + 1) - c_1 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{c_{j+1}}{\sigma_j} x_n(t - 1)(t - \tilde{t}_1 - 1).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} x_n(\tilde{t}_1 + 2) &\leq x_n(\tilde{t}_1 + 1) \exp(-\sigma_n) \left(1 - \prod_{j=1}^n \frac{c_j}{\sigma_j} \sigma_n \exp(\sigma_n) \right) \\ &< 0 \quad \text{nach (G2)}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $\bar{t}_n < \tilde{t}_1 + 2 =: C_n(M) = C_n$. C_n hängt nicht vom Anfangswert $\varphi \in K_0$ ab. \square

Lemma 1.12 Sei $M > 0$, $\varphi \in K_0$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(M) > 0$, so daß $\bar{z}_1 \leq C$.

Beweis: Man beweist analog zu Lemma 1.11, daß es Konstanten $C_i = C_i(M) > 0$ gibt, so daß $\bar{t}_i \leq C_i$ gilt. Dabei betrachtet man das transformierte System (1.21) aus dem Beweis zu Lemma 1.9. Wähle $C := C_1 + 1$. Daher gilt $\bar{z}_1 = \bar{t}_1 + 1 \leq C$. \square

Durch analoge Beweise zu den Beweisen von Lemma 1.9 und Lemma 1.12 zeigt man, daß es für alle $\varphi \in K_0$ Zeiten t'_i gibt mit: $x_i(t'_i) = 0, \dot{x}_i(t'_i) > 0, x_i(t) > 0$ für $t \in (t'_i, t'_i + 1)$ und $x_1(t) \exp(\sigma_1 t)$ ist nicht-fallend auf dem Intervall $[t'_1, t'_1 + 1]$, d.h. mit $\bar{z}_2(\varphi) := t'_1 + 1$ gilt $X_{\bar{z}_2(\varphi)} \in K$. Für alle $M > 0$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so $\bar{z}_2(\varphi) \leq C$ für $\|\varphi\| \leq M$. Wir definieren die Abbildung $\mathcal{F} : K \rightarrow K$ durch

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi) &:= X_{\bar{z}_2(\varphi)} & \varphi \in K_0 \\ \mathcal{F}(0) &:= 0.\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß \mathcal{F} neben dem trivialen Fixpunkt $\varphi = 0$ noch einen weiteren Fixpunkt in K besitzt. Dieser Fixpunkt liefert uns eine langsam oszillierende periodische Lösung von (1.18).

Lemma 1.13 *Sei $M > 0$ und $\varphi \in K$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Dann gibt es ein \tilde{M} , unabhängig von φ , so daß $\|\mathcal{F}(\varphi)\| \leq \tilde{M}$. Außerdem folgt $\tilde{M} \rightarrow 0$, falls $M \rightarrow 0$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß ein \tilde{M}_1 existiert, so daß $\|X_{\bar{z}_1}\| \leq \tilde{M}_1$. Sei also $\varphi \in K$ mit $\|\varphi\| \leq M$. Für alle $t \in [0, \bar{z}_1]$ gilt

$$x_n(t) \leq M := M_n.$$

Ebenso gilt für $j = 1, \dots, n-1$

$$x_j(t) \leq M_j := \max(|\varphi_j|, d_j),$$

wobei

$$d_j := \max \{f_{j+1}(x) : 0 < x < M_j\}.$$

Wir definieren außerdem

$$d_n := \max \{f_1(x) : 0 < x < M_1\}.$$

Betrachte nun $x_n(t)$ für $t \in (\bar{t}_n, \bar{z}_1)$. Es gilt nach (1.19)

$$x_n(t) = - \int_{\bar{t}_n}^t \exp(-\sigma_n(t-s)) f_1(x_1(s-1)) ds \geq -d_n := -m_n.$$

Die Anwendung von (1.19) liefert für $j = 2, \dots, n$ und $t \in [0, \bar{z}_1]$

$$x_j(t) \geq \min \{f_{j+1}(x) : -m_{j+1} < x < 0\} =: -m_j.$$

Also gilt für alle $j = 1, \dots, n$ und $t \in [0, \bar{z}_1]$

$$-m_j \leq x_j(t) \leq M_j,$$

wobei die $m_j, M_j > 0$ unabhängig von dem speziellen Anfangswert $\varphi \in K$ sind. Definiere $\tilde{M}_1 := \max_j(m_j)$. Insbesondere folgt, daß $\|X_{\bar{z}_1}\| \leq \tilde{M}_1$. Aus der Konstruktion ist klar, daß $M \rightarrow 0$ auch $\tilde{M}_1 \rightarrow 0$ impliziert. \square

Lemma 1.14 *Es gilt*

1. Die Abbildung $\bar{z}_2 : K_0 \rightarrow (2, \infty)$ ist stetig und kompakt.
2. \mathcal{F} ist eine stetige und kompakte Abbildung.

Beweis: Die Stetigkeit von \bar{z}_2 und \mathcal{F} ergibt sich direkt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von (1.18) vom Anfangswert $\varphi \in K$, siehe z.B. [61]. Die Kompaktheit von \bar{z}_2 folgt aus Lemma 1.12.

Die Kompaktheit von \mathcal{F} folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli (siehe z.B. [90]), was wir nun demonstrieren wollen.

Sei $A \subset K$ eine beschränkte Menge, d.h. es existiert ein $M > 0$ mit $\|\varphi\| \leq M$ für alle $\varphi \in A$ und sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\varphi_k \in A$. $\phi_k^1 \in C[-1, 0]$ bezeichne die erste Komponente und $\phi_k^i \in \mathbb{R}$ die i -te Komponente von $\mathcal{F}(\varphi_k)$ mit $i = 2, \dots, n$. Aus Lemma 1.13 folgt, daß ein $\tilde{M} > 0$ existiert mit $\|F(\varphi)\| \leq \tilde{M}$ für alle $\varphi \in A$ und $\tilde{M} \rightarrow 0$, falls $M \rightarrow 0$. Ebenso folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $(\frac{d}{d\theta}\phi_k^1(\cdot))$, d.h. es gibt ein $M^* > 0$

$$\left\| \frac{d}{d\theta}\phi_k^1 \right\|_{\infty} \leq M^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt für $-1 \leq \bar{t} \leq t \leq 0$

$$|\phi_k^1(t) - \phi_k^1(\bar{t})| \leq \int_{\bar{t}}^t \left| \frac{d}{d\theta}\phi_k^1(\theta) \right| d\theta \leq M^* |t - \bar{t}|,$$

und daher gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{\epsilon}{M^*}$), so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|t - \bar{t}| < \delta \Rightarrow |\phi_k^1(t) - \phi_k^1(\bar{t})| < \epsilon.$$

Folglich ist die Folge (ϕ_k^1) gleichgradig stetig. Somit besitzt (ϕ_k^1) eine konvergente Teilfolge. Ebenso besitzen die übrigen Komponentenfolgen (ϕ_k^i) als reelle, beschränkte Folgen konvergente Teilfolgen. Also besitzt $(\mathcal{F}(\varphi_k))$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K . Damit ist \mathcal{F} eine kompakte Abbildung. \square

Nachdem wir den Operator \mathcal{F} unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (G1) und (G2) definieren konnten, wenden wir uns nun der Beschränktheit der Lösungen bzw. der Bestimmung einer invarianten Menge innerhalb des Phasenraums $C(\mathbb{K})$ zu. Dafür ziehen wir die Voraussetzung (G3) heran, die besagt, daß mindestens eine der Nichtlinearitäten f_i nach oben oder unten beschränkt ist.

Lemma 1.15 *Es gelte (G1), (G3), d.h. es gibt ein $\kappa = \underline{\kappa}_l > 0$, so daß $f_l(x) \geq -\underline{\kappa}_l$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. ein $\kappa = \bar{\kappa}_l > 0$, so daß $f_l(x) \leq \bar{\kappa}_l$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es nicht-negative Zahlen $\underline{\nu}_i, \underline{\nu}_i > 0$, so daß für alle $t \geq 0$ und $i = 1, \dots, n$ gilt*

$$-\underline{\nu}_i \leq x_i(t) \leq \bar{\nu}_i,$$

falls $x_1(\theta) \in [-\underline{\nu}_1, \bar{\nu}_1]$ und $x_j(0) \in [-\underline{\nu}_j, \bar{\nu}_j], j = 2, \dots, n$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $l \neq 1$, $f_l(x) \geq -\underline{\kappa}_l$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Fälle $f_l(x) \leq \bar{\kappa}_l$ bzw. $l = 1$ werden in analoger Weise bewiesen.

Nach (1.19) gilt

$$x_{l-1}(t) \geq -\frac{\underline{\kappa}_l}{\sigma_{l-1}} + \exp(-\sigma_{l-1}t) \left(x_{l-1}(0) - \frac{\underline{\kappa}_l}{\sigma_{l-1}} \right).$$

Setze $\underline{\nu}_{l-1} := \frac{\underline{\kappa}_l}{\sigma_{l-1}}$. Für $x_{l-1}(0) \geq -\underline{\nu}_{l-1}$ folgt also $x_{l-1}(t) \geq \underline{\nu}_{l-1}$ für alle $t \geq 0$. Weiterhin definieren wir $\underline{\kappa}_{l-1} := -\min\{f_{l-1}(x) : -\underline{\nu}_{l-1} \leq x \leq 0\} > 0$. Eine endliche Fortsetzung des Verfahrens ($j = 1, \dots, l-1$) liefert uns nicht-negative Zahlen $\underline{\nu}_j, \underline{\kappa}_j$ mit $x_j(t) \geq -\underline{\nu}_j$ für $x_j(0) \geq -\underline{\nu}_j$. Gilt insbesondere $x_1(\theta) \geq -\underline{\nu}_1$ für alle $\theta \in [-1, 0]$, so erhalten wir für x_n die folgende obere Schranke mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel

$$x_n(t) \leq \bar{\nu}_n + \exp(-\sigma_n t) (x_n(0) - \bar{\nu}_n)$$

wobei $\bar{\nu}_n := \frac{\bar{\kappa}_1}{\sigma_n} > 0$. Daher gilt $x_n(t) \leq \bar{\nu}_n$ für alle $t \geq 0$, falls $x_n(0) < \bar{\nu}_n$. Definiere $\bar{\kappa}_n := \max\{f_n(x) : 0 \leq x \leq \bar{\nu}_n\} > 0$. Mit dem obigen Verfahren bestimmt man für $j = 1, \dots, n-1$ nicht-negative Zahlen $\bar{\nu}_j := \frac{\bar{\kappa}_{j+1}}{\sigma_j}$, $\bar{\kappa}_j := \max\{f_j(x) : 0 \leq x \leq \bar{\nu}_j\}$, so daß $x_j(t) \leq \bar{\nu}_j$ für alle $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $x_j(0) \leq \bar{\nu}_j$. Nun findet man (sofern der zu Beginn gewählte Index $l \neq n$) die untere Schranke $\underline{\nu}_n := \frac{\bar{\kappa}_1}{\sigma_n}$ für x_n , falls $x_1(\theta) \leq \bar{\nu}_1$ für alle $\theta \in [-1, 0]$ usw. Somit hat man ein invariante Menge für den Fluß von (1.18) konstruiert. \square

Eine äquivalente Bedingung zu (G3) ist:

(G3') Es existieren $a_i, b_i > 0$ und sei $I := \prod_{i=1}^n [-\frac{a_i}{\sigma_i}, \frac{b_i}{\sigma_i}]$, so daß

$$\begin{aligned} f_1([-a_1, b_1]) &\subset [-b_n, a_n] \\ f_{i+1}([-a_{i+1}, b_{i+1}]) &\subset [-a_i, b_i] \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Setze $\underline{\nu}_i := \frac{a_i}{\sigma_i}$ und $\bar{\nu}_i := \frac{b_i}{\sigma_i}$ und $I := \prod_{i=1}^n [-\underline{\nu}_i, \bar{\nu}_i]$.

Lemma 1.16 *Es gelte (G3') und sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C(\mathbb{K})$ mit $\varphi_1(\theta) \in [-\underline{\nu}_1, \bar{\nu}_1]$ für alle $\theta \in [-1, 0]$ und $\varphi_i \in [-\underline{\nu}_i, \bar{\nu}_i]$ für $i = 2, \dots, n$, so gilt für die Lösung $x(t, \varphi)$ von (1.18)*

$$x(t, \varphi) \in I \quad \forall t > 0.$$

Beweis: Definiere die Fluchtzeit

$$\bar{t} := \sup \{t \in (0, \infty) : x_j(s) \in [-\underline{\nu}_j, \bar{\nu}_j] \text{ für alle } s \in [0, t] \text{ und } j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Wir nehmen an, es gelte $\bar{t} < \infty$. Dann gilt für alle $s \in [0, \bar{t} + 1]$

$$\frac{d}{ds}(\exp(\sigma_n s)x_n(s)) = -\exp(\sigma_n s)f_1(x_1(s-1)) \leq \exp(\sigma_n s)b_n.$$

Das Integrieren von 0 bis $t < \bar{t} + 1$ liefert

$$x_n(t) \leq \frac{b_n}{\sigma_n} + \exp(-\sigma_n t) \left(x_n(0) - \frac{b_n}{\sigma_n} \right) \leq \frac{b_n}{\sigma_n}.$$

Sukzessive zeigt man für $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$ durch Integrieren der Ungleichung (für $s \in (0, \bar{t} + 1)$)

$$\frac{d}{ds}(\exp(\sigma_j s)x_j(s)) = \exp(\sigma_j s)f_{j+1}(x_{j+1}(s)) \leq \exp(\sigma_j s)b_j$$

die obere Schranke

$$x_j(t) \leq \frac{b_j}{\sigma_j} + \exp(-\sigma_j t)(x_j(0) - \frac{b_j}{\sigma_j}) \leq \frac{b_j}{\sigma_j}$$

für alle $t \in (0, \bar{t} + 1)$. Dies steht im Widerspruch zu $\bar{t} < \infty$, daher gilt für alle $t \geq 0$ und $j = 1, \dots, n$: $x_j(t) \leq \frac{b_j}{\sigma_j}$. In ähnlicher Weise zeigen wir die unteren Schranken $-\frac{a_j}{\sigma_j}$ für x_j . Folglich gilt $x(t) \in I$ für alle $t \geq 0$. \square

Bemerkung 1.13 Ersetzt man in der ersten Bedingung von $(G3')$ die abgeschlossenen Intervalle durch offene Intervalle, und wählt man den Anfangswert dementsprechend, so kann man einfach zeigen, daß $x(t) \in \text{int}I$ für alle $t \geq 0$ gilt. Durch die Existenz einer invarianten Menge ist es möglich, die Voraussetzung $(G1)$ so zu modifizieren, daß die strikte Feedback-Bedingung nur auf dem Invarianzgebiet gilt.

Wie man gesehen hat, implizieren $(G3)$ bzw. $(G3')$ die Existenz einer invarianten Menge im Phasenraum $C(\mathbb{K})$. Diese Tatsache nutzen wir aus, um den Operator \mathcal{F} auf einer Teilmenge von K als Selbstabbildung zu definieren, genauer: Setze

$$D := \{\varphi \in K : \varphi_1(\theta) \in [-\underline{\nu}_1, \bar{\nu}_1], \varphi_j \in [-\underline{\nu}_j, \bar{\nu}_j], j = 2, \dots, n\}$$

mit $\underline{\nu}_j, \bar{\nu}_j$ wie in Lemma 1.15 bzw. 1.16. Dann gilt offensichtlich $\mathcal{F}(D) \subset D$. D ist eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge von $C(\mathbb{K})$. Nach unserer Konstruktion entsprechen Fixpunkte von $\mathcal{F} : D \rightarrow D$ (langsam oszillierenden) periodischen Lösungen von (1.18). Da der triviale periodische Orbit $\bar{x} = 0$ in der Menge F enthalten ist, müssen wir noch die Ejektivität von $\bar{x} = 0$ zeigen, um den Satz vom ejektiven Fixpunkt anwenden zu können. [61] formuliert das folgende Theorem, das die Ejektivität der trivialen Lösung garantiert. Dabei muß man beachten, daß dort die Aussagen für den Phasenraum $C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ getroffen werden, wir aber in unserem modifizierten Phasenraum $C(\mathbb{K})$ argumentieren. $C(\mathbb{K})$ kann aber in trivialer Weise in $\mathcal{C} = C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ eingebettet werden.

Theorem 1.8 (siehe [61]) *Seien folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gibt eine charakteristische Lösung z_0 mit $\text{Re } z_0 > 0$.*
2. *Es gibt eine abgeschlossene, konvexe Menge $D \subseteq \mathcal{C}$, $0 \in D$ und $\delta > 0$, so daß*

$$\nu(\delta) := \inf \{ |(\Psi, \varphi)| : \varphi \in D, |\varphi| = \delta \} > 0.$$

(Für die Definition von Ψ und des Skalarprodukts (ψ, \cdot) siehe Lemma 1.8.)

3. *Es gibt eine kompakte Funktion $z_2 : D \rightarrow [2, \infty)$, so daß die Abbildung*

$$\mathcal{F}\phi = x_{z_2(\phi)}, \quad \phi \in K_0$$

die Menge $K \setminus \{0\}$ nach K abbildet und kompakt ist.

Dann ist 0 ein ejektiver Punkt von \mathcal{F} .

Um die Ejektivität des trivialen Fixpunktes zu zeigen, müssen wir nur noch die zweite Bedingung des Theorems überprüfen.

Lemma 1.17 *Es gelte (G1) – (G4). Dann ist $\varphi = 0$ ein ejektiver Fixpunkt von \mathcal{F} .*

Beweis (Beweis): Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingung $\nu(\delta) > 0$ erfüllt ist. (G4) impliziert die Existenz einer einfachen charakteristischen Lösung z_0 mit $x_0 := \operatorname{Re} z_0 > 0$ und $y_0 := \operatorname{Im} z_0 \in (0, \pi)$. Nach Lemma 1.8 gibt es eine Basis $\Psi(s) = \exp(-z_0 s)p^T$ mit $p \in \mathbb{C}^n$ für den zu z_0 gehörigen Eigenraum des adjungierten linearen Problems. Dabei ist p unabhängig vom Anfangswert φ . Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} (\Psi, \varphi) &= p^T \varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \Psi(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi \\ &= p^T \varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta p^T \exp(z_0 \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) \exp(-z_0 \xi) d\xi \\ &= p^T \varphi(0) - \int_{-1}^0 p^T h(\theta) \exp(z_0 \theta) d\eta(\theta) \end{aligned}$$

mit

$$h(\theta) := \int_0^\theta \varphi(\xi) \exp(-z_0 \xi) d\xi, \quad h(0) = 0.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} (\Psi, \varphi) &= p^T \varphi(0) - p^T B h(-1) \exp(-z_0) \\ &= p^T \varphi(0) - p_n \beta_1 h_1(-1) \exp(-z_0) \\ &= p^T \varphi(0) + p_n \beta_1 \int_{-1}^0 \varphi(\xi) \exp(-\operatorname{Re} z_0 (\xi + 1)) \exp(-i \operatorname{Im} z_0 (\xi + 1)) d\xi. \end{aligned}$$

Wähle $p_n := 1$ (siehe Lemma 1.8; die freie Wahl von p_n impliziert eine Bedingung an q_1). Schreibe $p_j := |p_j| \exp(i \arg(p_j))$. Es gilt $\arg(p_n) = 0$ und $\arg(p_j) = \sum_{k=j+1}^n \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 + \sigma_k}\right)$. Aus der Tatsache, daß z_0 die charakteristische Gleichung (1.7) löst, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 + \sigma_k}\right) + y_0 = \pi.$$

Folglich gilt $0 < \arg(p_j) < \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 + \sigma_k}\right) < \pi$ für $j = 1, \dots, n-1$. Daraus folgt $\operatorname{Im} p_j > 0$

für alle $j = 1, \dots, n-1$ und $\operatorname{Im} p_n = 0$. Also

$$\operatorname{Re}(\Psi, \varphi) = \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re} p_j \varphi_j(0) + \varphi_n(0) \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} & - \beta_1 \int_{-1}^0 \varphi_1(\xi) \exp(-\operatorname{Re} z_0(\xi + 1)) \cos(\operatorname{Im} z_0(\xi + 1)) d\xi \\ \operatorname{Im}(\Psi, \varphi) & = \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Im} p_j \varphi_j(0) \quad (1.23) \\ & + \beta_1 \int_{-1}^0 \varphi_1(\xi) \exp(-\operatorname{Re} z_0(\xi + 1)) \sin(\operatorname{Im} z_0(\xi + 1)) d\xi \\ & > \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Im} p_j \varphi_j(0), \end{aligned}$$

da $\beta_1 > 0$ und $\operatorname{Im} z_0 \in (0, \pi)$. Sei $\varphi \in K_0$ mit $\|\varphi\| = \delta = \varphi_1(t_\delta)$, $t_\delta \in (-1, 0)$. Dann gilt $\varphi_1(0) > \varphi_1(t_\delta) \exp(\sigma_1 t_\delta) > \delta \exp(-\sigma_1)$. Betrachte die Folge $\varphi^k \in D$ mit $\|\varphi^k\| = \delta$. Unter der Annahme $\lim |(\Psi, \varphi^k)| = 0$ folgt insbesondere $\lim \operatorname{Re}(\Psi, \varphi^k) = 0$, $\lim \operatorname{Im}(\Psi, \varphi^k) = 0$. Daher gilt nach (1.23) $\lim \varphi_j^k(0) = 0$ für alle $j = 2, \dots, n-1$. Aus der Monotonie-Eigenschaft für $\varphi_1^k(\theta) \exp(\sigma_1 \theta)$ folgt somit $\lim \varphi_k^1 = 0$. Weiter folgt mit (1.22) $\lim \varphi_n^k(0) = 0$. Also $\lim \varphi^k = 0$, was im Widerspruch zu $\|\varphi^k\| = \delta$ steht. Damit folgt $\nu(\delta) = \inf_{|\varphi|=\delta} |(\Psi, \varphi)| > 0$. Somit ist $\bar{x} = 0$ ein ejektiver Fixpunkt. \square

Nun ist man in der Lage, mit den bisher erzielten Ergebnissen das Hauptresultat, Theorem 1.6, zu beweisen.

Beweis (Theorem 1.6): Es gelte (G1) – (G4). Nach Konstruktion von \mathcal{F} entsprechen Fixpunkte dieser Abbildung periodischen Lösungen von (1.18). Da $\mathcal{F} : D \rightarrow D$ eine kompakte Selbstabbildung (siehe Lemma 1.14) und D eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte und unendlich-dimensionale Menge in $C(\mathbb{K})$ ist, garantiert der Fixpunktsatz von Browder (Theorem 1.7) die Existenz eines nicht-ejektiven Fixpunktes. Da die triviale Lösung $\bar{x} = 0$ einem ejektiven Fixpunkt entspricht (Lemma 1.17) und $\bar{x} = 0$ die einzige stationäre Lösung von (1.18) ist, existiert nach Theorem 1.7 eine T -periodische Lösung, für die nach Konstruktion $T > 2$ gilt. \square

Wendet man Theorem 1.6 auf das zyklische System (1.1) an, so lautet das entsprechende Resultat:

Korollar 1.4 Sei $r > 0$. Betrachte System (1.1) unter den zusätzlichen Voraussetzungen

- $xg_i(x) > 0$ für alle $x \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Mindestens ein g_i ist von oben oder von unten beschränkt.
- $\alpha < \alpha^*$, wobei $\alpha^* < 0$ eindeutig durch $r = R_0(\alpha^*)$ gegeben ist, siehe Gleichung (1.8).
- r ist hinreichend groß.

Dann besitzt (1.1) eine periodische Lösung mit Periode $p > 2r$, also eine langsam oszillierende periodische Lösung.

Beweis: Die oben genannten Voraussetzungen an (1.1) finden ihre Entsprechung in den Voraussetzungen (G1)–(G4) des Systems (1.18). Dabei impliziert die Forderung an die Zeitverzögerung r die Bedingung (G2). \square

Bemerkung 1.14

1. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Voraussetzung an r nicht nötig. Für $r > \frac{\ln(2)}{\mu_{\min}}$ ist die Voraussetzung an r generell erfüllt. Viele numerische Untersuchungen weisen darauf hin, daß man auf die Voraussetzung an die Zeitverzögerung r verzichten kann.
2. Für $r = 0$ zeigt [63] die globale Existenz einer periodischen Lösung für (1.1) bei negativer Rückkopplung und der zusätzlichen Voraussetzung, daß die triviale Lösung $\bar{x} = 0$ instabil ist.

1.4 Globale Hopf-Verzweigung

Wir beschäftigen uns im folgenden mit einigen globalen Eigenschaften des zyklischen Systems (1.1). In Abschnitt 1.3 haben wir bereits die globale Existenz einer periodischen Lösung unter gewissen Bedingungen an die Systemparameter und die Nichtlinearitäten g_i kennengelernt.

[81] formuliert für eine Klasse von zeitverzögerten Differentialgleichungen, in die auch die Klasse der monoton zyklischen Systeme fällt, ein dem Poincaré-Bendixson Theorem für planare gewöhnliche Differentialgleichungen verwandtes Ergebnis. Dies besagt, daß jede ω -Limesmenge des monoton zyklischen Systems entweder aus einer stationären oder einer periodischen Lösung oder einem Orbit, der stationäre Lösungen verbindet, besteht. Darüber hinaus untersucht [81] noch das Floquet-Spektrum periodischer Lösungen des monoton zyklischen Systems (1.1). Mit Hilfe eines diskreten Lyapunov-Funktional, welches die Anzahl der Vorzeichenwechsel auf dem Intervall $[-r, 0]$ misst, kann gezeigt werden, daß langsam oszillierende periodische Lösungen höchstens einen Floquet-Multiplikator außerhalb des Einheitskreises besitzen. Daher sind hyperbolische periodische Lösungen entweder stabil oder besitzen eine eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit. Entsprechende Resultate kann man für periodische Lösungen kleinerer Periode finden. Außerdem zeigt [81], daß für die Umlaufzahlen W^i der Projektionen der periodischen Lösung $p(\cdot)$ auf die $(x_i(t), x_{i+1}(t))$ -Ebene bzw. $((x_n(t), x_1(t))$ -Ebene gilt:

$$W^i(p) = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

$$W^n(p) = \begin{cases} -1 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha > 0 \end{cases}.$$

Betrachtet man den Fall positiver Rückkopplung, d.h. $\alpha > 0$, so kann man unter geeigneten Voraussetzungen auf die Theorie der monotonen dynamischen Systeme zurückgreifen [95], die besagen, daß fast alle Trajektorien zu einer stationären Lösung des Systems konvergieren.

Wir wollen nun die Ergebnisse über die lokale Hopf-Verzweigung (siehe Kapitel 1.2.3) und die Ergebnisse über die globale Existenz einer periodischen Lösung (Kapitel 1.3) zusammenführen, um somit noch weitere Informationen über das globale Verhalten von (1.1) zu erhalten. In Korollar 1.4 haben wir Bedingungen für die lokale Existenz von Zweigen periodischer Lösungen des Systems (1.1) in Abhängigkeit der Parameter α bzw. r gegeben. Wir diskutieren nun, unter welchen Voraussetzungen diese Zweige global fortgesetzt werden können. Dabei interessieren wir uns insbesondere für den Zweig der langsam oszillierenden periodischen Lösungen unter Berücksichtigung des Parameters α .

Die globale Verfolgung der Zweige periodischer Lösungen, die aus einer Hopf-Verzweigung entstehen, wird in [80] im Falle einer skalaren Rückkopplungsgleichung mit Zeitverzögerung untersucht. In [51] wird das globale Verzweigungsverhalten für die skalare Gleichung ebenfalls detailliert untersucht. Für den planaren zyklischen Fall findet man Ergebnisse in [53, 89]. Für höher-dimensionale Systeme untersucht [105] das globale Verzweigungsverhalten für ein Neuronenmodell mit zirkulanter Koppelmatrix, das im allgemeinen kein zyklisches System des Typs (1.1) darstellt.

Bei den zitierten Arbeiten wird das Verhalten bei Variation der Zeitverzögerung r untersucht. Dies ist aber im allgemeinen für zyklische Systeme der Dimension $n \geq 3$ nicht möglich, da man keine untere Schranke für den Parameter r für die Nicht-Existenz periodischer Lösungen angeben kann. Selbst bei der Existenz einer periodischen Lösung im Falle eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist nicht bekannt, ob sie in einem Kontinuum periodischer Lösungen liegt, welches aus einer Hopf-Verzweigung zum kritischen Parameter $\bar{r} = R_k(\alpha)$ hervorgeht. Daher konzentrieren wir uns auf den Parameter α .

Sei $r > 0$ fest gewählt. Nach Theorem 1.4 gibt es Folgen $(\alpha^{k,\pm})_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\alpha^{k,-} < -\mu$ bzw. $\alpha^{k,+} > \mu$ und $r = R_k(\alpha^{k,\pm})$. Für $\alpha = \alpha^{k,\pm}$ besitzt das System (1.1) eine Hopf-Singularität, d.h. es existiert lokal ein Zweig periodischer Lösungen. Darüberhinaus gilt für die Periode p der abzweigenden Lösung: $p \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_k}$ mit $\prod_{j=1}^n (\omega_k^2 + \mu_j^2) = \alpha^{k,\pm 2}$, falls $\alpha \rightarrow \alpha^{k,\pm}$. Außerdem gelten für $\alpha^{k,-}$ die Abschätzungen $\omega_k < \frac{(2k+1)\pi}{r}$ bzw. $\omega_k < \frac{2(k+1)\pi}{r}$ für $\alpha^{k,+}$, woraus sich untere Schranken für die abzweigenden Perioden ergeben. Wir definieren für $r > 0$ die folgende Menge

$$S^r := \{(\varphi, \alpha, p) \in C(\mathbb{K}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x(t) \text{ ist nicht-konstante} \\ p\text{-periodische Lösung von (1.1) mit } x|_{[-r,0]} = \varphi \text{ zum Parameter } \alpha\} .$$

S_k^r bezeichne die maximale Zusammenhangskomponente von $\overline{S^r}$, die die Hopf-Singularität $(0, \alpha^k, \frac{2\pi}{\omega_k})$ enthält. Dabei gilt $\alpha^k = \alpha^{k,\pm}$ je nach Art der Rückkopplung des Systems (1.1). Das Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Unbeschränktheit von S_k^r unter der folgenden Voraussetzung zu zeigen.

(GH) Alle stationären Lösungen $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \neq 0$ erfüllen die Bedingung $\prod_{j=1}^n \alpha_j g_j'(\bar{x}_j) \neq \mu$.

Bemerkung 1.15

1. Die Bedingung (GH) impliziert, daß das System keine stationären Verzweigungen durchläuft. $z = 0$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung (1.7).
2. Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Mit der Bezeichnung $\bar{x} \in C(\mathbb{K})$ meinen wir das konstante Funktional auf $[-r, 0]$, also $\bar{x}_1(\theta) \equiv \bar{x}_1$ für alle $\theta \in [-r, 0]$.

Theorem 1.9 Sei die Bedingung (GH) erfüllt. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Zusammenhangskomponente $S_k^r \subset C(\mathbb{K}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ von $\overline{S^r}$, die $(0, \alpha^k, \frac{2\pi}{\omega_k})$ enthält, unbeschränkt. Es gilt $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) \in S_k^r$ mit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $\bar{x} = 0, \bar{\alpha} = \alpha^k, \bar{p} = \frac{2\pi}{\omega_k}$.

Beweis: Mit Theorem 3.3 aus [36] (bzw. Theorem 3.3 aus [105]) beweisen wir die Unbeschränktheit von S_k^r . Dieses Theorem besagt, daß S_k^r entweder unbeschränkt ist, oder daß gilt: Diese Zusammenhangskomponente ist beschränkt mit der zusätzlichen Bedingung

$$S_k^r \cap \{(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) \in C(\mathbb{K}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ ist stationäre Lösung von (1.1)}\} \\ = \{(\bar{x}_l, \bar{\alpha}_l, \bar{p}_l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : l = 0, \dots, N\}$$

und

$$\sum_{l=0}^N \gamma(\bar{x}_l, \bar{\alpha}_l, \bar{p}_l) = 0. \quad (1.24)$$

Dabei ist $\gamma(\bar{x}_l, \bar{\alpha}_l, \bar{p}_l)$ die sogenannte Kreuzungszahl (*crossing number*), deren Definition wir im folgenden geben. Daher reicht es zu zeigen, daß die Bedingung (1.24) nicht erfüllt ist.

Sei $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p})$ ein isoliertes Zentrum von (1.1). \bar{x} ist stationäre Lösung und die charakteristische Gleichung $\chi(z; \bar{\lambda}) = 0$ besitzt die beiden Lösungen $\pm i \frac{2\pi}{\bar{p}}$ mit $\bar{\lambda} := \bar{\alpha} \prod_{j=1}^n g'_j(\bar{x}_j)$. Zusätzlich gibt es eine Umgebung U von $(\bar{x}; \bar{\alpha}, \bar{p})$, so daß keine weiteren Zentren in U liegen. Die charakteristische Gleichung (1.7) ist analytisch in \mathbb{C} und stetig in einer Umgebung von $\bar{\alpha}$, d.h. $\alpha \in (\bar{\alpha} - \epsilon_0, \bar{\alpha} + \epsilon_0)$ mit $\epsilon_0 > 0$ geeignet, da $\lambda = \alpha \prod_{j=1}^n g'_j(\bar{x}_j(\alpha))$ stetig von α abhängt. Mit Lemma 1.6 zeigt man, daß es Konstanten $\delta, \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ gibt, so daß auf $\partial\Omega_{\epsilon, \bar{p}} \times (\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha} + \delta)$ gilt

$$\chi\left(a + i \frac{2\pi}{p}; \lambda\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0, p = \bar{p}, \lambda = \bar{\lambda},$$

wobei

$$\Omega_{\epsilon, \bar{p}} := \{(a, p) : 0 < a < \epsilon, p \in (\bar{p} - \epsilon, \bar{p} + \epsilon)\}.$$

Beachte, daß $z = \pm i \frac{2\pi}{p}$ die einzigen Lösungen von (1.7) auf der imaginären Achse sind. Wir definieren

$$H_\alpha(a, p) := \chi\left(a + i \frac{2\pi}{p}; \lambda\right).$$

$H_\alpha : \Omega_{\epsilon, \bar{p}} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion für $(a, p) \in \Omega_{\epsilon, \bar{p}}$. Die *crossing number* ist dann definiert als

$$\gamma(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) := \deg(H_{\bar{\alpha}-\delta}, \Omega_{\epsilon, \bar{p}}) - \deg(H_{\bar{\alpha}+\delta}, \Omega_{\epsilon, \bar{p}}),$$

wobei \deg den Brouwerschen Abbildungsgrad mit Bezug zu $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und $\Omega_{\epsilon, \bar{p}}$ bezeichnet, siehe [36]. Daher ist die Kreuzungszahl $\gamma(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p})$ wohldefiniert. Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} \frac{dH_\alpha}{da} &= \lambda \exp(-ar) \exp\left(-i \frac{2\pi}{p} r\right) (A + iB) \\ \frac{dH_\alpha}{dp} &= -i\lambda \exp(-ar) \exp\left(-i \frac{2\pi}{p} r\right) \frac{2\pi}{p^2} (A + iB) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A &:= r + \sum_{j=1}^n \frac{a + \mu_j}{(a + \mu_j)^2 + \frac{4\pi^2}{p^2}} \\ B &:= -\frac{2\pi}{p} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(a + \mu_j)^2 + \frac{4\pi^2}{p^2}}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
 & \det(DH_\alpha(a, p))|_{((a,p) \in H_\alpha^{-1}(0,0))} \\
 &= \lambda^2 \exp(-2ar) \frac{2\pi}{p^2} \\
 & \det \begin{pmatrix} A \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) & B \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) - A \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) \\ B \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) - A \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) & -A \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) - B \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) \end{pmatrix} \\
 &= -\lambda^2 \exp(-2ar) \frac{2\pi}{p^2} \left(\left(A \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(B \cos\left(\frac{2\pi}{p}r\right) - A \sin\left(\frac{2\pi}{p}r\right) \right)^2 \right) \\
 &= -\lambda^2 \exp(-2ar) \frac{2\pi}{p^2} (A^2 + B^2) < 0.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definition des Abbildungsgrades folgt (siehe [22, S. 65])

$$\deg(H_\alpha, \Omega_{\epsilon, \bar{p}}) = \sum_{(a,p) \in H_\alpha^{-1}(0,0)} (-1) = -\#H_\alpha^{-1}(0,0),$$

wobei $\#H_\alpha^{-1}(0,0)$ die Anzahl der Elemente der Menge $H_\alpha^{-1}(0,0)$ bezeichnet, falls $H_\alpha^{-1}(0,0)$ nur eine endliche Anzahl von Punkten in $\Omega_{\epsilon, \bar{p}}$ besitzt. Diese Eigenschaft ist aber aufgrund Lemma 1.7 gesichert, denn für $\bar{\lambda} < -\mu$ folgt, daß $H_{\bar{\alpha}-\delta}^{-1}(0,0)$ aus einem Punkt besteht und $H_{\bar{\alpha}+\delta}^{-1}(0,0) = \emptyset$ (für $\bar{\lambda} > \mu$ gilt das umgekehrte). Daher gilt

$$\gamma(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) = \begin{cases} -1 & \text{für } \bar{\alpha} < 0 \\ 1 & \text{für } \bar{\alpha} > 0 \end{cases}.$$

Sofern $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p})$ kein Zentrum ist, rechnen wir sofort nach $\gamma(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) = 0$.

Mit (GH) folgt, daß alle Zentren isoliert sind und aus der Tatsache, daß (1.1) für $\alpha = 0$ keine periodischen Lösungen besitzt, folgt, daß die Bedingung (1.24) nicht erfüllt sein kann. Somit ist S_k^r unbeschränkt und $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{p}) \in S_k^r$ genau dann, wenn $\bar{x} = 0, \bar{\alpha} = \alpha^k, \bar{p} = \frac{2\pi}{\omega_k}$. \square

Wir wenden nun Theorem 1.9 an, um die Zweige S_k^r für die skalare zyklische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \alpha g(x(t-r)), \tag{1.25}$$

$g \in C^2, g(0) = 0, g'(0) = 1$, näher zu charakterisieren (1.25) stellt einen Prototyp für die Theorie der verzögerten Differentialgleichungen dar, der ausführlich in [58, 80, 102] untersucht wurde, um nur die wichtigsten Arbeiten zu nennen. Gegenüber dem allgemeinen zyklischen Fall liefert das skalare System zusätzliche Informationen, die es ermöglichen, das globale Verhalten von (1.25) zu untersuchen. Dies ist zum einen, daß der Fall $r = 0$ keine periodischen Lösungen besitzt, zum anderen die Tatsache, daß das System (1.25) keine $\frac{2}{m}r$ -periodischen Lösungen, $m \in \mathbb{N}$, besitzt, siehe [23]. Dadurch ist es möglich, die Unbeschränktheit aller Zweige $S_k^r, k \in \mathbb{N}_0$, bei Projektion auf die α -Komponente zu zeigen.

Korollar 1.5 Sei $r > 0$ und sei g eine beschränkte, ungerade Funktion und es gelte: $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Dann existiert ein $a_k^- \in [\alpha^{k,-}, 0)$ mit $r = R_k(\alpha^{k,-})$, so daß für alle $\alpha < a_k^-$ ein $\varphi \in \mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R})$ und ein p existiert, so daß $(\varphi, \alpha, p) \in S_k^r, k \in \mathbb{N}_0$. Ist $(\varphi, \alpha, p) \in S_0^r$, so gilt für die Periode p der dazugehörigen Lösung $p \in (2r, 4r)$. Gilt $(\varphi, \alpha, p) \in S_k^r$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gilt für die Periode p

$$p \in \left(\frac{r}{k + \frac{1}{2}}, \frac{r}{k + \frac{1}{4}} \right).$$

2. Für jede stationäre Lösung \bar{x} von (1.25) gelte $\alpha g'(\bar{x}) \neq 1$. Dann existiert ein $a_k^+ \in (0, \alpha^{k,+})$ mit $r = R_k(\alpha^{k,+})$, so daß für alle $\alpha > a_k^+$ ein $\varphi \in \mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R})$ und ein p existiert, so daß $(\varphi, \alpha, p) \in S_k^r, k \in \mathbb{N}_0$. Ist $(\varphi, \alpha, p) \in S_k^r$, so gilt für die Periode p der dazugehörigen Lösung

$$p \in \left(\frac{r}{k + 1}, \frac{r}{k + \frac{3}{4}} \right).$$

Für jede p -periodische Lösung $x(\cdot)$ von (1.25) gilt: $x(t + \frac{p}{2}) = -x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Symmetrieeigenschaft aller periodischen Lösungen beweist [81]. Aus Theorem 1.9 folgt sowohl für negative als auch positive Rückkopplungen die Unbeschränktheit aller Zusammenhangskomponenten S_k^r . Aus der monotonen Rückkopplungsbedingung und der Beschränktheit von g folgt die Existenz einer invarianten Menge von $C(\mathbb{K})$, in der alle periodischen Lösungen liegen, die zur Komponente S_k^r gehören. Somit sind die Amplituden dieser periodischen Lösungen beschränkt (in Abhängigkeit von α).

Wir zeigen nun, daß (1.25) keine periodische Lösung mit Periode $4r$ besitzt. Unter der Annahme, daß eine solche Lösung existiert, muß diese das folgende System erfüllen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + \alpha g(y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - \alpha g(x(t)) \end{aligned}$$

mit $y(t) = x(t - r)$. Das obige planare System gewöhnlicher Differentialgleichung besitzt nach dem Bendixson-Kriterium keine periodischen Lösungen. Daher besitzt das skalare System (1.25) keine $4r$ -periodische Lösung. Die Aussagen über die übrigen Perioden gewinnt man aus Resultaten in [51] und den Schranken über die Perioden aus [23]. Folglich sind die S_k^r unbeschränkt in α . Beachte, daß für $\alpha = 0$ keine periodische Lösungen existieren. \square

Bemerkung 1.16 Ähnlich zu Theorem 1.2 zeigt man, daß es ein Intervall $I_\alpha = (a^-, a^+)$ mit $0 \in I$ gibt, so daß System (1.25) für alle $\alpha \in I$ global asymptotisch stabil ist.

Globale Hopf-Verzweigung zum Parameter r Zu Beginn des Abschnitts haben wir skizziert, warum ein Resultat über die globale Hopf-Verzweigung mit Parameter r in allgemeinen monoton zyklischen Systemen schwierig zu erhalten ist. Schränkt man sich auf den skalaren Fall ein, so findet man in [51, 80] eine komplette Analyse von (1.25) unter Berücksichtigung des Parameters r . S_k^α bezeichne für $|\alpha| > \mu$ die entsprechende Zusammenhangskomponente von \bar{S}^α , die den Hopf-Verzweigungspunkt $(\bar{x} = 0, \bar{r} = R_k(\alpha), \bar{p} = \frac{2\pi}{\omega})$ enthält.

Theorem 1.10 *Es gelten folgende Voraussetzungen*

- *Es gibt ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in \text{int}(I)$, so daß $(\alpha g)(I) \subset I$.*
- *Für alle \bar{x} mit $\alpha g(\bar{x}) = \bar{x}$ gilt $\alpha g'(\bar{x}) \neq 1$.*

Dann gilt

1. *Für $\alpha < -1$, $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $\tilde{r}_k(\alpha) \in (0, R_k(\alpha)]$, so daß für alle $r \geq \tilde{r}_k(\alpha)$ ein $\varphi \in \mathcal{C}$ und $p \in \left(\frac{r}{k+\frac{1}{2}}, \frac{r}{k+\frac{1}{4}}\right)$, so daß $(\varphi, r, p) \in S_k^\alpha$. Außerdem erfüllt die dazugehörige periodische Lösung $x(t)$ mit $x_{[-r,0]} = \varphi$ die Bedingung $x(t) \in \text{int}(I)$.*
2. *Für $\alpha > 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $\tilde{r}_k(\alpha) \in (0, R_k(\alpha)]$, so daß für alle $r \geq \tilde{r}_k(\alpha)$ ein $\varphi \in \mathcal{C}$ und $p \in \left(\frac{r}{k+1}, \frac{r}{k+\frac{3}{4}}\right)$, so daß $(\varphi, r, p) \in S_k^\alpha$. Darüberhinaus gilt für die dazugehörige periodische Lösung $x(t)$ mit $x_{[-r,0]} = \varphi$ die Bedingung $x(t) \in \text{int}(I)$.*

Beweis: Siehe [51]. □

Bemerkung 1.17 Beachte, daß die Voraussetzung an die Rückkopplung sehr allgemein ist, andererseits kann man die Komponente S_0^α für negative Rückkopplung nicht untersuchen. Setzt man eine strikte Rückkopplung voraus, so erhält man die Unbeschränktheit aller Projektionen von S_k^α auf die α -Komponente, siehe [51].

Auf das obige Theorem kann man im Falle eines zyklischen Systems identischer Nichtlinearitäten zurückgreifen. Es sei die folgende Situation gegeben

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -x_i(t) + \alpha g(x_{i+1}(t-r)) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= -x_n(t) + \alpha g(x_1(t-r)) \end{aligned} \tag{1.26}$$

mit $g \in C^2$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ und $xg(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. System (1.26) modelliert beispielsweise die rekurrente Aktivität eine Kette von n identischen Neuronen.

Die Menge $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_n\}$ ist eine invariante Menge für System (1.26). Die Dynamik innerhalb dieser Menge wird durch die skalare Rückkopplungsgleichung (1.25) bestimmt. Durch Anwenden von Theorem 1.10 erhält man Informationen über das globale Verhalten von (1.26) innerhalb dieser Menge. Die zu untersuchenden periodischen Lösungen sind alle synchron, d.h. alle Komponenten sind in Phase. Setzt man an (1.26) zusätzlich voraus, daß g eine ungerade Funktion ist, so lassen sich weitere invariante Mengen bestimmen, die periodische Lösungen mit fester Phasendifferenz (*phase-locked*) implizieren. [21] untersucht solche Lösungen und die verbindenden Orbits zwischen solchen Lösungen.

1.5 Numerische Resultate

In diesem Kapitel demonstrieren wir die bisher erzielten analytischen Resultate anhand von numerischen Ergebnissen. Außerdem liefern die numerischen Untersuchungen weitergehende Einsichten in das dynamische Verhalten der zyklischen Systeme, wo die Theorie keine genaueren Aussagen machen kann. Als Beispiel sei der Fall genannt, daß alle Nichtlinearitäten g_i unbeschränkt sind.

Für die numerische Analysis zyklischer Systeme der Form (1.1) haben wir sowohl die Methode aus [31], die auch für höher-dimensionale Systeme eingesetzt werden kann, als auch auf das Paket DDE-Biftool [34] zurückgegriffen, welches die Methoden aus [35] in der MATLAB-Programmierungsumgebung realisiert. Beide Methoden werden in Kapitel 3 vorgestellt.

Wir untersuchen mit den numerischen Methoden einerseits zyklische Systeme der Dimension $n = 3$, andererseits präsentieren wir Ergebnisse zum skalaren Fall. Zu Beginn betrachten wir das zyklische System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\mu x_1(t) + g_2(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu x_2(t) + g_3(x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= -\mu x_3(t) + \alpha g_1(x_1(t-r)).\end{aligned}\tag{1.27}$$

Wir wählen die Parameter und Nichtlinearitäten wie folgt

$$\mu = 1.0 \quad r = 4.0 \quad g(x) = g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = \frac{1}{1 + \exp(-4x)} - \frac{1}{2}.$$

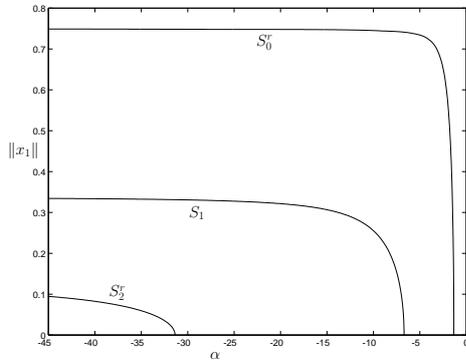
g ist eine streng monoton wachsende, beschränkte Funktion, die bei $\theta = 0$ ihren einzigen Wendepunkt besitzt. Wir wollen das Verzweigungsverhalten des Systems (1.27) in Abhängigkeit der Gesamtrückkopplung α untersuchen. Theorem 1.4 impliziert die Existenz zweier streng monotoner Folgen $(\alpha^{k,-})_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(\alpha^{k,+})_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Hopf-Verzweigungspunkten. Mit Korollar 1.3 kann man die Verzweigungsrichtung und die Stabilität der abzweigenden periodischen Lösungen untersuchen ($g'''(0) = -8$). Im Falle der negativen Rückkopplung zweigt für $\alpha < \alpha^{k,-}$ eine periodische Lösung von der trivialen Lösung $\bar{x} = 0$ ab. Dabei liefert der von $\alpha^{0,-}$ abzweigende Ast stabile langsam oszillierende periodische Lösungen und die übrigen Zweige bestehen aus instabilen periodischen Lösungen. Für den Fall positiver Rückkopplungen existieren die kleinen periodischen Lösungen für $\alpha > \alpha^{k,+}$, wobei diese instabil sind. Die Unbeschränktheit der Zweige periodischer Lösungen, die aus den Hopf-Singularitäten $\alpha^{k,\pm}$ entstehen, folgt aus Theorem 1.9. Wir bestimmen

$$\alpha^{0,-} = -1.3356 \quad \alpha^{1,-} = -6.6950 \quad \alpha^{2,-} = -31.3643$$

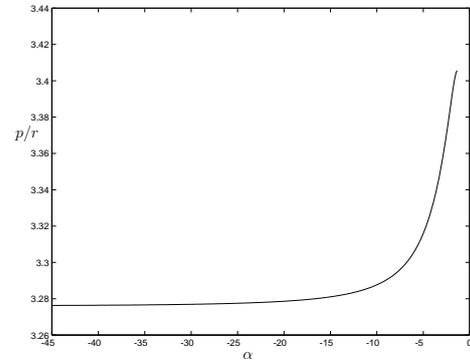
und erhalten durch die numerischen Methoden das Verzweigungsdiagramm 1.3. Für den Fall positiver Rückkopplung gilt

$$\alpha^{0,+} = 2.7728 \quad \alpha^{1,+} = 15.3333.$$

Die numerischen Ergebnisse sind in Abbildung 1.4 dargestellt. Die Zweige S_k^* sind unbeschränkt in α .



(a) Die Zweige periodischer Lösungen S_0^r, S_1^r und S_2^r .



(b) Die Perioden p des Zweiges periodischer Lösungen S_0^r . Die periodischen Lösungen sind langsam oszillierend, d.h. $p > 2r$.

Abbildung 1.3: Das System (1.27) mit negativer Rückkopplung und $g(x) = \frac{1}{1+\exp(-4x)} - \frac{1}{2}$.

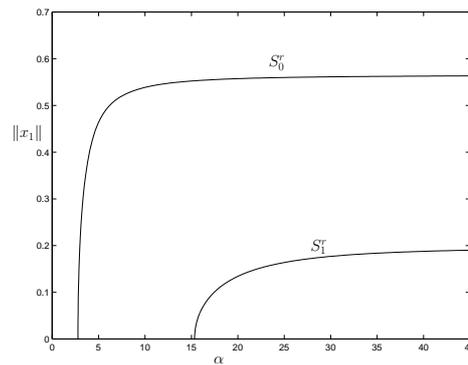
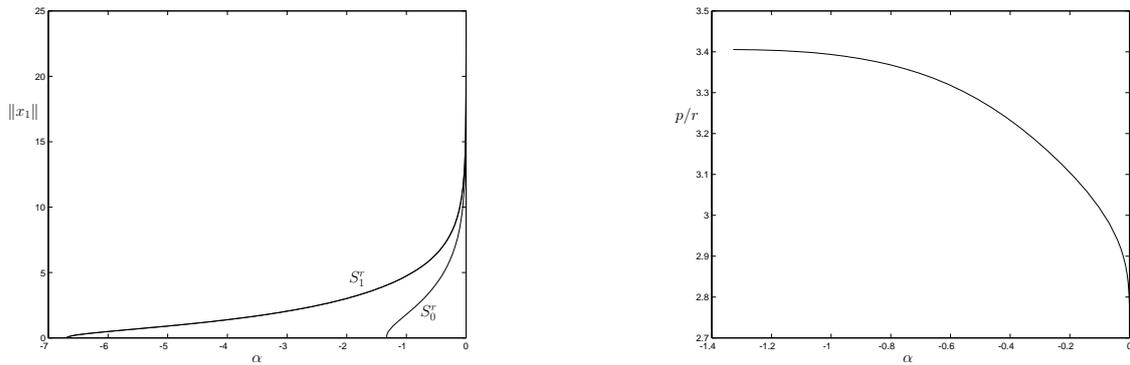


Abbildung 1.4: Die Zweige periodischer Lösungen S_0^r und S_1^r des Systems (1.27) mit positiver Rückkopplung und $g(x) = \frac{1}{1+\exp(-4x)} - \frac{1}{2}$.

Wählen wir die Nichtlinearität $g(x) = \sinh(x)$ (bei ansonsten gleicher Parameterwahl), so können wir unsere Resultate über das globale Verhalten des Systems (1.27) nicht anwenden, da g unbeschränkt ist. Die Ergebnisse über die Existenz der Hopf-Verzweigungspunkte $\alpha^{k\pm}$ hingegen sind analog zum vorherigen Fall übertragbar. Es verändern sich nur die Aussagen über die Verzweigungsrichtung, da $g'''(0) = 1 > 0$, siehe Korollar 1.3. Man beachte, daß sich durch das entgegengesetzte Vorzeichen der dritten Ableitung, die Verzweigungsrichtungen umkehren und alle abzweigenden periodischen Lösungen instabil sind. Die numerische Berechnung der Zweige periodischer Lösungen S_k^r zeigt, daß alle Zweige unbeschränkt in der Amplitude sind, siehe Abbildung 1.5. Für den Parameter α gilt $\alpha \rightarrow \mu = 1$. Der Zweig S_0^r besteht aus langsam oszillierenden periodischen Lösungen. Abschließend wollen wir noch ein zyklisches System bei



(a) Die Zweige periodischer Lösungen S_0^r und S_1^r .

(b) Die Perioden p des Zweiges S_0^r . Die Lösungen sind langsam oszillierend.

Abbildung 1.5: Das zyklische System (1.27) bei negativer Rückkopplung mit $g(x) = \sinh(x)$.

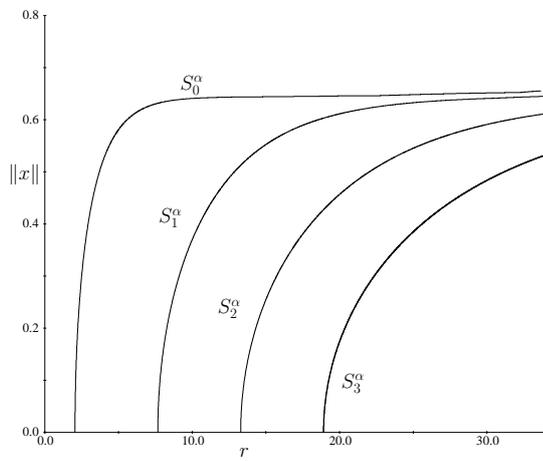
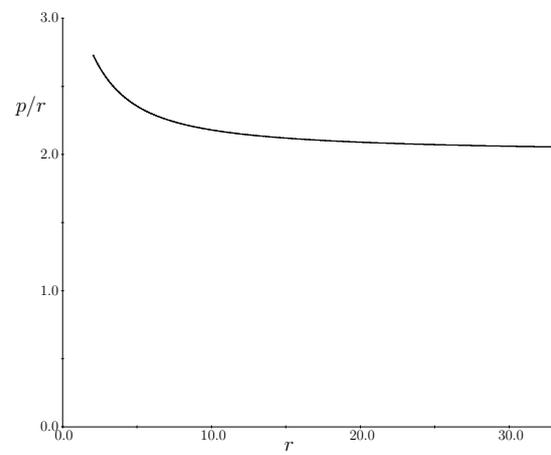
Variation der Zeitverzögerung r untersuchen. Wir betrachten die skalare Differentialgleichung mit negativer Rückkopplung

$$\dot{x}(t) = -x(t) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 + \exp(-4x(t-r))} - \frac{1}{2} \right), \quad (1.28)$$

also gilt $\mu_1 = 1, \alpha = -1.5$. Für $r = R_k(\alpha), k \in \mathbb{N}_0$ durchläuft das System (1.28) eine superkritische Hopf-Verzweigung, d.h. für $r > R_k(\alpha)$ zweigt ein Ast periodischer Lösungen von der trivialen Lösung $\bar{x} = 0$ ab. Diese Lösungen sind für $k = 0$ stabil und für $k > 0$ instabil. [51, 80] zeigen die globale Existenz dieser Zweige, wobei der Zweig, der von der Hopf-Singularität $r = R_0(\alpha)$ abzweigt, aus langsam oszillierenden periodischen Lösungen besteht, siehe auch Theorem 1.10. Man berechnet

$$R_0(\alpha) = 2.0577 \quad R_1(\alpha) = 7.6778 \quad R_2(\alpha) = 13.2974 \quad R_3(\alpha) = 18.9172 .$$

Aus Theorem 1.10 und [51] erhält man noch die zusätzlichen Informationen, daß für alle p -periodischen Lösungen $y(\cdot)$ des Zweiges S_k^α gilt: $|y(t)| < 0.644$ und $p \in \left(\frac{r}{k+\frac{1}{2}}, \frac{r}{k+\frac{1}{4}} \right), k \in \mathbb{N}$. [51, 80] zeigen die Unbeschränktheit der r -Komponente des Zweiges langsam oszillierender periodischer Lösungen S_0^α .

(a) Die Zweige S_k^α (b) Die Perioden p des Zweiges S_0^α . Alle Lösungen sind langsam oszillierend.Abbildung 1.6: Die skalare negative Rückkopplungsgleichung (1.28) bei Variation der Zeitverzögerung r .

2 Ein planares System mit Zeitverzögerung und Selbstkopplungen

Bisher haben wir uns mit der Dynamik eines von der Kopplungsstruktur sehr einfachen Differentialgleichungsmodells mit Zeitverzögerung beschäftigt. Wir haben gesehen, daß man unter geeigneten Voraussetzungen wichtige Aspekte der dynamischen Eigenschaften eines zyklischen bzw. monoton zyklischen (unidirektionalen) Systems untersuchen kann. Insbesondere haben wir die Bedeutung der periodischen Lösungen, die aus einer Hopf-Verzweigung entstehen, hervorgehoben.

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Lösungseigenschaften verändern, wenn wir die unidirektionale Kopplung der Gleichungen stören. Wir beschränken uns dabei auf den planaren Fall und führen sogenannte Selbstkopplungen ein. Wir untersuchen eine Klasse von planaren Systemen, die mit dem Neuronenmodell in Abschnitt 1.2 eng verwandt ist. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß ein Neuron sich exzitatorisch und das andere inhibitorisch verhält. Das Modell sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned}\tau \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + q_{11}f(u_1(t-T)) - q_{12}u_2(t-T) + e_1 \\ \tau \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + q_{21}f(u_1(t-T)) - q_{22}u_2(t-T) + e_2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dabei haben die Variablen u_i und die Konstanten folgende physiologische Bedeutungen (siehe auch Kapitel 1.1)

- $u_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet das gesamte postsynaptische Potential des exzitatorischen bzw. inhibitorischen Neurons.
- $\tau > 0$ ist eine Zeitkonstante, die die Dynamikeigenschaften der Zellmembran beschreibt.
- $q_{ij} \geq 0$ entspricht der Kopplungsstärke zwischen dem j -ten Neuron zum i -ten Neuron.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Übergangsfunktion, die die Generierung von Aktivität des exzitatorischen Neurons in Abhängigkeit seines Gesamtpotentials u_1 beschreibt. Die Funktion f ist eine glatte, monoton wachsende Funktion, die einen eindeutigen Wendepunkt für $u_1 = \theta$ besitzt. Um ein möglichst komplettes Verzweigungsdiagramm präsentieren zu können, wählen wir für die Transferfunktion des inhibitorischen Neurons die Identität.
- $T > 0$ ist eine Zeitverzögerung, die die synaptische, axonale und dendritische Ausbreitungszeit berücksichtigt.
- e_1, e_2 sind äußere Anregungen des exzitatorischen bzw. inhibitorischen Neurons, die in der Zeit konstant sind.

Das System (2.1) ist ein Spezialfall des allgemeinen Modells

$$\begin{aligned}\tau_1 \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + q_{11}f_1(u_1(t-T)) - q_{12}f_2(u_2(t-T)) + e_1 \\ \tau_2 \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + q_{21}f_1(u_1(t-T)) - q_{22}f_2(u_2(t-T)) + e_2\end{aligned}\quad (2.2)$$

mit $\tau = \tau_1 = \tau_2$, $f_1 = f$ und $f_2 = id_{\mathbb{R}}$. Systeme des Typs (2.2) werden benutzt, um das gegenseitige Beeinflussen von exzitatorischen und inhibitorischen Neuronen zu untersuchen. Zum Beispiel behandelt [25] den Fall $T = 0$ und [2] den Fall $T \neq 0$.

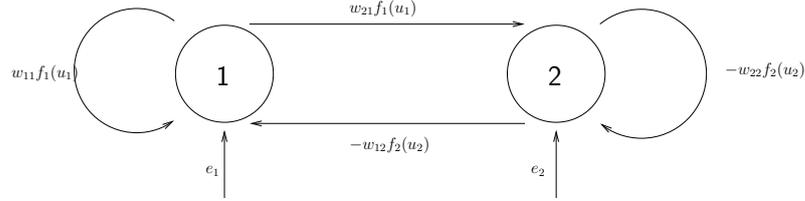


Abbildung 2.1: Kopplung eines exzitatorischen mit einem inhibitorischen Neuron

Vernachlässigt man die Signallaufzeiten ($T = 0$), so beweist [25] für System (2.2) die Existenz mehrerer stabiler stationärer und periodischer Lösungen. [68] untersucht für $f_1 = f_2$ das Verzweigungsverhalten für die Parameter e_1, e_2 und in [48] wird für (2.1) ein komplettes Verzweigungsdiagramm unter Berücksichtigung der Parameter e_1 und q_{12} mit Hilfe analytischer und numerischer Methoden gewonnen.

In der Regel ist die Behandlung des verzögerten Falls $T \neq 0$ schwierig, da - wie schon einige Male erwähnt - der Phasenraum $C([-T, 0], \mathbb{R}^2)$ unendlich-dimensional und die charakteristische Gleichung von transzendenter Natur ist. Die meisten Veröffentlichungen behandeln daher Spezialfälle von (2.2) wie den Fall zweier identischer Transferfunktionen $f_1 = f_2$ oder den Fall ohne Selbstkopplung $q_{11} = q_{22} = 0$, siehe z.B. [2, 7, 53, 54, 87, 89, 98, 104, 106] und die dort zitierten Referenzen. Die ersten Resultate über die Stabilität stationärer Lösungen und die globale Existenz periodischer Lösungen von (2.2) für $q_{11} = q_{22} = 0$ und $T > 0$ findet man in [2], siehe auch [7, 53, 89, 98]. Beachte, daß die dort getroffenen Aussagen über die globale Existenz periodischer Lösungen für (2.1) nicht greifen, da $f_2 = id_{\mathbb{R}}$ unbeschränkt ist. In [7, 98, 104] werden Bedingungen für die Hopf-Verzweigung des Systems ohne Selbstkopplung angegeben, [54, 87, 104, 106] geben unter den Voraussetzungen $f = f_1 = f_2$, $f(0) = f''(0) = 0$, $e_1 = e_2 = 0$ Bedingungen für eine superkritische Hopf-Verzweigung an. Wir haben den Fall $q_{11} = q_{22} = 0$ in Kapitel 1 ausführlich betrachtet. [87] untersucht eine Codimension 2-Verzweigung für das System (2.2) unter den Voraussetzungen $f_1 = f_2 = \tanh(x)$, $e_1 = e_2 = 0$. Dabei studieren sie das Zusammentreffen einer Hopf-Singularität mit einer Pitchfork-Verzweigung. [37] analysiert die gleiche Singularität unter den Voraussetzungen $f_1 = f_2$ mit $f(0) = f''(0) = 0$.

An dieser Stelle möchten wir nun darstellen, welche dynamischen Eigenschaften (2.1) besitzt, wenn man auf die Selbstkopplungsterme q_{11} und q_{22} verzichtet. Zusätzlich setzen wir voraus, daß f beschränkt sei. Für unsere Untersuchungen können wir auf die Ergebnisse aus Kapitel 1 zurückgreifen. Ohne den späteren Untersuchungen vorweggreifen zu wollen, kann man mit dem Vorgehen aus Abschnitt 1.1 ein zyklisches System in der Normalform (1.1) herleiten. Lemma 1.1 liefert die Existenz eines Equilibriums $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \mathbb{R}^2$ und somit können wir ein zyklisches System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\mu x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu x_2(t) + \alpha_1 g_1(x_1(t-r))\end{aligned}\quad (2.3)$$

mit $\mu = \tau^{-1}$, $r = 2T$, $\alpha_1 = -\frac{q_{21}}{\tau} f'(\bar{u}_1)$, $\alpha_2 = \frac{q_{12}}{\tau}$ und $g_1(x) := \frac{f(\bar{u}_1+x) - f(\bar{u}_1)}{f'(\bar{u}_1)}$ herleiten, wobei die Gesamtückkopplung $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 < 0$ als Verzweigungsparameter dient. Mit Theorem 1.4 und den Ergebnissen über die Verzweigungsrichtung aus Abschnitt 1.2.3 folgt die Existenz einer Folge von superkritischen Hopf-Verzweigungspunkten $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, an denen lokal Zweige periodischer Lösungen von der trivialen Lösung $\bar{x} = 0$ abzweigen. Die Resultate über die globale Hopf-Verzweigung (Theorem 1.9) liefern die globale Existenz dieser Zweige, insbesondere folgt die Existenz eines globalen Zweiges langsam oszillierender periodischer Lösungen, der aus $(\alpha = \alpha^0, \bar{x} = 0)$ verzweigt, siehe Abbildung 2.2. Betrachtet man den unverzögerten Fall $r = 0$, so kann man sehr einfach beweisen, daß die stationäre Lösung für alle $\alpha > 0$ lokal asymptotisch stabil ist, siehe auch Bemerkung 1.4. Mit dem Dulac-Bendixson-Kriterium (siehe z.B. [76]) schließt man auf die Nicht-Existenz periodischer Lösungen und mit [46, Kapitel 6] folgt sogar die globale Stabilität der stationären Lösung $\bar{x} = 0$.

Fügt man nun dem Modell die Selbstkopplungsterme q_{11}, q_{22} hinzu, können die Methoden aus Kapitel 1 nicht mehr angewendet werden. Insbesondere ist der Nachweis einer globalen periodischen Lösung mit Hilfe eines ejektiven Fixpunkttheorems (wie in Kapitel 1.3) nicht möglich. Die Begründung dafür liegt darin, daß man keine Menge K innerhalb des Phasenraums finden kann, auf der eine selbstabbildender, kompakter Operator - im Sinne einer Poincaré Abbildung - definiert werden kann. Wir können aber mit Mitteln der Verzweigungstheorie die Dynamik lokal untersuchen und so auf die Existenz periodischer und homokliner Lösungen schließen. Genauer formuliert: Wir wollen eine Codimension 2-Verzweigung von (2.1) im folgenden detaillierter untersuchen, nämlich eine Bogdanov-Takens-Verzweigung, die durch das Vorhandensein einer doppelten Lösung $s = 0$ der dazugehörigen charakteristischen Gleichung charakterisiert ist. Dadurch ist es möglich, die lokale Existenz homokliner und periodischer Lösungen zu beweisen. Weitere Resultate über periodische Lösungen kann man über Untersuchungen von Hopf-Singularitäten erhalten. Durch die Behandlung einer weiteren Codimension 2-Verzweigung unter gewissen Symmetrievoraussetzungen kann man nicht nur auf die Existenz periodischer Lösungen schließen, die von einer stationären Lösung abzweigen, sondern auch das globale Verzweigen periodischer Lösungen bestimmen, sogenannter großer periodischer Lösungen. Diese Lösungen heißen groß, da sie unter der Projektion auf die $(x_1(t), x_2(t))$ -Ebene mehrere stationäre Lösungen umkreisen. Im allgemeinen sind diese Resultate mit globalen Methoden schwer zu erhalten. Dies gilt auch für den unverzögerten Fall (siehe [73]). Ergebnisse für den unverzögerten Fall $r = 0$, die in einer ähnlichen Vorgehensweise wie gerade skizziert gewonnen werden, findet man in [48, 73]. Teile der oben dargestellten Untersuchungen sind zur Veröffentlichung eingereicht [49].

Um die Anzahl der Parameter in System (2.1) zu reduzieren, führen wir folgende Transformationen durch:

$$\begin{aligned} u(t) &:= u_1(\tau t) - \theta \\ v(t) &:= \frac{1}{f'(\theta)} \left(u_2(\tau t) - \frac{e_2 + f(\theta)}{1 + q_{22}} \right) \end{aligned}$$

und erhalten das System

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u(t) + q_{11}g(u(t-r)) - Qv(t-r) + E \\ \dot{v}(t) &= -v(t) + g(u(t-r) - q_2v(t-r)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

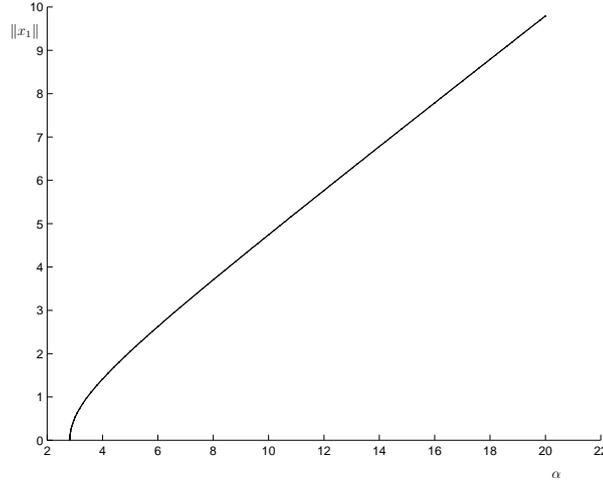


Abbildung 2.2: Verzweigungsdiagramm von (2.3) mit $\alpha_2 = 1, \mu = 1, r = 1, g(x) = \frac{1}{1+\exp(-4x)} - \frac{1}{2}$. Für $\alpha = \alpha_1 = \alpha^0 = 2.707$ zweigt ein Ast langsam oszillierender periodischer Lösungen von der trivialen stationären Lösung $\bar{x} = 0$ ab.

wobei

$$r := \frac{T}{\tau}, \quad q_1 := q_{11}f'(\theta), \quad q_2 := q_{22},$$

$$Q := q_{12}q_{21}f'(\theta),$$

$$E := e_1 - \frac{q_{12}}{1+q_{22}}e_2 - \left[\theta - \left(q_{11} - \frac{q_{12}}{1+q_{22}} \right) f(\theta) \right] \quad \text{und}$$

$$g(u) := \frac{f(u+\theta) - f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

Die Bedeutung der neuen Parameter ist offensichtlich; so beschreibt Q das gesamte negative Feedback des Systems und E den gesamten externen Einfluß auf das exzitatorische Neuron. Beachte, daß für $E \equiv 0$ der Parameter Q mit dem Parameter $-\alpha$ aus Kapitel 1 übereinstimmt. Für das zu untersuchende System (2.4) setzen wir voraus, daß es folgende Annahmen erfüllt:

(H1) $r \geq 0$,

(H2) $q_1, q_2, Q \geq 0$ und $E \in \mathbb{R}$.

(H3) $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(0) = 0, g'(0) = 1$, $\lim_{|u| \rightarrow \infty} g'(u) = 0$ und $ug''(u) < 0$ für alle $u \neq 0$.

Typische Transferfunktionen g , die die Bedingung (H3) erfüllen, sind beispielsweise $g(x) = \arctan x$, $g(x) = \tanh(x)$ oder $g(x) = \frac{1}{1+\exp(-4x)} - \frac{1}{2}$. In der Literatur nennt man diese Funktionen auch sigmoid. Im folgenden wollen wir das System (2.4) eingehend, besonders in Abhängigkeit der Parameter Q und E , untersuchen. Dabei stellen wir lokale Stabilitätsuntersuchungen und geben die verschiedenen möglichen Verzweigungsdiagramme an. Anschließend beschäftigen wir uns mit einer besonderen Parameterkonstellation, unter der das System ein Bogdanov-Takens-Verzweigung durchläuft. Dadurch ist es möglich, auf die Existenz von Kurven homokliner Lösungen in der (Q, E) -Ebene zu schließen. Ebenso untersuchen wir (2.4) in

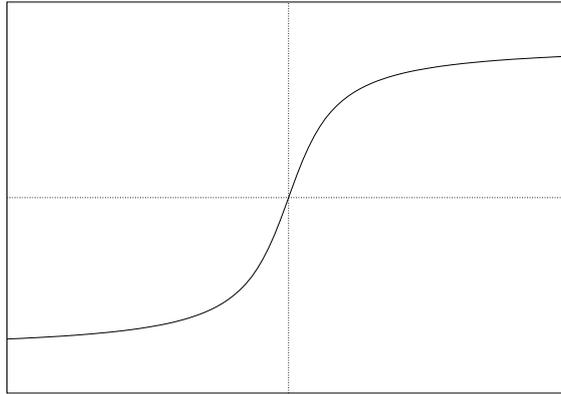


Abbildung 2.3: Eine sigmoide Transferfunktion g

einer degenerierten Bogdanov-Takens Situation unter gewissen Symmetriebedingungen. Damit ist es möglich, periodische Lösungen zu finden, die bei der Projektion in die Ebene drei stationäre Lösungen umlaufen. Auch kann man sogenannte doppelte homokline Lösungen (*eight figure*) finden. Zum Abschluß wollen wir die Ergebnisse durch numerische Resultate verdeutlichen und klären, was mit den lokalen homoklinen Lösungen geschieht, wenn man sie in der (Q, E) -Parameterebene durch numerische Methoden verfolgt.

Zu Beginn wollen wir auf elementare Eigenschaften von (2.4) eingehen. Wir folgen dabei in der Notation [61]. Für alle Anfangswerte $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{C}$ besitzt das System (2.4) eine eindeutige Lösung für alle $t \geq -r$ (siehe z.B. [61]). Standardresultate aus [61] liefern die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern Q, E, q_1, q_2 . [60] zeigt die stetige Abhängigkeit der Lösungen von der Zeitverzögerung r . Im folgenden beschäftigen wir uns mit Kriterien für die Beschränktheit der Lösungen von (2.4).

Lemma 2.1 *Sei g beschränkt, $r > 0$ und $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$, wobei ω_1 die eindeutige Lösung der Gleichung*

$$\omega = -\tan(\omega r)$$

im Intervall $(\frac{\pi}{2r}, \frac{\pi}{r})$ ist. Dann ist die Lösung von (2.4) für alle Anfangswerte $\Phi \in \mathcal{C}$ beschränkt. Für $r = 0$ ist jede Lösung von (2.4) beschränkt.

Beweis: Betrachte die zweite Gleichung von System (2.4) als lineare inhomogene Differentialgleichung mit Zeitverzögerung, also

$$\dot{v}(t) = -v(t) - q_2 v(t - r) + h(t)$$

mit

$$h(t) := g(u(t - r)).$$

h ist eine beschränkte Funktion mit $\sup |h(t)| < M$. Für das homogene System zeigt man mit Standardmethoden, daß für $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$ die stationäre Lösung (global) asymptotisch stabil ist, falls $r > 0$. Ist $r = 0$, so ist das homogene System für alle $q_2 \geq 0$ asymptotisch stabil. Nach Lemma 6.5.3 aus [61] folgt somit die Existenz von positiven Konstanten c, C, γ , so daß

folgende Abschätzungen für den erzeugten Halbfluß $T(t)$ bzw. die Fundamentalmatrix $X(t, s)$ des homogenen Systems gelten

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &\leq c \exp(-\gamma t) & t \geq 0 \\ \|X(t, s)\| &\leq C \exp(-\gamma(t-s)) & t \geq s. \end{aligned}$$

Daher folgt mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel (siehe Gleichung (6.2.2) in [61]) für die inhomogene Gleichung für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |v(t, \Phi)| &\leq \|T(t)\| |v(0)| + \int_0^t \|X(t, s)\| |h(s)| ds \\ &\leq c \exp(-\gamma t) |v(0)| + MC \exp(-\gamma t) \int_0^t \exp(\gamma s) ds \\ &= c \exp(-\gamma t) |v(0)| + \frac{MC}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma t)). \end{aligned}$$

Folglich ist v für alle $t \geq 0$ beschränkt. Durch Anwenden dieser Eigenschaft auf

$$u(t) = \exp(-t)u(0) + \exp(-t) \int_0^t \exp(s) [q_1 g(u(t-r)) - Qv(t-r) + E] ds$$

zeigt man unter Berücksichtigung der Beschränktheit von g und v , daß auch die u -Komponente beschränkt ist. □

Bemerkung 2.1 Für $q_2 \geq \sqrt{1 + \omega_1^2}$ besitzt das Anfangswertproblem (2.4) mit Anfangswert $\Phi \in \mathcal{C}$ im allgemeinen keine beschränkte Lösung.

2.1 Stationäre Lösungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir (2.4) auf die Existenz stationärer Lösungen. Es sollen Kriterien für die Parameter Q und E angegeben werden, die die Anzahl der stationären Lösungen von (2.4) bestimmen. Anschließend soll die Stabilität dieser Lösungen behandelt werden. Jede stationäre Lösung (\bar{u}, \bar{v}) von (2.4) erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} E &= \bar{u} - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1} \right) g(\bar{u}) \\ \bar{v} &= \frac{g(\bar{u})}{q_2 + 1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir definieren die glatte, unbeschränkte Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(u) := u - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1} \right) g(u) + E.$$

Jede Nullstelle \bar{u} von h korrespondiert zu einer stationären Lösung (\bar{u}, \bar{v}) von (2.4) mit $\bar{v} = \frac{g(\bar{u})}{q_2 + 1}$. Als Ableitung von h bestimmt man

$$h'(u) = 1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1} \right) g'(u). \tag{2.6}$$

Für $1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2+1}\right) \geq 0$ ist h streng monoton wachsend und folglich besitzt h genau eine Nullstelle \hat{u} , da $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} h(u) = \pm\infty$. Die obige Bedingung ist äquivalent zu

$$Q \geq (1 + q_2)(q_1 - 1) =: Q_{\text{csp}}.$$

Lemma 2.2

1. Für $Q \geq Q_{\text{csp}}$ besitzt (2.4) für alle $E \in \mathbb{R}$ genau eine stationäre Lösung.
2. Sei $Q < Q_{\text{csp}}$. Dann gibt es reelle Zahlen $E_2 < E_1$ derart, so daß gilt:
 - a) Für $E \in (-\infty, E_2) \cup (E_1, \infty)$ besitzt (2.4) genau eine stationäre Lösung.
 - b) Für $E \in \{E_2, E_1\}$ besitzt (2.4) genau zwei stationäre Lösungen.
 - c) Für $E \in (E_2, E_1)$ besitzt (2.4) genau drei stationäre Lösungen.

Beweis: Der erste Teil der Aussage wurde im vorherigen gezeigt. Bleibt also der zweite Teil. Sei $0 \leq Q < Q_{\text{csp}}$. Dann gibt es \hat{u}_1, \hat{u}_2 mit $\hat{u}_1 < 0 < \hat{u}_2$, so daß $h'(\hat{u}_i) = 0$, $i = 1, 2$. Definiere E_i durch

$$E_i := \hat{u}_i - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1}\right) g(\hat{u}_i).$$

$h(\hat{u}_1) = E_1 - E$ ist das eindeutige lokale Maximum, $h(\hat{u}_2) = E_2 - E$ das eindeutige lokale Minimum von h . Dies impliziert $E_2 < E_1$. Für $E \in (E_2, E_1)$ gilt $h(\hat{u}_1) > 0$ und $h(\hat{u}_2) < 0$. Also besitzt h genau drei Nullstellen. Wählt man $E \notin [E_2, E_1]$, dann haben beide Extrema das gleiche Vorzeichen, und somit besitzt h genau eine Nullstelle. Im Grenzfall $E = \{E_2, E_1\}$ gilt entweder $h(\hat{u}_1) = 0$ oder $h(\hat{u}_2) = 0$. Daher besitzt h dann genau zwei Nullstellen. \square

Bemerkung 2.2 Die beiden Lösungen \hat{u}_1, \hat{u}_2 der Gleichung $1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2+1}\right) g'(u) = 0$ hängen stetig differenzierbar vom Parameter Q für $Q < Q_{\text{csp}}$ ab. Es gilt $\lim_{Q \rightarrow Q_{\text{csp}}} \hat{u}_i(Q) = 0$. Aus den Glattheitseigenschaften der \hat{u}_i folgt die stetige Differenzierbarkeit der E_i vom Parameter $Q < Q_{\text{csp}}$. Es gilt

$$\lim_{Q \rightarrow Q_{\text{csp}}} E_1(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q_{\text{csp}}} E_2(Q) = 0.$$

Außerdem gilt für die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dQ} &= \frac{d\hat{u}_i}{dQ} \left[1 - g'(\hat{u}_i) \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1} \right) \right] + \frac{g(\hat{u}_i)}{q_2 + 1} \\ &= \frac{g(\hat{u}_i)}{q_2 + 1} \end{aligned}$$

und

$$\frac{d^2 E_i}{dQ^2} = \frac{d\hat{u}_i}{dQ} \frac{g'(\hat{u}_i(Q))}{q_2 + 1}.$$

Da $\hat{u}_1(Q) < 0 < \hat{u}_2(Q)$ und \hat{u}_1 streng monoton wachsend bzw. \hat{u}_2 streng monoton fallend ist, ist E_1 eine streng monoton fallende und konvexe Funktion bzw. E_2 eine streng monoton wachsende und konkave Funktion. Für $Q = Q_{\text{csp}}$ haben die Kurven E_i die gemeinsame Tangente $E = 0$. Später wird man sehen, daß die Kurven $E_1(Q), E_2(Q)$ Kurven von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten für System (2.4) darstellen, und daß (2.4) für $Q = Q_{\text{csp}}, E = E_1(Q_{\text{csp}})$ einen Cusp-Verzweigungspunkt besitzt.

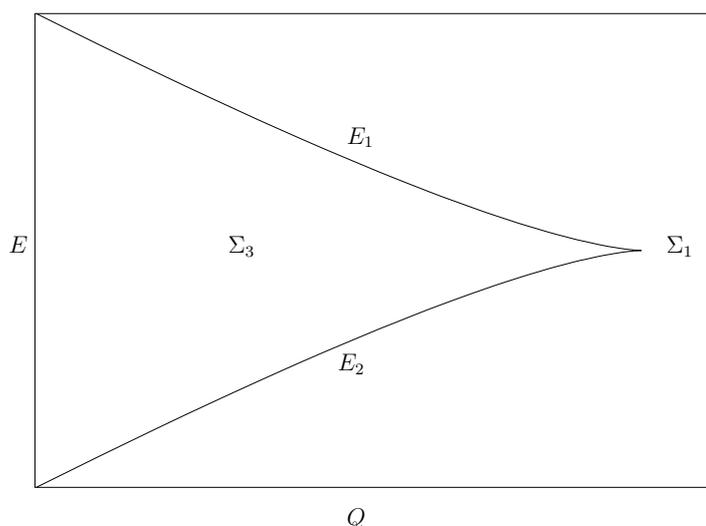


Abbildung 2.4: Die Funktionen E_i in der (Q, E) -Ebene. Für $(Q, E) \in \Sigma_3$ besitzt das System drei stationäre Lösungen, für $(Q, E) \in \Sigma_1$ besitzt es eine stationäre Lösung.

2.2 Das lineare System

Im folgenden untersuchen wir das um eine stationäre Lösung (\bar{u}, \bar{v}) linearisierte System von System (2.4). Die Analyse der dazugehörigen charakteristischen Gleichung liefert uns Kriterien für die Stabilität der stationären Lösungen und ermöglicht die Berechnung von Hopf-Verzweigungspunkten in der (Q, E) -Ebene. Zuerst führen wir eine Koordinatentransformation

$$(u, v) \mapsto (u - \bar{u}, v - \bar{v})$$

durch, so daß die stationäre Lösung (\bar{u}, \bar{v}) in die triviale Lösung des neuen Systems überführt wird. Sei $z = (u, v)$. System (2.4) läßt sich darstellen als

$$\dot{z}(t) = Lz_t + F(z_t)$$

mit linearem Teil

$$L\varphi = -\varphi(0) + A\varphi(-r),$$

wobei die reelle Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} q_1 g'(\bar{u}) & -Q \\ g'(\bar{u}) & -q_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Der nichtlineare Anteil F ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= (g(\bar{u} + \varphi_1(-\tau)) - g(\bar{u}) - g'(\bar{u})\varphi_1(-\tau)) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} g''(\bar{u}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_1(-\tau)^2 + O(\varphi^3). \end{aligned}$$

Es gilt $F(0) = 0, DF(0) = 0$. Die Matrix A nennen wir Koppelmatrix. Die zu dem linearen System $\dot{z}(t) = Lz_t = -z(t) + Az(t-r)$ gehörige charakteristische Gleichung ist gegeben durch

$$\chi(s) := \det((s+1)I_2 - A \exp(-sr)) = 0. \quad (2.7)$$

Eine eingehende Analyse der charakteristischen Gleichung erlaubt einen Einblick in die Stabilitätseigenschaften der stationären Lösung und gibt Anhaltspunkte für mögliche Verzweigungspunkte.

2.2.1 Die Parameter $\operatorname{tr} A$ und $\det A$

Anhand der künstlichen Parameter $\det A = (Q - q_1 q_2) g'(\bar{u})$ und $\operatorname{tr} A = q_1 g'(\bar{u}) - q_2$ geben wir Bedingungen an, für die die charakteristische Gleichung (2.7) nur Lösungen mit negativem Realteil besitzt. Daraus lassen sich die Stabilitätseigenschaften der betrachteten stationären Lösung ableiten. Abschließend werden die Ergebnisse auf die wirklichen Systemparameter Q und E übertragen und mögliche Verzweigungspunkte bestimmt. In [37, 87] wird ein ähnlicher Ansatz verfolgt, der es erlaubt, mittels der Parameter $\det A$ und $\operatorname{tr} A$ gewisse Verzweigungseigenschaften eines planaren Systems mit Zeitverzögerungen nachzuweisen. Aus Gründen der Vollständigkeit greifen wir auf Teile diese Ergebnisse zurück. Die Koppelmatrix A besitzt die beiden Eigenwerte λ_+, λ_- mit

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} \\ &= \frac{q_1 g'(\bar{u}) - q_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(q_1 g'(\bar{u}) + q_2)^2 - 4Qg'(\bar{u})}. \end{aligned}$$

Lemma 2.3 *s löst die charakteristische Gleichung (2.7) genau dann, wenn s die skalare Gleichung*

$$s + 1 - \lambda \exp(-sr) = 0 \quad (2.8)$$

löst, wobei λ ein Eigenwert von A ist.

Beweis: Die Aussage beweist man, indem man A auf seine Jordan-Normalform transformiert. \square

Bemerkung 2.3 Ist $r = 0$, so reduziert sich die Analyse der charakteristischen Gleichung auf die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix $-I + A$, also auf $-1 + \lambda_+$ und $-1 + \lambda_-$.

Sogenannte quasi-polynomiale Gleichungen des Typs (2.8) spielen eine äußerst wichtige Rolle in der Stabilitätsanalyse zeitverzögerter Differentialgleichungen. So findet man z.B. in [9, 15, 52, 83] Analysen dieser Klasse von Gleichungen. In Abhängigkeit des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ kann man die Anzahl der charakteristischen Lösungen mit positivem Realteil bestimmen. Diese Methode läßt sich allgemein auf lineare Systeme der Form

$$\dot{z}(t) = Bz(t) + Az(t-r) \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, z \in \mathbb{R}^n \text{ und } r > 0 \quad (2.9)$$

anwenden, wenn A und B simultan triangulierbar sind, d.h., wenn es eine reguläre (oder unitäre) Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so daß $U^{-1}AU$ und $U^{-1}BU$ obere (bzw. untere) Dreiecksgestalt haben.

Ist diese Bedingung erfüllt, so reduziert sich das Studium der charakteristischen Gleichung $\det(z - B - A \exp(-zr)) = 0$ auf das Studium von n skalaren quasi-polynomialen Gleichungen

$$\Phi_{\tau,\mu,\lambda} := (s + \mu) \exp(rs) - \lambda = 0, \quad (2.10)$$

wobei $r > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist. Die Verteilung der Nullstellen von (2.10) spielt unter Berücksichtigung der Parameter μ, λ und r eine wichtige Rolle in der Stabilitätsanalyse zeitverzögerter Gleichungen. [64] untersuchte solche Gleichungen zum ersten Mal im Zusammenhang mit verzögerten Differentialgleichungen für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, siehe auch [11]. [33, S. 134–136, 180] geben eine Partition in disjunkte Gebiete der reellen (λ, μ) -Ebene an, so daß für alle λ, μ aus einem solchen Gebiet die Anzahl der Lösungen von (2.10) mit positivem Realteil konstant ist (siehe auch [27, S. 305–309] und [72, S. 56–57]). Braddock und van den Driesche [15] charakterisieren ein Gebiet in der komplexen λ -Ebene, so daß für alle λ aus diesem Gebiet die Gleichung (2.10) nur Lösungen mit negativem Realteil besitzt. [9] untersucht allgemeine Systeme der Art $\dot{z}(t) = -z(t) + Az(t-r)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d.h. $B = -I_n$) und gibt Hopf-Verzweigungspunkte für $n = 1$ und $A < 0$ an. [53] untersuchen die allgemeine charakteristische Gleichung für $n = 2$, $B = -I_2$ und unter der Annahme, daß A keine Eigenwerte auf der reellen bzw. imaginären Achse besitzt. Läßt man Eigenwerte auf der reellen Achse zu, so findet man in [8] Ergebnisse zur Verteilung der charakteristischen Lösungen. In [52] wird schließlich das System (2.9) unter der Voraussetzung untersucht, daß A, B simultan triangulierbar sind, wobei $\mu_i \in \mathbb{R}_-$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Es wird eine vollständige Partition der komplexen λ -Ebene und Unterteilung der r -Halbebene angegeben, so daß die Anzahl der Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung mit positivem Realteil konstant ist, wenn man die Parameter aus diesen Regionen wählt. Außerdem können Hopf-Verzweigungspunkte explizit angegeben werden, wenn man nichtlineare Systeme betrachtet, deren Linearteil von der Form (2.9) sind. Die Ergebnisse in [52] lassen sich auf den allgemeinen Fall $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ ausweiten, die in [50] veröffentlicht werden sollen.

Wir untersuchen nun (2.7) mit $\mu_{1,2} = 1$ und $\lambda_{\pm} \in \mathbb{C}$. Dabei folgen wir in der Notation [52] und definieren in der komplexen Ebene eine Spirale mit monoton wachsendem Radius und Argument

$$K_r(\omega) := (1 + i\omega) \exp(i\omega r), \quad \omega \geq 0.$$

Man kann leicht nachvollziehen, daß (2.8) eine Lösung der Form $s = i\omega$ genau dann besitzt, wenn

$$\lambda = K_r(\omega).$$

Mit ω_1 bezeichnen wir die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\omega_1 = -\tan(\omega_1 r) \quad (2.11)$$

mit $\omega_1 \in (\frac{\pi}{2r}, \frac{\pi}{r})$ für $r > 0$. Offensichtlich gilt $\mathbb{R} \ni K_r(\omega_1) < -1$. Mit Hilfe von K_r und ω_1 kann man das folgende Gebiet in der komplexen Ebene definieren

$$G_r := \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re} K_r(\omega), |\operatorname{Im} \mu| < \operatorname{Im} K_r(\omega), \omega \in [0, \omega_1]\}.$$

Lemma 2.4 *Sei $r > 0$.*

1. *Für $\lambda \in G_r$ besitzen alle Lösungen von (2.8) negativen Realteil. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{G_r}$ gibt es mindestens eine Lösung von (2.8) mit positivem Realteil.*

2. Sei $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^1 -Kurve, $\epsilon > 0$ hinreichend klein, die ∂G_r transversal schneidet. Dann gibt es eine C^1 -Funktion $z(\beta) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ von Lösungen der charakteristischen Gleichung mit $\lambda = \lambda(\beta)$. Für $\beta = 0$ schneidet $z(\beta)$ die imaginäre Achse transversal bei $z(0) = i\omega$, $\omega \in [0, \omega_1]$.

Beweis: Siehe [15], [9] oder [52]. Die Transversalität findet man in [52]. □

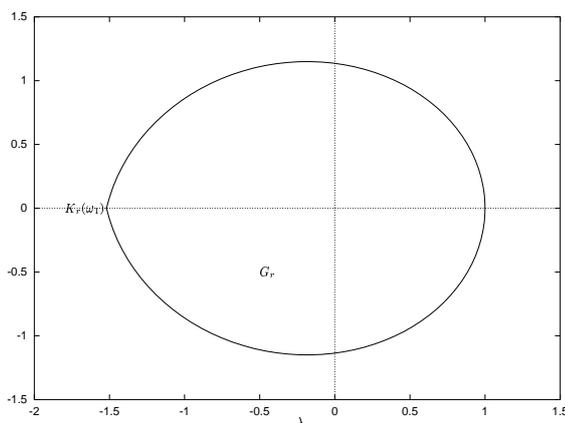


Abbildung 2.5: Partitionierung der komplexen Ebene. Für $\lambda \in G_r$ besitzt die charakteristische Gleichung nur Lösungen mit negativem Realteil. Für $\lambda \notin \overline{G_r}$ gibt es mindestens eine Lösung mit positivem Realteil.

Bemerkung 2.4 In [52] findet man eine komplette Partitionierung der komplexen Parameterebene, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ kann man die Anzahl der charakteristischen Lösungen von (2.8) mit positivem Realteil explizit bestimmen. Die Grenzen dieser Gebiete liefern Kandidaten für die Existenz von Hopf-Verzweigungspunkten. Diese Gebiete werden durch die weiteren Schnittpunkte der Spirale K_r mit der reellen Achse definiert. Da diese aber nicht mit einem Stabilitätswechsel der stationären Lösungen einhergehen, werden wir sie hier nicht weiter berücksichtigen. Es sei angemerkt, daß sich die Dimension der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit beim Überschreiten solcher Kurven verändert.

Da die Eigenwerte λ_{\pm} durch die künstlichen Parameter $\det A$ und $\operatorname{tr} A$ gegeben sind, definieren wir folgende Funktionen, die uns die Analyse der charakteristischen Gleichung in der $(\operatorname{tr} A, \det A)$ -Parameterene erleichtern. Wir beschreiben nun, wie das Stabilitätsgebiet G_r auf die $(\operatorname{tr} A, \det A)$ -Parameterene übertragen werden kann.

Definition 2.1 Sei ω_1 durch (2.11) bestimmt. Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} h_1 &: \left[1 - \sqrt{1 + \omega_1^2}, 2 \right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ h_1(x) &:= (x, -1 + x)^T \\ h_2 &: \left[-2\sqrt{1 + \omega_1^2}, 1 - \sqrt{1 + \omega_1^2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ h_2(x) &:= \left(x, -(1 + \omega_1^2) - \sqrt{1 + \omega_1^2}x \right)^T \\ h_3 &: [0, \omega_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ h_3(x) &:= (2(\cos(xr) - x \sin(xr)), 1 + x^2)^T. \end{aligned}$$

Die Funktionen h_i parametrisieren den stückweise glatten Rand $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dabei parametrisiere jeweils die Funktion h_i das Randstück $\partial\Omega_i$ für $i = 1, 2, 3$. $\nu(x)$ bezeichne die äußere Normale zu $x \in \partial\Omega$. Darüberhinaus bezeichne $p_{\text{snh}}, p_{\text{hh}}$ und p_{bt} die drei Eckpunkte von $\bar{\Omega}$, d.h.

$$\begin{aligned} p_{\text{snh}} &:= \left(1 - \sqrt{1 + \omega_1^2}, -\sqrt{1 + \omega_1^2} \right)^T \\ p_{\text{hh}} &:= \left(-2\sqrt{1 + \omega_1^2}, 1 + \omega_1^2 \right)^T \end{aligned}$$

und

$$p_{\text{bt}} := (2, 1)^T.$$

Im folgenden charakterisieren wir die Lösungen der charakteristischen Gleichung (2.7) mit Hilfe des oben definierten Gebiets Ω , siehe auch Abbildung 2.6.

Lemma 2.5 Sei $r > 0$.

1. Die charakteristische Gleichung (2.7) besitzt genau dann nur Lösungen mit negativem Realteil, wenn $(\text{tr } A, \det A) \in \Omega$.
2. Für $(\text{tr } A, \det A) \notin \bar{\Omega}$ besitzt (2.7) mindestens eine Lösung mit positivem Realteil, genauer: Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein und sei $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(0) \in \partial\Omega_i$ und $\nu(\gamma(0))\gamma'(0) > 0$. Dann besitzt die Gleichung (2.7) für Parameter $(\text{tr } A, \det A) = \gamma(\beta)$ eine Lösung $s(\beta)$ mit $\text{Re } s(0) = 0$ und $\text{Re } s'(0) > 0$. Ferner gilt
 - a) Für $\gamma(0) \in \partial\Omega_1$ ist $s(0) = 0$.
 - b) Für $\gamma(0) \in \partial\Omega_2$ gilt $s(0) = i\omega_1$. $\bar{s}(\beta)$ ist ebenfalls Lösung von (2.7).
 - c) Falls $\gamma(0) \in \partial\Omega_3$, dann ist $s(0) = i\omega$ mit $\omega \in (0, \omega_1)$ und $\gamma(0) = h_3(\omega)$. $\bar{s}(\beta)$ löst ebenfalls (2.7).

Bemerkung 2.5 Für die ausgezeichneten Punkte $p_{\text{snh}}, p_{\text{hh}}, p_{\text{bt}}$ gilt:

1. Für $(\text{tr } A, \det A) = p_{\text{snh}}$ besitzt die charakteristische Gleichung die Lösungen $s_1 = 0$ und $s_{2,3} = \pm i\omega_1$. Alle anderen Lösungen besitzen negativen Realteil.

2. Für $(\operatorname{tr} A, \det A) = p_{\text{hh}}$ besitzt die charakteristische Gleichung die doppelten Lösungen $s_{1,2} = \pm i\omega_1$. Alle anderen Lösungen haben negativen Realteil.
3. Für $(\operatorname{tr} A, \det A) = p_{\text{bt}}$ besitzt die charakteristische Gleichung die doppelte Lösung $s = 0$. Alle weiteren Lösungen haben negativen Realteil.

Beweis: Alle Parameter $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \mathbb{R}^2$ implizieren zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 der Koppelmatrix A . Mit Hilfe dieser Eigenwerte und der Partition (siehe Lemma 2.4) kann man die $(\operatorname{tr} A, \det A)$ -Ebene zerlegen. Sei $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \partial\Omega_1$, d.h. es gilt für die Eigenwerte der Koppelmatrix A

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \operatorname{tr} A + 4} \\ &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} \mp \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2} - 1 \right) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \operatorname{tr} A - 1 \in \left[-\sqrt{1 + \omega_1^2}, 1 \right].\end{aligned}$$

Folglich besitzt die charakteristische Gleichung eine Lösung $s = 0$ und keine Lösungen mit positivem Realteil. Betrachte nun $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \partial\Omega_2$. Für das Spektrum der Koppelmatrix A gilt

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} \pm \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2} + \sqrt{1 + \omega_1^2} \right) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \operatorname{tr} A + \sqrt{1 + \omega_1^2} \in \left[-\sqrt{1 + \omega_1^2}, 1 \right] \quad \lambda_2 = -\sqrt{1 + \omega_1^2} = K_r(\omega_1).\end{aligned}$$

Also besitzt (2.7) ein Paar konjugiert komplexer Lösungen $s = \pm i\omega_1$ und keine Lösungen mit positivem Realteil. Schließlich betrachten wir $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \partial\Omega_3$. Es gilt $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \lambda_1 &= \cos(\omega r) - \omega \sin(\omega r) \\ \operatorname{Im} \lambda_1 &= \omega \cos(\omega r) + \sin(\omega r) \quad \omega \in [0, \omega_1].\end{aligned}$$

Es gilt $\lambda_{1,2} = K_r(\omega) \in \partial G_r$. Daher besitzt die charakteristische Gleichung ein Paar konjugiert komplexer Lösungen $s = \pm i\omega$ und keine Lösungen mit positivem Realteil.

$(\operatorname{tr} A = 0, \det A = 0) \in \Omega$ impliziert den doppelten Eigenwert $\lambda = 0 \in G_r$ der Koppelmatrix. Daher gilt für diese Parameterkonstellation, daß alle charakteristischen Lösungen negativen Realteil besitzen ($s = -1$ ist die einzige Lösung). Aus der stetigen Abhängigkeit der charakteristischen Lösungen von den Parametern $\operatorname{tr} A$ und $\det A$ folgt, daß es für $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \Omega$ nur charakteristische Lösungen mit negativem Realteil gibt. Für $(\operatorname{tr} A, \det A) \in \partial\Omega$ besitzt (2.7) Lösungen auf der imaginären Achse. Die Transversalitätseigenschaften folgen mit Lemma 2.4. \square

Bemerkung 2.6 Es gibt weitere Kurven in der $(\operatorname{tr} A, \det A)$ -Parameterebene, die die in Bemerkung 2.4 angedeuteten Kurven parametrisieren. Da diese Kurven aber keinen Stabilitätswechsel der dazugehörigen stationären Lösung implizieren, betrachten wir diese Kurven nicht näher. Nur die Dimension der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit verändert sich.

Man beachte, daß die „Größe“ des Gebietes Ω in monotoner Weise von der Zeitverzögerung r über die Lösung ω_1 abhängt. Das Dreieck in der $(\operatorname{tr} A, \det A)$ -Ebene, welches durch die drei Punkte

$(0, -1)$, $(-2, 1)$ und $(2, 1)$ gegeben ist, beschreibt die Menge von Parametern $\text{tr } A$, $\det A$, für die die charakteristische Gleichung für alle $r \geq 0$ keine Lösungen mit positivem Realteil besitzt. Der Punkt $p_{bt} = (2, 1)^T$ und die Funktionsvorschrift von h_1 hingegen sind unabhängig von r .

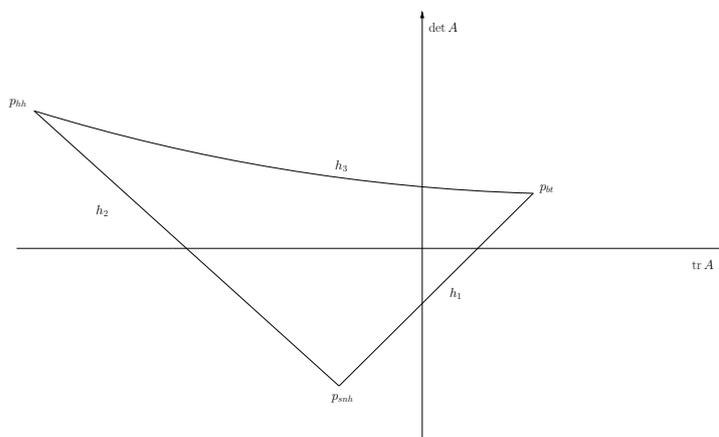


Abbildung 2.6: Departition in der $(\text{tr } A - \det A)$ -Ebene. Innerhalb des Zyklus besitzt die charakteristische Gleichung nur Lösungen mit negativem Realteil. Auf dem Rand $\partial\Omega$ besitzt die charakteristische Gleichung Lösungen auf der imaginären Achse und außerhalb von $\bar{\Omega}$ gibt es mindestens eine Lösung mit positivem Realteil.

2.2.2 Stabilität der stationären Lösungen

Im nächsten Schritt übertragen wir die Ergebnisse für die künstlichen Parameter $\text{tr } A$, $\det A$ auf die realen Systemparameter Q und E . Dabei müssen wir einige Fallunterscheidungen bzgl. der Parameter q_1, q_2 vornehmen. Die Wahl von q_1 und q_2 schränkt die möglichen Werte ein, die $\text{tr } A$ und $\det A$ annehmen können. Es gilt

$$\begin{aligned} -q_2 < \text{tr } A \leq q_1 - q_2 \\ \det A \geq -q_1 q_2. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich Bedingungen ableiten, welche Stücke von $\partial\Omega$ durch die Parameter Q und E parametrisiert werden können. Wir zerlegen den (q_1, q_2) -Parameterraum in disjunkte Gebiete, so daß die (Q, E) -Verzweigungsdiagramme für System (2.4) innerhalb eines solchen Gebietes qualitativ äquivalent sind. Qualitative Äquivalenz bedeutet hier, daß die Informationen, die man über die Anzahl der stationären Lösungen, die lokalen Stabilitätseigenschaften der stationären Lösungen und die Existenz von kleinen periodischen Lösungen dem (Q, E) -Diagramm entnehmen kann, äquivalent sind. Dabei spielen nur die kleinen periodischen Lösungen eine Rolle, die durch Hopf-Verzweigung bei gleichzeitigem Stabilitätswechsel der stationären Lösung entstehen. Die Stabilität dieser periodischen Lösungen bleibt an dieser Stelle unberücksichtigt. Bei geeigneter Wahl von q_1 und q_2 definieren wir Kurven $(Q, \hat{E}_i(Q))$, $(Q, \tilde{E}_i(Q))$ in der (Q, E) -Parameterebene, die die Kurven $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ (siehe Definition 2.1) parametrisieren. Es sei noch angemerkt, daß die Kurven $(Q, E_i(Q))$ aus Bemerkung 2.2 das Randstück $\partial\Omega_1$ teilweise parametrisieren.

Lemma 2.6 Sei $r > 0$ und $q_1 > q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$. Dann gibt es $\tilde{Q}_s \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{Q}_e \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\tilde{Q}_s < \tilde{Q}_e$, und C^1 -Funktionen $\tilde{u}_i, \tilde{E}_i : [\tilde{Q}_s, \tilde{Q}_e] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, mit folgenden Eigenschaften:

1. Für $Q \in [\tilde{Q}_s, \tilde{Q}_e]$ und $E = \tilde{E}_i(Q)$, $i = 1, 2$, besitzt das System (2.15) eine stationäre Lösung $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(Q)$. Die dazugehörige charakteristische Gleichung (2.7) besitzt ein Paar konjugiert komplexer, rein imaginärer Lösungen $s = \pm i\omega$, $\omega \in [0, \omega_1]$. Dabei gilt $\tilde{u}_1(Q) < 0 < \tilde{u}_2(Q)$. \tilde{E}_1 ist eine monoton fallende und \tilde{E}_2 eine monoton wachsende Funktion.
2. Für $q_2 \leq 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ gilt $\tilde{Q}_e = \infty$ und für $q_2 > 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ gilt $\tilde{Q}_e = \frac{q_1(q_2 - \sqrt{1 + \omega_1^2})^2}{q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2}} < \infty$.
3. Gilt $q_1 \geq q_2 + 2$, so ist $\tilde{Q}_s = Q_{bt} := \frac{q_1(q_2 + 1)^2}{q_2 + 2}$. \tilde{E}_i berühren die Funktion E_i tangential bei $Q = Q_{bt}$. Gilt hingegen $q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2} < q_1 < q_2 + 2$, so berühren sich \tilde{E}_1 und \tilde{E}_2 bei $Q = \tilde{Q}_s > Q_{csp}$ tangential, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(\tilde{Q}_s) &= \tilde{E}_2(\tilde{Q}_s) \\ \lim_{Q \rightarrow \tilde{Q}_s} \frac{d\tilde{E}_1}{dQ}(Q) &= -\infty \quad \lim_{Q \rightarrow \tilde{Q}_s} \frac{d\tilde{E}_2}{dQ}(Q) = \infty. \end{aligned}$$

4. Für $\tilde{Q}_s < Q < \tilde{Q}_e$ besitzt das System (2.4) für $E = \tilde{E}_i(Q)$ eine Hopf-Singularität, d.h. von der dazugehörigen stationären Lösung zweigt ein Ast periodischer Lösungen ab, wenn die Parameterkurve die Kurve $(Q, \tilde{E}_i(Q))$ transversal schneidet.

Beweis: Ausgangspunkt des Beweises ist die Gleichung

$$\operatorname{tr} A = q_1 g'(\bar{u}) - q_2 = h_3^{(1)}(\omega) \quad (2.12)$$

mit $\omega \in D_{h_3}$. $h_3^{(1)}$ ist eine streng monoton fallende Funktion auf $(0, \omega_1]$ mit $h_3^{(1)}(0) = 2$ und $h_3^{(1)}(\omega_1) = -2\sqrt{1 + \omega_1^2}$. Somit gibt es nach dem Satz über implizit definierte Funktionen $\tilde{\omega}_e, \tilde{\omega}_s$, $0 \leq \tilde{\omega}_s < \tilde{\omega}_e \leq \omega_1$, und C^1 -Funktionen

$$\tilde{u}_i : [\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_e] \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2,$$

die die Gleichung (2.12) für $\bar{u} = \tilde{u}_i(\omega)$ lösen. Dabei erfüllen die gefundenen Lösungen für $\omega > \tilde{\omega}_s$ die Ungleichung $\tilde{u}_1(\omega) < 0 < \tilde{u}_2(\omega)$. Darüberhinaus haben wir folgende Eigenschaften an den Intervallenden

1. Für $q_1 < 2 + q_2$ gilt $\tilde{\omega}_s > 0$ und $\tilde{u}_1(\tilde{\omega}_s) = \tilde{u}_2(\tilde{\omega}_s) = 0$.
2. Für $q_1 = 2 + q_2$ gilt $\tilde{\omega}_s = 0$ und $\tilde{u}_1(\tilde{\omega}_s) = \tilde{u}_2(\tilde{\omega}_s) = 0$.
3. Gilt hingegen $q_1 > 2 + q_2$, so ist $\tilde{\omega}_s = 0$ und $\tilde{u}_1(\tilde{\omega}_s) < 0 < \tilde{u}_2(\tilde{\omega}_s)$.
4. Für $q_2 \geq 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ gilt $\tilde{\omega}_e = \omega_1$.
5. Für $q_2 < 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ gilt $\tilde{\omega}_e < \omega_1$ und $\lim_{\omega \rightarrow \tilde{\omega}_e} \tilde{u}_i(\omega) = 0$.

Wir berechnen durch Differenzieren von (2.12) nach ω die Ableitungen von \tilde{u}_i , d.h.

$$\frac{d\tilde{u}_i}{d\omega}(\omega) = \frac{\left(h_3^{(1)}\right)'(\omega)}{q_1 g''(\tilde{u}_i(\omega))} \quad \text{für } \omega_s < \omega < \omega_e .$$

Also gilt für $\omega_s < \omega < \omega_e$

$$\frac{d\tilde{u}_1}{d\omega}(\omega) < 0, \quad \frac{d\tilde{u}_2}{d\omega}(\omega) > 0 .$$

Für die Randwerte ω_s, ω_e gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_s} \frac{d\tilde{u}_1}{d\omega}(\omega) & \begin{cases} = -\infty & q_1 \leq 2 + q_2 \\ \in (-\infty, 0) & q_1 > q_2 + 2 \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_s} \frac{d\tilde{u}_2}{d\omega}(\omega) & \begin{cases} = \infty & q_1 \leq 2 + q_2 \\ \in (0, \infty) & q_1 > q_2 + 2 \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_e} \frac{d\tilde{u}_1}{d\omega}(\omega) & \begin{cases} = -\infty & q_2 \leq 2\sqrt{1 + \omega_1^2} \\ \in (-\infty, 0) & q_2 > 2\sqrt{1 + \omega_1^2} \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_e} \frac{d\tilde{u}_2}{d\omega}(\omega) & \begin{cases} = \infty & q_2 \leq 2\sqrt{1 + \omega_1^2} \\ \in (0, \infty) & q_2 > 2\sqrt{1 + \omega_1^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man die gerade gewonnene Lösung \tilde{u}_i in

$$\det A = (Q - q_1 q_2) g'(\bar{u}) = h_3^{(2)}(\omega)$$

ein, so erhält man eine C^1 -Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{Q} : [\omega_s, \omega_e] & \rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{Q}(\omega) & := q_1 q_2 + \frac{h_3^{(2)}(\omega)}{g'(\tilde{u}_i(\omega))} \\ & = q_1 q_2 + \frac{q_1 h_3^{(2)}(\omega)}{(q_2 + h_3^{(1)}(\omega))} \\ & = q_1 q_2 + \frac{1 + \omega^2}{g'(\tilde{u}_i(\omega))} . \end{aligned}$$

Wir definieren $\tilde{Q}_s := \tilde{Q}(\omega_s)$ und

$$\tilde{Q}_e := \lim_{\omega \rightarrow \omega_e} \tilde{Q}(\omega) \begin{cases} = \infty & \text{falls } \omega_e < \omega_1 \\ = \frac{q_1(q_2 - \sqrt{1 + \omega_1^2})^2}{(q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2})} & \text{falls } \omega_e = \omega_1 \end{cases} .$$

Durch Differenzieren verifiziert man unter Berücksichtigung von $g''(\tilde{u}_i(\omega)) \frac{d\tilde{u}_i(\omega)}{d\omega} < 0$

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\omega}(\omega) = \frac{2\omega g'(\tilde{u}_i(\omega)) - (1 + \omega^2) g''(\tilde{u}_i(\omega)) \frac{d\tilde{u}_i(\omega)}{d\omega}}{g'(\tilde{u}_i(\omega))^2} > 0 .$$

Somit ist Q invertierbar. Falls $\omega_s = 0$, so gilt $\tilde{Q}_s = Q_{\text{bt}}$. Damit $\left(\tilde{u}_i(\omega), \frac{g(\tilde{u}_i(\omega))}{q_2+1}\right)$ auch eine stationäre Lösung des Systems (2.4) ist, muß $\tilde{u}_i(\omega)$ die Gleichung (2.5) erfüllen. Daher gibt es C^1 -Funktionen

$$\tilde{E}_i : [\omega_s, \omega_e] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\tilde{E}_i(\omega) := \tilde{u}_i(\omega) - \left(q_1 - \frac{\tilde{Q}(\omega)}{q_2 + 1}\right) g(\tilde{u}_i(\omega)).$$

Da \tilde{Q} invertierbar ist, kann man die Funktionen \tilde{E}_i und \tilde{u}_i auch als Funktionen von Q mit Definitionsbereich $[\tilde{Q}_s, \tilde{Q}_e]$ schreiben, d.h.

$$\tilde{E}_i(Q) = \tilde{u}_i(Q) - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1}\right) g(\tilde{u}_i(Q)).$$

Durch Nachrechnen ergeben sich die Monotonie-Eigenschaften von \tilde{E}_i , d.h

$$\frac{d\tilde{E}_i}{dQ}(Q) = \frac{d\tilde{u}_i}{dQ}(Q) \left(1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1}\right) g'(\tilde{u}_i(Q))\right) + \frac{g(\tilde{u}_i(Q))}{q_2 + 1}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1}\right) g'(\tilde{u}_i(Q)) = \frac{\det A - \text{tr} A + 1}{q_2 + 1} \geq 0$$

folgen die Monotonie-Eigenschaften der Funktionen \tilde{E}_i , $i = 1, 2$. Insbesondere gilt

1. $\tilde{Q}_s = Q_{\text{bt}}$ für $q_1 > q_2 + 2$ und

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i(Q_{\text{bt}}) &= E_i(Q_{\text{bt}}) \\ \frac{d\tilde{E}_i}{dQ}(Q_{\text{bt}}) &= \frac{g(\tilde{u}_i(Q_{\text{bt}}))}{q_2 + 1} = \frac{dE_i}{dQ}(Q_{\text{bt}}), \end{aligned}$$

vergleiche Lemma 2.2 und Bemerkung 2.2.

2. $\tilde{Q}_s > Q_{\text{csp}}$ für $q_1 < q_2 + 2$ und

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(\tilde{Q}_s) &= \tilde{E}_2(Q_s) \\ \frac{d\tilde{E}_1}{dQ}(\tilde{Q}_s) &= -\infty \quad \frac{d\tilde{E}_2}{dQ}(Q_s) = \infty. \end{aligned}$$

Somit sind alle Aussagen bewiesen. □

Bemerkung 2.7

1. Die charakteristische Gleichung besitzt genau dann eine doppelte Lösung $s = 0$, wenn gilt: $q_1 > 2 + q_2, Q = Q_{bt}$ und $E = \tilde{E}_i(Q_{bt}) = E_i(Q_{bt}), i = 1, 2$. Später zeigen wir, daß für eine solche Parameterkonstellation das System (2.15) eine Bogdanov-Takens-Singularität besitzt.
2. Für die abzweigenden T -periodischen Lösungen gilt nach dem Hopf-Theorem (siehe [61]): $T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega}$ für $E \rightarrow \hat{E}_i(Q)$, wobei $\omega \in (\omega_s, \omega_e)$ durch $Q = Q(\omega)$ gegeben ist (siehe Beweis von Lemma 2.6).
3. Gilt $\omega_s \neq 0$, so ist $\tilde{Q}_s > Q_{csp}$ und $\tilde{E}_1(\tilde{Q}_s) = \tilde{E}_2(\tilde{Q}_s)$. Von der zugehörigen stationären Lösung $\bar{u} = \bar{v} = 0$ zweigt eine kleine periodische Lösung mit Periode $\frac{2\pi}{\omega_s}$ ab, wenn man $\tilde{E}_i(Q_s)$ transversal in der (Q, E) -Parameterebene kreuzt.
4. Für den unverzögerten Fall $r = 0$ ist \tilde{E}_i eine affine Funktion mit $\tilde{Q}_e = \infty$, siehe [48].

Lemma 2.7 Sei $r > 0, q_2 > \sqrt{1 + \omega_1^2}$ und $q_1 > q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$. Dann gibt es $\hat{Q}_s \in \mathbb{R}_+, \hat{Q}_e \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und C^1 -Funktionen $\hat{u}_i, \hat{E}_i : [\hat{Q}_s, \hat{Q}_e] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, mit folgenden Eigenschaften:

1. Für $Q \in [\hat{Q}_s, \hat{Q}_e]$ und $E = \hat{E}_i(Q), i = 1, 2$, besitzt das System (2.15) eine stationäre Lösung $\hat{u}_i = \hat{u}_i(Q)$. Die dazugehörige charakteristische Gleichung (2.7) besitzt ein Paar konjugiert komplexer, rein imaginärer Lösungen $s = \pm i\omega_1$ besitzt. \hat{E}_1 ist eine streng monoton fallende und \hat{E}_2 eine streng monoton wachsende Funktion.
2. Ist $\sqrt{1 + \omega_1^2} < q_2 \leq 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$, so gilt $\hat{Q}_e = \infty$ und für $q_2 > 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ gilt $\hat{Q}_e = \frac{q_1(q_2 - \sqrt{1 + \omega_1^2})^2}{q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2}} = \tilde{Q}_e < \infty$.
3. Für $q_1 \geq q_2 + 1 - \sqrt{1 + \omega_1^2}$ berührt \hat{E}_i die Funktion E_i bei

$$Q = \hat{Q}_s = Q_{snh} := \frac{q_1(q_2 - \sqrt{1 + \omega_1^2})(q_2 + 1)}{q_2 + 1 - \sqrt{1 + \omega_1^2}}$$

tangential. Gilt hingegen $q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2} < q_1 < q_2 + 1 - \sqrt{1 + \omega_1^2}$, so berühren sich \hat{E}_1 und \hat{E}_2 tangential bei $Q = \hat{Q}_s > Q_{csp}$, d.h.

$$\begin{aligned} \hat{E}_1(\hat{Q}_s) &= \hat{E}_2(\hat{Q}_s) \\ \lim_{Q \rightarrow \hat{Q}_s} \frac{d\hat{E}_1}{dQ}(Q) &= -\infty \quad \lim_{Q \rightarrow \hat{Q}_s} \frac{d\hat{E}_2}{dQ}(Q) = \infty. \end{aligned}$$

4. Kreuzt man die Kurve $(Q, \hat{E}_i(Q))$ transversal für $Q \in (\hat{Q}_s, \hat{Q}_e)$, so existiert lokal ein Zweig periodischer Lösungen.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Lemmas 2.6 und soll an dieser Stelle nicht geführt werden. Anstelle von $\partial\Omega_3$ wird nun $\partial\Omega_2$ aus der $(\text{tr } A, \det A)$ -Ebene durch die Parameter Q und E parametrisiert, siehe Lemma 2.5. □

Bemerkung 2.8

1. Die abzweigenden T -periodischen Lösungen erfüllen $T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1}$, falls $E \rightarrow \hat{E}_i(Q)$.
2. Für $Q = Q_{\text{snh}}$ und $E = \hat{E}_i(Q) = E_i(Q)$ besitzt die charakteristische Gleichung sowohl die Lösung $s = 0$, als auch die Lösungen $s = \pm i\omega_1$. Dies ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Sattel-Knoten-Hopf-Verzweigung. [37] untersucht diese Verzweigung für das planare System, falls $Q_{\text{snh}} = Q_{\text{csp}}$.
3. Für den unverzögerten Fall $r = 0$ existieren die Funktionen \hat{E}_i nicht, da $\omega_1 \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$.

Korollar 2.1 Sei $r > 0$, $q_2 > 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$ und $q_1 > q_2 - 2\sqrt{1 + \omega_1^2}$. Dann gilt $Q_e := \hat{Q}_e = \tilde{Q}_e$ und $\tilde{E}_i(Q_e) = \hat{E}_i(Q_e)$, $i = 1, 2$. Die charakteristische Gleichung besitzt dann die doppelten Lösungen $s = \pm i\omega_1$. Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow Q_e} \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial Q}(Q) &= \lim_{Q \rightarrow Q_e} \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial Q}(Q) \\ \lim_{Q \rightarrow Q_e} \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial Q}(Q) &= \lim_{Q \rightarrow Q_e} \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial Q}(Q). \end{aligned}$$

Beweis: Mit Lemma 2.6 und Lemma 2.1 kann man das Zusammentreffen der \tilde{E}_i und \hat{E}_i für $Q = Q_e$ untersuchen. Für das lineare System $\dot{x}(t) = -x(t) + Ax(t - r)$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda = K_r(\omega_1) < -1.$$

Daraus folgt, daß die charakteristische Gleichung die doppelten Lösungen $s = \pm i\omega_1$ besitzt, siehe Bemerkung 2.5. \square

Bemerkung 2.9 Wie man sieht, hängen \tilde{Q}_e , \hat{Q}_e und Q_{snh} unmittelbar von der Zeitverzögerung r ab, da ω_1 als Lösung der Gleichung (2.11) von r (in stetig differenzierbarer und monotoner Weise) abhängt.

Mit Lemma 2.6 und Lemma 2.7 ist es möglich, die (q_1, q_2) -Parameterebene so zu zerlegen, daß für jede Region ein Diagramm für die (Q, E) -Parameterebene erstellt werden kann, welches die Anzahl der stationären Lösungen, deren Stabilität sowie Hopf-Verzweigungspunkte, die einen Stabilitätswechsel der dazugehörigen stationären Lösung implizieren, berücksichtigt, siehe Abbildung 2.7. Exemplarisch wollen wir dies für die Situation $q_1 > q_2 + 2$, $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$ explizit darstellen. Die übrigen Fälle kann man in analoger Weise untersuchen. In der vorliegenden Situation existieren also (in Q) unbeschränkte Funktionen \tilde{E}_i , $i = 1, 2$, mit den in Lemma 2.6 angegebenen Eigenschaften. Die Existenz der Funktionen \hat{E}_i kann man ausschließen. Außerdem zeigt man leicht:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \tilde{E}_1(Q) = -\infty \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} \tilde{E}_2(Q) = \infty.$$

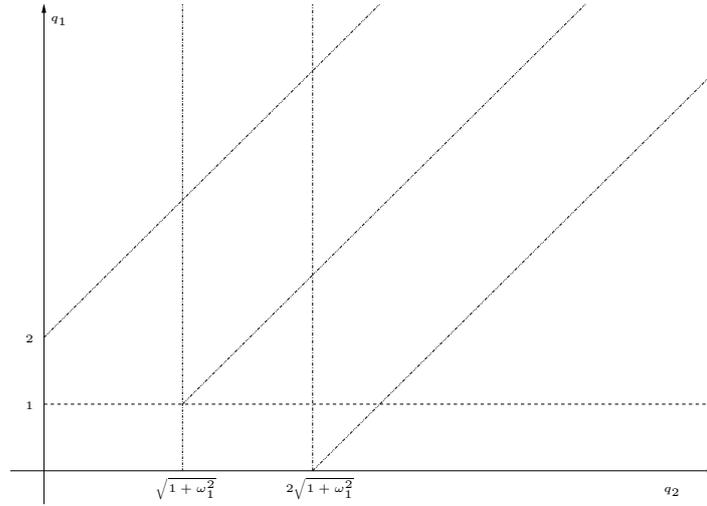


Abbildung 2.7: Zerlegung der (q_1, q_2) -Parameterenebene. Für jede Region kann ein (Q, E) -Verzweigungsdiagramm angegeben werden, das die Anzahl der stationären Lösungen, deren Stabilität und Hopf-Verzweigungspunkte unter Berücksichtigung eines Stabilitätswechsels der stationären Lösung widerspiegelt.

Lemma 2.8

1. Ist (\bar{u}, \bar{v}) eine eindeutige stationäre Lösung von (2.4) zu Parametern E und Q , so gilt $\det A \geq \text{tr } A - 1$.
2. Besitzt (2.4) mit Parametern Q und E drei stationäre Lösungen (\bar{u}_i, \bar{v}_i) mit $\bar{u}_1 < \bar{u}_2 < \bar{u}_3$, so gilt
 - a) für \bar{u}_2 : $\det A < \text{tr } A - 1$. Somit ist (\bar{u}_2, \bar{v}_2) instabil.
 - b) für \bar{u}_1, \bar{u}_3 : $\det A > \text{tr } A - 1$.
3. Ist $Q < Q_{csp}$ und $E = E_i(Q), i = 1, 2$, so besitzt (2.15) genau zwei stationäre Lösungen und für eine dieser Lösungen gilt $\det A = \text{tr } A - 1$. Das System besitzt eine Kurve von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten.

Beweis: Nach Beweis von Lemma 2.2 gilt für eine eindeutige stationäre Lösung (dabei sei $Q \neq Q_{csp}$) (\bar{u}, \bar{v}) bzw. für $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}_{1,3}, \bar{v}_{1,3})$ im Falle dreier stationärer Lösungen

$$\begin{aligned}
 0 < h'(\bar{u}) &= 1 - \left(q_1 - \frac{Q}{q_2 + 1} \right) g'(u) \\
 &= - \frac{q_1 g'(\bar{u}) - q_2 - Q g'(\bar{u}) + q_1 q_2 g'(\bar{u}) - 1}{q_2 + 1} \\
 &= - \frac{\text{tr } A - \det A - 1}{q_2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Daher gilt $\det A > \text{tr } A - 1$. Analog folgt für (\bar{u}_2, \bar{v}_2) im Falle dreier Equilibria $\det A < \text{tr } A - 1$ und nach Lemma 2.5 ist (\bar{u}_2, \bar{v}_2) instabil. Für $E = E_i(Q), i = 1, 2$ und $0 \leq Q \leq Q_{csp}$ gilt Gleichheit, d.h. $\det A = \text{tr } A - 1$. □

Bemerkung 2.10 Für $Q = Q_{\text{csp}}$ besitzt das System eine Cusp-Singularität von stationären Lösungen, siehe z.B. [76].

Lemma 2.9 Sei $q_1 > q_2 + 2$, $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$ und sei (Q, E) fest gewählt.

1. Ist (\bar{u}, \bar{v}) eine eindeutige stationäre Lösung von (2.4), so ist (\bar{u}, \bar{v}) asymptotisch stabil, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist

- a) $Q \leq Q_{bt}$.
- b) $Q > Q_{bt}$ und $E < \tilde{E}_1(Q)$ bzw. $E > \tilde{E}_2(Q)$;

und instabil, wenn $E \in (\tilde{E}_1(Q), \tilde{E}_2(Q))$.

2. Gibt es drei stationäre Lösungen (\bar{u}_i, \bar{v}_i) mit $\bar{u}_1 < \bar{u}_2 < \bar{u}_3$, so ist (\bar{u}_2, \bar{v}_2) instabil und (\bar{u}_1, \bar{v}_1) ist asymptotisch stabil für

- a) $Q \leq Q_{bt}$.
- b) $Q > Q_{bt}$ und $E < \tilde{E}_1(Q)$;

und instabil für $Q > Q_{bt}$, $E > \tilde{E}_1(Q)$. Für (\bar{u}_3, \bar{v}_3) gilt analog: (\bar{u}_3, \bar{v}_3) ist asymptotisch stabil für

- a) $Q \leq Q_{bt}$.
- b) $Q > Q_{bt}$ und $E > \tilde{E}_2(Q)$;

und instabil für $Q > Q_{bt}$, $E < \tilde{E}_2(Q)$.

3. Auf den Kurven $(Q, \tilde{E}_i(Q))$, $Q > Q_{bt}$, besitzt das System Hopf-Singularitäten, d.h. kreuzt man diese Kurven transversal, so zweigt von der dazugehörigen stationären Lösung eine kleine periodische Lösung ab.

Beweis: Die Aussagen folgen mit Lemma 2.5, 2.6 und 2.8. □

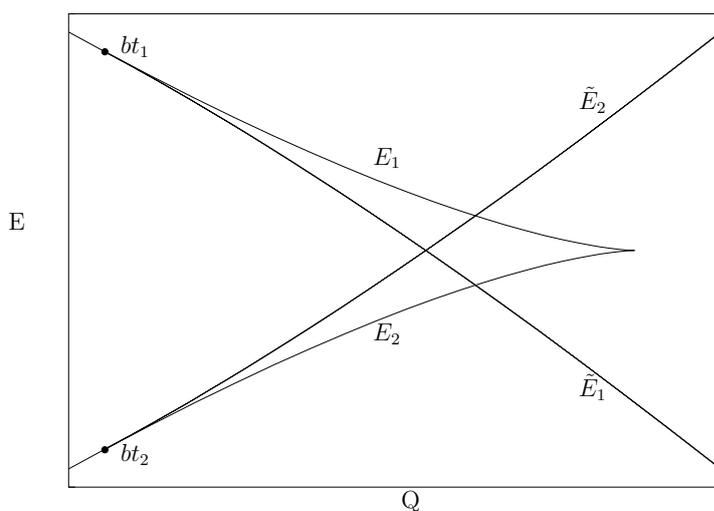


Abbildung 2.8: Verzweigungsdiagramm für $q_1 > q_2 + 2$, $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$ und Parametern Q und E . E_i definieren Sattel-Knoten-Kurven, und \tilde{E}_i entsprechen Hopf-Verzweigungskurven.

Bemerkung 2.11 Mit einem zu Kapitel 1.2.3 ähnlichem Vorgehen kann man die Verzweigungsrichtung der abzweigenden periodischen Lösungen für $E = \tilde{E}_i(Q)$ untersuchen. Dabei wird die Struktur der Verzweigungsgleichung so komplex, daß eine Herleitung allgemeiner Kriterien nicht möglich ist. Explizite Untersuchungen für Spezialfälle planarer Systeme mit Selbstkopplungen und einer Zeitverzögerung findet man in [37, 54, 87]. All diesen Arbeiten ist gemein, daß die zweiten Ableitungen der Nichtlinearitäten an der dazugehörigen stationären Lösung verschwinden und somit nur die dritten Ableitungen die Verzweigungsrichtung bestimmen. Wir untersuchen die Verzweigungsrichtung in Kapitel 2.5 mit einem algorithmischen Ansatz (analog zu Kapitel 1.2.3), den wir in Maple [103] implementiert haben. Da das Programm sehr ähnlich zu dem Programm zur Bestimmung der Verzweigungsrichtung bei zyklischen Systemen ist, verzichten wir an dieser Stelle auf den Quellcode. [26] untersucht ebenfalls mit numerischen Methoden die Verzweigungsrichtung bei Variation von E für das System (2.1).

2.3 Bogdanov-Takens-Verzweigung

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, daß für $q_1 > q_2 + 2$ zwei Punkte $(Q_{bt}, E_1(Q_{bt}))$ und $(Q_{bt}, E_2(Q_{bt}))$ in der (Q, E) -Parameterebene existieren, für die die charakteristische Gleichung (2.7) des planaren Systems (2.4) die doppelte Lösung $s = 0$ besitzt. Desweiteren haben wir in Lemma 2.6 gezeigt, daß sich in diesen Punkten jeweils eine Kurve von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten $E_i(Q)$ und eine Kurve von Hopf-Verzweigungspunkten $\tilde{E}_i(Q)$ tangential treffen. Diese Konstellation deutet auf die Existenz einer sogenannten Bogdanov-Takens-Verzweigung hin (siehe z.B. [76]). In der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ermöglicht die Existenz einer Bogdanov-Takens-Singularität den Nachweis von homoklinen Lösungen, also Lösungen, deren α - bzw. ω -Limesmengen aus einer einzelnen stationären Lösung bestehen. Neben der Existenz einer Kurve homokliner Lösungen gewinnt man noch Informationen über das Verhalten des Systems in der Nähe dieser Kurve. Diese Methode ist eine der ganz wenigen analytischen Möglichkeiten, die Existenz solcher Lösungen zu beweisen. Eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Bogdanov-Takens Singularität ist, daß die Linearisierung den doppelten Eigenwert $s = 0$ besitzt. Man kann aufgrund der beiden nicht-hyperbolischen Eigenwerte eine Zentrumsmanifoldigkeit bestimmen und ein reduziertes System bezüglich dieser Mannifoldigkeit angeben. Um nun eine Bogdanov-Takens-Verzweigung und damit auch die lokale Existenz homokliner Lösungen beweisen zu können, muß das reduzierte System auf der Zentrumsmanifoldigkeit (in Normalform) gewissen Bedingungen an die Koeffizienten der quadratische Terme genügen, siehe z.B. [76].

Da eine Theorie der Zentrumsmanifoldigkeiten auch für zeitverzögerte Differentialgleichungen existiert (siehe z.B. [61]) und es ein Verfahren gibt, wie man das reduzierte System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf der Zentrumsmanifoldigkeit bestimmt (siehe [38, 39]), kann man die Existenz einer Bogdanov-Takens Singularität im vorliegenden Fall beweisen.

Theorem 2.1 *Sei $q_1 > 2 + q_2$. Das System (2.4) besitzt zwei Bogdanov-Takens-Verzweigungspunkte $bt_i := (Q_{bt}, E_i(Q_{bt}))$, $i = 1, 2$. In einer Umgebung von bt_i in der (Q, E) -Parameterebene existiert*

- eine Kurve sn_i von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten (saddle-node),
- eine Kurve h_i von Hopf-Verzweigungspunkten,
- eine Kurve sl_i von homoklinen Verzweigungen (saddle-loop).

Die Kurven sn_i , h_i und sl_i berühren sich tangential in bt_i . Das System (2.4) besitzt keine weiteren Bogdanov-Takens-Singularitäten.

Der Beweis wird im folgenden gebracht.

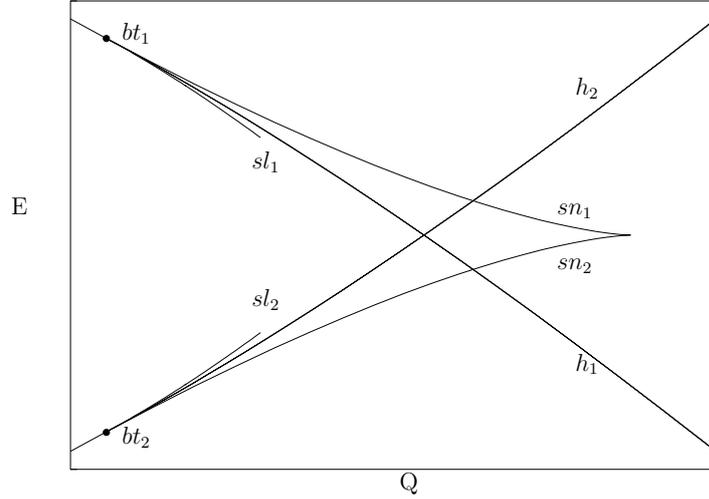


Abbildung 2.9: Die Kurven homokliner Verzweigung sl_1 und sl_2 , die aus den Bogdanov-Takens Singularitäten bt_1 und bt_2 entstanden sind. sn_1 , sn_2 bezeichnen die Sattel-Knoten Kurven und h_1 , h_2 die Hopf-Verzweigungskurven.

Bemerkung 2.12

1. Die Kurve der Sattel-Knoten-Verzweigungspunkte sn_i korrespondiert zu der Kurve $(Q, E_i(Q))$ mit $Q < Q_{\text{csp}}$, siehe Lemma 2.2.
2. Die Kurve h_i der Hopf-Verzweigungspunkte entspricht der Kurve $(Q, \tilde{E}_i(Q))$ für $Q_{\text{bt}} < Q < Q_e$, siehe Lemma 2.6.
3. Die Kurven homokliner Verzweigungen sl_i können durch numerische Methoden bestimmt und fortgesetzt werden, die wir in Kapitel 3.2 beschreiben.
4. Für $q_1 < 2 + q_2$ besitzt (2.4) keine Bogdanov-Takens Singularitäten.
5. Für $q_1 = 2 + q_2$ gilt $Q_{\text{bt}} = Q_{\text{csp}} = (q_2 + 1)^2$. In diesem Fall verschwinden alle quadratischen Terme des reduzierten Systems auf der Zentrumsmannigfaltigkeit. Das bedeutet, daß das System (2.4) eine Singularität der Codimension ≥ 4 besitzt, über deren Entfaltung im unverzögerten Fall wenig bekannt ist. Erste Ergebnisse zu der Entfaltung dieser Singularität (für $r = 0$) findet man in [70]. Unter Symmetrievoraussetzungen an f und $E \equiv 0$ kann man diese Singularität näher untersuchen, was wir in Kapitel 2.4 demonstrieren werden.

Um das System (2.4) in der Nähe der Singularitäten $bt_i = (Q_{\text{bt}}, E_i(Q_{\text{bt}}))$ untersuchen zu können, bestimmen wir ein planares System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit, die zu der doppelten Lösung $s = 0$ der charakteristischen Gleichung (2.7) gehört. Diese Mannigfaltigkeit zu bestimmen, ist im Fall zeitverzögerter Differentialgleichungen schwer, da der zu untersuchende Phasenraum $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$ unendlich dimensional

ist. Auch gewinnt man in der Regel durch das Wissen über die Mannigfaltigkeiten keine tieferen Einsichten in die Geometrie des Systems. In [38] wird eine Methode vorgestellt, wie man das reduzierte System auf der Mannigfaltigkeit bestimmen kann, ohne die Zentrumsmannigfaltigkeit selber berechnen zu müssen. Da wir das Verhalten von (2.4) in Abhängigkeit der Parameter Q und E untersuchen wollen, müssen wir bei unseren Berechnungen das reduzierte System in Abhängigkeit dieser beiden Parameter bestimmen. Zuerst formen wir (2.4) in eine geeignetere Form zur Untersuchung um.

Umschreiben des Systems Sei (\bar{u}, \bar{v}) eine stationäre Lösung von (2.4). Durch einen Koordinatenwechsel

$$(u, v) \mapsto (u - \bar{u}, v - \bar{v})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -u(t) + q_1 g(\bar{u} + u(t-r)) - Qv(t-r) - q_1 g(\bar{u}) \\ \dot{v}(t) &= -v(t) + g(\bar{u} + u(t-r)) - q_2 v(t-r) - g(\bar{u}).\end{aligned}$$

Da wir den Fall einer doppelte Lösung $s = 0$ der charakteristischen Gleichung (2.7) untersuchen wollen, setzen wir

$$\begin{aligned}q_1 g'(\bar{u}_{bt}) &= q_2 + 2 \\ \bar{u} &= \bar{u}_{bt} + \epsilon_1 \\ Q &= Q_{bt} + \epsilon_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -u(t) + q_1 g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1 + u(t-r)) - (Q_{bt} + \epsilon_2)v(t-r) - q_1 g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1) \\ \dot{v}(t) &= -v(t) + g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1 + u(t-r)) - q_2 v(t-r) - g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Definiere den linearen und nichtlinearen Teil von (2.13) durch

$$L(\epsilon)\varphi := -\varphi(0) + \begin{pmatrix} q_1 g'(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1) & -Q_{bt} - \epsilon_2 \\ g'(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1) & -q_2 \end{pmatrix} \varphi(-r)$$

und

$$N(\varphi, \epsilon) := \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} (g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1 + \varphi_1(-r)) - g(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1) - g'(\bar{u}_{bt} + \epsilon_1)\varphi_1(-r))$$

mit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$. Das System (2.13) läßt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = L(\epsilon) \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + N(u_t, v_t, \epsilon)\tag{2.14}$$

mit $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$. Den lineare Teil $L(\epsilon)$ können wir schreiben als

$$L(\epsilon)\varphi = L_0\varphi + L_1\varphi\epsilon + O(\epsilon^2)$$

mit

$$\begin{aligned} L_0\varphi &= \begin{pmatrix} -\varphi_1(0) + q_1g'(\bar{u}_{bt})\varphi_1(-r) - Q_{bt}\varphi_2(-r) \\ -\varphi_2(0) + g'(\bar{u}_{bt})\varphi_1(-r) - q_2\varphi_2(-r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\varphi_1(0) + (2 + q_2)\varphi_1(-r) - Q_{bt}\varphi_2(-r) \\ -\varphi_2(0) + \frac{(2+q_2)}{q_1}\varphi_1(-r) - q_2\varphi_2(-r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$L_1\varphi = \begin{pmatrix} q_1g''(\bar{u}_{bt})\varphi_1(-r) & -\varphi_2(-r) \\ g''(\bar{u}_{bt})\varphi_1(-r) & 0 \end{pmatrix}.$$

Der nichtlineare Teil N besitzt die Taylor-Entwicklung (dafür benötigen wir, daß $g \in C^2$ (siehe Bedingung (H3))

$$N(\varphi, \epsilon) = \frac{1}{2}N_2(\varphi, \epsilon) + O(\varphi^3)$$

mit

$$N_2(\varphi, \epsilon) = g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_1(-r)^2 + O(\epsilon\varphi_1(-r)^2).$$

Phasenraumzerlegung für die Singularität Zu jeder Menge von charakteristischen Lösungen kann man den Phasenraum \mathcal{C} in zwei invariante (mit Bezug auf das lineare System) Unterräume zerlegen. Mit Hilfe dieser Unterräume erhält man auch Informationen über das nichtlineare System (siehe [61]), z.B. kann man invariante Mannigfaltigkeiten der stationären Lösungen als Graph über diesen Eigenräumen bestimmen. In der vorliegenden Situation zerlegen wir den Phasenraum zu der doppelten charakteristischen Lösung $s = 0$, also zu der Menge $\Lambda := \{0\}$. In der Notation folgen wir [61] bzw. [38]. Der zu L_0 korrespondierende infinitesimale Generator \mathcal{A} ist gegeben durch

$$\mathcal{A}\varphi = \dot{\varphi}$$

mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in C^1([-r, 0], \mathbb{R}^2) \mid \dot{\varphi}(0) = -\varphi(0) + A\varphi(-r)\},$$

dabei ist die Koppelmatrix A in diesem Fall gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 + q_2 & -Q_{bt} \\ \frac{(q_2+1)^2}{Q_{bt}} & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Der infinitesimale Generator des adjungierten Problems ist gegeben durch

$$\mathcal{A}^*\varphi = -\dot{\psi}$$

mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{\psi \in C^1([-r, 0], \mathbb{R}^{2*}) \mid -\dot{\psi}(0) = -\psi(0) + \psi(r)A\},$$

dabei bezeichnet \mathbb{R}^{2*} den Raum der zweidimensionalen Reihenvektoren.

Lemma 2.10 Sei $q_1 > 2 + q_2$, $Q = Q_{bt}$ und $E = E_i(Q_{bt})$, $i = 1, 2$. Es sei

$$\Phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)) := \begin{pmatrix} q_2 + 1 & (q_2 + 1)\theta + r + 1 \\ \frac{1}{q_1}(q_2 + 2) & \frac{1}{q_1}(q_2 + 2)\theta \end{pmatrix},$$

$$\Psi(s) = \text{col}(\psi_1(s), \psi_2(s)) := \frac{1}{(r + 1)^2} \begin{pmatrix} -s - \frac{r}{r+1} & \frac{q_1(q_2+1)}{q_2+2}s + \frac{q_1((r+1)^2+r(q_2+1))}{(q_2+2)(r+1)} \\ 1 & -\frac{q_1(q_2+1)}{q_2+2} \end{pmatrix}.$$

Dann bilden Φ und Ψ Basen für die verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{M}_0(\mathcal{A})$ und $\mathcal{M}_0(\mathcal{A}^*)$ für die doppelte Lösung $s = 0$ der charakteristischen Gleichung (2.7). Weiterhin erfüllen Φ und Ψ die Eigenschaft $(\Psi, \Phi) = I_2$ bezüglich des Standardskalarprodukts

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) d[\eta(\theta)] \phi(\xi) d\xi.$$

Beweis: Für $Q = Q_{bt}$, $E = E_i(Q_{bt})$, $i = 1, 2$ erfüllt die dazugehörige stationäre Lösung die Gleichung $q_1 g'(\bar{u}_{bt}) = 2 + q_2$. Damit vereinfacht sich die Koppelmatrix A zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 + q_2 & -Q_{bt} \\ \frac{(q_2+1)^2}{Q_{bt}} & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht verifizieren, daß $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Dazu muß man prüfen, ob die linearen Gleichungen $\dot{\phi}_i(0) = -\phi_i(0) + A\phi(-r)$ bzw. $-\dot{\psi}_i(0) = -\psi_i(0) + \psi_i(r)A$ erfüllt sind, was durch elementares Nachrechnen zu bewerkstelligen ist. Man beachte, daß die ϕ_i, ψ_i stetig differenzierbar auf $[-r, 0]$ bzw. $[0, r]$ sind.

Da die Koppelmatrix A den doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt, hat die charakteristische Gleichung (2.7) eine doppelte Lösung $s = 0$ (siehe Bemerkung 2.5 und Lemma 2.6). Man rechnet nach

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi_1 &= 0 & (\mathcal{A}^*)^2 \psi_1 &= 0 \\ (\mathcal{A})^2 \phi_2 &= 0 & \mathcal{A}^* \psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dabei berücksichtigt man, daß $\mathcal{A}\phi_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{A}^*\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Da ϕ_1, ϕ_2 bzw. ψ_1, ψ_2 linear unabhängig sind, bilden Φ bzw. Ψ Basen für die verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{M}_0(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{M}(\mathcal{A}^*)$. Außerdem kann man direkt nachrechnen, daß $(\psi_j, \phi_i) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ gilt. \square

Mit den so bestimmten Basen der Eigenräume zerlegt man den Phasenraum in zwei (bezüglich des linearen Problems) invariante Unterräume, also $\mathcal{C} = P \oplus Q$, wobei P ein zweidimensionaler Unterraum ist, der durch Φ aufgespannt wird. Jedes $\phi \in \mathcal{C}$ wird somit geschrieben als $\phi = \phi^P + \phi^Q$, wobei $P \ni \phi^P = \Phi(\Psi, \phi)$. $\Phi(\Psi, \cdot)$ definiert eine Projektion von \mathcal{C} auf P . Es gilt

$$\dot{\Phi} = \Phi B \quad \text{mit } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B stellt den linearen Anteil des reduzierten Systems auf der Zentrumsmanigfaltigkeit dar und spielt in unseren folgenden Berechnungen eine wichtige Rolle. B charakterisiert für gewöhnliche Differentialgleichungen (bis auf Jordan-Äquivalenz) eine notwendige Bedingung für die Existenz eine Bogdanov-Takens-Singularität (siehe [76]).

Reduktion der quadratischen Terme Wir wenden uns nun dem System auf der Zentrumsmanigfaltigkeit zu. Jedes Element $(u_t, v_t) \in \mathcal{C}$ von (2.4) kann durch die gerade geschilderte Phasenraumzerlegung geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \Phi x(t) + y_t$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und $y_t \in \mathcal{Q}$. Das reduzierte zweidimensionale System auf der Zentrumsmanigfaltigkeiten kann nach [38] bestimmt werden als

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + \bar{h}_2(x(t), 0) + O(3),$$

wobei \bar{h}_2 die Terme zweiter Ordnung in Normalform sind. Die quadratischen Terme von (2.13) sind bestimmt durch (siehe [38])

$$\begin{aligned} h_2(x, 0) &:= \frac{1}{2} \Psi(0) (2L_1(\Phi x)\epsilon + N_2(\Phi x, 0)) \\ &= \frac{1}{2} \Psi(0) \left(\sum_{|(q_1, q_2, l_1, l_2)|=2} A_{q_1, q_2, l_1, l_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \epsilon_1^{l_1} \epsilon_2^{l_2} \right), \end{aligned}$$

die wir im folgenden auf Normalform reduzieren wollen. Wir bestimmen die Koeffizienten A_{q_1, q_2, l_1, l_2} durch eine einfache Rechnung als

$$\begin{aligned} A_{2,0,0,0} &= (q_2 + 1)^2 g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix}, & A_{1,1,0,0} &= -2(q_2 + 1)(q_2 r - 1) g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A_{0,2,0,0} &= (q_2 r - 1)^2 g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix}, & A_{1,0,1,0} &= 2(q_2 + 1) g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A_{0,1,1,0} &= -2(q_2 r - 1) g''(\bar{u}_{bt}) \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix}, & A_{1,0,0,1} &= \frac{1}{q_1} (q_2 + 2) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ A_{0,1,0,1} &= \frac{1}{q_1} (q_2 + 2) \begin{pmatrix} 2r \\ 0 \end{pmatrix}, & A_{0,0,2,0} &= A_{0,0,1,1} = A_{0,0,0,2} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.13 Beachte, daß die Koeffizienten A_{q_1, q_2, l_1, l_2} neben den Parametern q_1, q_2 und \bar{u}_{bt} auch von der Zeitverzögerung $r \geq 0$ abhängen.

Wir betrachten nun die kanonische Basis des Raums $V_2^4(\mathbb{C}^2)$, dem Raum der quadratischen Polynome in den Unbekannten $x_1, x_2, \epsilon_1, \epsilon_2$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \epsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \epsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon_1 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und berechnen das Bild unter der Lie-Klammer $M_2^1 := [B, \cdot]$ als

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \epsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \epsilon_1 \\ x_2 \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \epsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \epsilon_2 \\ x_2 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} -\epsilon_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\epsilon_1 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\epsilon_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wähle

$$\text{Im}(M_2^1)^c = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \epsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beachte, daß die Wahl der obigen Basis nicht eindeutig ist. In der Wahl der Basis unterscheiden sich z.B. die Normalform von Bogdanov [14] und die Normalform von Takens [99], als sie die Singularität für gewöhnliche Differentialgleichungen untersuchten. Das dynamische Verhalten der Systeme ist dabei (fluß-)äquivalent. Wir bestimmen

$$\bar{h}_2(x, 0) = h_2(x, 0) - [B, U_2](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ (C_1 \epsilon_1 + C_2 \epsilon_2)x_1 + (C_3 \epsilon_1 + C_4 \epsilon_2)x_2 + \bar{a}x_1^2 + \bar{b}x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{2,0,0,0} = \frac{1}{2} \frac{q_1 (q_2 + 1)^2 g''(\bar{u}_{bt})}{(r + 1)^2 (q_2 + 2)}, \\ \bar{b} &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{1,1,0,0} + \Psi_1(0) A_{2,0,0,0} = q_1 (q_2 + 1) \frac{(r + 1)^2 + q_2 + 1}{(r + 1)^3 (q_2 + 2)} g''(\bar{u}_{bt}), \\ C_1 &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{1,0,1,0} = \frac{q_1 (q_2 + 1) g''(\bar{u}_{bt})}{(r + 1)^2 (q_2 + 2)}, \\ C_2 &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{1,0,0,1} = -\frac{(q_2 + 2)}{q_1 (r + 1)^2}, \\ C_3 &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{0,1,1,0} + \frac{1}{2} \Psi_1(0) A_{1,0,1,0} = \frac{q_1 ((r + 1)^2 + q_2 + 1)}{(r + 1)^3 (q_2 + 2)} g''(\bar{u}_{bt}), \\ C_4 &= \frac{1}{2} \Psi_2(0) A_{0,1,0,1} + \frac{1}{2} \Psi_1(0) A_{1,0,0,1} = \frac{(q_2 + 2)r(r + 2)}{q_1 (r + 1)^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß sowohl \bar{a} als auch \bar{b} von Null verschieden sind. Es gilt sogar, daß \bar{a} und \bar{b} dasselbe Vorzeichen besitzen, also $\bar{a}\bar{b} > 0$. Wir führen nun zwei neue Parameter ν_1, ν_2 ein, um das System auf der Zentrumsmannigfaltigkeit besser untersuchen zu können. Wir definieren

$$\begin{aligned} \nu_1 &:= C_1 \epsilon_1 + C_2 \epsilon_2 \\ \nu_2 &:= C_3 \epsilon_1 + C_4 \epsilon_2. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

ist für $\bar{u}_{bt} \neq 0$ nicht-singulär, da

$$\begin{aligned} \det C &= C_1 C_4 - C_2 C_3 \\ &= \frac{g''(\bar{u}_{bt})}{(r + 1)^5} (r(r + 2)(q_2 + 1) + (r + 1)^2 + q_2 + 1) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Folglich ist die obige Parametertransformation $(\nu_1, \nu_2)^T = C(\epsilon_1, \epsilon_2)^T$ invertierbar. Man beachte, daß aus der Bedingung $q_1 > 2 + q_2$ $\bar{u}_{bt} \neq 0$ folgt (siehe Lemma 2.6). Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen.

Theorem 2.2 Für $q_1 > 2 + q_2$, $Q = Q_{bt}$ und $E = E_i(Q_{bt})$ existiert eine Zentrumsmannigfaltigkeit für (2.4), die tangential zu dem von Φ aufgespannten zweidimensionalen Raum P ist. Der Fluß auf dieser Mannigfaltigkeit ist in Normalform gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + O(|x|^3 + |x^2\nu|) \\ \dot{x}_2 &= \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \bar{a}x_1^2 + \bar{b}x_1x_2 + O(|x|^3 + |x^2\nu|).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dabei sind die Koeffizienten wie oben definiert. Darüberhinaus gilt $\bar{a}\bar{b} > 0$.

Bemerkung 2.14 Der degenerierte Fall $q_1 = 2 + q_2$ kann in dem gerade vorgestellten Rahmen nicht behandelt werden, denn die Koeffizienten der quadratischen Terme in der Normalform \bar{a} und \bar{b} verschwinden gleichzeitig, da in diesem Fall $\bar{a}_{bt} = 0$ gilt. Somit ist man gezwungen, die Terme höherer Ordnung in den Berechnungen zu berücksichtigen. Diese sind aber in der Regel nicht einfach zu erhalten, da man nun auch den unendlich-dimensionalen Anteil (basierend auf dem Eigenraum Q) beachten muß, was die Rechnung sehr erschwert. Durch einen Potenzreihenansatz und das Lösen mehrerer Randwertprobleme ist es zwar möglich, die Koeffizienten der Terme dritter Ordnung zu bestimmen. Dies soll aber an dieser Stelle nicht demonstriert werden. Dieses Vorgehen bedeutet implizit das Bestimmen der quadratischen Terme der Zentrumsmannigfaltigkeit. Dies kann beim Bestimmen der quadratischen Terme vermieden werden. Der degenerierte Fall $q_1 = q_2 + 2$ bedeutet anschaulich, daß die beiden Sattel-Knoten- und Hopf-Verzweigungspunkte für $Q = (q_2 + 1)^2$ und $E = 0$ zusammenfallen, was eine Singularität der Codimension ≥ 4 nach sich zieht, siehe [70]. Unter gewissen Voraussetzungen können einige Phänomene dieser Singularität untersucht werden, was wir in Abschnitt 2.4 demonstrieren wollen.

Verzweigungseigenschaften von (2.15) Nachdem wir das System auf der Zentrumsmannigfaltigkeit in Theorem 2.2 bestimmt haben, wollen wir nun die Verzweigungseigenschaften dieses reduzierten Systems in Abhängigkeit der Parameter ν_1, ν_2 untersuchen und anschließend die Ergebnisse auf unsere ursprünglichen Parameter ϵ_1, ϵ_2 übertragen, die das Verhalten von (2.4) in der (Q, E) -Parameterene beschreiben. Durch eine Zeitskalierung $t \mapsto \frac{\bar{b}}{a}$ und einen Koordinatenwechsel $x_1 = \frac{\bar{a}}{\bar{b}^2}\eta_1, x_2 = \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}^3}\eta_2$ verändert sich (2.15) zu

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &:= \eta_2 + O(|\eta|^3 + |\eta|^2|\beta|) \\ \dot{\eta}_2 &:= \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + O(|\eta|^3 + |\eta|^2|\beta|)\end{aligned}$$

mit $\beta_1 := \nu_1 \frac{\bar{b}^2}{a^2}$ und $\beta_2 := \nu_2 \frac{\bar{b}}{a}$. Ergebnisse aus der Verzweigungstheorie (siehe [76]) implizieren für kleine $|\eta|, |\beta|$ die lokale topologische Äquivalenz des obigen Systems zu

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &:= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &:= \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + \eta_1^2 + \eta_1\eta_2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

In [66] wird eine komplette Verzweigungsanalyse von (2.16) präsentiert. Wir erhalten in der (β_1, β_2) -Ebene:

1. Für $(0, \beta_2)$ durchläuft (2.16) eine transkritische Verzweigung am Ursprung.
2. $(\beta_1, 0)$ mit $\beta_1 < 0$ bzw. (β_1, β_1) mit $\beta_1 > 0$ definieren Kurven, für die (2.16) eine subkritische Hopf-Verzweigung besitzt.

3. $(\beta_1, \frac{1}{7}\beta_1)$ mit $\beta_1 < 0$ bzw. $(\beta_1, \frac{6}{7}\beta_1)$ für $\beta_1 > 0$ definieren Kurven von homoklinen Verzweigungspunkten. Die homoklinen Verzweigungen sind von der Codimension 1.

Da der Parameterwechsel von ϵ nach β bijektiv ist (da $\det C \neq 0$), findet jede der gerade angegebenen Verzweigungskurven ihre Entsprechung in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene. Die entsprechenden Kurven in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene sind (siehe Abbildung 2.10):

1. Die Kurve T transkritischer Verzweigungen ist durch $\epsilon_2 = -\frac{C_1}{C_2}\epsilon_1 = \frac{q_1(q_2+1)g''(\bar{u}_{bt})}{(q_2+2)^2}$ gegeben.

2. Zwei Kurven H_-, H_+ subkritischer Hopf-Verzweigungen, definiert durch

a) $\epsilon_2 = -\frac{q_1^2 g''(\bar{u}_{bt})}{(q_2+2)^2 r(r+2)} ((r+1)^2 + q_2 + 1) \epsilon_1$ für $\text{sign}\epsilon_1 = -\text{sign}g''(\bar{u}_{bt})$,

b) $\epsilon_2 = \frac{q_1^2 (q_2+1) g''(\bar{u}_{bt})}{(q_2+2)^2 ((q_2+3)(r+1)^2 + q_2+1)} ((r+1)^2 + q_2 + 1) \epsilon_1$ für $\text{sign}\epsilon_1 = \text{sign}g''(\bar{u}_{bt})$,

3. Die Kurven SL_-, SL_+ homokliner Verzweigungen

a) $\epsilon_2 = -\frac{5}{2} q_1^2 (q_2 + 1) g''(\bar{u}_{bt}) \frac{(r+1)^2 + q_2 + 1}{(q_2+2)^2 ((7q_2+9)(r+1)^2 - 5(q_2+1))} \epsilon_1$ für $\text{sign}\epsilon_1 = -\text{sign}g''(\bar{u}_{bt})$,

b) $\epsilon_2 = \frac{5}{2} q_1^2 (q_2 + 1) g''(\bar{u}_{bt}) \frac{(r+1)^2 + q_2 + 1}{(q_2+2)^2 ((7q_2+19)(r+1)^2 + 5(q_2+1))} \epsilon_1$ mit $\text{sign}\epsilon_1 = \text{sign}g''(\bar{u}_{bt})$.

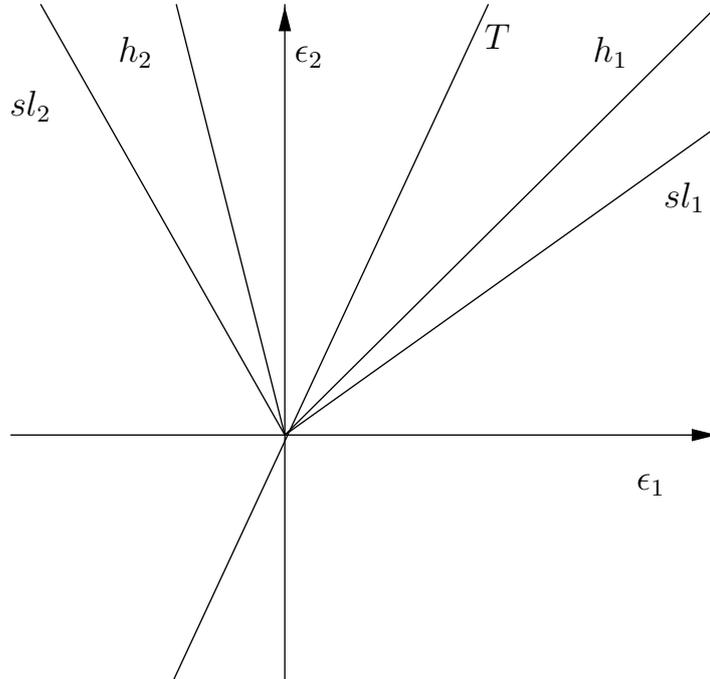


Abbildung 2.10: Verzweigungsdiagramm für (2.4) in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene.

Beweis von Theorem 2.1 Für eine kleine Umgebung von $(Q, E) = (Q_{bt}, E_i(Q_{bt}))$ und der dazugehörigen stationären Lösung $(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\bar{u}_{bt,i}, \frac{g(\bar{u}_{bt,i})}{q_2+1}\right)$, $i = 1, 2$, gilt nach Theorem 2.2, daß das Verhalten von (2.4) durch ein zweidimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.15) beschrieben werden kann. Diese kleine Umgebung wird durch die beiden Parameter ϵ_1, ϵ_2 beschrieben. Mit Hilfe der Ergebnisse aus [66] kann das System (2.15) analysiert werden. Da die durchgeführten Parametertransformationen alle bijektiv sind, übertragen sich die Verzweigungskurven, d.h. Kurven transkritischer, Hopf- und homokliner Verzweigung, auf die ϵ_1, ϵ_2 -Ebene (siehe Abbildung 2.10). Es gilt $\bar{u}_{bt,1} < 0 < \bar{u}_{bt,2}$. Nach Voraussetzungen (H3) an die Nichtlinearität g gilt

$$g''(\bar{u}_{bt,1}) > 0, \quad g''(\bar{u}_{bt,2}) < 0.$$

Daher können folgende Aussagen getroffen werden. Die Kurve T transkritischer Verzweigungen entspricht einer Kurve von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten sn_i in der (Q, E) -Parameter Ebene. Die Kurven H_+, H_- finden ihre Entsprechung in einer eindeutigen Kurve h_i von Hopf-Verzweigungspunkten in der (Q, E) -Ebene und die Kurven SL_-, SL_+ repräsentieren eine eindeutige Kurve sl_i homokliner Verzweigungen der Codimension 1 in der (Q, E) -Ebene. Somit sind die Aussagen von Theorem 2.1 bewiesen.

2.4 \mathbb{Z}_2 -Symmetrie

Wie wir in Bemerkung 2.14 festgestellt haben, ist es schwierig, die degenerierte Situation $q_1 = q_2 + 2$, $Q = Q_{bt} = (q_2 + 1)^2$, $E = 0$ vollständig zu untersuchen. Im folgenden setzen wir zusätzlich zu der Bedingung (H3) voraus

(H4) $g \in C^3$ ist eine ungerade Funktion, d.h. es gilt $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zusätzlich gelte $g'''(0) \neq 0$ und $E \equiv 0$ für (2.4).

Diese Symmetrievoraussetzung an (2.4), die in der Literatur auch \mathbb{Z}_2 -Symmetrie genannt wird (siehe z.B. [19, 55, 76]), ermöglicht es, die Singularität mit Parametern $q_1 = q_2 + 2 + \epsilon_1$ und $Q = Q_{bt} + \epsilon_2$ zu untersuchen. Dieser Fall wurde für gewöhnliche Differentialgleichungen von [99] untersucht, siehe auch [19, 55]. Berücksichtigen wir die zusätzliche Voraussetzung (H4), ergibt sich für (2.4) das folgende System

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u(t) + (q_2 + 2 + \epsilon_1)u(t-r) - ((q_2 + 1)^2 + \epsilon_2)v(t-r) \\ &\quad + \frac{1}{6}g'''(0)(q_2 + 2)u(t-r)^3 + O(\epsilon_1 u(t-r)^3, u(t-r)^4) \\ v(t) &= -v(t) + u(t-r) - q_2 v(t-r) + \frac{1}{6}g'''(0)u(t-r)^3 + O(u(t-r)^4). \end{aligned}$$

Da alle quadratischen Terme in der vorliegenden Situation (in u und v) verschwinden, kann man mit dem gleichen Ansatz wie bei der Untersuchung der Bogdanov-Takens-Singularität vorgehen und direkt auf die Terme dritter Ordnung zurückgreifen. Die Basen Φ und Ψ erfüllen dann aufgrund der gewählten Parameterkonstellation ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$) das folgende Lemma (siehe Lemma 2.10).

Lemma 2.11 *Es gelte (H1) – (H4). Die Basen*

$$\Phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)) := \begin{pmatrix} q_2 + 1 & (q_2 + 1)\theta + r + 1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix},$$

$$\Psi(s) = \text{col}(\psi_1(s), \psi_2(s)) := \frac{1}{(r+1)^2} \begin{pmatrix} -s - \frac{r}{r+1} & (q_2 + 1)s + \frac{(r+1)^2 + r(q_2+1)}{(r+1)} \\ 1 & -(q_2 + 1) \end{pmatrix}.$$

spannen die verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{M}_0(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{M}_0(\mathcal{A}^*)$ zu der charakteristischen Lösung $s = 0$ auf und erfüllen die Normalisierungseigenschaft $(\Psi, \Phi) = I_2$.

Alle nichtlinearen Terme von Bedeutung sind dann

$$h(x) = \Psi(0) \left[\begin{pmatrix} (\Phi(-r)x)_1 \epsilon_1 - (\Phi(-r)x)_2 \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} g'''(0) (\Phi(-r)x)_1^3 \begin{pmatrix} q_2 + 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \Psi(0) \sum_{|(i_1, i_2, l_1, l_2)|=2,3} A_{i_1, i_2, l_1, l_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \epsilon_1^{l_1} \epsilon_2^{l_2}$$

mit

$$A_{1010} = (q_2 + 1)e_1 \quad A_{0110} = (1 - rq_2)e_1 \quad A_{1001} = -e_1 \quad A_{0101} = re_1$$

$$A_{3000} = (q_2 + 1)^3 d \quad A_{2100} = 3(q_2 + 1)^2 (1 - rq_2) d$$

$$A_{1200} = 3(q_2 + 1)(1 - rq_2)^2 d \quad A_{0300} = (1 - rq_2)^3 d$$

und

$$d = g'''(0) \begin{pmatrix} q_2 + 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e_1 bezeichnet den kanonischen Einheitsvektor im \mathbb{R}^2 . Die übrigen Koeffizienten sind identisch Null. Wir können nun analoge Rechnungen zum Bogdanov-Takens Fall heranziehen, die wir an dieser Stelle nicht demonstrieren wollen. Die Ergebnisse fassen wir zusammen.

Theorem 2.3 *Es gelte (H1) – (H4). Das reduzierte System auf der Zentrumsmannigfaltigkeit in Normalform ist gegeben durch*

$$\dot{x}_1 = x_2 + O(|x|^4 + |x^3 \nu|) \tag{2.17}$$

$$\dot{x}_2 = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \bar{a} x_1^3 + \bar{b} x_1^2 x_2 + O(|x|^4 + |x^3 \nu|) \tag{2.18}$$

mit

$$\bar{a} \bar{b} > 0$$

$$\nu_1 = C_1 \epsilon_1 + C_2 \epsilon_2$$

$$\nu_2 = C_3 \epsilon_1 + C_4 \epsilon_2.$$

Beweis: Im Beweis wollen wir nur die Formeln für die Berechnung der Koeffizienten $\bar{a}, \bar{b}, \nu_{1,2}$ angeben. Für die Terme dritter Ordnung wählen wir als Basis für die resonanten Terme die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Nach einer Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \Psi_2(0)A_{3,0,0,0} = \frac{1}{6}g'''(0)\frac{(q_2+1)^3}{(r+1)^2} \\ \bar{b} &= \Psi_2(0)A_{2,1,0,0} + 3\Psi_1(0)A_{3,0,0,0} \\ &= \frac{1}{2}g'''(0)(q_2+1)^2\frac{r^3(q_2+1) + r^2(q_2+2)^2 + r(q_2+3) + q_2+2}{(r+1)^3} \\ \nu_1 &= C_1\epsilon_1 + C_2\epsilon_2 \\ \nu_2 &= C_3\epsilon_1 + C_4\epsilon_2.\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Koeffizienten für ν_1, ν_2 schon in Theorem 2.2 berechnet worden sind, also

$$\begin{aligned}C_1 &= \Psi_2(0)A_{1,0,1,0} = \frac{q_2+1}{(r+1)^2}, \\ C_2 &= \Psi_2(0)A_{1,0,0,1} = -\frac{1}{(r+1)^2}, \\ C_3 &= \Psi_2(0)A_{0,1,1,0} + \Psi_1(0)A_{1,0,1,0} = -\frac{q_2r(r+2)-1}{(r+1)^3}, \\ C_4 &= \Psi_2(0)A_{0,1,0,1} + \Psi_1(0)A_{1,0,0,1} = \frac{(r+1)^2-1}{(r+1)^3}.\end{aligned}$$

Wir halten fest, daß der Parameterübergang von ϵ nach ν invertierbar ist, da $C_1C_4 - C_2C_3 = \frac{1}{(r+1)^3} \neq 0$. Außerdem gilt $\bar{a}\bar{b} > 0$. \square

Theorem 2.4 *Das System auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ist topologisch äquivalent zu*

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &:= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &:= \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + \eta_1^3 + \eta_1^2\eta_2.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Dabei besitzt das System (2.19) folgende Verzweigungskurven:

1. Für $(\beta_1, 0)$, $\beta_1 < 0$ besitzt das System eine superkritische Hopf-Verzweigung.
2. $(0, \beta_2)$ stellt eine Kurve von Pitchfork-Verzweigungen dar.
3. Für $\beta_2 = \beta_1$, $\beta_1 > 0$ durchlaufen die beiden zusätzlichen stationäre Lösungen eine Hopf-Verzweigung.
4. $\beta_2 = \frac{4}{5}\beta_1 + O(\beta_1)$ für $\beta_1 > 0$ beschreibt eine Kurve doppelter homokliner Verzweigungen (figure-8 configuration).
5. $\beta_2 = c\beta_1 + O(\beta_1)$ für $\beta_1 > 0$ besitzt das System Sattel-Knoten-Punkte von periodischen Lösungen. Dabei ist $c \sim 0.752$.

Beweis: Wir führen die Zeitskalierung $t \mapsto \frac{b}{a}t$ und Koordinatentransformation $\eta_1 = \frac{|b|}{\sqrt{|a|}}x_1$, $\eta_2 = \frac{b^2}{|a|^{\frac{3}{2}}}x_2$ für (2.17) durch und erhalten die gewünschte Form mit $\beta_1 := \frac{b^2}{a^2}\nu_1$ und $\beta_2 := \frac{b}{a}\nu_2$, wobei die Terme höherer Ordnung weiterhin vorhanden sind. Die topologische Konjugiertheit dieses Systems zu dem System (2.19) ohne die Terme höherer Ordnung folgt nach [19]. In [19] und [76] findet man auch eine vollständige Analyse der vorkommenden Verzweigungsphänomene. \square

Wendet man Theorem 2.4 auf das ursprüngliche System (2.4) an, so gilt

Korollar 2.2 *Es gelten die Bedingungen (H1) – (H4). Dann besitzt das System (2.4) in der (q_1, Q) -Parameterene die folgenden Verzweigungskurven:*

1. eine Kurve von Pitchfork-Verzweigungen $Q = (1 + q_2)(q_1 - 1)$.
2. eine Kurve h^b , auf der die eindeutige stationäre Lösung $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ eine Hopf-Verzweigung durchläuft.
3. eine Kurve h^s , auf denen die beiden zusätzlichen stationären Lösungen eine Hopf-Verzweigung durchlaufen.
4. eine Kurve $snpo$, auf der eine Sattel-Knoten-Verzweigung periodischer Lösungen stattfindet.
5. eine Kurve dl , auf der symmetrische homokline Verzweigungspunkte existieren (eight-figure).

Bemerkung 2.15

1. Die Pitchfork-Verzweigungspunkte kann man einfach berechnen, vergleiche auch Lemma 2.2.
2. Die übrigen Verzweigungskurven kann man approximativ durch Zurücktransformation der Parameter bestimmen (siehe Theorem 2.4).
3. Der Schnittpunkt der Kurven $\tilde{E}_i(Q)$, die die Hopf-Verzweigung in der (Q, E) -Ebene beschreiben, auf der Geraden $E = 0$, entspricht der Kurve h^s , falls $q_1 > q_2 + 2$ und der Kurve h^b , falls $q_1 < q_2 + 2$.

2.5 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt möchten wir die analytischen Ergebnisse für das planare System (2.4) durch numerische Resultate verdeutlichen und neue Erkenntnisse über das Gesamtverhalten des Systems gewinnen. Wir betrachten das System (2.4) mit der sigmoiden Nichtlinearität

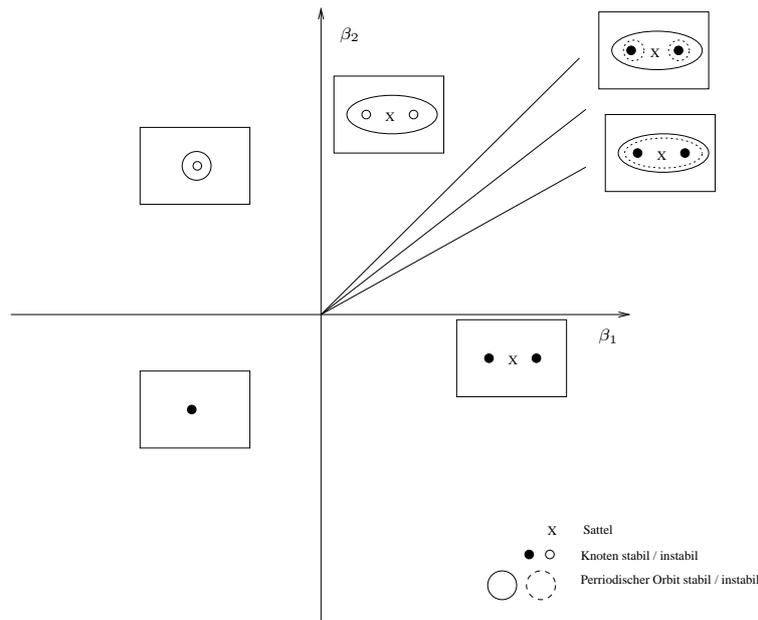
$$g(x) := \frac{1}{1 + \exp(-4x)} - \frac{1}{2}.$$

g erfüllt sowohl (H3) als auch (H4). Als Systemparameter wählen wir

$$q_1 = 2.6, q_2 = 0, r = 1.0.$$

Wir haben q_1, q_2 so gewählt, daß die Bedingung $q_1 > q_2 + 2$ erfüllt ist. Aus Theorem 2.1 folgt dann die Existenz von Kurven in der (Q, E) -Ebene, auf denen das System (2.4)

1. eine Sattel-Knoten-Verzweigung besitzt.
2. eine Hopf-Verzweigung durchläuft.
3. eine homokline Verzweigung durchläuft.



Abbildungung 2.11: Das Verzweigungsdiagramm in der (β_1, β_2) -Ebene mit vereinfachten Phasenportraits. Diese Kurven übertragen sich in eindeutiger Weise auf Verzweigungskurven in die (Q, q_1) -Parameterebene.

Dabei treffen sich diese Kurven tangential in den Bogdanov-Takens-Singularitäten bt_i . Die ersten beiden Kurven kann man global mit Lemma 2.2 bzw. Lemma 2.6 (siehe auch 2.9) in der (Q, E) -Parameterebene fortsetzen. Dagegen gelten die Aussagen über die homoklinen Verzweigungen nur lokal in einer Umgebung der Bogdanov-Takens-Singularitäten bt_i . Daher wollen wir mit numerischen Methoden diesen Zweig homokliner Lösungen in der (Q, E) -Parameterebene verfolgen. Dabei kommt die Methode zum Einsatz, die wir in Abschnitt 3.2 vorstellen.

Homokline Lösungen Die Zweige homokliner Lösungen sl_1 und sl_2 , die aus den Bogdanov-Takens-Singularitäten bt_i entstehen, treffen sich in einem Punkt $dl = (1.4595, 0)$. An dieser Stelle besitzt das System eine doppelte homokline Lösung (*eight figure*), deren Existenz wir im Abschnitt über die \mathbb{Z}_2 -Symmetrie in der Nähe einer Singularität bewiesen haben, d.h. $q_1 = 2, Q = 1$. In der vorliegenden Situation ist man weit von dieser Singularität entfernt, aber die numerischen Untersuchungen im nächsten Abschnitt deuten an, daß diese lokalen Ergebnisse auch auf unsere Parameterwahl ausgedehnt werden können. Verfolgt man die Kurven homokliner Lösungen sl_1 und sl_2 weiter, so enden sie tangential an den Punkten snl_1 bzw. snl_2 an den Sattel-Knoten-Verzweigungskurven sn_2 bzw. sn_1 , siehe Abbildung 2.13. An diesen Stellen finden wir homokline Orbits zu einem nicht-hyperbolischen Equilibrium. Der homokline Orbit verbindet den stabilen Teil der Zentrumsmannigfaltigkeit $W_{loc}^{c,s}$ mit der instabilen Mannigfaltigkeit W_{loc}^u des nicht-hyperbolischen Equilibriums. [24, 91] untersuchen solche Situationen für gewöhnliche Differentialgleichungen und geben eine zweidimensionale Entfaltung dieser Singularität an. Neben den schon bekannten Verzweigungskurven sn_i bzw. sl_i impliziert eine solche Codimension 2-Verzweigung eine Kurve von heteroklinen Verbindungen hyperbolischer Equilibria und eine Kurve $sn_{\text{hom},i}$ weiterer homokliner Orbits zu einem nicht-hyperbolischen Equilibrium, die $W_{loc}^{c,u}$ mit $W_{loc}^{c,s}$ verbinden, siehe auch Abbildung 2.17. Numerische Resultate

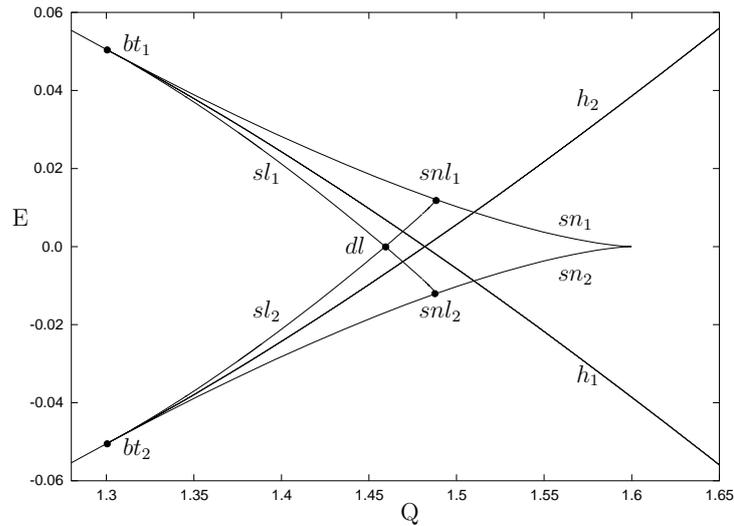


Abbildung 2.12: Das Verzweigungsdiagramm in der (Q, E) -Ebene. Die Kurven homokliner Lösungen $sl_{1,2}$ enden tangential an den Kurven $sn_{2,1}$. Für $dl = (1.4595, 0)$ besitzt das System eine doppelte homokline Lösung.

für den Fall $q_2 = 0, r = 0$ zeigen ein äquivalentes Verzweigungsverhalten [48].

Der symmetrische Fall Um das Verzweigungsdiagramm mit numerischen Methoden weiter zu komplettieren, untersuchen wir nun das Verhalten für $E = 0$, was wir mit analytischen Mitteln lokal in Kapitel 2.4 getan haben. Für unseren Systemparameter besitzt (2.4) für $Q_h = 1.4819$ eine Hopf-Singularität, siehe Lemma 2.9. Es gilt $0 = \tilde{E}_1(Q_h) = \tilde{E}_2(Q_h)$. Es zweigt jeweils ein Ast periodischer Lösungen für $Q < Q_h$ von den stationären Lösungen $\bar{u}_{1,3} = (\bar{u} = \mp 0.3012, \mp 0.2693)$ ab, wobei die Verzweigungsrichtung mit Hilfe eines Computeralgebrasystems [103] (siehe Bemerkung 2.11) bestimmt worden ist. Die Kollokationsmethoden aus Kapitel 3.1 ermöglichen das numerische Fortsetzen dieser Zweige unter Variation des Parameters Q , siehe Abbildung 2.5. Der Zweig dieser periodischen Lösungen, die bei Projektion auf die $(u(t), v(t))$ -Ebene die stationäre Lösung (\bar{u}_1, \bar{v}_1) bzw. (\bar{u}_3, \bar{v}_3) umkreisen, enden an der doppelten homoklinen Lösung bei $dl = (1.4595, 0)$. Desweiteren ist noch der Zweig der *großen* periodischen Lösungen aufgetragen, den man numerisch durch das Lösen von einem Anfangswertproblem und dem anschließendem Fortsetzen durch die Kollokationsmethode gewinnt. Diese Lösungen nennen wir *groß*, da sie bei der Projektion auf die $(u(t), v(t))$ -Ebene drei stationäre Lösungen umkreisen. Die Verzweigungstheorie impliziert die lokale Existenz dieser Lösungen in der Nähe der Singularität $q_1 = 2, Q = 1$ im Falle der \mathbb{Z}_2 -Symmetrie (siehe Theorem 2.4). Durch das numerische Fortsetzen findet man einen (globalen) Verzweigungspunkt $snpo_0 = (1.4544, 0)$ periodischer Lösung, an dem die *großen* periodischen Lösungen eine Sattel-Knoten-Verzweigung durchlaufen. Der Zweig endet ebenso wie die Zweige, die aus den Hopf-Verzweigungspunkten entstanden sind, an der doppelten homoklinen Lösung dl . Der Unterschied in dem Verzweigungsdiagramm erklärt sich daraus, daß bei dem kleinen Ast die homokline Lösung durch periodische Orbits von innen und bei dem großen Ast durch große periodische Orbits von außen approximiert wird (doppelte Amplitude), siehe Abbildung 2.5. Man erkennt außerdem, daß das numerische Verfahren beim Verfolgen der großen periodischen Lösungen in der Nähe der doppelten homokline Lösung nicht mehr so gut anwendbar ist, da das Lösungsprofil schwieriger zu approximieren ist.

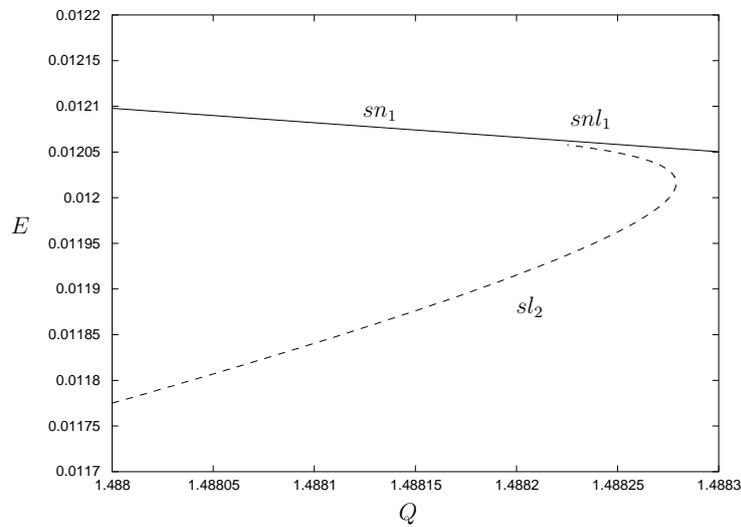


Abbildung 2.13: Der Zweig homokliner Lösungen sl_2 endet tangential an der Kurve sn_1 der Sattel-Knoten-Verzweigungspunkte im Punkt snl_1 . In snl_1 besitzt das System einen homoklinen Orbit zu einem neutralen Sattel.

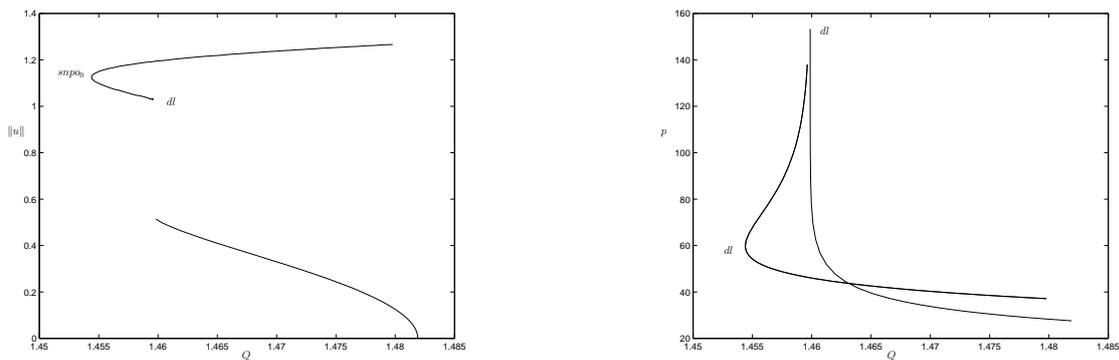
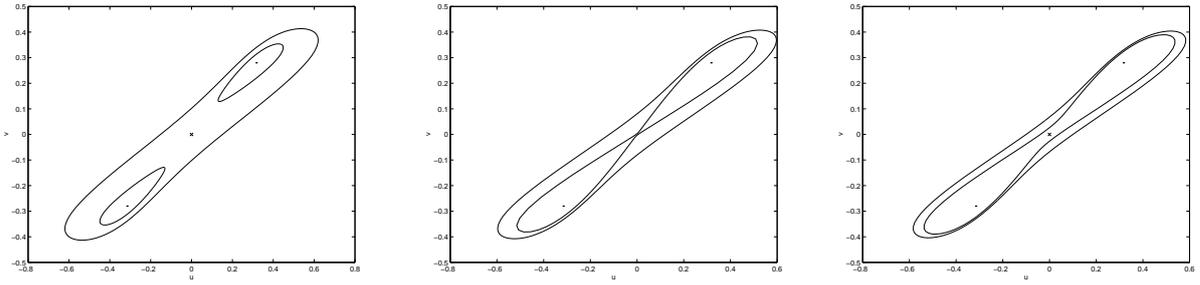


Abbildung 2.14: Zweige periodischer Lösungen für $E = 0$ bei Variation von Q . Man erkennt die Sattel-Knoten Verzweigung *großer* periodischer Lösungen $snpo_0$. Beide Zweige enden an der doppelten homoklinen Lösung dl . Es ist die Amplitude der u -Komponente (links) als Maß der periodischen Lösungen aufgetragen. Rechts sieht man die dazugehörigen Perioden.



(a) $Q = 1.4706$. Es existieren zwei kleine instabile und eine große stabile periodische Lösung.

(b) $Q = 1.4595$. Es existiert eine doppelte homokline Lösung und eine große periodische stabile Lösung.

(c) $Q = 1.4563$. Es existieren zwei große periodische Lösungen, wobei die „äußere“ Lösung stabil und die andere instabil ist.

Abbildung 2.15: Die Projektionen periodischer und homokliner Lösungen auf die $(u(t), v(t))$ -Ebene für $E = 0$ und verschiedene Q .

Weitere homokline Lösungen Neben den Zweigen homokliner Lösungen sl_1 und sl_2 kann man weitere homokline Lösungen für (2.4) finden. Anhaltspunkte für deren Existenz sind zum einen die Entfaltung der Singularität, bei denen es einen homoklinen Orbit zu einem nicht-hyperbolischen Equilibrium gibt, zum anderen die Existenz einer doppelten homoklinen Lösung. Tatsächlich findet man zwei weitere Kurven sl_3, sl_4 in der (Q, E) -Parameterenebene, auf denen das System (2.4) homokline Lösungen besitzt. Im Unterschied zu den Kurven $sl_{1,2}$ umkreisen die homoklinen Orbits auf $sl_{3,4}$ bei Projektion auf die $(u(t), v(t))$ -Ebene nicht nur einen stationären Punkt, sondern zwei. $sl_{3,4}$ enden einerseits in $snl_{3,4}$ an den Sattel-Knoten-Kurven sn_2 bzw. sn_1 , andererseits enden sie tangential an sl_2 bzw. sl_1 in dl , siehe Abbildungen 2.16 und 2.18. In $snl_{3,4}$ besitzt das System (2.4) einen homoklinen Orbit zu einem nicht-hyperbolischen Equilibrium. Im Gegensatz zu $snl_{1,2}$ verbindet dieser Orbit $W^{c,s}$ und W^u über den anderen Teil der instabilen Mannigfaltigkeit, siehe Abbildung 2.17. Ebenso wie bei $snl_{1,2}$ garantiert die Entfaltung der Singularität $snl_{3,4}$ die Existenz einer weiteren Kurve homokliner Lösungen zu einem nicht-hyperbolischen Equilibrium. Man sieht, daß diese Kurven jeweils identisch sind. Sie werden mit $sn_{\text{hom},1}$ bzw. $sn_{\text{hom},2}$ bezeichnet. Auf diesen Kurven wird die $W_{\text{loc}}^{c,s}$ mit der nicht eindeutigen lokalen Mannigfaltigkeit $W_{\text{loc}}^{c,u}$ durch einen homoklinen Orbit verbunden, siehe Abbildung 2.17.

Diskussion Vergleicht man unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen des unverzögerten Systems in [48], so stellt man fest, daß sich fast alle Verzweigungskurven, die man analytisch und numerisch bestimmen kann, in dem zeitverzögerten Modell wiederfinden. Die Kurven ändern sich nur quantitativ, beispielsweise sind die Kurven der Hopf-Singularitäten $h_i = (Q, \tilde{E}_i(Q))$ im unverzögerten Fall Geraden und im verzögerten Fall sind die \tilde{E}_i streng monotone Funktionen, siehe Lemma 2.6.

Wie gerade gezeigt, kann man die Existenz eines Sattel-Knoten-Punktes periodischer Lösungen $snpo_0$ für $E = 0$ numerisch bestimmen. Solche Verzweigungspunkte werden in [48] für das Modell gewöhnlicher Differentialgleichungen mit dem Programmpaket AUTO [28] untersucht. Dabei zeigt sich, daß diese Verzweigungskurve der Sattel-Knoten-Punkten periodischer Lösungen an

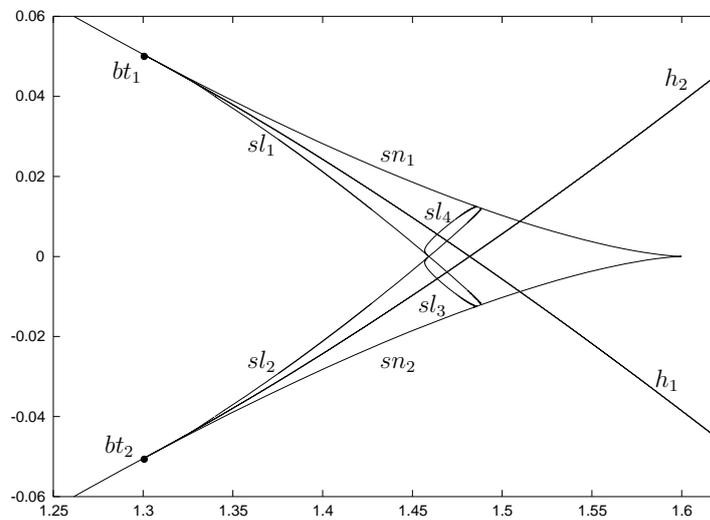


Abbildung 2.16: Das mit numerischen Methoden berechnete Verzweigungsdiagramm in der (Q, E) -Parameterebene. Man sieht die zusätzlichen Kurven homokliner Verzweigungen $sl_{3,4}$.

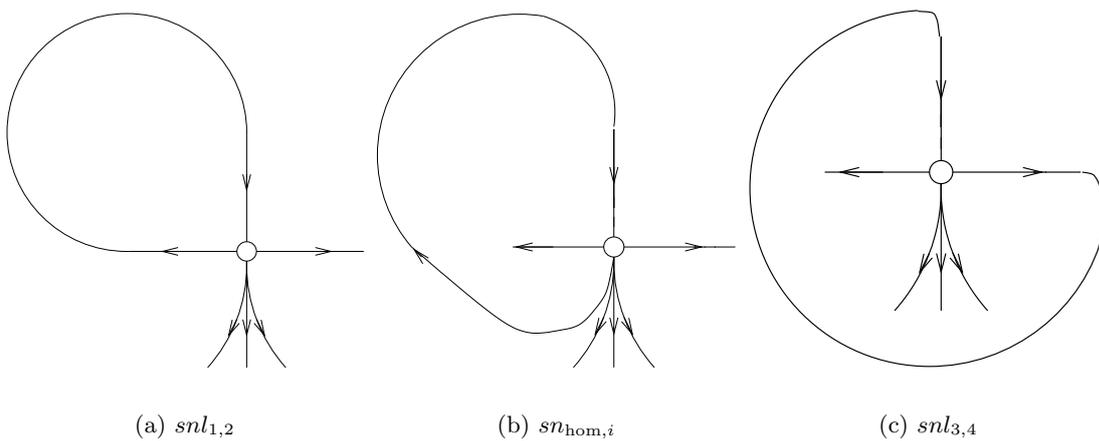


Abbildung 2.17: Schematische Darstellung der möglichen homoklinen Lösungen zu einem Sattel-Knoten-Punkt für System (2.4).

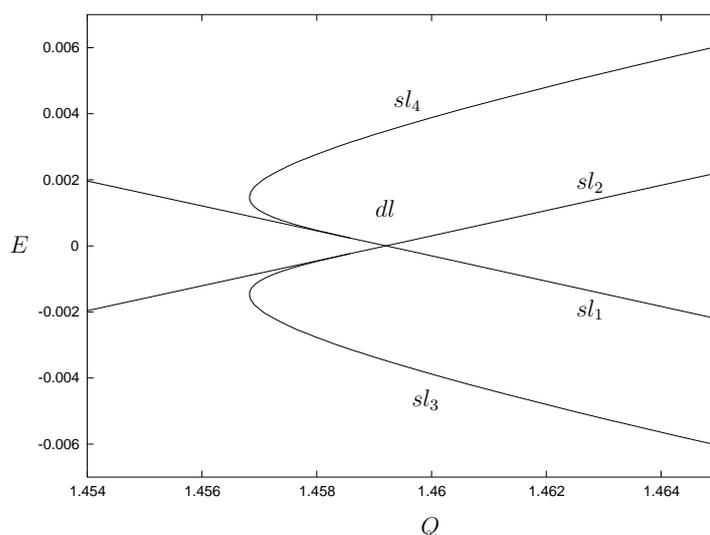


Abbildung 2.18: Die Verzweigungskurven $sl_{3,4}$ enden tangential an den Kurven $sl_{2,1}$ in dem Verzweigungspunkt dl .

den Kurven der Hopf-Verzweigungspunkte endet, und zwar an den Stellen, wo das Abzweigen der periodischen Lösungen von subkritisch auf superkritisch wechselt, also das System einen Bautin-Verzweigungspunkt besitzt (siehe [76]). Ergebnisse aus der Verzweigungstheorie liefern die lokale Existenz einer Kurve von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten periodischer Lösungen, die tangential an der Hopf-Verzweigungskurve in dieser Bautin-Singularität endet.

Mit Hilfe eines Programms zur Bestimmung der Hopf-Verzweigungsrichtung (siehe Bemerkung 2.11) bestimmen wir die Bautin-Punkte ba_i für das zeitverzögerte System (2.4). Diese sind

$$Q_{ba,i} = 1.9627 \quad E_{ba,i} = \tilde{E}_i(Q_{ba,i}) = \mp 0.1752.$$

Wir vermuten nun, daß auch für das verzögerte System eine Kurve von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten periodischer Lösungen existiert, die in den Bautin-Verzweigungspunkten endet, siehe Abbildung 2.19. Da mir keine numerische Methode bekannt ist, die eine solche Verzweigungskurve für zeitverzögerte Differentialgleichungen bestimmt, kann man das Ergebnis nicht numerisch verifizieren. Verfolgt man hingegen für feste $E \neq 0$ die sogenannten großen periodischen Lösungen bei Variation von Q mit Hilfe des Kollokationsansatzes, so kann man Sattel-Knoten-Punkte periodischer Lösungen finden. Dies deutet auf die Existenz einer Kurve $snpo$ dieser Codimension 1-Verzweigungspunkte im (Q, E) -Parameterraum hin. Die numerische Bestimmung von Sattel-Knoten-Punkten periodischer Lösung bedeutet die Verfolgung periodischer Lösungen unter der Nebenbedingung, daß der periodische Orbit einen (nicht-trivialen) Floquet-Multiplikator 1 besitzt, siehe [76]. Ein periodischer Orbit für das verzögerte System besitzt im allgemeinen unendlich viele Floquet-Multiplikatoren [61], was eine numerische Fortsetzung solcher periodischer Orbits schwierig gestaltet.

Offen bleibt ebenso, wie die postulierten Kurven heterokliner Verbindungen, die aus den Codimension 2-Verzweigungspunkten snl_i , $i = 1, \dots, 4$, abzweigen, fortgesetzt werden. Dies stellt einerseits eine Herausforderung an die Numerik dar, andererseits ist nicht klar, ob man mit Hilfe dieser Kurven neue Phänomene für das System (2.4) bestimmen kann. Zum Schluß wollen wir noch anmerken, daß die Einführung einer Zeitverzögerung zu ganz neuen Phänomenen für das planare System (2.4) führen kann, da für bestimmte Parameterregionen (q_2 hinreichend groß)

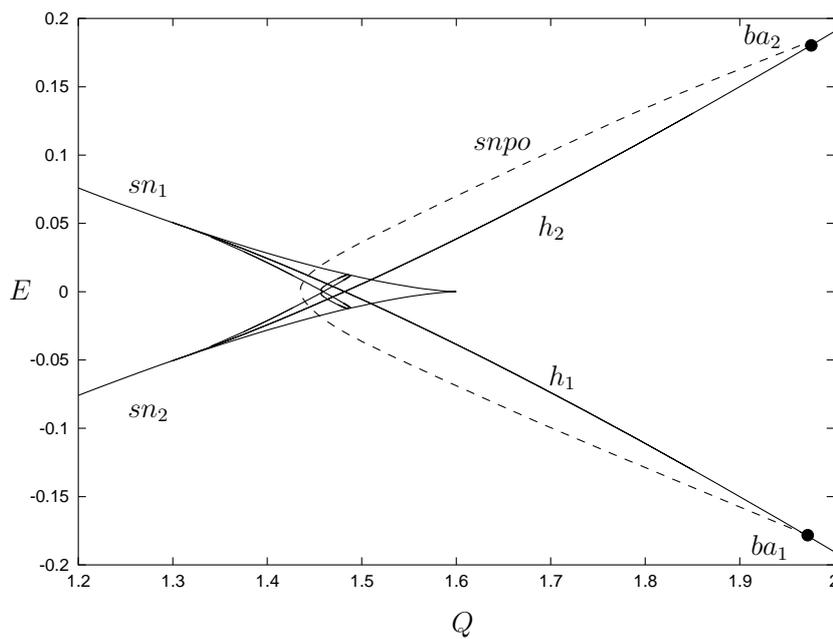


Abbildung 2.19: Die mögliche Kurve $snpo$ von Sattel-Knoten-Verzweigungspunkten periodischer Lösungen, die in den Bautin-Verzweigungspunkten $ba_i = (1.9627, \mp 0.1752)$ endet.

neue potentielle lokale Verzweigungspunkte wie Sattel-Knoten-Hopf-Singularitäten angegeben werden können (siehe Kapitel 2.2), die das unverzögerte planare System nicht besitzt. Dies soll Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

3 Numerische Methoden zur Analyse zeitverzögerter Differentialgleichungen

Im folgenden wollen wir kurz auf numerische Methoden zur Verzweigungsanalyse zeitverzögerter Differentialgleichungen eingehen. Numerische Methoden der Verzweigungstheorie bieten eine Möglichkeit, Einblicke in die Dynamik von Differentialgleichungsmodellen zu erhalten, insbesondere dann, wenn die Formulierung analytischer Ergebnisse sehr schwierig bzw. unmöglich ist. Eine weitere Anwendung besteht darin, lokale analytische Resultate, die in einer Umgebung eines kritischen Parameters gelten, auf größere Parameterbereiche auszudehnen.

Für parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen und einige Klassen partieller Differentialgleichungen wurden in den letzten Jahren viele numerische Methoden entwickelt, die das Verzweigungsverhalten dieser Systeme untersuchen, siehe z.B. [29, 30, 76, 93]. Dabei werden im Parameterraum spezielle Lösungen wie periodische Lösungen oder homokline Lösungen verfolgt und ihre Eigenschaften untersucht. Insbesondere können sogenannte Sekundärverzweigungen detektiert werden, die einen tieferen Einblick in die dynamischen Eigenschaften des Systems erlauben. Diese Methoden sind in numerischen Softwarepaketen, wie AUTO [28] oder CONTENT [76], implementiert und haben in vielen Anwendungsbereichen ihre Mächtigkeit bewiesen. Die Methoden zur Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen sind nicht ohne weiteres auf zeitverzögerte Systeme übertragbar, da der zu analysierende Phasenraum unendlich-dimensional ist. Es gibt nun zwei Ansätze, Verzweigungsprobleme bei verzögerten Differentialgleichungen numerisch zu untersuchen. Eine Methode besteht darin, die Dynamik der retardierten Gleichung durch eine hochdimensionale iterierte Abbildung zu approximieren, die durch ein numerisches Lösungsschema wie einer Runge-Kutta-Methode oder dem Eulerverfahren gewonnen wird. Von theoretischer Seite aus ist dies ein vielversprechender Ansatz, aber in der Praxis erscheint er ineffizient. Die andere Möglichkeit besteht darin, die den Pfadverfolgungsmethoden gewöhnlicher Differentialgleichungen zugrunde liegenden Ideen, wie z.B. den Kollokationsansatz zur Bestimmung periodischer Lösungen, auf zeitverzögerte Differentialgleichungen zu übertragen. Zur Berechnung periodischer Orbits existieren zwei verschiedene Methoden, die in der Praxis ihre Tauglichkeit bewiesen haben. Zum einen sind da die Schießverfahren (siehe [57, 77]) und zum anderen die Kollokationsmethoden, siehe [20, 31, 35]. Bei beiden Ansätzen ist es möglich, neben der Berechnung der periodischen Lösung auch die Stabilität der periodischen Lösung zu untersuchen.

Einen Überblick zur allgemeinen Theorie der Numerik von zeitverzögerten Differentialgleichungen findet man in [5] und den darin genannten Referenzen, wobei dort der Schwerpunkt auf das numerische Lösen von Anfangswertproblemen gesetzt wird. Im folgenden wollen wir kurz die Ideen zur Berechnung periodischer Lösungen bzw. homokliner Lösungen und ihrer Verfolgung im Parameterraum skizzieren, die unseren numerischen Berechnungen in Kapitel 1.5 bzw. 2.5 zugrunde liegen.

3.1 Kollokationsmethoden

Wir stellen zwei verwandte Verfahren zur Berechnung und Verfolgung periodischer Lösungen vor, die sich in der Praxis als effizient erwiesen haben. Wir betrachten das folgende parameterabhängige zeitverzögerte Randwertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), x(t-r); \lambda) \\ x_0 &= x_T\end{aligned}\tag{3.1}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^b$. Es sei angemerkt, daß man auch Systeme mit mehreren Zeitverzögerungen mit diesen Verfahren untersuchen kann. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit aber ausschließlich mit Systemen einer Zeitverzögerung beschäftigen, werden wir auch die numerischen Verfahren nur für solche vorstellen. Die Randbedingung in (3.1) impliziert eine periodische Lösung $(p(\cdot), \lambda)$ von (3.1) mit Periode $T > 0$ zum Parameter λ . Dabei ist die Periode T unbekannt. Die Fortsetzungsmethoden bestehen aus der Generierung einer Startlösung $(p_0(\cdot), \lambda_0)$ und deren Verfolgung im Parameterraum.

3.1.1 Fourier-Ansatz

Für skalare zeitverzögerte Differentialgleichungen stellt [31] ein Verfahren zur Bestimmung periodischer Lösungen mit Hilfe eines Fourier-Ansatzes vor, das man in einfacher Weise auf Systeme zeitverzögerter Differentialgleichungen anwenden kann. Wir führen die Zeitskalierung $t \mapsto \frac{2\pi}{T}t$ für (3.1) durch und erhalten eine zu (3.1) äquivalente Form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{T}{2\pi} f\left(x(t), x\left(t - \frac{2\pi}{T}r\right); \lambda\right) \\ x_0 &= x_{2\pi}\end{aligned}\tag{3.2}$$

von der nun 2π -periodische Lösungen bestimmt werden sollen. Die unbekannte Periode $T > 0$ erscheint als neuer Parameter im System. Zur Lösung des Problems (3.2) setzt man ein endliches Fourier-Polynom vom Grad N an, N fest, d.h.

$$u_N(t) := a_0 + \sum_{j=1}^N (a_j \sin(jt) + b_j \cos(jt)),\tag{3.3}$$

wobei $a_0, a_j, b_j \in \mathbb{R}^n$ zu bestimmende Koeffizienten sind. Von dieser Ansatzfunktion wird verlangt, daß sie die Differentialgleichung (3.2) an $2N + 1$ äquidistanten Stützstellen $t_j = j\Delta t \in [0, 2\pi)$ exakt erfüllt, d.h.

$$\dot{u}_N(t_j) = \frac{T}{2\pi} f\left(u_N(t_j), u_N\left(t_j - \frac{2\pi}{T}r\right); \lambda\right) \quad j = 0, \dots, 2N.\tag{3.4}$$

Dabei wählt man die Schrittweite $\Delta t := \frac{2\pi}{2N+1}$. Dieser Ansatz liefert ein nichtlineares Gleichungssystem mit $n(2N+1)$ Gleichungen und $n(2N+1) + 2$ Unbekannten, nämlich den $2N+1$ vektoriellen Kollokationskoeffizienten $a_0, a_j, b_j \in \mathbb{R}^n$, der unbekanntem Periode T und dem reellen Parameter λ . Also benötigen wir zwei weitere Gleichungen, um periodische Lösungen bestimmen zu können. Es sei angemerkt, daß durch die obige Wahl der Ansatzfunktion die Randbedingung von (3.4) trivialerweise erfüllt ist.

Angenommen, man hat schon m periodische Lösungen $(u_N^{(j)}, T^{(j)}, \lambda^{(j)})$, $j = 0, \dots, m-1$, auf einem Zweig periodischer Lösungen bestimmt und möchte nun eine weitere Lösung $(u_N^{(m)}, T^{(m)}, \lambda^{(m)})$ berechnen. Dann soll die Phasendifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lösungen einen minimalen Phasenunterschied haben. Denn wenn $p(t)$ eine periodische Lösung der Differentialgleichung (3.1) ist, so ist auch $p_1(t) := p(t + \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ beliebig, ebenfalls eine periodische Lösung. Durch die Minimalitätsbedingung legt man die Phase der zu berechnenden Lösung fest. Mathematisch bedeutet dies die Minimierung des Ausdrucks

$$\int_0^{2\pi} \|u^{(m)}(t) - u^{(m-1)}(t)\|^2 dt.$$

Durch Differenzieren und anschließender partieller Integration erhält man die Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \left\langle (u^{(m-1)}(t))', u^{(m)}(t) \right\rangle dt = 0, \quad (3.5)$$

dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n . Wendet man unsere Ansatzfunktion u_N auf diese Bedingung an, so ergibt sich eine weitere Gleichung

$$\sum_{k=1}^N k \left(\left\langle a_k^{(m-1)}, b_k^{(m)} \right\rangle - \left\langle a_k^{(m)}, b_k^{(m-1)} \right\rangle \right). \quad (3.6)$$

Schließlich möchte man die Veränderung des reellen Parameters λ kontrollieren. Dazu wählen wir eine Schrittweite Δs und verlangen, daß zwei aufeinander folgende Lösungen des Zweiges $(u_N^{(m-1)}, T^{(m-1)}, \lambda^{(m-1)})$ und $(u_N^{(m)}, T^{(m)}, \lambda^{(m)})$ einen vorgegebenen Abstand haben. Wir parametrisieren den Zweig periodischer Lösungen nach der Pseudo-Bogenlänge (siehe z.B. [76]). In der vorliegenden Situation bedeutet dies

$$\int_0^{2\pi} g_u \|u^{(m)}(t) - u^{(m-1)}(t)\|^2 dt + g_T (T^{(m)} - T^{(m-1)})^2 + g_\lambda (\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)})^2 = \Delta s^2.$$

g_u, g_T und g_λ sind Gewichte innerhalb der Parametrisierung. Setzt man wieder unsere Ansatzfunktion u_N ein, so ergibt sich als letzte Gleichung

$$g_u \left(2\pi \|a_0^{(m)} - a_0^{(m-1)}\|^2 + \pi \sum_{k=1}^N \|a_k^{(m)} - a_k^{(m-1)}\|^2 + \pi \sum_{k=1}^N \|b_k^{(m)} - b_k^{(m-1)}\|^2 \right) + g_T (T^{(m)} - T^{(m-1)})^2 + g_\lambda (\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)})^2 = \Delta s^2. \quad (3.7)$$

Die Gleichungen (3.4), (3.6) und (3.7) bilden nun ein vollständiges Gleichungssystem, das zum Beispiel mit Hilfe eines Newton-Verfahrens gelöst werden kann.

Bisher haben wir offen gelassen, wie man die erste Lösung $(u^{(0)}, T^{(0)}, \lambda^{(0)})$ konstruiert. Neben der Möglichkeit, durch das Lösen von Anfangswertproblemen auf eine (stabile) periodische Lösung zu treffen, kann man auch Zweige periodischer Lösungen, die aus einer Hopf-Singularität entstehen, berechnen. Dabei liefert das Hopf-Theorem für zeitverzögerte Differentialgleichungen [61] die Approximation einer ersten Startlösung, was wir nun etwas detaillierter darstellen

wollen. Sei $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ eine Hopf-Singularität von (3.1), d.h. die zugehörige charakteristische Gleichung besitzt ein Paar konjugiert komplexer Lösungen $z = \pm i\omega$. Daher existiert auch ein $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\|\xi\| = 1$, welches das folgende Gleichungssystem löst

$$\left(i\omega - \frac{df}{dx_1}(\bar{u}, \bar{u}; \bar{\lambda}) - \frac{df}{dx_2}(\bar{u}, \bar{u}; \bar{\lambda}) \exp(-i\omega r) \right) \xi = 0.$$

Als erste Näherung setzen wir an

$$\begin{aligned} u_N^{(0)}(t) &= \bar{u} + \epsilon \operatorname{Re}(\exp(it)\xi) \\ &= \bar{u} + \epsilon(\operatorname{Re} \xi \cos(t) - \operatorname{Im} \xi \sin(t)). \end{aligned}$$

Aus der Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \left\| \bar{u} - u_N^{(0)}(t) \right\|^2 dt = \Delta s^2$$

gewinnt man schließlich

$$\epsilon = \frac{\Delta s}{\pi}.$$

Mit den Abschätzungen $\lambda^{(0)} = \bar{\lambda} + O(\epsilon^2)$, $T^0 = \frac{2\pi}{\omega} + O(\epsilon^2)$ erhält man eine erste Lösung auf dem Zweig periodischer Lösungen.

3.1.2 Der allgemeine Kollokationsansatz

Die prinzipiellen Ideen des Fourier-Ansatzes zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen sind das exakte Erfüllen der Differentialgleichung an vorgegebenen Stützstellen, die Phasenverankerung und die Parametrisierung des Lösungszweiges nach der (Pseudo-)Bogenlänge. Im vorherigen wurden die Lösungen durch einen Fourier-Ansatz approximiert. Approximiert man dagegen die Lösungen auf einem vorgegebenen Gitter durch einen allgemeinen polynomialen Ansatz, so spricht man in der Literatur von einem Kollokationsansatz, siehe z.B. [76]. Für die Bestimmung periodischer Lösungen bei zeitverzögerten Differentialgleichungen untersucht [35] die Kollokationsmethoden. Durch eine große Zahl von numerischen Experimenten wird gezeigt, daß dieser Ansatz vielversprechende Ergebnisse liefert, außerdem werden die Konvergenzraten in Abhängigkeiten des zugrunde liegenden Gitters numerisch untersucht. In der Literatur gibt es allerdings keinen Beweis für die Konvergenz des Verfahrens. Dies liegt daran, daß es keine ausgearbeitete Theorie der Randwertprobleme mit unendlich-dimensionalen Randbedingungen für Funktionaldifferentialgleichungen gibt, so entspricht die Bestimmung T -periodischer Orbits der Lösung des folgenden Randwertproblems in \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Tf(x(t), x(t - \frac{r}{T})) \\ b(x_0, x_1) &= x_0 - x_1 = 0 \quad b : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ist die Randbedingung hingegen endlich-dimensional, also $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, gibt es zwar eine Reihe von theoretischen Resultaten (für einen Überblick siehe [71]), die aber für die numerische Analysis nicht anwendbar sind.

Nichtsdestotrotz liefert der Kollokationsansatz gute Ergebnisse, siehe [35]. Wir skizzieren kurz den Ansatz. Wir definieren ein Gitter Π auf dem Intervall $[0, 1]$ durch Gitterpunkte $0 = t_0 <$

$t_1 < \dots < t_L = 1$ und die Schrittweite $h_i := t_{i+1} - t_i$ für $i = 0, \dots, L - 1$. Ein typischer Kollokationsansatz besteht nun darin, daß man die Lösung auf dem Gitter durch Lagrange-Polynome approximiert, d.h.

$$u(t) = \sum_{j=0}^m u\left(t_{i+\frac{j}{m}}\right) P_{i,j}(t)$$

mit den Lagrange-Polynomen

$$P_{i,j}(t) = \prod_{r=0, r \neq j}^m \frac{t - t_{i+\frac{r}{m}}}{t_{i+\frac{j}{m}} - t_{i+\frac{r}{m}}} \quad j = 0, \dots, m$$

und den Repräsentationspunkten

$$t_{i+\frac{j}{m}} := t_i + \frac{j}{m} h_i \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Als sehr erfolgreich hat sich erwiesen, die Kollokationspunkte, also die Punkte, an denen die Differentialgleichung exakt erfüllt wird, nach den Gauss-Legendre-Punkten zu wählen, also den m Nullstellen c_1, \dots, c_m des m -ten Legendre-Polynoms (auf $[0, 1]$ transformiert). Die Differentialgleichung muß nun an den Punkten $t_{i,l} := t_i + c_l h_i$ $l = 1, \dots, m$, $i = 0, \dots, L - 1$ erfüllt werden. Zusätzliche Gleichungen liefert die Randbedingung $u_0 = u_T$, die Phasenverankerung und die Parametrisierung des Zweiges periodischer Lösungen nach der Pseudo-Bogenlänge. Die letzten beiden Bedingungen können in ähnlicher Weise realisiert werden, wie wir dies bei der Kollokation durch Fourier-Polynome skizziert haben. Die Randbedingung $u_0 = u_T$ ist beim Fourier-Ansatz trivialerweise erfüllt.

Ein Vorteil gegenüber dem Fourier-Ansatz ist es, daß das lineare System, welches beim Lösen durch das Newton-Verfahren entsteht, zum Teil eine einfache Struktur besitzt. Genauer gesagt besteht die Matrix aus einer großen Bandmatrix und zusätzlichen vollbesetzten Reihenvektoren und zwei vollbesetzten Spaltenvektoren. Diese entsprechen einerseits der Periode T und dem Parameter, andererseits der linearisierten Randbedingung, Phasenverankerung und Bogenlänge. Durch sogenannte *bordering*-Techniken (siehe z.B. [76]) kann man diese Struktur ausnutzen und eine effizientere Implementierung des Algorithmus realisieren, siehe [35]. Diese *bordering*-Techniken sind beim Fourier-Ansatz nicht möglich, da die Matrix immer vollbesetzt ist. Anzumerken ist aber, daß der Effizienzgewinn nicht sehr groß ist, da die Struktur der Matrix durch die Zeitverzögerung auch Bänder jenseits der Diagonalen enthält. Ein Vorteil des Fourieransatzes bzw. allgemeinen Kollokationsansatzes gegenüber den übrigen Methoden [57, 77], der sich in der Praxis gezeigt hat, ist es, daß bei identischem Rechenaufwand mit dieser Methode auch periodische Lösungen mit sehr großer Periode bestimmt und verfolgt werden können.

3.2 Homokline Lösungen

Neben periodischen Lösungen zeigen wir uns besonders an der numerischen Bestimmung homokliner Lösungen und ihrer Verfolgung im Parameterraum interessiert. Für gewöhnliche Differentialgleichungen hat sich die Methode der *projection boundary condition* als erfolgreich bewiesen [12], die auch in dem Paket HOMCONT von AUTO [28] implementiert worden ist. Aus dem

schon gerade skizzierten Mangel einer Theorie für nichtlineare Randwertprobleme bei zeitverzögerten Differentialgleichungen kann diese Methode nicht auf unsere Problemstellungen übertragen werden. Daher werden wir hier die homoklinen Lösungen für eine Abbildung untersuchen, die wir durch das Anwenden des Eulerverfahrens auf unseren Differentialgleichungstyp

$$\dot{x}(t) = -rx(t) + rf(x(t-1), \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k, r \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

erhalten. Dabei gelte für die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bedingung $f(0, \alpha) = 0$ für alle α . Mit $T(t)$ bezeichnen wir den dazugehörigen Halbfluß. Außerdem besitze (3.8) für $\alpha = \bar{\alpha}$ einen homoklinen Orbit $q(\cdot)$ zur hyperbolischen stationären Lösung $\bar{x} = 0$, d.h. insbesondere, daß es Anfangswerte für (3.8) gibt, so daß eine Lösung für $t < 0$ existiert. Die Hyperbolizität bedeutet, daß die charakteristische Gleichung

$$\det((z+r)I_n - rDf(0, \alpha) \exp(-z)) = 0$$

keine Lösungen auf der imaginären Achse besitzt. Somit gibt es invariante Eigenräume P und Q für das lineare Problem, über denen die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit der stationären Lösung W_{loc}^s, W_{loc}^u als Graph einer Funktion repräsentiert werden kann (für Details siehe [61]). Der homokline Orbit $q(\cdot)$ liegt nun in der Menge $\cup_{t>0} T(t)W_{loc}^u$. In unseren Anwendungen wird die lokale instabile Mannigfaltigkeit die Dimension 1 besitzen, was eine Erleichterung der Rechnungen nach sich zieht, wie wir später sehen werden. Die Gleichung (3.8) kann man als zeitskalierte Version von $\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-r))$ auffassen, somit ist der zu betrachtende Phasenraum fest gewählt und die Diskretisierung wird erleichtert.

Die Variation-der-Konstanten-Formel liefert die Lösung von (3.8) und ermöglicht den Halbfluß auf $\mathcal{C} = C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ zu definieren. Es gilt für $t_1 \geq t_0$

$$x(t_1) = \exp(-(t_1 - t_0))x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \exp(-(t_1 - s))f(x(s-1))ds$$

oder mit $t_1 = t + h, t_0 = t$

$$x(t+h) = \exp(-h)x(t) + \int_t^{t+h} \exp(-t-h+s)f(x(s-1))ds,$$

wobei $x_0 = \varphi \in \mathcal{C}$. Der Operator

$$\begin{aligned} T(1) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ T(1)\varphi &= x_1, \end{aligned}$$

wobei $x_1(\theta) = x(1+\theta), \theta \in [-1, 0]$, definiert dann eine iterierte Abbildung $\varphi_{n+1} = T(1)\varphi_n$ im Banachraum \mathcal{C} .

Wir unterteilen das Intervall $[-1, 0]$ in N Teilintervalle $[t_{-(i+1)}, t_{-i}]$, $i = 0, \dots, N-1$, durch die äquidistanten Punkte $t_{-i} := -i * h$, $h = N^{-1}$ und $i = 1, \dots, N$. Für $i = 1, \dots, N$ sei $y_{-i} := \varphi(t_{-i}) \in \mathbb{R}^n$, und es bezeichne $y_j, j > 0$ die numerische Approximation der Lösung des Anfangswertproblems (3.8) an der Stelle $t = j * h$ mit diskretisiertem Anfangswert (y_{-N}, \dots, y_0) unter Berücksichtigung der Variation der Konstanten. Approximiert man das Integral durch die Trapezmethode, so gewinnt man für $k \geq 1$ die iterierte Abbildung

$$y_{k+1} = \exp(-h)y_k + \frac{h}{2} (\exp(-h)f(y_{k-N}) + f(y_{k-N-1})) .$$

Durch dieses Approximationsverfahren kann man insbesondere den Operator $T(1)$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{T}_N &: \mathbb{R}^{n(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(N+1)} \\ \tilde{T}_N(y_{-N}, \dots, y_0) &= (y_0, \dots, y_N)\end{aligned}$$

approximieren. Unser Ziel ist es, einen homoklinen Orbit des Flusses T bzw. des Operators $T(1)$ durch die Approximation \tilde{T}_N numerisch zu bestimmen, d.h. die Berechnung eines homoklinen Orbits des diskreten dynamischen Systems

$$z_{n+1} = \tilde{T}_N z_n, \quad z \in \mathbb{R}^{n(N+1)}. \quad (3.9)$$

[42] zeigt, daß die Diskretisierung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit Schrittweite h einen homoklinen Orbit q^h zu einem hyperbolischen Sattel besitzt, falls die gewöhnliche Differentialgleichung einen homoklinen Orbit q zu einem hyperbolischen Sattel besitzt, wobei $q^h \rightarrow q$ falls $h \rightarrow 0$. Dieses Resultat wird in [59] auf hyperbolische invariante Mengen erweitert. [40, 41, 43, 44] behandeln die Zusammenhänge zwischen einer zeitverzögerten Differentialgleichung und einer iterierten Abbildung, die aus einem numerischen Lösungsschema zur Lösung der Differentialgleichung gebildet wird. Sie beschreiben das lokale Verhalten der Systeme in der Nähe der trivialen stationären Lösung. Man kann Aussagen über die charakteristischen Lösungen und das lokale Verzweigungsverhalten des zeitkontinuierlichen und des diskreten Systems [43, 44] machen. [41] zeigt, daß die (lokale) instabile Mannigfaltigkeit der Differentialgleichung durch die instabile Mannigfaltigkeit der Abbildung approximiert werden kann.

In [13] wird eine Methode zur Bestimmung und Pfadverfolgung homokliner Lösungen vorgestellt, die im wesentlichen das Verfahren aus [12] zur Bestimmung homokliner Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nachbildet. Die Idee der Methode ist es, den Orbit auf einem endlichen Intervall $-n_-, \dots, n_+$ zu berechnen, wobei die Enden dieses Orbits jeweils auf die linearen (stabilen und instabilen) Eigenräume projiziert werden und dadurch Randbedingungen definiert werden. Wir haben mit dieser Methode homokline Lösungen der iterierten Abbildung (3.9) berechnet und mit Hilfe der Parametrisierung nach der Pseudo-Bogenlänge Kurven homokliner Lösungen in zweidimensionalen Parameterräumen bestimmt. Da die instabile Mannigfaltigkeit der stationären Lösung eindimensional ist, kann auf eine zusätzliche Phasenbedingung verzichtet werden. In Kapitel 2.5 findet unsere Methode zur Bestimmung homokliner Lösungen Anwendung.

Literaturverzeichnis

- [1] AN DER HEIDEN, U.: Delay in physiological systems. In: *J. Math. Biol.* 8 (1979), S. 345–364
- [2] AN DER HEIDEN, U.: *Analysis of neural networks*. New York : Springer-Verlag, 1980 (Lecture notes in biomathematics)
- [3] ARBIB, M.A.: *Brains, machines and mathematics*. New York : Springer-Verlag, 1987
- [4] ARBIB, M.A. ; ÉRDI, P. ; SZENTÁGOTHAJ, J.: *Neural organization: Structure, function and dynamics*. Cambridge, MA : MIT Press, 1998
- [5] BAKER, C.T.H.: Retarded differential equations. In: *J. Comp. Appl. Math.* 125 (2000), S. 309–335
- [6] BANKS, H.T. ; MAHAFFY, J.M.: Global asymptotic stability of certain models for protein synthesis and repression. In: *Quart. Appl. Math.* 36 (1978), S. 209–221
- [7] BAPTISTINI, M.Z. ; TÁBOAS, P.Z.: On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential delay equations. In: *J. Differential Equations* 127 (1996), S. 391–425
- [8] BAPTISTINI, M.Z. ; TÁBOAS, P.Z.: On the stability of some exponential polynomials. In: *J. Math. Anal. Appl.* 205 (1997), S. 259–272
- [9] BÉLAIR, J.: Stability in a model of a delayed neural network. In: *Journal Dynam. Differential Equations* 5 (1993), Nr. 4, S. 607–623
- [10] BÉLAIR, J. ; CAMPBELL, S.A. ; VAN DEN DRIESCHE, P.: Frustration, stability, and delay-induced oscillations in a neural network model. In: *SIAM J. Appl. Math.* 56 (1996), Nr. 1, S. 245–255
- [11] BELLMAN, R. ; COOKE, K.L.: *Differential-difference equations*. New York : Academic Press, Inc., 1963
- [12] BEYN, W.-J.: The numerical computation of connecting orbits in Dynamical Systems. In: *IMA J. Numer. Anal.* 9 (1990), S. 379–405
- [13] BEYN, W.-J. ; KLEINKAUF, J.-M.: The numerical computation of homoclinic orbits for maps. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 34 (1997), Nr. 3, S. 1207–1236
- [14] BOGDANOV, R.: Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues. In: *Functional Anal. Appl.* 9 (1975), S. 144–145

- [15] BRADDOCK, R.D. ; VAN DEN DRIESSCHE, P.: On the stability of differential-difference equations. In: *J. Austral. Math. Soc., Ser. B* 19 (1976), S. 358–370
- [16] BROWDER, F.E.: A further generalization of the Schauder fixed point theorem. In: *Duke Math. J.* 32 (1965), S. 575–578
- [17] CAO, J.: Periodic solutions and exponential stability in delayed cellular neural networks. In: *Phys. Rev. E (3)* 60 (1999), Nr. 3, S. 3244–3248
- [18] CAO, J.: Global exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. In: *J. Comput. System Sci.* 60 (2000), Nr. 1, S. 38–46
- [19] CARR, J.: *Applications of center manifold theory*. New York : Springer-Verlag, 1981
- [20] CASTELFRANCO, A.M. ; STECH, H.W.: Periodic solutions in a model of recurrent neural feedback. In: *SIAM J. Appl. Math.* 47 (1987), Nr. 3, S. 573–588
- [21] CHEN, Y. ; WU, J.: Connecting orbits from synchronous periodic solutions to phase-locked periodic solutions in a delay differential system. In: *J. Differential Equations* 163 (2000), S. 130–173
- [22] CHOW, S.-N. ; HALE, J.K.: *Methods of bifurcation theory*. New York : Springer-Verlag, 1982
- [23] CHOW, S.-N. ; MALLET-PARET, J.: The Fuller index and global Hopf bifurcation. In: *J. Differential Equations* 29 (1978), S. 66–85
- [24] CHOW, S.N. ; LIN, X.-B.: Bifurcations of a homoclinic orbit with a saddle-node equilibrium. In: *Differential and Integral equations* 3 (1990), S. 435–466
- [25] COWAN, J.D. ; ERMENTROUT, G.B.: Some aspects of the eigenbehaviour of neural nets. In: LEVIN, S.A. (Hrsg.): *Studies in mathematical biology, Part I: Cellular behaviour and development of patterns* Bd. 15. Mathematical Association of America, Washington D.C., 1978, S. 67–117
- [26] DAHMEN, M.: *Existenz periodischer Lösungen bei einem System zweier gekoppelter Neuronen mit positiver Rückkopplung*, Math. Institut, Universität zu Köln, Diplomarbeit, 1994
- [27] DIEKMANN, O. ; GILS, S.A. van ; LUNEL, S.M. V. ; WALTHER, H.O.: *Applied Mathematics Sciences*. Bd. 101: *Delay equations, functional-, complex- and nonlinear analysis*. New York : Springer-Verlag, 1995
- [28] DOEDEL, E. ; CHAMPNEYS, A. ; FAIRGRIEVE, T. ; KUZNETSOV, Y. ; SANDSTEDTE, B. ; WANG, X.-J.: AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT) / Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada. 1997. – Forschungsbericht
- [29] DOEDEL, E. ; KELLER, H.B. ; KERNÉVEZ, J.P.: Numerical analysis and control of bifurcation problem. I. Bifurcation in finite dimensions. In: *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* (1991), Nr. 3, S. 493–520

-
- [30] DOEDEL, E. ; KELLER, H.B. ; KERNÉVEZ, J.P.: Numerical analysis and control of bifurcation problem. II. Bifurcation in infinite dimensions. In: *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* (1991), Nr. 4, S. 745–772
- [31] DOEDEL, E.J. ; LEUNG, P.C.: A numerical technique for bifurcation problems in delay differential equations. In: *Congr. Numer.* 34 (1982), S. 225–237
- [32] DRIVER, R.D.: *Applied Mathematics Science*. Bd. 20: *Ordinary and delay differential equations*. New York : Springer-Verlag, 1977
- [33] EL'GOL'TS, L.E. ; NORKIN, S.B.: *Mathematics in Science and Engineering*. Bd. 105: *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. London : Academic Press, Inc., 1973
- [34] ENGELBORGH, K.: DDE-BIFTOOL: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations / K.U. Leuven, Belgium. 2000 (TW 305). – Forschungsbericht
- [35] ENGELBORGH, K. ; LUZYANINA, T. ; HOUT, K.J. in't ; ROOSE, D.: Collocation methods for the computation of periodic solutions of delay differential equations. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 22 (2000), Nr. 5, S. 1593–1609
- [36] ERBE, L.H. ; KRAWCEWICZ, W. ; GEBA, K. ; WU, J.: S^1 -degree and global Hopf bifurcation theory of functional differential equations. In: *J. Differential Equations* 98 (1992), S. 227–298
- [37] FARIA, T.: On a planar system modelling a neuron network with memory. In: *J. Differential Equations* 168 (2000), S. 129–149
- [38] FARIA, T. ; MAGALHÃES, L.T.: Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Bogdanov-Takens bifurcation. In: *J. Differential Equations* 122 (1995), S. 201–224
- [39] FARIA, T. ; MAGALHÃES, L.T.: Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation. In: *J. Differential Equations* 122 (1995), S. 181–200
- [40] FARKAS, G.: A Hartman-Grobman result for retarded functional differential equations with an application to the numerics around hyperbolic equilibria. In: *erscheint in Z. Angew. Math. Phys.* (2001)
- [41] FARKAS, G.: Unstable manifolds for RFDE under discretization: The Euler method. In: *erscheint in Comp. Math. Applic.* (2001)
- [42] FIEDLER, B. ; SCHEUERLE, J.: Discretization of homoclinic orbits, rapid forcing and invisible chaos. In: *Mem. Am. Math. Soc.* 570 (1996)
- [43] FORD, N.J. ; WULF, V.: The use of boundary locus plots in the identification of bifurcation points in numerical approximations of delay differential equations. In: *J. Comp. Appl. Math.* 111 (1999), S. 153–162
- [44] FORD, N.J. ; WULF, V.: How do numerical methods perform for delay differential equations undergoing a Hopf bifurcation. In: *J. Comp. Appl. Math.* 125 (2000), S. 277–285

- [45] GEDEON, T.: Cyclic feedback systems. In: *Mem. Am. Math. Soc.* 637 (1998), S. 1–74
- [46] GIANNAKOPOULOS, F.: *Nichtlineare Systeme zur Beschreibung geschichteter neuronaler Strukturen*, Mainz, Diss., 1989
- [47] GIANNAKOPOULOS, F. ; HAUPTMANN, C. ; ZAPP, A.: Generation of bursting oscillations in a mathematical model of a single neuron with recurrent synaptic feedback. In: *Fields Inst. Commun.* 29 (2001)
- [48] GIANNAKOPOULOS, F. ; OSTER, O.: Bifurcation properties of a planar system modelling neural activity. In: *Journal Dynam. Differential Equations* 5 (1997), Nr. 3-4, S. 229–242
- [49] GIANNAKOPOULOS, F. ; ZAPP, A.: *Bifurcations in a planar system of differential delay equations modelling neural activity.* – eingereicht bei Physica D
- [50] GIANNAKOPOULOS, F. ; ZAPP, A.: *Properties of quasi-polynomial equations arising from a class of delay differential equations.* – in Vorbereitung
- [51] GIANNAKOPOULOS, F. ; ZAPP, A.: Local and global Hopf bifurcation in a scalar delay differential equation. In: *J. Math. Anal. Appl.* 237 (1999), S. 425–450
- [52] GIANNAKOPOULOS, F. ; ZAPP, A.: Stability and Hopf bifurcation in differential equations with delay. In: *akzeptiert in J. Nonl. Dynam. Sys. Theory* (2001)
- [53] GODOY, S.M.S. ; REIS, J.G. dos: Stability and existence of periodic solutions of a functional differential equation. In: *J. Math. Anal. Appl.* 198 (1996), S. 381–398
- [54] GOPALSAMY, K. ; LEUNG, I.: Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition. In: *Physica D* 89 (1996), S. 395–426
- [55] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.* Springer, 1983
- [56] HADELER, K.P.: Periodic solutions of $\dot{x}(t) = -f(x(t), x(t-1))$. In: *Math. Methods Appl. Sci.* 1 (1979), S. 62–69
- [57] HADELER, K.P.: Effective computation of periodic orbits and bifurcation diagrams in delay equations. In: *Numer. Math.* 34 (1980), S. 457–467
- [58] HADELER, K.P. ; TOMIUK, J.: Periodic solutions of difference-differential equations. In: *Arch. Rat. Mech. Anal* 65 (1977), S. 87–95
- [59] HALE, J.: Dynamic of numerical approximation. In: *Appl. Math. Comp.* 89 (1998), S. 5–15
- [60] HALE, J.K. ; LADEIRA, L.A.C.: Differentiability with respect to delays. In: *J. Differential Equations* 92 (1991), S. 14–26
- [61] HALE, J.K. ; VERDUYN LUNEL, S.M.: *Applied Mathematics Sciences.* Bd. 99: *Introduction to functional differential equations.* New York : Springer-Verlag, 1993
- [62] HASSARD, B.D. ; KAZARINOFF, N.D. ; WAN, Y.H.: *Theory and applications of Hopf bifurcation.* Cambridge : Cambridge University Press, 1981

-
- [63] HASTINGS, S.P. ; TYSON, J.J. ; D.WEBSTER: Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems. In: *J. Differential Equations* 25 (1977), S. 39–64
- [64] HAYES, N.D.: Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation. In: *The Journal of the London Mathematical Society* 25 (1950), S. 226–232
- [65] HEINEN, I.: *Periodische Lösungen in neuronalen Ketten*, Math. Institut, Universität zu Köln, Diplomarbeit, 1994
- [66] HIRSCHBERG, P. ; KNOBLOCH, E.: An unfolding of the Takens-Bogdanov singularity. In: *Quart. Appl. Math.* (1991)
- [67] HOPFIELD, J.J.: Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81 (1984), S. 3088–3092
- [68] HOPPENSTEADT, F.C. ; IZHIKEVICH, E.M.: 1997. New York : Springer-Verlag, Weakly connected neural networks
- [69] JOY, M.: On the global convergence of a class of functional-differential equations with applications in neural network theory. In: *J. Math. Anal. Appl.* 232 (1999), Nr. 1, S. 61–81
- [70] KHIBNIK, A.I. ; KRAUSKOPF, B. ; ROUSSEAU, C.: Global study of a family of cubic Lienard equations. In: *Nonlinearity* 11 (1998), Nr. 6, S. 1505–1519
- [71] KOLMANOVSKII, V. ; MYSHKIS, A.: *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Kluwer, 1999
- [72] KOLMANOVSKII, V.B. ; NOSOV, V.R.: *Mathematics in Science and Engineering*. Bd. 180: *Stability of functional differential equations*. London : Academic Press, Inc., 1986
- [73] KOOJI, R. ; GIANNAKOPOULOS, F.: Periodic orbits in planar systems modelling neural activity. In: *Quart. Appl. Math.* 58 (2000), Nr. 3, S. 437–457
- [74] KRISZTIN, T. ; WALTHER, H.-O. ; WU, J.: *Fields Instit. Monogr.*. Bd. 11: *Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback*. American Mathematical Society, 1999
- [75] KUANG, Y.: *Mathematics in Science and Engineering*. Bd. 191: *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Boston, MA : Academic Press, Inc., 1993
- [76] KUZNETSOV, Y.: *Applied mathematics sciences*. Bd. 112: *Elements of applied bifurcation theory*. 2nd. New York : Springer-Verlag, 1998
- [77] LUZYANINA, T. ; ENGELBORGH, K. ; LUST, K. ; ROOSE, D.: Computation, continuation and bifurcation analysis of periodic solutions of delay differential equations. In: *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 7 (1997), Nr. 11, S. 379–392
- [78] MACKEY, M.C. ; AN DER HEIDEN, U.: The dynamics of recurrent inhibition. In: *J. Math. Biology* 19 (1984), S. 211–225

- [79] MAHAFFY, J.M.: Periodic solutions for certain protein synthesis models. In: *J. Math. Anal. Appl.* 74 (1980), S. 72–105
- [80] MALLET-PARET, J. ; NUSSBAUM, R.D.: Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation. In: *Annali Mat. Pura Appl.* 145 (1986), S. 33–128
- [81] MALLET-PARET, J. ; SELL, G. R.: The Poincaré–Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay. In: *J. Differential Equations* 125 (1996), S. 441–489
- [82] MALLET-PARET, J. ; SELL, G.R.: Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions. In: *J. Differential Equations* 125 (1996), S. 385–440
- [83] MARCUS, C.M. ; WESTERVELT, R.M.: Stability of analog neural networks with delay. In: *Phys. Rev. A* 39 (1989), Nr. 1, S. 347–359
- [84] MARTELLI, M. ; SCHMITT, K. ; SMITH, H.L.: Periodic solutions of some nonlinear delay-differential equations. In: *J. Math. Anal. Appl.* 74 (1980), S. 494–503
- [85] MARTIN, A.R. ; WALLACE, B.G. ; NICHOLLS, J.G.: *From neurons to brain*. Sunderland, Massachusetts, USA : Sinauer Associates Inc. Publishers, 1992
- [86] NUSSBAUM, R.D.: Periodic solutions of some autonomous functional differential equations. In: *Annali di Matematica* 51 (1974), Nr. 4, S. 263–306
- [87] OLIEN, L. ; BÉLAIR, J.: Bifurcation, stability, and monotonicity properties of a delayed neural network. In: *Physica D* 102 (1997), S. 343–348
- [88] PAKDAMAN, K. ; MALTA, C.P. ; GROTTA-RAGAZZO, C. ; ARINO, O. ; VILBERT, J.-F.: Transient oscillations in continuous-time excitatory ring neural networks with delay. In: *Phys. Rev. E* (3) (1997)
- [89] RUAN, S. ; WEI, J.: Periodic solutions of planar systems with two delays. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 129A (1999), Nr. 8, S. 1017–1032
- [90] RUDIN, W.: *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1976
- [91] SCHECTER, S.: The saddle-node separatrix-loop bifurcation. In: *SIAM J. Math. Anal.* 18 (1987), S. 1142–1157
- [92] SEELEN, W. von ; MALLOT, H.A. ; GIANNAKOPOULOS, F.: Characteristics of neural systems in the visual cortex. In: *Biological Cybernetics* 56 (1987), S. 37–49
- [93] SEYDEL, R.: *From equilibrium to chaos - Practical bifurcation and stability analysis*. New York : Springer-Verlag, 1994
- [94] SHEPHERD, G.M.: *Neurobiology*. New York : Oxford University Press, 1994
- [95] SMITH, H.L.: *Monotone dynamical systems*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1995 (Math. Surveys Monogr. 41). – An introduction to the theory of competitive and cooperative systems

-
- [96] STECH, H.W.: Hopf bifurcation calculations for functional differential equations. In: *J. Math. Anal. Appl.* 109 (1985), S. 472–491
- [97] STÉPÁN, G.: *Pitman Research Notes in Mathematics*. Bd. 210: *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical, 1989
- [98] TÁBOAS, P.Z.: Periodic solutions of a planar delay differential equation. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 116 (1990)
- [99] TAKENS, F.: Singularities of vector fields. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 43 (1974), S. 47–100
- [100] VAN DEN DRIESSCHE, P. ; ZOU, Xingfu: Global attractivity in delayed Hopfield neural network models. In: *SIAM J. Appl. Math.* 58 (1998), Nr. 6, S. 1878–1890
- [101] WALTHER, H.-O.: An invariant manifold of slowly oscillating solutions for $\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$. In: *J. Reine Angew. Math.* 414 (1991), S. 67–112
- [102] WALTHER, H.-O.: The 2-dimensional attractor of $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 113 (1995)
- [103] WATERLOO SOFTWARE. *Maple V Release 6*
- [104] WEI, J. ; RUAN, S.: Stability and bifurcation in a neural network with delayed interactions. In: *Physica D* 130 (1999), S. 255–272
- [105] WU, J.: Symmetric functional-differential equations and neural networks with memory. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), Nr. 12, S. 4799–4838
- [106] WU, J. ; ZOU, X.: Patterns of sustained oscillations in neural networks with delayed interactions. In: *Appl. Math. Comput.* 73 (1995), S. 55–75

Abbildungsverzeichnis

1.1	Modell einer geschlossenen Neuronenkette	14
1.2	Departition der (α, r) -Parameterebene	22
1.3	Das zyklische System (1.27) mit negativer Rückkopplung	55
1.4	Das zyklische System (1.27) mit positiver Rückkopplung	55
1.5	Das zyklische System (1.27) bei negativer Rückkopplung mit $g(x) = \sinh(x)$	56
1.6	Die skalare negative Rückkopplungsgleichung (1.28) bei Variation der Zeitverzögerung r	57
2.1	Kopplung eines exzitatorischen mit einem inhibitorischen Neuron	60
2.2	Verzweigungsdiagramm von (2.3) ohne Selbstkopplungen	62
2.3	Eine sigmoide Transferfunktion g	63
2.4	Die stationären Verzweigungskurven	66
2.5	Departition der komplexen Ebene	69
2.6	Departition in der $(\text{tr } A - \det A)$ -Ebene	72
2.7	Zerlegung der (q_1, q_2) -Parameterebene	78
2.8	Verzweigungsdiagramm für $q_1 > q_2 + 2$, $q_2 < \sqrt{1 + \omega_1^2}$ und Parametern Q und E	79
2.9	Die Kurven homokliner Verzweigung sl_1 und sl_2	81
2.10	Verzweigungsdiagramm für (2.4) in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene.	88
2.11	Das Verzweigungsdiagramm in der (β_1, β_2) -Ebene mit vereinfachten Phasenportraits	93
2.12	Das Verzweigungsdiagramm in der (Q, E) -Ebene	94
2.13	Der Zweig homokliner Lösungen sl_2 endet tangential an der Kurve sn_1	95
2.14	Zweige periodischer Lösungen für $E = 0$ bei Variation von Q	95
2.15	Die Projektionen periodischer und homokliner Lösungen auf die $(u(t), v(t))$ -Ebene für $E = 0$ und verschiedene Q	96
2.16	Das vollständige Verzweigungsdiagramm in der (Q, E) -Parameterebene	97
2.17	Homokline Lösungen zu einem Sattel-Knoten-Punkt	97
2.18	Die Verzweigungskurven $sl_{3,4}$ enden tangential an den Kurven $sl_{2,1}$ in dem Verzweigungspunkt dl	98
2.19	Mögliche Verzweigungskurve $snpo$	99

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name	Andreas Zapp
Geburtstag und -ort	05. Februar 1971 in Gummersbach
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulbildung

1977 – 1981	Grundschule Steinenbrück, Gummersbach
1981 – 1990	Gymnasium Grotenbach, Gummersbach

Grundwehrdienst

07/1990 – 06/1991	Informationszentrale in Andernach / Neuwied
-------------------	---

Studium

ab 10/1991	Studium der Mathematik mit dem Nebenfach Informatik an der Universität zu Köln
01/1994	Vordiplom mit der Note „gut“
03/1997	Diplom mit der Note „sehr gut“
seit 04/97	Promotionsstudium an der Universität zu Köln

Berufliche Tätigkeit

06/1994 – 03/1997	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
04/1997 – 01/1998	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
seit 02/1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität zu Köln

Studienbedingte

Auslandsaufenthalte

11/1996	Barcelona und Lleida, Spanien
04/1997 – 05/1997	Summer School in Triest, Italien
10/1997	Workshops in Leiden, Niederlande
12/1997	Brown University, Providence, USA
06/1999	Workshop in Gent, Belgien

Erklärung

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; daß diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Küpper betreut worden.

Köln, April 2001