Guido Werner: Über Blätterungen von Standard-Sphären und deren Realisierung durch isometrische Immersionen. 2002

Es bezeichne M^n_C die n-dimensionale einfach zusammenhängende Raumform von konstanter Krümmung C. Im Spezialfall C >= 0 ist also S^n_C:=M^_C eine euklidische Sphäre vom Radius 1/C^(1/2). Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die Beziehung zwischen isometrischen Immersionen g von S^n_C nach M^(n+2)_D mit D<C und Blätterungen offener Teilmengen von S^n_C durch vollständige (n-1)-Spären. Nach Arbeiten von Erbacher, Henke und Moore besitzt im Falle n >= 3 jede solche isometrische Immersion g zwei zueinander orthogonale differenzierbare Einheitsnormalenfelder xi_1, xi_2 mit den folgenden Eigenschaften: Für den zweiten Fundamentaltensor A^g_(xi_1) von g bezüglich xi_1 gilt A^g_(xi_1)=id_(TS^n_C) und Kern A^g_(xi_2) induziert eine Blätterung der Nicht-Nabelpunktsmenge U von S^n_C durch vollständige (n-1)-Sphären.
In dieser Arbeit wird die umgekehrte Fragestellung behandelt, ob zu vorgegebener Blätterung B einer offenen Teilmenge U von S^n_C durch vollständige (n-1)-Sphären stets eine isometrische Immersion g von S^n_C nach M^(n+2)_D existiert, welche die gegebene Blätterung B auf die oben beschriebene Weise induziert. Es wird gezeigt, dass stets eine solche isometrische Immersion existiert. Dies ist sogar dann der Fall, wenn U aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht.
Für den Beweis dieses Resultates wird der wohlbekannte Hauptsatz für Untermannigfaltigkeiten verwendet, um die Konstruktion einer isometrischen Immersion g von S^n_C nach M^(n+2)_D, welche eine gegebene Blätterung B induziert, zurückzuführen auf die Konstruktion der durch theta(X) := < nabla_{X} xi_1 , xi_2 > und omega_2(X,Y) := < alpha(X,Y) , xi_2 > gegebenen zugehörigen differenzierbaren Tensorfelder theta und omega_2 auf S^n_C, wobei nabla die kovariante Ableitung im Normalenbündel und alpha die zweite Fundamentalform von g bezeichnet. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die Differenzierbarkeit von theta und omega_2 in den Randpunkten der geblätterten Menge U zu gewährleisten. Dieses Problem wird gelöst durch die Betrachtung unendlicher gewichteter Summen differenzierbarer Tensorfelder omega^i basierend auf einer Idee von Abe und Haas.
Neben dem beschriebenen Hauptresultat werden noch einige elementare Eigenschaften von Blätterungen offener zusammenhängender Teilmengen von Sphären durch Hypersphären bewiesen. Insbesondere wird eine einfache geometrische Bedingung hergeleitet, anhand derer genau die Wege identifiziert werden können, deren Bild als die Menge der Mittelpunkte der Blätter einer solchen Blätterung auftritt.

Let M^n_C denote the n-dimensional simply connected space form of constant curvature C. If especially C>= 0, then S^n_C:=M^n_C is a sphere of radius 1/C^(1/2). The main subject of this thesis paper is the relationship between isometric immersions g: S^n_C -> M^(n+2)_D with D < C and foliations of open subsets of S^n_C by complete (n-1)-spheres. If n > 3, according to papers from Erbacher, Henke and Moore each such isometric immersion g possesses two orthogonal differentiable unit-length normal fields xi_1, xi_2 with the following properties: For the second fundamental tensor A^g_(xi_1) of g with respect to xi_1 we have A^g_(xi_1)=id_(TS^n_C) and Kern A^g_(xi_2) generates a foliation of the subset U of all non-umbilic points of S^n_C by complete (n-1)-spheres.
In this paper the opposite question is examined, whether each foliation B of an open subset U of S^n_C by complete (n-1)-spheres is generated by an isometric immersion g: S^n_C -> M^(n+2)_D as described above. It is shown that always such an isometric immersion exists. This is true, even if U consists of an infinite number of components.
For the proof of this result the well known fundamental theorem for submanifolds is utilized in order to reduce the construction of an isometric immersion g: S^n_C -> M^(n+2)_D, which generates a given foliation B , to the construction of the corresponding differentiable tensorfields theta and omega_2 on S^n_C given by theta(X):=< nabla_X xi_1 , xi_2 > and omega_2(X,Y):=< alpha(X,Y) , xi_2 >, where nabla denotes the connection in the normal bundle and alpha the second fundamental

form of g. The main difficulty is to establish differentiability of theta and omega_2 in points of the border of the foliated subset U. This problem is solved by considering infinite weighted sums of differentiable tensor fields omega^i based on an idea of Abe and Haas.
Beside the main result described above several elementary geometric properties of foliations of open connected subsets of spheres by hyperspheres are shown. Especially a simple geometric condition is proved which allows the identification of those curves whose image is precisely the set of all midpoints of the leafs of such a foliation.