Mathematisches Institut
Universität zu Köln

Dirichletreihen und Eulerprodukte

Bachelorarbeit

Vorgelegt von

Titus Pavlovic

Betreuer: Prof. Dr. Sander Zwegers

Köln, 18. Juli 2019

Vorwort

Die vorliegende Bachelorarbeit *Dirichletreihen und Eulerprodukte* ist die Abschlussarbeit nach dem Bachelorstudium der Mathematik am Mathematischen Institut der Universität zu Köln im Sommersemester 2019.

Diese Bachelorarbeit ist eine eingehende Bearbeitung des Titelthemas in der Zahlentheorie, deren Ursprünge bereits in der Antike liegen. Jedoch kamen fundamentale Beiträge erst im 18. und 19. Jahrhundert durch Mathematiker wie Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß sowie Peter Gustav Lejeune Dirichlet hinzu. Hier knüpft diese Bachelorarbeit an und befasst sich mit der fundierten Darlegung einiger zusammenhängender Grundsteine der Zahlentheorie dieser Epoche.

Zu diesem Thema erschienen neben Lehrbüchern auch Vorlesungsschriften und Artikel. Mit einer Auswahl dieser Literatur, die im Verzeichnis aufgeführt ist, wurde zunächst ein besseres Verständnis des Themas erlangt. Ihre Bearbeitung findet sich in der vorliegenden Schrift. Dazu wurde die verwendete Literatur so studiert, dass die herangezogenen Beweise und Beispiele eines mathematischen Satzes eigenständig zu der hier vorzufindenden Darstellung zusammengeführt wurden.

Die vorliegende Arbeit wurde in LaTeX verfasst und als Bericht formatiert, die Abbildungen wurden in *DesignCAD 3D Max* erstellt.

Köln, den 18. Juli 2019

Titus Pavlovic

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Dirichletreihen und Zahlentheorie 1

1.2 Die Menge der Primzahlen 1

1.3 Der Primzahlsatz 2

1.4 Gliederung dieser Arbeit 3

1.5 Notation 4

2 Algebraische Eigenschaften der Dirichletreihen **5**

2.1 Die Summe zweier Dirichletreihen 6

2.2 Das Produkt zweier Dirichletreihen 7

2.3 Dirichletreihen und das Eulerprodukt 11

3 Analytische Eigenschaften der Dirichletreihen **18**

3.1 Identitätssatz 18

3.2 Absolute Konvergenz der Dirichletreihen 21

3.3 Konvergenz der Dirichletreihen 23

3.4 Der Streifen der bedingten Konvergenz der Dirichletreihen 28

3.5 Komplexe Differenzierbarkeit der Dirichletreihen 29

3.6 Dirichletreihen mit nichtnegativen Koeffizienten 31

4 Integralformeln **33**

4.1 Zwei Durchschnittsformeln 33

4.2 Die Koeffizienten der Dirichletreihen 37

4.3 Partialsummen der Dirichletreihen und die Perron'sche Formel 39

A Unendliche Produkte **44**

Literaturverzeichnis **47**

Abbildungsverzeichnis

3.1 Das Kompaktum K, die Wahl des Winkelbereichs $\mathrm{Ang}(s_0, \alpha)$ und p. 26
3.2 Die Kreisscheiben $B_{\varepsilon}(\sigma_c)$ und $B_{\delta}(\sigma_0)$. 32

4.1 Der Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $d - iT$, $d + iT$, $c + iT$. 40
4.2 Der Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $c + iT$, $b + iT$, $b - iT$. 41

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Dirichletreihen und Zahlentheorie

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit *Dirichletreihen*, die zu den Bausteinen der analytischen Zahlentheorie gehören. Sie stellen eine Brücke zwischen der Zahlentheorie und der Analysis, im Speziellen der Funktionentheorie, dar. Damit helfen sie uns, zahlentheoretische Funktionen mithilfe der Theorie der Analysis zu behandeln. Des Weiteren leitete die ausführliche Behandlung der Grenzfunktion einer ganz bestimmten Dirichletreihe den langwierigen Beweis des *Primzahlsatzes* ein [56], [6, S. 281].

Die Nähe zu Potenzreihen führt die Dirichletreihen selbst in die Analysis, um analytische Funktionen durch Dirichletreihen zu erklären. Wir behalten jedoch die Nähe zur Zahlentheorie im Blick [56].

Der Begriff der *Dirichletreihen* ist mehrdeutig. So kann er die mathematischen Ausdrücke sogenannter *allgemeiner Dirichletreihen* bezeichnen [55, S. 291]. Durch Koeffizienteneinschränkung leiten sich aus diesen mehrere spezielle Reihen her, wie beispielsweise Potenzreihen oder *gewöhnliche Dirichletreihen*. Weil man sich meist jeweils mit einer der Spezialfälle befasst, ist es üblich, auch die gewöhnlichen Dirichletreihen kurz *Dirichletreihen* zu nennen.

Die in der vorliegenden Arbeit dargelegte Behandlung der Dirichletreihen erstreckt sich von grundlegenden Eigenschaften bis hin zur *Perron'schen Formel*. Dadurch erreichen wir ausreichende Kenntnisse für darauf aufbauende weitere Untersuchungen sowohl der Dirichletreihen selbst als auch ihrer Anwendungen, beispielsweise zum Beweis des Primzahlsatzes.

1.2 Die Menge der Primzahlen

Primzahlen faszinieren nicht nur Mathematiker: Sie sind unverkennbar die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen. Dass die *Anzahl der Primzahlen größer ist als jede Zahl, die vorgelegt wird*, bewies Euklid von Alexandria (etwa 300 v. Chr.) bereits in der Antike in seinen *Stoicheia* (Elementen) [15, Buch IX.20], [6, S. 281].

Einen ganz anderen Beweis über die Unendlichkeit der Primzahlmenge gab Leonhard Euler (1707 – 1783) im Jahr 1737 an. Er betrachtete dazu das Produkt $\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$, dessen Divergenz er aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ herleitete [6, S. 52], [17][1]. Eine Verallgemeinerung der dabei benutzten Identität war schließlich die Ausgangslage für Riemanns Abhandlung [43] aus dem Jahr 1859, in der er die heute nach ihm benannte ζ – *Funktion* untersuchte [43, S. 671 – 680].

Die in der vorliegenden Bachelorarbeit behandelte Darstellung einer Dirichletreihe als sogenanntes *Eulerprodukt* ermöglicht es uns, den Satz Euklids beweisen zu können [2, S. 224], [27, S. 113], [21, S. 21].

1.3 Der Primzahlsatz

Auch wenn Primzahlen anscheinend unregelmäßig verteilt sind, kann die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen, die eine vorgegebene positive reelle Schranke x nicht übersteigen, zumindest für große Werte der Schranke annähernd bestimmt werden. So bekundeten Gauss (1777 – 1855) im Jahr 1793 und Legendre (1752 – 1833) im Jahr 1798 ihre Vermutungen, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\cdot\log(x)}{x} = 1$ gilt [7, S. 452]. Der Beweis dieser Vermutung, die heute als *Primzahlsatz* bekannt ist, gelang erst 100 Jahre später [2, S. 8, 9].

Einen entscheidenden Schritt in der Geschichte des Beweises des Primzahlsatzes gelang schließlich Dirichlet (1805 – 1859) im Jahr 1837. Er bewies den heute nach ihm benannten Satz[2] über die Unendlichkeit der Primzahlmenge in einer arithmetischen Folge [24, S. 603]. Im Beweis beschritt er eine neue Vorgehensweise, indem er Werkzeuge der Analysis in der Zahlentheorie benutzte. So ordnete er einer zahlentheoretischen Funktion eine unendliche Reihe zu, in der die vorkommende Variable *reelle* Werte annehmen konnte. Mit der dabei gestalteten Reihe, die nach ihm als *Dirichletreihe* bezeichnet wurde, legte er den Grundstein der analytischen Zahlentheorie [24, S. 604], [5, S. 1].

Auf einen weiteren entscheidenden Beitrag zum Beweis des Primzahlsatzes wartete man bis 1851. Dem russischen Mathematiker Tschebyscheff (1821 – 1894) gelang damals der Beweis, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\cdot\log(x)}{x}$ entweder nicht existiert oder aber, im Falle der Existenz, genau 1 betragen muss. Er war aber nicht in der Lage, die Existenz dieses Grenzwertes und damit den Primzahlsatz zu beweisen [2, S. 9], [24, S. 606].

Acht Jahre später, nämlich 1859, veröffentlichte Riemann (1826 – 1866) die erwähnte Abhandlung [43] über die Verteilung der Primzahlen, in der er der Herangehensweise Dirichlets an die Zahlentheorie folgte. Auch Riemann nutzte analytische Methoden in der Zahlentheorie, nun aber bezüglich komplexwertiger Funktionen. So führte er im Falle der Konvergenz die *Riemann'sche ζ – Funktion* ein. Deren Eigenschaften verknüpfte er mit der Verteilung der Primzahlen [2, S. 9]. Um seine auf nur neun Druckseiten dargestellten Untersuchungen vollständig

[1]Eulers „*Verschiedene Bemerkungen über unendliche Reihen*“ aus 1737 erschien 1744 [16]; Nachdruck in Opera Omnia: Series 1, Band 14, S. 216 – 244, Teubner, Leipzig, um 1927; eine Übersetzung findet sich in [17].

[2]Dirichlet'scher Primzahlsatz [2, S. 7]: Sind a und m teilerfremde natürliche Zahlen, so gibt es unendlich viele Primzahlen der Form $a + km$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

zu rechtfertigen, vergingen einige Jahrzehnte [6, S. 300, 301].

In seiner Arbeit [43] formulierte Riemann auch das heute noch ungelöste Problem über die *nichttrivialen* Nullstellen der *Riemann'schen* ζ *– Funktion* [31][3].

Mit Fortentwicklung der Funktionentheorie waren einige Jahrzehnte später ausreichende Kenntnisse der Eigenschaften der *Riemann'schen* ζ *– Funktion* vorhanden, um den Primzahlsatz zu beweisen. Dies gelang 1896 unabhängig voneinander dem französischem Mathematiker Hadamard (1866 – 1963) und dem Belgier de la Vallée Poussin (1866 – 1962) [6, S. 281, 301].

Damit standen Dirichletreihen und deren Grenzfunktionen, insbesondere die *Riemann'sche* ζ *– Funktion*, im Zentrum der Geschichte des Beweises des Primzahlsatzes.

Wichtige Eigenschaften der Dirichletreihen schilderten bereits Dirichlet und nach ihm sein Schüler Dedekind (1831 – 1916), aber nur für reelle Variablen. Als Erster war es aber der dänische Mathematiker Johan Ludwig Jensen (1859 – 1925), der Resultate über Dirichletreihen für eine komplexe Variable bewies. Der erste Versuch, eine systematische Theorie über Dirichletreihen zu entwickeln, geht auf den französischen Mathematiker Eugène Cahen (1865 – 1941) zurück, der 1894 zum Thema der Dirichletreihen promovierte [57]. In seiner Dissertation unterliefen ihm jedoch einige Fehler und seine Beweise führte er stellenweise ohne die notwendige Strenge. Auch gerade wegen dieser unvollendeten Darstellung erwies sich seine Arbeit als Ausgangslage für weitere Untersuchungen der Dirichletreihen [44, S. 1], [40].

1.4 Gliederung dieser Arbeit

Im folgenden zweiten Kapitel dieser Arbeit werden wir uns mit algebraischen Eigenschaften der Dirichletreihen auseinandersetzen. Dabei werden wir Dirichletreihen durch Produkte über Primzahlen, sogenannte *Eulerprodukte*, darstellen. In diesem Zusammenhang werden wir im Anhang A auf unendliche Produkte genauer eingehen.

Anschließend werden wir im dritten Kapitel analytische Eigenschaften der Dirichletreihen näher untersuchen. Dabei zeigt sich, dass das Innere ihres Konvergenzbereiches eine Halbebene darstellt [27, S. 115]. Während Potenzreihen aber im Inneren ihres Konvergenzbereiches sogar absolut konvergieren, müssen Dirichletreihen nicht unbedingt im ganzen Inneren ihres Konvergenzbereiches absolut konvergieren [10, S. 5]. Was Potenzreihen und Dirichletreihen aber gemeinsam haben, ist die Eigenschaft, dass ihre Grenzfunktionen im Inneren der Konvergenzbereiche *analytische* Funktionen darstellen.

Nachdem wir dies für Dirichletreihen bewiesen haben, werden wir im vierten Kapitel einige Integralformeln herleiten. Wie es auch bei Potenzreihen möglich ist, können die Koeffizienten einer Dirichletreihe aus ihrer Grenzfunktion wiedergewonnen werden [39, S. 33], [7, S. 106]. Schließlich werden wir eine andere Integralformel zeigen, die sogenannte *Perron'sche Formel*. Sie ermöglicht es, die Partialsummen einer Dirichletreihe als komplexes Kurvenintegral darzustellen.

[3] Preisauslobung zur Lösung der *Millennium – Probleme* [30].

1.5 Notation

Wie es bereits bei Landau (1877 – 1938) [36, S. 30] vorzufinden ist, bezeichnen wir den Realteil der komplexen Variablen s mit σ und ihren Imaginärteil mit t [10, S. 1], [39, S. 1], [8, S. 8].

Die Zahlenmengen bezeichnen wir wie gewöhnlich mit $\mathbb{N}$ (Natürliche Zahlen), $\mathbb{Z}$ (Ganze Zahlen), $\mathbb{Q}$ (Rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (Reelle Zahlen) und $\mathbb{C}$ (Komplexe Zahlen).

Wir benutzen die Bezeichnungen [39, S. 8], [2], [27]:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_{>0}$,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
- $\mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad$ für ein $a \in \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}_{\geq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad$ für ein $a \in \mathbb{R}$,
- $a|b$, falls a ein Teiler von b ist, $\quad a,\, b \in \mathbb{N}$,
- $\sum\limits_{1 \leq n \leq x}$ bezeichnet die Summe $\sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}}$ für ein $x \in \mathbb{R}$,
- *Gauß – Klammer* $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad$ für ein $x \in \mathbb{R}$,
- die *Halbebene* $\Omega_\varrho = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) > \varrho\} \quad$ für ein $\varrho \in [-\infty, \infty]$,
- $E : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch $E(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $u(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1, \\ 0, & \text{wenn } n > 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$,
- die *Möbiusfunktion* μ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{wenn } n \text{ ein Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen ist, } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
- die *Euler'sche φ – Funktion* gibt zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen an, die n nicht übersteigen. Sie besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Produktdarstellung
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$
- die *Faltung* zweier zahlentheoretischer Funktionen $f,\ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch
$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Kapitel 2

Algebraische Eigenschaften der Dirichletreihen

Wir betrachten folgende grundlegende Eigenschaften der Dirichletreihen:

- Das Produkt zweier Dirichletreihen ist selbst eine Dirichletreihe und
- Eine Dirichletreihe kann als sogenanntes *Eulerprodukt*, ein unendliches Produkt über Primzahlen, dargestellt werden [27, S. 108].

Diese Eigenschaften sind uns nicht nur nützlich, um Identitäten zwischen Dirichletreihen herzuleiten [2, S. 247], sondern auch dazu geeignet, um Beziehungen zwischen zahlentheoretischen Funktionen zu beweisen [27, S. 120 – 123].

Darüber hinaus ist es uns möglich, den Satz Euklids [15, Buch IX.20] über die Existenz unendlich vieler Primzahlen mithilfe eines Eulerprodukts zu beweisen [2, S. 224], [27, S. 113], [21, S. 21].

Wir definieren zuerst den Begriff der *gewöhnlichen Dirichletreihen*, die im Folgenden einfach als *Dirichletreihen* bezeichnet werden [44, S.1], [55, S. 291].

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion. Dann heißt eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \ s \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

die zu f gehörige *Dirichletreihe*. Die Werte $f(n)$ heißen *Koeffizienten* der Dirichletreihe.

Bezeichnen wir den reellen natürlichen Logarithmus mit log, dann ist n^s mit $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$n^s := \mathrm{e}^{s \cdot \log(n)} = \mathrm{e}^{(\sigma + i \cdot t) \cdot \log(n)} = \mathrm{e}^{\sigma \cdot \log(n)} \cdot \mathrm{e}^{i \cdot t \cdot \log(n)} = n^{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{i \cdot t \cdot \log(n)}.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich für den Betrag [2, S. 225], [39, S. 1], [21, S. 20]

$$|n^s| = n^{\sigma} \cdot |\mathrm{e}^{i \cdot t \cdot \log(n)}| = n^{\sigma}.$$

Wenn die Dirichletreihe (2.1) konvergiert, bezeichnen wir ihren Grenzwert mit $F(s)$ [55, S. 289].

Die wichtigste Dirichletreihe ergibt sich als diejenige, die zur konstanten zahlentheoretischen Funktion $E : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C},\ n \longmapsto 1$, gehört:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{2.2}$$

Für $s = 1$ entsteht aus (2.2) die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, welche divergiert. In der Halbebene $\Omega_1 := \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) > 1\}$ hingegen konvergiert die Reihe (2.2) absolut [22, S. 65, 66], [7, S. 102]. Ihr Grenzwert wird mit $\zeta(s)$ bezeichnet. Diese Funktion $\zeta : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *Riemann'sche ζ – Funktion* [7, S. 102].

Mithilfe der dabei verwendeten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ für jedes $k \in \mathbb{R}_{>1}$ und des *Majorantenkriteriums* untersuchen wir nun die absolute Konvergenz weiterer Dirichletreihen [54, S. 38], [33, S. 64]. Dazu wird die Bezeichnung [39, S. 8]

$$\Omega_\varrho := \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) > \varrho\} \quad \text{für } \varrho \in [-\infty, \infty] \text{ eingeführt.}$$

Satz 2.2. [8, S. 9], [54, S. 38]
Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion. Gibt es Zahlen $n_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $N \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $|f(n)| \leq C \cdot n^N$ für alle $n \geq n_0$ gilt, dann konvergiert die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in jedem $s \in \Omega_{N+1}$ absolut.

Beweis. Nach Voraussetzung sei $|f(n)| \leq C \cdot n^N$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $n \geq n_0$

$$0 \leq \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{C \cdot n^N}{n^\sigma} = C \cdot n^{-(\sigma - N)}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot n^{-(\sigma-N)}$ konvergiert für $\sigma - N > 1$, das bedeutet $\sigma > N + 1$. Demzufolge konvergiert die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ nach dem *Majorantenkriterium* in Ω_{N+1} absolut.

□

2.1 Die Summe zweier Dirichletreihen

Um die Summe zweier Dirichletreihen zu bilden, formulieren wir die für alle absolut konvergenten Reihen gültige Additionsregel passend für absolut konvergente Dirichletreihen [33, S. 66], [54, S. 36], [22, S. 39].

Seien zwei im Punkt $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergente Dirichletreihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ mit dem Grenzwert $F(s)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ mit dem Grenzwert $G(s)$ sowie α, $\beta \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen gegeben. Dann ist auch die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot f(n) + \beta \cdot g(n)}{n^s}$ in s absolut konvergent mit dem Grenzwert $\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$.

2.2 Das Produkt zweier Dirichletreihen

Nun stellt sich auch die Frage nach dem Produkt zweier Dirichletreihen. Das Produkt zweier absolut konvergenter Potenzreihen wird gewöhnlich mithilfe des Cauchy – Produkts dargestellt [33, S. 76]. Für Dirichletreihen ergibt sich eine analoge Darstellung. Dafür nutzen wir die Verknüpfung zweier zahlentheoretischer Funktionen in Form der *Faltung* aus, die mit dem Symbol „$*$“ bezeichnet wird [8, S. 4].

Folgender Satz ermöglicht es, Dirichletreihen zu einigen zahlentheoretischen Funktionen zu bestimmen [8, S. 4, 5], [21, S. 44], [9, S. 2, 3], [27, S. 108].

Satz 2.3. *Seien die zu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ gehörigen Dirichletreihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} \quad \textit{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} \tag{2.3}$$

absolut konvergent in einem $s \in \mathbb{C}$ mit Grenzwerten $F(s)$ respektive $G(s)$. Dann ist die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$ in s absolut konvergent und besitzt den Grenzwert $F(s) \cdot G(s)$.

Beweis. Nach Voraussetzung konvergieren die beiden Dirichletreihen (2.3) in s absolut. Daher können wir die Terme $\frac{f(k)}{k^s} \cdot \frac{g(m)}{m^s}$, $k,\, m \in \mathbb{N}$, beliebig in einer einzigen Reihe anordnen und erhalten immer eine in s absolut konvergente Reihe, deren Grenzwert $F(s) \cdot G(s)$ ist.

Um wieder eine Dirichletreihe zu erhalten, ordnen wir die Terme $\frac{f(k) \cdot g(m)}{(k \cdot m)^s}$, $k,\, m \in \mathbb{N}$, nach ihren Nennern $n := k \cdot m \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich in s

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{(k,\, m) \in \mathbb{N}^2 \\ k \cdot m = n}} \frac{f(k) \cdot g(m)}{(k \cdot m)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \mid n} \frac{f(k) \cdot g(\frac{n}{k})}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} \cdot \left(\sum_{k \mid n} f(k) \cdot g\left(\frac{n}{k}\right) \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

Da die Dirichletreihen (2.3) in s bereits absolut konvergieren, konvergiert auch die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$ in s absolut.

$\square$

Beispiel 2.4. [2, S. 229], [21, S. 44, 45]
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und die Teilerpotenzsumme $\sigma_\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\sigma_\alpha\,(n) := \sum_{d \mid n} d^\alpha. \tag{2.4}$$

Um die zu σ_α gehörige Dirichletreihe zu bestimmen, wenden wir den obigen Satz 2.3 an. Dazu wollen wir den Ausdruck (2.4) als Faltung darstellen und definieren dafür die Funktion

$$I_\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad n \longmapsto n^\alpha.$$

Damit gilt $\sigma_\alpha = I_\alpha * E$. Zur Verwendung des Satzes 2.3 benötigen wir außerdem die absolute Konvergenz der zu I_α und E gehörigen Dirichletreihen. Die zu I_α gehörige Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\alpha}}$$

ist für $s \in \Omega_{\mathrm{Re}(\alpha)+1}$ nach Satz 2.2 absolut konvergent. Der Grenzwert dieser Dirichletreihe stimmt mit $\zeta(s-\alpha)$ überein. Die zu E gehörige Dirichletreihe ist die in Ω_1 absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, deren Grenzwert $\zeta(s)$ ist.

Daher gilt für jedes $s \in \Omega_{\mathrm{Re}(\alpha)+1} \cap \Omega_1 = \Omega_{\max\{\mathrm{Re}(\alpha)+1,\, 1\}}$ nach Satz 2.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_\alpha(n)}{n^s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(n)}{n^s}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\alpha}}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \zeta(s-\alpha)\cdot\zeta(s).$$

Als Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist daher auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}$ in der Halbebene $\Omega_{\max\{\mathrm{Re}(\alpha)+1,1\}}$ absolut konvergent.

Aus diesem Beispiel folgt mit $\alpha = 0$ insbesondere die für $s \in \Omega_1$ gültige Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^s} = \zeta^2(s). \tag{2.5}$$

Im folgenden Beispiel ist die Identität (2.5) verallgemeinert [9, S. 1, 4, 5].

Beispiel 2.5. Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Für die zahlentheoretische Funktion $d_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$n \longmapsto \sum_{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = n} 1, \qquad a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}, \quad \text{gilt} \quad d_k = \underbrace{E * E * \dots * E}_{k-mal}.$$

Mit der absoluten Konvergenz der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ in Ω_1 folgt für jedes $s \in \Omega_1$ nach Satz 2.3 induktiv

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)^k = \zeta^k(s).$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}$ konvergiert in Ω_1 absolut. Für $k = 2$ ergibt sich $d_2 = \sigma_0$ und damit die Formel (2.5).

Das folgende Beispiel behandelt die summatorische Funktion einer charakteristischen Funktion [2, S. 247].

Beispiel 2.6. Wir betrachten die charakteristische Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ prim ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ihre summatorische Funktion $(f * E) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ergibt sich als

$$(f * E)(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} 1.$$

Bezeichnen wir nun die Anzahl der verschiedenen Primteiler einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\nu(n)$, so gilt $f * E = \nu$. Um Satz 2.3 anzuwenden, werden die absoluten Konvergenzbereiche der zu f und E gehörigen Dirichletreihen betrachtet. Die zu E gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist in Ω_1 absolut konvergent. Mit der Abschätzung $|f(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus dem Satz 2.2 die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p^s}$ in Ω_1. Satz 2.3 liefert nun die absolute Konvergenz der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s}$ in Ω_1. Weiterhin gilt für jedes $s \in \Omega_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * E)(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(n)}{n^s} \right) = \left(\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p^s} \right) \cdot \zeta(s).$$

Satz 2.3 bringt das Produkt zweier Dirichletreihen mit der Dirichletreihe in Verbindung, deren Koeffizienten die Faltung der zugehörigen zahlentheoretischen Funktionen sind [27, S. 108]. Daher ist es auch möglich, das Inverse bezüglich der Faltung mit dem Inversen des Grenzwerts einer Dirichletreihe in Verbindung zu setzen [27, S. 109], [2, S. 229].

Bemerkung 2.7. Eine zahlentheoretische Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt bezüglich der Faltung genau dann ein Inverses, falls es eine zahlentheoretische Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, für die

$$(f * g)(n) = u(n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1, \\ 0, & \text{wenn } n > 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \text{gilt.}$$

Korollar 2.8. *Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, die bezüglich der Faltung ein Inverses $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt. Es seien die zugehörigen Dirichletreihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

in einem $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergent mit den Grenzwerten $F(s)$ respektive $G(s)$. Dann gilt $G(s) = \frac{1}{F(s)}$ im Punkt s.

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt für die in s absolut konvergenten und zu f sowie g gehörigen Dirichletreihen

$$F(s) \cdot G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n^s} = 1.$$

Unmittelbar daraus folgt $F(s) \neq 0$ sowie $G(s) \neq 0$ und weiterhin $G(s) = \dfrac{1}{F(s)}$.

□

Liegt sogar eine streng multiplikative zahlentheoretische Funktion $f \not\equiv 0$ vor, so können wir ihre Inverse bezüglich der Faltung konkret angeben [2, S. 36, 229]. Ausgehend von der für die Möbiusfunktion μ gültigen Identität

$$\sum_{d|n} \mu(d) = u(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt für $g(n) := \mu(n) \cdot f(n),\ n \in \mathbb{N}$, die Gleichung

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} (\mu(d) \cdot f(n)) = f(n) \cdot \sum_{d|n} \mu(d) = f(n) \cdot u(n) = u(n).$$

Dabei gilt $f(1) = 1$ wegen der Multiplikativität von f. Daher ist g bezüglich der Faltung das Inverse von f. Mit der Abschätzung

$$0 \leq |g(n)| = |\mu(n) \cdot f(n)| \leq |f(n)|$$

folgt aus dem *Majorantenkriterium* für eine streng multiplikative Funktion $f \not\equiv 0$: Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in einem $s \in \mathbb{C}$ absolut, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ in s absolut.

Um das Korollar 2.8 für streng multiplikative Funktionen $f \not\equiv 0$ anzuwenden, genügt es, die absolute Konvergenz der zu f gehörigen Dirichletreihe zu untersuchen. In den Punkten, in denen sie absolut konvergiert, muss auch die zu g gehörige Dirichletreihe absolut konvergieren.

Beispiel 2.9. Wir betrachten die Möbiusfunktion μ. Sie ist das Faltungsinverse der Funktion E. Es gilt also $E * \mu = u$. Da die konstante Funktion $E \not\equiv 0$ streng multiplikativ ist und die zugehörige Dirichletreihe in Ω_1 absolut konvergiert, konvergiert auch die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ in Ω_1 absolut. Weiterhin gilt $\zeta(s) \neq 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad \text{in } \Omega_1. \tag{2.6}$$

Die Identität (2.6) ermöglicht uns auch die Darstellung der zur Euler'schen φ – Funktion gehörigen Dirichletreihe, mit der wir uns im folgenden Beispiel befassen [27, S. 110], [2, S. 229], [19, S. 68].

Beispiel 2.10. Um die zur Euler'schen φ – Funktion gehörige Dirichletreihe herzuleiten, gehen wir von der Identität

$$(\varphi * E)(n) = id(n) := n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{aus.}$$

Die Möbius'sche Umkehrformel impliziert dann $\varphi = \mu * id$. Hier sei bemerkt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{id(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-1)}$$

in Ω_2 zum Grenzwert $\zeta(s-1)$ absolut konvergiert. Da in Ω_2 auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ mit Grenzwert $\frac{1}{\zeta(s)}$ absolut konvergiert, folgt für jedes $s \in \Omega_2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right) \cdot \zeta(s-1) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

2.3 Dirichletreihen und das Eulerprodukt

Nun widmen wir uns einer weiteren Möglichkeit, Identitäten zwischen Dirichletreihen herzuleiten.

In der Theorie der zahlentheoretischen Funktionen führt die Annahme der *Multiplikativität* meist zu vereinfachten Operationen. Diese Annahme stellt sich auch bei Dirichletreihen als vorteilhaft heraus [8, S. 7]. Gehört eine Dirichletreihe zu einer multiplikativen zahlentheoretischen Funktion, so kann sie als sogenanntes *Eulerprodukt* dargestellt werden – ein unendliches Produkt über Primzahlen [27, S. 111], [21, S. 45].

Definition 2.11. Seien $a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, \ldots \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann ist unter $\prod\limits_{p \text{ prim}} (1 + a_p)$ das unendliche Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ zu verstehen, für das die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$b_n := \begin{cases} a_n, & \text{wenn } n \text{ prim ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \text{gegeben ist.}$$

(Zur Definition allgemeiner unendlicher Produkte ist auf den Anhang A verwiesen.)

Satz 2.12. *Sei $f \not\equiv 0$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion. Sei außerdem die zugehörige Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ absolut konvergent in einem Punkt $s \in \mathbb{C}$. Dann ist das unendliche Produkt*

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) \tag{2.7}$$

in s absolut konvergent und es gilt in s

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right). \tag{2.8}$$

Bemerkung 2.13. [27, S. 111], [21, S. 45, 46]

Das unendliche Produkt (2.7) heißt das zur Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ gehörige *Eulerprodukt*.

Bemerkung 2.14. [21, S. 45, 46] Da $f \not\equiv 0$ multiplikativ ist, gilt $f(1) = 1$. Das Eulerprodukt (2.7) können wir deshalb als $\prod\limits_{p \text{ prim}} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right)$ schreiben.

In Beispielen werden wir jedoch die Schreibweise (2.7) verwenden, um Fehler bei der Auswertung von f zu vermeiden. Folgendes Beispiel erläutert dies.

Beispiel 2.15. Sei die Funktion $\kappa : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $\kappa(n) := \prod\limits_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \nu_p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, definiert, wobei $\nu_p(n) := \max\{j \in \mathbb{N}_0 \mid p^j | n\}$, p prim, $n \in \mathbb{N}$, gelte [2, S. 247]. Dann gilt $\kappa(p^\ell) = \ell$ für jede Primzahl p und jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Dies ist jedoch in $\ell = 0$ nicht wahr, da $\kappa(1) = 1$ nach der Definition von κ gilt.

Bemerkung 2.16. [21, S. 45, 46], [19, S. 68], [2, S. 231], [9, S. 9]
Ist $f \not\equiv 0$ sogar streng multiplikativ, dann lässt sich das Eulerprodukt (2.7) mithilfe der geometrischen Reihe vereinfachen. Unter der Bedingung, dass $\left| \frac{f(p)}{p^s} \right| < 1$ für jede Primzahl p gilt, ergibt sich

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s} \right)^k \right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - f(p) \cdot p^{-s}}.$$

Beweis des Satzes 2.12. [19, S. 66, 67], [27, S. 111, 112], [34, S. 106], [2, S. 230, 231]
Zunächst zeigen wir die absolute Konvergenz des unendlichen Produkts (2.7). Äquivalent zu dieser Aussage ist es, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{p \text{ prim}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| \tag{2.9}$$

in s zu zeigen [Anhang A], [27, S. 196, 197], [54, S. 40], [37, S. 197].

Weil $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in s absolut konvergent ist und nach dem *Majorantenkriterium* auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$ für jede Primzahl p in s absolut konvergiert, folgt die Konvergenz der Reihe (2.9) aus der in s gültigen Abschätzung

$$\sum_{p \text{ prim}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \sum_{p \text{ prim}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| < \infty.$$

Daher konvergiert auch das unendliche Produkt (2.7) in s absolut.

Um nun die Gleichung (2.8) herzuleiten, betrachten wir für $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Produkte

$$\prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right).$$

Dabei handelt es sich um ein Produkt endlich vieler in s absolut konvergenter Reihen. Daher können wir das Produkt Term für Term ausmultiplizieren und anschließend umordnen, ohne dadurch den Grenzwert zu verändern.

Wir führen nun die Bezeichnung $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\} = \{p \text{ prim} \mid p \leq N\}$ ein; dabei komme keine Primzahl mehr als einmal in $q_1, q_2, \ldots, q_r$ vor. Des Weiteren benutzen wir die verkürzte Summenschreibweise

$$\sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r \geq 0} (\ldots) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \left(\sum_{m_r=0}^{\infty} (\ldots) \right) \cdots \right).$$

Aufgrund der Multiplikativität von f in s gilt

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) &= \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q_i^k)}{q_i^{ks}} \right) = \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r \geq 0} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f(q_i^{m_i})}{q_i^{m_i \cdot s}} \right) \\ &= \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r \geq 0} \left(\frac{f\left(\prod\limits_{i=1}^{r} q_i^{m_i} \right)}{\left(\prod\limits_{i=1}^{r} q_i^{m_i} \right)^s} \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da jede Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Primfaktorzerlegung besitzt [6, S. 7] und $1 = \prod\limits_{i=1}^{r} q_i^0$ gilt, kommen als Argument von f in (2.10) alle natürlichen Zahlen vor, deren sämtliche Primteiler aus der Menge $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$ stammen. Diese Zahlen sind genau die Elemente der Menge

$$A_N := \{n \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}, \ p|n \Rightarrow p \leq N\}.$$

(Da 1 keine Primteiler besitzt, gilt auch $1 \in A_N$.)

Nun ist die Darstellung jeder Zahl $n \in A_N \setminus \{1\}$ als $\prod\limits_{i=1}^{r} q_i^{m_i}$, $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_0$ eindeutig [6, S. 7]. Weil auch die Zahl 1 auf diese Weise nur durch verschwindende Exponenten dargestellt wird, kommen nie zwei gleiche Zahlen in (2.10) als Argument von f vor. Daher kann (2.10) auch als $\sum\limits_{n \in A_N} \frac{f(n)}{n^s}$ dargestellt werden.

Natürliche Zahlen, die nicht aus A_N stammen, haben mindestens einen Primteiler, der echt größer als N ist. Folglich sind sie selbst echt größer als N. Daher ergibt sich in s

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n \in A_N} \frac{f(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| = \left| \sum_{n \notin A_N} \frac{f(n)}{n^s} \right| \\ &\leq \sum_{n \notin A_N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|. \end{aligned}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der zu f gehörigen Dirichletreihe folgt in s

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \lim_{N \to \infty} \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

was den Beweis der Formel (2.8) und des Satzes 2.12 abschließt.

□

Beispiel 2.17. [21, S. 46], [2, S. 231]
Wir bestimmen das Eulerprodukt der zur *Riemann'schen* ζ – *Funktion* gehörigen Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Diese Dirichletreihe ist in Ω_1 absolut konvergent, $E \not\equiv 0$ ist streng multiplikativ und es gilt die Abschätzung $\left|p^{-s}\right| < p^{-1} \leq \frac{1}{2} < 1$ für jede Primzahl p und jedes $s \in \Omega_1$. Aus der Bemerkung 2.16 des Satzes 2.12 folgt für jedes $s \in \Omega_1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{2.11}$$

Diese Darstellung ermöglicht auch einen alternativen Beweis des Satzes Euklids [15, Buch IX.20] über die Existenz unendlich vieler Primzahlen.

Der Beweis erfolgt per Widerspruch. Angenommen sei dazu, dass die Menge der Primzahlen endlich ist. Die Bestandteile der für reelles $s = \sigma > 1$ ausgewerteten Identität (2.11) werden anschließend auf ihr Verhalten untersucht, wenn $s = \sigma > 1$ gegen $1 \notin \Omega_1$ strebt [27, S. 113]. Entscheidend dafür ist eine unabhängig von der Kardinalität der Primzahlmenge gültige Eigenschaft der *Riemann'schen* ζ – *Funktion*, die wir in folgendem Lemma darlegen [21, S. 20, 21], [27, S. 113].

Lemma 2.18. *Für die Riemann'sche* ζ – *Funktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \Omega_1$, *gilt*

$$\lim_{\sigma \downarrow 1} \zeta(\sigma) = \infty.$$

Beweis. Wir betrachten die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deren Partialsummenfolge unbeschränkt ist [22, S. 65].

Ist $R \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, so gibt es daher eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq R+1$ gilt. Wir betrachten nun für dieses N die zugehörige Funktion

$$\sigma \longmapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\sigma \log(n)}$$

mit endlich vielen Summanden. Diese Funktion ist für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ stetig, also auch für $\sigma = 1$. Daher gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $\sigma \in (1-\delta, 1+\delta)$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right| < \varepsilon = 1$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} > \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) - 1 \geq R + 1 - 1 = R \quad \text{gilt.}$$

Für jedes $\sigma \in (1, 1+\delta)$ folgt daraus die Abschätzung

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} > R.$$

Dies bedeutet gerade $\lim\limits_{\sigma \downarrow 1} \zeta(\sigma) = \infty$.

□

Nun können wir folgenden Beweis des Satzes Euklids führen [21, S. 20, 21], [27, S. 113]. Angenommen sei, dass die Menge der Primzahlen endlich ist. Dann wäre das Produkt

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

aus Gleichung (2.11) endlich und für jedes $s = \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Aufgrund der Stetigkeit in $s = \sigma = 1$ wäre daher

$$\lim_{\sigma \downarrow 1} \left(\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-\sigma}} \right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-1}}$$

eine reelle Zahl. Andererseits müsste dies der Gleichung (2.11) zufolge mit $\lim\limits_{\sigma \downarrow 1} \zeta(\sigma) = \infty$ übereinstimmen. Dies ergibt einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt.

Damit muss es unendlich viele Primzahlen geben.

Beispiel 2.19. [21, S. 44, 46], [27, S. 113, 114], [19, S. 68]
Das Eulerprodukt der zur multiplikativen Möbiusfunktion μ gehörigen Dirichletreihe können wir durch Anwenden des Satzes 2.12 erhalten.

Für eine Primzahl p und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\mu\left(p^k\right) = 0$ sowie $\mu(p) = -1$. Da die zu μ gehörige Dirichletreihe nach Satz 2.2 in Ω_1 absolut konvergiert, folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod\limits_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ für alle $s \in \Omega_1$.

Mithilfe des Eulerprodukts der zur *Riemann'schen ζ – Funktion* gehörigen Dirichletreihe folgt nun

$$\begin{aligned}\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} &= \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-s}\right)^{-1} \right) \cdot \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-s}\right) \right) \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \left(\left(1-p^{-s}\right)^{-1} \cdot \left(1-p^{-s}\right) \right) = \prod_{p \text{ prim}} 1 = 1 \quad \text{für jedes } s \in \Omega_1.\end{aligned}$$

Auch diese Darstellung zeigt $\zeta(s) \neq 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ in Ω_1, was bereits mithilfe des Korollars 2.8 in Beispiel 2.9 hergeleitet wurde.

Beispiel 2.20. [27, S. 115], [39, S. 9]
Wir nutzen nun Satz 2.12, um das Eulerprodukt der Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ zu bestimmen. Wegen $|\varphi(n)| \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, ist sie nach Satz 2.2 in Ω_2 absolut konvergent.

Da die Euler'sche φ – Funktion multiplikativ ist, ergibt Satz 2.12 für $s \in \Omega_2$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} &= \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(p^{1-s}\right)^k\right) \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{p^{1-s}}{1 - p^{1-s}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

(Hier war die Anwendung des Grenzwertes der geometrischen Reihe wegen $|p^{1-s}| < p^{-1} \leq \frac{1}{2} < 1$ legitim.)

Die Darstellung (2.12) ergibt des Weiteren für $s \in \Omega_2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{-s}\right)\right) \cdot \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{1-s}\right)^{-1}\right) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}. \tag{2.13}$$

Dies wurde bereits mithilfe des Satzes 2.3 in Beispiel 2.10 ermittelt.

Beispiel 2.21. [2, S. 231], [8, S. 6]

In Beispiel 2.4 stellten wir bereits fest, dass die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}$ in $\Omega_{\max\{\mathrm{Re}(\alpha)+1,1\}}$ absolut konvergiert.

Für ihren Grenzwert gilt weiterhin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s-\alpha) \cdot \zeta(s)$ für jedes $s \in \Omega_{\max\{\mathrm{Re}(\alpha)+1,1\}}$.

Mithilfe des Eulerprodukts der zur *Riemann'schen ζ – Funktion* gehörigen Dirichletreihe folgt für jedes $s \in \Omega_{\max\{\mathrm{Re}(\alpha)+1,1\}}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s-\alpha) \cdot \zeta(s) = \left(\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s+\alpha}}\right) \cdot \left(\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}\right) \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{(1 - p^{-s+\alpha}) \cdot (1 - p^{-s})}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.22. [2, S. 247] Anschließend an Beispiel 2.15 wollen wir den Grenzwert der Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} \tag{2.14}$$

mithilfe der *Riemann'schen ζ – Funktion* ausdrücken und nutzen dazu die Darstellung als Eulerprodukt.

Zunächst sei bemerkt, dass zwei teilerfremde natürliche Zahlen keine gemeinsamen Primteiler besitzen. Daher ist $\kappa \not\equiv 0$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion.

Um Satz 2.12 anzuwenden, wird außerdem die Absolute Konvergenz der Dirichletreihe (2.14) benötigt. Ausgehend von der für jedes $m \in \mathbb{N}$ gültigen Identität $m \leq 2^m$ ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|\kappa(n)| = \kappa(n) = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} \nu_p(n) \leq \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} 2^{\nu_p(n)} \leq \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|n}} p^{\nu_p(n)} = n.$$

Aus Satz 2.2 folgt daher die Absolute Konvergenz der Dirichletreihe (2.14) in Ω_2. Damit liefert Satz 2.12 für jedes $s \in \Omega_2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\kappa(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot \left(p^{-s}\right)^\ell\right). \tag{2.15}$$

Um dies auszuwerten, sei daran erinnert, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert werden dürfen [7, S. 105], [22, S. 245, 246]. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ergibt sich mithilfe des Grenzwertes der geometrischen Reihe

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot z^\ell = z \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot z^{\ell-1} = z \cdot \frac{d}{dz}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell\right) = z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Ist nun $s \in \Omega_2$, so gilt $\left|p^{-s}\right| = p^{-\sigma} < p^{-2} \leq \frac{1}{4} < 1$ für jede Primzahl p. Damit folgt aus (2.15) in Ω_2 weiter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \frac{p^{-s}}{\left(1-p^{-s}\right)^2}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1 - p^{-s} + p^{-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)^2}.$$

Um dieses Eulerprodukt mit der *Riemann'schen ζ – Funktion* in Verbindung zu bringen, wird jeder als Faktor vorkommende Bruch mit $(1-p^{-2s})\cdot(1-p^{-3s})$ erweitert, womit für jedes $s \in \Omega_2$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} &= \prod_{p \text{ prim}} \frac{(1-p^{-s}+p^{-2s}) \cdot (1-p^{-2s}) \cdot (1-p^{-3s})}{\left(1-p^{-s}\right)^2 \cdot (1-p^{-2s}) \cdot (1-p^{-3s})} \\
&= \prod_{p \text{ prim}} \frac{(1-p^{-6s}) \cdot (1-p^{-s})}{\left(1-p^{-s}\right)^2 \cdot (1-p^{-2s}) \cdot (1-p^{-3s})} \\
&= \prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-6s}\right) \cdot \prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-2s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \text{ prim}} \left(1-p^{-3s}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\zeta(6s)} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(2s) \cdot \zeta(3s) \quad \text{gilt.}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Jede Reihe der Gestalt $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^{ks}}$, $k \in \mathbb{N}$, können wir mithilfe

$$g(n) := \begin{cases} f(n^{\frac{1}{k}}), & \text{wenn } n = m^k \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

als Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ in der Variablen s auffassen [2, S. 229]. Bei der rechten Seite $\frac{\zeta(s) \cdot \zeta(2s) \cdot \zeta(3s)}{\zeta(6s)}$ der Formel (2.16) handelt es sich deshalb wegen Satz 2.3 um den Grenzwert einer in Ω_1 absolut konvergenten Dirichletreihe. Daher stellt sich die Frage, ob die Dirichletreihe (2.14) auch in Ω_1 absolut konvergiert und nicht nur in Ω_2, sondern sogar in Ω_1 den Grenzwert $\frac{\zeta(s) \cdot \zeta(2s) \cdot \zeta(3s)}{\zeta(6s)}$ besitzt [29, S. 130]. Dass beides der Fall ist, ergibt sich aus dem sogenannten *Identitätssatz* für Dirichletreihen, dem wir uns im folgenden Kapitel widmen.

Kapitel 3

Analytische Eigenschaften der Dirichletreihen

Nachdem wir im vorherigen Kapitel *algebraische* Eigenschaften der Dirichletreihen betrachtet haben, beschäftigen wir uns jetzt mit deren *analytischen*. Aufbauend auf Untersuchungen zur *absoluten* und *gewöhnlichen Konvergenz* der Dirichletreihen zeigen wir im fünften Abschnitt, dass ihre Grenzfunktionen *analytisch* sind. Aus diesem Grund können Methoden der Funktionentheorie angewandt werden [27, S. 119].

3.1 Identitätssatz

In der Theorie der Potenzreihen besagt der Identitätssatz, dass die Koeffizienten einer Potenzreihe bereits eindeutig durch die Grenzfunktion bestimmt sind [7, S. 110]. Für Dirichletreihen ergibt sich der folgende analoge Satz, der sich bereits in Harald Bohrs (1887 – 1951) Dissertation aus dem Jahr 1910 findet [5, S. 15].

Satz 3.1 (Identitätssatz)**.** [21, S. 43], [8, S. 9]
Seien die zu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gehörigen Dirichletreihen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ *absolut konvergent in* Ω_{σ_0} *für ein* $\sigma_0 \in \mathbb{R}$*. Ihre Grenzwerte seien mit* $F(s)$ *respektive* $G(s)$ *bezeichnet. Falls es eine komplexe Folge* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit den Eigenschaften*

$$s_k \in \Omega_{\sigma_0} \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_k) = \infty \quad \textit{sowie}$$

$$F(s_k) = G(s_k) \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gibt, dann gilt $f(n) = g(n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Wir betrachten die Differenzfunktion $h := f - g$, deren Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ in Ω_{σ_0} absolut konvergiert und den Grenzwert $H(s) := F(s) - G(s)$ besitzt.

Gilt $H(s_k) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so müssen wir zum Beweis des Satzes zeigen, dass dann $h(n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Wir nutzen dazu das Beweisprinzip der Kontraposition und setzen daher voraus, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $h(m) \neq 0$ gibt. Sei $\ell := \min\{m \in \mathbb{N} \mid h(m) \neq 0\} \in \mathbb{N}$ die kleinste Stelle, in der h nicht verschwindet. Um zu beweisen, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $H(s_k) \neq 0$ gibt, werden wir zeigen, dass ein reelles $\sigma_1 > \sigma_0$ mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{h(n)}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^s} \right| \leq \frac{2}{3} \cdot |h(\ell)| \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \sigma = \operatorname{Re}(s) \geq \sigma_1 \tag{3.1}$$

existiert. Dann nämlich würde für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \operatorname{Re}(s) \geq \sigma_1$

$$\begin{aligned} |H(s)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \right| = \left| \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \right| = \frac{1}{\ell^\sigma} \cdot \left| h(\ell) + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{h(n)}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^s} \right| \\ &\geq \frac{1}{\ell^\sigma} \cdot \left| |h(\ell)| - \left| \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{h(n)}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^s} \right| \right| \geq \frac{1}{\ell^\sigma} \cdot \left(|h(\ell)| - \frac{2}{3} \cdot |h(\ell)| \right) = \frac{|h(\ell)|}{3 \cdot \ell^\sigma} > 0 \quad \text{folgen.} \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{Re}(s_k) = \infty$ gäbe es dann auch ein $k \in \mathbb{N}$ mit $H(s_k) \neq 0$, was den Beweis des Satzes per Kontraposition abschließen würde.

Zum Beweis des Satzes zeigen wir jetzt die Existenz eines $\sigma_1 > \sigma_0$ mit der Eigenschaft (3.1). Da die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ insbesondere in einem reellen $s_2 = \sigma_2 > \sigma_0$ absolut konvergent ist, konvergiert auch $\sum\limits_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma_2}}$. Aufgrund der Definition der Reihenkonvergenz gibt es zu $\varepsilon := \frac{|h(\ell)|}{3} > 0$ ein $M \geq \ell$, sodass

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma_2}} \leq \frac{|h(\ell)|}{3} = \varepsilon \quad \text{gilt.} \tag{3.2}$$

Um Formel (3.1) zu erhalten, betrachten wir die endliche Summe $\sum\limits_{n=\ell+1}^{M} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\sigma_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{n=\ell+1}^{M} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma_3}} \leq \frac{|h(\ell)|}{3}, \tag{3.3}$$

weil σ_3 derart groß gewählt werden kann, dass jeder Summand der endlichen Summe für die Abschätzung (3.3) ausreichend klein wird.

Aus (3.2) und (3.3) folgt nun für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \operatorname{Re}(s) \geq \sigma_1 := \max\{\sigma_2, \sigma_3\} > \sigma_0$

$$\left| \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{h(n)}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^s} \right| \leq \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma}} \leq \sum_{n=\ell+1}^{M} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma_3}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\sigma_2}} \leq \frac{|h(\ell)|}{3} + \frac{|h(\ell)|}{3} = \frac{2}{3} \cdot |h(\ell)|.$$

□

Als erste Anwendung des Identitätssatzes 3.1 können wir die Existenz einer Halbebene Ω_c beweisen, in der die Grenzfunktion einer Dirichletreihe keine Nullstellen besitzt, falls diese nicht die Nullfunktion ist [2, S. 227].

Korollar 3.2. [8, S. 10], [2, S. 227]
Sei die zu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ absolut konvergent in einem Ω_{σ_0} für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Ihr Grenzwert sei mit $F(s)$ bezeichnet. Falls es ein $s \in \Omega_{\sigma_0}$ mit $F(s) \neq 0$ gibt, dann gibt es ein reelles $c \geq \sigma_0$, sodass $F(s) \neq 0$ für alle $s \in \Omega_c$ gilt.

Bemerkung 3.3. Das Korollar 3.2 liefert lediglich die Existenz einer Halbebene Ω_c, in der die Grenzfunktion F keine Nullstellen besitzt. Im Falle der zur *Riemann'schen ζ – Funktion* gehörigen Dirichletreihe wissen wir aus den Beispielen 2.9 und 2.19, dass $\zeta(s) \neq 0$ für jedes $s \in \Omega_1$ gilt, weshalb $c = 1$ gewählt werden kann.

Beweis des Korollars 3.2. Wir nutzen erneut das Beweisprinzip der Kontraposition. Daher sei vorausgesetzt, dass zu jedem $c \geq \sigma_0$ ein $s \in \Omega_c$ mit $F(s) = 0$ existiert.

Insbesondere gibt es zu jedem $k > \sigma_0$, $k \in \mathbb{N}$, ein $s_k \in \Omega_k \subset \Omega_{\sigma_0}$ mit $F(s_k) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n^{s_k}}$. Wegen $\mathrm{Re}(s_k) > k$ gilt $\lim_{k \to \infty} \mathrm{Re}(s_k) = \infty$.

Dann ergibt der Identitätssatz 3.1, dass $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, womit $F(s) = 0$ für jedes $s \in \Omega_{\sigma_0}$ impliziert wird. Dies schließt den Beweis des Korollars per Kontraposition ab. □

Wir kehren nun zurück zu Beispiel 2.22 und betrachten die für jedes $s \in \Omega_2$ hergeleitete Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \cdot \zeta(2s) \cdot \zeta(3s)}{\zeta(6s)}. \tag{3.4}$$

Bei der rechten Seite der Identität (3.4) handelt es sich wegen Satz 2.3 um den Grenzwert einer in Ω_1 absolut konvergenten Dirichletreihe. Des Weiteren ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s}$ eine in Ω_2 absolut konvergente Dirichletreihe.

Daher folgt mit dem Identitätssatz 3.1 aus Formel (3.4), indem beispielsweise $s_k = k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, gesetzt wird: Die zur linken und rechten Seite der Formel (3.4) gehörigen Dirichletreihen haben die gleichen Koeffizienten und sind daher vollkommen identisch. Insbesondere konvergieren sie in den gleichen Punkten absolut. Daher muss auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s}$ bereits in Ω_1 absolut konvergieren. Darüber hinaus gilt (3.4) bereits überall dort, wo die Dirichletreihen konvergent sind, also in jedem Fall in Ω_1 [29, S. 130].

Als weitere Anwendung des Identitätssatzes 3.1 ist es uns möglich, Identitäten zwischen zahlentheoretischen Funktionen mithilfe der Dirichletreihen zu beweisen.

Korollar 3.4. [27, S. 120], [2, S. 228]
Seien die zu f, g, $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehörigen Dirichletreihen absolut konvergent in Ω_{σ_0} für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Ihre Grenzwerte seien mit $F(s)$, $G(s)$ respektive $H(s)$ bezeichnet. Falls es eine komplexe Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$s_k \in \Omega_{\sigma_0} \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}(s_k) = \infty \quad \textit{sowie}$$

$$F(s_k) \cdot G(s_k) = H(s_k) \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gibt, dann gilt $(f * g)(n) = h(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Aus der absoluten Konvergenz der zu f und g gehörigen Dirichletreihen in Ω_{σ_0} folgt mit Satz 2.3, dass die Dirichletreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ in Ω_{σ_0} absolut konvergiert und den Grenzwert $F(s) \cdot G(s)$ besitzt. Da auch die zu h gehörige Dirichletreihe in Ω_{σ_0} absolut konvergiert, ergibt sich aus $F(s_k) \cdot G(s_k) = H(s_k)$, $k \in \mathbb{N}$, mithilfe des Identitätssatzes 3.1 die Behauptung $f * g = h$. □

Beispiel 3.5. [9, S. 9, 10] Unter Verwendung der Eulerprodukte wurde in Beispiel 2.19 die Identität

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \quad \text{in } \Omega_1$$

hergeleitet, ohne dabei $E * \mu = u$ zu benutzen.

Um Korollar 3.4 anzuwenden, sei bemerkt, dass die zu E und μ gehörigen Dirichletreihen in Ω_1 absolut konvergieren. Wenden wir Korollar 3.4 mit $s_k = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, auf die Gleichung

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}, \quad s \in \Omega_1,$$

an, so ergibt sich die Identität

$$E * \mu = u. \tag{3.5}$$

Damit ist ein Beweis dieser Identität (3.5) gegeben, der die Theorie der Dirichletreihen benutzt.

3.2 Absolute Konvergenz der Dirichletreihen

Im Identitätssatz 3.1 und den anschließenden Korollaren 3.2 und 3.4 setzten wir stets die absolute Konvergenz der Dirichletreihen in Halbebenen der Gestalt Ω_{σ_0} für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ voraus. Wir zeigen nun, dass derartige Halbebenen jeder Dirichletreihe zugeordnet werden können, wenn diese überhaupt irgendwo absolut konvergent ist [5, S. 3 – 6].

Satz 3.6. [8, S. 8], [27, S. 116], [2, S. 225, 233]
Falls die zu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehörige Dirichletreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in einem $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie in jedem $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$ absolut.

Konvergiert sie hingegen in einem $s_1 \in \mathbb{C}$ nicht absolut, so konvergiert sie in keinem $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \leq \mathrm{Re}(s_1)$ absolut.

Beweis. Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0) = \sigma_0$ beliebig. Dann gilt $n^\sigma \geq n^{\sigma_0}$ und

$$0 \leq \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_0}} = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right|$$

für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right|$ nach Voraussetzung konvergiert, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ nach dem *Majorantenkriterium* absolut. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wir widmen uns dem zweiten, der per Kontraposition bewiesen wird. Vorausgesetzt sei dazu, dass es einen Punkt $s' \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s') \leq \mathrm{Re}(s_1)$ gibt, für den die Dirichletreihe absolut konvergiert. Dann liegt nach dem ersten Teil des Satzes insbesondere auch in s_1 absolute Konvergenz der Dirichletreihe vor. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

□

Mithilfe des Satzes 3.6 ist es möglich, den absoluten Konvergenzbereich einer Dirichletreihe wie folgt zu charakterisieren:

Satz 3.7. [27, S. 116], [39, S. 25], [2, S. 225], [55, S. 290, 291]
Zu jeder Dirichletreihe gibt es ein $\sigma_a \in [-\infty, +\infty]$*, für das gilt: Für jedes* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ *konvergiert die Dirichletreihe absolut; für jedes* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$ *konvergiert die Dirichletreihe dagegen nicht absolut.*

Bemerkung 3.8. Das dadurch eindeutig bestimmte $\sigma_a \in [-\infty, +\infty]$ heißt *Abszisse der absoluten Konvergenz* [26, S. 558].

Beweis des Satzes 3.7. Wir betrachten die zu einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Falls sie in keinem $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, wählen wir für die Behauptung des Satzes $\sigma_a = +\infty$; wenn sie hingegen in jedem $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, so setzen wir $\sigma_a = -\infty$.

Ansonsten gibt es einerseits mindestens einen Punkt, in dem sie absolut konvergiert, und andererseits mindestens einen Punkt, in dem sie nicht absolut konvergiert. Daher ist die Menge

$$D := \left\{ \sigma = \mathrm{Re}(s) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ konvergiert absolut} \right\}$$

einerseits nichtleer, andererseits dem zweiten Teil des Satzes 3.6 zufolge nach unten beschränkt. Deshalb besitzt D eine reelle Zahl als Infimum, die mit σ_a bezeichnet werde [22, S. 88].

Da σ_a eine untere Schranke von D ist, liegen alle Punkte, in denen die Dirichletreihe absolut konvergiert, in der Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) \geq \sigma_a\}$. Damit folgt der zweite Teil des Satzes per Kontraposition.

Auch der erste Teil des Satzes folgt per Kontraposition. Sei dazu ein beliebiger Punkt $s' = \sigma' + it' \in \mathbb{C}$, σ', $t' \in \mathbb{R}$, betrachtet, in dem die Dirichletreihe nicht absolut konvergiert. Gälte $\sigma' > \sigma_a$, so wäre dem zweiten Teil des Satzes 3.6 zufolge die Zahl σ_a nicht die größte untere Schranke von D: Die Zahl σ' wäre nämlich eine echt größere. Da dies der Definition von σ_a als Infimum widerspräche, folgt $\sigma' \leq \sigma_a$.

□

Beispiel 3.9. [8, S. 8, 9] Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, für die es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f(n) = 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann ist die zugehörige Dirichletreihe eine endliche Summe und konvergiert daher immer absolut. Die *Abszisse der absoluten Konvergenz* ist also $-\infty$.

Beispiel 3.10. [8, S. 8], [33, S. 108]
Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ schneller als jede Potenz gegen ∞ wächst, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^n}{n^s}\right| = \infty$ für jedes $s \in \mathbb{C}$. Daher ist die zu $f(n) = \mathrm{e}^n$, $n \in \mathbb{N}$, gehörige Dirichletreihe nie absolut konvergent. Aus diesem Grund besitzt sie $+\infty$ als *Abszisse der absoluten Konvergenz.*

Beispiel 3.11. [27, S. 116], [2, S. 225]
Die zur *Riemann'schen ζ – Funktion* gehörige Dirichletreihe konvergiert in Ω_1 absolut. In $s = 1$ divergiert sie hingegen, womit sich $\sigma_a = 1$ als *Abszisse der absoluten Konvergenz* ergibt. Aufgrund der zweiten Aussage des Satzes 3.6 liegt für kein $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{Re}(s) = 1$ absolute Konvergenz der Dirichletreihe vor.

Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass auf der Geraden $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) = \sigma_a\}$ auch absolute Konvergenz vorliegen kann.

Beispiel 3.12. [8, S. 9], [27, S. 116]
Nach dem *Cauchy'schen Verdichtungssatz* [26, S. 203] ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n) \cdot n^{\sigma}} \tag{3.6}$$

mit $\sigma \geq 0$ genau dann konvergent, wenn

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log^2(2^n) \cdot 2^{n\sigma}} \tag{3.7}$$

konvergiert.

Da für $\sigma = 1$ aus (3.7) die konvergente Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2(2) \cdot n^2}$ entsteht, konvergiert auch die Reihe (3.6) für $\sigma = 1$. Für jedes $0 \leq \sigma < 1$ gilt dagegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n(1-\sigma)}}{\log^2(2) \cdot n^2} = \infty$, weshalb weder (3.7) noch (3.6) für $0 \leq \sigma < 1$ konvergieren.

Daher besitzt die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n) \cdot n^s}$ den Wert $\sigma_a = 1$ als *Abszisse der absoluten Konvergenz.* Auf der Geraden $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) = 1\}$ ist sie immer absolut konvergent.

3.3 Konvergenz der Dirichletreihen

Um zu den Sätzen 3.6 und 3.7 im Falle gewöhnlicher Konvergenz einer Dirichletreihe ähnliche Aussagen zu erhalten, ist mehr Aufwand nötig.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Formel der sogenannten *Abel'schen partiellen Summation*, die ein zur *partiellen Integration* analoges Ergebnis für Summen angibt [27, S. 56], [2, S. 77], [21, S. 73].

Satz 3.13 (Abel'sche partielle Summation)**.** *Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion mit*

$$A(v) := \sum_{1 \leq n \leq v} a(n), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Seien $0 < y < x$ reelle Zahlen und $g : [y, x] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)g(n) = A(x)g(x) - A(y)g(y) - \int_y^x A(v)g'(v)\, dv. \tag{3.8}$$

Beweis. Wir betrachten das Integral $\displaystyle\int_y^x A(v)g'(v)\, dv = \int_y^x \left(\sum_{1 \leq n \leq v} a(n) \right) g'(v)\, dv$. Die dabei unter dem Integralzeichen vorkommende Summe enthält eine von der Integrationsvariablen v abhängige Anzahl an Summanden, die $\lfloor x \rfloor$ nicht übertrifft. Um die Linearität des Integrals auszunutzen, definieren wir

$$\chi(n, v) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq v, \\ 0, & \text{falls } n > v, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad v > 0.$$

Damit kann $A(v) = \displaystyle\sum_{1 \leq n \leq v} a(n)$ für jedes $0 < v \leq x$ als $\displaystyle\sum_{1 \leq n \leq x} a(n)\chi(n, v)$ mit fester Anzahl $\lfloor x \rfloor$ an Summanden geschrieben werden. Daher folgt

$$\begin{aligned} \int_y^x A(v)g'(v)\, dv = \int_y^x \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)\chi(n, v)g'(v)\, dv &= \sum_{1 \leq n \leq x} \left(a(n) \int_y^x \chi(n, v)g'(v)\, dv \right) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \left(a(n) \int_{\max\{y,n\}}^x g'(v)\, dv \right) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)g(x) - \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)g(\max\{y, n\}), \end{aligned}$$

wobei wegen der Stetigkeit von g' der *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung* angewandt werden konnte.

Um das Maximum in der letzten Summe auszuwerten, spalten wir die Summe auf und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)g(x) - \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)g(\max\{y, n\}) &= A(x) \cdot g(x) - \sum_{1 \leq n \leq y} a(n)g(y) - \sum_{y < n \leq x} a(n)g(n) \\ &= A(x) \cdot g(x) - A(y) \cdot g(y) - \sum_{y < n \leq x} a(n)g(n). \end{aligned}$$

Damit folgt die behauptete Formel (3.8).

□

Um die Konvergenz der Dirichletreihen in Halbebenen herzuleiten, zeigen wir direkt die stärkere Aussage der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, die später erneut aufgegriffen wird.

Der gerade bewiesene Satz 3.13 der *Abel'schen partiellen Summation* dient im Beweis des folgenden Satzes dazu, das *Cauchy – Kriterium für gleichmäßige Konvergenz* anzuwenden [27, S. 117], [37, S. 27].

Satz 3.14. [21, S. 38 – 40], [19, S. 58], [2, S. 232, 233, 235], [39, S. 24], [26, S. 627], [20, S. 71], [27, S. 117]
Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und sei $s_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, für die es ein $C_1 \geq 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass $\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \leq C_1$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega_{\mathrm{Re}(s_0)}$ gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir nutzen die Bezeichnung $\sigma_0 = \mathrm{Re}(s_0)$ und setzen voraus, dass $K \subset \Omega_{\sigma_0}$ eine beliebige nichtleere kompakte Teilmenge und $s \in K \subset \Omega_{\sigma_0}$ ein beliebiger Punkt in K ist.

Wir wenden Satz 3.13 der *Abel'schen partiellen Summation* auf Reihenabschnitte der zu f gehörigen Dirichletreihe an. Um die Ausdrücke mit den in s_0 beschränkten Partialsummen in Verbindung zu bringen, schreiben wir $\frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(n)}{n^{s_0}} \cdot \frac{n^{s_0}}{n^s}$ und definieren $a(n) := \frac{f(n)}{n^{s_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, sowie die auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch $g(v) := v^{s_0 - s}$.

Dann gilt mit Satz 3.13 für alle natürlichen Zahlen $0 < M < N$

$$
\begin{aligned}
\sum_{M<n\leq N} \frac{f(n)}{n^s} &= \sum_{M<n\leq N} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \cdot \frac{n^{s_0}}{n^s} \\
&= \left(\sum_{1\leq n\leq N} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right) \cdot N^{s_0-s} - \left(\sum_{1\leq n\leq M} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right) \cdot M^{s_0-s} \\
&\quad - \int_M^N \left(\sum_{1\leq n\leq v} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right) \cdot (s_0 - s)\, v^{s_0-s-1}\, dv.
\end{aligned}
$$

Wird die Voraussetzung über die Beschränktheit der Partialsummen in s_0 ausgenutzt, so gilt im Betrag

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{M<n\leq N} \frac{f(n)}{n^s} \right| &\leq C_1 \cdot N^{\sigma_0-\sigma} + C_1 \cdot M^{\sigma_0-\sigma} + C_1 \cdot |s_0 - s| \cdot \int_M^N v^{\sigma_0-\sigma-1}\, dv \\
&\leq 2 \cdot C_1 \cdot M^{\sigma_0-\sigma} + C_1 \cdot \frac{|s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma} \cdot \left(N^{\sigma_0-\sigma} - M^{\sigma_0-\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot C_1 \cdot M^{\sigma_0-\sigma} + C_1 \cdot \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \cdot \left(M^{\sigma_0-\sigma} - N^{\sigma_0-\sigma} \right). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Da $K \subset \Omega_{\sigma_0}$ kompakt ist, ist der Abstand von K zur Geraden

$$\{s \in \mathbb{C} \ \mid \ \sigma = \mathrm{Re}(s) = \sigma_0\}$$

echt größer als 0, sodass es ein $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit

$$K \subset \{\, s_0 + r\mathrm{e}^{i\phi} \ \mid \ r \geq 0,\ \phi \in [-\alpha, \alpha] \,\} =: \mathrm{Ang}\,(s_0, \alpha)$$

gibt (siehe Abbildung 3.1) [32, S. 31]. Für $s \in K \subset \mathrm{Ang}(s_0, \alpha)$ gilt

$$\frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} = \frac{\left|s_0 + r\mathrm{e}^{i\phi} - s_0\right|}{\sigma_0 + r\cos(\phi) - \sigma_0} = \frac{|r| \cdot \left|\mathrm{e}^{i\phi}\right|}{r\cos(\phi)} = \frac{r}{r\cos(\phi)} = \frac{1}{\cos(\phi)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)},$$

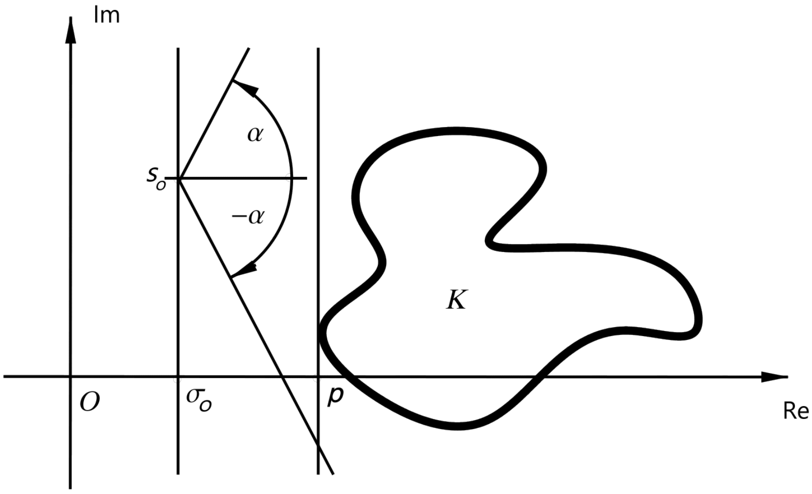

Abbildung 3.1: Das Kompaktum K, die Wahl des Winkelbereichs $\mathrm{Ang}(s_0, \alpha)$ und p.

weil die reelle Kosinusfunktion auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ monoton fallend ist. Des Weiteren nimmt die stetige Funktion $s \longmapsto \mathrm{Re}(s)$ auf K ein Minimum an, das mit p bezeichnet werde und echt größer als σ_0 ist [32, S. 31].

Damit folgt aus Formel (3.9)

$$\left| \sum_{M<n\leq N} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2 \cdot C_1 \cdot M^{\sigma_0 - p} + \frac{C_1}{\cos(\alpha)} \cdot M^{\sigma_0 - p} = M^{\sigma_0 - p} \cdot \left(2 \cdot C_1 + \frac{C_1}{\cos(\alpha)} \right). \tag{3.10}$$

Der rechte Ausdruck der Formel (3.10) hängt zwar von der kompakten Menge K, aber nicht mehr von der konkreten Stelle $s \in K$ ab. Da er für $M \to \infty$ gegen 0 strebt, folgt aus dem *Cauchy – Kriterium* die gleichmäßige Konvergenz der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ auf K [37, S. 27].

$\square$

Jetzt ist es möglich, eine zum Satz 3.6 ähnliche Aussage über die Konvergenz einer Dirichletreihe zu beweisen, die auf Jensen (1884) zurückgeht [5, S. 4 – 6].

Satz 3.15. [19, S. 59], [2, S. 245], [20, S. 72], [55, S. 2]
Falls die zu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gehörige Dirichletreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *in einem* $s_0 \in \mathbb{C}$ *konvergiert, dann konvergiert sie in jedem* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

Divergiert sie hingegen in einem $s_1 \in \mathbb{C}$, *so divergiert sie in jedem* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(s_1)$.

Beweis. Aus der Konvergenz der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in s_0 folgt die Beschränktheit ihrer Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^{s_0}}$, $N \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir einen beliebigen Punkt $s \in \Omega_{\mathrm{Re}(s_0)}$, so gibt es ein Kompaktum $K \subset \Omega_{\mathrm{Re}(s_0)}$ mit $s \in K$.

Aus Satz 3.14 ergibt sich dann die gleichmäßige Konvergenz der zu f gehörigen Dirichletreihe auf K. Insbesondere ist die zu f gehörige Dirichletreihe in jedem Punkt des Kompaktums K, also auch in s, konvergent. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Der zweite Teil wird wie in Satz 3.6 per Kontraposition gezeigt. Vorausgesetzt sei, dass es einen Punkt $s' \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s') < \mathrm{Re}(s_1)$ gibt, in dem die Dirichletreihe konvergiert. Nach dem ersten Teil des Satzes ist sie insbesondere auch in s_1 konvergent. Damit ist auch die zweite Aussage des Satzes bewiesen.

□

Bemerkung 3.16. [2, S. 232], [19, S. 58]
Wie der Beweis des Satzes 3.15 zeigt, folgt schon aus der Beschränktheit der Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^{s_0}}$, $N \in \mathbb{N}$, die Konvergenz der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

Diese Abschwächung geht auf Cahens Dissertation aus dem Jahr 1894 zurück [5, S. 5].

Wie im Falle der absoluten Konvergenz ergibt sich jetzt eine zum Satz 3.7 analoge Aussage für die sogenannte *Abszisse der Konvergenz* einer Dirichletreihe.

Satz 3.17. [27, S. 116 – 118], [39, S. 25], [2, S. 225], [55, S. 290, 291]
Zu jeder Dirichletreihe gibt es ein $\sigma_c \in [-\infty, +\infty]$, für das gilt: Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ konvergiert die Dirichletreihe; für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < \sigma_c$ divergiert die Dirichletreihe hingegen.

Bemerkung 3.18. Das dadurch eindeutig bestimmte $\sigma_c \in [-\infty, +\infty]$ heißt *Abszisse der Konvergenz* [26, S. 558].

Beweis des Satzes 3.17. Wir orientieren uns am Beweis des Satzes 3.7 und betrachten die zu einer beliebigen zahlentheoretischen Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Falls sie in jedem $s \in \mathbb{C}$ divergiert, wählen wir für die Behauptung des Satzes $\sigma_c = +\infty$; wenn sie hingegen in jedem $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, so setzen wir $\sigma_c = -\infty$.

Ansonsten gibt es einerseits mindestens einen Punkt, in dem sie konvergiert, und andererseits mindestens einen Punkt, in dem sie divergiert. Deshalb ist die Menge

$$D := \left\{ \sigma = \mathrm{Re}(s) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ konvergiert} \right\}$$

einerseits nichtleer, andererseits dem zweiten Teil des Satzes 3.15 zufolge nach unten beschränkt. Daher besitzt D eine reelle Zahl als Infimum, die mit σ_c bezeichnet werde [22, S. 88].

Da σ_c eine untere Schranke von D ist, liegen alle Punkte, in denen die Dirichletreihe konvergiert, in der Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \mathrm{Re}(s) \geq \sigma_c\}$. Damit folgt der zweite Teil des Satzes per Kontraposition.

Auch der erste Teil des Satzes folgt per Kontraposition. Sei dazu ein beliebiger Punkt $s' = \sigma' + it' \in \mathbb{C}$, σ', $t' \in \mathbb{R}$, betrachtet, in dem die Dirichletreihe divergiert. Gälte $\sigma' > \sigma_c$, so wäre dem zweiten Teil des Satzes 3.15 zufolge die Zahl σ_c nicht die größte untere Schranke von D: Die Zahl σ' wäre nämlich eine echt größere. Da dies der Definition von σ_c als Infimum widerspräche, folgt $\sigma' \leq \sigma_c$.

□

Beispiel 3.19. [27, S. 118], [39, S. 25]
Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gibt, so stimmen *Abszisse der absoluten Konvergenz* σ_a und *Abszisse der Konvergenz* σ_c der zugehörigen Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ überein:

Um σ_a und σ_c zu bestimmen, reicht es den Sätzen 3.7 und 3.17 zufolge nämlich aus, lediglich reelle Werte für s zu betrachten. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ und $n \geq n_0$ gilt $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{f(n)}{n^s}$, weshalb die Dirichletreihe genau dann in $s \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, wenn sie dort konvergiert. Daher gilt $\sigma_a = \sigma_c$.

Dies gilt für alle im Anschluss an Satz 3.7 betrachteten Beispiele 3.9, 3.10, 3.11 und 3.12.

Im Gegensatz zu Potenzreihen, die im Inneren ihres Konvergenzbereiches absolut konvergieren, können *Abszisse der absoluten Konvergenz* σ_a und *Abszisse der Konvergenz* σ_c einer Dirichletreihe voneinander verschieden sein [54, S. 56, 57], [8, S. 4]. Dies zeigt das folgende, auf Landau zurückgehende Beispiel [5, S. 10, 11].

Beispiel 3.20. [27, S. 118], [39, S. 25]
Wir betrachten die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$. Ihre *Abszisse der absoluten Konvergenz* σ_a stimmt mit derjenigen der zur *Riemann'schen* ζ *– Funktion* gehörigen Dirichletreihe überein und beträgt deshalb $\sigma_a = 1$.

Um die *Abszisse der Konvergenz* zu bestimmen, betrachten wir $s \in \mathbb{R}$. Für jedes $s > 0$ ergibt sich dann aus dem *Leibniz'schen Konvergenzkriterium* die Konvergenz der Dirichletreihe [22, S. 66]. Für jedes $s \leq 0$ ist hingegen die Dirichletreihe divergent: In $s = 0$ entspricht $\left(\frac{(-1)^n}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der divergenten Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, für $s < 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|(-1)^n \cdot n^{-s}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-s} = \infty$. Daher ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $s \leq 0$ eine Nullfolge.

Insgesamt ergibt sich $\sigma_c = 0$ als *Abszisse der Konvergenz* der Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

3.4 Der Streifen der bedingten Konvergenz der Dirichletreihen

In dem letzten Beispiel 3.20 gilt $\sigma_a - \sigma_c = 1$, weshalb hier der Streifen der bedingten Konvergenz (das heißt Konvergenz ohne absolute Konvergenz) die Breite 1 besitzt [54, S. 35].

Wie der folgende Satz zeigt, ist dies jedoch der maximale Wert, den die Breite dieses Streifens für eine Dirichletreihe annehmen kann [39, S. 25], [19, S. 61], [2, S. 234], [55, S. 292], [21, S. 41], [27, S. 118].

Satz 3.21. *Sei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *eine Dirichletreihe, deren Abszisse der Konvergenz* σ_c *endlich ist. Dann ist auch ihre Abszisse der absoluten Konvergenz* σ_a *endlich und es gilt* $0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1$.

Beweis. Da absolut konvergente Reihen stets konvergent sind, gilt $\sigma_a \geq \sigma_c$. Nach Voraussetzung ist σ_c endlich, weshalb es Punkte gibt, in denen die Dirichletreihe nicht absolut konvergiert.

Um $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$ zu beweisen, zeigen wir die absolute Konvergenz der Dirichletreihe in Ω_{σ_c+1}. Sei dazu $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_c + 1$ beliebig. Wir wählen jetzt ein solches $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$, $\sigma_0, t_0 \in \mathbb{R}$, dass $\sigma > \sigma_0 + 1 > \sigma_c + 1$ gilt.

Aus der Konvergenz der Dirichletreihe in s_0 folgt, dass die Folge $\left(\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Sie ist daher beschränkt. Es gibt also ein $C \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass $\left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$0 \leq \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \cdot \left|\frac{n^{s_0}}{n^s}\right| \leq C \cdot n^{-(\sigma-\sigma_0)}.$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma-\sigma_0)}$ wegen $\sigma - \sigma_0 > 1$ konvergent, womit aus dem *Majorantenkriterium* die absolute Konvergenz der Dirichletreihe in s folgt.

Daher ist die Dirichletreihe weder für alle $s \in \mathbb{C}$ noch für kein $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Dem Beweis des Satzes 3.7 zufolge ist dann σ_a endlich und mit dem soeben Bewiesenen folgt $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

□

Bemerkung 3.22. [21, S. 41], [27, S. 118] Wie die beiden Beispiele 3.19 und 3.20 zeigen, können die Fälle $\sigma_a - \sigma_c = 0$ und $\sigma_a - \sigma_c = 1$ auftreten.

Bemerkung 3.23. Falls $\sigma_c = +\infty$ gilt, so divergiert die Dirichletreihe überall in $\mathbb{C}$ und kann daher auch nie absolut konvergieren. Damit folgt $\sigma_a = +\infty$.

Bemerkung 3.24. [21, S. 41] Im Beweis des Satzes 3.21 zeigten wir die absolute Konvergenz der Dirichletreihe in Ω_{σ_c+1}. Falls wir die Situation $\sigma_c = -\infty$ betrachten, ist die dargestellte Herleitung immer noch gültig. Die Dirichletreihe ist dann in jedem $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, womit sich $\sigma_a = -\infty$ ergibt.

3.5 Komplexe Differenzierbarkeit der Dirichletreihen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, dass die Grenzfunktion einer Dirichletreihe im Inneren ihres Konvergenzbereiches eine analytische Funktion darstellt [27, S. 119]. Dabei werden wir vom *Weierstraß'schen Konvergenzsatz* Gebrauch machen [47, S. 42, 50], [7, S. 100, 101], [37, S. 79].

Zu diesem Zweck kehren wir zu Satz 3.14 zurück und zeigen die gleichmäßige Konvergenz einer Dirichletreihe auf jedem Kompaktum, das im Inneren ihres Konvergenzbereiches liegt.

Satz 3.25. [2, S. 235], [27, S. 118], [19, S. 60]
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *eine Dirichletreihe, deren Abszisse der Konvergenz* $\sigma_c < +\infty$ *sei. Dann ist sie auf jeder kompakten Teilmenge* $K \subset \Omega_{\sigma_c}$ *gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Es sei $K \subset \Omega_{\sigma_c}$ ein beliebiges nichtleeres Kompaktum.

Wie im Beweis des Satzes 3.14 sei $\mathbb{R} \ni p = \min\{\mathrm{Re}(s) \mid s \in K\} > \sigma_c$. Dann können wir ein $s_0 \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $p > \mathrm{Re}(s_0) > \sigma_c$ wählen [2, S. 235], womit $\mathrm{Re}(s) \geq p > \mathrm{Re}(s_0)$ für alle $s \in K$ gilt. Dies bedeutet $K \subset \Omega_{\mathrm{Re}(s_0)}$.

Da die Dirichletreihe in s_0 konvergent ist, sind ihre Partialsummen in s_0 beschränkt. Satz 3.14 liefert nun die gleichmäßige Konvergenz auf K.

$\square$

Mithilfe des Satzes 3.25 ist es möglich, das Ziel dieses Abschnitts zu erreichen, das Cahen bereits 1894 formulierte.

Satz 3.26. [27, S. 119], [19, S. 60], [2, S. 236]
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ eine Dirichletreihe, deren Abszisse der Konvergenz $\sigma_c < +\infty$ sei und deren Grenzwert für jedes $s \in \Omega_{\sigma_c}$ mit $F(s)$ bezeichnet werde. Dann ist $F : \Omega_{\sigma_c} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Des Weiteren ist die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $s \in \Omega_{\sigma_c}$ mit dem Grenzwert $F^{(k)}(s)$ konvergent.

Beweis. Wir nutzen den *Weierstraß'schen Konvergenzsatz* [47, S. 42, 50], [7, S. 100, 101], [37, S. 79].

Um ihn anzuwenden, sei bemerkt, dass die Funktionen $s \longmapsto f(n) \cdot n^{-s} = f(n) \cdot \mathrm{e}^{(-s)\cdot \log n}$, $n \in \mathbb{N}$, für jedes $s \in \mathbb{C}$ und damit auch insbesondere in der offenen Halbebene Ω_{σ_c} analytisch sind. Außerdem ist die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ auf jedem Kompaktum $K_1 \subset \Omega_{\sigma_c}$ nach Satz 3.25 gleichmäßig konvergent. Daher folgt aus dem *Weierstraß'schen Konvergenzsatz*, dass $F : \Omega_{\sigma_c} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch ist.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und wir betrachten die k-ten Ableitungen

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(f(n) \cdot n^{-s}\right) = \frac{d^k}{ds^k}\left(f(n) \cdot \mathrm{e}^{(-s)\cdot \log n}\right) = f(n) \cdot (-\log(n))^k \cdot n^{-s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deren Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s}$ konvergiert dem *Weierstraß'schen Konvergenzsatz* zufolge auf jedem Kompaktum $K_1 \subset \Omega_{\sigma_c}$ gleichmäßig gegen $F^{(k)}$. Weil jeder Punkt $s \in \Omega_{\sigma_c}$ in ein Kompaktum $K_1 \subset \Omega_{\sigma_c}$ eingeschlossen werden kann und gleichmäßig konvergente Reihen insbesondere konvergent sind, folgt die Konvergenz der Dirichletreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s}$ in Ω_{σ_c} gegen $F^{(k)}$.

$\square$

Beispiel 3.27. [19, S. 69] Wir betrachten eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit nichtnegativen Werten. Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.26 erhalten wir die Konvergenz der Dirichletreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \Omega_{\sigma_c}$.

Zur Untersuchung der absoluten Konvergenz ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \cdot \log^k(n)}{n^\sigma} = (-1)^k \cdot F^{(k)}(\sigma) \quad \text{für jedes } s \in \Omega_{\sigma_c}.$$

Daher konvergiert die Dirichletreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^s}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ in Ω_{σ_c} absolut, falls f nichtnegativ ist.

3.6 Dirichletreihen mit nichtnegativen Koeffizienten

Ist f nichtnegativ, wissen wir bereits aus Beispiel 3.19, dass die *Abszisse der absoluten Konvergenz* und *die Abszisse der Konvergenz* der zugehörigen Dirichletreihe übereinstimmen.

Das analytische Verhalten in dem durch endliche *Abszissen* definierten reellen Punkt wird durch den folgenden von Landau (1905) bewiesenen Satz beschrieben [35, S. 536, 537], [5, S. 26].

Satz 3.28. [28, S. 96, 97], [21, S. 42], [38, S. 106]
Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine zahlentheoretische Funktion mit nichtnegativen Werten. Die zugehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ besitze eine endliche Abszisse der Konvergenz σ_c und die Grenzfunktion $F : \Omega_{\sigma_c} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann kann F in keine Umgebung des Punktes $s = \sigma_c$ analytisch fortgesetzt werden.

Beweis. Wir führen den Beweis per Widerspruch.

Dazu sei angenommen, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ des Punktes $s = \sigma_c$ gibt, für die F auf $\Omega_{\sigma_c} \cup U$ eine analytische Fortsetzung besitzt; diese sei erneut mit F bezeichnet [21, S. 42]. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass F auf $B_\varepsilon(\sigma_c) = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - \sigma_c| < \varepsilon\}$ analytisch ist.

Nun wählen wir ein reelles $\sigma_0 > \sigma_c$ mit der Eigenschaft $\sigma_0 - \sigma_c < \sigma_c + \varepsilon - \sigma_0$, beispielsweise $\sigma_0 = \sigma_c + \frac{\varepsilon}{3}$. Für ein beliebiges $\delta \in (\sigma_0 - \sigma_c, \sigma_c + \varepsilon - \sigma_0)$ gilt dann $\sigma_c \in B_\delta(\sigma_0) \subset B_\varepsilon(\sigma_c)$ (siehe Abbildung 3.2), weshalb F in $B_\delta(\sigma_0)$ als konvergente Potenzreihe

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(\sigma_0)}{k!} (s - \sigma_0)^k, \; s \in B_\delta(\sigma_0), \tag{3.11}$$

darstellbar ist [7, S. 106]. Wegen $\sigma_0 > \sigma_c$ können wir

$$F^{(k)}(\sigma_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot (-\log(n))^k}{n^{\sigma_0}}, \; k \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

mithilfe des Satzes 3.26 schreiben und Formel (3.12) gilt auch für $k = 0$. Setzen wir (3.12) in (3.11) ein, so ergibt sich für jedes $s \in B_\delta(\sigma_0)$

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot \log^k(n)}{n^{\sigma_0} \cdot k!} (\sigma_0 - s)^k \right). \tag{3.13}$$

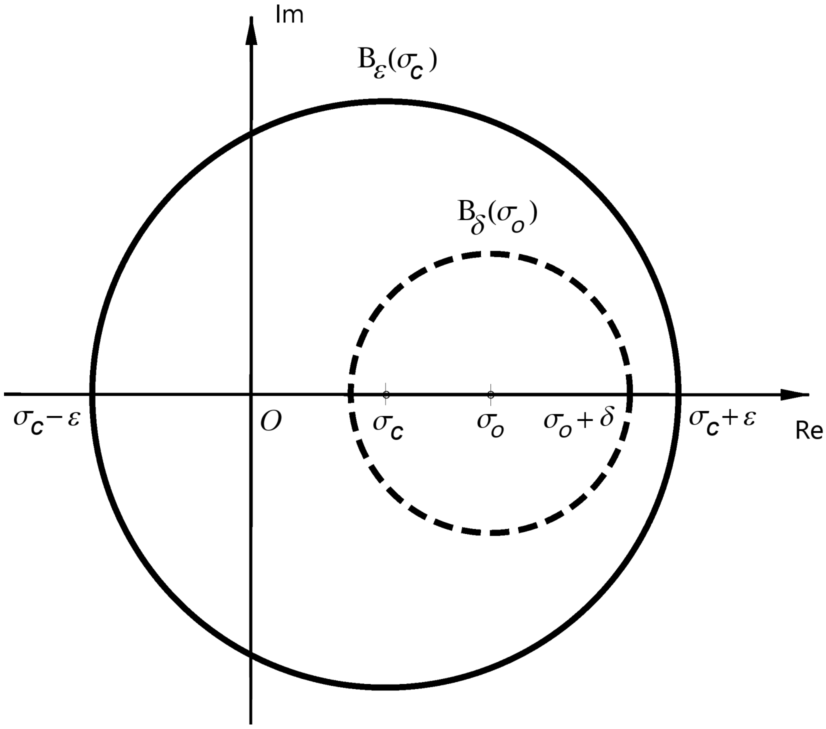

Abbildung 3.2: Die Kreisscheiben $B_\varepsilon(\sigma_c)$ und $B_\delta(\sigma_0)$.

Um zu einem Widerspruch zu gelangen, wählen wir ein reelles $s = \sigma < \sigma_c$ mit $s = \sigma \in B_\delta(\sigma_0)$. Für dieses $s = \sigma$ sind alle Terme in Formel (3.13) wegen $f \geq 0$ selbst nichtnegativ. Der *Cauchy'sche Doppelreihensatz* [26, S. 258] erlaubt nun das Vertauschen der Summenzeichen in (3.13), womit sich

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^{\sigma_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(n)}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^{\sigma_0}} \mathrm{e}^{(\sigma_0 - \sigma)\cdot \log(n)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^{\sigma_0}} \cdot n^{\sigma_0 - \sigma} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma}} \quad \text{ergibt.} \end{aligned}$$

Damit ist die Dirichletreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ in einem $s = \sigma < \sigma_c$ konvergent, was der Wahl von σ_c als *Abszisse der Konvergenz* widerspricht. Deshalb ist die Annahme falsch, womit der Satz bewiesen ist.

□

Kapitel 4

Integralformeln

Nach den vorhergehenden Untersuchungen wollen wir in diesem Kapitel Formeln herleiten, bei denen Grenzfunktionen der Dirichletreihen als Integrand vorkommen.

Nach einer Integralformel, die die Koeffizienten einer Dirichletreihe als Integral darstellt, beenden wir das Kapitel mit der *Perron'schen Formel*, die die Partialsummen einer Dirichletreihe als komplexes Kurvenintegral ausdrückt.

4.1 Zwei Durchschnittsformeln

Satz 4.1. [2, S. 240, 241], [55, S. 303, 304]
Sei die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *absolut konvergent in* Ω_{σ_1} *für ein* $\sigma_1 < \infty$*. Analog sei die Dirichletreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ *absolut konvergent in* Ω_{σ_2} *für ein* $\sigma_2 < \infty$*. Ihre Grenzwerte seien mit* $F(s)$ *respektive* $G(s)$ *bezeichnet. Dann gilt für alle reellen* $a > \sigma_1$ *und alle* $b > \sigma_2$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} F(a+it) \cdot G(b-it)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot g(n)}{n^{a+b}}.$$

Beweis. Es seien $a > \sigma_1$ und $b > \sigma_2$ reelle Zahlen. Da die Dirichletreihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{a+it}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^{b-it}}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ absolut konvergieren, ist ihr Cauchy – Produkt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) \cdot g(n-k)}{k^a \cdot (n-k)^b} \cdot \left(\frac{n-k}{k} \right)^{it} \right) \tag{4.1}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $F(a+it) \cdot G(b-it)$ absolut konvergent.

Um das dazugehörige Integral Term für Term integrieren zu können, zeigen wir die gleichmäßige Konvergenz bezüglich t. Dazu nutzen wir das *Weierstraß'sche Majorantenkriterium* [26, S. 555], [54, S. 54], [37, S. 27]. Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) \cdot g(n-k)}{k^a \cdot (n-k)^b} \cdot \left(\frac{n-k}{k} \right)^{it} \right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|f(k)| \cdot |g(n-k)|}{k^a \cdot (n-k)^b}.$$

Weil
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|f(k)|\cdot|g(n-k)|}{k^a\cdot(n-k)^b}\right) \tag{4.2}$$
als Cauchy – Produkt von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^a}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|g(n)|}{n^b}$ konvergiert, konvergiert die Reihe (4.1) nach dem *Weierstraß'schen Majorantenkriterium* bezüglich der Variablen t auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig.

Darüber hinaus ergibt sich aus der Konvergenz des Cauchy – Produkts (4.2), dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)\cdot g(k)}{k^{a+b}}$ absolut konvergiert. Insbesondere konvergiert sie bezüglich t auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig.

Schreiben wir nun
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)\cdot g(n-k)}{k^a\cdot(n-k)^b}\cdot\left(\frac{n-k}{k}\right)^{it}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)\cdot g(k)}{k^{a+b}}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq n-k}}^{n-1}\frac{f(k)\cdot g(n-k)}{k^a\cdot(n-k)^b}\cdot\left(\frac{n-k}{k}\right)^{it}\right), \tag{4.3}$$
so sind alle drei zugehörigen Reihen der Gleichung (4.3) sowohl absolut als auch bezüglich t auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. In Gleichung (4.3) sind außerdem alle vorkommenden Terme der Reihen bezüglich t auf $\mathbb{R}$ stetig und damit auf allen kompakten Intervallen integrierbar. Damit sind auch die Reihen in (4.3) auf allen kompakten Intervallen bezüglich t integrierbar und wir können gliedweise integrieren [26, S. 554], [33, S. 304].

Dazu berechnen wir für alle x, $T>0$ das Integral $\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}x^{it}\,dt$.

Ist $x=1$, so ist $\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}1\,dt=1$.

Nun sei $x\neq 1$. Dann gilt
$$\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}x^{it}\,dt=\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{it\cdot\log(x)}\,dt=\frac{1}{2T}\cdot\left[\frac{1}{i\cdot\log(x)}\cdot\mathrm{e}^{it\cdot\log(x)}\right]_{t=-T}^{T}$$
$$=\frac{1}{T\cdot\log(x)}\cdot\frac{\mathrm{e}^{iT\cdot\log(x)}-\mathrm{e}^{-iT\cdot\log(x)}}{2i}=\frac{\sin(T\cdot\log(x))}{T\cdot\log(x)}.$$
Damit erhalten wir aus Formel (4.3) für jedes $T>0$
$$\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}F(a+it)\cdot G(b-it)\,dt$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)\cdot g(k)}{k^{a+b}}\right)\cdot\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}1\,dt+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq n-k}}^{n-1}\frac{f(k)\cdot g(n-k)}{k^a\cdot(n-k)^b}\cdot\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}\left(\frac{n-k}{k}\right)^{it}dt\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)\cdot g(k)}{k^{a+b}}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq n-k}}^{n-1}\frac{f(k)\cdot g(n-k)}{k^a\cdot(n-k)^b}\cdot\frac{\sin\left(T\cdot\log\left(\frac{n-k}{k}\right)\right)}{T\cdot\log\left(\frac{n-k}{k}\right)}\right).$$
Die letzte hier vorkommende Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq n-k}}^{n-1}\frac{f(k)\cdot g(n-k)}{k^a\cdot(n-k)^b}\cdot\frac{\sin\left(T\cdot\log\left(\frac{n-k}{k}\right)\right)}{T\cdot\log\left(\frac{n-k}{k}\right)}\right) \tag{4.4}$$

ist bezüglich T auf $\mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig konvergent: Nach dem Mittelwertsatz [33, S. 144] gibt es nämlich zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{\sin(y)}{y}\right| = |\cos(\xi)| \leq 1$. Unter Verwendung der Konvergenz der Reihe (4.2) und des *Weierstraß'schen Majorantenkriteriums* folgt dann die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4.4) bezüglich T auf $\mathbb{R}_{>0}$. Weil die reelle Sinusfunktion beschränkt ist, streben alle Summanden der Reihe (4.4) für $T \to \infty$ gegen 0. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (4.4) folgt daher die Existenz des Grenzwertes von (4.4) für $T \to \infty$, der termweise gebildet werden kann und demnach 0 beträgt [26, S. 554], [53, S. 156, 157]. Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Als unmittelbare Folgerung dieses Satzes 4.1 erhalten wir

Korollar 4.2. [2, S. 241], [55, S. 303]
Sei die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *absolut konvergent in* Ω_{σ_1} *für ein* $\sigma_1 < \infty$. *Ihr Grenzwert sei mit* $F(s)$ *bezeichnet. Dann gilt für alle* $\sigma > \sigma_1$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} |F(\sigma + it)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Beweis. Wir definieren $g(n) := \overline{f(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann haben f und g den gleichen Betrag, weshalb deren zugehörige Dirichletreihen in den gleichen Punkten absolut konvergieren. Werden ihre Grenzwerte mit $F(s)$ respektive $G(s)$ bezeichnet, so gilt

$$G(\sigma - it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{f(n)}}{n^{\sigma - it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\left(\frac{f(n)}{n^{\sigma+it}}\right)} = \overline{F(\sigma + it)} \quad \text{für alle } \sigma > \sigma_1 \text{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit Satz 4.1 folgt schließlich die Behauptung.

□

Beispiel 4.3. [55, S. 317], [2, S. 241]
Die zur *Riemann'schen* ζ *– Funktion* gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert in Ω_1 absolut. Korollar 4.2 ergibt dann

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + it)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma) \quad \text{für jedes } \sigma > 1.$$

Beispiel 4.4. [2, S. 241], [55, S. 315, 317]
Die zur Möbiusfunktion μ gehörige Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ konvergiert in Ω_1 absolut und besitzt den Grenzwert $\frac{1}{\zeta(s)}$. Aus Korollar 4.2 erhalten wir

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + it)|^{-2} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|^2}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{2\sigma}} \quad \text{für jedes } \sigma > 1.$$

Mithilfe des Satzes 2.12 gilt für jedes $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{2\sigma}} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu(p^k)|}{p^{2k\sigma}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + p^{-2\sigma}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{(1 + p^{-2\sigma}) \cdot (1 - p^{-2\sigma})}{(1 - p^{-2\sigma})}$$
$$= \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1 - p^{-4\sigma}}{1 - p^{-2\sigma}}\right) = \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{-4\sigma}\right)\right) \cdot \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{-2\sigma}\right)^{-1}\right) = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

Beispiel 4.5. [2, S. 241], [55, S. 315, 317]

Wir wissen bereits aus Beispiel 2.4, dass die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^s}$ in Ω_1 absolut konvergent ist. Ihr Grenzwert beträgt $\zeta^2(s)$. Dann gilt nach Korollar 4.2

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma + it)|^4 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^{2\sigma}} \quad \text{für jedes } \sigma > 1.$$

Nach dem Satz 4.1 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^{2\sigma}}$ für jedes $\sigma > 1$ absolut konvergent. Unter Verwendung des Satzes 2.12 ergibt sich für jedes $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^{2\sigma}} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(p^k)}{p^{2k\sigma}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{p^{2k\sigma}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{p^{2k\sigma}}\right).$$

Zur Auswertung der dabei vorkommenden Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{p^{2k\sigma}}$ gehen wir von der für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gültigen Identität $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ aus, die $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} = \frac{z}{1-z}$ impliziert. Gliedweises Differenzieren [7, S. 105] ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k = \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}\right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^{k+1} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \cdot z^k = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) = \frac{1+z}{(1-z)^3} = \frac{1-z^2}{(1-z)^4} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Ist nun $\sigma > 1$, so ist $\left|p^{-2\sigma}\right| < p^{-2} \leq \frac{1}{4} < 1$ für jede Primzahl p. Daher folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^{2\sigma}} = \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{p^{2k\sigma}}\right) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1 - p^{-4\sigma}}{(1 - p^{-2\sigma})^4}\right)$$
$$= \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{-4\sigma}\right)\right) \cdot \left(\prod_{p \text{ prim}} \left(1 - p^{-2\sigma}\right)^{-1}\right)^4 = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} \quad \text{für jedes } \sigma > 1.$$

Beispiel 4.6. [2, S. 241] Wenden wir Satz 3.26 und das daran anschließende Beispiel 3.27 auf die zur *Riemann'schen ζ – Funktion* gehörige Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ an, so ergibt sich: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $s \in \Omega_1$ ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-\log(n))^k}{n^s}$ absolut konvergent und besitzt den Grenzwert $\zeta^{(k)}(s)$. Korollar 4.2 ergibt dann $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \left|\zeta^{(k)}(\sigma + it)\right|^2 dt = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{2k}(n)}{n^{2\sigma}} = \zeta^{(2k)}(2\sigma)$ für jedes $\sigma > 1$.

4.2 Die Koeffizienten der Dirichletreihen

Falls uns die Grenzfunktion F einer Dirichletreihe vorliegt, so stellt sich die Frage, wie sich aus ihr die Koeffizienten der zugehörigen Dirichletreihe bestimmen lassen [39, S. 29].

Eine Möglichkeit, die Koeffizienten *induktiv* zu berechnen, bietet uns der folgende Satz.

Satz 4.7. [39, S. 7, 29], [2, S. 226, 227], [27, S. 120]
Sei die Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ absolut konvergent in Ω_{σ_1} für ein $\sigma_1 < \infty$. Ihr Grenzwert sei mit $F(s)$ bezeichnet. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f(k) = \lim_{\sigma\to\infty} \left(k^{\sigma+it} \cdot \left(F(\sigma + it) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{f(n)}{n^{\sigma+it}} \right) \right).$$

Beweis. Für jedes $s \in \Omega_{\sigma_1}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$k^s \cdot \left(F(s) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{f(n)}{n^s} \right) = k^s \cdot \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) = f(k) + k^s \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right).$$

Um zu zeigen, dass hier der Summand $k^s \cdot \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right)$ für $\sigma \to \infty$ gegen 0 strebt, wählen wir ein reelles $c > \sigma_1$. Dann ergibt sich für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma \geq c$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| k^s \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \right| &\leq k^\sigma \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = k^\sigma \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{|f(n)|}{n^c} \cdot n^{c-\sigma} \right) \\ &\leq k^\sigma \cdot (k+1)^{c-\sigma} \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} \\ &= A \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^\sigma. \end{aligned}$$

Dabei ist $A := (k+1)^c \cdot \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}$ wegen $c > \sigma_1$ eine reelle Zahl, die unabhängig von s ist. Aus $\lim\limits_{\sigma\to\infty} A \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^\sigma = 0$ folgt nun $\lim\limits_{\sigma\to\infty} k^s \cdot \left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) = 0$. Daraus folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Eine andere Variante, die Koeffizienten einer Dirichletreihe aus ihrer Grenzfunktion zu berechnen, gibt der nächste Satz an. Wie auch im Falle von Potenzreihen können sie nämlich durch ein Integral ausgedrückt werden [3, S. 1, 2], [55, S. 313], [2, S. 242], [39, S. 33], [7, S. 106].

Satz 4.8. *Sei die Dirichletreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *absolut konvergent in* Ω_{σ_1} *für ein* $\sigma_1 < \infty$. *Ihr Grenzwert sei mit* $F(s)$ *bezeichnet. Dann gilt für jedes* $x > 0$ *und jedes* $\sigma > \sigma_1$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} F(\sigma + it) \cdot x^{\sigma+it}\, dt = \begin{cases} f(x), & \textit{falls } x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für $x = 1$ wurde diese Aussage von Hadamard (1899) bewiesen [5, S. 23].

Beweis des Satzes 4.8. Wir werden ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.1 verfahren.

Seien $x > 0$ und $\sigma > \sigma_1$ beliebig. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma+it}}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und besitzt den Grenzwert $F(\sigma+it)$. Mithilfe des *Weierstraß'schen Majorantenkriteriums* folgt damit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \tag{4.5}$$

bezüglich t auf $\mathbb{R}$. Ihr Grenzwert ist durch $F(\sigma + it) \cdot x^{\sigma+it}$ gegeben. Da alle Glieder der Reihe (4.5) bezüglich t auf $\mathbb{R}$ stetig sind, ist ihr Grenzwert $F(\sigma+it)\cdot x^{\sigma+it}$ bezüglich t für ein beliebiges $T > 0$ auf $[-T,\ T]$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} F(\sigma + it) \cdot x^{\sigma+it}\, dt &= \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{x}{n}\right)^{it} dt \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ist x keine natürliche Zahl, so ist $\frac{x}{n} \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb können wir den Ausdruck (4.6) mit dem im Beweis des Satzes 4.1 berechneten Integral als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \cdot \frac{\sin\left(T \cdot \log\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{T \cdot \log\left(\frac{x}{n}\right)} \right) \quad \text{schreiben.} \tag{4.7}$$

Die Reihe (4.7) ist bezüglich T auf $\mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig konvergent: Für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nämlich $\left|\frac{\sin(y)}{y}\right| \leq 1$. Darüber hinaus streben alle Glieder der Reihe (4.7) für $T \to \infty$ gegen 0. Damit existiert auch der Grenzwert der Reihe (4.7) für $T \to \infty$. Dieser kann gliedweise gebildet werden und beträgt demnach 0.

Für $x \in \mathbb{N}$ schreiben wir die Formel (4.6) als

$$f(x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq x}}^{\infty} \left(f(n) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \cdot \frac{\sin\left(T \cdot \log\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{T \cdot \log\left(\frac{x}{n}\right)} \right).$$

Auch hier ergibt sich, dass diese Reihe für $T \to \infty$ gegen 0 strebt, womit die Behauptung schließlich folgt.

□

4.3 Partialsummen der Dirichletreihen und die Perron'sche Formel

Wenn die Grenzfunktion einer Dirichletreihe bekannt ist, können wir neben den Koeffizienten auch die Partialsummen der Dirichletreihe durch ein *einziges* Integral darstellen [2, S. 243], [39, S. 29].

Bei dieser sogenannten *Perron'schen Formel* (Oskar Perron, 1880 – 1975) begegnen wir gewissen komplexen Kurvenintegralen, die im folgenden Lemma abgeschätzt werden [51, S. 47, 48], [36, S. 344, 345], [49, S. 1 – 3], [23, S. 3 – 5], [27, S. 134], [2, S. 243 – 245], [41, S. 57], [42, S. 163].

Dazu bezeichnen wir mit $[z, w]$, z, $w \in \mathbb{C}$, nicht nur die Verbindungsstrecke von z und w, sondern auch die zugehörige Parametrisierung, die in z startet und in w endet.

Lemma 4.9. *Sei $c > 0$ eine beliebige positive Zahl. Für a, $T > 0$ sei das komplexe Integral*

$$I(a,T) := \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} \frac{a^s}{s}\, ds \quad \textit{definiert.}$$

Für jedes $T > 0$ gelten dann die Abschätzungen

$$\left| I(1,T) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{c}{\pi T}, \qquad \lim_{T\to\infty} I(1,T) = \frac{1}{2};$$

für $0 < a < 1$ ist

$$|I(a,T)| \leq \frac{a^c}{\pi T\, |\log(a)|}, \qquad \lim_{T\to\infty} I(a,T) = 0;$$

und für $a > 1$ gilt

$$|I(a,T) - 1| \leq \frac{a^c}{\pi T \log(a)}, \qquad \lim_{T\to\infty} I(a,T) = 1.$$

Beweis. Es sei zunächst $a = 1$. Wir werten $I(1,T)$ aus, indem wir die Definition des komplexen Kurvenintegrals mit der Parametrisierung $x \longmapsto c + ix$, $-T \leq x \leq T$, der Verbindungsstrecke $[c - iT,\ c + iT]$ nutzen:

$$I(1,T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} \frac{i}{c + ix}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{c - ix}{c^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{x}{c^2 + x^2}\, dx.$$

Da der Integrand des letzten Integrals eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral über ein symmetrisches Intervall. Wir erhalten deshalb $I(1,T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx$. Da der Integrand dieses Ausdrucks nun gerade ist, vereinfacht sich dies zu

$$I(1,T) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{T}{c}\right).$$

Damit strebt $I(1,T)$ für $T \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}$. Des Weiteren ergibt sich als Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| I(1,T) - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{T}^{\infty} \frac{c}{c^2 + x^2}\, dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{T}^{\infty} \frac{c}{x^2}\, dx = \frac{c}{\pi T}. \end{aligned}$$

Jetzt sei $0 < a < 1$. Um das Integral $I(a,T)$ auszuwerten, betrachten wir das komplexe Kurvenintegral über den positiv orientierten Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $d - iT$, $d + iT$, $c + iT$; dabei sei $d > c$ eine beliebige Zahl (siehe Abbildung 4.1).

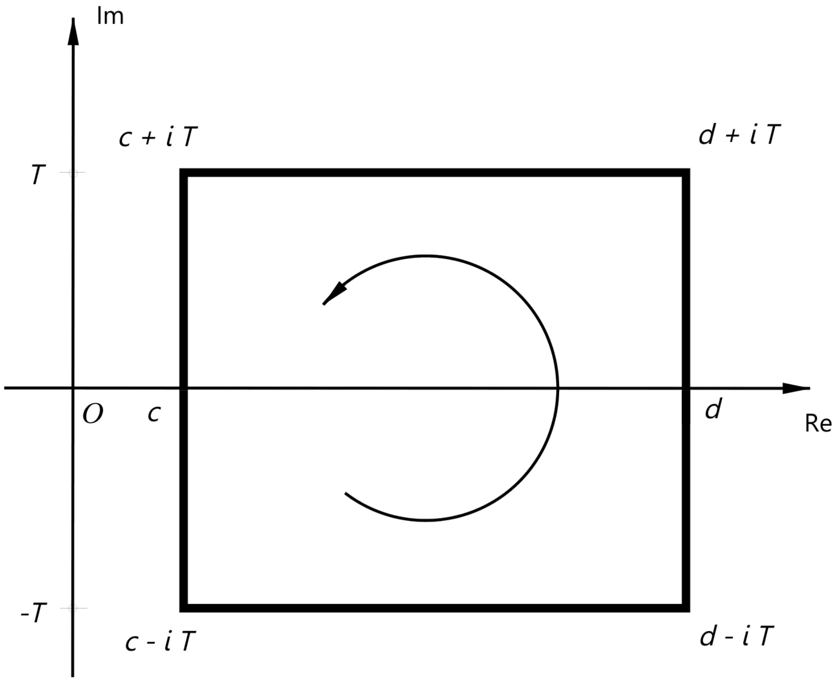

Abbildung 4.1: Der Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $d - iT$, $d + iT$, $c + iT$.

Der Integrand $s \longmapsto \dfrac{a^s}{s}$ ist auf dem konvexen Gebiet $\Omega_0 = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$, in dem das Rechteck liegt, analytisch. Nach dem *Cauchy'schen Integralsatz* [7, S. 77], [54, S. 83] verschwindet daher das Kurvenintegral über den Rand des Rechtecks. Daher gilt

$$\int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} \frac{a^s}{s}\,ds = \int\limits_{[c-iT,\ d-iT]} \frac{a^s}{s}\,ds + \int\limits_{[d-iT,\ d+iT]} \frac{a^s}{s}\,ds + \int\limits_{[d+iT,\ c+iT]} \frac{a^s}{s}\,ds.$$

Im Betrag folgt weiter

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} \frac{a^s}{s}\,ds\right| &\leq \left|\int_c^d \frac{a^{x-iT}}{x-iT}\,dx\right| + \left|\int_{-T}^T \frac{a^{d+ix}}{d+ix}\cdot i\,dx\right| + \left|\int_c^d \frac{a^{x+iT}}{x+iT}\,dx\right| \\ &\leq \int_c^d \frac{a^x}{T}\,dx + \int_{-T}^T \frac{a^d}{d}\,dx + \int_c^d \frac{a^x}{T}\,dx.\end{aligned}$$

Im Grenzwert für $d \to \infty$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} \frac{a^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{2}{T}\cdot\int_c^\infty a^x dx + 2\cdot T\cdot\left(\lim_{d\to\infty}\frac{a^d}{d}\right) = \frac{2}{T}\cdot\int_c^\infty a^x dx \\ &= \frac{2}{T\cdot\log(a)}\cdot\left(\lim_{y\to\infty} a^y - a^c\right) = \frac{2\cdot a^c}{T\cdot|\log(a)|}.\end{aligned}$$

Dies strebt für $T \to \infty$ gegen 0 und ergibt die Behauptung für den betrachteten Fall.

Im Falle $a > 1$ verfahren wir ähnlich. Wir betrachten das komplexe Kurvenintegral über den positiv orientierten Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $c + iT$, $b + iT$, $b - iT$; dabei sei $b < 0$ eine beliebige negative Zahl (siehe Abbildung 4.2).

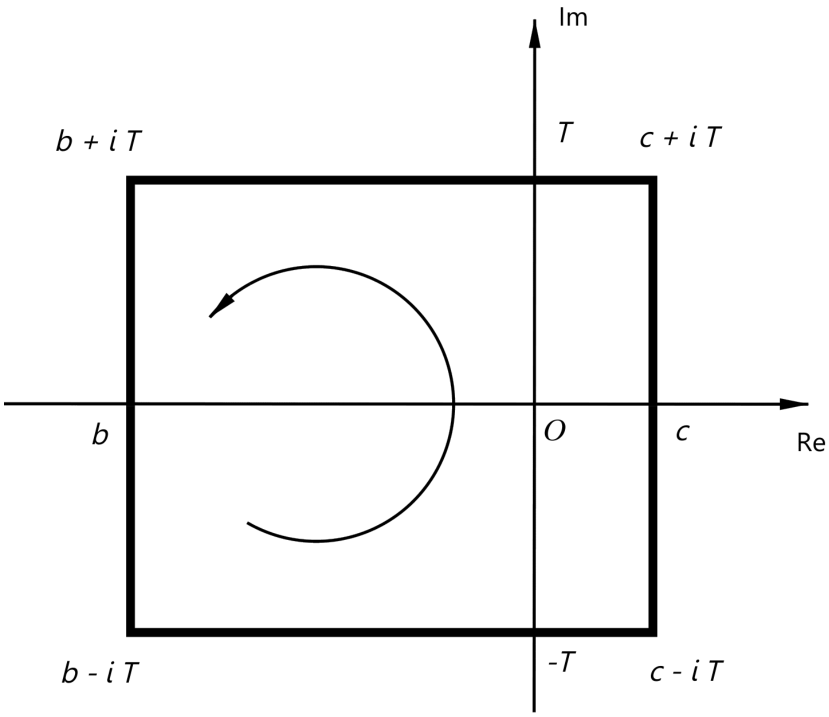

Abbildung 4.2: Der Rand des Rechtecks mit Ecken $c - iT$, $c + iT$, $b + iT$, $b - iT$.

Der Integrand $s \longmapsto \dfrac{a^s}{s}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch und besitzt im Ursprung 0, der innerhalb des Rechtecks liegt, einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\lim_{s \to 0} (s - 0) \cdot \dfrac{a^s}{s} = a^0 = 1$. Nach dem Residuensatz [37, S. 145] hat daher das Integral über den Rand des Rechtecks den Wert $2\pi i$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{[c-iT,\, c+iT]} \frac{a^s}{s}\, ds - 2\pi i \right| &\leq \left| \int\limits_{[c+iT,\, b+iT]} \frac{a^s}{s}\, ds \right| + \left| \int\limits_{[b+iT,\, b-iT]} \frac{a^s}{s}\, ds \right| + \left| \int\limits_{[b-iT,\, c-iT]} \frac{a^s}{s}\, ds \right| \\
&= \left| \int_b^c \frac{a^{x+iT}}{x+iT}\, dx \right| + \left| \int_{-T}^{T} \frac{a^{b-ix}}{b-ix} \cdot (-i)\, dx \right| + \left| \int_b^c \frac{a^{x-iT}}{x-iT}\, dx \right| \\
&\leq \frac{2}{T} \cdot \int_b^c a^x\, dx + 2T \cdot \frac{a^b}{|b|} \xrightarrow{b \to -\infty} \frac{2a^c}{T \log(a)}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck strebt für $T \to \infty$ gegen 0, womit nun die gesamte Behauptung bewiesen ist. $\square$

Diese Integrale $I(a, T)$ und deren Abschätzungen finden im Beweis der *Perron'schen Formel* Anwendung [36, S. 346 – 348], [50, S. 1 – 3], [27, S. 137, 138] [23, S. 5, 6], [2, S. 245, 246] [41, S. 58].

Satz 4.10 (Perron'sche Formel). *Die Dirichletreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *sei absolut konvergent in* Ω_{σ_1} *für ein* $\sigma_1 < \infty$. *Ihr Grenzwert sei mit* $F(s)$ *bezeichnet. Für* $x > 0$, $s \in \mathbb{C}$ *seien außerdem*

$$\delta(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{sowie}$$

$$J\left(f, x, s\right) := \left(\sum_{1 \leq n < x} \frac{f(n)}{n^s} \right) + \delta(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x^s} \right) \qquad \text{definiert.}$$

Ist $c > 0$ *eine beliebige positive Zahl, so gilt für alle* $x > 0$ *und alle* $s \in \Omega_{\sigma_1 - c}$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{T \to \infty} \int_{[c-iT,\ c+iT]} F\left(s+z\right) \frac{x^z}{z}\, dz = J\left(f, x, s\right).$$

Beweis. Es seien x, c, $T > 0$ sowie $s \in \Omega_{\sigma_1 - c}$ beliebig. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals gilt

$$\int_{[c-iT,\ c+iT]} F\left(s+z\right) \frac{x^z}{z}\, dz = \int_{-T}^{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^{s+c+iy}} \cdot \frac{x^{c+iy}}{c+iy} \cdot i \right) \right) dy. \tag{4.8}$$

Bei dem auf $[-T,\ T]$ zu integrierenden Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^{s+c+iy}} \cdot \frac{x^{c+iy}}{c+iy} \cdot i \right) \tag{4.9}$$

handelt es sich um eine bezüglich y auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Reihe: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$ gilt nämlich $\left| \frac{f(n)}{n^{s+c+iy}} \cdot \frac{x^{c+iy}}{c+iy} \cdot i \right| \leq \frac{x^c}{c} \cdot \frac{|f(n)|}{n^{\sigma+c}}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{s+c}}$ liefert das *Weierstraß'sche Majorantenkriterium* die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4.9) bezüglich y auf $\mathbb{R}$. Da ihre Glieder bezüglich y auf $\mathbb{R}$ stetig sind, existiert das Integral der Reihe (4.9) bezüglich y auf $[-T,\ T]$, das wir termweise bilden können. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{[c-iT,\ c+iT]} F\left(s+z\right) \frac{x^z}{z}\, dz &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} \frac{f(n)}{n^{s+c+iy}} \cdot \frac{x^{c+iy}}{c+iy} \cdot i\, dy \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{n^s} \cdot \int_{[c-iT,\ c+iT]} \left(\frac{x}{n} \right)^z \cdot \frac{1}{z}\, dz \right). \end{aligned}$$

Dividieren wir diesen Ausdruck durch $2\pi i$ und subtrahieren davon $J(f,x,s)$, so ergibt Lemma 4.9 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} F(s+z)\,\frac{x^z}{z}\,dz - J(f,x,s)\right|\\
&\le \left(\sum_{1\le n<x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\left|I\left(\frac{x}{n},T\right)-1\right|\right)+\delta(x)\cdot\left|\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x^s}\right|\cdot\left|I(1,T)-\frac{1}{2}\right|\\
&+\left(\sum_{n>x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\left|I\left(\frac{x}{n},T\right)\right|\right)\\
&\le \left(\sum_{1\le n<x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\pi\cdot T\cdot\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right)+\delta(x)\cdot\left|\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x^s}\right|\cdot\frac{c}{\pi T} \qquad (4.10)\\
&+\left(\sum_{n>x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\pi\cdot T\cdot\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\right). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Ist $n>x$, so gilt $n\ge\lfloor x\rfloor+1>x$ und somit $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\ge\left|\log\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1}\right)\right|>0$. Mit der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n>x}\dfrac{f(n)}{n^{s+c}}$ folgt jetzt aus dem *Majorantenkriterium*

$$0\le\sum_{n>x}\left(\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\pi\cdot T\cdot\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\right)\le\frac{x^c}{\pi T\cdot\left|\log\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1}\right)\right|}\cdot\left(\sum_{n>x}\frac{|f(n)|}{n^{\sigma+c}}\right)\xrightarrow{T\to\infty}0.$$

Damit strebt auch die Reihe (4.11) für $T\to\infty$ gegen 0. Da auch der Ausdruck

$$\left(\sum_{1\le n<x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\cdot\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\pi\cdot T\cdot\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right)+\delta(x)\cdot\left|\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x^s}\right|\cdot\frac{c}{\pi T}$$

aus (4.10) für $T\to\infty$ den Grenzwert 0 besitzt, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 4.11. [50, S. 4], [2, S. 246]
Falls wir $c>\max\{0,\sigma_1\}$ wählen, dann gilt die *Perron'sche Formel* auch für $s=0$ und wir erhalten eine Integraldarstellung der Partialsummen der Koeffizienten durch

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{T\to\infty}\int\limits_{[c-iT,\ c+iT]} F(z)\,\frac{x^z}{z}\,dz=\left(\sum_{1\le n<x}f(n)\right)+\delta(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot f(\lfloor x\rfloor).$$

Anhang A

Unendliche Produkte

[27, S. 196, 197] Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann verstehen wir unter dem *unendlichen Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{A.1}$$

die Folge der Partialprodukte

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\,, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{A.2}$$

Falls die Folge (A.2) konvergent ist, so heißt das unendliche Produkt (A.1) *konvergent*. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert der Folge der Partialprodukte (A.2) auch mit (A.1).

Des Weiteren heißt das unendliche Produkt (A.1) *absolut konvergent*, falls das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ konvergiert.

Wie für Reihen besagt das folgende Lemma, dass absolut konvergente unendliche Produkte auch konvergent sind.

Lemma A.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn das unendliche Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

absolut konvergiert, so ist es konvergent.

Beweis. Wir nutzen im Folgenden aus, dass eine komplexe Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy – Folge ist [54, S. 33].

Zunächst definieren wir die Partialprodukte

$$P_N \coloneqq \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\,, \quad N\in\mathbb{N}, \quad \text{sowie} \quad Q_N \coloneqq \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)\,, \quad N\in\mathbb{N},$$

und schätzen die Differenz $|P_N - P_M|$, N, $M \in \mathbb{N}$, nach oben ab. Nehmen wir dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N > M$ an, so gilt

$$\begin{aligned}
|P_N - P_M| &= \left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) - \prod_{n=1}^{M}(1+a_n)\right| = \left|\prod_{n=1}^{M}(1+a_n)\right| \cdot \left|\left(\prod_{n=M+1}^{N}(1+a_n)\right) - 1\right| \\
&= \left(\prod_{n=1}^{M}|1+a_n|\right) \cdot \left|1 + \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right) + \left(\sum_{\substack{n,m=M+1 \\ n<m}}^{N} a_n a_m\right) + \cdots + \left(\prod_{n=M+1}^{N} a_n\right) - 1\right| \\
&\leq \left(\prod_{n=1}^{M}(1+|a_n|)\right) \cdot \left(1 + \left(\sum_{n=M+1}^{N} |a_n|\right) + \cdots + \left(\prod_{n=M+1}^{N} |a_n|\right) - 1\right) \\
&= \left(\prod_{n=1}^{M}(1+|a_n|)\right) \cdot \left(\prod_{n=M+1}^{N}(1+|a_n|) - 1\right) \\
&= \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|) - \prod_{n=1}^{M}(1+|a_n|) = Q_N - Q_M.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung die Folge $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist sie eine Cauchy – Folge. Nach der obigen Abschätzung ist dann auch die Folge $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy – Folge und daher konvergent. Somit konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

□

Um die absolute Konvergenz eines unendlichen Produkts zu zeigen, können wir die Konvergenz einer *Reihe* statt der Konvergenz einer Folge von Partialprodukten zeigen.

Lemma A.2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann ist das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergiert.*

Beweis. Sei $Q_N := \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)$, $N \in \mathbb{N}$.

Um die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen, benutzen wir das *Monotoniekriterium der Reihenkonvergenz* [53, S. 111], [33, S. 61]. Es sei die absolute Konvergenz des unendlichen Produkts $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ vorausgesetzt, was gerade der Konvergenz der Folge $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ entspricht. Aus der Konvergenz der Folge ergibt sich ihre Beschränktheit. Es gibt daher ein $M \geq 0$, sodass $Q_N \leq M$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Nun zeigt die für jedes $N \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned}
M \geq Q_N = \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|) &= 1 + \left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right) + \left(\sum_{\substack{n,m=1 \\ n<m}}^{N}|a_n|\cdot|a_m|\right) + \cdots + \left(\prod_{n=1}^{N}|a_n|\right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N}|a_n|
\end{aligned}$$

die Beschränktheit der Folge $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$, $N \in \mathbb{N}$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Für den Beweis, dass die Bedingung auch hinreichend ist, sei die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ vorausgesetzt. Hier wenden wir das *Monotoniekriterium für Folgen* an [33, S. 46]. Da jeder Faktor von Q_N, $N \in \mathbb{N}$, mindestens den Wert 1 besitzt, ist die Folge $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Um zu zeigen, dass die Folge $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, schätzen wir jeden Faktor $1 + |a_n|$ von Q_N ab. Dazu verwenden wir die für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gültige Abschätzung

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x.$$

Damit ergibt sich für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$Q_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + |a_n|) \leq \prod_{n=1}^{N} \exp(|a_n|) = \exp\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\right) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right) \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist die letzte Schranke $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right) \in \mathbb{R}$ unabhängig von N. Deshalb ist die Folge $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, womit sich ihre Konvergenz ergibt. Dies entspricht der absoluten Konvergenz des unendlichen Produkts $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Maha Mosaad Alghamdi. *ANALYTIC PROOF OF THE PRIME NUMBER THEOREM*. Master Thesis, abgerufen am 20.5.2019. Kent State University, 2019. URL: https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=kent1550224160190008&disposition=inline.

[2] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. erste Auflage, abgerufen am 28.1.2019. Springer-Verlag New York, 1976. URL: https://www.zuj.edu.jo/?wpdmdl=13005.

[3] Johar M. Ashfaque. *Integral Formula for the Coefficients of a Dirichlet Series*. abgerufen am 20.5.2019. Academia.com, 2017. URL: https://www.academia.edu/27770018/Integral_Formula_for_the_Coefficients_of_a_Dirichlet_Series.

[4] Bruce Berndt. *Rudiments of the theory of Dirichlet series*. abgerufen am 20.5.2019. Uni. of Illinois, 1972. URL: http://www.math.uiuc.edu/~berndt/dirichlet_series.pdf.

[5] Harald Bohr. *Contributions to the Theory of Dirichlet Series*. H. Bohr Collected Mathematical Works, Volume 3, abgerufen am 8.6.2019. Dansk Matematisk Forening, Cophenhagen, 1952. URL: https://archive.org/download/collectedmathema029535mbp/collectedmathema029535mbp.pdf.

[6] Peter Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie*. 2.Auflage. Springer-Lehrbuch, 1992.

[7] Eberhard Freitag; Rolf Busam. *Funktionentheorie*. 2. Auflage. Springer-Lehrbuch, 1995.

[8] Pete L. Clark. *Dirichlet Series*. abgerufen am 3.4.2019. University of Georgia, 2008. URL: math.uga.edu/~pete/4400dirichlet.pdf.

[9] Mark Coleman. *Analytic Number Theory, Lecture Notes, Ch. 3: Arithmetic Functions and Dirichlet Series*. abgerufen am 20.4.2019. University of Manchester, 2018. URL: http://www.maths.manchester.ac.uk/~mdc/MATH31022/2011-12/notes/Notes2%20Arithmetic%20Functions.pdf.

[10] Keith Conrad. *Dirichlet Series*. abgerufen am 20.5.2019. University of Connecticut, 2018. URL: https://kconrad.math.uconn.edu/math5121s18/handouts/dirichletseries.pdf.

[11] John O'Connor und Edmund Robertson. *Julius Wilhelm Richard Dedekind*. abgerufen am 1.7.2019. University of St Andrews, 1998. URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind.html.

[12] John O'Connor und Edmund Robertson. *Johan Ludwig William Valdemar Jensen*. abgerufen am 1.7.2019. University of St Andrews, 2000. URL: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jensen.html.

[13] John O'Connor und Edmund Robertson. *Harald August Bohr.* abgerufen am 2.7.2019. University of St Andrews, 2003. URL: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bohr_Harald.html`.

[14] Harold M. Edwards. „Euler's definition of the derivative". In: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 44 (2007). abgerufen am 23.6.2019, 575–580. URL: `https://www.ams.org/journals/bull/2007-44-04/S0273-0979-07-01174-3/S0273-0979-07-01174-3.pdf`.

[15] Euklid. *Euklid: Elemente (Euklides: Stoicheia).* Übertragen aus Griechischem von R. Haller, abgerufen am 15.6.2019. Edition Opera-Platonis, 2017. URL: `http://www.opera-platonis.de/euklid/Euklid_Stoicheia.pdf`.

[16] Leonhard Euler. „Variae observationes circa series infinitas". In: *Commun. Acad. Sci. Petropolitanae* (1737/1744). abgerufen am 26.6.2019, S. 160–188. URL: `http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E072.pdf`.

[17] Leonhard Euler. „Verschiedene Bemerkungen über unendliche Reihen". In: *Euler-Kreis Mainz(Euler Übersetzungen), E72* (2014). Übersetzt aus Latein von Alexander Aycock, abgerufen am 27.6.2019, S. 1–41. URL: `http://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Euler-Kreis%20Mainz/E72.pdf`.

[18] Leonhard Euler. *Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* Übersetzt aus Latein von Michelsen, Johann Andreas Christian, abgerufen am 27.6.2019. Berlin, 1788. URL: `https://www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/titleinfo/2327954`.

[19] Jan-Hendrik Evertse. *Dirichlet series and arithmetical functions, Chapter 3, pp. 57-69.* Auflage 2013, abgerufen am 3.4.2019. Leiden University, 2013. URL: `www.math.leidenuniv.nl/~evertse/ant13-3.pdf`.

[20] Jan-Hendrik Evertse. *Dirichlet series and arithmetical functions, Chapter 3, pp. 69-81.* Auflage 2016, abgerufen am 10.5.2019. Leiden University, 2016. URL: `www.math.leidenuniv.nl/~evertse/ant16-3.pdf`.

[21] Otto Forster. *Analytic Number Theory, LMU Munich.* abgerufen am 20.4.2019. LMU Munich, Germany, 2001. URL: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/ann/annth_all.pdf`.

[22] Otto Forster. *Analysis 1.* 9. Auflage. Vieweg, 2008.

[23] Otto Forster. *Äquivalenzen zur Riemannschen Vermutung.* abgerufen am 20.5.2019. LMU München, 2009, RZF, Kap. 10, 1–9. URL: `www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/zeta/RZF_chap10.pdf`.

[24] L. J. Goldstein. „A History of the Prime Number Theorem". In: *The American Mathematical Monthly* 80, No. 6 (1973). abgerufen am 8.6.2019, S. 599–615. URL: `https://www.math.fsu.edu/~quine/ANT/2010%20Goldstein.pdf`.

[25] Håkan Hedenmalm. *Topics in the theory of Dirichlet series.* abgerufen am 8.6.2019. Lund University, 2000. URL: `https://people.kth.se/~haakanh/publications/sumy.pdf`.

[26] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 1.* 15. Auflage. Teubner, 2003.

[27] A.J. Hildebrand. *Introduction to Analytic Number Theory.* abgerufen am 9.4.2019. Department of Mathematics, University of Illinois, 2005. URL: `https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/main.pdf`.

[28] Chan Heng Huat. *Introduction to Analytic NumberTheory.* abgerufen am 20.5.2019. National University of Singapore, 2017. URL: `http://www.math.nus.edu.sg/~chanhh/notes/MA4263.pdf`.

[29] Greg Hurst. *Solutions to Introduction to Analytic Number Theory from Tom M. Apostol.* abgerufen am 30.4.2019, 30.3.2019. gregoryhurst.com, 2014. URL: `https://greghurst.files.wordpress.com/2014/02/apostol_intro_to_ant.pdf`.

[30] Clay Mathematics Institute. *Seven Millennium Prize Problems.* abgerufen am 23.6.2019. Clay Mathematics Institute, 2000. URL: `https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis`.

[31] Clay Mathematics Institute. *Riemann's 1859 Manuscript.* abgerufen am 3.7.2019. Clay Mathematics Institute, 2005. URL: `https://www.claymath.org/publications/riemanns-1859-manuscript`.

[32] Konrad Königsberger. *Analysis 2.* 4. Auflage. Springer, 2002.

[33] Konrad Königsberger. *Analysis 1.* 6. Auflage. Springer, 2004.

[34] Emmanuel Kowalski. *Arithmetic Randonnée An introduction to probabilistic number theory.* abgerufen am 30.6.2019. ETH Zürich, 2019. URL: `https://people.math.ethz.ch/~kowalski/probabilistic-number-theory.pdf`.

[35] Edmund Landau. „Über einen Satz von Tschebyschef". In: *Mathematische Annalen* Band 61 (1905). abgerufen am 29.6.2019, S. 527–550. URL: `https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0061`.

[36] Edmund Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* erster Band, abgerufen am 30.5.2019. B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909. URL: `www.fuchs-braun.com/media/2092597b8e6814aeffff806afffffff1.pdf`.

[37] Wolfgang Fischer; Ingo Lieb. *Funktionentheorie.* 5. Auflage. vieweg studium, 1988.

[38] Brian N. Maurizi. „Extending Landau's Theorem on Dirichlet Series with Non-Negative Coeffcients". In: *Missouri Journal of Mathematical Sciences* 23/2 (2011). abgerufen am 20.5.2019, S. 105–122. URL: `https://projecteuclid.org/euclid.mjms/1321045140`, `https://arxiv.org/pdf/1009.0228`.

[39] John E. McCarthy. *Dirichlet Series – Lecture Notes.* abgerufen am 3.4.2019. Washington University, 2015. URL: `https://www.math.wustl.edu/~mccarthy/amaster-ds.pdf`.

[40] Oskar Perron. „Zur Theorie der Dirichletschen Reihen". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1908). abgerufen am 11.6.2019, S. 95–143. URL: `https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0134?tify=%7B%22view%22%3A%22info%22%2C%22pages%22%3A%5B101%5D%7D`.

[41] Alois Pichler. *Introduction to Analytic Number Theory.* abgerufen am 19.6.2019. Technische Universität Chemnitz, 2019. URL: `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/fima/public/NumberTheory.pdf`.

[42] Harold G. Diamond P.T. Bateman. *Analytic Theory: An Introductory course.* angesehen am 20.5.2019. World Scientific, Beijing, China, 2004. URL: `https://books.google.de/books?id=yiJtmpKf7Q8C&printsec=frontcover&hl=de#v=onepage&q&f=false`.

[43] Bernhard Riemann. „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse". In: *Monatsber. Akad. Berlin* (1859). abgerufen am 18.6.2019, S. 671–680. URL: `https://www.emis.de/classics/Riemann/Zeta.pdf`.

[44] G. H. Hardy; Marcel Riesz. *The General Theory of Dirichlets Series.* abgerufen am 24.4.2019. Camb. Uni. Press, 1915. URL: https://archive.org/download/cu31924060184441/cu31924060184441.pdf.

[45] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mathematics series. McGraw-Hill, III Edition, 1987. URL: https://59clc.files.wordpress.com/2011/01/real-and-complex-analysis.pdf.

[46] Håkan Hedenmalm; Eero Saksman. „Carleson's Convergence Theorem for Dirichlet Series". In: *Pacific Journal of Mathematics* 208/1 (2003). abgerufen am 8.6.2019, S. 85–109. URL: https://msp.org/pjm/2003/208-1/pjm-v208-n1-p07-s.pdf.

[47] Andreas Herz ; Martin Schalk. *Repetitorium Funktionentheorie.* 1. Auflage. vieweg, 1996.

[48] Yum-Tong Siu. *Dirichlet Series, Abscissas of Convergence, and Growth Rate Along Vertical Lines.* abgerufen am 24.4.2019. Harvard University, 2005. URL: http://www.math.harvard.edu/archive/213b_spring_05/dirichlet_series.pdf.

[49] Yum-Tong Siu. *Explicit Formula for Logarithmic Derivative of Riemann Zeta Function.* abgerufen am 20.5.2019. Harvard University, 2005. URL: http://www.math.harvard.edu/archive/213b_spring_05/explicit_formula_log_derivative_zeta_function.pdf.

[50] Yum-Tong Siu. *Perron Formula Without Error Estimates.* abgerufen am 24.4.2019. Harvard University, 2005. URL: http://www.math.harvard.edu/archive/213b_spring_05/perron_formula_without_error_estimate.pdf.

[51] Jörn Steuding. *Probabilistic Number Theory.* abgerufen am 20.4.2019. Universität Frankfurt, 2001. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.118.4755&rep=rep1&type=pdf.

[52] Gérald Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* III Edition, abgerufen am 20.4.2019. Camb. Uni. Press, 1995. URL: https://books.google.de/books?id=UEk-CgAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=de#v=onepage&q&f=false.

[53] Steffen Timmann. *Repetitorium der Analysis , Teil 1.* 3. Auflage. Binomi Verlag, 2006.

[54] Steffen Timmann. *Repetitorium der Funktionentheorie.* 1. Auflage. Binomi Verlag, 2007.

[55] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* II Edition, abgerufen am 20.4.2019. Oxford University press, 1939. URL: https://archive.org/download/TheTheoryOfFunctions/Titchmarsh-TheTheoryOfFunctions_text.pdf.

[56] Ohne Verfasser. *Dirichletreihe.* abgerufen am 1.7.2019. deacademic.com. URL: https://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/338526.

[57] Ohne Verfasser. *Cahen, Eugène (1865-1941).* abgerufen am 1.7.2019. idref.fr, 2015. URL: https://www.idref.fr/067063993.

[58] Ingo Witzke. *Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion – zu Eulers Umgang mit unendlichen Größen.* abgerufen am 23.6.2019. Uni Siegen, 2013, S. 23–40. URL: http://dokumentix.ub.uni-siegen.de/opus/volltexte/2015/824/pdf/SIEB_Bd1_2013.pdf.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Köln, den 18. Juli 2019

Titus Pavlovic