

Kurzzusammenfassung

Algebra nimmt innerhalb der Mathematik eine zentrale Rolle ein. Die algebraische Symbolsprache bildet die Grundlage für die allgemeine Betrachtung und Beschreibung von mathematischen Strukturen. Mit Hilfe von Variablen können allgemeine Gesetze aufgestellt und funktionale Abhängigkeiten beschrieben werden. Die Algebra liegt somit fast allen mathematischen Tätigkeiten auf einer allgemein formalen Ebene zugrunde. Das Erlernen der Bedeutung und des korrekten Umgangs mit Variablen stellt die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik dar. Mathematikdidaktische Studien haben gezeigt, dass die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra besonders im mangelnden Verständnis des Begriffs Variable und im Rechnen mit diesen liegen.

In der vorliegenden Arbeit wird durch den historisch-mathematischen Ansatz zur Rekonstruktion mathematischen Wissens ein neuer Blickwinkel auf die Probleme der Schülerinnen und Schüler aufgezeigt. Dazu wird zunächst in einer Analyse die historische Entwicklung der Algebra betrachtet und anschließend die Einführung der Algebra im heutigen Mathematikunterricht mittels einer Schulbuchanalyse untersucht.

In der Analyse der historischen Entwicklung der Algebra und der algebraischen Symbolsprache wird die zugrunde liegende Auffassung von Algebra untersucht und epistemologische Hindernisse bei der Entstehung des Variablenbegriffs identifiziert. Die algebraische Symbolsprache hat sich in den Jahrhunderten von rein sprachlichen Äußerungen über die Darstellung mit einer Variablen für die gesuchte Unbekannte, hin zu einer vollständig symbolischen Darstellung entwickelt. Der Erwerb des Verständnisses von jeweils einer neuen Verwendung von Variablen ist mit epistemologischen Hindernissen verbunden, die in der Natur der Objekte an sich liegen und daher nicht vermieden werden können. Der semantische Kontext bei der Entwicklung der Algebra gibt Aufschluss über den ontologischen Status der Objekte und damit auf die vorherrschende Auffassung von Algebra. Als paradigmatisches Beispiel für die Auffassung der Algebra in der historischen Entwicklung wird Eulers Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ untersucht. Die Grundlage von Eulers Betrachtung bilden Größen aus realen Größenbereichen. Die Begründungen mathematischer Aussagen erfolgen induktiv durch die Angabe eines paradigmatischen Beispiels oder durch eine geometrische Veranschaulichung in einem realen Größenbereich. Die von Euler vertretene Auffassung von Algebra ist nicht formal abstrakt wie in der heutigen Wissenschaft, sondern sie ist empirisch-gegenständlich.

In der Schulbuchanalyse der Schulbuchreihen „Schnittpunkt“ und „Elemente der Mathematik“ wird die Auffassung von Algebra ermittelt, die durch die Einführung der Begriffe, die Natur der Objekte und die Begründungen von mathematischen Aussagen in den Schulbüchern dargestellt wird, und welche die Schülerinnen und Schüler durch das Lernen mit diesen Schulbüchern erwerben. Die Grundrechenarten der natürlichen Zahlen werden im Größenbereich der Längen durch das Aneinanderfügen und Wegnehmen von Strecken erläutert, wodurch eine geometrische Vorstellung von den Rechenoperationen aufgebaut wird. Die Begriffe und Lerninhalte der Algebra werden in sinnstiftenden Sachaufgaben eingeführt und in geometrischen Darstellungen veranschaulicht. Die Rechengesetze und Termumformungen werden in realen Größenbereichen begründet und erklärt. Die von dem Schulbuch intendierten Veranschaulichungen sind aus Schülersicht die Objekte der Algebra. Es ist daher davon auszugehen, dass die Schülerinnen und Schüler durch das Arbeiten mit den Schulbüchern eine empirische Theorie der Algebra erwerben. Diese Auffassung von Algebra der Schülerinnen und Schüler steht im Kontrast zu der üblicherweise formal abstrakten Auffassung der Lehrer. Sie ist jedoch, wie anhand der Analyse von Eulers Algebra gezeigt wurde, historisch berechtigt und stellt eine adäquate Beschreibung der Schülertheorien dar.