

Das Twisten von Matroiden

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Markus Kloock

aus Euskirchen

Köln

2003

Berichterstatter: Prof. Dr. Rainer Schrader

Prof. Dr. Michael Jünger

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Dezember 2003

Vorwort

Der Mathematik sind Matroide sowohl als Objekte von kombinatorischer Struktur als auch als Systeme innerhalb algebraischer Gefüge bereits seit den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts bekannt. Sie wurden etwa synchron in verschiedenen Zusammenhängen entdeckt. Matroide realisieren ein Konzept von Unabhängigkeit, wie es beispielsweise aus Vektorräumen oder Körpern als lineare bzw. algebraische Unabhängigkeit ein Begriff ist. Hinzu kommt eine Verzahnung der Komponenten, die darin besteht, dass gegenseitig Elemente ergänzt bzw. ausgetauscht werden können.

Mit dem Fortschritt der Leistungsfähigkeit von Rechenmaschinen gerieten zunehmend komplexe und zunehmend umfangreiche Entscheidungsprobleme in den Bereich oder die Nähe der Lösbarkeit. Denn die Automaten können schematisierte Rechenverfahren immer schneller und ermüdungsfrei durchführen. Diese, als Algorithmen bezeichneten Verfahren, entstehen im Rahmen von abstrahierenden Modellen, die die jeweilige Problemstruktur reflektieren sollen.

Die Informatik, als Wissenschaft, die sich u.a. mit der Analyse dieser Rechenverfahren beschäftigt, ist darum auch mit der Beschaffenheit der Modelle konfrontiert. Diesbezügliche Untersuchungen bewegen sich zum Teil im Bereich der diskreten Mathematik, die, infinitesimale Aspekte vermeidend, endliche Gefüge sowie Verfahrensgrundlagen unterbreitet.

Ein Großteil der Entscheidungsprobleme verlangt danach, eine bestmögliche unter mehreren zulässigen Lösungsmöglichkeiten zu erfahren. So betritt man das Teilgebiet der kombinatorischen Optimierung, deren Vorschläge für Lösungsmethoden und Modellbildung auf dieses Ziel hinarbeiten. Eine legitime Frage in diesem Zusammenhang besteht darin, welche Problemstruktur vorliegen muss, damit vorgegebene, besonders einfache und schnelle Lösungsmethoden sicher zum Optimum führen.

Hier tauchten die Matroide 20 bis 30 Jahre nach ihrer Entdeckung als Antwort auf eine derartige Frage, bezogen auf den im Grunde einfachst denkbaren Algorithmus, den klassischen Greedy-Algorithmus, wieder auf und sind

seitdem ein sehr beliebtes Forschungsobjekt der kombinatorischen Optimierung. Einige Variationen und Verallgemeinerungen erweiterten anschließend die Palette der angewandten Mathematik.

Zwei Erweiterungen des Matroid-Konzepts aus den 1980er Jahren seien hervorgehoben. Die Greedoide einerseits konzentrieren sich auf die Systeme, die mit dem Greedy-Algorithmus oder seinen Verwandten auf irgendeine Art harmonieren. Ihnen gelang es damit, mehrere bekannte Problemstellungen zu vereinnahmen, die nicht Matroide sind, aber entsprechende Ähnlichkeiten aufweisen.

Die Δ -Matroide andererseits sind eine Generalisierung mehr theoretischer Natur und bieten gleich in mehrfacher Hinsicht wohlgeformte Überbegriffe von Gesichtspunkten der Matroid-Theorie. Nicht zuletzt gelingt dies in eleganter Weise beim Transfer der originär in Form von Mengensystemen betrachteten Strukturen in den Bereich der Vektorräume, die Domäne der linearen Algebra.

Dabei agiert man auf dem Feld, wo sich die lineare bzw. ganzzahlige Programmierung mit der kombinatorischen Optimierung überschneidet, wo die Polyeder das angestrebte Mittel sind, die Vorgänge um lineare Zielfunktionen zu beleuchten, wobei letztere die kontextuelle Übertragung der elementweise gewichtzuteilenden Funktionen verkörpern.

Es wird in dieser Arbeit deutlich werden, dass eine so elementare Vektorraum-Abbildung wie die Spiegelung hilft, die Art und Weise zu illustrieren, wie die Verallgemeinerung der Δ -Matroide gegenüber den Matroiden in polyedrischer Hinsicht funktioniert, nämlich indem die fundamentale Eigenschaft der Submodularität in allen grundlegenden Richtungen der Dimension wirkt.

Wieder zurück transferiert entspricht das Spiegeln in Bezug auf Mengensysteme einem Vorgang, der als „Twisten“ bezeichnet wird und in den einzelnen Mengen die Elemente der von vornherein fixierten Twistmenge austauscht. Das primäre Ziel der Untersuchungen dieser Arbeit sind die getwisteten Matroide, die als Mengensysteme durch eben dieses Twisten aus den Matroiden hervorgehen.

Die getwisteten Matroide sind auf natürliche Weise Δ -Matroide und zudem in der Literatur als ein Beispiel für Greedoide ausgewiesen worden. Auf Grund der strukturellen Ähnlichkeit, die sie sich von den Matroiden bewahren, können sie speziellen Klassen von Greedoiden zugeordnet werden, die sich als besonders fügsam gegenüber linearer Optimierung zeigen. Einige Funktionen und deduzierte Systeme aus der Matroid-Theorie, die dort ästhetische Charakterisierungen und Beschreibungen liefern, lassen auch für die getwisteten Matroide annähernd gleichartige Ergebnisse zu.

Schließlich können die getwisteten Matroide in einer Region von Mengensystemen lokalisiert werden, wo die Δ -Matroid-Qualität auf eine Eigenschaft von Greedoiden trifft, die es im Zusammenspiel erlaubt, einen erweiterten Greedy-Algorithmus anzugeben. Dieser erlaubt eine Optimierung in polynomieller Zeit, wenn ihm die notwendigen Informationen über das Mengensystem in einer standardisierten Form verfügbar sind.

Das Twisten von Matroiden findet eine weitere Fortsetzung hin zu den Matroid-Twistvereinigungen. Dabei geht es um Mengensysteme, die sich ebenfalls auf dem oben thematisierten Terrain bewegen. Sie entstehen aus einer Vereinigung von getwisteten Matroiden, die durch einelementige Twistmengen gekennzeichnet und darum den Matroiden besonders nahe sind. Der zugehörige Kompositionsvorgang kann auch mehrmals aufeinander folgend vorgenommen werden.

Diese Matroid-Twistvereinigungen werden sich demgemäß ebenfalls als Δ -Matroide und Greedoide von der eingeführten Form erweisen. Unter bestimmten Umständen sind sie auch selbst von Matroid-Gestalt. Als solche sind sie schon nicht klassifizierter Bestandteil der Literatur gewesen, dort als Spezialfall von graphischen Matroiden, die zu einem Verfahren zur Lösung des Traveling-Salesman-Problems beitragen.

Übersicht

Bei der Optimierung muss zwischen zulässigen und unzulässigen Lösungen unterschieden werden. Bei einer großen Anzahl von Problemmodellen führt dies, im höchstmöglichen Abstraktionsgrad, zu Mengensystemen. Diese werden in **Kapitel 1** vorgestellt, nebst relevanter Grundlagen von Mengenverknüpfungen. Dazu werden Funktionen eingeführt, die Mengensysteme beschreiben können, und gängige Möglichkeiten neue Mengensysteme von vorhandenen abzuleiten.

Kapitel 2 handelt von bekannten Mengensystemen, die mit linearer Optimierung in Verbindung gebracht werden können. Zunächst werden die wichtigsten Sachverhalte, die sich um die Matroide ranken, beschrieben. Es folgt eine Einführung zum Thema Greedoide, insbesondere die Darlegung der in der Literatur herausgearbeiteten speziellen Greedoid-Klassen, die interessant im Zusammenhang mit Algorithmen zur linearen Optimierung sind, ohne auf geordnete Versionen von Mengen angewiesen zu sein. Es wird eine ausführliche Abgrenzung dieser Klassen voneinander vorgenommen.

Anschließend wird über die wichtigsten Wesenszüge der Δ -Matroide berichtet. Eine neue Klasse von Greedoiden wird eingeführt, die im Zusammen-

spiel mit Δ -Matroiden einen schnellen Greedy-Algorithmus möglich macht, der nur vom gewöhnlichen Mengensystem-Orakel abhängig ist.

Das zentrale **Kapitel 3** beschäftigt sich mit den getwisteten Matroiden, ihrer Einordnung in den Greedoid-Kontext und allen Aspekten der Mengensystemanalyse, die mit den zuvor gestellten Werkzeugen bearbeitet werden können.

Kapitel 4 ist den Matroid-Twistvereinigungen gewidmet und ihrer Verortung im aufgezogenen Systemgeflecht, welche wiederum in dem Bereich resultiert, der im zweiten Kapitel vorsorglich bereitet wurde. Vorgestellt werden auch die iterierte Twistvereinigung sowie zwei Objekte, die in praktisch umgesetzten Verfahren zur Lösung zweier Standardprobleme der kombinatorischen Optimierung Verwendung finden und sich als Twistvereinigungen ausmachen lassen.

Der letzte Teil der Arbeit, **Kapitel 5**, thematisiert die Polyedertheorie rund um Matroide und Δ -Matroide. Es wird gezeigt, dass ein von Dunstan und Welsh vorgestellter Algorithmus, der das Greedy-Verfahren zur Polymatroid-Optimierung verallgemeinern sollte, eine genaue Charakterisierung der später eingeführten bisubmodularen Polyeder liefert. Dies steht im Zusammenhang mit der Spiegelung von Polyedern, die in Analogie zum Twisten steht und infolgedessen weitere Beschreibungen für Δ -Matroide hervorruft. Zum Schluss wird das Polyeder zum getwisteten Matroid kurz beschrieben.

Dankesworte

Diese möchte ich an Herrn Professor Schrader richten für die Betreuung, dafür dass er mich, mit der Möglichkeit am Zentrum für Angewandte Informatik Köln zu arbeiten, und diese Arbeit, mit richtungsweisenden Vorgaben, gesponsert hat.

Ich danke meinen FreundInnen und KollegInnen Maria, Martina, Britta, Jutta, Petra, Dirk und Bernhard für Fehlermeldungen und Anregungen, ihnen und einigen anderen für eine schöne Zeit am ZAIK.

Ich danke dem Fußballsport und meinen dort mit mir aktiven Freunden für die gebotene Ablenkung und Zuwendung, auch für die meiner Eltern und meiner Oma, aber auch dem 1.FC Köln, dass er mir durch zweimaligen Abstieg etwas mehr Zeit zum Arbeiten gelassen hat.

Ganz besonderer Dank gebührt Andrea, die hauptverantwortlich für die glücklichen Lebensumstände sorgt, in die diese Arbeit eingebettet gewesen ist.

Let's do the twist!

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Mengen von Mengen	1
1.1 Mengensysteme	2
1.1.1 Extreme Mengen und Basen	2
1.1.2 Mengenweise Vereinigung	3
1.1.3 Derivate von Mengensystemen	4
1.1.4 Die symmetrische Differenz Δ	7
1.2 Nützliche Mengenlehre	8
1.3 Beschreibende Funktionen	10
1.3.1 Rang	10
1.3.2 Hüllenoperator	10
1.3.3 Δ -Rang	11
2 Mengensysteme und Algorithmen	13
2.1 Greedy-Algorithmen, Laufzeiten und Orakel	13
2.2 Matroide	15
2.2.1 Unabhängigkeitssysteme	16
2.2.2 Axiomatisierung	17
2.2.3 Beispiele	19
2.2.4 Optimierung	20
2.2.5 Eigenschaften und Funktionen	21
2.2.6 Matroid-Schnitt	23
2.3 Greedoide	26
2.3.1 Erscheinungsformen	27
2.3.2 Eigenschaften und Funktionen	29
2.3.3 Ausgedünnte Matroide	32
2.3.4 Die starke Austauschenschaft	34

2.3.5	Austausch-Systeme	36
2.3.6	Gauß-Greedoide	37
2.3.7	Abgrenzung der Greedoid-Klassen	40
2.3.8	Intervall-Greedoide	45
2.4	Δ -Matroide	46
2.4.1	Beispiele	46
2.4.2	Optimierung	47
2.4.3	Bisubmodularität	53
2.4.4	Operationen auf Δ -Matroiden	57
2.5	Eine Symbiose aus Δ -Matroid und Greedoid	59
2.5.1	Getrennte Wege	59
2.5.2	Gemeinsame Sache	60
2.5.3	Der Algorithmus (KGA)	61
3	Getwistete Matroide	63
3.1	Motivation	63
3.1.1	Äquivalenzklassen	63
3.1.2	Ein Beispiel für Greedoide	65
3.2	Twisten und Unabhängigkeit	66
3.3	Derivate und Zerlegung	68
3.3.1	Kontraktion	69
3.3.2	Restriktion	70
3.3.3	Partitionierung	71
3.3.4	Dualität	73
3.4	$\mathcal{M} \Delta A$ als Greedoid	79
3.4.1	Spezifizierung	80
3.4.2	Abgrenzung	83
3.5	Beschreibende Funktionen	85
3.5.1	Rang	85
3.5.2	Hüllenoperator	92
3.5.3	Δ -Rang	94
3.5.4	Hüllen- und Basis-Rang	96
3.6	Optimierung	97
3.6.1	Der getwistete Matroid-Greedy	97
3.6.2	Der allgemeinere Ansatz	98
3.7	Schnitt	99

4	Matroid-Twistvereinigungen	101
4.1	Die Twistvereinigung	101
4.1.1	Die Matroid-Twistvereinigung	102
4.1.2	Die Augmentierungseigenschaft	102
4.2	Die Matroid-Twistvereinigung als Matroid	104
4.2.1	Die Bedingung an die Twistmenge	104
4.2.2	Die Beziehung zum Ausgangs-Matroid	106
4.3	Die iterierte Twistvereinigung	108
4.4	1- und K -Bäume	110
4.4.1	1-Bäume	110
4.4.2	K -Bäume	113
4.5	$\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ als Greedoid	115
4.5.1	Die starke Austausch eigenschaft	115
4.5.2	Die Abgrenzung der Twistkonstruktionen	119
4.5.3	Eine Beziehung zum Ausgangs-Matroid	120
4.5.4	Abschlussbildung	121
4.6	$\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ als Δ -Matroid	123
4.7	Optimierung	128
5	Twisten und Polyeder	131
5.1	Polymatroide	133
5.1.1	Lineare Optimierung	134
5.1.2	Matroid-Polyeder	135
5.1.3	Induziertes Matroid	135
5.1.4	TDI-Systeme	136
5.1.5	Basis-Polyeder	136
5.2	Bisubmodulare Polyeder	138
5.2.1	Generalisierung von Polymatroiden	138
5.2.2	Die Beziehung zum Δ -Matroid	139
5.3	Twisten und Spiegeln	140
5.3.1	Spiegelrechnung	141
5.3.2	Der verallgemeinerte Polymatroid-Algorithmus	142
5.3.3	Eine Charakterisierung bisubmodularer Polyeder	146
5.3.4	Ein Rückschluss auf Mengensysteme	154
5.4	Das getwistete Polymatroid	157
5.4.1	Das Polyeder zum getwisteten Matroid	157
5.4.2	Das induzierte getwistete Matroid	159

Symbolverzeichnis	161
Literaturverzeichnis	167
Inklusionsdiagramm	175
Zusammenfassung	177
Twisting Matroids	179

Kapitel 1

Mengen von Mengen

Mit der wachsenden Zunahme der Bedeutung von elektronischer Datenverarbeitung wuchs und wächst auch die Zuwendung, welche die diskrete Mathematik erfährt, da sie Heimstatt der mathematischen Untersuchungen von Strukturen ist, die sich aus voneinander getrennten Bestandteilen bilden, in dem Sinne, dass sich kontinuierliche Übergänge in diesen Strukturen nicht beliebig verfeinern lassen.

Diese Strukturen korrespondieren besser mit dem Wesen der bisher von Menschen gebauten elektronischen Rechner als die der klassischen Mathematik, da diese Maschinen in nur endlich viele Zustände geraten können, wenn sie Modelle für Probleme umsetzen, für die sie ein Ergebnis berechnen sollen.

Insbesondere geraten so Strukturen ins Blickfeld der diskreten Mathematik, die auf Mengen basieren, die sich aus endlich vielen oder, meist im Zuge von Verallgemeinerungen der Betrachtung, aus höchstens abzählbar vielen Elementen zusammensetzen. Zu diesen gehören die Mengensysteme als Ansammlung von Mengen, die ihre Elemente aus einem zuvor festgelegten Bereich rekrutieren. Sie werden in diesem Kapitel vorgestellt.

Der Begriff „Menge“ und die vielen weiteren Termini wie z.B. Teilmengen oder Abbildungen, die sich daran anschließen, können mathematisch dem Gebiet der Algebra zugeordnet werden. Auf diese Grundlagen wird hier nicht weiter eingegangen, sie können beispielsweise bei [vdW71] studiert werden.

Einige der nun angeführten Definitionen entfalten einen Sinn erst, wenn sie sich im Rahmen der später beschriebenen, spezielleren Mengensysteme bewegen und stammen ursprünglich nur aus der jeweils dazugehörigen Literatur, bzw. den noch folgenden Kapiteln. Dennoch sollen sie hier so allgemeingültig wie möglich an zentraler Stelle eingeführt werden.

1.1 Mengensysteme

Ein **Mengensystem** (E, \mathcal{F}) besteht aus einer Menge \mathcal{F} von Mengen, deren Elemente einer **Grundmenge** E entnommen sind.

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E), \quad X \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X \subseteq E.$$

Ist die Grundmenge zweifelsfrei identifiziert, steht das Symbol \mathcal{F} auch alleine für das Mengensystem.

Betrachtet werden in dieser Arbeit nur Mengensysteme auf einer Grundmenge E , deren Anzahl $n = |E|, n \in \mathbb{N}$, endlich ist. Mengen, die sich in einem augenblicklich thematisierten Mengensystem befinden, werden als **zulässig** bezeichnet.

Das spezielle Mengensystem $2^T (= \mathcal{P}(T))$ kennzeichnet das vollständige Mengensystem unterhalb von $T \subseteq E$, die **Boole'sche Algebra**.

1.1.1 Extreme Mengen und Basen

Eine Menge $X \in \mathcal{F}$ wird **maximal** genannt, wenn kein $Y \neq X, Y \in \mathcal{F}$ die Menge X enthält. Der Begriff bezieht sich also auf Erweiterbarkeit und nicht auf Größe. Entsprechend wird eine Menge X als **minimal** bezeichnet, wenn kein $Y \neq X, Y \in \mathcal{F}$, in X enthalten ist. Die Menge der maximalen Mengen wird symbolisiert durch $\text{MAX}(\mathcal{F})$.¹ Diese Mengen flankieren das Mengensystem folgendermaßen:

Bemerkung 1.1.

Jede Menge $X \in \mathcal{F}$ ist in einer maximalen Menge enthalten, ebenso wie jede Menge eine minimale Menge enthält.

Beweis

Ist X selbst nicht maximal, so ist es in $Y \in \mathcal{F}$ mit $|Y| > |X|$ enthalten. Ist Y selbst nicht maximal, so ist es in ... Diese Argumentationskette endet spätestens bei E , welches, falls in \mathcal{F} , natürlich maximal ist. Die analoge Argumentation funktioniert für eine minimale Menge. ■

Im Unterschied zur maximalen Menge wird eine **Basis** B von \mathcal{F} hier definiert als nicht durch einzelne Elemente erweiterbare Menge:² $\forall_{x \in E \setminus B} B \cup x \notin \mathcal{F}$.

¹entsprechend $\text{MIN}(\mathcal{F})$

² $B \cup x = B \cup \{x\}$, siehe Symbolverzeichnis

Die Basen bilden die **Basismenge** $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Der Terminus kann auch in Bezug auf eine beliebige andere Menge $A \subseteq E$ verwendet werden: B ist **Basis von** A , wenn kein $x \in A \setminus B$ aufzufinden ist, das $B \cup x \in \mathcal{F}$ bewerkstelligt.

Evident ist, dass maximale Mengen in jedem Fall auch Basen sind: $\text{MAX}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Oftmals erfüllen die Mengensysteme, die im weiteren Verlauf untersucht werden, grundlegende Eigenschaften, die bewirken, dass die Basen auch genau die maximalen Mengen sind.

1.1.2 Mengenweise Vereinigung

Neben den kanonischen Möglichkeiten wie Schnitt und Vereinigung, zwei Mengensystemen zu verknüpfen, gibt es die Variante einer **mengenweisen Vereinigung** für $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{P}(E_1), \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P}(E_2), E_1, E_2 \subseteq E$.

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{F}_1, Y \in \mathcal{F}_2\}.$$

Sind E_1 und E_2 als Heimstätten für \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 soweit reduzierbar oder so gegeben, dass sie disjunkt daherkommen, spricht man auch von der **direkten Summe** $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Für die maximalen Mengen einer mengenweisen Vereinigung von Mengensystemen lässt sich aussagen:

Bemerkung 1.2.

$$\text{MAX}(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \subseteq \text{MAX}(\mathcal{F}_1) \vee \text{MAX}(\mathcal{F}_2).$$

Sind die Grundmengen E_1 und E_2 disjunkt, so gilt Gleichheit.

$$\text{MAX}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) = \text{MAX}(\mathcal{F}_1) \oplus \text{MAX}(\mathcal{F}_2).$$

Beweis

' \subseteq ': $X \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ bedeutet $X = C_1 \cup C_2, C_1 \in \mathcal{F}_1, C_2 \in \mathcal{F}_2$.

Wäre $C_1 \notin \text{MAX}(\mathcal{F}_1)$, so existierte $\overline{C_1} \in \mathcal{F}_1, C_1 \subset \overline{C_1}$ und dann

$X \subset \overline{C_1} \cup C_2 (\in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \not\Leftarrow$, analog für C_2 .

' \supseteq ' : $X \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1) \vee \text{MAX}(\mathcal{F}_2)$ bedeutet $X = B_1 \cup B_2$, $B_1 \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1)$, $B_2 \in \text{MAX}(\mathcal{F}_2)$. Angenommen es existierten $C_1 \in \mathcal{F}_1$, $C_2 \in \mathcal{F}_2$ so, dass $X \subset C_1 \cup C_2$. Aus $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ folgte, dass $B_1 \subseteq C_1$, $B_2 \subseteq C_2$.

Eine der beiden Inklusionen müsste daher, im Widerspruch zur Herkunft der B_i , eine echte Teilmengenbeziehung sein.

■

1.1.3 Derivate von Mengensystemen

Abschnitte und Minoren

Von einem k -**Abschnitt** $\mathcal{F}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, von \mathcal{F} ist die Rede, wenn nur die Mengen mit höchstens k Elementen herausgeklaut werden:

$$\mathcal{F}^{(k)} = \{X \in \mathcal{F} \mid |X| \leq k\}.$$

Zieht man es vor, nur einen Teilbereich eines Mengensystems \mathcal{F} zu betrachten, so gibt es dafür Begriffskategorien, wenn dieser Teil in Bezug zu einer bestimmten Menge steht.

$\mathcal{F}|_T$ bezeichnet die **Restriktion** von \mathcal{F} auf die in T enthaltenen Mengen:

$$\mathcal{F}|_T = \{X \in \mathcal{F} \mid X \subseteq T\}.$$

$\mathcal{F} \setminus T$ ist die **Löschung** von $T \subseteq E$ aus \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} \setminus T = \{X \in \mathcal{F} \mid X \cap T = \emptyset\}.$$

Sie gleicht der Restriktion von \mathcal{F} auf $E \setminus T$.

\mathcal{F}/T beschreibt die **Kontraktion** von $T \subseteq E$:

$$X \in \mathcal{F}/T \iff X \cap T = \emptyset \text{ und } X \cup B \in \mathcal{F}, \text{ } B \text{ Basis von } T.$$

Restriktion und Kontraktion sind jeweils kommutativ sowie miteinander vertauschbar. Im Kontext der später diskutierten, für die Optimierung relevanten Mengensysteme bezeichnet man \mathcal{F}' als einen **Minor** von \mathcal{F} , wenn es durch mehrere Kontraktionen und Restriktionen aus \mathcal{F} hervorgegangen ist.

Monotone Hülle

Die **monotone Hülle** (gelegentlich schlicht **Hülle**) eines Mengensystems $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ sammelt alle Teilmengen von Mengen aus \mathcal{F} ein und hat daher die Gestalt $\mathcal{H}(\mathcal{F}) := \{X \subseteq E \mid X \subseteq Y, Y \in \mathcal{F}\}$. Sie ist das kleinstmögliche Unabhängigkeitssystem,³ welches \mathcal{F} enthält

Lemma 1.3.

- (1) Jede Menge aus der Hülle eines Mengensystems ist in einer maximalen Menge desselben enthalten.
- (2) Die maximalen Mengen eines Mengensystems bestimmen eindeutig seine Hülle und umgekehrt:

$$\text{MAX}(\mathcal{F}_1) = \text{MAX}(\mathcal{F}_2) \iff \mathcal{H}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{F}_2).$$

- (3) Die maximalen Mengen eines Mengensystems sind auch genau diejenigen ihrer Hülle: $\text{MAX}(\mathcal{H}(\mathcal{F})) = \text{MAX}(\mathcal{F})$.

Beweis

(1) : Für $X \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ findet man $Y \in \mathcal{F}$, $X \subseteq Y$.

Nach Bem. 1.1 wiederum findet sich ein $B \in \text{MAX}(\mathcal{F})$, $Y \subseteq B$.

(2) : ' \Rightarrow ' : $X \in \mathcal{H}(\mathcal{F}_1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exists_{B_1 \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1)} X \subseteq B_1$, und wegen $B_1 \in \mathcal{F}_2$

ist $X \in \mathcal{H}(\mathcal{F}_2)$. Genauso verfährt man auch andersherum.

' \Leftarrow ' : Jedes $B \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1)$ ($\subseteq \mathcal{H}(\mathcal{F}_1)$) ist nach Vor. in $\mathcal{H}(\mathcal{F}_2)$.

Daher $\exists_{\overline{B} \in \text{MAX}(\mathcal{F}_2)} B \subseteq \overline{B}$ wegen (1). Umgekehrt ex. entsprechend

$B_1 \in \text{MAX}(\mathcal{F}_1)$ mit $\overline{B} \subseteq B_1$. Die jeweilige Maximalität bewirkt

$B = \overline{B} = B_1$ und also $B \in \text{MAX}(\mathcal{F}_2)$. Erneut lässt sich andersherum

gleichermaßen argumentieren.

³siehe 2.2.1

(3) : Eine \mathcal{F} -maximale Menge kann keine echte Obermenge in der Hülle haben, weil diese wiederum eine Obermenge in \mathcal{F} hätte. Eine maximale Menge der Hülle kann keine echte Obermenge in \mathcal{F} haben, weil diese sich auch selbst in der Hülle befände. ■

Duale Systeme

Das **Komplemente-Dual** eines Mengensystems \mathcal{F} wird abgekürzt mit $\mathcal{F}^{(*)}$ und definiert durch

$$\mathcal{F}^{(*)} := \{E \setminus X \mid X \in \mathcal{F}\},$$

was $\mathcal{F}^{(*)^{(*)}} = \mathcal{F}$ mitträgt. Obwohl diese Dualität in mancherlei Hinsicht die eher natürliche für viele Mengensysteme ist, wird die Ergiebigkeit des Matroid-Duals⁴ hier dadurch gewürdigt, dass der umständlichere Name dieser einfacher definierten Dualität zuteil wird.

Der Verallgemeinerung des Matroid-Duals wird also die Bezeichnung **Dual** \mathcal{F}^* eines Mengensystems \mathcal{F} reserviert, definiert als monotone Hülle der Menge der Komplemente seiner Basen:

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{F})^{(*)}) = \mathcal{H}(\{B \mid E \setminus B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}).$$

Im Allgemeinen wird $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ so verfehlt.

Bemerkung 1.4.

Die maximalen Mengen eines Mengensystems sind die Komplemente der minimalen Mengen seines Komplemente-Duals und umgekehrt:

$$\text{MAX}(\mathcal{F}) = \text{MIN}(\mathcal{F}^{(*)})^{(*)} \quad \text{und} \quad \text{MIN}(\mathcal{F}) = \text{MAX}(\mathcal{F}^{(*)})^{(*)}.$$

Beweis

Die Behauptungen verbergen sich hinter $X \subseteq Y \Leftrightarrow (E \setminus Y) \subseteq (E \setminus X)$. ■

⁴siehe 2.2.5

1.1.4 Die symmetrische Differenz Δ

Der Mengenoperator Δ ⁵ operiert auf einem Paar von Mengen mit der Absicht, die Elemente zu identifizieren, die in genau einer der beiden Mengen enthalten sind. Er bildet eine **symmetrische Differenz** von $X \subseteq E$ und $Y \subseteq E$:

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Alternativ lässt sich Δ tatsächlich als Differenz betrachten:

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Sofort ersichtlich und dem Begriff innewohnend ist die Kommutativität dieser Operation: $X \Delta Y = Y \Delta X$. Die am einfachsten mit Hilfe eines Venn-Diagramms nachzuvollziehende Gleichung:

$$(X \Delta Y) \Delta Z = (X \cap Y \cap Z) \cup (X \setminus (Y \cup Z)) \cup (Y \setminus (X \cup Z)) \\ \cup (Z \setminus (Y \cup X)), \quad Z \subseteq E$$

überzeugt mit ihrer symmetrischen Gestalt von der Assoziativität des Δ , was eine Klammersetzung wie oben von hier ab überflüssig macht. Offensichtlich ist $X \Delta \emptyset = X$ und $X \Delta X = \emptyset$, was die leere Menge zum neutralen Element macht und jeder Menge ein Inverses ermöglicht.

Somit definiert die Menge aller Teilmengen von E , $\mathcal{P}(E)$, bezüglich des Operators nützlicherweise eine abelsche Gruppe $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ der Ordnung 2.

Bezieht man den Schnitt als ebenso kommutativen wie assoziativen Operator mit E als neutralem Element in die Betrachtungen ein, dann entpuppt sich $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ gar als kommutativer Ring, weil sich in

$$\begin{aligned} X \cap (Y \Delta Z) &= (X \cap (Y \setminus Z)) \cup (X \cap (Z \setminus Y)) \\ &= ((X \cap Y) \setminus Z) \cup ((X \cap Z) \setminus Y) \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.5}}{=} ((X \cap Y) \setminus (X \cap Z)) \cup ((X \cap Z) \setminus (X \cap Y)) \\ &= (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) \end{aligned}$$

die Distributivität des kommutativen Halbrings $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ zum Nachweis

⁵als griechisches Delta

der Distributivität der untersuchten Struktur verwenden lässt. Die algebraischen Begriffe Gruppe und Ring werden ebenfalls in [vdW71] behandelt.

Das **Twisten** eines Mengensystems \mathcal{F} mit einer Menge $N \subseteq E$ resultiert im **getwisteten Mengensystem**

$$\mathcal{F} \Delta N = \{Y \Delta N \mid Y \in \mathcal{F}\},$$

das die symmetrischen Differenzen aller Mengen von \mathcal{F} mit einer speziellen Menge $N \subseteq E$ versammelt. Das Twisten führt in allen Mengen des Mengensystems zum kompletten Austausch der Elemente aus N .

1.2 Nützliche Mengenlehre

Die nun angeführten Gleichungen sind nützliche Werkzeuge bei der Durchführung der späteren Analysen.

Lemma 1.5.

Für Mengen $T, X, Y \subseteq E$ gilt

$$(1) (X \setminus Y) \cap T = (X \cap T) \setminus Y = (T \setminus Y) \cap X = (T \setminus Y) \cap (X \cap T).$$

$$(2) T \setminus (Y \setminus X) = (T \setminus Y) \cup (X \cap T).$$

$$(3) |X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|.$$

$$(4) X \cap Y = \emptyset \Rightarrow (X \cup Y) \Delta T = X \Delta Y \Delta T.$$

$$(5) (E \setminus X) \Delta T = E \setminus (X \Delta T) = X \Delta (E \setminus T).$$

$$(6) (E \setminus X) \Delta (E \setminus Y) = X \Delta Y.$$

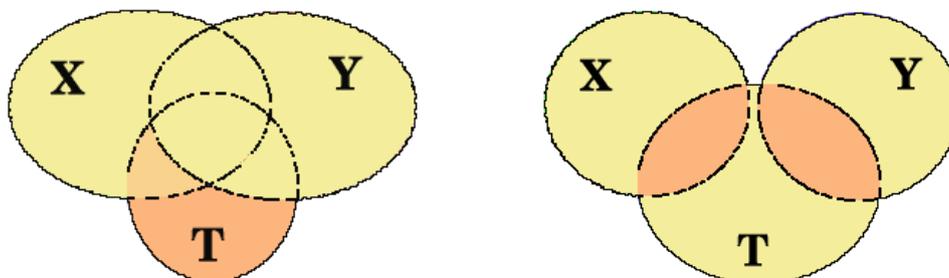
$$(7) \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}^{(*)} = \mathcal{F}_1^{(*)} \oplus \mathcal{F}_2^{(*)}$$

(Komplementbildung in der jeweiligen Grundmenge).

$$(8) (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)^{(*)} = \mathcal{F}_1^{(*)} \cup \mathcal{F}_2^{(*)}.$$

Beweis

Gleichungen zum Thema Mengen sind oftmals optisch am eingängigsten:



$$(1) \text{ und } (2): (X \setminus Y) \cap T, T \setminus (Y \setminus X) \qquad (4): (X \cup Y) \Delta T$$

Abbildung 1.1: Venn-Diagramme

$$(5): y \in (E \setminus X) \Delta T \Leftrightarrow y \in (E \setminus X) \setminus T \text{ oder } y \in T \setminus (E \setminus X) \\ \Leftrightarrow y \in E \setminus (X \cup T) \text{ oder } y \in T \cap X,$$

$$\text{ebenso } y \in E \setminus (X \Delta T) \Leftrightarrow y \notin X \Delta T \\ \Leftrightarrow y \in E \setminus (T \cup X) \text{ oder } y \in T \cap X.$$

Da diese Feststellung symmetrisch in T und X ist, muss zur Übertragung auf den letzten Term nicht weiter argumentiert werden.

(6) folgt direkt aus (5).

$$(7): \mathcal{F} \subseteq E, \mathcal{F}_1 \subseteq E_1, \mathcal{F}_2 \subseteq E_2, E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$

$$X \in \mathcal{F}^{(*)} \Leftrightarrow E \setminus X \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (E_1 \setminus X) \cup (E_2 \setminus X) \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow (E_1 \setminus X) \cup (E_2 \setminus X) \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$$

$$\Leftrightarrow (E_1 \setminus X) \in \mathcal{F}_1 \text{ und } (E_2 \setminus X) \in \mathcal{F}_2$$

$$\Leftrightarrow X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1^{(*)} \text{ und } X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2^{(*)}$$

$$\Leftrightarrow X = (X \cap E_1) \cup (X \cap E_2) \in \mathcal{F}_1^{(*)} \oplus \mathcal{F}_2^{(*)}.$$

(3) und (8) bedürfen keiner Anstrengungen. ■

1.3 Beschreibende Funktionen

1.3.1 Rang

Allen Teilmengen X der Grundmenge E lässt sich ein **Rang** zuordnen, der durch das Mengensystem \mathcal{F} definiert wird:

$$r(X) = r_{\mathcal{F}}(X) = \max \{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}.$$

Es ist sinnvoll, hierbei $\emptyset \in \mathcal{F}$ vorauszusetzen, um Verrenkungen zu vermeiden. Dann ergibt sich leicht, dass r als Funktion 2^E nach \mathbb{Z}_+ abbildet, $r(X)$ nach oben beschränkt ist durch $|X|$, $X \subseteq E$, und die Monotonie $r(X) \leq r(Y)$ für $X \subseteq Y \subseteq E$. Das Mengensystem \mathcal{F} wird so unzweideutig durch r charakterisiert:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid r(X) = |X|\}.$$

Der Rang des Mengensystems $r(\mathcal{F})$ soll ein Synonym für den Rang der Grundmenge $r(E)$ sein.

1.3.2 Hüllenoperator

Mit Hilfe dieser Rangfunktion lassen sich **abgeschlossene** Mengen bezüglich \mathcal{F} in $\mathcal{P}(E)$ ausmachen. Es sind diejenigen, denen kein weiteres Element zugefügt werden könnte, ohne dass der Rang anstiege.

Der **Hüllenoperator** $\sigma : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ beschreibt den **Abschluss** einer Menge X durch

$$\sigma(X) = \{y \in E \mid r(X \cup \{y\}) = r(X)\},$$

so dass sich die abgeschlossenen Mengen als Fixpunkte herauskristallisieren ($\sigma(X) = X$). Es gilt die Eigenschaft $X \subseteq \sigma(X)$. Zudem beschreibt auch der Hüllenoperator das Mengensystem in eindeutiger Weise.

Bemerkung 1.6.

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid \forall_{x \in X} x \notin \sigma(X \setminus x)\}.$$

Beweis

Ist $X \in \mathcal{F}$, dann würde $x \in X \cap \sigma(X \setminus x)$ bedeuten, dass $r(X) = r(X \setminus x) \leq |X \setminus x| = |X| - 1 \nlessdot$.

Ist $X \notin \mathcal{F}$, dann existiert eine maximale Menge $Y \subset X$ in \mathcal{F} , $r(X) = |Y|$ und für $x \in X \setminus Y$ ist $r(X) \geq r(X \setminus x) \geq r(Y) = |Y| = r(X)$, also $x \in \sigma(X \setminus x)$. ■

Über die abgeschlossenen Mengen lässt sich eine Beziehung zwischen zwei Mengensystemen, die in der gleichen Grundmenge residieren, herstellen. Definiert wird, dass ein Mengensystem (E, \mathcal{F}_1) als **starkes Abbild** vom Mengensystem (E, \mathcal{F}_2) bezeichnet wird, symbolisch $\mathcal{F}_2 \hookrightarrow \mathcal{F}_1$, wenn jede abgeschlossene Menge bezüglich \mathcal{F}_1 auch eine solche bezüglich \mathcal{F}_2 ist. Diese Beziehung entfaltet ihre Bedeutung auch erst im Zusammenhang mit Matroiden.⁶

1.3.3 Δ -Rang

Eine weitere beschreibende Funktion, die ihre wichtigste Aufgabe im Bereich der Δ -Matroide⁷ findet, kann für allgemeine Mengensysteme angegeben werden. Sie operiert auf Paaren von disjunkten Mengen in $\mathcal{P}(E)$, nämlich auf

$$3^E = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \cap Y = \emptyset\}.$$

Der Δ -Rang $r^\Delta = r_{\mathcal{F}}^\Delta$ von (X, Y) in einem Mengensystem \mathcal{F} kann anschaulich definiert werden als Versuch, mit einem Mitglied aus \mathcal{F} möglichst viele Elemente der ersten und zugleich möglichst wenige der zweiten Menge mitzunehmen:

$$r^\Delta : 3^E \longrightarrow \mathbb{N}, \quad r^\Delta(X, Y) = \max_{F \in \mathcal{F}} (|F \cap X| - |F \cap Y|).$$

Das gibt dem Maximum eine erhöhte Anzahl Möglichkeiten, will meinen

Bemerkung 1.7.

Für $X \subseteq E$ ist für alle $Y \subseteq E \setminus X$ stets

$$r(X) \leq r^\Delta(X, Y).$$

⁶siehe 2.2.5

⁷siehe 2.4

Beweis

$X \subseteq E$, $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq X$, $r(X) = |F|$. Dann ist
 $r(X) = |X \cap F| - |Y \cap F| \leq r^\Delta(X, Y)$ für alle $Y \subseteq E \setminus X$.

■

Auch der Δ -Rang beschreibt ein Mengensystem eindeutig, denn evident besteht es als

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid r^\Delta(X, E \setminus X) = |X|\}.$$

Kapitel 2

Mengensysteme und Algorithmen

Ein Mittel, diskrete Mathematik zur Anwendung zu bringen, insbesondere bei elektronischer Unterstützung, stellen die Algorithmen dar. Sie geben schematisierte, in Einzelschritte zerlegte Lösungsverfahren für eine Aufgabe vor und können als Vorschrift genutzt werden, diese Lösungsverfahren auf Rechenautomaten zu implementieren. Die Mathematik dient dazu, Gewähr für die korrekte Funktionsweise oder auch für die Effizienz zu liefern.

Darum sind solche Strukturen bzw. Mengensysteme besonders interessant, die mit effizienten Algorithmen in Verbindung gebracht werden können, indem sie diese unterstützen oder überhaupt ermöglichen. In diesem Kapitel werden einige ausgewählte Mengensysteme vorgestellt, die eine Affinität zu besonders einfachen Algorithmen aufweisen.

2.1 Greedy-Algorithmen, Laufzeiten und Orakel

Einige Problemstellungen, die nach Optimierung auf Mengensystemen verlangen, lassen sich bereits durch Verfahren lösen, die einem Problemlösungsbeauftragten vermutlich auch unmittelbar als erste Idee gekommen wären. Zu diesen heuristisch motivierten Verfahren gehören die „**Greedy**“-Algorithmen. Nicht exakt definiert, beschreibt der Begriff solche Verfahren, die sich iterativ lediglich in ihrer unmittelbaren lokalen Umgebung nach

einer Lösungsverbesserung umsehen und keine annullierenden Schritte vornehmen, um an einem bereits begangenen Punkt andere Wege einzuschlagen („Backtracking“).

Solche Optimierungsalgorithmen sind von Natur aus effizient in Hinsicht ihres Zeitverbrauchs. Das Kriterium hierzu wird als „Laufzeit“ bezeichnet und im Allgemeinen in Abhängigkeit von einer Ausgangsgröße gemessen, die in vernünftiger Art und Weise die Quantität der Eingabe, das heißt der Daten, auf denen gerechnet wird, repräsentiert. Im Folgenden soll einleuchtenderweise $n = |E|$ diese Bezugsgröße sein. Das Gütesiegel „effizient“ wird hier synonym dazu verwendet, dass polynomielle Laufzeit erzielt werden kann. Das soll bedeuten, dass ein Polynom abhängig von n angegeben werden kann, dessen Wert für die Eingabegröße jedes derartigen Problems mindestens so groß ist, wie die Anzahl der notwendigen elementaren Schritte des Lösungsverfahrens.

Auf irgendeine Art muss ein gegebenes Mengensystem beschreibbar sein, denn kein Algorithmus kommt umhin, während seiner Tätigkeit eine Antwort auf die Frage zu verlangen, ob eine Menge Teil des Systems ist oder nicht, sei die Frage so direkt oder in abgewandelter Form gestellt. Für konkret vorliegende Probleme lassen sich solcherlei Fragen meistens unvermittelt oder mit geringem Aufwand beantworten, andererseits sind wiederum Mengensysteme vorstellbar, die dazu zeitraubende Prozeduren verlangen.

In dieser Arbeit werden Mengensysteme in weitestgehend abstrakter Weise behandelt. Das hat zur Folge, dass auch die Beschreibung des Mengensystems aus Sicht eines Algorithmus im Abstrakten verbleiben muss. Dennoch können Laufzeituntersuchungen angestellt werden, indem man die Laufzeit eben weitestgehend von der oben genannten Fragestellung abkoppelt. Dies geschieht durch die Verwendung von „Orakeln“.

Man setzt damit voraus, dass eine geeignete Fragestellung sofort, das heißt in konstanter Zeit (bezogen auf die Problemgröße) zu beantworten ist. Dies erweist sich für die allermeisten realen Umsetzungen als angemessen. Im Einzelfall können diese Orakel aber, so wie die Fragestellung, variieren.¹ In dieser Abhandlung wird Wert darauf gelegt, eine möglichst kurze Laufzeit in Abhängigkeit vom „gewöhnlichen Mengensystem-Orakel“ zu erreichen. Das bedeutet, nicht mehr vorauszusetzen, als dass man für die Frage „ $X \in \mathcal{F}$?“ für eine vorliegende Menge X bezüglich eines Mengensystems \mathcal{F} konstanten Zeitaufwand ansetzen darf. Dort, wo ein Greedy-Algorithmus nach einem leistungsfähigeren Orakel verlangt, wird darauf hingewiesen. Es wird hier u.a.

¹siehe 2.3.3, 2.4.2

beschrieben, wie ein anspruchsvolleres Orakel selbst wieder als Optimierungsproblem formuliert werden kann und dann unter günstigen Umständen auf Grundlage des gewöhnlichen Mengensystem-Orakels simulierbar wird.

Praktisch reichte es aus, wenn mit einem weiteren effektiven Rechenverfahren die Mitgliedschaft einer Menge im System überprüft werden könnte, um die Laufzeit insgesamt nicht zu beeinträchtigen. Da real zu bearbeitende Mengensysteme vorwiegend implizit aus der Kodierung eines passenden Modells für das zu untersuchende Problem hervorgehen, sollte ein solches Orakel in der Praxis meist als effektive Subprozedur realisiert werden können. Eine explizite Liste der Mengen oder auch nur der Basen (z.B. beim Matroid²) kann leicht exponentielle Größe erreichen und ist darum meistens schlecht zu handhaben.

Sehr ausführliche Untersuchungen zu Laufzeiten und der Komplexität bekannter und denkbarer Problemstellungen sind Gegenstand der Komplexitätstheorie und nachzulesen in [GJ79].

Die Zweifel im Zusammenhang mit Greedy-Algorithmen bestehen eher darin, ob ein solches Verfahren auch tatsächlich zu einer optimalen Lösung findet. Es erweist sich, dass das Gelingen für alle diese Algorithmen auf Mengensysteme beschränkt bleibt, die gewisse, von der Spezifizierung des Greedy im Einzelfall abhängige Strukturen vorweisen können. Die Abschnitte dieses Kapitels stellen einige wohlbekanntere Klassifizierungen von Mengensystemen vor, die derart angenehme Strukturen zu eigen haben.

Das ausschließliche Interesse dieser Arbeit liegt in der Betrachtung des Problems, die optimale Menge bezüglich einer Gewichtsfunktion auf E , $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ im Sinne der Summe von Einzelgewichten $c(X) = \sum_{x \in X} c(x)$, $X \subseteq E$ ($c(\emptyset) = 0$) zu ermitteln. Eine solche Zielfunktion wird als linear bezeichnet und der Vorgang „Lineare Optimierung“ genannt, weil die Einbettung des Vorgangs in den Vektorraum \mathbb{R}^E einer linearen Optimierung nach gebräuchlicher Auffassung gleichkommt.³

2.2 Matroide

Wird das Problem eben darin gesehen, lineare Optimierung durchzuführen, dann erweist sich eine Sorte von Mengensystemen, nämlich die der Matroide,

²siehe 2.2

³siehe Kap. 5

als besonders günstige Grundlage, weil sie mit einem besonders einfachen Greedy-Algorithmus korrespondiert.

Dieser fügt einfach (bei Maximierung) das wertvollste Element zur aktuellen Menge hinzu, falls die so entstehende Menge zum Mengensystem gehört. Das erweist sich als genau passend für Matroide.

Die klassischen Matroide entstammen der Abstrahierung von linearer Unabhängigkeit bzw. aus der Graphentheorie. Ihre „Erfindung“ wird H. Whitney⁴ zugeschrieben. Etwa zeitgleich entwickelte Birkhoff⁵ etwas entsprechendes im Zusammenhang mit der Verbandstheorie. Matroide und ihre Anwendungen gehören heute, vor allem wegen ihrer harmonischen Beziehung zum Greedy-Algorithmus, zu den meistbehandelten Objekten der kombinatorischen Optimierung seit Tutte⁶ sie ins Licht setzte. Ausführliche Darstellungen der Matroid-Theorie befinden sich in [Wel76] und [Oxl92].

2.2.1 Unabhängigkeitssysteme

Motiviert durch wichtige Termini im Zusammenhang mit Körpern und Vektorräumen heißt ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ **Unabhängigkeitssystem**, wenn

$$Y \in \mathcal{F}, X \subseteq Y \implies X \in \mathcal{F}.$$

Die darin befindlichen Mengen werden in entsprechendem Kontext **unabhängige** Mengen genannt.

Die Aussagen zweier trivialer Bemerkungen werden später noch benötigt.

Bemerkung 2.1.

Im Unabhängigkeitssystem sind Basen und maximale Mengen ein und dasselbe: $\text{MAX}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Beweis

Eine Basis B , die nicht maximale Menge wäre, besäße eine Obermenge Y , die im Unabhängigkeitssystem wiederum zwangsläufig irgendein, dem Mengensystem zugehöriges $B \cup x$, $x \in E \setminus B$, enthielte. ■

⁴vgl. [Whi35]

⁵vgl. [Bir35]

⁶vgl. [Tut58]

Bemerkung 2.2.

Ein Unabhängigkeitssystem \mathcal{F} ist monotone Hülle seiner Basen:
 $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{F}))$.

Beweis

Einerseits ist nach Bem. 1.1 und Bem. 2.1 das Mengensystem \mathcal{F} Teilmenge von $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{F}))$, andererseits ist jede Teilmenge einer Basis auch in \mathcal{F} , eben weil \mathcal{F} ein Unabhängigkeitssystem vorstellt. ■

In Unabhängigkeitssystemen besteht eine Beziehung zwischen Rang und Δ -Rang:

Bemerkung 2.3.

In einem Unabhängigkeitssystem \mathcal{F} gilt für $X \subseteq E$

$$r_{\mathcal{F}}(X) = r_{\mathcal{F}}^{\Delta}(X, Y) \text{ für alle } Y \subseteq E \setminus X.$$

Beweis

Die Vorgabe lautet $X, Y \subseteq E$, $X \cap Y = \emptyset$. Nun nehme man $C \in \mathcal{F}$, $r^{\Delta}(X, Y) = |X \cap C| - |Y \cap C|$. Es ist dann auch $X \cap C (\subseteq C) \in \mathcal{F}$. Also $r(X) \geq |X \cap C| \geq r^{\Delta}(X, Y)$. Die konträre Abschätzung stammt aus Bem. 1.7. ■

2.2.2 Axiomatisierung

Ein Unabhängigkeitssystem $\mathcal{F} \neq \emptyset$ heißt **Matroid**, wenn die **Augmentierungseigenschaft** gültig ist:

$$X, Y \in \mathcal{F}, |X| < |Y| \implies \exists_{y \in Y \setminus X} X \cup y \in \mathcal{F}. \quad (\text{AE})$$

Lemma 2.4.

Eine zu den zuvor aufgestellten Matroid-Bedingungen äquivalente Forderung an ein Mengensystem, genauer an dessen Basismenge $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$, ist das **Austauschaxiom**, welches lautet

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \setminus B_2 \implies \exists_{y \in B_2 \setminus B_1} B_1 \setminus x \cup y \in \mathcal{B}. \quad (\text{AA})$$

Präziser formuliert stimmt einerseits diese Aussage für die Basismenge eines Matroids und andererseits ist jedes Mengensystem \mathcal{B} , welches das Austauschaxiom erfüllt, Basismenge eines Matroids, also (Bem. 2.2) von $\mathcal{H}(\mathcal{B})$. Insbesondere sind alle Mengen in \mathcal{B} von gleicher Kardinalität.

Beweis: [KLS91], S.10

Folgender Hilfssatz, der allgemein für Mengensysteme mit der Augmentierungseigenschaft (AE) Gültigkeit besitzt und die mehrstufige Augmentierung behandelt, wird fortan häufig benötigt.

Lemma 2.5.

Für $X, Y \in \mathcal{M}$ (Matroid), $|X| \leq |Y|$, existiert eine Menge $C \subseteq Y \setminus X$ so, dass $X \cup C \in \mathcal{M}$ und $|X \cup C| = |Y|$ gelten.

Beweis

Bei $|X| = |Y|$ wähle $C = \emptyset$. Beim induktiven Vorgehen über $n = |Y| - |X|$, $n \geq 1$, verwendet man die Augmentierungseigenschaft (AE).

$$\begin{aligned} \exists_{y \in Y \setminus X} X \cup y \in \mathcal{M}, |Y| - |X \cup y| = n - 1 \\ \Rightarrow \exists_{C' \subseteq Y \setminus (X \cup y)} X \cup \underbrace{y \cup C'}_{=: C} \in \mathcal{M}, |X \cup C| = |Y|, C \subseteq Y \setminus X \end{aligned}$$

■

Eine nützliche Eigenschaft der Matroid-Basen, die die Aussage des Austauschaxioms verfeinert, sei noch hintangestellt.

Lemma 2.6.

Für Mengen X, Y aus einem Matroid \mathcal{M} , die von gleicher Anzahl sind, also insbesondere für Basen, und ein Element $x \in X \setminus Y$ gibt es folgende Möglichkeit des Austauschs:

$$\exists_{y \in Y \setminus X} X \setminus x \cup y \in \mathcal{M} \text{ und } Y \setminus y \cup x \in \mathcal{M}.$$

Beweis

Es liege $x \in X \setminus Y$ vor.

$$K := \{k \in Y \setminus X \mid Y \setminus k \cup x \in \mathcal{M}\}. \quad K \subseteq Y \setminus X$$

$\Rightarrow Z := (X \cap Y) \cup K (\subseteq Y) \in \mathcal{M}$ und $|Z| \leq |Y| = |X|$. Lemma 2.5 liefert $C \subseteq X \setminus Z = X \setminus Y$, $Z \cup C \in \mathcal{M}$, $|Z \cup C| = |Y| = |X|$.

Wäre $x \in C$, so $Z \cup x \in \mathcal{M}$, $|Z \cup x| \leq |Z \cup C| = |Y|$. Es existierte

$$D \subseteq Y \setminus (Z \cup x) \subseteq Y \text{ mit } Z \cup D \cup x \in \mathcal{M}, |Z \cup D \cup x| = |Y|.$$

Wegen $Z \cup D \subseteq Y$ müsste übereinstimmen $Z \cup D \cup x = Y \setminus k_0 \cup x$,

$k_0 \in Y \setminus (Z \cup D) \subseteq Y \setminus K$, da $K \subseteq Z$, aber k_0 müsste in K sein. ζ

Somit $x \notin C$, ergo $x \notin Z \cup C$. $|X \setminus x| = |Z \cup C| - 1 \stackrel{(AE)}{\Rightarrow} X \setminus x \cup y \in \mathcal{M}$,
mit einem $y \in (Z \cup C) \setminus X \stackrel{C \subseteq X}{=} K$. Demnach ist auch $Y \setminus y \cup x \in \mathcal{M}$.

■

2.2.3 Beispiele

Das eine traditionelle Beispiel identifiziert alle linear unabhängigen Vektormengen eines Vektorraums als Matroid. Gleichwertig dazu ist die Definition der **linearen Matroide** als Spaltenindexmengen von linear unabhängigen Spaltenvektoren einer vorliegenden Matrix, wenn man im Finiten verbleibt.

Das andere klassische Beispiel ist dasjenige der **graphischen Matroide**, wo die Grundmenge die Kantenmenge E eines Graphen G ist und die Kantenmengen aller kreisfreien kanteninduzierten Untergraphen ein Matroid $\mathcal{M}(G)$ bilden. Diejenigen darunter, die G aufspannen, sind die Basen. Da Graphen in dieser Arbeit einige Male Erwähnung oder Verwendung finden, wird für eine Einführung in die Graphentheorie auf [Bol79] und [Ber85] verwiesen.

- I) Ein explizit notiertes Matroid-Mengensystem wäre $\widetilde{\mathcal{M}}$,
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{array}{cccccc} \{1, 2, 3\} & \{1, 2, 4\} & \{2, 3, 5\} & \{2, 4, 5\} & & \\ \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & \{2, 3\} & \{2, 4\} & \\ & \{2, 5\} & \{3, 5\} & \{4, 5\} & & \\ \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5\} & \\ & & & \emptyset & & \end{array}$$

- II) Ein anderes einfaches Beispiel sei zwecks späterer Verwendung noch angefügt mit $\widehat{\mathcal{M}}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{cccc}
 \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\
 \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\
 & & \emptyset &
 \end{array}$$

2.2.4 Optimierung

Der **Matroid-Greedy-Algorithmus (MGA)** zum Auffinden von $X \in \mathcal{F}$ mit $c(X) \geq c(Y)$ für alle $Y \in \mathcal{F}$ bei linearer Zielfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hat beispielhaft folgende Gestalt:

1. $X := \emptyset$
2. $T := \{x \in E \setminus X \mid X \cup x \in \mathcal{F}\}$
3. Wenn $T = \emptyset$ STOP
4. Finde $x_0 \in T$ mit $c(x_0) \geq c(y)$ für alle $y \in T$
5. $X := X \cup x_0$
6. Gehe zu 2.

Man kann ihn auch in der Weise formulieren, dass er sich einer Vorsortierung von E gemäß c bedient. Er wirkt zudem auch grundsätzlich für eine beliebige reellwertige Zielfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, indem man die negativ gewichteten Elemente einfach außer Acht lässt. Behandelt man sie dagegen wie zuvor, dann landet der (MGA) bei einer maximalgewichtigen Basis, die aber nicht unbedingt das maximale Gewicht bezogen auf das gesamte Mengensystem einbringt.

Offenkundig besitzt der (MGA) polynomielle Laufzeit, genauer quadratische (verbesserbar mit Vorsortierung), wenn das Vorhandensein des gewöhnlichen Mengensystemorakels gewährleistet ist.

Der Algorithmus steht in einem sehr direkten Verhältnis zu den Matroiden und liefert neuerlich eine Möglichkeit zur Axiomatisierung. Nachdem Kruskal⁷ diesen Zusammenhang auf Graphen in Bezug auf aufspannende Bäume berühmt gemacht hat, stammt die Verallgemeinerung ursprünglich von Rado.⁸

⁷vgl. [Kru56]

⁸vgl. [Rad57]

Satz 2.7.

Ist \mathcal{F} ein Unabhängigkeitssystem und c eine nicht negative Gewichtsfunktion, so liefert (MGA) immer die optimale Lösungsmenge X genau dann, wenn \mathcal{F} ein Matroid ist.

Beweis: [Wel76], Kap. 19

2.2.5 Eigenschaften und Funktionen

Zusätzliche nützliche Erkenntnisse, die Abkömmlinge⁹ von Matroiden betreffen kann man den Kapiteln 4 und 8 in [Wel76] entnehmen:

Proposition 2.8.

- (1) Restriktionen und Kontraktionen auf Matroiden bezüglich beliebiger Teilmengen der Grundmenge bleiben Matroide.
- (2) Ebenso ist der k -Abschnitt eines Matroids ein Matroid.
- (3) Die mengenweise Vereinigung von Matroiden, mitunter als **Summe** von Matroiden bezeichnet, ist ein Matroid.
- (4) Die Menge der Basen-Komplemente erfüllt das Austauschaxiom, also ist das Dual \mathcal{M}^* eines Matroids \mathcal{M} selbst Matroid, $\mathcal{B}(\mathcal{M}^*) = \mathcal{B}(\mathcal{M})^{(*)}$.
- (5) Es gilt $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$ und $r(\mathcal{M}^*) = |E| - r(\mathcal{M})$.

Rang und Submodularität

Da alle Basen von identischer Kardinalität $r(E)$ sind,¹⁰ beschreibt diese Zahl den Rang des Matroids $r(\mathcal{M})$. Zusätzlich zu Monotonie und Beschränktheit muss der Matroid-Rangfunktion¹¹ r attestiert werden, dass sie keine großen Sprünge machen kann:

$$r(X) \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 1, \quad X \subseteq E, \quad y \in E.$$

⁹siehe 1.1.3

¹⁰siehe Lemma 2.4

¹¹siehe 1.3.1

Als ergiebiger Ausgangspunkt einer Verallgemeinerung der Matroid-Theorie zeigte sich eine Eigenschaft der Rangfunktion, die **Submodularität**, die ebenfalls geeignet ist, Matroide zu kennzeichnen.

Eine Funktion $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ wird als **submodular** bezeichnet, wenn

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y) \quad \forall X, Y \subseteq E \quad .$$

Die Bedeutung submodularer Funktionen in der diskreten Mathematik, die der der konvexen bzw. konkaven Funktionen im kontinuierlichen Bereich ähneln, beschreiben Lovász¹² und Fujishige.¹³ Sie sind eng an die Matroide gebunden durch den

Satz 2.9.

Eine nicht negative, ganzzahlwertige Funktion f auf $\mathcal{P}(E)$, beschränkt durch $f(X) \leq |X|$, $X \subseteq E$ und monoton $f(X) \leq f(Y)$, $X \subseteq Y \subseteq E$ ist genau dann submodular, wenn sie Rangfunktion eines Matroids auf E ist.

Beweis: [Wel76], Kap.8

Hüllenoperator und Verbände

Auch der Hüllenoperator manifestiert eine Brücke zu einer anderen Axiomatisierung der Matroide, die dem Gebiet der Verbandstheorie entstammt.

Er ist¹⁴, wenn vom Matroid induziert, monoton ($\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$ für $X \subseteq Y \subseteq E$), erfüllt die Steinitz-MacLane-Austausch-Eigenschaft,

$$\forall X, Y \subseteq E, x, y \in E \quad y \notin \sigma(X), \quad y \in \sigma(X \cup x) \quad \Rightarrow \quad x \in \sigma(X \cup y),$$

und ist idempotent: $\sigma(\sigma(X)) = \sigma(X)$.

Letzteres bewirkt, dass die abgeschlossenen Mengen den Bildmengen des Operators entsprechen. Diese abgeschlossenen Mengen stellen mit Hilfe der Teilmengenordnung einen geometrischen Verband her, wenn für abgeschlossene $X, Y \subseteq E$ der Schnitt als Infimum und die Hülle der Vereinigung als Supremum gewählt wird. Insbesondere also ist der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Aber Matroide lassen sich über solche Verbände gar definieren.

¹²vgl. [Lov83]

¹³vgl. [Fuj91]

¹⁴vgl. [Wel76], Kap. 1

Satz 2.10.

Jeder geometrische Verband ist isomorph zum Verband abgeschlossener Mengen eines Matroids.

Beweis: [Wel76], Kap. 3

Ohne hier näher darauf einzugehen, was es für einen Verband bedeutet, geometrisch zu sein, sei zum Thema Verbände auf [Bir67] sowie [CD73] verwiesen.

Starke Abbildung

Die Identifizierung von Matroiden mit Verbänden ermöglicht auch die bis dato als natürlichste Art und Weise angesehene Möglichkeit, eine Verbindung zwischen zwei Matroiden gleicher Grundmenge herzustellen. Eine solche Verbindung wird induziert von speziellen Homomorphismen zwischen geometrischen Verbänden, den starken Abbildungen. Die Eigenschaften dieser Abbildung erweisen sich dann als äquivalent zur Forderung aus 1.3.2, die die Definition der starken Abbildung zwischen Matroiden etabliert.¹⁵

Eine andere, formale Charakterisierung findet sich in [KLS91] für den Fall verschachtelter, rang-benachbarter Matroide in der Weise von

Lemma 2.11.

Für Matroide \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 , $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, bei $r(\mathcal{M}_1) + 1 = r(\mathcal{M}_2)$ ist \mathcal{M}_1 ein starkes Abbild von \mathcal{M}_2 genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1), \quad z \in B, \quad x, y \notin B, \quad B \setminus z \cup \{x, y\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)$$

$$\Rightarrow B \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2) \quad \text{oder} \quad B \setminus z \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1).$$

2.2.6 Matroid-Schnitt

Eines der interessantesten Objekte der kombinatorischen Optimierung entsteht, wenn man zwei Matroide zum Schnitt bringt. Der Schnitt ist selbst zwar Unabhängigkeitssystem aber normalerweise kein Matroid, wie das einfachste Beispiel hierzu belegt:

¹⁵vgl. [Wel76], Kap. 17

$$\begin{array}{cccc}
\{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\
& & \emptyset &
\end{array}
\cap
\begin{array}{cccc}
\{1, 2\} & \{1, 4\} & \{2, 3\} & \{3, 4\} \\
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\
& & \emptyset &
\end{array}$$

$$=
\begin{array}{cccc}
\{1, 2\} & \{3, 4\} \\
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} \\
& & \emptyset &
\end{array}$$

Hier war es Edmonds¹⁶, der mit Hilfe von Polyedern die Marken bei der Durchdringung dieser Struktur setzte und die ersten effektiven Algorithmen zur Optimierung in diesem Zusammenhang präsentierte, zunächst, um eine Menge mit maximaler Anzahl im Schnitt zu finden, des weiteren aber auch, um eine bestmögliche Menge für jedwede lineare Gewichtsfunktion zu erlangen.

Er bemerkte, dass die Matrix der untereinander geschriebenen Ungleichungen beider Systeme, die insgesamt für den Schnitt stehen, durch problemkonsistente Manipulation auf total unimodulare Form gebracht werden kann. Das gipfelt in der Aussage, dass alle Ecken jedes Polyeders, das einen Schnitt zweier ganzzahliger Polymatroide¹⁷ repräsentiert, ganzzahlig sind. Direkte Folge davon ist, dass die Ecken vom Schnitt zweier Matroid-Polyeder¹⁸ dem Schnitt der jeweiligen Eckenmengen entsprechen.

Unter Zuhilfenahme des dualen Gleichungssystems entwickelte er einen ersten Algorithmus zum Auffinden einer bestmöglichen Ecke zu einem linearen Optimierungsproblem. Eine anschaulichere Weiterentwicklung des primal-dualen Verfahrens zum Problem gelang A. Frank¹⁹ mit seinem **gewichteten Matroid-Schnitt-Algorithmus**, der hier vorgestellt wird. Dabei sei $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ die Zielfunktion und $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ zwei Matroide.

Da gerichtete Graphen verwendet werden,²⁰ seien noch einige Worte der zugehörigen Terminologie gewidmet:

¹⁶vgl. [Edm70] und [Edm79]

¹⁷siehe 5.1

¹⁸siehe 5.1.2

¹⁹vgl. [Fra81]

²⁰Übersicht in [Ber85]

Wenn \mathcal{E} für die Kantenmenge steht, dann sind dessen Elemente die geordneten Tupel $[x, y]$, $x, y \in V$ ($=$ Knotenmenge). Ein **Pfad** von x_0 nach x_m wird notiert als $p = (x_0, \dots, x_m)$, $x_i \in V$, $0 \leq i \leq m$ unter der Bedingung, dass $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{E}$, $0 \leq i \leq m - 1$. Die **Länge** $\ell(p)$ von p ist dann m . Aus Konsistenzgründen werden Pfade (x_0) der Länge 0 in die Betrachtung integriert. Die Knotenmenge des Pfades p wird geschrieben $V(p) = \{x_0, \dots, x_m\}$. Die Menge der Pfade von x nach y symbolisiert $\Pi(x, y)$, einbezüglich $(x) \in \Pi(x, x)$. Die **Nachbarschaft** $\delta(U)$ von $U \subseteq V$ besteht aus den von dort erreichbaren Knoten: $\delta(U) = \{y \in V \mid \exists x \in U \ \Pi(x, y) \neq \emptyset\}$, also auch $U \subseteq \delta(U)$.

Bezüglich der Matroide sei für eine Menge $I \in \mathcal{M}$ und ein Element $x \in E \setminus I$, das I nicht erweitern kann ($I \cup x \notin \mathcal{M}$) der **Fundamentalkreis** $C(I, x)$ die Versammlung der Elemente, gegen die man x eintauschen darf, hier entsprechend $C_i(I, x) = \{y \in I \cup x \mid I \setminus y \cup x \in \mathcal{M}_i\}$. Dabei soll das bloße Hinschreiben der Menge die oben genannten Vorbedingungen an I und x bereits beinhalten. Per Konvention sei $\min(\emptyset) = \infty$. Die Vorschrift für das, (**MSA**) genannte, Verfahren auf $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ lautet dann:

1. $k := 0$, $I_0 := \emptyset$, $c_1(e) := 0$, $c_2(e) := c(e)$, $e \in E$
2. $m_i := \max \{c_i(x) \mid x \in E \setminus I_k, I_k \cup x \in \mathcal{M}_i\}$,
 $X_i := \{x \notin I_k \mid I_k \cup x \in \mathcal{M}_i, c_i(x) = m_i\}$, $i = 1, 2$
3. Konstruiere einen gerichteten Hilfsgraphen $G = (V, \mathcal{E})$, $V = E$ mit folgenden Kanten: $[x, y] \in \mathcal{E} \Leftrightarrow c_1(x) = c_1(y)$, $y \in C_1(I_k, x)$ oder
 $c_2(x) = c_2(y)$, $x \in C_2(I_k, y)$
4. Wenn $\delta(X_2) \cap X_1 \neq \emptyset$, dann gehe zu 9.
5. Berechne

$$\delta_1 := \min \{c_1(y) - c_1(x) \mid x \in \delta(X_2), y \in C_1(I_k, x) \setminus \delta(X_2)\}$$

$$\delta_2 := \min \{m_1 - c_1(x) \mid x \in \delta(X_2) \setminus I_k, I_k \cup x \in \mathcal{M}_1\}$$

$$\delta_3 := \min \{c_2(y) - c_2(x) \mid x \notin \delta(X_2), y \in C_2(I_k, x) \cap \delta(X_2)\}$$

$$\delta_4 := \min \{m_2 - c_2(x) \mid x \notin \delta(X_2) \cup I_k, I_k \cup x \in \mathcal{M}_2\}$$
6. $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Wenn $\delta = \infty$ dann $I := I_k$, STOP
7. $c_1(x) := c_1(x) + \delta$, $c_2(x) := c_2(x)$ für alle $x \in \delta(X_2)$
8. Gehe zu 2.

9. Nehme einen Pfad \hat{p} von X_2 nach X_1 von minimaler Länge

$$\hat{p} \in \bigcup_{x \in X_2, y \in X_1} \Pi(x, y) \text{ mit } \ell(\hat{p}) = \min \left\{ \ell(p) \mid p \in \bigcup_{x \in X_2, y \in X_1} \Pi(x, y) \right\}$$

10. $I_{k+1} := I_k \Delta V(\hat{p})$, $k := k + 1$

11. Gehe zu 2.

Dabei wird man auf einer Menge $I \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ enden, die maximales Gewicht bezüglich c besitzt. Für die zwischenzeitlich produzierten Mengen I_k ergibt sich eine Größe von $|I_k| = k$ und ebenfalls die Zugehörigkeit zum Schnitt. Entscheidend ist, dass man durch geschickt ausgebaute Kürzeste-Wege-Algorithmen die jeweiligen Mengen und Größen des Hilfsgraphen in polynomieller Zeit bestimmen kann²¹ und daher der Algorithmus (MSA) insgesamt in polynomielltem Zeitrahmen verbleibt. Dies vor allem macht den Matroid-Schnitt als kombinatorisches Objekt untersuchenswert. Das bekannteste Anwendungsbeispiel sind die bipartiten Matchings.²² Es kann nicht gelingen, den Schnitt von mehr als zwei Matroiden in ähnlicher Weise in den Griff zu bekommen, da dies sich als NP-schwer herausgestellt hat.

Das Konzept der Matroide wurde auf vielerlei Arten verallgemeinert, um einen ausgedehnteren Anwendungsbereich abzudecken. Neben den Polymatroiden²³ gehören Greedoide und Δ -Matroide dazu, die weiter unten ausführlicher vorgestellt werden. Außerdem sind zumindest noch die orientierten Matroide zu erwähnen, die zur kombinatorischen Geometrie beitragen. Sie entstehen durch Zuordnung von Orientierungen an die Basen. Dieses Thema wird in [BVS⁺99] behandelt.

2.3 Greedoide

Die schlicht anmutende Vorgehensweise des Schritt-Für-Schritt-Aufbaus einer optimalen Menge, auf der der Greedy-Algorithmus basiert, ist nicht nur auf Matroide anwendbar. Wie Satz 2.7 lehrt, muss dazu jedoch der Bereich der Unabhängigkeitssysteme verlassen werden, wenn weiterhin universelle Resultate bezüglich linearer Optimierung angestrebt werden. Es bietet sich

²¹vgl. [Law75]

²²vgl. [Fai87]

²³siehe Kap. 5

schließlich der Versuch einer Verallgemeinerung von Matroiden an, die die Eigenschaft konserviert, dass jede zulässige Menge auf einem Weg über zulässige Mengen durch Aufstockung, ausgehend von der leeren Menge, erreichbar sein soll:

$$\forall_{X \in \mathcal{F}, X \neq \emptyset} \exists_{x \in X} X \setminus x \in \mathcal{F}$$

Solche Mengensysteme nennt man **hereditär**. Korte und Lovász²⁴ leisteten in der Hauptsache die Pionierarbeit, eine solche Verallgemeinerung mit den Mengensystemen namens Greedoiden zur Diskussion zu stellen.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ist ein **Greedoid**, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- $X, Y \in \mathcal{F}, |X| < |Y| \implies \exists_{y \in Y \setminus X} X \cup y \in \mathcal{F}$ (AE).

Diese Generalisierung der Matroide kommt also auf denkbar simple Art durch bloßes Weglassen der Forderung des Unabhängigkeitssystems zu Stande. Die aus der Matroid-Definition übernommene Augmentierungseigenschaft (AE) ist etwas stärker als die oben vorgetragene Heredität. Alternativ kann man aber auch jene Forderung beibehalten und sich für (AE) auf Mengen benachbarter Größe beschränken, d.h. \mathcal{F} ist Greedoid genau dann, wenn

- \mathcal{F} hereditär.
- $X, Y \in \mathcal{F}, |X| = |Y| - 1 \implies \exists_{y \in Y \setminus X} X \cup y \in \mathcal{F}$.

2.3.1 Erscheinungsformen

Besonders interessant ist das Konstrukt, weil es zusätzlich die Antimatroide umfasst, welche nur die Heredität benötigen, aber zusätzlich Abgeschlossenheit bezüglich Vereinigung vorweisen müssen.

Antimatroide, die als spezielle semimodulare Verbände²⁵ auftreten oder auch als Komplemente-Dual konvexer Geometrien eine kombinatorische Entsprechung der Konvexität etablieren,²⁶ um nur zwei mögliche Zugangsweisen aufzuzählen, stellen in vielerlei Hinsicht ein Gegenkonzept zu den Matroiden

²⁴u.a. [KL83] und [KL84a]

²⁵vgl. [Dil40]

²⁶vgl. [EJ85]

dar. Sie treten insbesondere im Zusammenhang mit Graphen und teilweise geordneten Mengen auf.

Die Greedoide ihrerseits entpuppen sich als Spezialisierung einer anderen Verallgemeinerung von Matroiden²⁷, den Supermatroiden, die auf einer geordneten Grundmenge operieren. Denn einige Erkenntnisse im Bereich der Greedoide kommen nur zum Tragen, wenn statt den Mengensystemen, wie sie hier definiert wurden, etwas allgemeiner Sprachen, das heißt geordnete Mengen, zum Ausgangspunkt der Untersuchungen gemacht werden. Dies geschieht unter anderem bei den „exchange languages“ von Björner²⁸ und bei von Faigle²⁹ definierten Geometrien. Im Kontext dieser Arbeit genügt es, dass die im Folgenden behandelten Erscheinungsformen von Greedoiden im Rahmen der zuvor eingeführten Mengensysteme verbleiben.

Das Auftreten von Greedoiden ist bei der Behandlung von Problemen auf Graphen zu beobachten, betrifft aber auch andere kombinatorische Strukturen. Sie stehen in Beziehung mit Algorithmen und Dekompositionsvorgängen und können sogar definiert werden als die Systeme, auf denen ein Greedy-Algorithmus zum Erfolg kommt, wenn er es mit einer bestimmten Klasse von Funktionen zu tun hat.

Eine Vertiefung hierzu und ausführliche Darstellung des Themas geben Korte, Lovász und Schrader.³⁰ Eine weitere Übersicht findet sich in [BZ92]. Einen Auszug bietet die Auflistung der Eigenschaften im kommenden Abschnitt.

Beispiele

Das vielleicht eingängigste relevante Beispiel sind die branching greedoids als Mengensystem, das die Bäume (Kantenmengen) eines Graphen enthält, die (in der Version auf ungerichteten Graphen) alle einen zuvor fixierten Wurzelknoten enthalten.

Einige elementare Beispiele werden in 2.3.7 vorgestellt.

²⁷vgl. [DIW72]

²⁸vgl. [Bjö85]

²⁹vgl. [Fai79] und [Fai80]

³⁰vgl. [KLS91]

2.3.2 Eigenschaften und Funktionen

Wie bei puren Unabhängigkeitssystemen gleichen auch bei Greedoiden die Basen den maximalen Mengen, was mit Lemma 1.3 zur Folge hat, dass die Hülle durch sie eindeutig beschrieben wird. Es ist im Übrigen möglich, dass die monotone Hülle eines Greedoids kein Greedoid mehr ist ($\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$).

Bemerkung 2.12.

Auch in Mengensystemen, die nur die Augmentierungseigenschaft garantieren können, sind Basen und maximale Mengen eins und zudem alle von gleicher Mächtigkeit. Überhaupt besitzen auch alle Basen einer beliebigen Menge $T \subseteq E$ die gleiche Mächtigkeit genau in den Mengensystemen, wo die Augmentierung immer gelingt.

Beweis

Eine Basis B , die nicht maximale Menge wäre, besäße eine Obermenge Y , aus der B sich wiederum zwangsläufig durch irgendein $x \in Y \setminus B$ zu $B \cup x$ im Mengensystem ergänzen lassen müsste. Trivial einzusehen widerspräche die Existenz verschieden großer maximaler Mengen dem Augmentierungsprinzip. Den Zusatz betreffend siehe [KLS91], S. 47. ■

Man darf also auch unmissverständlich mit dem Rang des Greedoids $r(\mathcal{G})$ die Mächtigkeit der Basen meinen. Ein Greedoid wird **voll** genannt, wenn es die Menge E enthält, d.h. $r(\mathcal{G}) = |E|$. Nur das Komplemente-Dual eines vollen Greedoids kann wegen der leeren Menge selbst Greedoid sein. Nichtsdestotrotz ist dies auch jenen nicht immer gegeben. In einigen Quellen wird das, was in dieser Arbeit zum Dual erklärt wurde und auch fortan so verwendet wird, im Zusammenhang mit Greedoiden als „dual system“³¹ bzw. „dual complex“³² deklariert, um die Bezeichnung Dual für das Komplemente-Dual zu reservieren.

Rang

Im Gegensatz zu Matroid-Rangfunktionen ist es den Greedoid-Rangfunktionen nicht untersagt, bei Hinzufügen eines Elements zu einer Menge, einen Ranggewinn von mehr als 1 zu verbuchen. Die Submodularität

³¹vgl. [KLS91]

³²vgl. [BZ92]

wird durch eine schwächere **lokale Submodularität** ersetzt, die wie folgt formuliert werden kann:

$$\forall_{X,Y \subseteq E} \quad r(X) = r(Y) = r(X \cap Y) \quad \Rightarrow \quad r(X) = r(Y) = r(X \cup Y).$$

Konform zum Matroid-Fall wirkt auch hier eine Umkehrung:

Satz 2.13.

Eine ganzzahlige, nicht negative, monotone Funktion r auf $\mathcal{P}(E)$ mit $r(X) \leq |X|$, die obendrein lokale Submodularität aufweist, ist immer Rangfunktion eines Greedoids, das obendrein eindeutig von ihr bestimmt ist.

Beweis: [KLS91], S. 58

Hüllenoperator

Der Rang des Abschlusses einer Menge entspricht dem der Menge selbst: $r(\sigma(X)) = r(X)$. Der Hüllenoperator σ bleibt, verglichen mit seinem Matroid-Pendant(2.2.5), idempotent, büßt aber die Monotonie ein, die eigentlich essenziell für einen Hüllenoperator ist, und begnügt sich mit einer abgeschwächten Form der Steinitz-MacLane-Austausch-Eigenschaft:

$$\forall_{X \subseteq E, x, y \in E \setminus X} \quad X \cup y \in \mathcal{G}, \quad y \in \sigma(X \cup x) \quad \Rightarrow \quad x \in \sigma(X \cup y).$$

Basis-Rang

Zusätzlich wird auf dem Feld der Greedoide eine **Basis-Rangfunktion** betrachtet, die als

$$\beta(X) = \max \{ |X \cap Y| \mid Y \in \mathcal{G} \}$$

auf $\mathcal{P}(E)$ wirkt. Sie entspricht offensichtlich der Δ -Rangfunktion³³ auf der ersten Komponente, $\beta(X) = r^\Delta(X, \emptyset)$, und ist damit erstens submodular, wenn \mathcal{G} auch Δ -Matroid ist³⁴ und zweitens gar identisch mit der Rangfunktion, wenn \mathcal{G} Matroid ist.³⁵

³³siehe 1.3.3

³⁴siehe Kor. 2.28

³⁵siehe Bem. 2.3

Ausgehend von einem Greedoid \mathcal{G} und seinem Basis-Rang β kann das Mengensystem der **rang-zulässigen** Mengen erschaffen werden als

$$\mathcal{R} = \{X \subseteq E \mid \beta(X) = r(X)\}.$$

Eingeschränkt auf dieses Mengensystem, das \mathcal{G} enthält, ist nun wiederum die Rangfunktion submodular. Jedoch ist \mathcal{R} im Allgemeinen kein Greedoid, obwohl immerhin hereditär.

Abgeleitete Greedoide

Die Derivate k -Abschnitt, Restriktion und Kontraktion lassen sich allesamt ihre Greedoid-Eigenschaften nicht nehmen. Für die Kontraktion ist es allerdings unabdingbar, eine Menge $T \subseteq E$ zu kontrahieren, die im Greedoid enthalten ist. Dadurch wird

$$\mathcal{G}/T = \{X \subseteq E \setminus T \mid X \cup T \in \mathcal{G}\}.$$

Die Rangfunktion der Kontraktion genügt $r_{\mathcal{G}/T}(X) = r(X \cup T) - |T|$ und der Hüllenoperator $\sigma_{\mathcal{G}/T}(X) = \sigma(X \cup T) \setminus T$ für $X \subseteq E \setminus T$.

Bezüglich der Restriktion $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|_T$ gilt $\sigma_{\mathcal{G}'}(X) = \sigma(X) \cap T$, während die Rangfunktion unveränderte Werte liefert für $X \subseteq T$.

Die mengenweise Vereinigung zweier Greedoide ergibt nicht unbedingt ein Greedoid.

Optimierung

Die Greedoide werden ihrem unfeinen Namen insofern gerecht, als dass auch sie (im Rahmen der einfachen, hereditären Sprachen der geordneten Version) durch die Tatsache charakterisierbar sind, dass sie sich von einem, dem Matroid-Greedy ähnlichen, Algorithmus garantiert die optimale Menge abringen lassen. Dazu muss allerdings eine veränderte Klasse von Zielfunktionen vorausgesetzt werden, die der „verallgemeinerten Engpass-Funktionen“³⁶, die die linearen Funktionen nicht einverleibt.

Was lineare Zielfunktionen angeht, sind Greedy-artige Verfahren durchaus für spezielle Greedoide verfügbar. Dies beschränkt sich nicht auf den Spezialfall der Matroide. Es ist gelungen, einige Klassen von Greedoiden zu bilden, die

³⁶generalized bottleneck functions, vgl. [KLS91], Kap. 11

mit linearen Funktionen durch Anwendung einfacher Algorithmen zurecht-
kommen. Diese Greedoid-Klassen und ihre Eigenschaften sind das Thema der
anschließenden Abschnitte. Für das allgemeine Greedoid ist das Problem,
die schwerste Menge bezüglich einer linearen Gewichtsfunktion zu finden,
NP-schwer,³⁷ d.h. vermutlich nicht in polynomieller Zeit zu bewältigen.

2.3.3 Ausgedünnte Matroide

Die erste hier besprochene Sorte von Greedoiden, die eine Relevanz bezüglich
Optimierungsinteressen vorweist, besteht aus den, gemäß [KLS91], aus-
gedünnten Matroiden, obwohl dabei tatsächlich normalerweise keine Matro-
ide vorliegen.

Ein Greedoid \mathcal{G} , dessen Basismenge auch die Basismenge eines Matroids dar-
stellt, heißt **ausgedünntes Matroid**. Das heißt, von den Basen des Gree-
doids wird die Erfüllung des Austauschaxioms (AA) verlangt.

Bemerkung 2.14.

*Die ausgedünnten Matroide sind genau die Greedoide, deren monotone Hülle
Matroid ist. Zudem ist die Definition somit gleichbedeutend damit, dass das
Dual des Mengensystems Matroid ist.*

Beweis

Für ein Greedoid \mathcal{G} leitet man mit Bem. 2.12 und Lemma 1.3 zunächst aus
 $\mathcal{H}(\mathcal{G}) = \mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{G}^* = \mathcal{M}'$ mit Matroiden \mathcal{M} und \mathcal{M}' , also $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{G})^{(*)}) = \mathcal{M}'$
(siehe 1.1.3), ab, dass $\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathcal{M}')^{(*)}$ mit Austauschfähigkeit
(AA) ausgestattet ist. Indessen umgekehrt $\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{M})$ für ein Matroid
 \mathcal{M} impliziert, dass $\mathcal{H}(\mathcal{G}) = \mathcal{H}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ und
 $\mathcal{G}^* = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{G})^{(*)}) = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{M})^{(*)}) = \mathcal{M}^*$ Matroide sind (Prop. 2.8). ■

Einige, jedoch nicht alle dieser ausgedünnten Matroide können als Schnitt
eines Matroids mit einem Antimatroid konstruiert werden. Dabei ist zu be-
merken, dass im Allgemeinen der Schnitt zweier Greedoide kein Greedoid
liefert; vergleiche hierzu [KLS91], Kap. 9.

Die Verbindung zu einer effektiven Art der Optimierung entsteht durch die
Existenz des **Worst-Out-Greedy-Algorithmus (WOA)**. Dieser startet
mit E und entfernt so lange die kleinstgewichtigen Elemente, als die ak-
tuelle Menge noch eine Basis enthält. Dazu wird nun vorausgesetzt, dass

³⁷vgl. [GJ79]

eine gewichtssteigernde Sortierung $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ von E vorliegt, d.h. $c(e_i) \leq c(e_j)$, wenn $i \leq j$, für eine Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. Er operiert auf \mathcal{G} so:

1. $X := E; i := 1$
2. Wenn $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ mit $B \subseteq X \setminus e_i$ existiert, dann $X := X \setminus e_i$
3. Wenn $i = n$ STOP
4. $i := i+1$
5. Gehe zu 2.

Die Bedingung, die in Schritt 2 des Verfahrens zur Änderung von X geprüft wird, garantiert offenbar, dass das Komplement $E \setminus X$, wie die leere Menge als Komplement von E zu Beginn, immer Teilmenge eines Komplements einer Basis von \mathcal{G} ist. Das heißt, $E \setminus X$ soll sich fortwährend im Dual \mathcal{G}^* von \mathcal{G} , welches Unabhängigkeitssystem ist, bewegen.

Und dies wird exakt durch die Methode des Matroid-Greedy (MGA)³⁸ gewährleistet, der nämlich die Übersetzung dieser Bedingung im dualen verwirklicht, allerdings ohne bei negativen Gewichten anzuhalten. Da auf diese Art und Weise am Ende des Algorithmus zwingend eine Basis von \mathcal{G} steht, entspricht dann auf der anderen Seite die Menge $E \setminus X$ einer Basis des Duals.

Schaut man sich die Ausführungen zu Matroiden an,³⁹ dann wird klar, dass das Vorgehen genau dann das geringstgewichtete Basis-Komplement im Dual, entsprechend der primal maximalgewichtigen Basis, findet, wenn jenes Dual ein Matroid darstellt, was wiederum⁴⁰ äquivalent dazu ist, dass mit dem primär untersuchten System ein ausgedünntes Matroid vorliegt.

Hierbei muss berücksichtigt werden, dass die Argumentation nur dann greift, wenn man die Suche von vornherein auf Basen des Mengensystems beschränkt.

Proposition 2.15.

Für Gewichtsfunktionen $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ liefert der Worst-Out-Greedy-Algorithmus für ein ausgedünntes Matroid \mathcal{G} eine optimale Basis B_0 : $c(B_0) \geq c(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$.

³⁸siehe 2.2.4

³⁹siehe Satz 2.7

⁴⁰siehe Bem. 2.14

Gewährleisten lässt sich Optimalität dann aber auch durch die Beschränkung der möglichen Gewichtsfunktionen auf die nicht negativen, da in diesem Fall immer eine optimale Menge unter den Basen zu finden ist. Insgesamt ergibt sich so

Proposition 2.16.

Ist ein Greedoid vorgelegt, dann liefert der Worst-Out-Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine optimale Lösung genau dann, wenn \mathcal{G} ausgedünntes Matroid ist.

Den Grund, warum den ausgedünnten Matroiden dennoch ein gleichrangiger Status gegenüber den Matroiden abgesprochen werden muss, ergibt eine genauere Betrachtung der Laufzeit. Abgesehen vom polynomiellen Restaufwand ist die Überprüfung der Bedingung aus Schritt 2 nicht allein dadurch in konstanter Zeit durchführbar, dass ein gewöhnliches Mengensystemorakel für \mathcal{G} gegeben wäre.

Vielmehr kann die Anzahl der Basen eines Greedoids, beispielsweise bei einem Rang von $\frac{n}{2}$, näherungsweise $\binom{n}{\frac{n}{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ erreichen und damit exponentiell in Abhängigkeit von $n = |E|$ anwachsen. Dies entspräche aber der Anzahl der zu überprüfenden rang-elementigen Teilmengen der Menge X während der ersten Durchläufe des Verfahrens. Es müsste also ein leistungsstärkeres „Basis-Orakel“ verfügbar sein, um Polynomialität zu gewährleisten.

2.3.4 Die starke Austauschenschaft

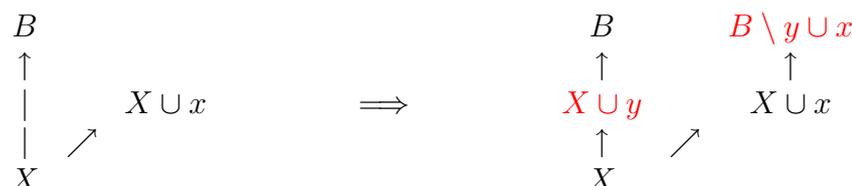
Die Frage, ob der effizientere⁴¹ Matroid-Greedy-Algorithmus, der genau bei den Unabhängigkeitssystemen, die die Gestalt eines Matroids haben, ins Ziel findet, auch im Rahmen der Greedoide einen elegant absteckbaren Zuständigkeitsbereich besitzt, kann mit ja beantwortet werden. Die gesuchten Greedoide ergeben sich einerseits als charakterisierbare Spezialfälle der ausgedünnten Matroide und sind andererseits beschreibbar durch eine strengere Augmentierungsbedingung, die die Existenz zweier Mengen fordert.

Ein Greedoid besitzt die **starke Austauschenschaft**, wenn

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{G}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \quad X \subseteq B, \quad x \in E \setminus B, \quad X \cup x \in \mathcal{G} \\ \implies \exists_{y \in B \setminus X} \quad X \cup y \in \mathcal{G} \quad \text{und} \quad B \setminus y \cup x \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

⁴¹hinsichtlich des Standard-Orakels

Eine Abbildung, die die existierenden Mengen schwarz, die geforderten rot und Teilmengenbeziehungen durch Pfeile darstellt, soll der Verdeutlichung dienen:



Wie das Diagramm schon suggeriert, harrt diese Bedingung nur der Überprüfung, wenn $|B| \geq |X| + 2$, da sich sonst das y per $B \setminus X = \{y\}$ von selbst ergibt und mit $B = X \cup y$ sowie $B \setminus y \cup x = X \cup x$ dem Prüfer alles schon in den Schoß gefallen ist.

Zu diesen Greedoiden lässt sich nun eine klassifizierende Aussage formulieren.

Satz 2.17.

Für ein Greedoid \mathcal{G} sind folgende drei Befunde äquivalent

- *Zu jeder nicht negativen Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ findet der Matroid-Greedy-Algorithmus (MGA) die Optimallösung.*
- *\mathcal{G} ist ein ausgedünntes Matroid und außerdem starkes Abbild seiner monotonen Hülle $\mathcal{H}(\mathcal{G}) : \mathcal{H}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{G}$.*
- *\mathcal{G} besitzt die starke Austauschenschaft.*

Beweis: [KLS91], S. 160

Der zweite Punkt zeigt, dass die Matroide selbst dazu gezählt werden dürfen.

Falls gewünscht, könnte das Basis-Orakel, welches beim Worst-Out-Greedy (WOA) Verwendung findet, für diese Greedoide nun effektiv mit dem (MGA) aus dem gewöhnlichen Mengensystem-Orakel simuliert werden, indem man zur Frage, ob eine Menge $X \subseteq E$ eine Basis enthält, die passende Zielfunktion $c_X : E \rightarrow \{0, 1\}$, die genau auf X einwertig ist, konstruiert. Liefert der (MGA) dann einen Optimalwert, der dem Rang des Greedoids entspricht, ist dies gleichbedeutend mit dem Einschluss einer Basis in X . Der Rang des Greedoids kann zu Beginn mit einem solchen Lauf für $X = E$ ermittelt werden.

Trotzdem man also eine effektive Lösungsmethode für die Optimierung zur Hand hat, ist man auch in diesem Fall eingeschränkt auf nicht negative Zielfunktionen oder muss sich wahlweise per Addition einer Konstanten auf Basen als Rekruten für optimale Mengen konzentrieren, um das Resultat zu erhalten.

Restriktionsstabilität

Wie sich später zeigen wird, ist es an dieser Stelle von Nutzen, eine neue Greedoid-Klasse zu skizzieren, die die starke Austauschenschaft in eine die Einschränkungen einschließende Form bringt, ähnlich wie das bei den Austausch-Systemen im folgenden Abschnitt durch die Übertragung des Austauschaxioms (AA) auf Restriktionen vorgenommen wird.

Einem Greedoid \mathcal{G} wird die **restriktionsstabile starke Austauschenschaft** zugeschrieben, wenn allen Restriktionen $\mathcal{G}|_T$, $T \subseteq E$ die starke Austauschenschaft bestätigt werden kann.

2.3.5 Austausch-Systeme

Auch die Ausdehnung der Forderung an die ausgedünnten Matroide auf Restriktionen ergibt eine sinnvolle Klasse von Greedoiden, eingeführt in [BD88]. Ein Greedoid \mathcal{G} wird **Austausch-System** genannt, wenn für jedes $T \subseteq E$ die Restriktion $\mathcal{G}|_T$ ein ausgedünntes Matroid ist. Die Basismenge jeder Restriktion erfüllt demnach das Austauschaxiom (AA).

Eine Beschreibung des Sachverhalts als Bedingung an einzelne Mengen ist ebenfalls möglich. Dabei wird deutlich, dass die Austausch-Systeme den Mengen in gewissem Sinne eine Wahl zwischen Augmentierung und Austausch unterbreiten.

Proposition 2.18.

Ein Greedoid ist genau dann ein Austausch-System, wenn

$$\begin{aligned} X, Y \in \mathcal{G}, |X| = |Y|, x \in X \setminus Y \\ \implies \exists_{y \in Y \setminus X} X \cup y \in \mathcal{G} \quad \text{oder} \quad X \setminus x \cup y \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Beweis: [BD88]

Neben anderen speziellen, algorithmisch interessanten Greedoiden fallen auch die Antimatroide unter diesen Begriff. Und so wie diese vereinigungsabgeschlossen sind, gilt auch allgemeiner für Austausch-Systeme, dass die mengenweise Vereinigung derer zwei nicht nur Greedoid, sondern wieder Austausch-System ist.

Die oben eingeführte Klasse der Eigner der restriktionsstabilen starken Austausch-eigenschaft ist eine Unterklasse der Austausch-Systeme.

Bemerkung 2.19.

Ein Greedoid mit der restriktionsstabilen starken Austausch-eigenschaft ist Austausch-System.

Beweis

Wenn jede Restriktion $\mathcal{G}|_T$, $T \subseteq E$ eines Greedoids \mathcal{G} die starke Austausch-eigenschaft hat, dann heißt das nach Satz 2.17, dass eben auch jede ausgedünnte Matroid ist, was mit der Definition für Austausch-Systeme zusammenfällt. ■

Eine andere Art von Greedoiden, die der linearen Optimierung eine gewisse Gunst erweist, gehört ebenso zu den Austausch-Systemen und wird im nächsten Abschnitt behandelt.

2.3.6 Gauß-Greedoide

Erkundungen auf dem Gebiet der Gauß-Greedoide stellte Goecke⁴² an. Der Name ist begründet durch Greedoide, die aus Zeilenindexmengen von Matrizen entstehen, die sich beim Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ergeben. Das Objekt wurde unter dem Namen „strong greedoids“ später auch in [BB92] eingeführt.

Eine mögliche Definition bedient sich der starken Abbildungen zwischen Matroiden, indem ein Rang $k \in \mathbb{N}$ und eine Kette von Matroiden $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_k$ auf gleicher Grundmenge E , beginnend bei $\mathcal{M}_0 = \emptyset$, von aufsteigendem Rang $r(\mathcal{M}_i) = i$, zu Grunde gelegt wird, wo die Matroide sukzessiv starke Abbilder sind: $\mathcal{M}_{i+1} \hookrightarrow \mathcal{M}_i$, $0 \leq i \leq k-1$. Ein Greedoid \mathcal{G} wird dann als **Gauß-Greedoid** bezeichnet, wenn es als Vereinigung der zugehörigen Basismengen auftritt: $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathcal{M}_0) \cup \dots \cup \mathcal{B}(\mathcal{M}_k)$.

⁴²vgl. [Goe86]

Die Beschreibung der starken Abbilder aus Lemma 2.11 führt unmittelbar zu einer entsprechenden Charakterisierung der Gauß-Greedoide.

Proposition 2.20.

Um sich Gauß-Greedoid zu nennen, ist es für ein Greedoid hinreichend und notwendig, dass gilt:

$$C \in \mathcal{G}, \quad z \in C, \quad x, y \notin C, \quad C \setminus z \cup \{x, y\} \in \mathcal{G} \\ \implies C \cup y \in \mathcal{G} \quad \text{oder} \quad C \setminus z \cup y \in \mathcal{G}.$$

Beweis: [Goe86], S. 47

Gauß-Greedoide sind Austausch-Systeme. Das volle Gauß-Greedoid zeichnet sich durch $k = n$ mit $\mathcal{M}_n = 2^E$ aus. Das Komplemente-Dual eines vollen Gauß-Greedoids ist ein ebensolches.

Interessant für die lineare Optimierung werden die Gauß-Greedoide dadurch, dass sie einer Erweiterung der Anforderungen zur starken Austauschigkeit standhalten, die sie nicht nur unter allen Mengensystemen mit leerer Menge kennzeichnen, sondern auch, weil dies die Anwendung eines modifizierten Greedy-Algorithmus ermöglicht, der nicht auf nicht negative Zielfunktionen beschränkt bleibt.

Der **modifizierte Greedy-Algorithmus (modGA)** auf einem Mengensystem \mathcal{F} für $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ lautet:

1. $X^* := X := \emptyset$
2. $T := \{x \in E \setminus X \mid X \cup x \in \mathcal{F}\}$
3. Wenn $T = \emptyset$ STOP. Die optimale Menge ist X^*
4. Finde $x_0 \in T$ mit $c(x_0) \geq c(y)$ für alle $y \in T$
5. $X := X \cup x_0$
6. Wenn $c(X) > c(X^*)$ setze $X^* := X$
7. Gehe zu 2.

Eine Menge Y in \mathcal{F} von maximalem Gewicht ist auch eine maximale Menge im $|Y|$ -Abschnitt $\mathcal{F}^{(|Y|)}$ bezüglich einer um eine Konstante ins durchgängig Positive verschobenen Gewichtsfunktion \hat{c} . Da diese Verschiebung keine Auswirkungen auf die Gestalt der Menge X während des Ablaufs des Verfahrens hat und diese außerdem immer dem X des gewöhnlichen Matroid-Greedy (MGA) entspricht, muss X irgendwann einmal (genauer: im $|Y|$ -ten

Schritt) dem Y gleichen, wenn der (MGA) positive Gewichtsfunktionen auf k -Abschnitten optimieren kann (starke Austausch eigenschaft).

Dann aber wird zu guter Letzt $X^* = Y$ sein. Diese Erkenntnis geht auf im zentralen Satz für Gauß-Greedoide.

Satz 2.21.

Für ein Mengensystem, das zumindest die leere Menge enthält, bedingen sich vier Aussagen jeweils gegenseitig:

- *Zu jeder Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ findet der (modGA) die Optimallösung.*
- *Jeder k -Abschnitt $\mathcal{F}^{(k)}$, $0 \leq k \leq |E|$ verfügt über die starke Austausch eigenschaft.*
- *\mathcal{F} ist ein Gauß-Greedoid.*
- *\mathcal{F} ist Greedoid und für alle $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| = |Y| - 1$ existiert $y \in Y \setminus X$ so, dass $X \cup y \in \mathcal{F}$ und $Y \setminus y \in \mathcal{F}$.*

Beweis: [Goe86], S. 62 und [BS99]

Zweifelsohne gehören die Matroide also dazu.

Bemerkung 2.22.

Gauß-Greedoide verfügen über die restriktionsstabile starke Austausch eigenschaft.

Beweis

Ein auf eine willkürliche Menge $T \subseteq E$ restringiertes Greedoid \mathcal{G} besitze dort eine Basis $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G}|_T)$ und $X \subseteq B$ sowie $x \in T \setminus B$ mit $X \cup x \in \mathcal{G}|_T$. Wird k festgelegt auf $|B|$, dann ist B auch eine Basis vom k -Abschnitt $\mathcal{G}^{(k)}$. Dort gilt nach Satz 2.21 die starke Austausch eigenschaft, was ein $y \in B \setminus X$ hervorbringt mit $X \cup y, B \setminus y \cup x \in \mathcal{G}^{(k)} \subseteq \mathcal{G}$. Da diese beiden Mengen aber vollständig in T liegen, gehören sie ebenfalls zu $\mathcal{G}|_T$, was der Definition der starken Austausch eigenschaft Satisfaktion erteilt. ■

Bezüglich der starken Austausch eigenschaft impliziert „Abschnittsstabilität“ also die Restriktionsstabilität.

Matroid-Basis-Systeme

Zwischen Austausch-Systemen und Gauß-Greedoiden lässt sich noch eine Klasse von Greedoiden ansiedeln, die **Matroid-Basis-Systeme** genannt werden.⁴³ Statt, wie bei Austausch-Systemen, vorauszusetzen, dass jede Restriktion ausgedünntes Matroid sei, wird dies hier für jeden k -Abschnitt $\mathcal{G}^{(k)}$, $0 \leq k \leq r(\mathcal{G})$ eines Greedoids \mathcal{G} gefordert.

Es ist klar, dass dies gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Austauschaxioms (AA) auf allen k -Anzahl-Ebenen $\{X \in \mathcal{G} \mid |X| = k\}$ ist, so dass es sich um Austausch-Systeme handelt, weil die zweite von der Definition eingeräumte Alternative immer realisierbar ist.

Andererseits ist man aber auch mit einer Relaxierung der Gauß-Greedoide konfrontiert, weil \mathcal{G} so wiederum eine Vereinigung von Matroid-Basismengen über die Anzahlen verkörpert, wo lediglich die Verzahnung über die starke Abbildung nicht mehr gefordert wird. Einige der Gauß-Greedoid-Eigenschaften bestehen vor dieser Generalisierung.⁴⁴

2.3.7 Abgrenzung der Greedoid-Klassen

Nachdem nun einige Greedoide aus der Abstammungslinie der ausgedünnten Matroide präsentiert wurden, da diese verstärkt Assoziationen zur linearen Optimierung hervorrufen, sollen diese Klassen nun noch durch Beispiele voneinander abgegrenzt werden.

Ausgedünnte Matroide mit restriktionsbestimmten Strukturen

Zunächst widmet sich die Betrachtung den Klassen, die strukturell mit Restriktionen in Verbindung stehen. Die Abkürzungen (SM) (ausgedünntes Matroid), (SEP) (starke Austauscheigenschaft), (ES) (Austausch-System) und (RSEP) (restriktionsstabile starke Austauscheigenschaft) sollen sowohl die Eigenschaft als auch die zugehörige Klasse symbolisieren.

So klar wie die Grundmenge, falls sie Element ist, in Greedoiden eine optimale Menge bezüglich jeder nicht negativen linearen Zielfunktion darstellt, so trivial zeigt sich dann das Prüfen von (SM) und (SEP). Volle Greedoide sind also immer diesen beiden Klassen zuzurechnen.

⁴³vgl. [BD88]

⁴⁴vgl. [Goe86]

- III) Ein ausgedünntes Matroid muss weder in (ES) noch (SEP) sein:
 \mathcal{G}_{III} , $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{array}{cccccc}
 \{1, 2, 3\} & \{1, 3, 4\} & \{2, 3, 4\} & \{2, 3, 5\} & \{3, 4, 5\} & \\
 \{1, 2\} & \{4, 5\} & \{1, 4\} & \{2, 4\} & \{2, 3\} & \\
 \{1\} & \{2\} & \{4\} & & & \\
 \emptyset & & & & &
 \end{array}$$

Die Heredität und (AE) für Mengen sukzessiver Größe sind einzeln nachzuprüfen. Die Basis ist eine Matroid-Basis, nämlich die von $\mathcal{H}(\{3\}) \oplus \mathcal{H}(\{1, 5\})^*$, letzteres als Dual innerhalb der Grundmenge $\{1, 2, 4, 5\}$. Die (SEP) wird verletzt von der leeren Menge und $x = 1$ bezüglich der Basis $\{2, 3, 5\}$, weil dann als y nur 2 in Frage kommt, $\{1, 3, 5\}$ aber fehlt. (ES) gilt nicht, weil $\{1, 2\}$ und $\{4, 5\}$ wegen $x = 4$ nicht zueinander finden, mangels Austausch- ($\{1, 5\}, \{2, 5\}$) und Augmentierungschance ($\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}$).

- IV) Alle Greedoide mit $|E| \leq 3$ sind (ES), weil es keine gleichmächtigen Mengen X, Y mit (in diesem Fall immer geradem) $|X \Delta Y| \geq 4$ geben kann, und alle anderen, die sich um nur ein Element unterscheiden, können dieses selbstverständlich austauschen. (SEP) liegt aber auch bei \mathcal{G}_{IV} nicht vor, niedergestreckt von $X = \emptyset$, $B = \{2, 3\}$ und $x = 1$.
 \mathcal{G}_{IV} , $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{cc}
 \{1, 2\} & \{2, 3\} \\
 \{1\} & \{2\} \\
 \emptyset &
 \end{array}$$

- V) Um ein Beispiel für ein Greedoid aus (SEP) zu finden, das die Zugehörigkeit zu (ES) verfehlt, scheint wieder $|E| \geq 5$ notwendig, konkret \mathcal{G}_V , $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{array}{cccc}
 \{1, 2, 3, 4, 5\} & & & \\
 \{1, 2, 3, 5\} & \{1, 3, 4, 5\} & & \\
 \{1, 2, 5\} & \{1, 3, 5\} & \{3, 4, 5\} & \\
 \{1, 2\} & \{3, 4\} & \{1, 3\} & \\
 \{1\} & \{3\} & & \\
 \emptyset & & &
 \end{array}$$

wo Heredität und (AE) wieder verlangen, im Einzelnen verifiziert zu werden. (ES) scheitert am Manko von $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ und $\{2, 3, 4\}$, nach Festlegung von $X = \{3, 4\}$, $Y = \{1, 2\}$, $x = 3$.

VI) Im Schnitt von (SEP) und (ES), wo sich (RSEP) befindet, existieren aber auch andere Greedoid-Formen, wie \mathcal{G}_{VI} , $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{c} \{1, 2, 3, 4\} \\ \{1, 2, 3\} \quad \{2, 3, 4\} \\ \{1, 2\} \quad \{2, 4\} \\ \{2\} \quad \{4\} \\ \emptyset \end{array}$$

wo der Greedoid-Check nicht viel Arbeit macht. Dass sich auf jeder Ebene eine Matroid-Basis befindet, bewirkt (ES). (RSEP) jedoch scheitert an der Restriktion auf $T = \{1, 2, 4\}$, nachweislich durch $B = \{1, 2\}$, $X = \emptyset$ und $x = 4$.

Ausgedünnte Matroide mit abschnittsbestimmten Strukturen

Nun nimmt die Komplexität etwas zu, weil die Klassen hinzugenommen werden, die mit der Abschnittsbildung korrelieren. (MBS) (Matroid-Basis-System) und (GG) (Gauß-Greedoid) kürzen den Text adäquat ab. Wir bewegen uns in diesem Abschnitt nur noch im Gebiet der Austausch-Systeme.

\mathcal{G}_{IV} , nicht in (SEP), ist augenscheinlich in (MBS). \mathcal{G}_{VI} , in (SEP) \setminus (RSEP), ist ebenso (MBS).

VII) Nimmt man zu \mathcal{G}_{VI} noch eine Menge hinzu, $\mathcal{G}_{VII} := \mathcal{G}_{VI} \cup \{3, 4\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{c} \{1, 2, 3, 4\} \\ \{1, 2, 3\} \quad \{2, 3, 4\} \\ \{1, 2\} \quad \{2, 4\} \quad \{3, 4\} \\ \{2\} \quad \{4\} \\ \emptyset \end{array}$$

dann wird (MBS) verlassen (zweite Ebene), während das Greedoid an sich, einschließlich (ES), unangetastet bleibt, weil $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 3, 4\}$ immer die Augmentierung für das einzig kritische Paar $\{1, 2\} \leftrightarrow \{3, 4\}$ erlauben. (SEP) ist ohnedies nicht gefährdet, wegen $E \in \mathcal{G}_{VII}$.

- VIII) Dies ändert sich bei Herausnahme von E . $\mathcal{G}_{VIII} := \mathcal{G}_{VII} \setminus \{E\}$,
 $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, 3\} & & \{2, 3, 4\} \\ \{1, 2\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\ \{2\} & & \{4\} \\ \emptyset & & \end{array}$$

Jetzt gibt es für $B = \{1, 2, 3\}$, $X = \emptyset$ und $x = 4$ kein Gelingen mehr für (SEP). Alles andere zuvor gesagte bleibt valid.

- IX) Innerhalb von (RSEP) gibt es Greedoide, die (MBS) verpassen. Hierzu wird auf das Beispiel XVI⁴⁵ und die anderen Erkenntnisse in Kapitel 3 hingewiesen.
- X) Innerhalb von (RSEP) gibt es aber auch Greedoide aus (MBS), die dann aber (GG) nicht mehr erreichen. Das Beispiel XV⁴⁶ ist das Beweisstück.
- XI) Nicht alle Gauß-Greedoide sind Matroide: \mathcal{G}_{XI} , $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{ccccc} \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & \{2, 4\} & \{3, 4\} \\ & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \\ & & \emptyset & & \end{array}$$

(SEP) muss für (GG) lediglich von der leeren Menge aus an allen Basen geprüft werden, zum Unabhängigkeitssystem fehlt es an der $\{4\}$.

- XII) Matroide, gekennzeichnet mit (M), sind Elemente aller bisher inspizierten Klassen.

⁴⁵Seite 83

⁴⁶Seite 83

Illustration

Das Sammeln aller Teilmengenbeziehungen, die in den vorangegangenen Abschnitten erarbeitet wurden, $(GG) \subseteq (MBS)$, $(GG) \subseteq (RSEP)$, $(MBS) \subseteq (ES)$, $(RSEP) \subseteq (SEP)$, $(RSEP) \subseteq (ES)$, $(SEP) \subseteq (SM)$ und $(ES) \subseteq (SM)$, erlaubt eine vollständige graphische Übersicht für ausgedünnte Matroide.

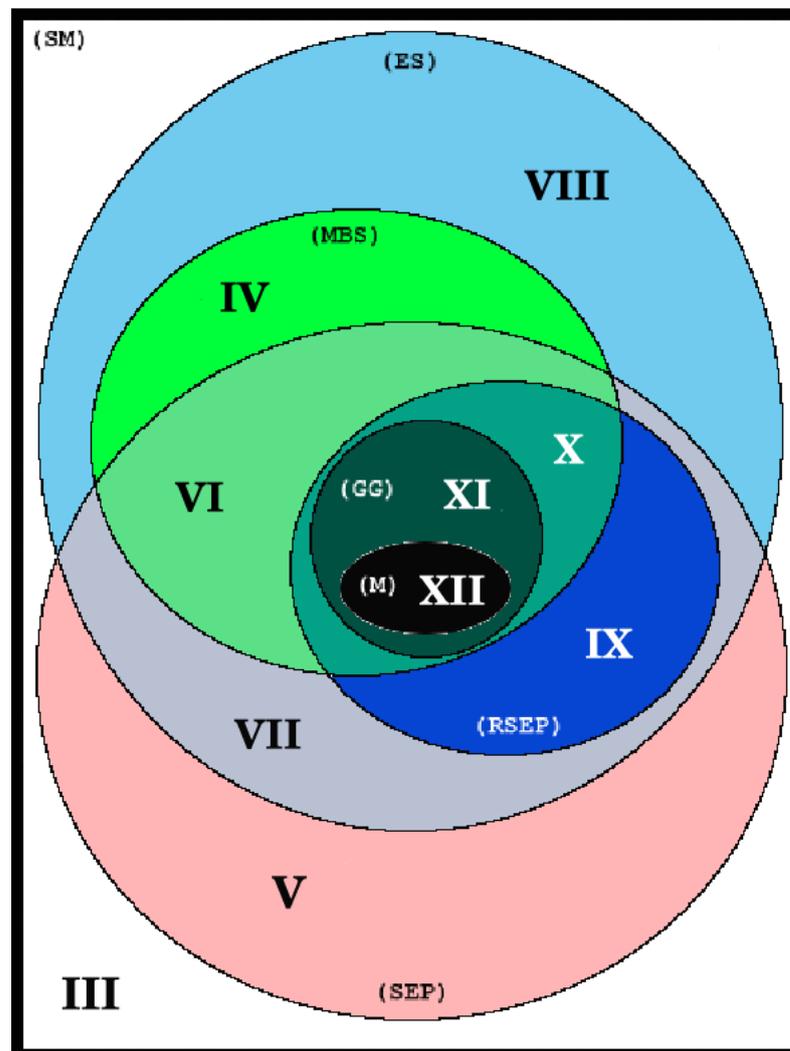


Abbildung 2.1: Illustration Ausgedünnte Matroide

2.3.8 Intervall-Greedoide

Eine weitere Sorte von Greedoiden wird hier noch der Aufzählung hinzugefügt, weil der Begriff eine Klasse umfasst, die sich noch besser auswerten lässt und viele der wichtigsten Greedoid-Beispiele einschließt. Sie beinhaltet sowohl alle Matroide als auch alle Antimatroide. Außerdem ist die definierende Eigenschaft noch Charakteristikum weiterer Matroid-Verallgemeinerungen.⁴⁷

Intervall-Greedoide sind diejenigen Greedoide, die die **Intervall-Eigenschaft** erfüllen:

$$X, Y, Z \in \mathcal{G}, \quad X \subseteq Y \subseteq Z, \quad x \in E \setminus Z, \quad X \cup x \in \mathcal{G} \quad \text{und} \quad Z \cup x \in \mathcal{G} \\ \implies Y \cup x \in \mathcal{G}.$$

Die Intervall-Eigenschaft tritt auch bei der Untersuchung des Schnitts von Matroiden mit Antimatroiden in Erscheinung.⁴⁸ Die ausgedünnten Matroide mit Intervall-Eigenschaft lassen sich alle über einen solchen, allerdings modifizierten, Schnitt konstruieren. Intervall-Greedoide benehmen sich in vielerlei Hinsicht systematischer als ihre Nicht-Intervall-Genossen.

Transpositions-Greedoide

Für einige Greedoide, darunter mehrere, die durch Eliminationsprozesse induziert sind,⁴⁹ ist der Nachweis der Augmentierungseigenschaft (AE) mühseliger zu führen, als der der folgenden Eigenschaft:

$$X \in \mathcal{F}, \quad x, y \in E \setminus X, \quad X \cup x, X \cup y \in \mathcal{F}, \quad X \cup x \cup y \notin \mathcal{F} \quad \text{impliziert} \\ \forall_{B \subseteq E \setminus (X \cup x \cup y)} \quad X \cup x \cup B \in \mathcal{F} \implies X \cup y \cup B \in \mathcal{F}.$$

Die resultierende Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass man $X \cup x$ und $X \cup y$ **Zwillinge** nennt. Wenn \mathcal{F} ein hereditäres Mengensystem ist, dann reicht die Eigenschaft dazu aus, \mathcal{F} zum Greedoid zu erklären. In diesem Fall spricht man vom **Transpositions-Greedoid**. Die Transpositions-Greedoide stellen eine echte Oberklasse der Intervall-Greedoide vor, aber nicht jedes Greedoid besitzt die Eigenschaft.

⁴⁷vgl. [KLS91], S. 107ff

⁴⁸vgl. [KLS91], Kap. 9.2

⁴⁹vgl. [KLS91], Kap. 10

2.4 Δ -Matroide

Eine elegante Verallgemeinerung des Matroid-Konzepts vertreten die Δ -Matroide,⁵⁰ weil sie sich sowohl den Aspekt der Submodularität als auch einen charakterisierenden Greedy-Algorithmus und einige weitere Eigenschaften der Matroide in adäquater Form aneignen. Sie wurden unter diesem Namen vorgestellt von Bouchet [Bou87], aber etwa zeitgleich auch als **Pseudomatroide** von Chandrasekaran und Kabadi [CK88] zur Welt gebracht.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ist ein **Δ -Matroid**, wenn

$$X, Y \in \mathcal{F}, x \in X \Delta Y \implies \exists_{y \in X \Delta Y} X \Delta \{x, y\} \in \mathcal{F}.$$

Dabei ist zu beachten, dass y und x auch identisch sein können. Anschaulich zu Bewusstsein gebracht bedeutet dies, dass bei einem $x \in X \setminus Y$ zur Entnahme aus X , sobald dieses nicht einfach aus der Menge entfernbar ist ($X \setminus x \in \mathcal{F}$), die Möglichkeit bestehen muss, entweder ein weiteres Element $y \neq x$ aus $X \setminus Y$ an der Entnahme beteiligen zu können ($X \setminus \{x, y\} \in \mathcal{F}$), oder ein Element $y \in Y$ zum Ausgleich hinzufügar ist ($X \setminus x \cup y \in \mathcal{F}$).

Umgekehrt muss ein $x \in Y \setminus X$ ohne weiteres als Beigabe durchgehen ($X \cup x \in \mathcal{F}$), andernfalls aber wenigstens ein $y \in Y \setminus X$ dafür hinzuziehen ($X \cup \{x, y\} \in \mathcal{F}$), oder ein $y \in X \setminus Y$ ersetzen können ($X \cup x \setminus y \in \mathcal{F}$).

2.4.1 Beispiele

Auffällig wurden diese Mengensysteme unter anderem dadurch, dass die Definition auch auf die Basismenge von Matroiden zutrifft. Überdies sind Matroid-Basismengen gar genau die Δ -Matroide, in denen alle Mengen die gleiche Kardinalität besitzen. Zu genau diesen speziellen Δ -Matroiden äquivalente⁵¹ Strukturen waren auch schon vorher ins Blickfeld geraten als Bimatroide bei Kung [Kun78] und als „linking systems“ in Zusammenhang mit bipartiten Graphen und Matchings bei Schrijver [Sch79]. Sie werden in [GGK00] auch als „twisted matroids“ bezeichnet.

⁵⁰Delta-Matroide

⁵¹siehe 2.4.2

XIII) Ein konkretes Beispiel \mathcal{D}_1 , $E = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{cccccc} & & \{1, 2, 3\} & & \{2, 3, 4\} & & \\ & & & & & & \\ \{1, 2\} & & \{1, 3\} & & \{2, 4\} & & \{3, 4\} & & \{2, 3\} \\ & & & & & & & & \\ & & \{2\} & & \{3\} & & & & \end{array}$$

zeigt, dass die leere Menge sich nicht zwingend im Δ -Matroid aufhält, das heißt, im Gegensatz zum Greedoid ist nicht ad hoc eine im Mengensystem enthaltene Menge bekannt.

Lineare Δ -Matroide entstehen als Sammlung von Untermengen einer Indexmenge, die Spalten bzw. Zeilen einer symmetrischen Matrix indiziert. Eine solche Untermenge gehört zum Δ -Matroid, wenn die Untermatrix aus den Zeilen und Spalten, die sie indiziert, invertierbar ist. Auf die gleiche Weise kommt man zu einem Δ -Matroid, wenn eine antisymmetrische Matrix über einem beliebigen Körper zur Grundlage dient, deren Einträge auf der Diagonale alle auf 0 lauten.

2.4.2 Optimierung

Grundlegende Eigenschaften

Dieser Abschnitt beginnt mit einigen Erkenntnissen, die im Hinblick auf die Entwicklung eines Algorithmus benötigt werden.

Unmittelbar aus der gegebenen Definition der Δ -Matroide geht eine Tatsache hervor, die den gewählten Namen für diese Art von Mengensystemen noch passender wirken lässt und die in die Lage versetzt, aus einem vorhandenen Δ -Matroid einen Fundus von solchen zu erzeugen.

Proposition 2.23.

Ist \mathcal{D} ein Δ -Matroid und $A \subseteq E$, so ist auch $\mathcal{D} \Delta A$ ein Δ -Matroid.

Dermaßen durch Twisten⁵² miteinander in Beziehung stehende Δ -Matroide werden **äquivalent** genannt.⁵³

⁵²siehe 1.1.4

⁵³vgl. [Bou87]

Beweis

$X, Y \in \mathcal{D} \Delta A$ bedeutet $X \Delta A, Y \Delta A \in \mathcal{D}$. Mit $x \in X \Delta Y$ ist x zugleich auch in $X \Delta A \Delta Y \Delta A$, da ein Blick auf die Eigenschaften der Δ -Operation⁵⁴ verrät, dass die beiden Terme eine identische Menge bezeichnen. Dort residiert nach Definition auch ein y , welches $X \Delta A \Delta \{x, y\}$ erfüllt, was soviel heißt wie $X \Delta \{x, y\} \in \mathcal{D} \Delta A$. ■

Weitere Eigenschaften beruhen auf Beobachtungen von Chandrasekaran und Kabadi.⁵⁵

Lemma 2.24.

Das Komplemente-Dual $\mathcal{D}^{()}$ eines Δ -Matroids \mathcal{D} ist Δ -Matroid.*

Beweis

Die Definition überträgt sich ohne weitere Hindernisse auf das Komplemente-Dual, wenn man die letzten beiden Gleichungen aus Lemma 1.5, insbesondere für $(E \setminus X) \Delta \{x, y\} = E \setminus (X \Delta \{x, y\})$ zu Rate zieht. ■

Lemma 2.25.

In einem Δ -Matroid ist das Mengensystem aller minimalen Mengen die Basismenge eines Matroids. Gleiches gilt für das Mengensystem der maximalen Mengen.

Beweis

Sich zunächst den minimalen Mengen eines Δ -Matroids \mathcal{D} widmend, stellt man fest, dass diese alle von gleicher Anzahl sind.

Denn: Gäbe es verschieden große, dann ermöglichte dies Paare $X, Y \in \text{MIN}(\mathcal{D})$ mit $|X| < |Y|$. Dabei ist $X \subseteq Y$ auf Grund der Minimalität von Y ausgeschlossen. Stehen nun X und Y für ein solches Paar mit minimalem $|X \setminus Y| (> 0)$ und bestimmt man nun zu $x \in X \setminus Y$ ein $y \in X \Delta Y$ für $X \Delta \{x, y\} \in \mathcal{D}$, dann scheidet $X \setminus \{x, y\}$ als Erscheinungsform des Δ -Terms wegen der Minimalität von X aus. Folglich ist $y \in Y \setminus X$ und $X \setminus x \cup y \in \mathcal{D}$. Dieses enthält nach Bem. 1.1 eine minimale Menge X' mit $|X'| \leq |X \setminus x \cup y| = |X| < |Y|$ und widersprüchlicherweise $|X' \setminus Y| \leq |(X \setminus x \cup y) \setminus Y| = |X \setminus Y| - 1$.

Aus der Gleichmächtigkeit aller Mengen folgt nun auch, dass alle Mengen aus \mathcal{D} mit ebendieser Mächtigkeit minimal sind.

⁵⁴siehe 1.1.4

⁵⁵vgl. [CK88]

Um dem Austauschaxiom Genüge zu tun, befasse man sich nun erneut mit zwei verschiedenen minimalen Mengen X und Y des Δ -Matroids \mathcal{D} und einem $x \in X \setminus Y$. Da die Minimalität wieder $X \setminus \{x, y\}$ unmöglich macht, muss $X \setminus x \cup y$ mit einem $y \in Y \setminus X$ zu \mathcal{D} gehören und zudem aus Anzahlgründen minimale Menge sein. Lemma 2.4 überzeugt somit von der Richtigkeit der Aussage.

Gleiches gilt für die maximalen Mengen $\text{MAX}(\mathcal{D})$, weil mit Lemma 2.24 $\text{MIN}(\mathcal{D}^{(*)})$ eine Matroid-Basismenge ausmacht. Damit ist aber auch das Komplemente-Dual $\text{MIN}(\mathcal{D}^{(*)})^{(*)}$ nach Prop. 2.8 eine Matroid-Basis, weil es nach Bem. 1.4 eben gleich $\text{MAX}(\mathcal{D})$ ist. ■

Idee zur Verwendung des Matroid-Greedy

Bouchet und Cunningham⁵⁶ begründen damit den folgenden Gedankengang: Wenn ausgehend von einer nicht notwendig nur positiven Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ über dem Δ -Matroid optimiert werden soll, so wird diese Gewichtsfunktion doch positiv bei Umdrehen des Vorzeichens auf

$$N := \{e \in E \mid c(e) < 0\} \text{ zu } \bar{c} : E \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \begin{array}{l} \bar{c}(e) = c(e), \quad e \in E \setminus N \\ \bar{c}(e) = -c(e), \quad e \in N \end{array},$$

und weiter erkennt man für beliebiges $X \subseteq E$, dass

$$\begin{aligned} \bar{c}(X \Delta N) &= \bar{c}(X \setminus N) + \bar{c}(N \setminus X) = c(X \setminus N) - c(N \setminus X) \\ &= c(X \setminus N) - (c(N) - c(X \cap N)) = c(X) - c(N). \end{aligned}$$

Da $c(N)$ im Optimierungskontext eine Konstante beschreibt, ist Optimierung auf \mathcal{D} bezüglich c also gleichbedeutend mit der Optimierung auf $\mathcal{D} \Delta N$ bezüglich \bar{c} , insofern als die gesuchte optimale Menge lediglich um N symmetrisch differiert.

Die nicht negative Funktion \bar{c} wird ihr Optimum mit Sicherheit auf einer maximalen Menge des Mengensystems $\mathcal{D} \Delta N$ erreichen, welches nach bisherigen Erkenntnissen⁵⁷ ein Δ -Matroid ist. Das heißt, wenn man den Bereich der maximalen Mengen dort absucht, bewegt man sich genau in einer Basismenge eines Matroids,⁵⁸ kann also den (MGA) auf $\mathcal{H}(\text{MAX}(\mathcal{D} \Delta N))$ zum Einsatz

⁵⁶vgl. [BC95]

⁵⁷siehe Prop. 2.23

⁵⁸siehe Lemma 2.25

bringen, der das Optimum der Funktion \bar{c} dann bei einer Basis finden wird. Durch Bem. 1.1 erweist sich $\mathcal{H}(\text{MAX}(\mathcal{D} \Delta N)) = \mathcal{H}(\mathcal{D} \Delta N)$.

Übertragung des Matroid-Greedy

Zu diesem Zweck werden also die Elemente aus E in der Reihenfolge sinkender Gewichte $\bar{c}(e_i)$ angeordnet zu $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $S_i := \{e_1, \dots, e_i\}$, $i = 1 \dots n$. Wenn X_i die nach dem i -ten Schritt bestehende Menge des Matroid-Greedy bezeichnet, bei $S_0 = X_0 = \emptyset$, dann lautet die Frage im $i + 1$ -ten Schritt also nach dem Enthaltensein von $X_i \cup e_{i+1}$ in einer Menge $Y \in \mathcal{D} \Delta N$.

Um durch einen Wechsel der Sichtweise einen Algorithmus präsentieren zu können, der direkt auf dem gegebenen Δ -Matroid \mathcal{D} und mit der Funktion c arbeitet, wird $X'_i := X_i \Delta (N \cap S_i)$ zur untersuchten Menge gemacht ($X'_0 = X_0 = \emptyset$).

Schreibt man f_i für $X_i \setminus X_{i-1} (\subseteq \{e_i\})$, so sieht man, dass der Aufbau gemäß der Sortierung, im Sinne von $X'_i \subseteq S_i$ und $X'_{i-1} \subseteq X'_i$, wie bei $X_i \subseteq S_i$ und $X_{i-1} \subseteq X_i$, wegen

$$\begin{aligned} X'_i &= X_i \Delta (N \cap S_i) = X_{i-1} \Delta f_i \Delta (N \cap S_{i-1}) \Delta (\{e_i\} \cap N) \\ &= X'_{i-1} \cup (f_i \Delta (\{e_i\} \cap N)) \end{aligned}$$

erhalten bleibt. Es zeigt sich, dass X'_{i-1} genau dann um e_i erweitert wird, wenn $e_i \notin N$ und $f_i = \{e_i\}$ oder wenn $e_i \in N$ und $f_i = \emptyset$ zusammenkommen.

Zu Ende des Algorithmus offenbart sich dann $X'_n = X_n \Delta N$ direkt als die eigentlich zu findende Menge.

Zur Transformation auf das Arbeiten auf \mathcal{D} verhilft nun die Feststellung

$$\begin{aligned} f_i &= \{e_i\} \\ \Leftrightarrow X_{i-1} \cup e_i &\in \mathcal{H}(\mathcal{D} \Delta N) \\ \Leftrightarrow X_{i-1} \cup e_i \cup C &\in \mathcal{D} \Delta N, \quad C \subseteq E \setminus S_i, \quad \text{denn wenn } C \cap S_i \neq \emptyset \\ &\text{mit einem } e_k \in C \cap S_i, \quad k < i, \quad \text{wäre bereits } X_{k-1} \cup e_k \subseteq X_{i-1} \cup e_i \cup C \\ &\text{in } \mathcal{H}(\mathcal{D} \Delta N) \text{ gewesen, was zu } e_k \in X_{i-1} \text{ geführt hätte } \nabla \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X_{i-1} \Delta \{e_i\} \Delta C \Delta (N \cap S_{i-1}) \Delta (N \setminus S_{i-1}) \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow X'_{i-1} \Delta \{e_i\} \Delta (\{e_i\} \cap N) \Delta (N \setminus S_i) \Delta C \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow X'_{i-1} \cup (\{e_i\} \setminus N) \cup K \in \mathcal{D}, \text{ mit } K = C \Delta (N \setminus S_i), \quad K \subseteq E \setminus S_i.
\end{aligned}$$

Der ausformulierte Algorithmus

Nun wird die daraus resultierende Formulierung als **Δ -Matroid-Greedy-Algorithmus (DMA)** zum Auffinden von $X \in \mathcal{F}$ mit $c(X) \geq c(Y)$ für alle $Y \in \mathcal{F}$ bei Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ zusammengestellt:

1. Ordne E so zu $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, dass $|c(e_i)| \geq |c(e_{i+1})|$ für $i = 1 \dots n-1$
2. $T_i := \{e_i, \dots, e_n\}$, $i = 1 \dots n+1$
3. $X := \emptyset$, $i := 1$
4. Wenn $c(e_i) \geq 0$ und es ex. $F \in \mathcal{F}$ mit $X \cup e_i \subseteq F \subseteq X \cup T_i$,
dann $X := X \cup e_i$
5. Wenn $c(e_i) < 0$ und es ex. kein $F \in \mathcal{F}$ mit $X \subseteq F \subseteq X \cup T_{i+1}$,
dann $X := X \cup e_i$
6. Wenn $i = n$ STOP, sonst $i := i + 1$
7. Gehe zu 4.

Hier ist bemerkenswert, dass also die Mengen X in den Stadien des Algorithmus, da er noch nicht beendet ist, selbst keine Mitglieder des Mengensystems \mathcal{D} sein müssen.

Chandrasekaran und Kabadi benutzen den (DMA) zur Definition der Δ -Matroide, um dann nachzuweisen, dass dies zur oben gegebenen Einführung gleichwertig ist.

Satz 2.26.

Ein Mengensystem \mathcal{F} ist genau dann Δ -Matroid, wenn der (DMA) für jedes $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ das Optimum findet.

Beweis: [CK88]

Zeitaufwand

Gehen wir zwecks Laufzeitbetrachtung davon aus, dass ein gewöhnliches Orakel gestellt wird, welches auf Nachfrage verrät, ob eine Menge zu \mathcal{F} gehört, so wäre dennoch die Fragestellung, die der Algorithmus in jedem Schritt beantwortet haben möchte, nur durch, abhängig von $|E|$, exponentiell viele Anfragen an jenes Orakel zu klären.

Allgemein formuliert wiederholt sich fortwährend die Frage nach der Existenz eines $F \in \mathcal{F}$, das in der Weise $C \subseteq F \subseteq E \setminus D$ flankiert wird, wenn disjunkte Mengen $C, D \subseteq E$ vorgegeben worden sind. Eine Quelle, die genau dies beantworten kann, wird auch als **Separationsorakel** bezeichnet. Abgesehen von dieser Fragestellung benötigt der (DMA) augenscheinlich nur eine polynomiell begrenzte Laufzeit.

Bouchet und Cunningham⁵⁹ bringen an dieser Stelle den Begriff der „algorithmic tractability“ ein. Diese „Gefügigkeit“ soll bemessen werden an der möglichen Effizienz eines Verfahrens, welches die oben gestellte Frage für ein Mengensystem \mathcal{F} allgemein beantwortet.

Eine äquivalent schwierige Problemstellung ist die Berechnung von $f(A, B) = \max_{F \in \mathcal{F}} (|F \cap A| - |F \cap B|)$, weil einerseits der Optimierungsalgorithmus selbst das Problem bei geeigneter Wahl der Gewichte (1 auf A , -1 auf B , 0 sonst) lösen würde und andererseits die Frage „ $f(A, B) = |A|$?“ oben als Orakel-Frage auftritt.

Eine verlässliche Aussage darüber, ob der (DMA) oder gleichwertigerweise das Separationsorakel wirklich polynomiell auf ein gewöhnliches Mengensystem-Orakel zurückgeführt werden können, lässt sich daraus nicht gewinnen. In [CK88] findet man noch eine laufzeitbezogene Bemerkung, die dem (DMA) bei Vorhandensein des üblichen Orakels zuzüglich der Kenntnis einer beliebigen Startmenge $X_0 \in \mathcal{D}$ polynomielle Laufzeit, genauer gar $O(n^3)$, auf dem Δ -Matroid \mathcal{D} zugestehen will, ohne dass diese Behauptung näher begründet wäre.

Die beschriebene Funktion f fungiert bekanntlich⁶⁰ als Δ -Rangfunktion des Δ -Matroids und birgt als solche Merkmale, die der Submodularität ähneln.

⁵⁹vgl. [BC95]

⁶⁰siehe 1.3.3

2.4.3 Bisubmodularität

Ein Analogon zur Rangfunktion ist geschaffen worden, das im Hinblick auf die Polyeder-Theorie geeignet ist, für die Facetten eines passenden Polyeders herangezogen zu werden.⁶¹ Es handelt sich um die mit zwei disjunkten Argumenten ausgestattete Δ -Rangfunktion aus 1.3.3.

Die Erweiterung der Submodularität

Im Dienste des Δ -Matroids erweist sich diese Funktion bei genauer Betrachtung als **bisubmodular**⁶² oder auch **verallgemeinert submodular**,⁶³ was für eine Funktion $f : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ bedeuten soll, dass die Bedingung

$$\begin{aligned} & f(X, Y) + f(\hat{X}, \hat{Y}) \\ \geq & f(X \cap \hat{X}, Y \cap \hat{Y}) + f((X \setminus \hat{Y}) \cup (\hat{X} \setminus Y), (Y \setminus \hat{X}) \cup (\hat{Y} \setminus X)) \\ & \text{bzw.} + f((X \cup \hat{X}) \setminus (Y \cup \hat{Y}), (Y \cup \hat{Y}) \setminus (X \cup \hat{X})) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Argumente der letzten beiden Summanden sind identisch.⁶⁴

Die Bisubmodularität ist insofern eine Verallgemeinerung des Submodularitätsbegriffs, als f als Funktion der ersten Komponente $f(\cdot, \emptyset) : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ submodular ist. Das und einige weitere einfache Eigenschaften solcher Funktionen werden zunächst zusammengetragen und die Beziehung der beiden Begriffe zueinander eingegrenzt.

Lemma 2.27.

Seien \hat{f} und \hat{f}' bisubmodulare Funktionen auf 3^E , f und f' submodulare Funktionen auf 2^E , $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ und $T \subseteq E$. Dann gilt

- (1) λf , $f + f'$ und $f + \theta$ sind allesamt submodulare Funktionen auf 2^E .
- (2) $\lambda \hat{f}$, $\hat{f} + \hat{f}'$ und $\hat{f} + \theta$ sind allesamt bisubmodulare Funktionen auf 3^E .
- (3) $g(X) := \hat{f}(X \setminus T, X \cap T)$ definiert eine submodulare Funktion auf 2^E .

⁶¹siehe 5.2

⁶²vgl. [Nak93]

⁶³vgl. [CK88]

⁶⁴zur Überprüfung siehe Abb. 5.1

(4) $\hat{g}(X, Y) := f(X \cap T) + f(T \setminus Y)$ definiert eine bisubmodulare Funktion auf 3^E .

(5) Sind f, f' zusätzlich monoton ($f(X) \leq f(Y)$ wenn $X \subseteq Y$), so auch $\lambda f, f + f'$ und $f + \theta$. Außerdem definiert $\hat{g}(X, Y) := f(X)$ dann eine bisubmodulare Funktion auf 3^E .

Dabei wird die Symbolik der Operationen auf den Abbildungen wie üblich interpretiert.⁶⁵

Beweis

Skalare Multiplikation, Summe und Verschiebung um eine Konstante erweisen sich als Trivialitäten beim Nachrechnen. Dazu bei (3) bzw. (4)

$$\begin{aligned}
g(X) + g(Y) &= f(X \setminus T, X \cap T) + f(Y \setminus T, Y \cap T) \\
&\geq f((X \cap Y) \setminus T, X \cap Y \cap T) + f((X \cup Y) \setminus T, (X \cup Y) \cap T) \\
&= g(X \cap Y) + g(X \cup Y) \text{ für } X, Y \subseteq E \text{ sowie} \\
\hat{g}(X_1, Y_1) + \hat{g}(X_2, Y_2) &= f(X_1 \cap T) + f(T \setminus Y_2) \\
&\quad + f(X_2 \cap T) + f(T \setminus Y_1) \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.5}}{\geq} f(T \setminus (Y_2 \setminus X_1)) + f(T \cap (X_1 \setminus Y_2)) \\
&\quad + f(T \cap (X_2 \setminus Y_1)) + f(T \setminus (Y_1 \setminus X_2)) \\
&\geq f(T \cap (X_1 \setminus Y_2) \cap (X_2 \setminus Y_1)) + f(T \cap ((X_1 \setminus Y_2) \cup (X_2 \setminus Y_1))) \\
&\quad + f(T \setminus ((Y_2 \setminus X_1) \cup (Y_1 \setminus X_2))) + f(T \setminus ((Y_2 \setminus X_1) \cap (Y_1 \setminus X_2))) \\
&= f(T \cap X_1 \cap X_2) + f(T \setminus (Y_2 \cap Y_1)) \\
&\quad + f(T \cap ((X_1 \setminus Y_2) \cup (X_2 \setminus Y_1))) + f(T \setminus ((Y_2 \setminus X_1) \cup (Y_1 \setminus X_2))) \\
&= \hat{g}(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) \\
&\quad + \hat{g}((X_1 \setminus Y_2) \cup (X_2 \setminus Y_1), (Y_2 \setminus X_1) \cup (Y_1 \setminus X_2)).
\end{aligned}$$

für $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in 3^E$, weil $(X_1 \setminus Y_2) \cap (X_2 \setminus Y_1) = X_1 \cap X_2$ und $(Y_2 \setminus X_1) \cap (Y_1 \setminus X_2) = Y_1 \cap Y_2$, wenn $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \emptyset$.⁶⁶ Was (5)

⁶⁵siehe Symbolverzeichnis

⁶⁶siehe zur Unterstützung Abb. 5.1

angeht, ist die Monotonie jeweils einfach nachzurechnen und

$$\begin{aligned} \hat{g}(X_1, Y_1) + \hat{g}(X_2, Y_2) &= f(X_1) + f(X_2) \geq f(X_1 \cap X_2) + f(X_1 \cup X_2) \\ &\geq f(X_1 \cap X_2) + f((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2)) \\ &= \hat{g}(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) \\ &\quad + \hat{g}((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)). \end{aligned}$$

■

Korollar 2.28.

Ist \hat{f} eine bisubmodulare Funktion auf 3^E , so ist $f : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ submodular, wenn

$$f(X) = \hat{f}(X, \emptyset), \quad X \subseteq E.$$

Beweis

(3) aus Lemma 2.27 mit $T = \emptyset$.

■

Korollar 2.29.

Ist f eine submodulare Funktion auf 2^E , so ist $\hat{b} : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ bisubmodular, wenn

$$\hat{b}(X, Y) = f(X) + f(E \setminus Y) - f(E), \quad (X, Y) \in 3^E.$$

Beweis

(4) und (2) aus Lemma 2.27 mit $T = E$ und $\theta = f(E)$.

■

Der Δ -Rang des Δ -Matroids

r^Δ besitzt auf dem Δ -Matroid weitere Eigenschaften, die an frühere Rangfunktionseigenschaften erinnern mögen, und erneut ist auch ein Umkehrschluss zulässig:

Satz 2.30.

Die Δ -Rangfunktion r^Δ eines Δ -Matroids vereint die Eigenschaften

- (1) r^Δ ganzzahlig,
- (2) r^Δ bisubmodular,
- (3) $r^\Delta(\emptyset, \emptyset) = 0$,
- (4) $r^\Delta(\{e\}, \emptyset) \in \{0, 1\}$ für $e \in E$,
- (5) $r^\Delta(X, \hat{Y}) \leq r^\Delta(\hat{X}, Y)$ für $(X, \hat{Y}), (\hat{X}, Y) \in 3^E$, $X \subseteq \hat{X}$, $Y \subseteq \hat{Y}$.

Umgekehrt ist jede Funktion auf 3^E , die diesen Bedingungen nachkommt, Δ -Rangfunktion eines Δ -Matroids und beschreibt dieses in eindeutiger Weise.

Beweis

Dass die Eigenschaften für r^Δ erfüllt sind, findet man in Satz 4, [CK88]. Sich weiter auf die dortigen Erkenntnisse stützend, gelingt der Beweis der Rückrichtung mit Hilfe der Polyeder-Theorie in Gestalt von Kor. 5.12. Die Eindeutigkeit liegt in der Natur des Δ -Rangs.⁶⁷

■

Proposition 2.31.

Die Δ -Rang-Funktion r^Δ eines Matroids \mathcal{M} ergibt sich durch dessen Rangfunktion $r_{\mathcal{M}}$ sofort als

$$r^\Delta(X, Y) = r_{\mathcal{M}}(X),$$

während das Δ -Matroid der Basismenge von \mathcal{M} durch die Δ -Rangfunktion $b^\Delta = r_{\mathcal{B}(\mathcal{M})}^\Delta$ mit

$$b^\Delta(X, Y) = r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(E \setminus Y) - r_{\mathcal{M}}(E)$$

gekennzeichnet ist.

Beweis

Die erste Behauptung wird bestätigt durch Bem. 2.3. Zweitens wissen wir aus Kor. 2.29, dass ein so definiertes b^Δ bisubmodular wegen submodularem $r_{\mathcal{M}}$ ist, ganzzahlig ist es ohnehin. Daneben zeigt sich $b^\Delta(\emptyset, \emptyset) = 0$ und

⁶⁷siehe 1.3.3

$b^\Delta(\{e\}, \emptyset) = r_{\mathcal{M}}(\{e\}) \in \{0, 1\}$. Auch die gegenläufige Monotonie (5) geht mit der Monotonie von $r_{\mathcal{M}}$ konform. Nach Satz 2.30 handelt es sich bei b^Δ also um die Δ -Rangfunktion eines Δ -Matroids \mathcal{D} . Nun ist seit 1.3.3 bekannt, dass

$$X \in \mathcal{D} \Leftrightarrow b^\Delta(X, E \setminus X) = |X| \Leftrightarrow 2r_{\mathcal{M}}(X) = r_{\mathcal{M}}(E) + |X|.$$

Dies ist einerseits für $X \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ sicher richtig. Andererseits schließt man aus der Gleichung wegen $r_{\mathcal{M}}(X) \leq |X|$, dass $r_{\mathcal{M}}(X) \geq r_{\mathcal{M}}(E)$. Folglich ist das Gleichungskettenende äquivalent zu $X \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ und demzufolge ist $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathcal{M})$ erreicht. ■

Mit Hilfe des Bisubmodularitätsbegriffs kann ein beachtlich großer Anteil des Transfers von Matroid-Wissen auf eine Theorie zu Polymatroiden analog für Δ -Matroide geleistet werden.⁶⁸

2.4.4 Operationen auf Δ -Matroiden

Minoren

Auch Δ -Matroide können eingeschränkt und kontrahiert werden, ohne dass sie ihre Eigenschaft verlieren.

Bemerkung 2.32.

Für \mathcal{D} als Δ -Matroid und $T \subseteq E$ sind auch Restriktion $\mathcal{D}|_T$ und Kontraktion \mathcal{D}/T wieder Δ -Matroide. Die **Kontraktion** eines Δ -Matroids ist dabei, etwas abweichend von 1.1.3 für beliebige T definiert als

$$\mathcal{D}/T = \{X \subseteq E \setminus T \mid X \cup T \in \mathcal{D}\},$$

weil der Begriff Basis im Zusammenhang mit Δ -Matroiden nichts zum Verständnis beiträgt.

Beweis

Es ist trivial, dass die definierende Bedingung für Δ -Matroide verlustfrei auf die Einschränkung übergeht. Bei der Kontraktion handelt es sich ebenfalls um eine Restriktion, denn leicht zu sehen ist

$$\mathcal{D}/T = \mathcal{D} \Delta T|_{E \setminus T}.$$

Der Einsatz von Prop. 2.23 führt zur Einsicht. ■

⁶⁸siehe 5.1.3

Mengenweise Vereinigung

Diverse Möglichkeiten der Kombination von Δ -Matroiden zu neuen Mengensystemen wie z.B. Komposition oder Summe sind u.a. in [BC95] behandelt worden. Ebenso damit verbundene Problemstellungen, die teilweise wieder Verallgemeinerungen entsprechender Fragestellungen aus dem Matroid-Kontext darstellen.⁶⁹ Ein ausgewähltes Ergebnis lautet

Proposition 2.33.

Sind $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ Δ -Matroide, so ist

$$\mathcal{D} = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{D}_1, Y \in \mathcal{D}_2, X \cap Y = \emptyset\}$$

ebenfalls Δ -Matroid.

Beweis: [Bou89]

Diese Systembildung bedeutet eine Einschränkung gegenüber der üblichen mengenweise Vereinigung, umfasst aber die direkte Summe. Als Beispiel dienen $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ und $\mathcal{D}_2 = \{\{2\}, \{3\}\}$, die zum Δ -Matroid $\mathcal{D} = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ führen, während $\mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2 = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ keins darstellt, weil $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$ und $x = 2$ die Definitionsbedingung zur Strecke bringen.

Schnitt

Der Schnitt zweier Δ -Matroide, sei Optimierung das Ziel oder auch nur das Auffinden einer Menge dort gewünscht, nimmt im Allgemeinen bei gewöhnlichem Mengensystem-Orakel exponentiell viel Zeit in Anspruch.⁷⁰ Das Problem verkörpert eine Generalisierung des „matroid parity problem“, welches von Lovász⁷¹ per Angabe einer speziellen Instanz für schwer lösbar befunden wurde, sofern es sich nicht um ein linear repräsentierbares bzw. lineares Matroid handelt. In [CK88] findet sich dazu noch

Satz 2.34.

Sind $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ Δ -Matroide, für die jeder k -Abschnitt, $0 \leq k \leq |E|$, ebenfalls Δ -Matroid ist, dann lässt sich eine Menge optimalen Gewichts bezüglich einer Zielfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ in polynomieller Zeit bestimmen.

⁶⁹dazu vgl. auch [GIM03]

⁷⁰vgl. [BJ00]

⁷¹vgl. [Lov80]

Beweis: Rückführung auf Matroid-Schnitt, [CK88]

Dass diese Forderung nicht grundsätzlich erfüllt ist, zeigt der 3-Abschnitt von $\widetilde{\mathcal{M}}\Delta 4$ in Beispiel XVI,⁷² wo sich zu $X = \{1, 2\}$ und $3 = y \in Y = \{3, 4, 5\}$ weder das ursprünglich vorhandene $\{1, 2, 3, 4\}$, noch $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$ oder $\{2, 3\}$ auffinden lassen.

Dualität

Bei der Bildung des Komplemente-Duals befindet man sich in der angenehm vorteilhaften Situation von Lemma 2.24 und zusätzlich gilt⁷³

$$r_{\mathcal{D}^{(*)}}^{\Delta}(X, Y) = |X| - |Y| + r^{\Delta}(Y, X).$$

2.5 Eine Symbiose aus Δ -Matroid und Greedoid

2.5.1 Getrennte Wege

Von den bis hierher zitierten Greedoid-Klassen fällt keine in den Bereich der Δ -Matroide. Erst die Matroide passen in beide Gebiete.

- XIV) Das eklatant simple Gauß-Greedoid $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist nicht zugleich Δ -Matroid, weil die 1 aus $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset$ weder solo noch in Begleitung entfernbar ist.

Umgekehrt können Δ -Matroide wegen der eventuell fehlenden leeren Menge ohnehin in kein Greedoid-Korsett gezwängt werden.

Auf Seiten der Δ -Matroide ist zwar ein eleganter Algorithmus (DMA) für beliebige Gewichtsfunktionen vorhanden, jedoch hängt dieser vom Vorhandensein eines Separationsorakels ab, was möglicherweise eine schärfere Forderung gegenüber dem gewöhnlichen Orakel bedeutet.⁷⁴ Andererseits kennen wir eine Kollektion von Greedoiden, denen zwar ein gewöhnliches Orakel zum Algorithmus polynomieller Laufzeit gereicht, deren Verfahren aber nur mit

⁷²siehe 3.4.2

⁷³vgl. [CK88]

⁷⁴siehe 2.4.2

eingeschränkten (positiven) Zielfunktionen fertig werden können, wenn sie es nicht bis zum Gauß-Greedoid bringen.⁷⁵

2.5.2 Gemeinsame Sache

Kombiniert man beide Eigenschaften, genauer gesagt, begegnet man einem Δ -Matroid, das zugleich als Greedoid fungiert, dann können die Schwierigkeiten mit dem Separationsorakel bei günstiger Greedoid-Beschaffenheit aus dem Weg geräumt werden.

Satz 2.35.

Greedoide mit restriktionsstabiler starker Austauscheneigenschaft können das Separationsorakel mittels des gewöhnlichen Mengensystem-Orakels in polynomieller Zeit simulieren.

Beweis

Das Separationsorakel⁷⁶ steht folgender Frage gegenüber:

$$C, D \subseteq E, \quad C \cap D = \emptyset : \quad \exists_{F \in \mathcal{F}} \quad C \subseteq F \subseteq E \setminus D \quad ?$$

Dem Abschnitt 2.3.4 ist die Erkenntnis zu entnehmen, dass nicht negative Gewichtsfunktionen in polynomieller Zeit über den Greedoiden mit starker Austauscheneigenschaft optimiert werden können. Da hier der Umstand vorliegt, es mit einer restriktionsstabilen starken Austauscheneigenschaft zu tun zu haben, ist uns nun mit dem (MGA) eine schnelle Möglichkeit zur Hand gegeben, eine solche Gewichtsfunktion auf die Mengen in $\mathcal{F}|_{E \setminus D}$ anzusetzen.

Wird diese spezifiziert als $\bar{c} : E \setminus D \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\bar{c}(e) = 1$ für $e \in C$ und $\bar{c}(e) = 0$ für $e \notin C$, dann gibt der erzielte maximale Wert von \bar{c} genau die gewünschte Antwort, weil für die Menge $Y \in \mathcal{F}|_{E \setminus D}$, die den maximalen Wert erzielt, gilt, dass $\bar{c}(Y) = |C| \Leftrightarrow C \subseteq Y$, was die positive Beantwortung der Fragestellung oben insgesamt gleichwertig dazu macht, dass $|C|$ bei der Optimierung als Gewicht erzielt werden kann. ■

Korollar 2.36.

Ist ein Mengensystem \mathcal{F} sowohl Δ -Matroid als auch Greedoid und besitzt es als solches die restriktionsstabile starke Austauscheneigenschaft, dann lässt sich

⁷⁵siehe 2.3.4

⁷⁶siehe 2.4.2

für eine beliebige Gewichtung der Grundmenge, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, die „schwerste“ Menge $X \in \mathcal{F}$ ($\sum_{x \in X} c(x) \geq \sum_{y \in Y} c(y) \quad \forall Y \in \mathcal{F}$) bei polynomielltem Zeitaufwand bestimmen, sofern ein gewöhnliches Orakel zur Verifizierung der Mitgliedschaft im Mengensystem vorliegt.

Beweis

Verwendet man zur Bestimmung der optimalen Menge den Algorithmus (DMA) aus 2.4.2, so steht und fällt dessen Laufzeit eben mit der Effizienz des Separationsorakels insofern, als der Zeitaufwand für die anderen Schritte (u.a. Sortierung) offensichtlich polynomiell von n abhängig ist.

Das Einfügen des durch Satz 2.35 inspirierten Verfahrens als Stellvertreter für das Separationsorakel sprengt sicher nicht die Grenzen der Darstellbarkeit der Laufzeit als Polynom in n , da es höchstens zur Multiplikation der einzelnen Laufzeiten führt. ■

2.5.3 Der Algorithmus (KGA)

Diese Erkenntnisse fließen nun ein in die Ausformulierung eines spezialisierten Verfahrens zum **Kombinierten Greedy-Algorithmus (KGA)**, der die entsprechenden Algorithmen ineinander verschachtelt. Er gestaltet sich wie folgt; gesucht ist wiederum $\max \{c(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ mit $c : E \rightarrow \mathbb{R}$:

1. Ordne E so zu $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, dass $|c(e_i)| \geq |c(e_{i+1})|$ für $i = 1 \dots n-1$
2. $T_i := \{e_i, \dots, e_n\}$, $i = 1 \dots n$
3. $X := \emptyset$, $i := 1$
4. Wenn $c(e_i) \geq 0$
 - (a) $X^* := \emptyset$
 - (b) $T^* := \{x \in X \cup T_i \mid X^* \cup x \in \mathcal{F}\}$
 - (c) Wenn $T^* = \emptyset$
 - i. Wenn $|X^* \cap (X \cup e_i)| = |X \cup e_i|$ dann $X := X \cup e_i$
 - ii. Gehe zu 6.
 - (d) Bestimme $x_0 \in T^* \cap (X \cup e_i)$, falls jenes leer, $x_0 \in T^*$ beliebig
 - (e) $X^* := X^* \cup x_0$
 - (f) Gehe zu 4b.

5. Wenn $c(e_i) < 0$
 - (a) $X^* := \emptyset$
 - (b) $T^* := \{x \in X \cup T_{i+1} \mid X^* \cup x \in \mathcal{F}\}$
 - (c) Wenn $T^* = \emptyset$
 - i. Wenn $|X^* \cap X| < |X|$ dann $X := X \cup e_i$
 - ii. Gehe zu 6.
 - (d) Bestimme $x_0 \in T^* \cap X$, falls jenes leer, $x_0 \in T^*$ beliebig
 - (e) $X^* := X^* \cup x_0$
 - (f) Gehe zu 5b.
6. Wenn $i = n$ STOP sonst $i = i + 1$
7. Gehe zu 4.

Das geschickte Protokollieren in hier nicht erwähnten Zählvariablen erspart den erneuten Lauf durch die Mengen in 4(c)i und 5(c)i.

In den nächsten beiden Kapiteln werden Mengensysteme vorgestellt, die eine solche Kombination tatsächlich realisieren.

Kapitel 3

Getwistete Matroide

3.1 Motivation

Die herausragende Stellung der Matroide unter den Mengensystemen, ihre Konzilianz gegenüber linearer Optimierung und die tiefen Einsichten über ihre ästhetischen Strukturen verleiten dazu, sich einen ähnlich gearteten Aufbau von verwandten Mengensystemen zu erhoffen.

Ein nah verwandtes Mengensystem wird in diesem Kapitel vorgestellt, *expressis verbis* die getwisteten Matroide. Für ein Matroid $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$ und $A \in \mathcal{M}$ heißt

$$\mathcal{M} \Delta A = \{X \Delta A \mid X \in \mathcal{M}\}$$

getwistetes Matroid. Im vorangegangenen Kapitel wurden mit den Δ -Matroiden und den Greedoiden zwei Linien vorgestellt, entlang derer sich eine Verallgemeinerung von Matroiden entwickelt hat. Beide Konzepte bieten Platz für die getwisteten Matroide, die den Matroid-Status im Allgemeinen nicht halten können. Es werden aber einige Ähnlichkeiten zwischen getwisteten Matroiden und Gauß-Greedoiden zu Tage treten.

3.1.1 Äquivalenzklassen

Bereits in 2.4.2 wurde das Twisten von Mengensystemen kurz thematisiert. Die Natur der symmetrischen Differenz als zugrunde liegender Operation¹ er-

¹siehe 1.1.4

laubt es, die Mengensysteme innerhalb einer fixierten Grundmenge in Äquivalenzklassen einzuteilen, die auf der Relation

$$\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \exists_{A \subseteq E} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \Delta A$$

basieren.

Prop. 2.23 lehrt, dass die Δ -Matroide diese Äquivalenzklassenbildung als Ganzes überleben, weil das Twisten diesbezüglich eine abgeschlossene Operation darstellt. Dies führt auch unverzüglich zur ersten Beobachtung:

Proposition 3.1.

Das getwistete Matroid ist ein Δ -Matroid.

Lineare Δ -Matroide

Dieser Äquivalenzbegriff findet Verwendung im Bereich der Δ -Matroide, z.B. in [GIM03], wo **lineare Δ -Matroide** als diejenigen definiert werden, die äquivalent zu einem Δ -Matroid sind, das die Ansammlung von Indextmengen nicht singulärer Untermatrizen einer antisymmetrischen Matrix wiedergibt.² Im Zuge der dort vorgenommenen Verallgemeinerung des „matroid parity problem“³ zum „delta matroid parity problem“⁴ wird gezeigt, dass die linearen Matroide in die Klasse der linearen Δ -Matroide gehören, mit der unmittelbaren Folge:

Bemerkung 3.2.

Ein getwistetes lineares Matroid ist ein lineares Δ -Matroid.

Damit steht für diese ein effektiver Algorithmus zur Lösung des Paritätsproblems zur Verfügung, das darin besteht, eine Menge im Mengensystem auszumachen, die möglichst wenig Einzelteile von Paaren enthält, wobei diese Paare die Teile einer zuvor festgelegten Partitionierung der Grundmenge sind.

Während die Äquivalenzklassen der Matroid-Basen schon des öfteren inspiert worden sind,⁵ sollen nunmehr die der Matroide selbst in den Fokus gerückt werden. Wir werden sehen, dass jedes Matroid eine eigene Äquivalenzklasse erzeugt.

²siehe auch 2.4.1

³vgl. [Lov80]

⁴vgl. [GIM03]

⁵siehe 2.4.1

3.1.2 Ein Beispiel für Greedoide

In den beiden erwähnten umfassenden Abhandlungen zum Thema Greedoide, [KLS91] und [BZ92], werden getwistete Matroide zur Beispielgebung für Greedoide verwendet. In der letztgenannten treten sie als Zeuge für die Existenz von Greedoiden auf, die keine Intervall-Greedoide sind. Ferner werden dort seine Basen als Beschreibungen bezeichnet, einen Weg von der Twistmenge A zu einer Basis von $E \setminus A$ über unabhängige Mengen des Matroids zu finden.

Beide Referenzen beziehen sich auf die ursprüngliche, früheste Erwähnung der getwisteten Matroide durch Björner in [Bjö85]. Dort werden sie im Rahmen der „exchange languages“ in der geordneten Greedoid-Version als Sprache aus Wörtern betrachtet. Im Kontext hiesiger Mengensysteme äußert sich das wie folgt:

Proposition 3.3.

Beruhend auf einem Matroid \mathcal{M} und $A \subseteq E$ besitzt $\mathcal{M} \Delta A$ die Augmentierungseigenschaft (AE) .

Beweis

Seien $X, Y \in \mathcal{M} \Delta A$, $|X| < |Y|$. Dann gilt $X \Delta A, Y \Delta A \in \mathcal{M}$.

Fall 1: $(Y \setminus X) \cap A \neq \emptyset$

Wähle $y \in (Y \setminus X) \cap A \Rightarrow y \in X \Delta A$. Dann ist $(X \Delta A) \setminus y \in \mathcal{M}$, zudem $(X \Delta A) \setminus y = (X \cup y) \Delta A$, und damit $X \cup y \in \mathcal{M} \Delta A$.

Fall 2: $(Y \setminus X) \cap A = \emptyset$

Die Voraussetzung bewirkt $|Y \setminus X| > |X \setminus Y|$, der aktuelle Fall

$$\begin{aligned} A \setminus Y &= A \setminus X. \text{ Man zerlege } Y \Delta A = (Y \setminus A) \cup (A \setminus Y) \\ &= \underbrace{((Y \setminus X) \setminus A)}_{=Y \setminus X} \cup ((Y \cap X) \setminus A) \cup (A \setminus X) \text{ und analog} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \Delta A &= (X \setminus A) \cup (A \setminus X) \\ &= ((X \setminus Y) \setminus A) \cup ((Y \cap X) \setminus A) \cup (A \setminus X), \text{ um zu erkennen,} \end{aligned}$$

dass $|Y \Delta A| > |X \Delta A|$. Das somit nach Matroideigenschaft existierende $y \in (Y \Delta A) \setminus (X \Delta A)$ mit $(X \Delta A) \cup y \in M$ entstammt demnach $Y \setminus X$, damit keineswegs A , und garantiert so $(X \Delta A) \cup y = (X \cup y) \Delta A \in \mathcal{M}$. Daraus folgt $X \cup y \in \mathcal{M} \Delta A$. ■

Korollar 3.4.

Das getwistete Matroid $\mathcal{M} \Delta A$ ist ein Greedoid.

Beweis

Definitionsimmanent ist $A \in \mathcal{M}$. Darum $\emptyset = A \Delta A \in \mathcal{M} \Delta A$. Ergänzt um Prop. 3.3 erhält man die Behauptung. ■

Wie man sieht, hängt die Gültigkeit der Augmentierungseigenschaft (AE) nicht von der Unabhängigkeit von A ab. Hingegen ist $A \in \mathcal{M}$ essenziell, um die leere Menge mitzunehmen und damit entscheidend dafür, überhaupt ein Greedoid zu erhalten. Dieses Kapitel widmet sich im Wesentlichen der präzisieren, bisher weitgehend unbekanntem Einordnung der getwisteten Matroide in den Kontext der Greedoide. Darum wurde die Unabhängigkeit von A in \mathcal{M} zur Vereinfachung mit in die Definition aufgenommen.

3.2 Twisten und Unabhängigkeit

Unabhängig von Augmentierungsangelegenheiten stellt sich zunächst die Frage, wie die symmetrische Differenz mit Unabhängigkeitssystemen umgeht. Beim Twisten werden die Elemente aus A „umgeklappt“. Daraus leitet sich ein Kriterium ab, wann durch diese Maßnahme ein Unabhängigkeitssystem entsteht.

Lemma 3.5.

Für ein Mengensystem \mathcal{F} gilt die Aussage:

$\mathcal{F} \Delta A$ ist ein Unabhängigkeitssystem

$$\iff \forall C \in \mathcal{F} \quad \forall X_1 \subseteq C \setminus A \quad \forall X_2 : C \cap A \subseteq X_2 \subseteq A \quad X_1 \cup X_2 \in \mathcal{F}.$$

Beweis

' \Rightarrow ' : Seien $C \in \mathcal{F}$, $X_1 \subseteq C \setminus A$, $C \cap A \subseteq X_2 \subseteq A$.

Es folgt $(X_1 \cup X_2) \Delta A \subseteq C \Delta A$, da

$(X_1 \cup X_2) \setminus A = X_1 \setminus A \subseteq C \setminus A$ und

$A \setminus (X_1 \cup X_2) \subseteq A \setminus X_2 \subseteq A \setminus (C \cap A) = A \setminus C$.

Wegen $C \Delta A \in \mathcal{F} \Delta A$ also nach Vor. $(X_1 \cup X_2) \Delta A \in \mathcal{F} \Delta A$

$\Rightarrow X_1 \cup X_2 \in \mathcal{F}$.

' \Leftarrow ' : Seien $Y \in \mathcal{F} \Delta A$, $X \subseteq Y$. D.h. $C' := Y \Delta A \in \mathcal{F}$.

$C' \cap A = (Y \Delta A) \cap A = A \setminus Y \subseteq A \setminus X \subseteq A$.

$X \setminus A \subseteq Y \setminus A = (Y \Delta A) \setminus A = C' \setminus A$.

Daher $X \Delta A (= (X \setminus A) \cup (A \setminus X)) \in \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F} \Delta A$.

■

Ausgehend von einem Unabhängigkeitssystem findet sich die Twistmenge anschließend in jeder Basis wieder:

Lemma 3.6.

Ist \mathcal{F} ein Unabhängigkeitssystem und $A \subseteq E$, dann fügt sich

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{F} \Delta A) \quad A \subseteq B.$$

Beweis

Sei $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F} \Delta A)$. Nach Lemma 3.5 ($\mathcal{F} = (\mathcal{F} \Delta A) \Delta A$ Unabhängigkeitssystem) ist $(B \setminus A) \cup A \in \mathcal{F} \Delta A$. Da außerdem $B \subseteq (B \setminus A) \cup A$ gilt, weil B Basis und maximale Menge ist,⁶ weiß man $B = (B \setminus A) \cup A$, also $A \subseteq B$.

■

Wann nun lässt das Twisten schon vorgegebenen Unabhängigkeitssystemen wie Matroiden ihren Status?

⁶siehe Bem. 2.1

Proposition 3.7.

Ist \mathcal{F} ein Unabhängigkeitssystem, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\mathcal{F} \Delta A$ ist ein Unabhängigkeitssystem.

(2) Für alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ ist $A \subseteq B$.

(3) $\mathcal{F} = \mathcal{F} \Delta A$.

Beweis

'(1) \Rightarrow (2) ': Lemma 3.6 mit vertauschten Rollen von \mathcal{F} und $\mathcal{F} \Delta A$.

'(2) \Rightarrow (3) ': Sei $X \in \mathcal{F}$. Nach Bem. 1.1 existiert $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ so, dass $X \subseteq B$. $A \subseteq B$ nach Vor. $\Rightarrow X \Delta A \subseteq (X \setminus A) \cup A \subseteq B$, also $X \Delta A \in \mathcal{F}$. Mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \Delta A$ gilt, da A selbstinvers ist ($A \Delta A = \emptyset$), auch die Gleichheit.

'(3) \Rightarrow (1) ': offensichtlich. ■

Es ergibt sich, dass verschiedene Matroide niemals zueinander äquivalent sind:

Korollar 3.8.

Das getwistete Matroid ist genau dann wieder ein Matroid, wenn die Δ -Operation mit einer Teilmenge des Schnitts aller Basen durchgeführt wird. Zwangsläufig ist dann das getwistete Matroid mit dem Ursprungs-Matroid identisch. Für Matroide $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \Delta A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2.$$

3.3 Derivate und Zerlegung

Eine besonders erwähnenswerte Eigenart der getwisteten Matroide besteht darin, dass sie die Abgeschlossenheit bezüglich der Bildung von Minoren von den allgemeinen Greedoiden übernimmt.

3.3.1 Kontraktion

Befindet sich die Kontraktionsmenge selbst im getwisteten Matroid, was an sich schon Voraussetzung ist, überhaupt wieder ein Greedoid zu erhalten, dann ist die Kontraktion des getwisteten Matroids wiederum ein getwistetes Matroid.

Proposition 3.9.

Ist \mathcal{M} ein Matroid, $A \in \mathcal{M}$ und $T \subseteq E$ so, dass $T \Delta A \in \mathcal{M}$, dann gilt

$$(\mathcal{M} \Delta A) / T = (\mathcal{M} / (T \setminus A) \setminus T) \Delta (A \setminus T).$$

Wobei zusätzlich $A \setminus T \in \mathcal{M} / (T \setminus A) \setminus T$; die Kontraktion ist ein getwistetes Matroid.

Beweis

Wegen $T \in \mathcal{M} \Delta A$ ist die Kontraktion gemäß [KLS91], S.68, ein Greedoid. $T \setminus A$ ist die Basis von $T \setminus A$ in \mathcal{M} , weil $T \setminus A \subseteq T \Delta A \in \mathcal{M}$. Das Mengensystem $\mathcal{M} / (T \setminus A) \setminus T$ ist nach den Gesetzen, welchen die Matroid-Minoren gehorchen, auch ein Matroid. Das mit T disjunkte $A \setminus T$ ist darin enthalten wegen $(A \setminus T) \cup (T \setminus A) = T \Delta A \in \mathcal{M}$ und darum ist die abschließende Behauptung richtig, wenn die Gleichung unter Mithilfe von Lemma 1.5 bestätigt werden kann:

$$' \subseteq ': Y \in (\mathcal{M} \Delta A) / T \Rightarrow Y \cap T = \emptyset, Y \cup T \in \mathcal{M} \Delta A$$

$\Rightarrow (Y \cup T) \Delta A \in \mathcal{M}$. Um sicherzustellen, dass

$Y \Delta (A \setminus T) \in \mathcal{M} / (T \setminus A) \setminus T$ sind zwei Punkte zu betrachten:

- 1.) $(Y \Delta (A \setminus T)) \cap T \subseteq (Y \cup (A \setminus T)) \cap T \underset{Y \cap T = \emptyset}{=} \emptyset$.
- 2.) $(Y \Delta (A \setminus T)) \in \mathcal{M} / (T \setminus A)$.

Der leere Schnitt mit $T \setminus A$ folgt aus demjenigen mit T aus 1.).

$$\begin{aligned} (Y \Delta (A \setminus T)) \cup (T \setminus A) &= (Y \setminus (A \setminus T)) \cup ((A \setminus T) \setminus Y) \cup (T \setminus A) \\ &= (Y \setminus A) \cup (Y \cap T) \cup (T \setminus A) \cup (A \setminus (T \cup Y)) \\ &= (Y \cup T) \Delta A \in \mathcal{M}, \text{ weil } T \cap A \text{ verschwindet.} \end{aligned}$$

' \supseteq ' : Nun gelte $Y \in (\mathcal{M} / (T \setminus A) \setminus T) \Delta (A \setminus T)$. Die erste Untersuchung widmet sich $Y \cap T$: Die Herkunft von Y bedingt $(Y \Delta (A \setminus T)) \cap T = \emptyset \Rightarrow T \cap Y \subseteq Y \setminus (A \setminus T) \subseteq Y \Delta (A \setminus T) \Rightarrow T \cap Y = T \cap Y \cap T \subseteq (Y \Delta (A \setminus T)) \cap T \Rightarrow T \cap Y = \emptyset$. Mit dieser Erkenntnis bewahrt obige Gleichungskette ihre Gültigkeit: $(Y \cup T) \Delta A = (Y \Delta (A \setminus T)) \cup (T \setminus A)$. Die Mengen liegen in \mathcal{M} , was man rechterhand auf Grund der Herkunft von Y erkennt. Also $Y \in (\mathcal{M} \Delta A) / T$. ■

3.3.2 Restriktion

Das Gleiche gilt für Einschränkungen, jedoch ohne Bedingung an die Filtermenge stellen zu müssen. Bei der Minorenbildung, wie sie für Matroide definiert ist, bewegt man sich zusammenfassend also, ausgehend von einem getwisteten Matroid, fortwährend in dieser Klasse.

Proposition 3.10.

Befindet sich A in \mathcal{M} , seines Zeichens Matroid, dann resultiert für beliebiges $T \subseteq E$:

$$\mathcal{M} \Delta A|_T = \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T \Delta (A \cap T).$$

Wobei $\mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T = \mathcal{M} / (A \setminus T)|_T$ und $(A \cap T) \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T$, so dass die Restriktion $\mathcal{M} \Delta A|_T$ erneut ein getwistetes Matroid repräsentiert.

Beweis

Die Restriktion ist, [KLS91], S.68 folgend, ein Greedoid. $A \setminus T$ ist die Basis von $A \setminus T$ in \mathcal{M} , weil $A \setminus T \subseteq A \in \mathcal{M}$. Das Mengensystem $\mathcal{M} / (A \setminus T)|_T$ ist als Minor eines Matroids selbst ein Matroid. Daher handelt es sich insgesamt in der Tat um ein getwistetes Matroid, wenn $A \cap T$ dort enthalten ist und sich die Gleichungen als wahr erweisen. Zunächst ergibt die Untersuchung

der abgesetzten Gleichung:

' \subseteq ': Vorausgesetzt $Y \in \mathcal{M} \Delta A|_T$, das bedeutet $Y \subseteq T$, $Y \Delta A \in \mathcal{M}$,
eröffnet die Assoziativität

$$Y \Delta (A \cap T) (= (Y \Delta A) \Delta (A \setminus T)) \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T).$$

$Y \Delta (A \cap T) \subseteq T$, weil beide Mengen der symmetrischen Differenz in T
liegen. Damit hat man $Y \Delta (A \cap T) \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T$

$$\Rightarrow Y \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T \Delta (A \cap T).$$

' \supseteq ': Wenn hingegen $Y \Delta (A \cap T) \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T$, dann heißt das
einerseits $Y \Delta A (= Y \Delta (A \cap T) \Delta (A \setminus T)) \in \mathcal{M}$, andererseits

$$Y \Delta (A \cap T) \subseteq T \text{ und so } Y \subseteq T, \text{ weil } Y = Y \Delta (A \cap T) \Delta \underbrace{(A \cap T)}_{\subseteq T}.$$

Insgesamt folgt $Y \in \mathcal{M} \Delta A|_T$.

Die Identität $\mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T = \mathcal{M}/(A \setminus T)|_T$ ist Gegenstand der folgenden
Inspektion:

' \subseteq ': $X \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T$ meint $X \subseteq T$ und

$$X \cup (A \setminus T) \underset{X \cap (A \setminus T) = \emptyset}{=} X \Delta (A \setminus T) \in \mathcal{M} \text{ also } X \in \mathcal{M}/(A \setminus T)|_T.$$

' \supseteq ': Auch in der anderen Richtung bewirkt $X \subseteq T$, dass

$X \cap (A \setminus T) = \emptyset$, somit die Gleichheit der symmetrischen Differenz mit
der Vereinigung und alles weitere.

Schließlich $A \cap T \subseteq T$, $(A \cap T) \Delta (A \setminus T) = A \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow (A \cap T) \in \mathcal{M} \Delta (A \setminus T)|_T.$$

■

3.3.3 Partitionierung

Ein gewistetes Matroid ist partitionierbar in Einzelteile, welche als „geschif-
tete“ Matroide bezeichnet werden könnten. Es handelt sich bei jedem dieser

Einzelteile um einen Minor von \mathcal{M} . Dieser bewegt sich innerhalb einer zur Teilmenge X von A fremden Grundmenge und anschließend werden alle seine enthaltenen Mengen um diese Menge X bereichert. Für jedes $X \subseteq A$ wird ein solches Teil benötigt.

Proposition 3.11.

Das getwistete Matroid kann wie folgt in disjunkte Teile zerlegt werden:

$$\mathcal{M} \Delta A = \bigcup_{X \subseteq A} ((\mathcal{M} \setminus X) / (A \setminus X)) \oplus \{X\}.$$

Beweis

Da bereits $\mathcal{M} \setminus X \subseteq \mathcal{P}(E \setminus X)$ ist das „Shiften“, also das Vereinigen der jeweiligen Mengen des Minors mit X , ein disjunktes Vereinigen. Das heißt, es wird eine direkte Summe gebildet. Zuvorderst der Nachweis, dass die vereinigten Terme getrennte Bereiche umfassen:

$$X, Y \subseteq A, C \in ((\mathcal{M} \setminus X) / (A \setminus X)) \oplus \{X\},$$

$$C \in ((\mathcal{M} \setminus Y) / (A \setminus Y)) \oplus \{Y\} \Rightarrow X \subseteq C, Y \subseteq C. \text{ Nach obigem und}$$

$$\text{der Kontraktionsdefinition gilt } (C \setminus X) \cap (A \setminus X) = \emptyset$$

$$\Rightarrow C \cap A \subseteq X = X \cap A \subseteq C \cap A \Rightarrow X = C \cap A \text{ und analog}$$

$$Y = C \cap A, \text{ also schließlich } X = Y \text{ erzwingend. Nun zur Gleichung:}$$

$$' \subseteq ': Y \in \mathcal{M} \Delta A, X := Y \cap A \Rightarrow A \setminus X = A \setminus Y, X \subseteq A.$$

$$Y \setminus A (\subseteq Y \Delta A) \in \mathcal{M} \Rightarrow Y \setminus A \in \mathcal{M} \setminus X.$$

$$(A \setminus Y) \cap X = \emptyset \Rightarrow Y \Delta A \in \mathcal{M} \setminus X$$

$$\Rightarrow (Y \setminus A) \cup (A \setminus Y) (= Y \Delta A) \in \mathcal{M} \setminus X$$

$$\Rightarrow Y = (Y \setminus A) \cup X \in ((\mathcal{M} \setminus X) / (A \setminus X)) \oplus \{X\}.$$

$$' \supseteq ': \text{ Wäre umgekehrt } Y = C \cup X, X \subseteq A,$$

$$C \in ((\mathcal{M} \setminus X) / (A \setminus X)), \text{ dann } C \cup (A \setminus X) \in \mathcal{M} \setminus X, \text{ weil}$$

$$A \setminus X \in \mathcal{M} \setminus X. \text{ Zudem } C \cap X = \emptyset, C \cap (A \setminus X) = \emptyset \Rightarrow C \cap A = \emptyset$$

$$\text{und so } (C \cup X) \Delta A = (C \setminus A) \cup \underbrace{(X \setminus A)}_{=\emptyset} \cup (A \setminus (C \cup X))$$

$$= \underset{C \cap A = \emptyset}{C \cup (A \setminus X)}.$$

Dies ist, da in $\mathcal{M} \setminus X$, auch in \mathcal{M} , das heißt $C \cup X \in \mathcal{M} \Delta A$. ■

3.3.4 Dualität

Dualbildung bei Mengensystemen hängt maßgeblich mit der Twistoperation zusammen, indem das Komplemente-Dual eines Mengensystems \mathcal{F} nichts anderes als $\mathcal{F} \Delta E$ ist und auch das Dual als $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{F}) \Delta E)$ notiert werden kann. Zunächst drei hilfreiche Beobachtungen:

Lemma 3.12.

\mathcal{M} Matroid, $A \subseteq E$:

$$(1) (\mathcal{M} \Delta A)^{(*)} = \mathcal{M}^{(*)} \Delta A = \mathcal{M} \Delta (E \setminus A).$$

$$(2) \mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) = \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A) \oplus \{A\}.$$

$$(3) \text{MIN}(\mathcal{M} \Delta A) = \mathcal{B}(\mathcal{M}|_A)^{(*)} = \mathcal{B}((\mathcal{M}|_A)^*)$$

(Komplementbildung in A).

Beweis

(1): Die Gruppeneigenschaften der symmetrischen Differenz implizieren

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} \Delta A)^{(*)} &= \mathcal{M} \Delta A \Delta E = \mathcal{M} \Delta (E \setminus A) \\ &= (\mathcal{M} \Delta E) \Delta A = \mathcal{M}^{(*)} \Delta A. \end{aligned}$$

(2):

' \subseteq ': $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A)$. Lemma 3.6 sagt aus, dass $A \subseteq B$

$$\Rightarrow B \setminus A (= B \Delta A) \in \mathcal{M} \Rightarrow B = (B \setminus A) \cup A \in \mathcal{M} \setminus A \oplus \{A\}.$$

Gäbe es $x \in E \setminus A$ mit $(B \setminus A) \cup x \in \mathcal{M} \setminus A$, dann

$$B \cup x = ((B \setminus A) \cup x) \Delta A \in \mathcal{M} \Delta A \quad \nexists. \text{ Also } B \setminus A \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A) \oplus \{A\}.$$

' \supseteq ': $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A) \oplus \{A\} \Rightarrow B = B_1 \cup A, B_1 \in \mathcal{M} \setminus A$

$$\Rightarrow B = B_1 \Delta A \in \mathcal{M} \Delta A. \text{ Gäbe es } x \in E \setminus B \subseteq E \setminus A \text{ mit}$$

$$B \cup x \in \mathcal{M} \Delta A, \text{ dann } B_1 \cup x = (B \setminus A) \cup x = (B \cup x) \Delta A \in \mathcal{M} \text{ bzw.}$$

$$\text{in } \mathcal{M} \setminus A \quad \nexists. \text{ Also ist } B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A).$$

(3):

' \subseteq ': Sei X eine beliebige Menge, aber minimal bezüglich $X \Delta A \in \mathcal{M}$.
 $X \subseteq A$, denn $(X \setminus x) \Delta A = (X \Delta A) \setminus x$ wäre in \mathcal{M} für $x \in X \setminus A$.
 Das heißt, $A \setminus X \in \mathcal{M}$ und auch noch Basis von A , weil $a \in A \cap X$
 und $(A \setminus X) \cup a \in \mathcal{M}$ zur Konsequenz hätten, dass
 $(X \setminus a) \Delta A = (X \Delta A) \cup a = (A \setminus X) \cup a$ in \mathcal{M} wäre ζ .

' \supseteq ': Andersherum ist für $A \setminus Y$, $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{M}|_A)$:
 $Y \in \mathcal{M} \Rightarrow (A \setminus Y) \Delta A (= Y \cap A) \in \mathcal{M}$, also $A \setminus Y \in \mathcal{M} \Delta A$.
 Wäre $X \in \mathcal{M} \Delta A$, $X \subset A \setminus Y$, dann $X \Delta A = A \setminus X \in \mathcal{M}|_A$ und
 $Y \subset A \setminus X \zeta$. Demnach ist $A \setminus Y \in \text{MIN}(\mathcal{M} \Delta A)$.

■

Dual

Proposition 3.13.

Das Dual des getwisteten Matroids ist ein Matroid:

$$(\mathcal{M} \Delta A)^* = (\mathcal{M} \setminus A)^*.$$

Dabei findet die Dualbildung in der jeweils zuständigen Grundmenge statt, also links in E und rechts in $E \setminus A$.

Beweis

Aus (2) in Lemma 3.12 lässt sich mit Hilfe von Lemma 1.5

$$\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A)^{(*)} = \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)} \oplus \{A\}^{(*)} = \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)}$$

in den Grundmengen E , $E \setminus A$ bzw. A ableiten, weshalb auch $\{A\}^{(*)} = \{\emptyset\}$.
 Daraus erhält man

$$(\mathcal{M} \Delta A)^* = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A)^{(*)}) = \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)}) = (\mathcal{M} \setminus A)^*,$$

wobei Letzteres laut Prop. 2.8 Matroid ist.

■

(k, ℓ) -Greedoide

Um die Aspekte rund um das Komplemente-Dual besser beleuchten zu können, wird das Gebot der leeren Menge vorübergehend gebrochen und eine Art „Greedoid-Streifen“ eingeführt. Ein nicht leeres Mengensystem \mathcal{F} wird **(k, ℓ) -Greedoid** genannt, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Die Augmentierungseigenschaft (AE) gilt in \mathcal{F} und $\ell = |X|$, $X \in \text{MAX}(\mathcal{F})$.
- Alle minimalen Mengen sind von gleicher Kardinalität und $k = |X|$, $X \in \text{MIN}(\mathcal{F})$.

Aus Bem. 2.12 wissen wir, dass auch die maximalen Mengen alle gleichmächtig sind und darum ℓ eine wohldefinierte Größe darstellt.

Bemerkung 3.14.

Folgendes lässt sich, auch im Zusammenhang mit normalen Greedoids, erkennen:

- (1) *Ist $\hat{\mathcal{G}}$ ein (k, ℓ) -Greedoid, dann gilt $k \leq |X| \leq \ell$ für alle $X \in \hat{\mathcal{G}}$.
Alle Mengen der Größe k bzw. ℓ sind minimal bzw. maximal.*
- (2) *Die $(0, \ell)$ -Greedoide sind genau die Greedoide \mathcal{G} vom Rang $\ell = r(\mathcal{G})$.*
- (3) *Für ein Greedoid \mathcal{G} ist $\mathcal{G}^{(\ell)} \setminus \mathcal{G}^{(k-1)}$ ein (k, ℓ) -Greedoid, falls $0 < k \leq \ell \leq r(\mathcal{G})$.*

Beweis

(1): Mengen in $\hat{\mathcal{G}}$ mit mehr als ℓ oder weniger als k Elementen wären, wegen Bem. 1.1, mit der Definition nicht zu vereinbaren. Die zweite Aussage ist trivial.

(2): Im Greedoid, wo (AE) außer Zweifel steht, haben alle maximalen Mengen die Mächtigkeit $r(\mathcal{G})$ (Bem. 2.12) und \emptyset ist die einzige minimale Menge. Umgekehrt muss jene vorhanden sein, wenn eine minimale Menge die Größe 0 haben soll. Der Rang des so demaskierten Greedoids steht eben für die Kardinalität maximaler Mengen.

(3): Sind k und ℓ in den erlaubten Grenzen, dann geht es um das Konstrukt $\{X \in \mathcal{G} \mid k \leq |X| \leq \ell\} \neq \emptyset$. (AE) überträgt sich von \mathcal{G} , weil das $X \cup y \in \mathcal{G}$, $y \in Y \setminus X$, das dort für $X, Y \in \mathcal{G}$, $|X| < |Y|$ garantiert

ist, hier weiter verwendet werden kann wegen $k \leq |X| < |X \cup y| \leq |Y| \leq \ell$. Auf Grund der Heredität gibt es jedenfalls Mengen vom Betrag k bzw. ℓ , aber keine kleineren bzw. größeren, wie oben zu sehen ist. Die Heredität bewirkt außerdem, dass eine Menge mit mehr als k Elementen nicht minimal sein kann. Eine maximale Menge mit weniger als ℓ Elementen ließe sich mit (AE) widersprüchlicherweise augmentieren. ■

Nun darf das Wort Greedoid beim Twisten von Matroiden auch ausgesprochen werden, wenn das Vorhandensein der Twistmenge im Matroid ungewiss ist.

Proposition 3.15.

Mit einem Matroid \mathcal{M} und $A \subseteq E$ ergibt sich:

$$\mathcal{M} \Delta A \text{ ist ein } (|A| - r_{\mathcal{M}}(A), |A| + r_{\mathcal{M}}(E \setminus A)) - \text{Greedoid.}$$

Beweis

(AE) wird von Prop. 3.3 geliefert.

Lemma 3.12(3) auswertend, erweisen sich alle minimalen Menge von der Kardinalität $r((\mathcal{M}|_A)^*) = |A| - r(\mathcal{M}|_A) = |A| - r_{\mathcal{M}}(A)$ (Prop. 2.8).

Sei nun Y maximal in $\mathcal{M} \Delta A$. $A \subseteq Y$, sonst $(Y \cup a) \Delta A = (Y \Delta A) \setminus a \in \mathcal{M}$ für $a \in A \setminus Y$ ζ . Zudem ist $Y \setminus A \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)$, weil $y \in E \setminus (A \cup Y)$ mit $(Y \setminus A) \cup y \in \mathcal{M} \setminus A$ implizierte, dass

$$(Y \cup y) \Delta A = (Y \Delta A) \cup y = (Y \setminus A) \cup y \in \mathcal{M} \zeta.$$

Hinreichend bekannt ist $r(\mathcal{M} \setminus A) = r_{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ und das Resümée lautet $|Y| = |A| + |Y \setminus A| = |A| + r_{\mathcal{M}}(E \setminus A)$. ■

Greedoid-Abschluss

Die schon geschilderte Tatsache, dass es nur vollen Greedoiden möglich ist, Greedoide zum Komplemente-Dual zu haben, animierte Goecke in [Goe86] dazu, eine Art Abschluss für Greedoide zu definieren, um simultan dem Gauß-Greedoid und dem getwisteten Matroid zu einem Greedoid-Komplemente-Dual zu verhelfen. Dazu wird \mathcal{G} bis zu $E \in \mathcal{G}$ aufgestockt. Dies soll hier noch einmal ausführlicher besehen werden.

Ein Hilfssatz erläutert, wie Greedoid-Streifen „zusammengeklebt“ werden können:

Lemma 3.16.

Ist $\hat{\mathcal{G}}_1$ ein (k, m) -Greedoid und $\hat{\mathcal{G}}_2$ ein (m, ℓ) -Greedoid, wobei $k, m, \ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m \leq \ell \leq |E|$ und begibt sich ferner $\text{MAX}(\hat{\mathcal{G}}_1) = \text{MIN}(\hat{\mathcal{G}}_2)$, dann kann $\hat{\mathcal{G}}_1 \cup \hat{\mathcal{G}}_2$ attestiert werden, ein (k, ℓ) -Greedoid zu sein.

Beweis

Die Augmentierung muss nur kritisch hinterfragt werden, wenn X und Y , $|X| < |Y|$, aus verschiedenen Komponenten stammen. Das erzwingt $X \in \hat{\mathcal{G}}_1 \setminus \hat{\mathcal{G}}_2$, $Y \in \hat{\mathcal{G}}_2$. Nach Bem. 1.1 existiert $D \subseteq Y$, $D \in \text{MIN}(\hat{\mathcal{G}}_2)$
 $\Rightarrow D \in \text{MAX}(\hat{\mathcal{G}}_1)$. $|X| < |D|$, sonst wäre $X \in \text{MAX}(\hat{\mathcal{G}}_1) \subseteq \hat{\mathcal{G}}_2$. Also zeigt sich ein $y \in D \setminus X \subseteq Y \setminus X$ für $X \cup y \in \hat{\mathcal{G}}_1$.

Jede minimale Menge der Vereinigung ist auch eine von $\hat{\mathcal{G}}_1$ und weil alle jene k Elemente besitzen, müssen sie gleichfalls genau die minimalen Mengen der Vereinigung sein (Bem. 3.14(1)). Die maximalen Mengen haben, analog begründet, ℓ Elemente. ■

Nun ist der Beiname Greedoid-Streifen insofern nicht ganz passend, als nicht alle davon nach unten zu einem echten Greedoid erweitert werden können. Bei $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ geht dies exemplarisch nicht. Nach oben hin funktioniert dies aber sehr wohl:

Lemma 3.17.

Ist $\hat{\mathcal{G}}$ ein (k, ℓ) -Greedoid, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \leq \ell$, dann ist $\hat{\mathcal{G}} \cup (\mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}}) \vee 2^E)$ ein $(k, |E|)$ -Greedoid.

Beweis

$\mathcal{G}' := \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}}) \vee 2^E$ ist ein $(\ell, |E|)$ -Greedoid:

Man lege sich $X, Y \in \mathcal{G}'$ zurecht mit $|X| < |Y|$, $X = B \cup C$, $B \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}})$, $C \subseteq E$. Da $Y \subseteq X$ ausgeschlossen werden kann, nehme man irgendein $y \in Y \setminus X$ und sofort wird $X \cup y = B \cup (C \cup y) \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}}) \vee 2^E$ für (AE) deutlich.

$X \in \text{MIN}(\mathcal{G}') \Rightarrow X \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}}) \Rightarrow |X| = \ell$, denn $X = B \cup C$, $B \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}})$, $C \subseteq E$, $C \neq \emptyset$ induziert $B \in \mathcal{G}'$, $B \subset X$ ∇ . Schließlich ist für den „Oberrang“ noch $E \in \mathcal{G}'$.

Offenbar sind aber auch die Mengen in $\mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}})$ die minimalen in \mathcal{G}' . Lemma 3.16 lässt wegen $\text{MIN}(\mathcal{G}') = \mathcal{B}(\hat{\mathcal{G}}) = \text{MAX}(\hat{\mathcal{G}})$ die Vereinigung zum $(k, |E|)$ -Greedoid geschehen. ■

Das Prinzip wird beim eingangs erwähnten Abschluss für Greedoide genutzt,

dessen Gestalt nunmehr enthüllt wird:

$$\overline{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \cup (\mathcal{B}(\mathcal{G}) \vee 2^E).$$

Korollar 3.18.

$\overline{\mathcal{G}}$ ist ein volles Greedoid.

Beweis

Es liegt die Anwendung von Lemma 3.17 vor, diesmal mit dem Ergebnis eines $(0, |E|)$ -Greedoids, das ein volles Greedoid ist, unter Beachtung von Bem. 3.14(2). ■

Komplemente-Dual

Schon (1) in Lemma 3.12 vermittelt, dass das Komplemente-Dual eines gewisteten Matroids selbst von „gewisteter Machart“ ist. Für die umweglose Existenz des Komplemente-Duals als Greedoid wäre ein volles Greedoid notwendig. Dies deckt sich mit der aus der Gleichung deduzierten Notwendigkeit von $E \setminus A \in \mathcal{M} (\Leftrightarrow E \in \mathcal{M} \Delta A)$. Dann aber liegt augenscheinlich auch wirklich eines vor. Zum mittleren Term ist zu sagen, dass $\mathcal{M}^{(*)}$ nur für $\mathcal{M} = 2^E$ Matroid sein kann, wie Prop. 3.7 zeigt.

Die Vorarbeiten protegieren nun aber folgende Möglichkeit:

Proposition 3.19.

Das Komplemente-Dual vom Abschluss des gewisteten Matroids, allgemeiner von $\mathcal{M} \Delta A$, $A \subseteq E$, $\overline{\mathcal{M} \Delta A}^{(*)}$, ist ein Greedoid.

Vor dem Beweis steht ein Hilfssatz:

Lemma 3.20.

$$(\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) \vee 2^E)^{(*)} = (\mathcal{M} \setminus A)^*.$$

Beweis

Aus Lemma 3.12 wird $\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) = \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A) \oplus \{A\}$ verwendet:

$$X \in (\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) \vee 2^E)^{(*)} \Leftrightarrow E \setminus X = B \cup C, B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A), C \subseteq E$$

$$\Leftrightarrow E \setminus X = B' \cup C', B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A), C' \subseteq E, A \subseteq C'$$

$$\Leftrightarrow X = E \setminus (B' \cup C'), B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A), C' \subseteq E, A \subseteq C'$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq (E \setminus A) \setminus B', (E \setminus A) \setminus B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)}$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{H}(\mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)}) \Leftrightarrow X \in (\mathcal{M} \setminus A)^*,$$

wo bei der Komplementbildung auf die Grundmenge zu achten ist. ■

Anschließend der **Beweis** der vorangegangenen Prop. 3.19:

Da $\overline{\mathcal{M} \Delta A} = \mathcal{M} \Delta A \cup (\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) \vee 2^E)$ ist, gilt mit Lemma 1.5(8):

$$\overline{\mathcal{M} \Delta A}^{(*)} = (\mathcal{M} \Delta A)^{(*)} \cup (\mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A) \vee 2^E)^{(*)}$$

$$= \underset{\text{Lemma 3.20, Lemma 3.12}}{(\mathcal{M} \Delta (E \setminus A)) \cup (\mathcal{M} \setminus A)^*}.$$

Die linke Seite steht nach Prop. 3.15 für ein

$(|E \setminus A| - r_{\mathcal{M}}(E \setminus A), |E \setminus A| + r_{\mathcal{M}}(A))$ -Greedoid. Das andere ist als Matroid ein $(0, m)$ -Greedoid, wo $m = |E \setminus A| - r(\mathcal{M} \setminus A) = |E \setminus A| - r_{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ (Prop. 2.8). Die Vereinigung unter Anleitung von Lemma 3.16 gelingt wegen

$$\begin{aligned} \text{MIN}(\mathcal{M} \Delta (E \setminus A)) & \underset{\text{Lemma 3.12}}{=} \mathcal{B}(\mathcal{M}|_{E \setminus A})^{(*)} = \mathcal{B}(\mathcal{M} \setminus A)^{(*)} \\ & = \mathcal{B}((\mathcal{M} \setminus A)^*). \end{aligned}$$

Es entsteht ein $(0, |E \setminus A| + r_{\mathcal{M}}(A))$ -Greedoid, also ein Greedoid, welches voll ist, wenn $r_{\mathcal{M}}(A) = |E|$ zutrifft. Das trifft zu, falls $A \in \mathcal{M}$, folglich wenn ein getwistetes Matroid gemäß Definition die Grundlage ist. ■

Es ist leicht einzusehen, dass der Augmentierungseigenschaft gewissermaßen eine Diminuierungseigenschaft dual gegenübersteht, die dafür sorgt, dass das Komplemente-Dual eines Mengensystems \mathcal{F} über (AE) verfügt:

$$X, Y \in \mathcal{F}, |X| < |Y| \implies \exists_{y \in Y \setminus X} Y \setminus y \in \mathcal{F}.$$

3.4 $\mathcal{M} \Delta A$ als Greedoid

Schon in [BZ92] und [Goe86] wird festgestellt, dass die Hülle des getwisteten Matroids der direkten Summe zweier Matroide entspricht und die dadurch ausgelöste Konsequenz, nämlich:

Proposition 3.21.

$$\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A) = (\mathcal{M} \setminus A) \oplus 2^A$$

und das getwistete Matroid ist ein ausgedünntes Matroid.

Beweis

Lemma 3.12 in Verbindung mit Lemma 1.3 und Bem. 2.14. ■

Alternativ ergibt sich die untere Aussage wegen Bem. 2.14 auch aus der Betrachtung des Duals in Prop. 3.13. Die Hüllengleichung zeigt, dass das ursprüngliche Matroid sich in der monotonen Hülle des getwisteten Matroids wiederfindet.

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A),$$

denn $C \in \mathcal{M}$ heißt $C = (C \setminus A) \cup (C \cup A) \in (\mathcal{M} \setminus A) \oplus 2^A$. Die monotone Hülle von $\mathcal{M} \Delta A$ ist das Mengensystem, in dem alle Mengen des Matroids um alle möglichen Elemente aus A angereichert werden, und könnte damit auch durch $\mathcal{H}(\mathcal{M} \vee \{A\})$ beschrieben werden.

3.4.1 Spezifizierung

Der Matroid-Abkömmling erbt die im Hinblick auf Optimierung nutzenbringende basisbezogene strukturelle Eigenschaft aus 2.3.4.

Satz 3.22.

Getwistete Matroide besitzen die starke Austausch Eigenschaft.

Beweis

Vorgegeben $X \in \mathcal{M} \Delta A$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \Delta A)$, $X \subseteq B$, $x \in E \setminus B$, $X \cup x \in \mathcal{M} \Delta A$
Zu zeigen wäre, dass $\exists_{y \in B \setminus X} X \cup y \in \mathcal{M} \Delta A$, $B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta A$.

Klar ist $A \subseteq B$ nach Lemma 3.6. Darum ist $x (\in E \setminus B) \notin A$. Um Fallunterscheidung zu vermeiden, wird die kleinere der beiden Mengen $B \setminus A (= B \Delta A) \in \mathcal{M}$ und $(X \Delta A) \cup x (= (X \cup x) \Delta A) \in \mathcal{M}$ zunächst auf das Niveau der anderen in \mathcal{M} gehoben. Behauptet wird demgemäß die

Existenz von C_1 und C_2 , die folgendem genügen:

$$(X \Delta A) \cup x \cup C_1 \in \mathcal{M}, \quad (B \setminus A) \cup C_2 \in \mathcal{M},$$

$$|(X \Delta A) \cup x \cup C_1| = |(B \setminus A) \cup C_2|, \quad C_1 \subseteq B \setminus (A \cup X), \quad C_2 \subseteq A \setminus X.$$

Wenn ohnehin $|(X \Delta A) \cup x| = |(B \setminus A)|$, begnüge man sich mit $C_1 = C_2 = \emptyset$. Hat die Menge links geringere Anzahl, so nutze Lemma 2.5 für die Existenz von $C_1 \subseteq (B \setminus A) \setminus ((X \setminus A) \cup x \cup (A \setminus X))$ bei $(X \Delta A) \cup x \cup C_1 \in \mathcal{M}$ und gewünschter Anzahlgleichheit ($C_2 = \emptyset$). Sofort wird $C_1 \subseteq B \setminus X$ sichtbar.

Ist die Menge rechts kleiner, dann existiert

$C_2 \subseteq ((X \setminus A) \cup x \cup (A \setminus X)) \setminus (B \setminus A)$ für $(B \setminus A) \cup C_2 \in \mathcal{M}$ und die gewünschte Anzahlgleichheit ($C_1 = \emptyset$). Gäbe es $c \in C_2 \cap ((X \setminus A) \cup x)$, also $c \notin A$, dann $(B \setminus A) \cup c (\subseteq (B \setminus A) \cup C_2) \in \mathcal{M} \Rightarrow B \cup c = B \cup A \cup c = ((B \setminus A) \cup c) \Delta A \in \mathcal{M} \Delta A$, widersprüchlich der Natur B 's. Daher $C_2 \subseteq A \setminus X$.

$Y := \{y \in B \setminus (A \cup X \cup C_1) \mid (X \Delta A) \cup y \cup C_1 \in \mathcal{M}\}$ soll später das y entnommen werden. $Y \neq \emptyset$, da wegen (AE) ein $\hat{y} \in ((B \setminus A) \cup C_2) \setminus ((X \setminus A) \cup (A \setminus X) \cup C_1)$ existiert, so dass $(X \Delta A) \cup \hat{y} \cup C_1 \in \mathcal{M}$. $C_2 \subseteq A \setminus X$ impliziert $\hat{y} \in B \setminus A$, dadurch zudem $\hat{y} \notin X$ und $\hat{y} \notin C_1$ ist klar.

$(B \setminus A) \setminus Y \cup C_3$ ist eine weitere Menge in \mathcal{M} auf diesem Niveau

$$(|(B \setminus A) \setminus Y \cup C_3| = |(X \Delta A) \cup x \cup C_1|), \quad \text{wenn}$$

$$C_3 \subseteq ((X \Delta A) \cup x \cup C_1) \setminus ((B \setminus A) \setminus Y), \quad \text{weil } |(B \setminus A) \setminus Y| < |B \setminus A| \leq |(X \Delta A) \cup x \cup C_1|.$$

$x \in C_3$ muss dabei gelten, denn angenommen nicht, nehme

$$w \in ((B \setminus A) \setminus Y \cup C_3) \setminus ((X \Delta A) \cup C_1) \subseteq (B \setminus A) \setminus Y \text{ für}$$

$(X \Delta A) \cup w \cup C_1$. Da aber auch

$$w \in (B \setminus A) \setminus ((X \Delta A) \cup C_1) = B \setminus (X \cup A \cup C_1), \text{ ergibt sich sowohl}$$

$$w \in Y \text{ als auch } w \notin Y \text{ ♯} .$$

Es gilt also $(B \setminus A) \setminus Y \cup x \subseteq (B \setminus A) \setminus Y \cup C_3 \in \mathcal{M}$,

$$|(B \setminus A) \setminus Y \cup x| \leq |B \setminus A|, B \setminus A \in \mathcal{M}. \text{ Darum liefert Lemma 2.5}$$

$$C_4 \subseteq (B \setminus A) \setminus ((B \setminus A) \setminus Y \cup x) \subseteq (B \setminus A) \cap Y \text{ für}$$

$D := (B \setminus A) \setminus Y \cup x \cup C_4 \in \mathcal{M}$. Nun erzwingen

$$|D| = |B \setminus A| \text{ und } D \subseteq (B \setminus A) \cup x, \text{ dass } D = (B \setminus A) \setminus y \cup x$$

mit einem $y \neq x$ und $y \notin (B \setminus A) \setminus Y$. Folglich $y \in (B \setminus A) \cap Y \subseteq Y$.

Zusammen $B \setminus y \cup x (= ((B \setminus A) \setminus y \cup x) \Delta A) \in \mathcal{M} \Delta A$ wegen $y \notin A$

und $(X \Delta A) \cup y \subseteq (X \Delta A) \cup y \cup C_1 \in \mathcal{M}$ wegen $y \in Y$

$$\Rightarrow X \cup y (= ((X \Delta A) \cup y) \Delta A) \in \mathcal{M} \Delta A.$$

■

Nun erweist sich die Abgeschlossenheit hinsichtlich der Restriktionsbildung als sehr gewinnbringend für die Einordnung der getwisteten Matroide in die enger gefasste Klasse aus 2.3.4.

Korollar 3.23.

Getwistete Matroide besitzen die restriktionsstabile starke Austauschenschaft.

Beweis

Jede Restriktion ist als getwistetes Matroid, siehe Prop. 3.10, Inhaber der starken Austauschenschaft nach Satz 3.22.

■

Damit dürfen die Objekte natürlich auch ins Fach für Austausch-Systeme einsortiert werden.

Korollar 3.24.

Getwistete Matroide sind Austausch-Systeme.

Beweis

Bem. 2.19. ■

3.4.2 Abgrenzung

Damit sind die Tests mit positivem Befund auf Mitgliedschaft in vorher präsentierten Greedoid-Klassen aufgezählt und es muss die Liste der Greedoid-Klassen eingestanden werden, zu denen sich nur ausgewählte getwistete Matroide zugehörig fühlen dürfen.

XV) Das getwistete Matroid ist im Allgemeinen kein Gauß-Greedoid. Dies ist ersichtlich aus folgendem Gegenbeispiel, einem Matroid-Basis-System in $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & & \mathcal{G}_{XV} = \mathcal{M} \Delta 3 \\
 & & \{1, 2, 3\} \\
 \{1, 2\} & \{2, 3\} & \longrightarrow & \{1, 3\} & \{2, 3\} \\
 \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{2\} & \{3\} \\
 \emptyset & & & \emptyset &
 \end{array}$$

Die für Gauß-Greedoide notwendige Eigenschaft bleibt dem getwisteten Matroid hier bei $C = \{2\}$ mit $z = 2$, $y = 1$ und $x = 3$ versagt, weil trotz $\{2\}, \{1, 3\} \in \mathcal{M}_1 \Delta A$ weder $\{1, 2\}$ noch $\{1\}$ dort auftauchen.

XVI) Das getwistete Matroid ist aber nicht zwingend ein Matroid-Basis-System. $\mathcal{G}_{XVI} := \widetilde{\mathcal{M}} \Delta 4$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:⁷

⁷siehe Bsp. I, S. 19

$$\begin{array}{cccccc}
& & \{1, 2, 3, 4\} & & \{2, 3, 4, 5\} & \\
\{1, 2, 4\} & & \{1, 3, 4\} & & \{2, 3, 4\} & & \{2, 4, 5\} & & \{3, 4, 5\} \\
\{1, 2\} & & \{1, 4\} & & \{2, 4\} & & \{2, 5\} & & \{3, 4\} & & \{4, 5\} \\
& & \{1\} & & \{2\} & & \{4\} & & \{5\} & & \\
& & & & \emptyset & & & & & &
\end{array}$$

Die Menge $\{3, 4\}$ muss beim Versuch, die 4 gegen ein Element aus $\{1, 2\}$ einzutauschen, kapitulieren.

- XVII) \mathcal{M} Matroid und $A \in \mathcal{M}$ implizieren nicht generell, dass $\mathcal{M} \Delta A$ Transpositions- oder gar Intervall-Greedoid wäre. Daher handelt es sich für gewöhnlich beim getwisteten Matroid auch nicht um ein Antimatroid. Das zeigt folgendes Gegenbeispiel, gründend auf \mathcal{M} , ($E = \{1, 2, 3, 4\}$)

$$\begin{array}{cccccc}
\{1, 2\} & & \{1, 3\} & & \{2, 3\} & & \{2, 4\} & & \{3, 4\} \\
& & \{1\} & & \{2\} & & \{3\} & & \{4\} \\
& & & & \emptyset & & & &
\end{array}$$

resultierend in $\mathcal{G}_{XVII} := \mathcal{M} \Delta \{3\}$

$$\begin{array}{cccc}
\{1, 2, 3\} & & \{2, 3, 4\} & \\
\{1, 3\} & & \{2, 3\} & & \{3, 4\} \\
\{1\} & & \{2\} & & \{3\} & & \{4\} \\
& & & & \emptyset & &
\end{array}$$

Obwohl sich \emptyset , $\{1\}$ und $\{2\}$, aber nicht $\{1, 2\}$ in \mathcal{G}_{XVII} aufhalten, sind $\{1\}$ und $\{2\}$ keine Zwillinge, weil $\{2, 3, 4\}$ auftaucht, $\{1, 3, 4\}$ jedoch nicht. Also liegt die Transpositionseigenschaft⁸ nicht vor.

- XVIII) Auch das Hinzunehmen der Δ -Matroid-Eigenschaft zu den Greedoid-Klassifizierungen reicht nicht, getwistete Matroide eindeutig zu kennzeichnen. Das Greedoid \mathcal{G}_{XVIII} , $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{ccc}
\{1, 2\} & & \{1, 3\} & & \{2, 3\} \\
& & \{1\} & & \{2\} \\
& & & & \emptyset
\end{array}$$

⁸siehe 2.3.8

ist unmöglich durch Twisten auf Matroidform zu bringen, da dort E fehlen müsste, dies aber nur durch Twisten mit \emptyset oder $\{1, 2\}$ möglich wäre, wo dann jeweils $\{3\}$ fehlt. Da in einem Mengensystem mindestens zwei benachbart große Mengen fehlen müssen, um die Δ -Matroid-Qualität zu Fall zu bringen, ist \mathcal{G}_{XVIII} ein solches. Auch müssen grundsätzlich immer mindestens zwei Mengen von höchstens der Basisgröße fehlen, um die starke Austauschenschaft anzweifeln zu können. Also ist das Beispielsystem Eigner der restriktionsstabilen starken Austauschenschaft (außerdem sogar Gauß-Greedoid).

3.5 Beschreibende Funktionen

Bei der Nähe der getwisteten Matroide zu solch wohlgeformten Systemen wie Matroiden erwartet man sich von systembeschreibenden Funktionen wie Rang und Hüllenoperator die Vermittlung von weiteren Einsichten in die Gewebestruktur.

3.5.1 Rang

Im Gegensatz zur Matroid-Rangfunktion⁹ ist es für die Greedoid-Rangfunktion¹⁰ bezogen auf das allgemeine Greedoid nicht möglich, eine konstante Wachstumsbeschränkung anzugeben, wenn ein beliebiges Element einer Menge zugefügt wird. Ein solches Maß sagt intuitiv etwas über die Verteilung der Greedoid-Mengen unterhalb einer jeden Menge bzw. in jeder Restriktion aus. Etwas konkreter formulieren ließe sich das beispielsweise so:

Bemerkung 3.25.

Gilt für die Rangfunktion eines Greedoids \mathcal{G} mit $k \in \mathbb{N}$

$$\forall X \subseteq E, y \in E \setminus X \quad r(X \cup y) \leq r(X) + k,$$

dann lässt sich eine Greedoid-Menge, die eine andere solche enthält, von dieser aus über eine Teilmengenkette erreichen, deren Zwischenglieder im Abstand von höchstens k ebenfalls zu \mathcal{G} gehören:

$$X, Y \in \mathcal{G}, X \subset Y, |X| < |Y| - k \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{G} \quad X \subset Z \subset Y.$$

⁹siehe 2.2.5

¹⁰siehe 2.3.2

Beweis

Wähle $y \in Y \setminus X$, beide Mengen in \mathcal{G} , $X \subset Y$, $|X| < |Y| - k$. Dazu $Z' \in \mathcal{G}$ als Basis von $Y \setminus y$. Dann hat man

$$|Y| > |Y \setminus y| \geq |Z'| = r(Y \setminus y) \geq r(Y) - k = |Y| - k > |X|.$$

(AE) verhilft zu $Z := X \cup C$, $|Z| = |Z'|$, $Z \in \mathcal{G}$. $C \subseteq Z' \subseteq Y \setminus y \subseteq Y$
 $\Rightarrow Z \subseteq Y$. Die Anzahlgleichung bestätigt echte Teilmengenbeziehungen. ■

Wie wir sehen werden, existiert eine solche Schranke für das getwistete Matroid.

Die Berechnung der Rangfunktion

Der anschließende Hilfssatz erinnert zunächst an die Beziehung, in der die Rangfunktion eines Matroids mit der einer Kontraktion steht.

Lemma 3.26.

Ist \mathcal{M} ein Matroid mit $A, T \subseteq E$ und $A \cap T = \emptyset$, so ist

$$r_{\mathcal{M}/T}(A) + r_{\mathcal{M}}(T) = r_{\mathcal{M}}(A \cup T).$$

Beweis: [We176], S.62

Die Rangfunktion eines getwisteten Matroids kann unter Zuhilfenahme der Rangfunktion des ursprünglichen Matroids berechnet werden.

Lemma 3.27.

Für ein Matroid \mathcal{M} auf E und eine Menge $A \in \mathcal{M}$ darf für jedes $C \subseteq E$ mit Recht gesagt werden:

$$r_{\mathcal{M} \Delta A}(C) = r_{\mathcal{M}/(A \setminus C)}(C \setminus A) + |A \cap C|.$$

Beweis

Ausgehend von beliebigen Mengen, die den Voraussetzungen genügen:

' \geq ' : Begutachte ein $X \in \mathcal{M}/(A \setminus C)$, $X \subseteq C \setminus A$ mit

$|X| = r_{\mathcal{M}/(A \setminus C)}(C \setminus A)$. Nach Def. ist eine Basis B' von $A \setminus C$ in \mathcal{M} verfügbar, bewirkend $X \cup B' \in \mathcal{M}$. $A \setminus C (\subseteq A) \in \mathcal{M} \Rightarrow B' = A \setminus C$

$$\Rightarrow X \cup (C \cap A) \underset{X \cap A = \emptyset}{=} (X \cup (A \setminus C)) \Delta A \in \mathcal{M} \Delta A.$$

$$X \cup (C \cap A) \subseteq C$$

$$\Rightarrow r_{\mathcal{M} \Delta A}(C) \geq |X| + |C \cap A| = r_{\mathcal{M}/(A \setminus C)}(C \setminus A) + |A \cap C|.$$

' \leq ' : Nun bringe eine Basis X von C in $\mathcal{M} \Delta A$ zum Einsatz:

$$(X \setminus A) \cup (A \setminus C) (\subseteq (X \setminus A) \cup (A \setminus X) \subseteq X \Delta A) \in \mathcal{M}$$

$$\underset{A \setminus C \in \mathcal{M}}{\Rightarrow} X \setminus A \in \mathcal{M}/(A \setminus C). \text{ Insgesamt } r_{\mathcal{M}/(A \setminus C)}(C \setminus A) \geq |X \setminus A|$$

$$= |X| - |A \cap X| \geq |X| - |A \cap C| = r_{\mathcal{M} \Delta A}(C) - |A \cap C|.$$

■

Dies führt zur gewünschten Formel in Abhängigkeit von $r_{\mathcal{M}}$:

Proposition 3.28.

Für ein Matroid \mathcal{M} auf E und eine Menge $A \in \mathcal{M}$ ist für jedes $C \subseteq E$ folgendes wahr:

$$r_{\mathcal{M} \Delta A}(C) = r_{\mathcal{M}}(C \Delta A) + |A \cap C| - |A \setminus C| \text{ und}$$

$$r_{\mathcal{M}}(C) = r_{\mathcal{M} \Delta A}(C \Delta A) + |A \cap C| - |A \setminus C|.$$

Beweis

Mit Lemma 3.26 berechnet sich

$$r_{\mathcal{M}/(A \setminus C)}(C \setminus A) = r_{\mathcal{M}}((C \setminus A) \cup (A \setminus C)) - r_{\mathcal{M}}(A \setminus C).$$

Wegen $A \setminus C \in \mathcal{M}$ ist der subtrahierte Term gleich $|A \setminus C|$, also entnimmt man die erste gewünschte Gleichung dem obigen Lemma 3.27. $A \Delta A = \emptyset$ bewirkt, dass die zweite Gleichung aus der ersten hervorgeht, wenn man $C \Delta A$ für C einsetzt und $A \cap (C \Delta A) = A \setminus C$ sowie $A \setminus (C \Delta A) = A \cap C$ bedenkt.

■

Das Wachstumsverhalten

Mit Hilfe dieser Formel und den Eigenschaften der Matroid-Rangfunktion kann nun gezeigt werden, dass der Anstieg für die „getwistete“ Rangfunktion tatsächlich durch 2 begrenzt ist.

Proposition 3.29.

\mathcal{M} sei ein Matroid, $A \in \mathcal{M}$, $X \subseteq E$, $y \notin X$. Dann gilt für die Rangfunktion $r := r_{\mathcal{M} \Delta A}$ des getwisteten Matroids:

$$y \in A \Rightarrow r(X) + 1 \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 2.$$

$$y \notin A \Rightarrow r(X) \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 1.$$

Beweis

$y \in A$: $r(X \cup y) - r(X)$ entspricht nach Prop. 3.28

$$\begin{aligned} & r_{\mathcal{M}}((X \cup y) \Delta A) + |(A \cap X) \cup y| - |(A \setminus X) \setminus y| - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) \\ & - |A \cap X| + |A \setminus X| = r_{\mathcal{M}}((X \Delta A) \setminus y) - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) + 2. \end{aligned}$$

Die Eigenschaften der Matroid-Rangfunktion garantieren eine Differenz der beiden Ränge -1 oder 0 , der Ausdruck hat also den Wert 1 oder 2 .

$y \notin A$: $r(X \cup y) - r(X)$ gleicht nach Prop. 3.28

$$\begin{aligned} & r_{\mathcal{M}}((X \cup y) \Delta A) + |(A \cap X)| - |(A \setminus X)| - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) \\ & - |A \cap X| + |A \setminus X| = r_{\mathcal{M}}((X \Delta A) \cup y) - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A). \end{aligned}$$

Die Wachstumsbeschränkung von $r_{\mathcal{M}}$ bestätigt hier den Wert 0 oder 1 . ■

Für einige Elemente der Grundmenge spielt es keine Rolle, ob man sie beim Twisten zu A hinzunimmt oder nicht.

Proposition 3.30.

Vorgegeben ist ein Matroid \mathcal{M} , $A \in \mathcal{M}$, $x \in E$. Bezüglich $r := r_{\mathcal{M} \Delta A}$ erhält man folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \forall_{X \subseteq E \setminus x} \quad r(X \cup x) = r(X) + 1 & \iff \mathcal{M} \Delta \{x\} = \mathcal{M} \\ & \iff \mathcal{M} \Delta (A \Delta \{x\}) = \mathcal{M} \Delta A. \end{aligned}$$

Beweis

Die zweite Äquivalenz kann aus den Eigenschaften gefolgert werden, die $\mathcal{P}(E)$ mit der Δ -Operation zur kommutativen Gruppe machen.¹¹ Und zur ersten Äquivalenz begreife man:

' \Rightarrow ' : Aus gleichem Grund genügt hier: $\forall_{Y \subseteq E} Y \in \mathcal{M} \Rightarrow Y \Delta x \in \mathcal{M}$.

Sei also $Y \in \mathcal{M}$ ($r_{\mathcal{M}}(Y) = |Y|$). Die Voraussetzung dieser Richtung

lässt sich auch schreiben als $r(X \Delta x) - r(X) = 1 - 2|\{x\} \cap X|$

für beliebige $X \subseteq E$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& r_{\mathcal{M}}(Y \Delta x) - r_{\mathcal{M}}(Y) \\
&= \underset{\text{Prop. 3.28}}{r(Y \Delta x \Delta A) + |A \cap (Y \Delta x)| - |A \setminus (Y \Delta x)|} \\
&\quad - (r(Y \Delta A) + |A \cap Y| - |A \setminus Y|) \\
&= 1 - 2|\{x\} \cap (Y \Delta A)| + |A| - 2|A \cap Y| \\
&\quad - (|A| - 2|A \cap (Y \Delta x)|) \quad \text{mit Lemma 1.5 (3) für die Differenzen} \\
&= 1 - 2(|A \cap Y| + |\{x\} \cap (Y \Delta A)| - |A \cap (Y \Delta x)|) \\
&= 1 - 2(|A \cap Y| + |\{x\} \cap (Y \setminus A)| + |\{x\} \cap (A \setminus Y)| \\
&\quad - |A \cap (Y \setminus \{x\})| - |A \cap (\{x\} \setminus Y)|) \\
&= \underset{\text{Lemma 1.5}}{1 - 2(|A \cap Y| - |(A \cap Y) \setminus \{x\}| + |(\{x\} \cap Y) \setminus A|)} \\
&= 1 - 2(|A \cap Y \cap \{x\}| + |(\{x\} \cap Y) \setminus A|) \\
&= 1 - 2|\{x\} \cap Y| = |Y \Delta x| - |Y| \\
&\Rightarrow r_{\mathcal{M}}(Y \Delta x) = |Y \Delta x|.
\end{aligned}$$

' \Leftarrow ' : Wäre $X \subseteq E \setminus x$, so rechnete man

$$\begin{aligned}
& r(X \cup x) \underset{\text{Lemma 1.5, Prop. 3.28}}{=} r_{\mathcal{M}}(X \Delta A \Delta x) + |A \cap (X \cup x)| - |A \setminus (X \cup x)| \\
&= \underset{\text{Prop. 3.28}}{r_{\mathcal{M} \Delta \{x\}}(X \Delta A) - |\{x\} \cap (X \Delta A)| + |\{x\} \setminus (X \Delta A)|} \\
&\quad + |A \cap X| + |A \cap \{x\}| - (|A \setminus X| - |A \cap \{x\}|) \\
&= \underset{\text{Vor., } x \notin X}{r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) + |A \cap X| - |A \setminus X| - |\{x\} \cap A| + |\{x\} \setminus A|} \\
&\quad + |\{x\} \cap A| + |\{x\} \setminus A|
\end{aligned}$$

¹¹siehe 1.1.4

$$\stackrel{\text{Prop. 3.28}}{=} r_{\mathcal{M} \Delta A}(X) + |\{x\}| = r(X) + 1. \quad \blacksquare$$

Eine Charakterisierung des getwisteten Matroids

Zeigt die Greedoid-Rangfunktion eines Greedoids \mathcal{G} das in Prop. 3.29 beschriebene Wachstumsverhalten, dann reicht das, um sicher sagen zu können, dass Twisten mit A zu einem Unabhängigkeitssystem $\mathcal{G} \Delta A$ führt. Denn die Bedingung aus Lemma 3.5 ist dann durch induktives Anwenden der Wachstumsbeschränkung für A - und Nicht- A -Elemente erfüllt:

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{G}, X_1 \subseteq C \setminus A, C \cap A \subseteq X_2 \subseteq A : \\ r(X_1 \cup X_2) &\geq r((C \setminus A) \cup X_2) - |(C \setminus A) \setminus X_1| \\ &\geq \underbrace{r((C \setminus A) \cup (C \cap A))}_{=r(C)=|C|} - |(C \setminus A) \setminus X_1| + |X_2 \setminus (C \cap A)| \\ &= |C \setminus A| - |(C \setminus A) \setminus X_1| + |C \cap A| + |X_2 \setminus (C \cap A)| = |X_1| + |X_2| \\ &\Rightarrow X_1 \cup X_2 \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Das garantiert aber noch nicht, dass $\mathcal{G} \Delta A$ auch Matroid wäre. Eine Charakterisierung für Rangfunktionen getwisteter Matroide macht zusätzlich eine „getwistete“ Submodularität erforderlich. Zur Eingrenzung der getwisteten-Matroid-Rangfunktion würde zwar auch eine „getwistete“ lokale Submodularität ausreichen, die aber sehr unelegant zu notieren ist.

Satz 3.31.

Eine Funktion $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ ist genau dann Rangfunktion eines getwisteten Matroids, wenn man eine Menge $A \subseteq E$ angeben kann, die dazu führt, dass r für $X, Y \subseteq E$, $y \in E \setminus X$ vier Anforderungen gerecht wird:

- $r(\emptyset) = 0$.
- $r(X) \leq |X|$.
- $y \in A \Rightarrow r(X) + 1 \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 2$.
 $y \notin A \Rightarrow r(X) \leq r(X \cup y) \leq r(X) + 1$.
- $r(X \Delta A) + r(Y \Delta A) \geq r((X \cap Y) \Delta A) + r((X \cup Y) \Delta A)$.

Beweis

Die Rangfunktion r von $\mathcal{M} \Delta A$ besitzt mit genau diesem A als Greedoid-Rangfunktion und nach Prop. 3.29 die drei ersten Eigenschaften. Die getwistete Submodularität folgt aus der Modularität der „Betragsanhängsel“

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= |A \cap X| + |A \cap Y| = |A \cap (X \cap Y)| + |A \cap (X \cup Y)| \quad \text{und} \\ \theta_2 &:= |A \setminus X| + |A \setminus Y| = |A \setminus (X \cap Y)| + |A \setminus (X \cup Y)| \quad \text{mit Prop. 3.28:} \\ r(X \Delta A) + r(Y \Delta A) &= r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(Y) - \theta_1 + \theta_2 \\ &\geq r_{\mathcal{M}}(X \cap Y) + r_{\mathcal{M}}(X \cup Y) - \theta_1 + \theta_2 \\ &= r((X \cap Y) \Delta A) + r((X \cup Y) \Delta A) \end{aligned}$$

Umgekehrt soll Satz 2.9 genutzt werden. Bewirbt sich eine Funktion r mit den vier Voraussetzungen, dann definiert man zunächst eine Funktion f , fußend auf der zweiten Gleichung in Prop. 3.28, stellt dann die Submodularität von f fest,

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &= r(X \Delta A) + r(Y \Delta A) + \theta_1 - \theta_2 \\ &\geq r((X \cap Y) \Delta A) + r((X \cup Y) \Delta A) + \theta_1 - \theta_2 \\ &= f(X \cap Y) + f(X \cup Y), \end{aligned}$$

folgt die Monotonie von f iterativ aus dem Extrakt $r(X \cup y) \geq r(X)$ der Wachstumseigenschaften von r und berechnet $f(\emptyset) = r(A) - |A| \leq 0$, aber auch $r(A = \{a_1, \dots, a_m\}) \geq r(A \setminus a_m) + 1 \geq \dots \geq r(\{a_1\}) + |A \setminus a_1| \geq r(\emptyset) + |A| = |A|$. f also ist Matroid-Rangfunktion von \mathcal{M} . Wegen $f(A) = r(\emptyset) + |A|$ ist $A \in \mathcal{M}$. Nun existiert also das getwistete Matroid $\mathcal{M} \Delta A$. Zieht man wiederum Prop. 3.28 zu Rate, dann wird klar, dass dessen Rangfunktion mit r übereinstimmt. ■

Durch das Wachstumsverhalten des Rangs¹² wird die Grundmenge E in drei Teile aufgespalten. Läge also ein Mengensystem vor, von dem man wüsste, es wäre getwistetes Matroid, und wären die Werte seiner Rangfunktion bekannt, dann könnte man versuchen, die Menge A zu ermitteln, indem man Elemente dort einsortiert, die irgendwo den Rang um 2 springen lassen, und Elemente ignoriert, die den Rang bei irgendeiner Menge nicht erhöhen. Die Elemente, bei denen beides nicht eintritt, behandelt man nach Belieben. Es scheint

¹²siehe Prop. 3.30

jedoch keine Suchstrategie für solche Indikatormengen ad hoc verfügbar, um ein solches Verfahren effektiv umzusetzen.

3.5.2 Hüllenoperator

Ähnlich der Rangfunktion gelingt es auch dem Hüllenoperator, sich in Abhängigkeit seines Pendantes vom Ursprungs-Matroid berechnen zu lassen.

Proposition 3.32.

Der Hüllenoperator des getwisteten Matroids $\mathcal{M} \Delta A$, hat die Gestalt

$$\sigma_{\mathcal{M} \Delta A}(X) = (\sigma_{\mathcal{M}}(X \Delta A) \setminus A) \cup X, \quad X \subseteq E.$$

Beweis

Es genügt wegen $X \subseteq \sigma(X)$ der Nachweis von $\sigma(X) \setminus X = \sigma_{\mathcal{M}}(X \Delta A) \setminus (A \cup X)$ bei $\sigma := \sigma_{\mathcal{M} \Delta A}$. Betrachtet man $y \notin X$, dann ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} r(X \cup y) & \stackrel{\text{Prop. 3.28}}{=} r_{\mathcal{M}}((X \cup y) \Delta A) + |A \cap (X \cup y)| - |A \setminus (X \cup y)| \\ & \stackrel{\text{Lemma 1.5}}{=} r_{\mathcal{M}}(X \Delta A \Delta y) + |A \cap X| + |A \cap \{y\}| - (|A \setminus X| - |A \cap \{y\}|) \\ & \stackrel{\text{Prop. 3.28}}{=} r_{\mathcal{M}}(X \Delta A \Delta y) - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) + r(X) + 2|A \cap \{y\}|. \end{aligned}$$

' \supseteq ' : Entspricht y dem Term der rechten Seite der nachzuweisenden

Gleichung, wird das vorige, weil $y \notin A$, zunächst zu

$$r(X \cup y) = r_{\mathcal{M}}((X \Delta A) \cup y) - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) + r(X) \quad \text{und damit zu}$$

$$r(X \cup y) = r(X).$$

' \subseteq ' : Für $y \in \sigma(X) \setminus X$ formiert sich obiges zu

$$r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) - r_{\mathcal{M}}(X \Delta A \Delta y) = 2|A \cap \{y\}|. \quad \text{Angesichts des}$$

beschränkten Wachstums der Matroid-Rangfunktion beträgt der

Ausdruck links 0, 1 oder -1 und folglich muss die rechte Seite nullwertig

sein, also $y \notin A$, und damit auch $r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) = r_{\mathcal{M}}((X \Delta A) \cup y)$,

mithin $y \in \sigma_{\mathcal{M}}(X \Delta A) \setminus A$.

■

Zu den Aussagen, die mit dem Hüllenoperator über abgeschlossene Mengen getroffen werden können, gehören solche über starke Abbildungen. Gleichwohl folgt auch bereits aus Satz 2.17 und Satz 3.22

Korollar 3.33.

$\mathcal{M} \Delta A$ ist starkes Abbild von $\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A)$: $\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A) \leftrightarrow \mathcal{M} \Delta A$.

Der Hüllenoperator $\sigma_{\mathcal{H}}$ der monotonen Hülle selbst wird kalkuliert per

Proposition 3.34.

$$\sigma_{\mathcal{H}}(X) = (\sigma_{\mathcal{M}}(X \setminus A) \setminus A) \cup X, \quad X \subseteq E.$$

Beweis

Weil X in beiden Mengen vollständig enthalten ist, können wir uns auf $\sigma_{\mathcal{H}}(X) \setminus X = \sigma_{\mathcal{M}}(X \setminus A) \setminus (A \cup X)$ konzentrieren, im Vorgriff auf Prop. 3.39:

$\sigma_{\mathcal{H}}(X) \setminus X = \sigma_{\mathcal{H}}(X) \setminus (X \cup A)$, weil $A \cap (\sigma_{\mathcal{H}}(X) \setminus X) = \emptyset$, denn

$$r_{\mathcal{H}}(X \cup y) = r_{\mathcal{M}}(X \setminus A) + |A \cap X| + 1 = r_{\mathcal{H}}(X) + 1 \quad \text{für } y \in A.$$

Für $y \notin X \cup A$ ist $r_{\mathcal{H}}(X \cup y) - r_{\mathcal{H}}(X)$

$$= r_{\mathcal{M}}((X \cup y) \setminus A) - r_{\mathcal{M}}(X \setminus A) + |(X \cup y) \cap A| - |X \cap A|$$

$$= r_{\mathcal{M}}((X \setminus A) \cup y) - r_{\mathcal{M}}(X \setminus A).$$

Die erstrebte Gleichung erfüllt sich nun, weil $y \in \sigma_{\mathcal{M}}(X \setminus A) \Leftrightarrow y \in \sigma_{\mathcal{H}}(X)$ deutlich wurde. ■

Korollar 3.35.

\mathcal{M} ist starkes Abbild von $\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A)$: $\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A) \leftrightarrow \mathcal{M}$.

Beweis

X sei abgeschlossen in \mathcal{M} , formuliert als $\sigma_{\mathcal{M}}(X) \subseteq X$, begründet $\sigma_{\mathcal{H}}(X) = (\sigma_{\mathcal{M}}(X \setminus A) \setminus A) \cup X \subseteq (\sigma_{\mathcal{M}}(X) \setminus A) \cup X \subseteq (X \setminus A) \cup X = X$ mit der Monotonie des Matroid-Operators. ■

3.5.3 Δ -Rang

Um die Betrachtungen noch ein wenig Richtung Δ -Matroide zu treiben, rücken wir die Δ -Rang-Funktion¹³ in den Blickpunkt.

Die Δ -Rang-Funktion eines jeden getwisteten Mengensystems kann ganz allgemein aus derjenigen des Ursprungssystems hergeleitet werden.

Lemma 3.36.

Sei $A \subseteq E$ beliebig. Dann gilt für $(X, Y) \in 3^E$ in jedem Mengensystem \mathcal{F}

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{F} \Delta A}^{\Delta}(X, Y) &= r_{\mathcal{F}}^{\Delta}((X \setminus A) \cup (Y \cap A), (X \cap A) \cup (Y \setminus A)) \\ &\quad + |A \cap X| - |A \cap Y|. \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} &|X \cap (C \Delta A)| - |Y \cap (C \Delta A)| \\ &= |(X \cap C) \setminus A| + |(X \cap A) \setminus C| - |(Y \cap C) \setminus A| - |(A \cap Y) \setminus C| \\ &= |C \cap ((X \setminus A) \cup (Y \cap A))| - |C \cap ((X \cap A) \cup (Y \setminus A))| \\ &\quad + |A \cap X| - |A \cap Y|. \end{aligned}$$

Nun kann wegen $r_{\mathcal{F} \Delta A}^{\Delta}(X, Y) = \max_{C: C \Delta A \in \mathcal{F}} (|X \cap C| - |Y \cap C|)$
 $= \max_{C \in \mathcal{F}} (|X \cap (C \Delta A)| - |Y \cap (C \Delta A)|)$ die gewünschte Gleichung aus
 der Definition des Δ -Rangs gewonnen werden, ohne dass die beiden letzten
 konstanten Betragsterme in die Maximumbildung eingreifen würden. ■

Um auf die spezielle Funktion $r^{\Delta} := r_{\mathcal{M} \Delta A}^{\Delta}$ hinzuarbeiten, bedenken wir, dass $r_{\mathcal{M}}^{\Delta}$ zu einem Unabhängigkeitssystem gehört, was $r_{\mathcal{M}}^{\Delta}(X, Y) = r_{\mathcal{M}}(X)$ impliziert¹⁴ und folgern nun die Darstellung des Δ -Rangs in Abhängigkeit der Matroid-Rangfunktion.

¹³siehe 1.3.3

¹⁴siehe Bem. 2.3

Proposition 3.37.

$$r^\Delta(X, Y) = r_{\mathcal{M}}((X \setminus A) \cup (Y \cap A)) + |A \cap X| - |A \cap Y|.$$

Diese Funktion besitzt damit die in Satz 2.30 aufgezählten Eigenschaften und ist insbesondere bisubmodular, wie damit auch die Funktion rechterhand ohne die Betragsterme.¹⁵ Die bisherigen Aussagen über die Δ -Rangfunktion sind nicht darauf angewiesen, dass $A \in \mathcal{M}$ vorliegt.

Durch Einsetzen von $Y = E \setminus X$ erhält man schließlich

$$r^\Delta(X, E \setminus X) = r_{\mathcal{M}}(X \Delta A) + |A \cap X| - |A \setminus X| = r(X)$$

mit Prop. 3.28.

Zu den Mengensystemen, die die leere Menge enthalten und dieses Kriterium erfüllen, gehören nicht nur alle Unabhängigkeitssysteme, sondern z.B. auch die Δ -Matroide \mathcal{D} mit $\emptyset \in \mathcal{D}$, denn es stellt sich heraus, dass das Kriterium hinreichend und notwendig für eine Wachstumsbeschränkung à la Prop. 3.29 ist, die in ihrer Konsequenz¹⁶ auch an die Definition für Δ -Matroide erinnert.

Bemerkung 3.38.

Ist \mathcal{F} ein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{F}$, dann

$$r^\Delta(X, E \setminus X) = r(X) \quad \forall X \subseteq E \quad \iff \quad r(X \cup y) \leq r(X) + 2 \quad \forall X \subseteq E, y \in E \setminus X \quad .$$

Beweis

' \Rightarrow ': $Z \in \mathcal{F}$ realisiere den Δ -Rang von $X \cup y$, $X \subseteq E$, $y \in E \setminus X$ im

$$\begin{aligned} & \text{Sinne von } r(X \cup y) = r^\Delta(X \cup y, E \setminus (X \cup y)) \\ &= |Z \cap (X \cup y)| - |Z \setminus (X \cup y)| = |Z \cap X| - |Z \setminus X| \\ &+ 2 |\{y\} \cap Z| \leq r^\Delta(X, E \setminus X) + 2 = r(X) + 2. \end{aligned}$$

¹⁵siehe Lemma 2.27

¹⁶siehe Bem. 3.25

' \Leftarrow ' : Angenommen man fände $X \subseteq E$, $Y, Z \in \mathcal{F}$, $Y \subseteq X$ mit $r^\Delta(X, E \setminus X) = |Z \cap X| - |Z \setminus X| > |Y| = r(X)$. Es ist $Z \subseteq X \cup Z$ und so $r(X \cup (Z \setminus X)) \geq |Z| = |Z \cap X| + |Z \setminus X| > |Y| + 2|Z \setminus X| = r(X) + 2|Z \setminus X|$. Das bringt die induktiv erschließbare Gewissheit, dass im Widerspruch zur Voraussetzung auf dem Weg von X nach $X \cup (Z \setminus X)$ ein Sprung des Rangs vorkommt, der 2 übersteigt. ■

Zu diesen Mengensystemen zählen nicht nur Unabhängigkeitssysteme und Δ -Matroide, sondern beispielsweise auch $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

3.5.4 Hüllen- und Basis-Rang

Proposition 3.39.

Die Matroid-Rangfunktion $r_{\mathcal{H}}$ der monotonen Hülle $\mathcal{H}(\mathcal{M} \Delta A)$ hat folgendes Aussehen:

$$r_{\mathcal{H}}(X) = r_{\mathcal{M}}(X \setminus A) + |X \cap A|.$$

Beweis

Der Rang einer Menge in der direkten Summe zweier Matroide, in diesem Fall die aus Prop. 3.21, ist gleich der Summe der jeweiligen Werte der Rangfunktion der beiden einzelnen Matroide und zwar vom Schnitt der Menge mit der jeweiligen Grundmenge.¹⁷ Zusätzlich gilt trivialerweise $r_{\mathcal{M} \setminus A}(Y) = r_{\mathcal{M}}(Y)$ für $Y \in E \setminus A$. ■

Der Basis-Rang des getwisteten Matroids¹⁸ berechnet sich damit zu

$$\beta(X) = r^\Delta(X, \emptyset) = r_{\mathcal{M}}(X \setminus A) + |X \cap A| = r_{\mathcal{H}}(X),$$

¹⁷vgl. [Wel76], S. 73

¹⁸siehe 2.3.2

gleich also dem Rang der Hülle. Eine rang-zulässige Menge des getwisteten Matroids ist demnach eine Menge X , deren sämtliche Basen $X \cap A$ enthalten.

3.6 Optimierung

Die Zerlegung aus Prop. 3.11 für einen Optimierungsalgorithmus zu verwenden, erfordert neben der Kenntnis von A auch die Anwendung des Matroid-Greedy-Algorithmus (MGA) für alle $X \subseteq A$ auf den entsprechenden Matroiden, um dann noch das Maximum aller dieser Ergebnisse zu bestimmen, und ist daher keine plausible Idee.

3.6.1 Der getwistete Matroid-Greedy

Der nächste Gedanke, der sich einstellen mag, besteht darin, ähnlich wie in 2.4.2 den Matroid-Greedy-Algorithmus durch „Twisten“ dazu zu bewegen, auf der symmetrischen Differenz $\mathcal{F} := \mathcal{M} \Delta A$ zu arbeiten. Dies kann auch hier durch passende Vorzeicheninversion bei der Gewichtsfunktion und modifizierte Orakelbefragung erreicht werden, natürlich nur unter der Voraussetzung, dass ein solches Mengensystemorakel tatsächlich vorliegt.

Der Greedy-Algorithmus (**twGA**) zum Auffinden von $X \in \mathcal{F} = \mathcal{M} \Delta A$ mit maximalem $c(X)$ bei Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ lautet:

1. Def. $\bar{c}(e) := \begin{cases} c(e), & e \in E \setminus A \\ -c(e), & e \in A \end{cases}$
2. Ordne E so zu $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, dass $\bar{c}(e_i) \geq \bar{c}(e_{i+1})$ für $i = 1 \dots n - 1$
3. $X := A$, $i := 1$
4. Wenn $i = n + 1$ oder $\bar{c}(e_i) \leq 0$ STOP
5. Wenn $e_i \in A$ und $X \setminus e_i \in \mathcal{F}$, dann $X := X \setminus e_i$
6. Wenn $e_i \notin A$ und $X \cup e_i \in \mathcal{F}$, dann $X := X \cup e_i$
7. $i := i + 1$; gehe zu 4.

Der Algorithmus ist offenkundig polynomiell bei gewöhnlichem Orakel. Ist Y die Menge maximalen Gewichts bezüglich c in $\mathcal{M} \Delta A$, so bringt $Y \Delta A$ das

maximale Gewicht bezüglich \bar{c} im \mathcal{M} auf, denn es fügt sich für $X \subseteq E$:

$$\begin{aligned} \bar{c}(X \Delta A) &= \sum_{e \in X \setminus A} \bar{c}(e) + \sum_{e \in A \setminus X} \bar{c}(e) = \sum_{e \in X \setminus A} c(e) - \sum_{e \in A \setminus X} c(e) \\ &= \sum_{e \in X \setminus A} c(e) - \left(c(A) - \sum_{e \in X \cap A} c(e) \right) = c(X) - c(A). \end{aligned}$$

Es wird demgemäß der (MGA) bezüglich \bar{c} durchgeführt, wobei die im jeweiligen Durchlauf betrachtete Menge X hier in der Form ihrer symmetrischen Differenz mit A notiert ist ($A \Delta A = \emptyset$). So kommt der Modifikationsschritt von X auf Grund der Beziehung

$$\begin{aligned} (X \Delta A) \cup e \in \mathcal{M} &\iff X \setminus e \in \mathcal{M} \Delta A, \quad e \in A \quad \text{oder} \\ &X \cup e \in \mathcal{M} \Delta A, \quad e \notin A \end{aligned}$$

zu Stande.

So suggestiv der Algorithmus auch erscheint und sich aufdrängt, ist er doch nicht nur von der Präsenz eines Mengensystemorakels für \mathcal{F} abhängig, sondern auch davon, dass man sich in Kenntnis der Menge A befindet, die \mathcal{F} zum getwisteten Matroid macht. Allgemeiner verwendbar wäre ein Verfahren, das ohne die Information auskommt, ob einzelne Elemente zu A gehören oder nicht.

3.6.2 Der allgemeinere Ansatz

Dieses steht aber schon bereit. Denn das getwistete Matroid ist, wie in diesem Kapitel herausgearbeitet wurde, ein Δ -Matroid und ein Greedoid mit restriktionsstabiler starker Austauschenschaft.

Satz 3.40.

Sei \mathcal{M} ein Matroid und $A \in \mathcal{M}$. Außerdem gegeben sei eine Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit nicht notwendigerweise positiven Gewichten auf Elementen von E . Steht nun ein Orakel zur Verfügung, welches das Enthaltensein im getwisteten Matroid $\mathcal{M} \Delta A$ in polynomieller Zeit entscheiden kann, dann gibt es einen Greedy-Algorithmus, den (KGA) aus 2.5, der das gewichtsmaximale $X \in \mathcal{M} \Delta A$ in polynomieller Zeit findet.

Beweis

Kor. 2.36, Kor. 3.23 und Prop. 3.1. ■

Eine Alternative bietet sich freilich auch mit dem Worst-Out-Greedy (WOA) für ausgedünnte Matroide an, sofern man das dazu benötigte Orakel zur Verfügung hat.¹⁹

3.7 Schnitt

Soll ein Schnitt von getwisteten Matroiden betrachtet werden, so beschränkt sich eine allgemeine Darstellung auf übereinstimmende Twistmengen, da selbst bei identischen Ausgangsmatroiden etwa $\mathcal{M} \cap (\mathcal{M} \Delta A)$ weder Greedoid noch Δ -Matroid sein muss.

XIX) $\mathcal{M} \cap (\mathcal{M} \Delta A)$, wobei \mathcal{M} durch die blauen, $\mathcal{M} \Delta A$ mit $A = \{4, 5\}$ durch die roten und der Schnitt durch die schwarzen Mengen wiedergegeben wird ($E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
 & & & & & & & \{1, 2, 4, 5\} \quad \{1, 3, 4, 5\} \quad \{2, 3, 4, 5\} \\
 & & & & & & & \{1, 2, 3\} \quad \{1, 2, 5\} \quad \{2, 3, 4\} \quad \{1, 3, 4\} \quad \{1, 3, 5\} \quad \{1, 4, 5\} \\
 & & & & & & & \{2, 4, 5\} \quad \{3, 4, 5\} \quad \{1, 2, 4\} \quad \{2, 3, 5\} \\
 & & & & & & & \{1, 2\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\} \quad \{1, 4\} \quad \{1, 5\} \quad \{2, 4\} \quad \{2, 5\} \\
 & & & & & & & \{3, 4\} \quad \{3, 5\} \quad \{4, 5\} \\
 & & & & & & & \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\} \quad \{5\} \\
 & & & & & & & \emptyset
 \end{array}$$

Dieser Schnitt ist kein Greedoid, weil sich $\{2, 5\}$ nicht von $\{1, 3, 5\}$ aus augmentieren lässt und kein Δ -Matroid, weil zu $X = \{1, 3, 4\}$, $Y = \{2, 4, 5\}$ und $y = 2$ von $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ und $\{2, 3, 4\}$ kein einziges Exemplar zu beiden getwisteten Matroiden gehört.

¹⁹siehe 2.3.3

Beschränkt man sich aber auf ein fixiertes $A \subseteq E$, dann können auf recht triviale Weise verschiedene Matroide zum Twist mit anschließendem Schnitt gebracht werden.

Proposition 3.41.

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Matroide, A in beiden enthalten. Dann

$$(\mathcal{M}_1 \Delta A) \cap (\mathcal{M}_2 \Delta A) = (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \Delta A.$$

Die Matroid-Eigenschaften gehen hier nicht ein; der Ausdruck bleibt für beliebige Mengensysteme $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ anwendbar.

Beweis

Ein $X \subseteq E$ links bzw. rechts enthalten, entspricht beide Male $X \Delta A \in \mathcal{M}_1$ und $X \Delta A \in \mathcal{M}_2$. ■

Es ist darum keine Überraschung, dass der gewichtete Matroid-Schnitt-Algorithmus (MSA) von Frank²⁰ ohne weiteres so „getwistet“ werden kann, dass er auch auf diesem Schnitt jede Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ optimiert. Wieder ist die Kenntnis von A dazu vonnöten.

Ebenso leicht einsichtig liegt der Fall bei der Vereinigung zweier getwisteter Matroide (Mengensysteme) vermöge

Proposition 3.42.

$$(\mathcal{M}_1 \Delta A) \cup (\mathcal{M}_2 \Delta A) = (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \Delta A.$$

Unter Umständen sind unterschiedliche Twistmengen möglich. Ein durch die Verwendung der Vereinigung komponiertes Mengensystem ist Gegenstand des nächsten Kapitels.

²⁰siehe 2.2.6

Kapitel 4

Matroid-Twistvereinigungen

Nun wird ein Objekt ins Blickfeld der Betrachtungen dieser Arbeit gestellt, welches aus einer Komposition von getwisteten Matroiden besteht, die alle vom gleichen Matroid ausgehen, das um jeweils ein einzelnes Element getwistet wird. Diese getwisteten Matroide werden vereinigt, und zwar auf die klassische Art, nicht mengenweise. Obwohl solche Vereinigungen selten die strukturellen Gesetzmäßigkeiten ihrer Komponenten bewahren können, gelingt es in diesem Fall, einige der bisher vorgestellten Aspekte vom getwisteten Matroid auf die Zusammensetzung zu übertragen.

Abhängig vom Umfang der gewählten Twistmenge entsteht unter Umständen wieder ein Matroid. Solche Matroide werden im Zusammenhang mit dem Traveling-Salesman-Problem betrachtet.¹

4.1 Die Twistvereinigung

Die **Twistvereinigung** wird durch folgende, für die Formulierungen hilfreiche Abbildung \mathcal{U}_X , $X \subseteq E$, $X \neq \emptyset$ illustriert:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \\ \mathcal{F} &\mapsto \bigcup_{e \in X} \mathcal{F} \Delta e. \end{aligned}$$

¹siehe 4.4

$\mathcal{U}_X^k (= \mathcal{U}_X \circ \mathcal{U}_X^{k-1})$ bezeichnet in üblicher Weise die k -malige Hintereinanderausführung der beschriebenen Abbildung für $k \in \mathbb{N}$.

4.1.1 Die Matroid-Twistvereinigung

Die **Matroid-Twistvereinigung** $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ eines Matroids \mathcal{M} bezüglich der **Twistmenge** $A \subseteq E$ ist also die Vereinigung getwisteter Matroide:

$$\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{M} \Delta a.$$

Die Aussage oben steht unter dem Vorbehalt, dass für jedes $a \in A$ die Menge $\{a\}$ in \mathcal{M} vorkommt, wenn man die Definition für getwistete Matroide erinnert.² Ein Element der Grundmenge, das in Kontradiktion dazu in keiner Menge des Matroids auftaucht, wird **Schleife** genannt. Beim Bilden der Matroid-Twistvereinigung sollen Schleifen aber toleriert werden.

Die noch schärfere Forderung $A \in \mathcal{M}$ des vorangegangenen Kapitels ist in diesem Zusammenhang nicht von weiterem Nutzen. $A \neq \emptyset$ soll jedoch durchgängig Bestandteil der Voraussetzungen sein, ohne ständig hingeschrieben werden zu müssen.

4.1.2 Die Augmentierungseigenschaft

Proposition 4.1.

Die Twistvereinigung $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ verfügt für ein zu Grunde liegendes Matroid \mathcal{M} und $A \subseteq E$ über die Augmentierungs-Eigenschaft (AE).

Beweis

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}_A(\mathcal{M}), \quad X, Y \in \mathcal{U}, \quad |X| < |Y|,$$

$$X \in \mathcal{M} \Delta a_1, \quad Y \in \mathcal{M} \Delta a_2, \quad a_1, a_2 \in A.$$

$$\text{Fall 1: } \underline{a_1 \in X, a_2 \in Y} \Rightarrow X \setminus a_1, Y \setminus a_2 \in \mathcal{M}, \quad |X \setminus a_1| < |Y \setminus a_2|$$

$$\Rightarrow \exists_{y \in (Y \setminus a_2) \setminus (X \setminus a_1)} X \setminus a_1 \cup y \in \mathcal{M}.$$

$$\text{Fall 1.1: } \underline{y = a_1, a_2 \in X} \Rightarrow X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus a_2 \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \exists_{z \in (Y \setminus a_2) \setminus (X \setminus a_2) = Y \setminus X, z \neq a_2} X \setminus a_2 \cup z \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup z \in \mathcal{M} \Delta a_2.$$

²siehe 3.1

Fall 1.2: $y = a_1, a_2 \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup a_2 \in \mathcal{M} \Delta a_2, a_2 \in Y \setminus X.$

Fall 1.3: $y \neq a_1 \Rightarrow y \in Y \setminus X, X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a_1 (\subseteq \mathcal{U}).$

Fall 2: $a_1 \in X, a_2 \notin Y \Rightarrow X \setminus a_1, Y \cup a_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow Y \setminus \{a_1\} \in \mathcal{M}.$

$$|X \setminus a_1| = |X| - 1 < |Y| - 1 \leq |Y \setminus \{a_1\}|$$

$$\Rightarrow \exists_{y \in (Y \setminus \{a_1\}) \setminus (X \setminus a_1) = Y \setminus X, y \neq a_1} X \setminus a_1 \cup y \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a_1.$$

Fall 3: $a_1 \notin X, a_2 \notin Y \Rightarrow X \cup a_1, Y \cup a_2 \in \mathcal{M}, |X \cup a_1| < |Y \cup a_2|$

$$\Rightarrow \exists_{y \in (Y \cup a_2) \setminus (X \cup a_1)} X \cup a_1 \cup y \in \mathcal{M}.$$

Fall 3.1: $a_1 \in Y: X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup a_1 \in \mathcal{M} \Delta a_1 (\subseteq \mathcal{U}), a_1 \in Y \setminus X.$

Fall 3.2: $a_1 \notin Y, y \neq a_2 \Rightarrow y \in Y \setminus X, X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a_1 (\subseteq \mathcal{U}).$

Fall 3.3: $a_1 \notin Y, y = a_2 \Rightarrow |X \cup a_2| < |Y \cup a_2|, X \cup a_2 \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \exists_{z \in (Y \cup a_2) \setminus (X \cup a_2) = Y \setminus X} X \cup a_2 \cup z \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup z \in \mathcal{M} \Delta a_2.$$

Fall 4: $a_1 \notin X, a_2 \in Y \Rightarrow X \cup a_1, Y \setminus a_2 \in \mathcal{M}.$

Fall 4.1: $a_2 \in X \Rightarrow X \setminus a_2 \in \mathcal{M}, |X \setminus a_2| < |Y \setminus a_2|$

$$\Rightarrow \exists_{y \in (Y \setminus a_2) \setminus (X \setminus a_2) = Y \setminus X} X \setminus a_2 \cup y \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a_2 (\subseteq \mathcal{U}).$$

Fall 4.2: $a_2 \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup a_2 \in \mathcal{M} \Delta a_2 (\subseteq \mathcal{U}), a_2 \in Y \setminus X.$

■

Das folgende Korollar zeigt, dass im Normalfall davon ausgegangen werden kann, dass mit $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ein Greedoid vorliegt. Lediglich wenn A nur aus **Schleifen** des Matroids besteht, ist dies nicht gegeben. Schleife zu sein, ist trivialerweise gleichbedeutend damit, nicht in der Vereinigung aller Matroid-Basen enthalten zu sein.

Korollar 4.2.

$$A \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B}(M)} B \neq \emptyset \iff \mathcal{U}_A(M) \text{ ist ein Greedoid.}$$

Beweis

Nachdem Prop. 4.1 die Augmentierungseigenschaft bereit gestellt hat, muss

sich nur noch die leere Menge einfinden.

$$\begin{aligned} \exists_{a \in A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} a \in B &\stackrel{\text{Bem. 1.1}}{\Leftrightarrow} \exists_{a \in A} \{a\} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists_{a \in A} \emptyset \in \mathcal{M} \Delta a \\ &\Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{U}_A(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

■

4.2 Die Matroid-Twistvereinigung als Matroid

4.2.1 Die Bedingung an die Twistmenge

Nun soll ein Spezialfall genauer betrachtet werden, in dem durch die Konstruktion wieder ein Matroid hervorgerufen wird. Dies ist grundsätzlich immer durch die Aufstockung der Twistmenge um geeignete Elemente möglich. Denn ist die Menge A dermaßen beschaffen, dass sich in jeder Basis von \mathcal{M} Elemente von ihr einmischen, dann entpuppt sich die Matroid-Twistvereinigung selbst als Matroid.

Proposition 4.3.

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} A \cap B \neq \emptyset \iff \mathcal{U}_A(\mathcal{M}) \text{ ist ein Matroid.}$$

Beweis

' \Rightarrow ' : Nachdem bei Betrachtung des vorigen Kor. 4.2 klar ist, dass unter den gegebenen Voraussetzungen mit $\mathcal{U} := \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ein Greedoid vorliegt, bleibt noch, \mathcal{U} als Unabhängigkeitssystem zu entlarven:

$$Y \in \mathcal{U}, X \subseteq Y \text{ vermöge } Y \in \mathcal{M} \Delta a, a \in A.$$

$$\text{Fall 1: } a \in X \Rightarrow X \setminus a (\subseteq Y \Delta a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}).$$

$$\text{Fall 2: } a \notin X \Rightarrow X \subseteq Y \Delta a \Rightarrow X \in \mathcal{M} \stackrel{\text{Bem. 1.1}}{\Rightarrow} \exists_{B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} X \subseteq B'.$$

$$\text{Fixiere } a' \in A \cap B' \Rightarrow X \Delta a' \subseteq B' \Rightarrow X \in \mathcal{M} \Delta a' (\subseteq \mathcal{U}).$$

' \Leftarrow ' : Ein fiktives $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ ohne Elemente aus A beschwört ein $B' \Delta a = B' \cup a$, $a \in A$ in \mathcal{U} herauf. Damit befindet sich aber auch B' im Unabhängigkeitssystem \mathcal{U} . Dieses verlangt nach einem Verursacher $C \in \mathcal{M}$, $C \Delta a' = B'$, $a' \in A$. Das provoziert $B' \cup a' = B' \Delta a' \in \mathcal{M}$, was

einen Widerspruch zu $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ hervorruft. ζ

■

Neben dem Begriff Schleife für die Kanten mit identischem Anfangs- und Endknoten, gibt es weitere Bezeichnungen aus dem Matroid-Kontext, die durch die graphischen Matroide³ angeregt wurden. So ist ein **Kreis** eine minimale nicht unabhängige Menge in \mathcal{M} und ein **Cokreis** ist ein Kreis im Dual des Matroids \mathcal{M}^* . Kreise sind wichtige Objekte in der Matroid-Theorie, die nicht nur eine Axiomatisierung der Matroide erlauben, sondern auch in hohem Maße dazu beitragen, die Struktur dieser Systeme besser zugänglich zu machen. Zur Vertiefung dieser Gesichtspunkte ist [Wel76] zu empfehlen.

Dort findet sich eine Charakterisierung von Cokreisen eines Matroids, die Gelegenheit zur sprachlich eleganteren Beschreibung der Matroid-Bedingung für Twistvereinigungen bietet. Cokreise sind genau die minimalen Mengen unter denjenigen Mengen, die mit jeder Basis einen nicht leeren Schnitt aufweisen.

Korollar 4.4.

A enthält einen Cokreis von \mathcal{M} $\iff \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ist ein Matroid.

Spätestens für die Twistvereinigung selbst, als entstandenes Matroid, ist diese Bedingung dann aber sicher erfüllt, d.h. A enthält einen Cokreis des Matroids $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ genau dann, wenn es einen Cokreis des Matroids \mathcal{M} enthält:

Bemerkung 4.5.

Für die Matroid-Twistvereinigung $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ wird $A \cap B \neq \emptyset$ von allen $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ erreicht.

Beweis

Betrachte ein $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$. Wäre $A \cap B = \emptyset$, dann wäre $B \cup a \in \mathcal{M}$ mit einem $a \in A$, weil eines existieren müsste, welches $B \in \mathcal{M} \Delta a$ erwirkt. Dann wäre aber auch $B \in \mathcal{M}$ und deshalb $B \cup a \in \mathcal{M} \Delta a$ also in $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$, was B jedoch als Basis nicht dulden kann. ζ

■

Wird die Twistmenge genügend groß gemacht, kann man jede Matroid-Twistvereinigung zum Matroid machen, spätestens bei Aufstockung bis zur kompletten Grundmenge.

Korollar 4.6.

Für ein Matroid, das nicht nur aus der leeren Menge besteht, ist das Konstrukt $\bigcup_{e \in E} \mathcal{M} \Delta e$ wiederum Matroid.

³siehe 2.2.3

4.2.2 Die Beziehung zum Ausgangs-Matroid

Ein Matroid $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ enthält sein Ausgangssystem. Ähnlich wie beim gewisteten Matroid verändert sich nichts, wenn jede Basis die Twistmenge A schon ganz enthält.

Proposition 4.7.

Das Verhältnis der Twistvereinigung zum Ausgangs-Matroid wird bestimmt durch:

- (1) $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ist Matroid $\implies \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$.
- (2) $A \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} B \iff \mathcal{M} = \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$.
- (3) $A \not\subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} B \implies r(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})) = r(\mathcal{M}) + 1$.

Beweis

(1): $X \in \mathcal{M}$ vorausgesetzt, ergibt sich:

Fall 1: $X \cap A \neq \emptyset$ $\implies X \setminus a \in \mathcal{M}$ für $a \in X \cap A \implies X \in \mathcal{M} \Delta a$.

Fall 2: $X \cap A = \emptyset$ $\implies \exists_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} X \subseteq B$. Erfasse $a \in A \cap B$,

existent nach Prop. 4.3. $X \cup a (\subseteq B) \in \mathcal{M} \implies X \in \mathcal{M} \Delta a$.

(2): Ist $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} A \subseteq B$ also insbesondere $\forall_{a \in A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} a \in B$, liefert Prop. 3.7, dass $\forall_{a \in A} \mathcal{M} \Delta a = \mathcal{M}$ und somit $\mathcal{M} = \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$.

(3): Findet man andererseits ein Paar $a \in A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, das $a \notin B$ genügt, dann ist $B \cup a \in \mathcal{M} \Delta a$ und darum $r(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})) \geq r(\mathcal{M}) + 1$. Größer kann der Rang von $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ aber nicht werden, weil für jedes $X \in \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ein $X \Delta a \in \mathcal{M}$, $a \in A$ vorliegt, das $|X| - 1 \leq |X \Delta a| \leq r(\mathcal{M})$ impliziert. ■

Eine recht triviale Erkenntnis ist zur Gestalt der Basen der Twistvereinigung verfügbar.

Bemerkung 4.8.

Jede Basis einer vom Matroid \mathcal{M} ausgehenden Twistvereinigung entsteht durch das Hinzufügen eines Elements aus A zu einer Basis von \mathcal{M} , sofern die Twistvereinigung eine echte Erweiterung von \mathcal{M} ist.

$$\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})) \implies \exists_{a \in A \cap B} B \setminus a \in \mathcal{B}(\mathcal{M}).$$

Beweis

Ein solches $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ von der Anzahl $r(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ erzwingt die Existenz eines $a \in A$ für $B \in \mathcal{M} \Delta a$. Dieses a muss sich innerhalb von B befinden, da ansonsten $B \Delta a = B \cup a \in \mathcal{M}$ dem \mathcal{M} einen ihm nach Prop. 4.7 nicht gebührenden Rang größer als $r(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ zugestehen würde. Diese Argumentationsquelle ausschöpfend begründet man, dass $B \setminus a \in \mathcal{M}$, weil es von der Anzahl $r(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})) - 1 = r(\mathcal{M})$ ist, Basis von \mathcal{M} sein muss. ■

Nun steht eine echte Twistvereinigung, die Matroid ist, ohne auf dem Ausgangssystem zu verharren, in einer engen strukturellen Beziehung zu diesem Ausgangssystem.

Bemerkung 4.9.

Korreliert die Menge A mit jeder Basis eines Matroids \mathcal{M} , ohne dass sie Teilmenge einer jeden dieser Basen ist, dann ist \mathcal{M} eine starkes Abbild der Twistvereinigung $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) \leftrightarrow \mathcal{M}.$$

Beweis

Erklärt man die Voraussetzungen aus Lemma 2.11 für gegeben, das heißt $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $z \in B$, $x, y \notin B$, $B \setminus z \cup \{x, y\} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$, entstehen zwei Möglichkeiten für y :

$$\text{Fall 1: } \underline{y \in A} \Rightarrow B \cup y \in \mathcal{M} \Delta y, \quad |B \cup y| = r(\mathcal{M}) + 1$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Prop. 4.7}}{B \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))}.$$

$$\text{Fall 2: } \underline{y \notin A} \Rightarrow \underset{\text{Bem. 4.8}}{\exists a \in A} B \setminus \{a, z\} \cup \{x, y\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}).$$

$$\text{Fall 2.1: } \underline{a = x} \Rightarrow B \setminus z \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{M}).$$

$$\text{Fall 2.2: } \underline{a \in B \setminus z}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{(AA)}}{\exists q \in B \setminus (B \setminus \{a, z\} \cup \{x, y\})} B \setminus \{a, z\} \cup \{x, y\} \setminus x \cup q \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow q \in \{a, z\}, \quad B \setminus \{a, z\} \cup \{q, y\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}).$$

$$\text{Fall 2.2.1: } \underline{q = a} \Rightarrow B \setminus z \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{M}).$$

$$\text{Fall 2.2.2: } \underline{q = z} \Rightarrow B \setminus a \cup y \in \mathcal{M} \Rightarrow B \cup y \in \mathcal{M} \Delta a,$$

$$|B \cup y| = r(\mathcal{M}) + 1 \Rightarrow B \cup y \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})).$$

■

4.3 Die iterierte Twistvereinigung

Die Abbildung \mathcal{U} erzeugt, hintereinandergeschaltet mit fixierter Twistmenge, bei jeder Anwendung ein weiteres Mengensystem. Da hier nur Matroid-Twistvereinigungen Untersuchungsgegenstand sind, muss das Ausgangssystem jeder Iteration ein Matroid sein. Es zeigt sich, dass dann sukzessiv immer Matroide hervorgebracht werden.

Die nächste Aussage belegt, dass es sich dabei zudem jeweils um die klassische Vereinigung von getwisteten Matroiden handelt. Bei strenger Auslegung müsste in diesem Fall jedoch zur Verwendung obiger Ausdrucksweise die Twistmenge zum Ursprungs-Matroid zählen ($A \in \mathcal{M}$).

Proposition 4.10.

Wenn $A \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A^{2k}(\mathcal{M}) &= \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j} \mathcal{M} \Delta D \quad \text{und} \\ \mathcal{U}_A^{2k+1}(\mathcal{M}) &= \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j+1} \mathcal{M} \Delta D \quad \text{sind Matroide.} \end{aligned}$$

Beweis

Zunächst soll demonstriert werden, dass sich für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Richtigkeit der unteren der beiden Gleichungen aus derjenigen der oberen ergibt. Ziel ist, dass sich

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A \left(\bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j} \mathcal{M} \Delta D \right) &= \bigcup_{a \in A} \left(\bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j} \mathcal{M} \Delta D \right) \Delta a \\ &\stackrel{\text{Prop. 3.42}}{=} \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{a \in A} \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j} \mathcal{M} \Delta (D \Delta a) \end{aligned}$$

als gleichwertig zu

$$\bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j+1} \mathcal{M} \Delta D \quad \text{erweist.}$$

Akkuraterweise sei erwähnt, dass die Assoziativität der symmetrischen Differenz trotz Einführung der abkürzenden Schreibweisen für Mengensysteme direkt anwendbar bleibt, da beispielsweise der erste Term lediglich eine andere Gestalt von

$\{X \Delta D \Delta \{a\} \mid X \in \mathcal{M}, a \in A, D \subseteq A, |D| = 2j, 0 \leq j \leq k\}$ ist.

Darob lässt sich einsehen, dass die gewünschte Übereinstimmung aus $\{D \Delta a \mid a \in A, D \subseteq A, |D| = 2j, 0 \leq j \leq k\}$
 $= \{D' \mid D' \subseteq A, |D'| = 2j' + 1, 0 \leq j' \leq k\}$ hervorgeht, weil jeweils dieselben Mengen zum Twisten von \mathcal{M} versammelt werden.

Entstammt eine Menge $D \Delta a$ dem ersten Gefüge, so trifft jedenfalls $D \Delta a \subseteq A$ zu und $|D \Delta a|$ ist eine ungerade Zahl, die $2k + 1$ nicht übersteigt. Umgekehrt kann ein D' aus der zweiten Menge nicht leer sein, demnach sich ein $a \in A$ finden lässt, das $D' = (D' \setminus a) \Delta a$ bei geradem $|D' \setminus a| \leq 2k$ sichert.

Damit bietet es sich an, eine Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ anzustrengen, um die allgemeine Gültigkeit der Gleichung versichern zu können. Mit dem Start bei $\mathcal{U}_A^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M} = \mathcal{M} \Delta \emptyset$ soll in vergleichbarer Weise wie oben, von der Darstellung des \mathcal{U}_A^{2k+1} auf die von $\mathcal{U}_A^{2(k+1)}$ geschlossen werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A \left(\bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j+1} \mathcal{M} \Delta D \right) &= \bigcup_{a \in A} \left(\bigcup_{j=0}^k \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j+1} \mathcal{M} \Delta D \right) \Delta a \\ &= \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{a \in A} \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j+1} \mathcal{M} \Delta (D \Delta a) \\ &\stackrel{\text{Prop. 3.42}}{=} \bigcup_{j=0}^{k+1} \bigcup_{D \subseteq A, |D|=2j} \mathcal{M} \Delta D. \end{aligned}$$

soll übereinstimmen mit

$$\begin{aligned} \{D \Delta a \mid a \in A, D \subseteq A, |D| = 2j + 1, 0 \leq j \leq k\} \\ = \{D' \mid D' \subseteq A, |D'| = 2j', 0 \leq j' \leq k + 1\} \end{aligned}$$

bleibt daher einzusehen.

Ein der ersten Menge entnommenes $D \Delta a$ besitzt offensichtlich eine gerade Anzahl höchstens $2k + 2$ und ist Teilmenge von A . Ein nicht leeres D' der zweiten Menge enthält $a \in A$ zum Zusammenbau $D' = (D' \setminus a) \Delta a$ bei ungeradem $|D' \setminus a| \leq 2k + 1$. Schließlich wird auch $D' = \emptyset = \{a\} \Delta a$ ($A \neq \emptyset$ nach Voraussetzung), $a \in A$, $|\{a\}| = 1$ ($j = 0$) erfasst.

Bem. 4.5 steht dafür gerade, dass die fort dauernden Operationen immer wieder Matroide hervorbringen, da sich die dazu notwendige Bedingung, ausgehend von der ursprünglichen Voraussetzung, mit fortpflanzt. ■

Die Basen, die so sukzessive geschaffen werden, bestehen nach Bem. 4.8 jeweils aus Basen der Vorstufe um ein Element aus A augmentiert. Da sich dies nicht ewig fortsetzen lässt, weil irgendwann die Twistmenge in allen Basen eingeschlossen ist und sich der Rang nicht immer weiter erhöhen lässt, bleibt

die Anwendung von \mathcal{U}_A dereinst stationär:

$$\exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{m \in \mathbb{N}, m \geq k_0} \quad \mathcal{U}_A^m(\mathcal{M}) = \mathcal{U}_A^{k_0}(\mathcal{M}).$$

Dies ist auch der Formel oben anzusehen, weil es keine Teilmengen von A von beliebig großer Anzahl geben kann.

4.4 1- und K -Bäume

Die Kenntnis einiger weniger grundlegender Begriffe der Graphentheorie ist notwendig für das Verständnis dieses Abschnitts. Man kann sie aus der Lektüre von [Bol79] oder [Ber85] gewinnen.

4.4.1 1-Bäume

1-Bäume und das TSP

Als eins der hervorstechendsten Probleme der kombinatorischen Optimierung wird das (symmetrische) Traveling-Salesman-Problem (TSP) erachtet. Dabei wird der günstigste Weg angestrebt, eine vorgegebene Menge von Städten zu besuchen. [LLKS85] ist eine ausführliche Referenz zu diesem Thema.

Aus graphentheoretischer Sicht ist ein optimaler Hamilton-Kreis gesucht. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V^2$. Hamilton-Kreise sind diejenigen Kreise, die genau einmal durch alle Knoten führen. Die Kanten des Graphen sind mit Gewichten $c_{(v,w)}$, $(v, w) \in E$ ausgestattet, damit von einem optimalen Hamilton-Kreis gesprochen werden kann, als einem, für den die Summe der Kantengewichte (Kosten) die geringstmögliche ist. Die Hamilton-Kreise werden im Zusammenhang mit dem TSP auch Touren genannt.

Ein klassischer Ansatz für dieses schwer⁴ lösbare Problem stammt von Held und Karp⁵. Sie untersuchten eine sogenannte 1-Baum-Relaxierung und taten damit einen großen Schritt in Richtung Optimallösung, d.h. Annäherung an eine solche, mit vertretbarem Zeitaufwand. Nachfolgend wurde die 1-Baum-Relaxierung auch in [ST77], [VJ82], [VJ83] und [MF90] zur Verbesserung des Verfahrens betrachtet. Der Beitrag löste eine Anzahl weiterer Erörterungen

⁴vgl. [GJ79]

⁵vgl. [HK70] und [HK71]

aus, die sich mit Lagrange-Relaxierung in der kombinatorischen Optimierung befassen.⁶

Ein **1-Baum bezüglich** $v \in V$ ist ein aufspannender Baum auf dem von $V \setminus v$ induzierten Untergraphen, ergänzt um zwei Kanten an v . Äquivalent dazu wäre das Hinzufügen einer zu v inzidenten Kante zu einem gegebenen aufspannenden Baum von G . Allgemein gehalten ist ein **1-Baum** ein 1-Baum bezüglich irgendeines Knotens aus V , was wiederum gleichbedeutend damit ist, dass ein aufspannender Baum von G um eine beliebige Kante ergänzt wird. Folgende Beobachtungen von Held und Karp bringen die 1-Bäume mit dem TSP in Verbindung:

- Eine Tour ist ein 1-Baum.
- Ein 1-Baum ist genau dann eine Tour, wenn jeder Knoten den Grad 2 besitzt, d.h., wenn er 1-Baum bezüglich aller $v \in V$ ist. Ist ein 1-Baum von minimalem Gewicht eine Tour, dann handelt es sich ergo um eine optimale TSP-Tour.
- Eine Transformation der Kantengewichte $c_{(v,w)} \rightarrow c_{(v,w)} + \pi_v + \pi_w$, die Transformationswerte π für jeden einzelnen Knoten addiert, ändert nichts an der Anatomie der optimalen TSP-Tour, wohl aber an der Gestalt der minimalen 1-Bäume.

Die minimalgewichtigen 1-Bäume liefern also eine untere Schranke für die Kosten einer optimalen TSP-Tour. Die Folge ist, dass durch solche Transformationen der Kantengewichte eine große Anzahl an unteren Schranken generiert werden kann. Durch die Wahl der Transformationswerte kann zudem versucht werden, so auf die minimalgewichtigen 1-Bäume einzuwirken, dass sie sich in Richtung der 2-Regularität bewegen.

Möglichst große untere Schranken werden in [HK71] genutzt, um ein „Branch & Bound-Verfahren“⁷ zur Lösung des TSP durch Abschneiden tunlichst vieler Zweige abzukürzen. Bei dem Verfahren, das diese Schranken sukzessive verbessert, muss in jedem Schritt ein minimaler 1-Baum berechnet werden. Eine der gängigen Branch & Bound-Prozeduren realisiert die Einschränkung der Mengen zulässiger Lösungen in den Zweigen dadurch, dass Elemente aus E verboten oder obligatorisch gemacht werden, so dass die Schrankensuche jeweils unter dieser Einschränkung durchgeführt wird.

⁶siehe auch [Sch86]

⁷vgl. [Sch86]

Die Berechnung der minimalen 1-Bäume wird in den Verfahren umgesetzt über minimal aufspannende Bäume, z.B. mit dem Algorithmus von Kruskal⁸, der dem (MGA) aus 2.2.4 entspricht.

1-Bäume sind Matroid-Basen

Inspiziert man die Menge der 1-Bäume etwas genauer, dann kann man sie als Basismenge eines Matroids demaskieren. Wir gehen dazu vom graphischen Matroid $\mathcal{M}(G)$ aus, das vom vorgegebenen Graphen induziert ist.⁹

Satz 4.11.

Bezeichnet $\varepsilon(v)$ die Menge der zu $v \in V$ inzidenten Kanten, so gilt: Die 1-Bäume bezüglich v sind genau die Basen der Twistvereinigung $\mathcal{U}_{\varepsilon(v)}(\mathcal{M}(G))$ des graphischen Matroids. Die Menge der 1-Bäume generell entspricht $\mathcal{B}(\mathcal{U}_E(\mathcal{M}(G)))$.

Beweis

Zunächst sei angemerkt, dass die Existenz der 1-Bäume mit der Tatsache einhergeht, dass es bei den Twistvereinigungen um echte Erweiterungen geht. Denn sonst wäre $\varepsilon(v)$ bzw. E in allen Basen von $\mathcal{M}(G)$, also in allen aufspannenden Bäumen enthalten und dann wäre $\varepsilon(v)$ Schnitt bzw. alle Kanten wären Schnittkanten von G und es existierte kein aufspannender Baum, der im Sinne der Definition noch ergänzt werden könnte.

Nimmt man T_v , Kantenmenge eines 1-Baums bezüglich $v \in V$ wie oben definiert, eine passende, zu v inzidente Kante $e \in \varepsilon(v)$ weg, dann landet man mit $T_v \setminus e$ bei einem aufspannenden Baum in G , also bei einer Basis von $\mathcal{M}(G)$. Dann aber ist $T_v = (T_v \setminus e) \Delta e \in \mathcal{U}_{\varepsilon(v)}(\mathcal{M}(G))$. Mit dem Rangargument aus Prop. 4.7 ist T_v sogar Basis der Twistvereinigung. Genauso wird für den allgemeinen 1-Baum mit beliebiger Kante argumentiert.

Umgekehrt entsteht nach Bem. 4.8 jede Basis der Twistvereinigung $\mathcal{U}_{\varepsilon(v)}(\mathcal{M}(G))$ durch Hinzufügen eines Elements aus $\varepsilon(v)$ bzw. E zu einer Basis von $\mathcal{M}(G)$, also zu einem aufspannenden Baum. Dies trifft die Definition der 1-Bäume. ■

Da jeder Baum eine Kante aus $\varepsilon(v)$ vorweisen muss, wenn er alle Knoten verbinden will, ist die Twistvereinigung mit Prop. 4.3 immer ein Matroid,

⁸vgl. [Kru56]

⁹siehe 2.2.3

selbstredend auch für die Twistmenge aller Kanten.¹⁰

Beim Auffinden der minimalen 1-Bäume als Bestandteil des Verfahrens aus obigem Abschnitt wird demnach realiter jeweils Optimierung auf einem Matroid mit positiver Gewichtsfunktion durchgeführt, weshalb überhaupt nur die Basen in Frage kommen und sich auch Minimierung durch Umkehrung der Gewichtung einpasst.

Das Ge- und Verbiegen von Kanten ist aus der Matroid-Theorie als Kontraktion und Restriktion, also Minorenbildung, bekannt. Somit bleibt es im gesamten Geist des Branch & Bound-Baums bei Matroid-Optimierung.

4.4.2 K -Bäume

Vehicle Routing

Eine Verallgemeinerung des TSP weist auf ein verwandtes Praxis-Problem. Dabei sind K Touren, $K \in \mathbb{N}$, ausgehend von einem Depot gesucht, begründet bspw. durch die von K begrenzte Anzahl von Fahrzeugen. Es müssen $n - 1$ Kunden, $n \in \mathbb{N}$, besucht werden. Die Touren sollen eine geringstmögliche Summe von Kosten verursachen, die auf einzelnen Wegen zwischen den Kunden oder vom Depot zum Kunden verursacht werden. Das Problem ist als „Vehicle Routing Problem“ (VRP) bekannt und wird u.a. in [Chr85] erörtert. Zusätzlich sind beim VRP meist noch weitere Einschränkungen wie Fahrzeugkapazitäten oder zeitliche Vorgaben in Betracht zu ziehen.

Wieder kann das Problem durch einen Graphen modelliert werden, diesmal mit einem ausgezeichneten Depotknoten $v_0 \in V$. So kann auch die Lagrange-Relaxierung auf die neue Situation transferiert werden, was ein Branch & Bound-Verfahren ermöglicht, wie es in [Fis94a] beschrieben wird.

Ein **K -Baum**, $K \in \mathbb{N}$, ist eine den Graphen aufspannende Kantenmenge der Anzahl $n - 1 + K$, wenn $|V| = n$, also ein aufspannender Baum, dem K Kanten beigefügt wurden. Analog zum TSP ist jeder zulässige Tourenplan ein solcher K -Baum, was untere Schranken erhältlich macht. Umgekehrt braucht ein K -Baum einen Grad von $2K$ beim Depotknoten, um realisierbarer Tourenplan zu sein. Außerdem muss dazu für alle anderen Knoten wieder der Grad 2 garantiert werden. Einschränkungen wie Fahrzeugkapazitäten können in die Lagrange-Relaxierung eingearbeitet werden.

¹⁰siehe auch Kor. 4.6

Etwas einschränken ließe sich die Auswahl der K -Bäume zuvor noch über die Definition des **K-Baums bezüglich** $\mathbf{v} \in V$, bei der man die K hinzuzufügenden Kanten dem $\varepsilon(v)$ entnehme. Alle zulässigen Lösungen wären nach wie vor erfasst, nämlich in den K -Bäumen bezüglich des Depots.

K-Bäume sind Matroid-Basen

Satz 4.12.

Die K -Bäume sind genau die Basen der iterierten Twistvereinigung $\mathcal{U}_E^K(\mathcal{M}(G))$ des graphischen Matroids. Die Menge der K -Bäume bezüglich $v_0 \in V$ ist die Basismenge $\mathcal{B}(\mathcal{U}_{\varepsilon(v_0)}^K(\mathcal{M}(G)))$.

Beweis

Auch hier geht die Erfüllbarkeit der Definitionsbedingung der K -Bäume damit einher, dass die iterierte Twistvereinigung K -mal als echte Erweiterung ausführbar ist, äquivalent dazu, dass es überhaupt einen aufspannenden Baum in G gibt, der mindestens K Kanten aus E bzw. $\varepsilon(v_0)$ als Rest übrig lässt.

Ist T Kantenmenge eines K -Baums allgemein bzw. bezüglich $v_0 \in V$, dann induziert $T \setminus D$ für ein $D \subseteq E$ bzw. $D \subseteq \varepsilon(v_0)$, $|D| = K$ einen aufspannenden Baum in G und findet sich folglich als $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(G))$ wieder. $T = B \Delta D$ ist nun, Prop. 4.10 gemäß, in $\mathcal{U}_E^K(\mathcal{M}(G))$ bzw. $\mathcal{U}_{\varepsilon(v_0)}^K(\mathcal{M}(G))$. Die schiere Elementanzahl von T zwingt dieses in die Rolle einer Basis der iterierten Twistvereinigung nach Iterieren von Prop. 4.7(3) zu

$$r(\mathcal{U}_{\varepsilon(v_0)}^K(\mathcal{M}(G))) = r(\mathcal{U}_E^K(\mathcal{M}(G))) = r(\mathcal{M}(G)) + K.$$

Umgekehrt ringt man der gleichen Formel in Koalition mit Prop. 4.10 eben auch ab, dass eine maximal große Menge der iterierten Twistvereinigung aus der disjunkten Vereinigung $B \cup D = B \Delta D$ mit einer Basis B von $\mathcal{M}(G)$ hervorgeht, wobei $D \subseteq E$ ($\varepsilon(v_0)$) die maximale Anzahl K erreichen muss, was der Vereinigung das Prädikat K -Baum verleiht. ■

In [Fis94b] wird ein polynomieller Algorithmus zur Bereitstellung minimaler K -Bäume dargelegt, der als Teil im zitierten Branch & Bound-Verfahren Verwendung findet. Dabei gelingt es, das Sortiment an schrankengenerierenden K -Bäumen weiter einzuschränken, indem nach Erreichen eines minimalen K -Baums mittels Austauschoperationen die Gradbedingung $2K$ am speziellen Depotknoten durchgesetzt wird.

Aus den gleichen Gründen wie beim 1-Baum ist auch diese iterierte Twistvereinigung selbst ein Matroid.¹¹ Mit dem Wissen um Satz 4.12 kann für die wie oben bedingte Optimierung mithin auch der ebenfalls polynomielle, etwas schnellere Algorithmus aus [GT84] zum Einsatz kommen, der optimale Matroid-Basen berechnet, die eine vorgeschriebene Anzahl Elemente einer vorgegebenen Menge, hier $\varepsilon(v_0)$, beinhalten.

4.5 $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ als Greedoid

Auch in der Situation, wo die Twistmenge nicht jede Basis des Ausgangsmatroids schneidet, also mit der Twistvereinigung kein Matroid vorliegt, hat diese Konstruktion auch als Greedoid noch eine ordentlich fassbare Struktur. Die anschließenden Untersuchungen erstrecken sich nur auf die Twistvereinigungen, die Greedoide sind. Wie oben dargelegt bedeutet das, dass die Menge A ein gemeinsames Element mit mindestens einer der Basen von \mathcal{M} hat.

4.5.1 Die starke Austauschenschaft

Die Twistvereinigungen dürfen zu den Greedoiden mit restriktionsstabiler starker Austauschenschaft gezählt werden.

Satz 4.13.

Für beliebiges $T \subseteq E$ besitzt die Restriktion $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})|_T$ die starke Austauschenschaft.

Beweis

Bezeichne \mathcal{U}' die Restriktion $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})|_T$ von $\mathcal{U} := \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ und stehe $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}')$, $X \subseteq B$, $X \in \mathcal{U}'$, $X \cup x \in \mathcal{U}'$, $x \in E \setminus B$ zur Verfügung, wobei dann notwendigerweise $B \subseteq T$, $x \in T$ (weil $X \cup x \subseteq T$). Gemäß Eigenschaftsdefinition muss ein $y \in B \setminus X$ gefunden werden, welches $X \cup y \in \mathcal{U}'$ und $B \setminus y \cup x \in \mathcal{U}'$ realisiert. Durchgängig genügt es dazu, die betreffenden Mengen in \mathcal{U} aufzuspüren, weil sie wegen der Vorgaben ohnehin beide als Teilmengen von T daherkommen.

Gearbeitet wird mit der Vorgabe $|X| \leq |B| - 2$. Ansonsten ergäbe sich $|X| = |B| - 1 \Rightarrow X = B \setminus y$, $y \in B \setminus X \Rightarrow X \cup y (= B) \in \mathcal{U}$, $B \setminus y \cup x (= X \cup x) \in \mathcal{U}$. $|X| = |B|$ ist per se unmöglich, da $X \cup x$ den Rang von \mathcal{U}' nicht außer Acht lassen darf.

¹¹siehe Prop. 4.10

Eine verzweigte Fallunterscheidung trägt der Natur der symmetrischen Differenz Rechnung. Zunächst geht es um die Basen, die nicht mit der Twistmenge korrelieren.

Fall 1: $B \cap A = \emptyset$ $\exists_{a \in A} B \Delta a \in \mathcal{M} \Rightarrow B \cup a \in \mathcal{M}$.

Fall 1.1: $x \in A$ Nehme willkürlich $y \in B \setminus X$. $B \setminus y (\subseteq B \cup a) \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta x (\subseteq \mathcal{U}).$$

$$X \cup y \cup a (\subseteq B \cup a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}).$$

Fall 1.2: $x \notin A$ $\exists_{a' \in A} (X \cup x) \Delta a' \in \mathcal{M} \xRightarrow{(X \cup x) \cap A = \emptyset} X \cup x \cup a' \in \mathcal{M}$.

$$|X \cup x \cup a'| = |X| + 2 < |B| + 1 = |B \cup a|$$

$$\xRightarrow{\text{Lemma 2.5}} \exists_{D \subseteq (B \cup a) \setminus (X \cup x \cup a')} B' := X \cup x \cup a' \cup D \in \mathcal{M}, \quad |B'| = |B \cup a|$$

$$\xRightarrow{\text{(AA)}} \exists_{z \in (B \cup a) \setminus B'} B \cup a \cup x \setminus z \in \mathcal{M} (\subseteq \mathcal{U}).$$

Fall 1.2.1: $z \neq a$ $y := z \notin B' \Rightarrow y \in B \setminus X$, $B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a$.

$$X \cup y \cup a (\subseteq B \cup a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}).$$

Fall 1.2.2: $z = a \Rightarrow B \cup x \in \mathcal{M}$, $a' \in B' \setminus (B \cup x)$

$$\Rightarrow \exists_{y \in (B \cup x) \setminus B'} B \cup x \cup a' \setminus y \in \mathcal{M}, \quad y \notin B' \Rightarrow y \neq x$$

$$\Rightarrow y \in B \setminus X. \quad B \cup x \setminus y \in \mathcal{M} \Delta a'. \quad y \in B \cup x \Rightarrow y \neq a$$

$$\Rightarrow X \cup a \cup y (\subseteq B \cup a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a.$$

Was geschieht, wenn die Basis B doch Gemeinsamkeiten mit A aufweist?

Fall 2: $B \cap A \neq \emptyset$ $\exists_{a \in A \cap B} B \setminus a \in \mathcal{M}$, also auch $a \neq x$, denn:

$$\exists_{\hat{a} \in A} B \Delta \hat{a} \in \mathcal{M}. \text{ Aus } \hat{a} \in B \text{ folgt } B \setminus \hat{a} \in \mathcal{M}; \text{ wähle } a := \hat{a}.$$

Sollte $\hat{a} \notin B$ sein, dann $B \cup \hat{a} \in \mathcal{M}$; wähle beliebiges $a \in A \cap B$

$$\Rightarrow B \setminus a (\subseteq B \cup \hat{a}) \in \mathcal{M}. \text{ Daneben sei } a' \in A \text{ verantwortlich für}$$

$$(X \cup x) \Delta a' \in \mathcal{M}.$$

Lag das X schon in der Basis, bevor diese um a aufgestockt wurde, so kann das a einfach die Rolle des y spielen, wenn x selber ein Twistelement ist:

Fall 2.1: $a \notin X$

Fall 2.1.1: $x \in A$ $y := a \in B \setminus X$, $B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta x (\subseteq \mathcal{U})$,
 $X (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U})$.

Ist x kein Twistelement, zeigt sich der Vorgang komplexer. Der erste Teil dazu beschäftigt sich mit einem gegenüber \mathcal{M} reduzierten $X \cup x$:

Fall 2.1.2: $x \notin A$

Fall 2.1.2.1: $a' \notin X$ $\Rightarrow X \cup x \cup a' \in \mathcal{M}$ ($a' \neq x$).

Fall 2.1.2.1.1: $|X| = |B| - 2$ $\Rightarrow X = B \setminus \{a, y\}$, $y \in B \setminus X$.

$X \cup x \in \mathcal{M} \Rightarrow B \setminus y \cup x (= X \cup x \cup a) \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U})$.

$|B \setminus a| = |X \cup x \cup a'| - 1 \Rightarrow \exists_{z \in (X \cup x \cup a') \setminus (B \setminus a)} B \setminus a \cup z \in \mathcal{M}$.

$X \subseteq B \setminus a \Rightarrow z \in \{x, a'\}$. Wäre $z = x$, so $B \setminus a \cup x \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow B \cup x \in \mathcal{M} \Delta a \subseteq \mathcal{U}$, $B \cup x \subseteq T \Rightarrow B \cup x \in \mathcal{U}'$, im

Widerspruch zu $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}')$. Also $z = a'$

$\Rightarrow X \cup y \cup a' (= B \setminus a \cup a') \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a' (\subseteq \mathcal{U})$.

Fall 2.1.2.1.2: $|X| \leq |B| - 3$ Lemma 2.5 garantiert das Dasein

eines $D \subseteq (B \setminus a) \setminus (X \cup x \cup a')$ mit $X \cup x \cup a' \cup D \in \mathcal{M}$

und $|X \cup x \cup a' \cup D| = |B \setminus a|$. Wegen $x \notin B \setminus a$ kann

Lemma 2.6 für $y \in (B \setminus a) \setminus (X \cup x \cup a' \cup D) \subseteq B \setminus X$

bürgen, so dass $B \setminus \{a, y\} \cup x \in \mathcal{M}$ und $X \cup a' \cup D \cup y \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a$, $X \cup a' \cup y \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a'$.

Der zweite Teil sieht hingegen ein augmentiertes $X \cup x$:

Fall 2.1.2.2: $a' \in X$ $\Rightarrow X \setminus a' \cup x \in \mathcal{M}$. Lemma 2.5 präsentiert

nun das Vorhandensein von $D \subseteq (B \setminus a) \setminus (X \setminus a' \cup x)$ bei

$X \setminus a' \cup x \cup D \in \mathcal{M}$ und $|X \setminus a' \cup x \cup D| = |B \setminus a|$. Dank

dessen und $X \setminus a' \cup x \cup D \subseteq B \setminus a \cup x$ findet sich $z \in B \setminus a \cup x$ für $X \setminus a' \cup x \cup D = B \setminus \{a, z\} \cup x \in \mathcal{M}$, wobei x links enthalten ist und darum $z \in B$.

Fall 2.1.2.2.1: $z \neq a'$ $\Rightarrow z \in B \setminus X$, weil $X \setminus a'$ links enthalten war. Nun bewirkt $y := z$, dass $B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U})$ sowie $X \setminus a' \cup y (\subseteq X \cup y \subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a'$.

Fall 2.1.2.2.2: $z = a'$ führt zur Wahl $y := a$ mit $X (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup a \in \mathcal{M} \Delta a$ und $B \setminus y \cup x (= B \setminus \{a, z\} \cup x \cup a') \in \mathcal{M} \Delta a'$.

Nun müssen wir damit rechnen, dass a schon vorher zu X gehörte:

Fall 2.2: $a \in X$

Fall 2.2.1: $a' \notin X$

Fall 2.2.1.1: $x = a'$ $\Rightarrow X \in \mathcal{M}$. Wie üblich

$\exists_{D \subseteq (B \setminus a) \setminus X} X \cup D \in \mathcal{M}, |X \cup D| = |B \setminus a| \Rightarrow X \cup D = B \setminus y,$
 $y \in B \setminus X \Rightarrow B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a' (\subseteq \mathcal{U}). a \in X \Rightarrow y \neq a$
 $\Rightarrow X \setminus a \cup y (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}).$

Fall 2.2.1.2: $x \neq a'$ $\Rightarrow X \cup x \cup a' \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus a \cup x \in \mathcal{M}$.

Also $\exists_{D \subseteq (B \setminus a) \setminus (X \setminus a \cup x)} X \setminus a \cup x \cup D \in \mathcal{M},$

$|X \setminus a \cup x \cup D| = |B \setminus a|$

$\Rightarrow X \setminus a \cup x \cup D (\subseteq B \setminus a \cup x) = B \setminus \{a, y\} \cup x, y \in B \setminus X,$
 $y \neq x$ und $B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}),$

$X \setminus a \cup y (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a (\subseteq \mathcal{U}).$

Fall 2.2.2: $a' \in X$ $\Rightarrow X \setminus a' \cup x \in \mathcal{M}, x \neq a'$.

So $\exists_{D \subseteq (B \setminus a) \setminus (X \setminus a' \cup x)} X \setminus a' \cup x \cup D \in \mathcal{M},$

$|X \setminus a' \cup x \cup D| = |B \setminus a|.$

Fall 2.2.2.1: $a' \notin D$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow X \setminus a' \cup x \cup D \ (\subseteq B \setminus a' \cup x) = B \setminus \{a', y\} \cup x, \\ &y \in B \setminus X, y \neq x, y \neq a \Rightarrow B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a' \ (\subseteq \mathcal{U}), \\ &X \setminus a \cup y \ (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a \ (\subseteq \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Fall 2.2.2.2: $a' \in D$ Noch einmal kommt das Austauschaxiom zum

$$\begin{aligned} \text{Zug: } &\exists_{y \in (B \setminus a) \setminus (X \setminus a' \cup x \cup D) \subseteq B \setminus X} B \setminus \{a, y\} \cup x \in \mathcal{M} \\ &\Rightarrow B \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a. \quad y \neq a \Rightarrow X \setminus a \cup y \ (\subseteq B \setminus a) \in \mathcal{M} \\ &\Rightarrow X \cup y \in \mathcal{M} \Delta a \ (\subseteq \mathcal{U}). \end{aligned}$$

■

Korollar 4.14.

$\mathcal{U}_A(M)$ besitzt die starke Austauscheneigenschaft.

Mit den folgenden Korollaren wird wieder extensiv von den Inhalten aus Kapitel 3 profitiert.

Korollar 4.15.

$\mathcal{U}_A(M)$ ist ein Austausch-System.

Korollar 4.16.

$\mathcal{U}_A(M)$ ist ein ausgedünntes Matroid.

4.5.2 Die Abgrenzung der Twistkonstruktionen

Mit Hilfe der Beispiele XV bis XVII,¹² wo die Twistmengen einelementig sind, ist auch für die Twistvereinigung einzusehen, dass sie sich außerhalb der Klassen der Gauß-Greedoide, Matroid-Basis-Systeme oder Intervall-Greedoide bewegen kann.

XX) Ein Beispiel mit nicht trivialer Twistmenge soll nicht fehlen:

$$\mathcal{U}_{\{1,2\}}(\widehat{\mathcal{M}}), E = \{1, 2, 3, 4\}^{13}$$

¹²siehe S. 83

¹³siehe Bsp. II, S. 19

$$\begin{array}{ccccccc}
\{1, 2, 3\} & \{1, 2, 4\} & \{1, 3, 4\} & \{2, 3, 4\} & & & \\
\{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & \{2, 3\} & \{2, 4\} & & \\
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & & & \\
& & & & \emptyset & &
\end{array}$$

Diese Twistvereinigung ist also gleich $\mathcal{P}(E)^{(3)} \setminus \{\{3, 4\}\}$ und darum auch Gauß-Greedoid. Es liegt hier eine Twistvereinigung vor, die mit dem gleichen Argument wie in Bsp. XVIII kein getwistetes Matroid ist.¹⁴

- XXI) Umgekehrt gibt es getwistete Matroide, die sich nicht als Twistvereinigungen darstellen lassen. $\mathcal{G}_{XXI} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\{4\}\} = \mathcal{P}(E)^{(3)} \Delta \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ist ein solches Beispiel. Angenommen $\mathcal{G}_{XXI} = \mathcal{U}_A(\mathcal{M}) =: \mathcal{U}$, \mathcal{M} Matroid. Der Rang von \mathcal{M} muss 3 sein, $\{4\} \notin \mathcal{U} \Rightarrow 4 \notin A$, $E \in \mathcal{U}$. O.E. $3 \in A$, $\{1, 2, 4\} \in \mathcal{M} \Rightarrow \{1, 4\}, \{2, 4\} \in \mathcal{M} \Rightarrow 1, 2 \notin A \Rightarrow A = \{3\} \Rightarrow \{1, 3, 4\} \in \mathcal{M} \Rightarrow \{3, 4\} \in \mathcal{M} \Rightarrow 3 \notin A \zeta$.
- XXII) Schlussendlich können die Beweismittel aus dem vorigen Beispiel und Bsp. XVIII kombiniert werden, um anerkennen zu können, dass $\mathcal{G}_{XXII} := \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{\{4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ ein Beleg ist für das Dasein von Δ -Matroiden, die auch Gauß-Greedoide (restriktionsstabile starke Austauschenschaft) sind, aber in keine der beiden Twistklassen hineinpassen.

4.5.3 Eine Beziehung zum Ausgangs-Matroid

Die spezielle Restriktion auf A -freie Mengen ist eine besondere.

Bemerkung 4.17.

Die Löschung der Twistmenge aus dem Twistvereinigungs-Greedoid ist ein Matroid und es gilt

$$\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) \setminus A \subseteq \mathcal{M} \setminus A \subseteq \mathcal{M}.$$

Beweis

Wenn $\mathcal{U} := \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ die Greedoid-Eigenschaften besitzt, dann lässt sich das bekanntermaßen auch für die Restriktion $\mathcal{U} \setminus A$ konstatieren. Zu zeigen bleibt

¹⁴siehe S. 84

die Abgeschlossenheit der Restriktion bezüglich Teilmengenbildung:

$$\begin{aligned} Y \in \mathcal{U} \setminus A, X \subseteq Y &\Rightarrow Y \cap A = \emptyset, Y \Delta a \in \mathcal{M}, a \in A \Rightarrow Y \cup a \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow X \cup a \in \mathcal{M} &\Rightarrow X (= (X \cup a) \Delta a) \in \mathcal{U}, X \cap A = \emptyset. \\ &\quad a \notin X \end{aligned}$$

Für ein gegebenes $Y \in \mathcal{U} \setminus A$ gilt danach, betreffend die erste Teilmengenbeziehung der Behauptung, $Y \cup a \in \mathcal{M}$, also $Y \in \mathcal{M}$ bei $Y \cap A = \emptyset$. ■

4.5.4 Abschlussbildung

Wo $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ schon Matroid ist, bleibt die Bildung der monotonen Hülle wirkungslos. Wenn dies nicht gegeben ist, kann mit der monotonen Hülle eine Art Abschluss der Twistvereinigung kreiert werden, der die iterative Ausführung dann erlaubt, da die Twistvereinigung ausgedünntes Matroid ist.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}_X} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)), \quad X \subseteq E, \quad X \neq \emptyset \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{H}\left(\bigcup_{e \in X} \mathcal{F} \Delta e\right). \end{aligned}$$

Mit anderen Zeichen also $\overline{\mathcal{U}_A}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}(\mathcal{U}_A(\mathcal{F}))$. Die Hülle lässt sich genauer beschreiben:

Proposition 4.18.

$$\mathcal{H}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M})) = \mathcal{M} \cup \mathcal{U}_A(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(1)}.$$

Der hinten stehende Ausdruck ist als 1-Abschnitt des vollen Matroids unter A ein Matroid. Es enthält alle einelementigen Mengen mit A -Elementen und die leere Menge. War also A schon Cokreis-frei in \mathcal{M} , dann ist die Twistvereinigung $\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(1)}$ das Hinzufügen der Aufstockung aller Matroidmengen um jedes A -Element.¹⁵

Beweis

Entstammt X der monotonen Hülle, dann $X \subseteq Y$, $Y \in \mathcal{M} \Delta a$, $a \in A$. Ist auch schon $X \subseteq Y \Delta a$, dann $X \in \mathcal{M}$ und in $\mathcal{M} \vee \{\emptyset\}$.

¹⁵siehe Prop. 4.7(1)

Sonst $a \in X$, aber $X \setminus a (\subseteq Y \setminus a) \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X = (X \setminus a) \Delta a = (X \setminus a) \cup \{a\} \in \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(1)}$ und in $\mathcal{M} \Delta a \subseteq \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$.

Da $\mathcal{U}_A(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ und für $X \in \mathcal{M}$ entweder $X \cup a \in \mathcal{M} \Delta a$ ($a \notin X$) oder $X = (X \setminus a) \cup a \in \mathcal{M} \Delta a$, folgt $X \in \mathcal{H}(\mathcal{U}_A(\mathcal{M}))$ für ein X aus dem System in der Mitte.

Ein X von rechts ist entweder in \mathcal{M} , so dass der vorherige Absatz erneut gelesen werden darf, oder $X = Y \cup a$, $Y \in \mathcal{M}$, $a \in A$, gleichbedeutend mit $X \in \mathcal{M} \Delta a$. ■

Wie man an der zuletzt gegebenen Darstellung von $\overline{\mathcal{U}}_A(\mathcal{M})$ sieht, schneidet A in diesem System jede Basis. Daraus entwickelt sich ein genaueres Bild der Iteration, die aus diesem Grund erst ohne weitere Voraussetzung machbar wird.

Proposition 4.19.

$$\overline{\mathcal{U}}_A^k(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

Ist A Cokreis-frei in \mathcal{M} ergibt sich daher alternativ zu Prop. 4.10:

$$\mathcal{U}_A^k(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

Beweis

Die Verankerung der angestrebten Induktion für $k = 1$ steht in Prop. 4.18. Hat sich die Gleichung schon für $k - 1$, $k \geq 2$ bewahrheitet, dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{U}}_A^{k-1}(\mathcal{M}))$, dass $A \cap B \neq \emptyset$ ist, weil maximale Mengen aus $\mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k-1)}$ nicht ohne A -Elemente erhältlich sind. Das impliziert $\overline{\mathcal{U}}_A^k(\mathcal{M}) = \mathcal{U}_A(\overline{\mathcal{U}}_A^{k-1}(\mathcal{M})) = \mathcal{U}_A(\mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k-1)}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k-1)} \vee \mathcal{P}(A)^{(1)} = \mathcal{M} \vee \mathcal{P}(A)^{(k)}$ erneut mit Prop. 4.18.

Das heißt, bei iterativer Ausführung verhält sich $\overline{\mathcal{U}}_A$ nach dem ersten Schritt wie \mathcal{U}_A (ebenfalls induktiv einsehbar):

$$\overline{\mathcal{U}}_A^k(\mathcal{M}) = \mathcal{U}_A^{k-1}(\overline{\mathcal{U}}_A(\mathcal{M})), k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Und damit entfaltet sich die zweite Gleichung, wenn $\overline{\mathcal{U}}_A(\mathcal{M}) = \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$, d.h. wenn die Twistvereinigung schon Matroid ist. ■

4.6 $\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ als Δ -Matroid

Auch die Nicht-Matroide unter den Twistvereinigungen, einschließlich gar der Nicht-Greedoide, dürfen nutzbringend als Δ -Matroide eingestuft werden.

Satz 4.20.

$\mathcal{U}_A(\mathcal{M})$ ist ein Δ -Matroid.

Beweis

$\mathcal{U} := \mathcal{U}_A(\mathcal{M})$. Um den Nachweis entlang der Definition für Δ -Matroide zu führen, werden $X, Y \in \mathcal{U}$ und $x \in X \Delta Y$ vorgegeben. a_1 und a_2 seien die Elemente aus A , die für die Mitgliedschaft von X und Y in \mathcal{U} verantwortlich sind: $X \Delta a_1 \in \mathcal{M}$, $Y \Delta a_2 \in \mathcal{M}$. Getrachtet wird nach $y \in X \Delta Y$, $X \Delta \{x, y\} \in \mathcal{U}$. $a_1 \neq a_2$ darf unterstellt werden, weil sonst die Δ -Matroid-Natur von $\mathcal{M} \Delta a_1$ alleine für die gewünschten Folgen sorgt. Damit sich der Überblick nicht in der Vielzahl der möglichen Ausprägungen der Voraussetzungen verliert, die in einer ausufernden Fallunterscheidung Gestalt annehmen, wird der jeweilige Möglichkeitsraum immer binär in Fälle aufgespalten.

Zuerst präsentiert sich ein $x \in X \Delta Y$, das aus X entfernt werden möchte. Aufwendig wird es dabei nur, wenn X durch Hinzufügen von a_1 in die Twistvereinigung geraten ist und jenes a_1 auch noch das x selber ist:

Fall 1: $x \in X \setminus Y$

Fall 1.1: $a_1 \in X$ $\Rightarrow X \setminus a_1 \in \mathcal{M}$.

Fall 1.1.1: $a_1 = x$ $\Rightarrow X \setminus x \in \mathcal{M}$.

Fall 1.1.1.1: $a_2 \notin X$

Fall 1.1.1.1.1: $a_2 \in Y$ $\Rightarrow y := a_2 \in Y \setminus X$, $X \setminus x \cup a_2 \in \mathcal{M} \Delta a_2$.

Fall 1.1.1.1.2: $a_2 \notin Y$ $\Rightarrow Y \cup a_2 \in \mathcal{M}$.

Fall 1.1.1.1.2.1: $X \setminus x \subseteq Y$ $\Rightarrow X \setminus x \cup a_2 (\subseteq Y \cup a_2) \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X \setminus x \in \mathcal{M} \Delta a_2$ ($y := x$).

Fall 1.1.1.1.2.2: $(X \setminus x) \setminus Y \neq \emptyset$ $\Rightarrow |X \cap Y| \leq |X| - 2$,

$x \in X \setminus Y \Rightarrow |(X \cap Y) \cup a_2| \leq |X \setminus x|$,

$(X \cap Y) \cup a_2 (\subseteq Y \cup a_2) \in \mathcal{M}$. Nach Lemma 2.5

$$\begin{aligned} \exists_{D \subseteq X \setminus x} F &:= (X \cap Y) \cup a_2 \cup D \in \mathcal{M}, |F| = |X \setminus x|. \\ F \subseteq X \setminus x \cup a_2 \ (x \notin Y) &\Rightarrow \exists_{y \in X \cup a_2} F = X \setminus \{y, x\} \cup a_2 \\ \Rightarrow X \setminus \{x, y\} &\in \mathcal{M} \Delta a_2, \\ a_2 \in F, (X \cap Y) &\subseteq F \Rightarrow y \in X \setminus Y \end{aligned}$$

$$\text{Fall 1.1.1.2: } \underline{a_2 \in X} \quad X \setminus \{x, a_2\} \in \mathcal{M} \ (a_1 \neq a_2)$$

$$\Rightarrow X \setminus x \in \mathcal{M} \Delta a_2 \ (y := x).$$

$$\text{Fall 1.1.2: } \underline{a_1 \neq x} \quad X \setminus \{x, a_1\} \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus x \in \mathcal{M} \Delta a_1 \ (y := x).$$

$$\text{Fall 1.2: } \underline{a_1 \notin X} \Rightarrow X \cup a_1 \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cup a_1 \setminus x \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow X \setminus x \in \mathcal{M} \Delta a_1 \ (y := x).$$

Komplexer wird es, wenn x hinzugefügt werden will. Die Strategie ist, jeweils eine Menge in \mathcal{M} , die x schon enthält, auf eine geeignete Menge zu augmentieren. Man sieht etwas klarer, wenn in \mathcal{M} die Ursprungsmenge von X in der von Y enthalten ist:

$$\text{Fall 2: } \underline{x \in Y \setminus X}$$

$$\text{Fall 2.1: } \underline{a_1 \in X} \Rightarrow X \setminus a_1 \in \mathcal{M}, x \neq a_1.$$

$$\text{Fall 2.1.1: } \underline{a_2 \in Y} \Rightarrow Y \setminus a_2 \in \mathcal{M}.$$

$$\text{Fall 2.1.1.1: } \underline{X \setminus a_1 \subseteq Y \setminus a_2}$$

$$\text{Fall 2.1.1.1.1: } \underline{x \neq a_2} \Rightarrow X \setminus a_1 \cup x \ (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_1 \ (y := x).$$

$$\text{Fall 2.1.1.1.2: } \underline{x = a_2}$$

$$\text{Fall 2.1.1.1.2.1: } \underline{a_1 \in Y} \Rightarrow X \ (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2 \ (y := x).$$

$$\text{Fall 2.1.1.1.2.2: } \underline{a_1 \notin Y} \Rightarrow X \setminus a_1 \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2$$

$$(y := a_1 \in X \setminus Y).$$

Andernfalls muss ausführlicher augmentiert werden:

Fall 2.1.1.2: $|(X \setminus a_1) \setminus (Y \setminus a_2)| \geq 1$

Fall 2.1.1.2.1: $x \neq a_2 \Rightarrow X \cap Y \setminus \{a_1, a_2\} \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} |X \cap Y \setminus \{a_1, a_2\} \cup x| &= |(X \setminus a_1) \cap (Y \setminus a_2)| + 1 \\ &= |X \setminus a_1| - |(X \setminus a_1) \setminus (Y \setminus a_2)| + 1 \leq |X \setminus a_1|. \end{aligned}$$

Also ex. $F := X \cap Y \setminus \{a_1, a_2\} \cup x \cup D \in \mathcal{M}$, $D \subseteq X \setminus a_1$,

$$|F| = |X| - 1, \quad F \subseteq X \setminus a_1 \cup x \Rightarrow F = X \setminus \{a_1, z\} \cup x,$$

$$z \in (X \setminus a_1) \setminus (Y \setminus a_2) \subseteq (X \setminus Y) \cup (\{a_2\} \cap X).$$

Fall 2.1.1.2.1.1: $z \neq a_2 \Rightarrow z \in X \setminus Y$,

$$X \setminus z \cup x (= F \Delta a_1) \in \mathcal{M} \Delta a_1, \quad (y := z).$$

Fall 2.1.1.2.1.2: $z = a_2 \Rightarrow X \setminus \{a_1, a_2\} \cup x \in \mathcal{M}$, $a_2 \in X$.

Fall 2.1.1.2.1.2.1: $a_1 \notin Y \Rightarrow X \setminus a_1 \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2$

$$(y := a_1 \in X \setminus Y).$$

Fall 2.1.1.2.1.2.2: $a_1 \in Y$

Fall 2.1.1.2.1.2.2.1: $X \subseteq Y \Rightarrow X \setminus a_2 \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2 \quad (y := x).$$

Die größte Komplexität bereiten folgende Fälle:

Fall 2.1.1.2.1.2.2.2: $|X \cap Y| \leq |X| - 1$

$$\Rightarrow |(X \cap Y) \setminus a_2 \cup x| \leq |X| - 1,$$

$$(X \cap Y) \setminus a_2 \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \bar{F} := (X \cap Y) \setminus a_2 \cup x \cup \bar{D} \in \mathcal{M},$$

$$\bar{D} \subseteq X \setminus \{a_1, a_2\} \cup x, \quad |\bar{F}| = |X| - 1, \quad \bar{F} \subseteq X \setminus a_2 \cup x,$$

$$x \in \bar{F} \Rightarrow \bar{F} = X \setminus \{a_2, y\} \cup x, \quad \text{wo } y \in X \setminus a_2$$

$$\Rightarrow X \setminus y \cup x (= \bar{F} \Delta a_2) \in \mathcal{M} \Delta a_2.$$

$$(X \setminus a_2) \cap Y \subseteq \bar{F} \Rightarrow y \in X \setminus Y.$$

Fall 2.1.1.2.2: $x = a_2 \Rightarrow a_2 \notin X \Rightarrow |X \cap Y| \leq |X| - 1$, denn
 aus $X \subseteq Y$ folgte sonst $X \setminus a_1 \subseteq Y \setminus a_2$.
 $X \cap Y (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$. Es ex. $D \subseteq X \setminus a_1$,
 $F = (X \cap Y) \cup D \in \mathcal{M}$, $|F| = |X| - 1$, $F \subseteq X \Rightarrow F = X \setminus y$,
 $y \in X \setminus Y$, weil $X \cap Y \subseteq F$ und dazu $X \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2$.

$Y \cup a_2 \in \mathcal{M}$ bedeutet etwas weniger Verwicklung:

Fall 2.1.2: $a_2 \notin Y \Rightarrow Y \cup a_2 \in \mathcal{M}$.

Fall 2.1.2.1: $(X \setminus a_1) \subseteq Y \Rightarrow X \setminus a_1 \cup x (\subseteq Y) \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_1 (y := x)$.

Fall 2.1.2.2: $(X \setminus a_1) \setminus Y \neq \emptyset ((X \setminus a_1) \cap Y) \cup x (\subseteq Y) \in \mathcal{M}$,
 $|((X \setminus a_1) \cap Y) \cup x| = |X \setminus a_1| - |(X \setminus a_1) \setminus Y| + 1 \leq |X \setminus a_1|$
 $\Rightarrow F := ((X \setminus a_1) \cap Y) \cup x \cup D \in \mathcal{M}$, $D \subseteq X \setminus a_1$,
 $|F| = |X \setminus a_1|$, $F \subseteq X \setminus a_1 \cup x \Rightarrow F = X \setminus \{a_1, y\} \cup x$,
 $y \in X \setminus a_1$, $(X \setminus a_1) \cap Y \subseteq F \Rightarrow y \in X \setminus Y$,
 $X \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_1$.

Auch $X \cup a_1$ könnte schon im Matroid gewesen sein:

Fall 2.2: $a_1 \notin X \Rightarrow X \cup a_1 \in \mathcal{M}$.

Fall 2.2.1: $x = a_1$ oder $x = a_2$ $X \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_i (y := x)$.

Fall 2.2.2: $x \neq a_i, i = 1, 2$

Fall 2.2.2.1: $a_2 \in Y \Rightarrow Y \setminus a_2 \in \mathcal{M}$.

Fall 2.2.2.1.1: $a_2 \in X$

Fall 2.2.2.1.1.1: $X \subseteq Y \Rightarrow X \setminus a_2 \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2 (y := x)$.

Fall 2.2.2.1.1.2: $|X \cap Y| \leq |X| - 1$

$(X \cap Y) \setminus a_2 \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$. $X \setminus a_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow$ Es ex.
 $D \subseteq X \setminus a_2$, $F = (X \cap Y) \setminus a_2 \cup x \cup D \in \mathcal{M}$, $|F| = |X| - 1$,
 $F \subseteq X \cup x \setminus a_2 \Rightarrow F = X \cup x \setminus \{a_2, y\}$, $y \in X \setminus Y$, weil
 $y \in X \setminus a_2$ ($x \in F$), $(X \setminus a_2) \cap Y \subseteq F$ und dann
 $X \setminus y \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2$.

Fall 2.2.2.1.2: $a_2 \notin X \Rightarrow a_2 \in Y \setminus X$.

$(X \cap Y) \cup x (\subseteq Y \setminus a_2) \in \mathcal{M}$, $|(X \cap Y) \cup x| \leq |X| + 1$
 \Rightarrow Es gibt $D \subseteq X \cup a_1$, $F = (X \cap Y) \cup x \cup D \in \mathcal{M}$,
 $|F| = |X| + 1$. $F \subseteq X \cup \{x, a_1\} \Rightarrow F = X \cup \{a_1, x\} \setminus z$,
 $z \in X \cup a_1$ ($x \in F$).

Fall 2.2.2.1.2.1: $z = a_1 \Rightarrow F = X \cup x \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow X \cup \{x, a_2\} \in \mathcal{M} \Delta a_2$ ($y := a_2$).

Fall 2.2.2.1.2.2: $z \neq a_1 \Rightarrow z \in X \Rightarrow z \in X \setminus Y$ ($X \cap Y \subseteq F$).

$X \cup x \setminus z \in \mathcal{M} \Delta a_1 \subseteq \mathcal{U}$ ($y := z$).

Schließlich wieder die Variante mit Y als bei der Twistvereinigung reduzierte Menge:

Fall 2.2.2.2: $a_2 \notin Y \Rightarrow Y \cup a_2 \in \mathcal{M}$.

Fall 2.2.2.2.1: $a_2 \in X \Rightarrow a_2 \in X \setminus Y \Rightarrow |X \cap Y| \leq |X| - 1$.

$(X \cap Y) \cup x (\subseteq Y) \in \mathcal{M}$. Möglich wird
 $F := (X \cap Y) \cup x \cup D \in \mathcal{M}$, $D \subseteq X$, $|F| = |X|$, $F \subseteq X \cup x$
 $\Rightarrow F = X \cup x \setminus z$, $z \in X \setminus Y$.

Fall 2.2.2.2.1.1: $z = a_2 \Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2$ ($y := x$).

Fall 2.2.2.2.1.2: $z \neq a_2 \Rightarrow X \cup x \setminus \{z, a_2\} (\subseteq X \cup x \setminus z) \in \mathcal{M}$
 $\Rightarrow X \cup x \setminus z \in \mathcal{M} \Delta a_2$ ($y := z$).

Fall 2.2.2.2.2: $a_2 \notin X$ $(X \cap Y) \cup x (\subseteq Y) \in \mathcal{M}$. So geht

$$F := (X \cap Y) \cup x \cup D \in \mathcal{M} \text{ mit } D \subseteq X \cup a_1, |F| = |X| + 1,$$

$$F \subseteq X \cup \{x, a_1\} \Rightarrow F = X \cup \{x, a_1\} \setminus z, \quad z \in X \cup a_1.$$

Fall 2.2.2.2.2.1: $z \neq a_1 \Rightarrow z \in X \setminus Y$ $(X \cap Y \subseteq F)$ und

$$X \cup x \setminus z \in \mathcal{M} \Delta a_1 (y := z).$$

Fall 2.2.2.2.2.2: $z = a_1 \Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M}$.

Fall 2.2.2.2.2.2.1: $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup \{x, a_2\} (\subseteq Y \cup a_2) \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow X \cup x \in \mathcal{M} \Delta a_2 (y := x).$$

Fall 2.2.2.2.2.2.2: $|X \cap Y| \leq |X| - 1$

$$(X \cap Y) \cup \{x, a_2\} (\subseteq Y \cup a_2) \in \mathcal{M}.$$

Aus $|(X \cap Y) \cup \{x, a_2\}| \leq |X| + 1$ folgt die Existenz

$$\text{von } \bar{F} := (X \cap Y) \cup \{x, a_2\} \cup \bar{D} \in \mathcal{M}, \quad \bar{D} \subseteq X \cup x,$$

$$|\bar{F}| = |X| + 1, \quad \bar{F} \subseteq X \cup \{x, a_2\} \Rightarrow \bar{F} = X \cup \{x, a_2\} \setminus y,$$

$$y \in X, \text{ weil } x, a_2 \in \bar{F}. \quad X \cap Y \subseteq \bar{F} \Rightarrow y \in X \setminus Y,$$

$$X \cup x \setminus y \in \mathcal{M} \Delta a_2 (\subseteq \mathcal{U}).$$

■

4.7 Optimierung

Sofern man sicher gehen kann, dass die Twistvereinigung wieder Matroid ist, eventuell durch Kenntnis der Twistmenge, bedarf es keiner Diskussion, wie lineare Optimierung zu betreiben ist. Abgesehen davon führt auch ohne diese Beschränkung eine ähnliche Überlegung wie in Kapitel 3 zum Erfolg.

Auch hier sollte wieder unterschieden werden, ob die Twistmenge A vorliegt oder ob ohne weiteres Wissen nur mit dem gewöhnlichen Mengensystem-Orakel gearbeitet werden kann, wenn eine Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ zur Maximierung anfällt.

Im ersten Fall mutet es stringent an, direkt auf die Definition zu schauen und für alle $a \in A$ jeweils den getwisteten Matroid-Greedy (twGA) aus 3.6.1 auf das getwistete Matroid $\mathcal{M} \Delta a$ anzuwenden, zum Schluss die $|A|$ Ergebnisse zu vergleichen und das Maximum zu postulieren.

Etwas Aufmerksamkeit erfordern dabei noch die Schleifen in A , da $\mathcal{M} \Delta a$ dann kein getwistetes Matroid ist, so wie es in Kapitel 3 definiert wurde. Der (twGA) zieht also nicht. Dies bringt aber kein nachhaltiges Problem auf, weil dann direkt auf \mathcal{M} optimiert wird und das a zuletzt dem Ergebnis beigefügt werden kann, mit der Begründung, dass dann ohnedies $\mathcal{M} \Delta a = \mathcal{M} \vee \{\{a\}\}$ sein muss.

Möchte man jedoch einen universalen Algorithmus auf dem Mengensystem ausüben bzw. spätestens, wenn A sich der Kenntnis entzieht, zahlen sich die Überlegungen der vorangegangenen Abschnitte aus, falls die Twistvereinigung Greedoid ist.

Satz 4.21.

Besteht die Twistmenge nicht nur aus Schleifen des Matroids, so lässt sich für jede Gewichtung der Elemente der Grundmenge die Menge in der Twistvereinigung, die das größte Gesamtgewicht besitzt, mit polynomiellem Zeitaufwand bestimmen, sofern ein gewöhnliches Orakel zur Verifizierung der Mitgliedschaft in der Twistvereinigung vorliegt.

Beweis

Kor. 2.36 im Bündnis mit Kor. 4.2, Satz 4.13 und Satz 4.20. ■

Kapitel 5

Twisten und Polyeder

Zwangsläufig formiert sich das Ziel, eine Optimierung auf Mengensystemen, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln besprochen wurde, in die geläufige Theorie der linearen bzw. ganzzahligen Programmierung¹ einzubetten, um neue Betrachtungsweisen einfließen zu lassen und ein allgemeineres Fundament zu schaffen. Die Grundlagen in Bezug auf Matroide legte vor allem Edmonds.² Der Gewinn, der dadurch erzielt wurde, bestand beispielsweise in der Bewältigung der Optimierung auf Systemen zweier zum Durchschnitt gebrachter Matroide.³

In diesem Zusammenhang wird die Grundmenge E mit $\{1, \dots, n\}$ für $|E| = n$ identifiziert, um die Untersuchungen wie gewohnt im \mathbb{R}^n durchführen zu können.

Mengen können durch Inzidenzvektoren repräsentiert werden. Dabei steht $i(X)$ für den Inzidenzvektor aus $\{0, 1\}^n$ zu $X \subseteq E$ mit $i(X)_j = 1 \Leftrightarrow j \in X$. Umgekehrt definiert man die Inzidenzmenge $I(x) \subseteq E$ zu einem Vektor $x \in \{0, 1\}^n$ durch $I(x) := \{j \in E \mid x_j = 1\}$.

Die geometrischen Resultate sollen mit Mengensystemen in Verbindung gebracht werden. Dazu kürzt $i(\mathcal{F})$ als Inzidenzvektormenge $\{i(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ ab und $I(C)$ steht für die Menge von Mengen, die durch die Inzidenzvektoren in C angezeigt werden: $\{I(x) \mid x \in C \cap \{0, 1\}^n\}$; mit der Konsequenz

$$\mathcal{F} = I(i(\mathcal{F})) \quad \text{und} \quad C = i(I(C)),$$

wenn $C \subseteq \{0, 1\}^n$.

¹vgl. [Sch86] und [Mar99]

²vgl. [Edm70]

³siehe 2.2.6

Die **konvexe Hülle** $co(C)$ einer Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ vereinigt C mit allen Punkten, die auf der Verbindungslinie zweier ihrer Punkte liegen.

Bemerkung 5.1.

Untersucht man $i(\mathcal{F}) \subseteq \{0, 1\}^E$ bezogen auf $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$, dann ist jeder Inzidenzvektor darin eine Ecke der konvexen Hülle $co(i(\mathcal{F}))$, die somit ein spitzes Polyeder repräsentiert.

Beweis

Nehme $X \in \mathcal{F}$ und zeige mit einem Kriterium aus [Sch86], dass $i(X)$ Ecke ist, weil $\forall_{y \in co(i(\mathcal{F})), y \neq i(X)} i(X) i(X) > i(X) y$:

$$\text{Also } y \in co(i(\mathcal{F})), y \neq i(X) \Rightarrow y = \sum_{Y \in \mathcal{F}} \lambda_Y i(Y), \quad \sum_{Y \in \mathcal{F}} \lambda_Y = 1, \quad \lambda_{Y'} > 0$$

$$\text{für ein } Y' \neq X. \text{ Sodann } i(X) y = \sum_{Y \in \mathcal{F}} \lambda_Y i(X) i(Y)$$

$$= \lambda_{Y'} |X \cap Y'| + \sum_{Y \in \mathcal{F}, Y \neq Y'} \lambda_Y |X \cap Y|$$

$$< \lambda_{Y'} |X| + \sum_{Y \in \mathcal{F}, Y \neq Y'} \lambda_Y |X| = |X| = i(X) i(X).$$

■

Zur abkürzenden Schreibweise werden Vektorfunktionen für $x \in \mathbb{R}^E$ auf 2^E bzw. 3^E eingeführt durch

$$x(X) = \sum_{j \in X} x_j \quad \text{und} \quad x(X, Y) = \sum_{j \in X} x_j - \sum_{j \in Y} x_j, \quad X \subseteq E, Y \subseteq E \setminus X.$$

Leicht nachzurechnen sind

$$x(X, Y) = -x(Y, X), \quad (x + y)(X) = x(X) + y(X) \quad \text{und}$$

$$(x + y)(X, Y) = x(X, Y) + y(X, Y).$$

Bemerkung 5.2.

$x \in \mathbb{R}^E$ in diesem Sinne ist (sub)modular bzw. bi(sub)modular und kann als Funktion zu anderen (bi)submodularen Funktionen addiert werden.⁴

⁴siehe Lemma 2.27

Beweis

Nachzählen enthüllt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} x_j + \sum_{j \in Y} x_j &= \sum_{j \in X \setminus Y} x_j + \sum_{j \in Y \setminus X} x_j + 2 \sum_{j \in X \cap Y} x_j \\ &= \sum_{j \in X \cup Y} x_j + \sum_{j \in X \cap Y} x_j \quad \text{und im Gefolge} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(X_1, Y_1) + x(X_2, Y_2) &= x(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) + x(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2) \\ &\quad + x((X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2)) - x((X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2)) \\ &= x(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) \\ &\quad + x((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)). \end{aligned}$$

■

Die Herkunft der Mengen bleibt aus verbandstheoretischer Sicht in diesem Kapitel auf $\mathcal{P}(E)$ mit den Standardoperationen des Schnitts und der Vereinigung beschränkt, jedoch lassen sich große Teile der hier vorgestellten Polyeder-Theorie auf das Agieren in allgemeineren Verbänden übertragen.⁵

5.1 Polymatroide

Was Matroide angeht, hat die Polyeder-Theorie, ausgehend von Edmonds, zu sehr interessanten Einblicken geführt. Rang und Hüllenoperator sind hier wichtige Instrumente und führen im Lichte der linearen Programmierung zur Definition von Polymatroiden.

Ein Polymatroid ist eine kompakte Menge im \mathbb{R}_+^n , die durch Bedingungen an ihre Vektoren bestimmt werden kann, die analog zu Unabhängigkeit und Rangbedingungen an Matroide wirken.⁶ Eine alternative Definition bedient sich direkt der submodularen Funktionen. Sie besagt, dass **Polymatroide** die Polyeder der Gestalt

$$P(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall_{S \subseteq E} \sum_{j \in S} x_j \leq f(S) \right\}.$$

sind, wobei $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$

⁵vgl. [Edm70] und [Fuj91]

⁶vgl. [Edm70]

- monoton bezogen auf die Teilmengenordnung
($X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$),
- submodular und
- nullpunktgeeicht ($f(\emptyset) = 0$)

sein muss. Damit ergibt sich auch schon die Nichtnegativität von f . Betrachtet man das definierende Ungleichungssystem in der Form $\mathcal{A}x \leq b$, so ist klar, dass \mathcal{A} den vollen Rang n aufweist und damit von Ecken von $P(f)$ geschrieben werden darf, da $P(f)$ ein spitzes Polyeder ist.⁷

Polymatroide bestimmen die zu Grunde liegende Funktion eindeutig.

Bemerkung 5.3.

Wenn $f, g : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ den Voraussetzungen von oben genügen, dann

$$P(f) = P(g) \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Beweis: [Fuj91], Satz 2.5

5.1.1 Lineare Optimierung

Das erwartete, nichtsdestotrotz vorteilhafte Resultat, dass ein Greedy-artiger Algorithmus zur Ermittlung von $\max_{x \in P(f)} c x$ für $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ angegeben werden kann, stellte sich mit einem Verfahren (**PMA**), das dem Matroid-Greedy entspricht, dann auch ein:⁸

1. Sortiere E zu $\{j_1, \dots, j_n\}$ gemäß $|c(j_i)| \geq |c(j_{i+1})|$, $1 \leq i \leq n - 1$
2. $T_i := \{j_1, \dots, j_i\}$, $1 \leq i \leq n$
3. $i := 1$; $x_{j_1}^* := f(T_1)$
4. Wenn $c(j_i) < 0$, dann $x_{j_k}^* := 0$ für $i \leq k \leq n$; STOP
5. Wenn $c(j_i) \geq 0$, dann $x_{j_i}^* := f(T_i) - f(T_{i-1})$
6. Wenn $i = n$ STOP; sonst $i = i + 1$
7. Gehe zu 4.

Dieser Vorgang endet auf dem $x^* \in P(f)$ mit dem maximalen Gewicht $c x^*$.

⁷vgl. [Sch86], Kap. 8

⁸vgl. [Edm70]

5.1.2 Matroid-Polyeder

Die Eigenschaften der bestimmenden Funktion f ähneln sehr den Gegebenheiten aus Satz 2.9 und tatsächlich sind diese Polymatroid-definierenden Funktionen auch schon Rangfunktionen eines Matroids \mathcal{M} , wenn sie nur ganzzahlige Werte annehmen und die einelementigen Mengen auf 0 oder 1 abbilden, weil dieses sich dank der Submodularität als gleichbedeutend mit $f(X) \leq |X|$ erweist.

Genügt die ganzzahlige Funktion f diesen Ansprüchen, spricht man bei $P(f)$ von einem **Matroid-Polyeder**. Dieses befindet sich komplett in $\{0, 1\}^n$ und die Ecken sind genau die Inzidenzvektoren, die die Mengen aus \mathcal{M} anzeigen.

Satz 5.4.

Ist \mathcal{M} Matroid mit Rangfunktion $r_{\mathcal{M}}$, so gilt für $X \subseteq E$

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow i(X) \in P(r_{\mathcal{M}})$$

oder genauer

$$\text{co}(i(\mathcal{M})) = P(r_{\mathcal{M}}).$$

Beweis: [Edm70]

Bei der Beschreibung eines volldimensionalen ($\forall_{j \in E} \{j\} \in \mathcal{M}$) Matroid-Polyeders $P(r_{\mathcal{M}})$ mit linearen Ungleichungen reicht es, neben den trivialen Ungleichungen $x_j \geq 0, j \in E$, die Ungleichungen $\sum_{j \in C} x_j \leq f(C)$ heranzuziehen, die von den abgeschlossenen Mengen $C \subseteq E, C \neq \emptyset$ herrühren. Faktisch sind die Facetten sogar nur durch Mengen gegeben, die abgeschlossen und unzerlegbar ($\forall_{X \subseteq C} r(C \setminus X) \neq r(C) - r(X)$) sind.⁹

5.1.3 Induziertes Matroid

Jedes beliebige Polymatroid induziert aber auch ein Matroid:

Proposition 5.5.

Ist f eine submodulare, monotone und nullpunktgeeichte Funktion, dann ist, ausgehend vom Polymatroid $P = P(f)$,

$$\mathcal{M}(P) = \{X \subseteq E \mid \forall_{Y \subseteq X} |Y| \leq f(Y)\}$$

⁹vgl. [Edm70]

ein Matroid und in diesem Fall gilt: $P(f) \cap \{0, 1\}^n$ enthält genau die Inzidenzvektoren der Mengen aus $\mathcal{M}(P)$, denn $|S \cap I(x)| = \sum_{j \in S} x_j$ für alle $S \subseteq E$. Für $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ somit

$$X \in \mathcal{M}(P(f)) \iff i(X) \in P(f) \text{ bzw. } \mathcal{M}(P(f)) = I(P(f)).$$

Beweis: [Edm70]

Einfach nachzurechnen bleibt das Schließen des Kreislaufs durch

Bemerkung 5.6.

$\mathcal{M}(P(r_{\mathcal{M}})) = \mathcal{M}$ für Matroide \mathcal{M} .

Beweis

$$X \in \mathcal{M}(P(r_{\mathcal{M}})) \Leftrightarrow \forall Y \subseteq X \quad |Y| \leq r_{\mathcal{M}}(Y) \Leftrightarrow \forall Y \subseteq X \quad Y \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}. \quad \blacksquare$$

5.1.4 TDI-Systeme

Die oben erwähnte Matrix \mathcal{A} der Ungleichungskoeffizienten ist leicht als total unimodular¹⁰ zu identifizieren und daher darf das System $\mathcal{A}x \leq b$ als **total dual integrales (TDI)-System** gelten.¹¹ Die durch solche Systeme beschriebenen Polyeder führen bei linearer Optimierung immer zu ganzzahligen Lösungen, da alle Ecken des Polyeders ganzzahlig sind, wenn die rechte Seite b ganzzahlig ist. Ein Polyeder mit ausschließlich ganzzahligen Ecken wird als **ganzzahliges Polyeder** tituiert.

Entsprechend werden die Polymatroide, die auf einer submodularen Funktion basieren, die ihren Wertebereich in \mathbf{Z} hat, **ganzzahlige Polymatroide** genannt. Die Matroid-Polyeder gehören offensichtlich dazu.

5.1.5 Basis-Polyeder

Nimmt man zu dem Ungleichungssystem, das das Polymatroid beschreibt, die Gleichung $\sum_{j \in E} x_j = f(E)$ hinzu, erhält man das mit dem Polymatroid assoziierte **Basis-Polyeder** $B(f) \subseteq P(f)$.

$$B(f) = \{x \in P(f) \mid x(E) = f(E)\}.$$

¹⁰zu diesem Begriff vgl. [Sch86]

¹¹vgl. [EG77] und [GP79]

Im Fall eines Matroid-Polyeders ergibt sich so die konvexe Hülle der Basis-Inzidenzvektoren, d.h. die Ecken des Basis-Polyeders sind die Inzidenzvektoren zur Basismenge. Hierzu und zur Verallgemeinerung der Polymatroide zu submodularen Systemen empfiehlt sich die Lektüre von [Fuj91]. Das Basis-Polyeder ist nie leer und darum ist auch jede der Ungleichungen des Systems scharf.

Satz 5.7.

Ist $P = P(f)$ ein Polymatroid, so ist $B(f)$ nicht leer und zu jedem $x \in P(f)$ findet sich ein dominierendes $y \in B(f)$, will heißen $x \leq y$.

Beweis: Satz 2.3 in [Fuj91]

Darüber hinaus gilt dann auch das später zur Anwendung kommende

Lemma 5.8.

Ist $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ submodular, monoton und nullpunktgeeicht, dann ist für ineinanderliegende Mengen $U, V \subseteq E$, $U \subseteq V$ stets ein Vektor w im Basis-Polyeder zum zugehörigen Polymatroid vorhanden, der auf den Begrenzungsebenen zu U und V liegt:

$$\exists_{w \in B(f)} \quad w(U) = f(U) \quad \text{und} \quad w(V) = f(V).$$

Beweis

Gearbeitet wird mit der eingeschränkten Abbildung $f^V = f|_{\mathcal{P}(V)} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^V(X) = f(X)$ und dem analog definierten f^U . Diese haben ebenfalls die drei zur Polymatroid-Bildung notwendigen Eigenschaften, so dass $P(f^V) \subseteq \mathbb{R}^V$ und $P(f^U) \subseteq \mathbb{R}^U$ verwendet werden dürfen.

Nach Satz 5.7 ist das Basis-Polyeder von $P(f^U)$ nicht leer. Darum existiert ein $x \in P(f^U)$ mit $x(U) = f^U(U)$. Wenn $x' \in \mathbb{R}^V$ als Erweiterung konstruiert wird per $x'_j := x_j$, $j \in U$, $x'_j = 0$ sonst, dann $x' \in P(f^V)$ wegen

$$x'(X) = x(X \cap U) \leq f^U(X \cap U) = f^V(X \cap U) \leq f^V(X)$$

für alle $X \subseteq V$ und $x'(U) = x(U) = f(U)$. Die zusätzliche Lehre aus Satz 5.7 besteht in der Existenz eines $x'' \in P(f^V)$ mit

$x' \leq x''$ ($\forall_{j \in V} x'_j \leq x''_j$), $x''(V) = f^V(V)$. Wiederum wird x'' erweitert zum $w' \in \mathbb{R}^E$ mit $w'_j := x''_j$, $j \in V$, $w'_j = 0$ sonst. $w' \in P(f)$ wegen

$$w'(X) = x''(X \cap V) \leq f^V(X \cap V) = f(X \cap V) \leq f(X)$$

für alle $X \subseteq E$ und $f(U) \geq w'(U) = x''(U) \geq x'(U) = f(U)$ ergo $w'(U) = f(U)$ und $w'(V) = x''(V) = f^V(V) = f(V)$. Ein $w \in B(f)$ schließlich, mit $w \geq w'$ (Satz 5.7), befriedigt mit gleichartiger Begründung alle geäußerten Bedürfnisse. ■

5.2 Bisubmodulare Polyeder

Mit Einführung der Bisubmodularität¹² als Abstraktion des Submodularitätsbegriffs wird es plausibel, für $f : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ ein zugehöriges Polyeder

$$P^\Delta(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{(X,Y) \in 3^E} x(X,Y) \leq f(X,Y)\}$$

zu definieren, welches **bisubmodulares Polyeder** genannt wird, wenn f gerade eine bisubmodulare Funktion auf 3^E ist und $f(\emptyset, \emptyset) = 0$ vorliegt.

5.2.1 Generalisierung von Polymatroiden

Polymatroide und Basis-Polyeder sind ins Konzept der bisubmodularen Polyeder integriert.

Bemerkung 5.9.

Sei $f : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ submodular, monoton und nullpunktgeeicht.

Dann gilt für die Funktionen $\hat{f}, \hat{b} : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(X,Y) = f(X)$ bzw. $\hat{b}(X,Y) = f(X) + f(E \setminus Y) - f(E)$

$$P^\Delta(\hat{f}) = P(f) \quad \text{und} \quad P^\Delta(\hat{b}) = B(f).$$

Beweis

Die bisubmodularen Polyeder sind wohldefiniert, da sich neben dem offensichtlichen $\hat{f}(\emptyset, \emptyset) = \hat{b}(\emptyset, \emptyset) = 0$ die Bisubmodularität der Funktionen aus Lemma 2.27 bzw. Kor. 2.29 gewinnen lässt.

¹²siehe 2.4.3

Ist nun einerseits $x \in P^\Delta(\hat{f})$ bzw. $x \in P^\Delta(\hat{b})$, dann ist $x \geq 0$ wegen $-x_i = x(\emptyset, \{i\}) \leq \hat{f}(\emptyset, \{i\}) = 0$ bzw. $x(\emptyset, \{i\}) \leq \hat{b}(\emptyset, \{i\}) = f(E \setminus i) - f(E) \leq 0$. Für $X \subseteq E$ ist $x(X) = x(X, \emptyset) \leq \hat{f}(X, \emptyset) = \hat{b}(X, \emptyset) = f(X)$. Dazu kommt im zweiten Fall $x(E) = -x(\emptyset, E) \geq -\hat{b}(\emptyset, E) = f(E)$. Mithin $x \in P(f)$ bzw. $x \in B(f)$.

Andererseits erweckt $(X, Y) \in 3^E$ $x \in P(f) \Rightarrow x(X, Y) = x(X) - x(Y) \leq x(X) \leq f(X) = \hat{f}(X, Y)$ wegen $x \geq 0$. Und $x \in B(f) \Rightarrow x(X) - x(Y) = x(X) - x(E) + x(E \setminus Y) \leq f(X) + f(E \setminus Y) - f(E) = \hat{b}(X, Y)$ wegen $x(E) = f(E)$. Also $x \in P^\Delta(\hat{f})$ bzw. $x \in P^\Delta(\hat{b})$. ■

Das definierende Ungleichungssystem ist auch hier total dual integral¹³ und eine nur ganzzahlige Werte annehmende Funktion f bewirkt wiederum ein ganzzahliges Polyeder $P^\Delta(f)$, das **ganzzahlige bisubmodulare Polyeder**. Als Objekte der linearen Optimierung werden diese in Abschnitt 5.3.3 behandelt. Das Polyeder bestimmt die Funktion wieder eindeutig.

Satz 5.10.

Wenn $f, g : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ bisubmodular sind und $f(\emptyset, \emptyset) = g(\emptyset, \emptyset) = 0$, dann

$$P^\Delta := P^\Delta(f) = P^\Delta(g) \quad \Rightarrow \quad f = g,$$

wobei für $(X, Y) \in 3^E$

$$f(X, Y) = g(X, Y) = \max \{x(X) - x(Y) \mid x \in P^\Delta\}.$$

Beweis: [Fuj91], S. 94

5.2.2 Die Beziehung zum Δ -Matroid

Mit den bisubmodularen Polyedern entsteht analog zum Matroid-Polyeder eine Art Δ -Matroid-Polyeder.

¹³vgl. [KC90] und [Fuj91]

Satz 5.11.

Das Vorhandensein einer Funktion f hat, wenn diese die Forderungen der Punkte aus Satz 2.30 einlöst, zur Konsequenz, dass die Ecken von $P^\Delta(f)$ genau die Inzidenzvektoren eines Δ -Matroids \mathcal{D} verkörpern.

$$X \in \mathcal{D} \Leftrightarrow i(X) \in P^\Delta(f) \quad \text{bzw.} \quad I(x) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x \in P^\Delta(f),$$

oder genauer

$$\text{co}(i(\mathcal{D})) = P^\Delta(f).$$

Beweis: Satz 3, [CK88]

Korollar 5.12.

Ein solches f ist die Δ -Rangfunktion des genannten Δ -Matroids \mathcal{D} und

$$\text{co}(i(\mathcal{D})) = P^\Delta(r_{\mathcal{D}}^\Delta).$$

Beweis

Ist \mathcal{D} das aus Satz 5.11 gewonnene Δ -Matroid \mathcal{D} , dann besagt Satz 4, [CK88], dass auch $\text{co}(i(\mathcal{D})) = P^\Delta(r_{\mathcal{D}}^\Delta)$ gilt, also $P^\Delta(f) = P^\Delta(r_{\mathcal{D}}^\Delta)$.

Daraus folgt $f = r_{\mathcal{D}}^\Delta$ mit Satz 5.10. ■

Die bisubmodularen Polyeder werden auch als **Polypseudomatroide**¹⁴ bezeichnet und geben Anlass zu weiterer Verallgemeinerung.¹⁵

5.3 Twisten und Spiegeln

Die Affinität, die Δ -Matroide zur Δ -Operation zeigen,¹⁶ und die Brücken, die mittels monotoner Hüllen zu Matroiden gebaut sind,¹⁷ zeigen weitere Konsequenzen. So korrespondiert das Twisten von Mengensystemen unter E augenscheinlich mit dem Spiegeln von Mengen im \mathbb{R}^E .

¹⁴vgl. [CK88]

¹⁵vgl. [Fuj91] und [Qi88]

¹⁶siehe Prop. 2.23

¹⁷siehe Lemma 2.25

5.3.1 Spiegelrechnung

Die „**Spiegelung**“ $\phi_A(C)$ einer Menge $C \subseteq \mathbb{R}^E$ am Untervektorraum $\mathbb{R}^{E \setminus A}$, $A \subseteq E$ wird verstanden als $\phi_A(C) = \{\phi_A(x) \mid x \in C\}$, induziert durch

$$\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_A(x)_j = \begin{cases} -x_j & \text{für } j \in A \\ x_j & \text{sonst} \end{cases} .$$

Mit **positivem Abschluss** von C , definiert für $C \subseteq \mathbb{R}_+^n$, ist hier die Umhüllung

$$H(C) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \exists y \in C \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad x_i \leq y_i\}$$

gemeint, die an die monotone Hülle erinnert. Eine **Verschiebung** oder **Translation** $C + y$, $y \in \mathbb{R}^n$ soll für $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + z, z \in C\}$ stehen.

Lemma 5.13.

Spiegelung und Verschiebung, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $A, X, Y \subseteq E$, führen zu den Gleichungen:

- (1) $\phi_A(\phi_A(x)) = x$.
- (2) $\phi_A(x)(X) = x(X \setminus A) - x(X \cap A) = x(X \setminus A, X \cap A)$.
- (3) $\phi_A(x + y) = \phi_A(x) + \phi_A(y)$.
- (4) $\phi_A(i(X)) = i(X \setminus A) - i(X \cap A)$.

Diese unschwer nachzurechnenden Gegebenheiten sind mitverantwortlich für:

Lemma 5.14.

Wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $A \subseteq E$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$, dann

- (1) $H(i(\mathcal{F})) \cap \{0, 1\}^n = i(\mathcal{H}(\mathcal{F}))$.
- (2) $\mathcal{H}(I(C)) \subseteq I(H(C))$. Gleichheit gilt, wenn $C \subseteq \{0, 1\}^n$.
- (3) $i(\mathcal{F} \Delta A) = \phi_A(i(\mathcal{F})) + i(A)$.
- (4) $I(\phi_A(C) + i(A)) = I(C) \Delta A$.

Beweis

- (1): $x \in H(i(\mathcal{F})) \cap \{0, 1\}^n \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}^n, \exists_{z \in i(\mathcal{F})} x \leq z$
 $\Leftrightarrow \exists_{z: I(z) \in \mathcal{F}} I(x) \subseteq I(z) \Leftrightarrow I(x) \in \mathcal{H}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow x \in i(\mathcal{H}(\mathcal{F})).$
- (2): $X \in \mathcal{H}(I(C)) \Leftrightarrow \exists_{z: I(z) \in I(C)} X \subseteq I(z) \Leftrightarrow \exists_{z \in C \cap \{0, 1\}^n} i(X) \leq z$
 \Rightarrow (bei $C \subseteq \{0, 1\}^n : \Leftrightarrow \exists_{z \in C} i(X) \leq z \Leftrightarrow i(X) \in H(C)$
 $\Leftrightarrow X \in I(H(C)).$
- (3): $x \in i(\mathcal{F} \Delta A) \Leftrightarrow I(x) \Delta A \in \mathcal{F}$
 $\Leftrightarrow \phi_A(i(I(x) \Delta A)) + i(A) \in \phi_A(i(\mathcal{F})) + i(A) \Leftrightarrow x \in \phi_A(i(\mathcal{F})) + i(A),$
 weil $\phi_A(i(I(x) \Delta A)) + i(A) = i(I(x) \setminus A) - i(A \setminus I(x)) + i(A)$
 $= i(I(x) \setminus A) + i(I(x) \cap A) = i(I(x)) = x.$
- (4): $X \in I(\phi_A(C) + i(A)) \Leftrightarrow i(X) - i(A) \in \phi_A(C)$
 $\Leftrightarrow \phi_A(i(X)) + i(A) \in C \Leftrightarrow i(X \setminus A) + i(A \setminus X) \in C \Leftrightarrow X \Delta A \in I(C).$

■

Leicht nachvollziehbar ist die Transparenz bei der Bildung konvexer Hüllen.

Bemerkung 5.15.

$U \subseteq \mathbb{R}^E, y \in \mathbb{R}^E, A \subseteq E:$

$$(1) \text{ } co(H(U)) = H(co(U)).$$

$$(2) \text{ } co(U + y) = co(U) + y.$$

$$(3) \text{ } co(\phi_A(U)) = \phi_A(co(U)).$$

5.3.2 Der verallgemeinerte Polymatroid-Algorithmus

Dunstan und Welsh¹⁸ stellten, angeregt von Edmonds' (PMA), einen mit Vektoren arbeitenden Algorithmus zur Optimierung auf kompakten Mengen des \mathbb{R}^E vor, der sukzessiv bestmögliche Punkte in Projektionen bestimmt, welche immer weniger restriktiv werden. Vorgegeben ist ein kompaktes

¹⁸vgl. [DW73]

$C \subseteq \mathbb{R}^n, C \neq \emptyset$. Gefunden werden soll $x \in C$ so, dass die Linearform $c x = \sum_{j \in E}^n c(j) x_j = \max_{y \in C} c y$, $c = (c(1), \dots, c(n)) \in \mathbb{R}^E$, maximiert wird.

Als Bezeichnung für die Projektion eines Vektors $x \in \mathbb{R}^E$, $E = \{1, \dots, n\}$, auf den Untervektorraum \mathbb{R}^T , $T \subseteq E$, sei $x|_T = (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, $T = \{j_1, \dots, j_m\}$, gewählt und konform dazu die Projektion von $C \subseteq \mathbb{R}^E$ als $C|_T = \{x|_T \mid x \in C\}$. Der Wortlaut dieses Algorithmus (**DWA**) besteht in

1. Sortiere E zu $\{j_1, \dots, j_n\}$ gemäß $|c(j_i)| \geq |c(j_{i+1})|$, $1 \leq i \leq n-1$
2. $T_i := \{j_1, \dots, j_i\}$, $1 \leq i \leq n$
3. $i := 1$
4. Wenn $c(j_i) \geq 0$, dann $g_{j_i} := \max \left\{ x_{j_i} \mid (g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}}, x_{j_i}) \in C|_{T_i} \right\}$
5. Wenn $c(j_i) < 0$, dann $g_{j_i} := \min \left\{ x_{j_i} \mid (g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}}, x_{j_i}) \in C|_{T_i} \right\}$
6. Wenn $i = n$ STOP, sonst $i = i + 1$
7. Gehe zu 4.

Zuletzt befindet sich $g = (g_1, \dots, g_n)$ in C und eins der Resultate in [DW73] besagt, dass dieses g das gesuchte Maximum ist, wenn C ein Polymatroid repräsentiert.

Dieser Algorithmus (DWA) hat gegenüber dem ursprünglich von Edmonds¹⁹ bereitgestellten (PMA) den Vorteil, dass das Polymatroid nicht unbedingt als bezüglich der zugehörigen submodularen Funktion vollständiges Ungleichungssystem vorliegen muss.

Darüber hinaus absolviert er die Optimierung auf einer größeren Auswahl von kompakten Mengen. Beispielsweise hat er Erfolg auf allen kompakten Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, deren konvexe Hülle $co(C)$ sich um ein $y \in \mathbb{R}^n$ verschieben lässt, so dass der positive Abschluss $H(co(C) + y)$ Polymatroid ist, wenn die Zielfunktion c positiv auf E ist.

Das demgegenüber etwas eingeschränkte Sortiment kompakter Mengen, auf denen die Optimierung bei beliebiger Zielfunktion zum Erfolg kommt, lässt sich genau beschreiben.

¹⁹vgl. [Edm70]

Satz 5.16.

Der Algorithmus (DWA) endet für alle $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem maximalgewichtigen Vektor der kompakten Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn für jedes $A \subseteq E$ die Spiegelung $\phi_A(C)$ von C an $\mathbb{R}^{E \setminus A}$ so um ein $y \in \mathbb{R}^n$ in den ersten Quadranten (\mathbb{R}_+^n) verschoben werden kann, dass der positive Abschluss der konvexen Hülle $H(\text{co}(\phi_A(C) + y))$ Polymatroid ist.

Beweis: [DW73]

Die Polymatroide selbst genügen allen diesen Umschreibungen, weil $y(X) \leq x(X)$ für $x \geq y \geq 0$ und darum $H(P(f)) = P(f)$.

Verwandtschaft zum Δ -Matroid-Algorithmus

Nimmt man einmal ein Δ -Matroid \mathcal{D} mit zugehörigem bisubmodularem Δ -Rang r^Δ zur Hand und übersetzt den zugehörigen Optimierungsalgorithmus, auf dass er mit Inzidenzvektoren in \mathbb{R}^n für die Optimierung bezüglich $P^\Delta(r^\Delta)$ arbeite, dann führt dies nach 5.2 zum Erfolg, weil auf den Ecken die Linearform $c \cdot x$ den üblichen Wert $c(I(X))$ annimmt und jeder optimale Wert an einer Ecke erwartet werden darf.²⁰

Die erlangte Übersetzung wird sich als Verfahren herausstellen, das genau die Schritte des Algorithmus (DWA) verrichtet, wenn man die X aus dem Δ -Matroid-Algorithmus (DMA) mit $I((g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}}))$ dort identifiziert, denn es gilt die Verallgemeinerung:

Lemma 5.17.

Wird dem Algorithmus (DWA) eine kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}_+^n$, $C \neq \emptyset$ angetragen, die sämtliche Ecken in $\{0, 1\}^n$ verortet, soll heißen

$\exists_{V \subseteq \{0, 1\}^n} V \subseteq C \subseteq \text{co}(V)$, dann gilt für die zu ermittelnden Werte aus Schritt 4 und 5:

$g_{j_i} \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$ und im Falle des Maximums beträgt dieses genau dann 1, wenn eine Menge $F \in I(C)$ existiert mit

$$I((g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}})) \cup j_i \subseteq F \subseteq I((g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}})) \cup \{j_i, \dots, j_n\}.$$

Entsprechend beläuft sich das Minimum dann und nur dann auf 0, wenn $I((g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}})) \subseteq F \subseteq I((g_{j_1}, \dots, g_{j_{i-1}})) \cup \{j_{i+1}, \dots, j_n\}$ keinem $F \in I(C)$ möglich ist.

²⁰vgl. [Mar99]

Beweis

Wir beschränken uns auf die Maximumkonstruktion, da das Minimum in gleicher Weise untersucht werden kann und nehmen E , ohne Einschränkungen zu erleiden, als so günstig vorliegend an, dass sich $j_i = i$, $1 \leq i \leq n$ ergibt. Alsdann gehen wir induktiv bezüglich i vor, die Verankerung geht konform. \hat{g}_i vertrete (g_1, \dots, g_i) und $T_i := \{1, \dots, i\}$.

$0 \leq M := \max \left\{ x_i \mid (g_1, \dots, g_{i-1}, x_i) \in C \Big|_{T_i} \right\} \leq 1$ ist sicher, weil $\hat{g}_{i-1} \in C \Big|_{T_{i-1}}$ aus dem vorhergehenden Schritt bzw. $C \neq \emptyset$ ($i = 1$) die Existenz eines projizierbaren Vektors in C garantiert und $C \subseteq [0, 1]^n$ gesichert ist.

Die Bedingung $V \subseteq C \subseteq \text{co}(V)$ mit $V \subseteq \{0, 1\}^n$ dient dazu, dass jede lineare Abbildung der Form $x \mapsto c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}^n$ einen den Maximalwert für C erzeugenden Vektor in V besitzt, da $\text{co}(V)$ Polyeder ist und sich daher ein diesbezüglicher Maximumsvektor in V befindet.²¹ Wegen $V \subseteq C$ bewegt der sich dann auch in C .

Sei $y \in V$ nun eine Ecke von C , die die Linearform $d \cdot x$, $x \in C$ optimiert, wobei $d \in \mathbb{R}^n$ festgelegt ist durch

$$d_j := -1, \quad j < i, \quad g_j = 0, \quad \text{dann } d_j := 1, \quad j < i, \quad g_j = 1 \text{ sowie } d_i := \frac{1}{2} \text{ und } d_j := 0, \quad j > i.$$

$$(\Rightarrow \quad g_j - d_j y_j = |g_j - y_j|, \quad d_j g_j = g_j).$$

Es ergibt sich $y \Big|_{T_{i-1}} = \hat{g}_{i-1}$ und $y_i \geq M$.

Denn für $x' \in C$ mit $x' \Big|_{T_i} = (g_1, \dots, g_{i-1}, M)$ errechnet man nun

$$d \cdot x' - d \cdot y = \frac{1}{2}(M - y_i) + \sum_{j < i} d_j (g_j - y_j) = \frac{1}{2}(M - y_i) + \sum_{j < i} |g_j - y_j|,$$

was andernfalls wegen $\left| \frac{1}{2}(M - y_i) \right| < 1$ zunächst für $y_k \neq g_k$

($\Rightarrow |g_k - y_k| \geq 1$ nach I.A.) und anschließend für $y_i < M$ im

Widerspruch zum optimierenden y zu positivem Resultat führen würde.

Für $y_i = 0$ fügt sich also $g_i = M = 0$ und die Existenz von $F \in I(C)$, $I(\hat{g}_{i-1}) \cup i \subseteq F \subseteq I(\hat{g}_{i-1}) \cup \{i, \dots, n\}$, bedeutete einen Inzidenzvektor $i(F) \in C$, der $i(F) \Big|_{T_{i-1}} = \hat{g}_{i-1}$ und $i(F)_i = 1$ genügte und so $M = 1$ nach sich zöge ζ .

²¹vgl. [Mar99]

Umgekehrt bedeutet $y_i = 1$ eben, dass M definitionsgemäß auf 1 gesetzt werden kann und $F := I(y) \in I(C)$ ermöglicht wird durch $I(\hat{g}_{i-1}) \cup i \subseteq I(y) \subseteq I(\hat{g}_{i-1}) \cup \{i, \dots, n\}$. ■

Proposition 5.18.

Sind $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, ein Mengensystem \mathcal{F} und eine kompakte Menge $C \in \mathbb{R}^E$, $i(\mathcal{F}) \subseteq C \subseteq co(i(\mathcal{F}))$, vorgegeben, dann maximiert der (DMA) $c(X)$, $X \in \mathcal{F}$, genau dann, wenn der (DWA) $c \cdot x$, $x \in C$ maximiert.

Beweis

Es gilt $\mathcal{F} = I(C)$ und in jedem Schritt i der beiden Verfahren entspricht das X_i des (DMA) dem $I(\hat{g}_i)$ des (DWA), wenn man Lemma 5.17 induktiv folgt. Insbesondere gilt also für die Endresultate $X_n = I(\hat{g}_n)$.

Die Äquivalenz ergibt sich so aus der Übereinstimmung der Zielfunktionswerte von Linearfunktion und Mengenbewertung.

$$c(X) = \sum_{j \in X} c_j = \sum_{j: i(X)_j=1} c_j = c \cdot i(X), \quad X \subseteq E \text{ und somit}$$

$$\begin{aligned} \max \{c(X) \mid X \in \mathcal{F}\} &= \max \{c \cdot i(X) \mid X \in \mathcal{F}\} = \max \{c \cdot y \mid y \in i(\mathcal{F})\} \\ &= \max \{c \cdot y \mid y \in C\} \text{ (zu letzterem siehe den entsprechenden Absatz im Beweis von Lemma 5.17, } V = i(\mathcal{F}) \text{).} \end{aligned}$$

■

5.3.3 Eine Charakterisierung bisubmodularer Polyeder

Die Analogie der beiden Algorithmen, d.h. das Funktionieren des zuletzt vorgestellten auf den „Inzidenzpolyedern“ der Δ -Matroide, suggeriert, dass im Grunde schon Dunstan und Welsh eine Charakterisierung der bisubmodularen Polyeder vornahmen, ohne dass dort von einer solchen Polyeder-Klasse die Rede gewesen wäre. Es soll nun hier gezeigt werden, dass es sich in der Tat bei den dort beschriebenen²² kompakten Mengen, bis auf die Konvexität, um die bisubmodularen Polyeder handelt, wie auch in [BC95] bemerkt.

Satz 5.19.

Vorgegeben sei mit $P \subseteq \mathbb{R}^E$ eine kompakte und konvexe Menge. P ist genau dann ein bisubmodularer Polyeder, wenn für jedes $A \subseteq E$ die Spiegelung von P an \mathbb{R}^A so um ein $y_A \in \mathbb{R}^n$ in den ersten Quadranten (\mathbb{R}_+^n) verschoben werden kann, dass der positive Abschluss $H(\phi_A(P) + y_A)$ Polymatroid ist.

²²siehe Satz 5.16

Beweis' \Leftarrow ' :

Unterstelle also zu jedem $A \subseteq E$ ein $y_A \in \mathbb{R}^E$, das $\phi_A(P) + y_A \geq 0$ und $H(\phi_A(P) + y_A) = P(f_A)$ gewährleistet, wobei $f_A : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ submodular und monoton ist und $f_A(\emptyset) = 0$ leistet. Zunächst wird die Funktion $r : 3^E \rightarrow \mathbb{R}$ aufgestellt durch

$$r(S, T) := \max \{x(S, T) \mid x \in P\}. \quad (\#1)$$

Offenkundig ist so $P \subseteq P^\Delta(r)$.

Der Wert für $(S, T) \in 3^E$ kann, weil jede Spiegelung Polymatroid ist, auf variable Weise ausgedrückt werden:

$$T \subseteq A, A \cap S = \emptyset \Rightarrow r(S, T) = f_A(S \cup T) - y_A(S \cup T). \quad (\#2)$$

Dazu $(S, T) \in 3^E$, $T \subseteq A$, $A \cap S = \emptyset$. Fixiere mit Hilfe der Kompaktheit von P ein $w \in P$ mit $w(S, T) = r(S, T)$. Für beliebiges $x \in P(f_A)$ existiert $z \in \phi_A(P) + y_A$ mit $x \leq z$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x(S \cup T) &\leq z(S \cup T) = (z - y_A)(S \cup T) + y_A(S \cup T) \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.13}}{=} \phi_A(z - y_A)((S \cup T) \setminus A, (S \cup T) \cap A) + y_A(S \cup T) \\ &= \phi_A(z - y_A)(S, T) + y_A(S \cup T) \leq \max_{\phi_A(z - y_A) \in P} w(S, T) + y_A(S \cup T). \end{aligned}$$

Weil $x \in P(f_A)$ beliebig gewählt war, muss nach Lemma 5.8

$$\begin{aligned} w(S, T) + y_A(S \cup T) &\geq f_A(S \cup T) \\ &\geq \max_{\phi_A(w) + y_A \in \phi_A(P) + y_A \subseteq P(f_A)} (\phi_A(w) + y_A)(S \cup T) = w(S, T) + y_A(S \cup T) \end{aligned}$$

sein und somit $w(S, T) = f_A(S \cup T) - y_A(S \cup T)$.

Klar ist wegen $P \subseteq P^\Delta(r)$

$$\phi_A(P) + y_A \subseteq \phi_A(P^\Delta) + y_A \text{ für alle } A \subseteq E. \quad (\#3)$$

Es soll $P = P^\Delta(r)$ erbracht werden. Vorab noch

$$B(f_A) \subseteq \phi_A(P) + y_A \text{ für alle } A \subseteq E, \quad (\#4)$$

denn zu $x \in B(f_A) \subseteq H(\phi_A(P) + y_A)$, $A \subseteq E$, gibt es $z \in \phi_A(P) + y_A$ mit $x \leq z \Rightarrow f_A(E) = x(E) \leq z(E) \leq f_A(E)$, also $x(E) = z(E)$, was nur bei $x = z$ möglich ist. Also $x \in \phi_A(P) + y_A$.

Außerdem

$$\phi_A(P^\Delta(r)) + y_A \subseteq P(f_A) \text{ für alle } A \subseteq E, \quad (\#5)$$

denn $x \in \phi_A(P^\Delta(r)) + y_A$ bedeutet $\phi_A(x - y_A) \in P^\Delta(r)$. Nun $Y \subseteq E$:

$$\begin{aligned} x(Y) &= (x - y_A)(Y) + y_A(Y) = \phi_A(x - y_A)(Y \setminus A, Y \cap A) + y_A(Y) \\ &\leq r(Y \setminus A, Y \cap A) + y_A(Y) \stackrel{(\#2)}{=} f_A(Y), \end{aligned}$$

was für $x \in P(f_A)$ ausreicht, wenn $x \geq 0$:

Für $j \notin A$ nehme ein $w \in P$ mit $-w_j = w(\emptyset, \{j\}) = r(\emptyset, \{j\})$.

Die Voraussetzung liefert $\phi_A(P) + y_A \geq 0$, also

$$\begin{aligned} y_{A,j} &\geq -\phi_A(w)_j = -w_j \text{ und so mit } (\#1) \quad -x_j + y_{A,j} \\ &= \phi_A(x - y_A)(\emptyset, \{j\}) \leq r(\emptyset, \{j\}) = -w_j \leq y_{A,j}, \text{ sprich } x_j \geq 0. \end{aligned}$$

Auch bei $j \in A$ ist analog $x_j \geq 0$ über

$$\begin{aligned} -x_j + y_{A,j} &= \phi_A(x - y_A)(\{j\}, \emptyset) \leq r(\{j\}, \emptyset) = w'_j \leq y_{A,j}, \text{ wenn} \\ w' \in P \text{ mit } w'_j &= w'(\{j\}, \emptyset) = r(\{j\}, \emptyset) \text{ und } y_{A,j} \geq -\phi_A(w')_j = w'_j. \end{aligned}$$

Nun soll für $P^\Delta(r) \subseteq P$ darauf hingearbeitet werden, dass die Eckenmenge V von $P^\Delta(r)$, welches auf Grund seiner Definition ein Polyeder ist, vollständig in P enthalten ist:

$$V \subseteq P.$$

Das $P^\Delta(r)$ aufbauende System von Ungleichungen formt offensichtlich eine zugehörige Matrix vom Rang n , so dass das Polyeder spitz ist und der Begriff Eckenmenge sinnvoll wird, auch als Menge, deren konvexe Hülle dem Polyeder entspricht, siehe [Sch86], Kap. 8. Dort ist weiter nachzulesen, dass jede Ecke $v \in V$ als minimale Seitenfläche genau die Menge ist, die eine Linearfunktion $c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}^n$ optimiert. Das heißt $c \cdot v > c \cdot x$ für sämtliche $x \neq v$ in $P^\Delta(r)$.

Nun wird zu einem solchen c zu einem konkreten $v \in V$ ein

$A = \{j \in E \mid c_j < 0\} \subseteq E$ festgelegt, um $\phi_A(c) \geq 0$ zu erwirken. Da

grundsätzlich $\phi_A(c) \phi_A(x) = cx$, gilt für alle $x \in \phi_A(P^\Delta(r)) + y_A$,

$x \neq \phi_A(v) + y_A$, dass

$$\phi_A(c) (\phi_A(v) + y_A) = cv + \phi_A(c) y_A > c \phi_A(x - y_A) + \phi_A(c) y_A$$

$$= \phi_A(c) (x - y_A) + \phi_A(c) y_A = \phi_A(c) x.$$

Wegen (#3) überträgt sich dies auf alle $x \in \phi_A(P) + y_A$. Der Vektor $\phi_A(v) + y_A$ liegt, begründet durch (#5), in $P(f_A)$. Es gibt nach Satz 5.7 ein $w \in B(f_A)$, $\phi_A(v) + y_A \leq w$. Dieses w befindet sich dank (#4) in $\phi_A(P) + y_A$.

Wenn nun $w \neq \phi_A(v) + y_A$ wäre, dann erfüllte sich (wegen $\phi_A(c) \geq 0_E$) $\phi_A(c) (\phi_A(v) + y_A) \leq \phi_A(c) w$ im Widerspruch zur scharfen Ungleichung oben.

$\phi_A(v) + y_A$ ist also w selbst und damit in $B(f_A)$ und $\phi_A(P) + y_A$. Das aber bedeutet $v \in P$.

So erstrahlt durch das konvexe P die erlösende Teilmengenkette

$$P^\Delta(r) = co(V) \subseteq co(P) = P.$$

Nachdem P nun als Polyeder $P^\Delta(r)$ entlarvt wurde, ist noch die Bisubmodularität von P , das heißt, die von r abzusichern. Man ergreife hierzu $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq E$, $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \emptyset$ und überprüfe

$$\begin{aligned} & r((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)) \\ & + r(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) - r(X_2, Y_2) \leq r(X_1, Y_1) \end{aligned}$$

Dies muss durch Spiegeln eines geeigneten Quadranten, der von den vier Mengen vorgegebenen wird, nach \mathbb{R}_+^E und das Ausnutzen der Submodularität der begrenzenden Funktion dort geschehen.

Damit die zahlreichen Teilmengenbeziehungen bzw. Gleichungen, die dabei zu überprüfen sind, nicht zu sehr in der Schriftform ausufern, werden die Mengenterme mit Ziffern unterlegt, die die atomaren Bestandteile, d.h die jeweiligen Elementgruppen, die bezüglich dieser vier Mengen nicht unterscheidbar sind, symbolisieren. Mit Hilfe des folgenden Diagramms sind die auftretenden

Rechnungen dann leichter nachzuvollziehen. Die Spiegelung wird ausgeführt an $\mathbb{R}^{E \setminus A}$, $A = (Y_1 \cup Y_2) \setminus X_2$.
2345

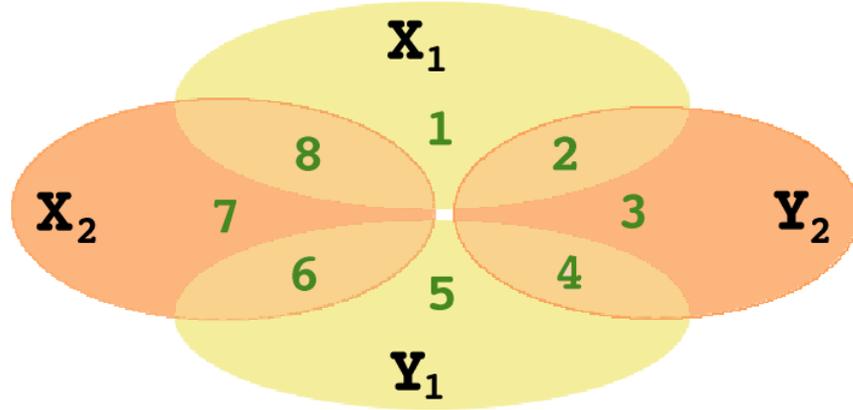


Abbildung 5.1: Diagramm zur Bisubmodularität

$$\begin{aligned}
 & r((X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2), (Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)) \\
 & + r(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) - r(X_2, Y_2) \\
 = & f_A((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)) - y_A((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)) \\
 (\#2) & + f_A((X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) - y_A((X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) \\
 & - f_A(X_2 \cup Y_2) + y_A(X_2 \cup Y_2) = \dots
 \end{aligned}$$

Denn $(Y_1 \cup Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2) \subseteq A$, $A \cap (X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2) = \emptyset$,
 $Y_2 \subseteq A$, $A \cap X_2 = \emptyset$ und $Y_1 \cap Y_2 \subseteq A$, $A \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Nun kommt Lemma 5.8 zur Anwendung und liefert ein $z \in B(f_A)$,

das $z((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)) = f_A((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2))$ und

$z((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) = f_A((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2))$ erfüllt, denn

$(X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2) \subseteq (X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)$.

1458

134578

$$\begin{aligned}
& \dots = z((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)) - y_A((X_1 \cup X_2) \Delta (Y_1 \cup Y_2)) \\
& \quad + f_A((X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) - f_A(X_2 \cup Y_2) \\
& \quad + y_A((X_2 \setminus X_1) \cup (Y_2 \setminus Y_1)) \\
& = z(X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2) - z((X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)) \\
& \quad + f_A((X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) - f_A(X_2 \cup Y_2) \\
& \quad + y_A((X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)) - y_A((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) \\
& \leq_{z \in P(f_A)} f_A(X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2) + f_A((X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2)) \\
& \quad - f_A(X_2 \cup Y_2) + (y_A - z)((X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)) \\
& \quad - y_A((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) \\
& \leq f_A((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) + (y_A - z)((X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)) \\
& \quad - y_A((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) = \dots
\end{aligned}$$

Letzteres passt kraft der Submodularität von f_A wegen

$$\begin{aligned}
& ((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) \cap (X_2 \cup Y_2) = (X_1 \cap X_2) \cup (Y_1 \cap Y_2) \quad \text{und} \\
& ((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) \cup (X_2 \cup Y_2) = X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2. \quad \text{Nun erinnere} \\
& \text{man sich an die Eigenschaften von } z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots = (z - y_A)((X_1 \setminus Y_2) \cup (Y_1 \setminus X_2)) + (y_A - z)((X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)) \\
& = (z - y_A)(X_1 \setminus A, X_1 \cap A) - (z - y_A)(Y_1 \setminus A, Y_1 \cap A) \\
& = \phi_A(z - y_A)(X_1) - \phi_A(z - y_A)(Y_1) = \phi_A(z - y_A)(X_1, Y_1) \stackrel{(\#1)}{\leq} r(X_1, Y_1), \\
& \text{denn gemäß } (\#4) \text{ ist } z \in \phi_A(P) + y_A, \text{ also } \phi_A(z - y_A) \in P.
\end{aligned}$$

Bei P handelt es sich also wirklich um ein bisubmodulares Polyeder!

' \Rightarrow ':

Es liegt ein bisubmodulares Polyeder $P = P^\Delta(f)$ vor, $x(S, T) \leq f(S, T)$ für alle $x \in P$, $(S, T) \in 3^E$, f bisubmodular, $f(\emptyset, \emptyset) = 0$ und eine Menge $A \subseteq E$.

Wir legen uns fest auf ein $y_A \in \mathbb{R}^n$ vermöge

$y_{A,j} := f(\{j\} \cap A, \{j\} \setminus A)$, $j \in E$, damit

$$\phi_A(P) + y_A \geq 0$$

steht,

weil für $x \in \phi_A(P) + y_A$:

$$\begin{aligned} x_j &= y_{A,j} + (x - y_A)(\{j\}) = y_{A,j} + \phi_A(x - y_A)(\{j\} \setminus A, \{j\} \cap A) \\ &= f(\{j\} \cap A, \{j\} \setminus A) - \phi_A(x - y_A)(\{j\} \cap A, \{j\} \setminus A) \geq 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe von Lemma 5.13, denn $\phi_A(x - y_A) \in P$.

Nun wird $g : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugt via

$$g(U) = f(U \setminus A, U \cap A) + y_A(U), \quad U \subseteq E.$$

$g(\emptyset) = 0$ springt ins Auge, während die Submodularität Lemma 2.27 und Bem. 5.2 abgerungen werden kann. Die Bisubmodularität von f gereicht auch noch zur Monotonie von g .

Dabei wird Lemma 3.23 aus [Fuj91] genutzt, demzufolge die

$$\begin{aligned} &\text{Nichtnegativität von } g(E) - g(E \setminus j) \\ &= f(E \setminus A, A) - f(E \setminus (A \cup \{j\}), A \setminus \{j\}) + \underbrace{y_A(E) - y_A(E \setminus j)}_{=y_{A,j}} \\ &= f(E \setminus A, A) + f(\{j\} \cap A, \{j\} \setminus A) - f(E \setminus (A \cup \{j\}), A \setminus \{j\}) \\ &\geq f(\emptyset, \emptyset) + f(E \setminus (A \cup \{j\}), A \setminus \{j\}) - f(E \setminus (A \cup \{j\}), A \setminus \{j\}) \\ &= 0 \quad \text{für beliebige } j \in E \text{ die Monotonie von } g \text{ sichert.} \end{aligned}$$

Nun steht mit $P(g)$ ein Polymatroid zur Verfügung, welches die Aussage des Satzes in Form von

$$H(\phi_A(P) + y_A) = P(g)$$

realisieren soll.

Ein beliebiges $x \in H(\phi_A(P) + y_A)$ ($\Rightarrow x \geq 0$) für $' \subseteq '$ kennt ein dominierendes $z \in \phi_A(P) + y_A$ ($\Rightarrow \phi_A(z - y_A) \in P$) und verführt zur Abschätzung ($U \subseteq E$): $x(U) \leq z(U) = (z - y_A)(U) + y_A(U)$
 $= \phi_A(z - y_A)(U \setminus A, U \cap A) + y_A(U)$
 $\leq f(U \setminus A, U \cap A) + y_A(U) = g(U)$ und so ist $x \in P(g)$ gewiss.

So eines wiederum hergenommen für $' \supseteq '$ lässt mit Satz 5.7 auf ein $z \geq x$, $z \in B(g)$ schließen und mit $(S, T) \in 3^E$ kommt es zur Bewertung

$$\begin{aligned} & \phi_A(z - y_A)(S, T) \\ &= (z - y_A)((S \setminus A) \cup (T \cap A)) - (z - y_A)((S \cap A) \cup (T \setminus A)) \\ &\leq g((S \setminus A) \cup (T \cap A)) - y_A((S \setminus A) \cup (T \cap A)) \\ &\quad - z(E) + z(E \setminus ((S \cap A) \cup (T \setminus A))) \\ &\quad + y_A(E) - y_A(E \setminus ((S \cap A) \cup (T \setminus A))) \\ &\leq_{z(E) = g(E)} f((S \setminus A), (T \cap A)) - f(E \setminus A, A) \\ &\quad + g((A \setminus S) \cup ((E \setminus T) \setminus A)) - y_A((A \setminus S) \cup ((E \setminus T) \setminus A)) \\ &= f((S \setminus A), (T \cap A)) - f(E \setminus A, A) + f((E \setminus T) \setminus A, A \setminus S) \\ &\leq f(S, T) \text{ wegen des bisubmodularen } f\text{'s. Die notwendigen Identitäten} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overset{E}{123456} \setminus \underset{5}{((S \cap A) \cup (T \setminus A))} = \underset{34}{(A \setminus S)} \cup \underset{16}{((E \setminus T) \setminus A)}, \\ & \underset{1256}{(S \cup (E \setminus A))} \setminus \underset{2345}{(A \cup T)} = \underset{1456}{(E \setminus T)} \setminus \underset{345}{A} \text{ und} \end{aligned}$$

$$(A \cup T) \setminus (S \cup (E \setminus A)) = A \setminus S \text{ dazu prüfe man anhand von Abb. 5.2.}$$

Folglich $\phi_A(z - y_A) \in P$, $z \in \phi_A(P) + y_A$ und $x \in H(\phi_A(P) + y_A)$.

■

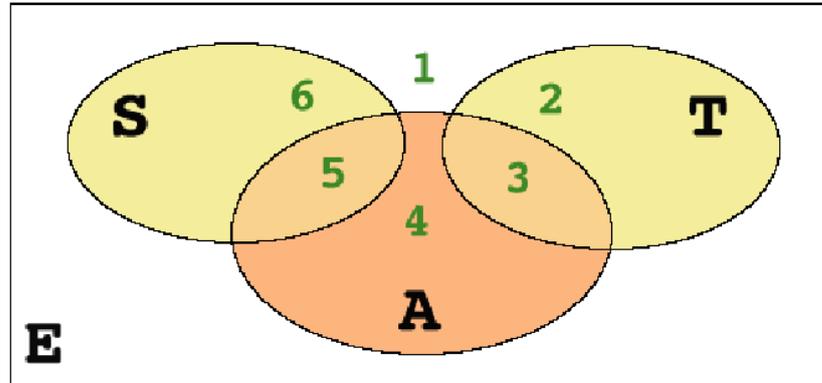


Abbildung 5.2: Zweites Diagramm zur Bisubmodularität

Korollar 5.20.

Der Algorithmus (DWA) endet für alle Gewichtsfunktionen $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem maximalgewichtigen Vektor der kompakten Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die konvexe Hülle $\text{co}(C)$ von C ein bisubmodulares Polyeder ist.

Beweis

Satz 5.19 und Bem. 5.15. ■

5.3.4 Ein Rückschluss auf Mengensysteme

Da der Δ -Matroid-Algorithmus (DMA) Δ -Matroide charakterisiert und der zuletzt beschriebene (DWA) die Polyeder mit möglichem Polymatroid-Abschluss einer jeden Spiegelung, drängt sich durch Lemma 5.17 eine zusätzliche Charakterisierung für Δ -Matroide auf:

Proposition 5.21.

Ist \mathcal{F} ein Mengensystem, so lässt sich feststellen:

\mathcal{F} ist ein Δ -Matroid \Leftrightarrow Für alle $A \subseteq E$ ist $\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$ ein Matroid.

Beweis

' \Rightarrow ' : Eine Folgerung aus Prop. 2.23 und Lemma 2.25 ist, dass

MAX $(\mathcal{F} \Delta A)$ für willkürliche $A \subseteq E$ Basismenge eines Matroids ist.

Nach Lemma 1.3(3) ist also MAX $(\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A))$ Matroid-Basis, was

nach Bem. 2.1 und Lemma 1.3(2) $\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$ zum Matroid macht.

' \Leftarrow ' : $X, Y \in \mathcal{F}$, $x \in X \Delta Y$: Wähle $A := E \Delta X \Delta x$ und sehe

$X \Delta A = E \setminus x$, also $|X \Delta A| = |E| - 1$. Ist nun $E \in \mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$, so

muss $X \Delta x = E \Delta A \in \mathcal{F}$ sein und befriedigt mit $y = x$ die Definition

für Δ -Matroide.²³ Andernfalls ist $X \Delta A$ zwangsläufig Basis von

$\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$ und provoziert so mit (AE) eine Augmentierung von $Y \Delta A$

zu einer Basis $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A))$. $|B| = |E| - 1 \Rightarrow \exists_{y \in E} B = E \setminus y$,

$y \notin Y \Delta A = E \Delta X \Delta Y \Delta x$. Infolgedessen ist $y \in (X \Delta Y) \setminus x$.

Schließlich $X \Delta x \Delta y = E \Delta A \Delta y = B \Delta A \in \mathcal{F}$ nach wiederholter

Anwendung von Lemma 1.5(4), weil B in $\mathcal{F} \Delta A$ sein muss. ■

Man sieht erneut, dass ein Matroid vorliegt, wenn ein Δ -Matroid auch Unabhängigkeitssystem ist.

Zusammenfassung der wechselseitigen Beziehungen

Abschließend sollen die Zusammenhänge zwischen Erkenntnissen um Δ -Matroide und ihre geometrischen Pendanten, die bisubmodularen Polyeder, noch einmal in Form einer Zusammenfassung der Charakterisierungen deutlich gemacht werden.

²³ siehe 2.4

Satz 5.22.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem und $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ so, dass $i(\mathcal{F}) \subseteq U \subseteq \text{co}(i(\mathcal{F}))$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) \mathcal{F} ist ein Δ -Matroid.
- (2) Für alle $A \subseteq E$ ist die monotone Hülle $\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$ ein Matroid.
- (3) Für alle $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ endet der (DMA) aus 2.4.2 bei der optimalen Menge von \mathcal{F} .
- (4) Für alle $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ endet der (DWA) aus 5.3.2 beim optimalen Vektor aus $\text{co}(i(\mathcal{F}))$.
- (5) Für alle $A \subseteq E$ ist $H(\phi_A(\text{co}(i(\mathcal{F}))) + i(A))$ ein Polymatroid.
- (6) $\text{co}(i(\mathcal{F}))$ ist ein bisubmodulares Polyeder.

Insbesondere ist also auch $H(\text{co}(i(\mathcal{D})))$ Polymatroid im Gefolge eines Δ -Matroids \mathcal{D} ($A = \emptyset$).

Beweis

(1) \Leftrightarrow (2) ist Prop. 5.21, (1) \Leftrightarrow (3) steht in Satz 2.26, (1) \Leftrightarrow (6) ist Satz 5.11, (3) \Leftrightarrow (4) ist die Aussage von Prop. 5.18 mit $C = \text{co}(i(\mathcal{F}))$ und (6) folgt aus (5) direkt mit Satz 5.19.

Wir wollen nun noch von (1) auf (5) schließen und geben dazu ein $A \subseteq E$ vor. Zieht man in Betracht, dass nach Prop. 5.21 $\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)$ Matroid und damit nach Satz 5.4 $\text{co}(i(\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A)))$ Polymatroid ist, dann kommt man durch die folgende Transformation zum Erfolg:

$$\begin{aligned}
H(\phi_A(\text{co}(i(\mathcal{F}))) + i(A)) & \stackrel{\text{Bem. 5.15}}{=} \text{co}(H(\phi_A(i(\mathcal{F})) + i(A))) \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.14(3)}}{=} \text{co}(H(i(\mathcal{F} \Delta A))) = \text{co}(i(I(H(i(\mathcal{F} \Delta A)))) \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.14(2), } i(\mathcal{F} \Delta A) \subseteq \{0,1\}^n}{=} \text{co}(i(\mathcal{H}(I(i(\mathcal{F} \Delta A)))) = \text{co}(i(\mathcal{H}(\mathcal{F} \Delta A))).
\end{aligned}$$

■

5.4 Das getwistete Polymatroid

Für die allgemeinen Greedoide liegt eine ansprechende Polyeder-Theorie in weiter Ferne. Lediglich für Antimatroide oder ausgewählte Intervall-Greedoide gibt es Beschreibungen in Form von Ungleichungssystemen.²⁴

Umgekehrt führt ein beliebiges Polymatroid, auf ähnliche Weise wie beim induzierten Matroid, zur Definition eines Polymatroid-Greedoids²⁵

$$\mathcal{G}_{P(f)} = \{X \subseteq E \mid \exists_{e_1, \dots, e_m \in E} \ m = |X|, \ X = \{e_1, \dots, e_m\}, \\ \forall_{1 \leq i \leq m} \ f(\{e_1, \dots, e_i\}) = i\}.$$

Die Polymatroid-Greedoide sind Intervall-Greedoide und gehören sichtlich zu den Greedoids, die im Kontext der geordneten Mengen und Sprachen besser interpretierbar sind.

Für das getwistete Matroid gestaltet sich die Suche nach der Umschreibung des Polyeders naturgemäß freundlicher. Einmal steht uns eine bisubmodulare Δ -Rangfunktion zur Verfügung, weil es zu den Δ -Matroiden zählt. Zudem entspricht das Twisten, wie oben ausgeführt, dem Spiegeln, und schon daraus kann eine Polyeder-Darstellung generiert werden.

5.4.1 Das Polyeder zum getwisteten Matroid

Als Polyeder zum getwisteten Matroid soll, analog zum Matroid-Polyeder, die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren gelten. Dieses Polyeder kann auf zwei verschiedene Arten als Ungleichungssystem beschrieben werden, jeweils determiniert durch die Rangfunktion des Ursprungs-Matroids. Die zum Twisten verwendete Menge muss für die erste Variante nicht zwingend Mitglied des Matroids sein.

²⁴vgl. [KLS91], Kap. 11.3

²⁵vgl. [BZ92], 3.4

Proposition 5.23.

Sei \mathcal{M} ein Matroid, $A \subseteq E$ und r die Rangfunktion von \mathcal{M} . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{co}(i(\mathcal{M} \Delta A)) &= P^\Delta(r_{\mathcal{M} \Delta A}^\Delta) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x(S) - x(T) \leq r((S \setminus A) \cup (T \cap A)) + |A \cap S| - |A \cap T|, \\ &\quad (S, T) \in 3^E.\}. \end{aligned}$$

Ist noch $A \in \mathcal{M}$, dann ist das Polyeder zudem

$$\begin{aligned} &= \phi_A(P(r)) + i(A) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x(S \setminus A) - x(S \cap A) \leq r(S) - |A \cap S|, \quad S \subseteq E, \\ &\quad x_j \geq 0, \quad j \notin A, \\ &\quad x_j \leq 1, \quad j \in A \}. \end{aligned}$$

Beweis

Kor. 5.12 fruchtet für die erste Gleichung, wo dann die Definition des Polyeders mit dem Wissen über die Δ -Rangfunktion aus Prop. 3.37 zum zweiten Term kombiniert wird.

$$\begin{aligned} \text{co}(i(\mathcal{M} \Delta A)) &= \text{co}(\phi_A(i(\mathcal{M})) + i(A)) = \phi_A(\text{co}(i(\mathcal{M}))) + i(A) \\ &= \phi_A(P(r)) + i(A) \text{ ist über Lemma 5.14, Bem. 5.15 und Satz 5.4} \\ &\text{erreichbar. Dies bedeutet, dass } \phi_A(x - i(A)) \text{ genau im Polymatroid liegt,} \\ &\text{also neben } \phi_A(x - i(A))(S) \leq r(S), \text{ wobei } \phi_A(x - i(A))(S) \\ &= \underset{\text{Lemma 5.13}}{(x - i(A))(S \setminus A, S \cap A)} = x(S \setminus A, S \cap A) + |S \cap A| \text{ für} \\ &\text{willkürliches } S \subseteq E, \text{ dass außerdem } \phi_A(x - i(A)) \geq 0 \text{ verantwortlich} \\ &\text{für die Schranken der Koeffizienten ist.} \end{aligned}$$

■

Diese polyedrischen Beschreibungen reflektieren die beiden algorithmischen Herangehensweisen aus 3.6 in der linearen Programmierung. Die untere Darstellung mit ihrer submodularen rechten Seite passt zu einem direkteren Vorgehen wie dem (twGA) aus 3.6.1, lässt dafür aber auf der linken Seite die

Gestalt von A stärker hervortreten. Dies vermeidet die obere Darstellung mit bisubmodularer rechter Seite. Ein solches Polyeder kann mit dem (DWA) aus 5.3.2 angegangen werden.

5.4.2 Das induzierte getwistete Matroid

Auch bei vorgegebener geeigneter submodularer Funktion werden die Mengen des getwisteten induzierten Matroids durch die Inzidenzvektoren im verschobenen gespiegelten Polymatroid angezeigt.

Proposition 5.24.

Ist $P(f)$ ein von einer submodularen, monotonen und nullpunktgeichten Funktion f erzeugtes Polymatroid und $\mathcal{M}(P)$ das davon induzierte Matroid wie in 5.1.3, dann gilt für $X \subseteq E$:

$$X \in \mathcal{M}(P) \Delta A \iff i(X) \in \phi_A(P(f)) + i(A)$$

bzw.

$$I(P(f)) \Delta A = I(\phi_A(P(f)) + i(A)).$$

Beweis

(4) aus Lemma 5.14 entspricht der Gleichung unten, die man mit Prop. 5.5 zum Erhalt der Äquivalenz oben kombinieren kann.

■

Symbolverzeichnis

\exists : es existiert

\forall : für alle

\mathbb{R}_+ : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

nicht negative reelle Zahlen

$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$: $X \subseteq Y, X \neq Y$

„echte“ Teilmengenbeziehung

$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$: $\{X \cup Y \mid X \in \mathcal{F}_1, Y \in \mathcal{F}_2\}$

mengenweise Vereinigung

$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$: $\{X \cup Y \mid X \in \mathcal{F}_1, Y \in \mathcal{F}_2\}, \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{P}(E_j), j = 1, 2, E_1 \cap E_2 = \emptyset$

direkte Summe

$\mathbf{X} \setminus \mathbf{e}$: $X \setminus \{e\}$ bei $e \in X$

$\mathbf{X} \cup \mathbf{e}$: $X \cup \{e\}$ bei $e \notin X$

$\text{MAX}(\mathcal{F})$: $\{X \in \mathcal{F} \mid \forall Y: X \subseteq Y, Y \in \mathcal{F} \ Y = X\}$

maximale Mengen

$\text{MIN}(\mathcal{F})$: $\{X \in \mathcal{F} \mid \forall Y: Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F} \ Y = X\}$

minimale Mengen

- $\mathcal{B}(\mathcal{F})$: $\{X \in \mathcal{F} \mid \forall_{x \in E \setminus X} X \cup x \notin \mathcal{F}\}$
 Basismenge (Menge der Basen)
- $\mathcal{H}(\mathcal{F})$: $\{X \subseteq Y \mid Y \in \mathcal{F}\}$
 monotone Hülle
- $\mathcal{F}|_T$: $\{X \in \mathcal{F} \mid X \subseteq T\}$
 Restriktion von \mathcal{F} auf T
- $\mathcal{F} \setminus \mathbf{T}$: $\{X \in \mathcal{F} \mid X \cap T = \emptyset\}$
 Löschung von $T \subseteq E$ aus \mathcal{F}
- \mathcal{F}/\mathbf{T} : $\left\{X \in \mathcal{F} \mid X \cap T = \emptyset \text{ und } X \cup B \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}|_T)\right\}$
 Kontraktion von $T \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}^{(k)}$: $\{X \in \mathcal{F} \mid |X| \leq k\}$
 k -Abschnitt von \mathcal{F}
- $\mathbf{2}^T$: $\mathcal{P}(T)$
 Boole'sche Algebra
- $\mathbf{3}^E$: $(U, V) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), U \cap V = \emptyset$
- $\mathbf{X} \Delta \mathbf{Y}$: $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
 symmetrische Differenz (Twisten)
- $\mathbf{X} \Delta \mathbf{e}$: $X \Delta \{e\}, X \subseteq E, e \in E$
 getwistete Menge
- $\mathcal{F} \Delta \mathbf{X}$: $\{Y \Delta X \mid Y \in \mathcal{F}\}, X \subseteq E, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$
 getwistetes Mengensystem
- $\mathcal{F} \Delta \mathbf{e}$: $\{Y \Delta e \mid Y \in \mathcal{F}\}, e \in E, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$
- $\mathcal{F}_2 \hookrightarrow \mathcal{F}_1$: $\sigma_{\mathcal{F}_1}(X) = X \Rightarrow \sigma_{\mathcal{F}_2}(X) = X$
 starkes Abbild

- $\mathcal{U}_{\mathbf{x}}(\mathcal{F})$: $\bigcup_{e \in X} \mathcal{F} \Delta e$
 Twistvereinigung
- \mathbf{R}^S : $\{(x_j)_{j \in S} \mid x_j \in R\}$, $|S| < \infty$, $R \subseteq \mathbb{R}$
 Vektorraum
- $\mathbf{0}_S \in \mathbf{R}^S$: $(x_j)_{j \in S}$ mit $x_j = 0 \forall j \in S$, $0 \in R$
 Nullvektor
- $\mathbf{1}_S \in \mathbf{R}^S$: $(x_j)_{j \in S}$ mit $x_j = 1 \forall j \in S$, $1 \in R$
 Einsvektor
- \mathbf{e}_i : $(e_{i,j})_{j \in S} \{0, 1\}^S$, $e_{i,j} = 1 \Leftrightarrow i = j$, $i \in S$
 i -ter Einheitsvektor in \mathbb{R}^S
- $\mathbf{i}(\mathbf{X})$: $x \in \{0, 1\}^S$, $x_j = 1 \Leftrightarrow j \in X$, $X \subseteq S$
 Inzidenzvektor zu X
- $\mathbf{i}(\mathcal{F})$: $\{i(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$, $F \subseteq \mathcal{P}(E)$
 Inzidenzvektormenge zu \mathcal{F}
- $\mathbf{I}(\mathbf{x})$: $\{j \in S \mid x_j = 1\}$, $x \in \{0, 1\}^S$
 Inzidenzmenge zu x
- $\mathbf{I}(\mathbf{C})$: $\{I(x) \mid x \in C \cap \{0, 1\}^S\}$, $C \subseteq R^S$
 Inzidenzmengensystem zu C
- $\mathbf{c}(\mathbf{X})$: $\sum_{x \in X} c(x)$, $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq E$, $c(\emptyset) = 0$
 Gewicht der Menge X bezüglich c
- $\mathbf{x}(\mathbf{X})$: $\sum_{j \in S} x_j$, $x \in R^S$, $X \in 2^S$
 Vektorabbildung $x : 2^S \longrightarrow R$

- $\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$: $\sum_{j \in X} x_j - \sum_{j \in Y} x_j$, $x \in R^S$, $(X, Y) \in 3^S$
 Vektorabbildung $x : 3^S \rightarrow R$
- $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow R$, $x \in \Omega$
 Summe von Abbildungen $f_1 + f_2 : \Omega \rightarrow R$
- $\lambda \mathbf{f}$: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $f : \Omega \rightarrow R$, $x \in \Omega$, $\lambda \in R$
 skalar multiplizierte Abbildung $\lambda f : \Omega \rightarrow R$
- $\mathbf{f} + \theta$: $(f + \theta)(x) = f(x) + \theta$, $f : \Omega \rightarrow R$, $x \in \Omega$, $\theta \in R$
 um Konstante verschobene Abbildung $f + \theta : \Omega \rightarrow R$
- $\mathbf{x}|_T$: $(x_j)_{j \in T}$, $(x_j)_{j \in S} \in R^S$, $T \subseteq S$
 Projektion von x auf R^T
- $\mathbf{C}|_T$: $\{x|_T \mid x \in C\}$, $C \subseteq R^S$
 Projektion von C auf R^T
- $\mathbf{co}(\mathbf{U})$: $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x, y \in U, 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $U \subseteq R^S$
 konvexe Hülle
- $\mathbf{U} + \mathbf{y}$: $\{x \in R^S \mid x = y + z, z \in U\}$, $U \subseteq R^S$, $y \in R^S$
 Translation um y
- $\mathbf{H}(\mathbf{U})$: $\{x \in \mathbb{R}_+^S \mid \exists y \in U \forall j \in S \ x_j \leq y_j\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^S$
 positiver Abschluss
- $\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$: $(\phi_A(x))_{j \in S}$, $\phi_A(x)_j := \begin{cases} -x_j & \text{für } j \in A \\ x_j & \text{sonst} \end{cases}$, $A \subseteq S$
 Spiegelung von $x \in R^S$ an \mathbb{R}^A
- $\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{U})$: $\{\phi_A(x) \mid x \in U\}$, $U \subseteq R^S$, $A \subseteq S$
 Spiegelung von U an \mathbb{R}^A
- $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$: $\forall j \in S \ x_j \geq y_j$, $x, y \in R^S$

$$\mathbf{U} \geq \mathbf{y} : \forall_{x \in U} x \geq y, U \subseteq \mathbb{R}^S, y \in \mathbb{R}^S$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] : \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}, b > a$$

Intervall von a nach b

$$\mathbf{P}(\mathbf{f}) : \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall_{Y \subseteq E} x(Y) \leq f(S)\}$$

Polyeder zu $f : 2^E \rightarrow \mathbb{R}_+, f(\emptyset) = 0$

$$\mathbf{B}(\mathbf{f}) : \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall_{S \subseteq E} \sum_{i \in S} x_i \leq f(S), x(E) = f(E) \right\}$$

Basis-Polyeder zu $P(f)$

$$\mathbf{P}^\Delta(\mathbf{f}) : \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{(X,Y) \in 3^E} x(X,Y) \leq f(X,Y)\}$$

Δ -Polyeder zu $f, f : 3^E \rightarrow \mathbb{R}, f(\emptyset, \emptyset) = 0$

$$\zeta : \text{erfolgreich herbeigeführter Widerspruch}$$

Literaturverzeichnis

- [BB92] V. Bryant and P. Brooksbank. Greedy algorithm compatibility and heavy-set structures. *European Journal of Combinatorics*, 13:81–86, 1992.
- [BC95] A. Bouchet and W. H. Cunningham. Delta-matroids, Jump Systems and Bisubmodular Polyhedra. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8(1):17–32, 1995.
- [BD88] T. H. Brylawski and E. Dieter. Exchange systems. *Discrete Mathematics*, 69(2):123–151, 1988.
- [Ber85] C. Berge. *Graphs*, volume 6, pt. 1 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland, 2nd revised edition, 1985.
- [Bir35] G. Birkhoff. Abstract linear dependence in lattices. *American Journal on Mathematics*, 57:800–804, 1935.
- [Bir67] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume 25 of *Colloquium Publications*. American Math. Society, 1967.
- [Bjö85] A. Björner. On matroids, groups and exchange languages. In L. Lovász and A. Recski, editors, *Matroid Theory*, volume 40 of *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, pages 25–60. North-Holland, Bolyai, 1985.
- [BJ00] A. Bouchet and B. Jackson. Parity systems and the delta matroid intersection problem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 7(1), 2000.
- [Bol79] B. Bollobás. *Graph theory. An introductory course*, volume 63 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

- [Bou87] A. Bouchet. Greedy algorithm and symmetric matroids. *Math. Programming*, 38:147–159, 1987.
- [Bou89] A. Bouchet. Matchings and δ -matroids. *Discrete Mathematics*, 24:55–62, 1989.
- [BS99] V. Bryant and I. Sharpe. Gaussian, strong and transversal greedoids. *European Journal of Combinatorics*, 20:259–262, 1999.
- [BVS⁺99] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented matroids*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1999.
- [BZ92] A. Björner and G. M. Ziegler. Introduction to greedoids. In N. White, editor, *Matroid Applications*, chapter 8, pages 284–357. Cambridge University Press, 1992.
- [CD73] P. Crawley and R. P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1973.
- [Chr85] N. Christofides. Vehicle routing. In [LLKS85], pages 431–448. 1985.
- [CK88] R. Chandrasekaran and S. N. Kabadi. Pseudomatroids. *Discrete Math.*, 71:205–217, 1988.
- [Cun02] W. H. Cunningham. Matching, matroids, and extensions. *Mathematical Programming B*, 91:515–542, 2002.
- [Dil40] R. P. Dilworth. Lattices with unique irreducible decompositions. *Annals of Mathematics*, 41:771–777, 1940.
- [Dil61] R. P. Dilworth, editor. *Lattice theory*, volume II of *Proceedings of symposia in pure mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1961.
- [DIW72] F. D. J. Dunstan, A. W. Ingleton, and D. J. A. Welsh. Supermatroids. In D. J. A. Welsh and D. Woodall, editors, *Combinatorics*, pages 72–122. Institute of Math. and its Applications, 1972.
- [DW73] F. D. J. Dunstan and D. J. A. Welsh. A greedy algorithm for solving a certain class of linear programmes. *Math. Programming*, 5:338–353, 1973.

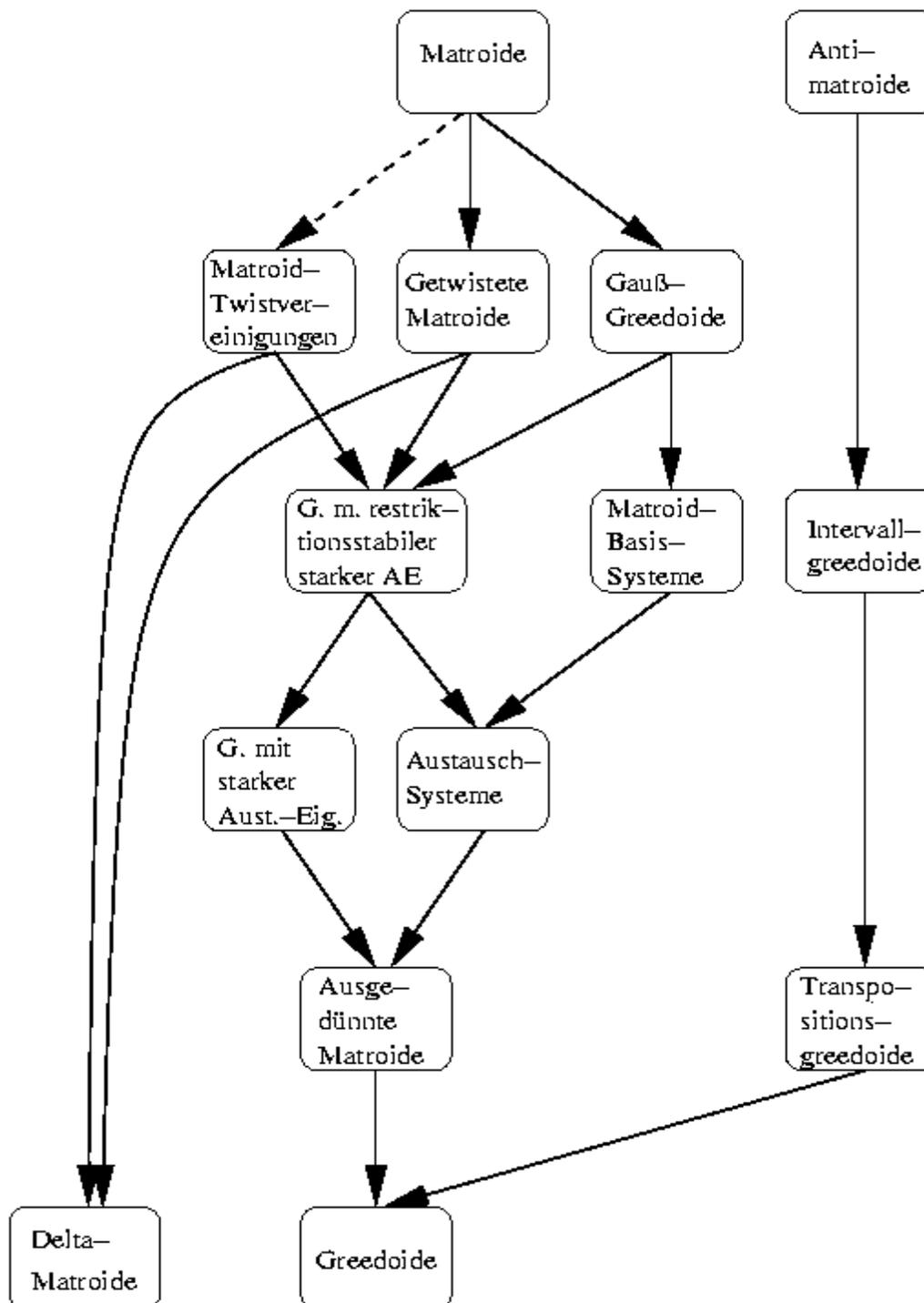
- [Ede86] P. H. Edelman. Abstract convexity and meet-distributive lattices. *Contemporary Mathematics*, 57:127–150, 1986.
- [Edm70] J. Edmonds. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. In *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, pages 69–87, 1970.
- [Edm79] J. Edmonds. Matroid intersection. *Annals of Discrete Mathematics*, 4:39–49, 1979.
- [EG77] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:185–204, 1977.
- [EJ85] P. H. Edelman and R. Jamison. The theory of convex geometries. *Geom. Dedicata*, 19:247–270, 1985.
- [Fai79] U. Faigle. The greedy algorithm for partially ordered sets. *Discrete Mathematics*, 28:153–159, 1979.
- [Fai80] U. Faigle. Geometries on partially ordered sets. *Journal of Combinatorial Theory B*, 28:26–51, 1980.
- [Fai87] U. Faigle. Matroids in combinatorial optimization. In N. White, editor, *Combinatorial geometries*, volume 29 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, chapter 9, pages 161–210. Cambridge University Press, 1987.
- [Fis94a] M. L. Fisher. Optimal solution of vehicle routing problems using minimum k-trees. *Operations Research*, 42(4):626–642, 1994.
- [Fis94b] M. L. Fisher. A polynomial algorithm for the degree constrained k-tree problem. *Operations Research*, 42(4):775–779, 1994.
- [Fra81] A. Frank. A weighted matroid intersection algorithm. *Journal of Algorithms*, 2:337–347, 1981.
- [Fuj91] S. Fujishige. *Submodular Functions and Optimization*, volume 47 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1991.
- [Gal68] D. Gale. Optimal assignments in an ordered set: an application of matroid theory. *Journal of Combinatorial Theory*, 4:176–180, 1968.

- [GGK00] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, and A. Kapoor. The excluded minors for $\text{GF}(4)$ -representable matroids. *Journal of Combinatorial Theory B*, 79:247–299, 2000.
- [GIM03] F. Geelen, S. Iwata, and K. Murota. The linear delta-matroid parity problem. *Journal of Combinatorial Theory B*, 88:377–398, 2003.
- [GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers And Intractability*. W. H. Freeman And Company, 1979.
- [Goe86] O. Goecke. *Eliminationsprozesse in der kombinatorischen Optimierung - ein Beitrag zur Greedoidtheorie*. Dissertation, Universität Bonn, 1986.
- [Goe88] O. Goecke. A greedy algorithm for hereditary set systems and a generalization of the Rado-Edmonds characterization of matroids. *Discrete Applied Mathematics*, 20:39–49, 1988.
- [GP79] F. R. Giles and W. R. Pulleyblank. Total dual integrality and integer polyhedra. *Linear Algebra and Applications*, 25:191–196, 1979.
- [GT84] H. N. Gabow and R. E. Tarjan. Efficient algorithms for a family of matroid intersection problems. *Journal of Algorithms*, 5(1):80–131, 1984.
- [HK70] M. Held and R. M. Karp. The travelling salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18:1138–1162, 1970.
- [HK71] M. Held and R. M. Karp. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming*, 1:6–25, 1971.
- [KC90] S. N. Kabadi and R. Chandrasekaran. On totally dual integral systems. *Discrete Applied Mathematics*, 26(1):87–104, 1990.
- [KL81] B. Korte and L. Lovász. Mathematical structures underlying greedy algorithms. In F. Gécseg, editor, *Fundamentals of Computation Theory*, volume 117 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 205–209. Springer-Verlag, 1981.
- [KL83] B. Korte and L. Lovász. Structural properties of greedoids. *Combinatorica*, 3(3):359–374, 1983.

- [KL84a] B. Korte and L. Lovász. Greedoids - a structural framework for the greedy algorithm. In W. R. Pulleyblank, editor, *Proceedings of the Silver Jubilee Conference on Combinatorial Mathematics*, Progress in combinatorial optimization, pages 221 – 243. Academic Press, 1984.
- [KL84b] B. Korte and L. Lovász. Greedoids and linear objective functions. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 5:229–238, 1984.
- [KLS91] B. Korte, L. Lovász, and R. Schrader. *Greedoids*. Springer Verlag, Heidelberg, 1991.
- [Kru56] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:48–50, 1956.
- [Kun78] J. P. S. Kung. Bimatroids and invariants. *Advances in Mathematics*, 30:238–249, 1978.
- [Law75] E. L. Lawler. Matroid intersection algorithms. *Mathematical Programming*, 9:31–56, 1975.
- [LLKS85] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys, editors. *The traveling salesman problem*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [Lov80] L. Lovász. Matroid matching and some applications. *Journal of Combinatorial Theory B*, 28:208–236, 1980.
- [Lov83] L. Lovász. Submodular functions and convexity. In A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte, editors, *Mathematical Programming - The State of the Art*, pages 235–257. Springer, 1983.
- [Mar99] R. K. Martin. *Large Scale Linear and Integer Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [MF90] K. Malik and M. L. Fisher. A dual ascent algorithm for the 1-tree relaxation of the symmetric traveling salesman problem. *Operations Research Letters*, 9(1):1–7, 1990.
- [Nak88] M. Nakamura. A characterization of greedy sets: Universal polymatroids (I). *Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo*, 38:155–167, 1988.

- [Nak93] M. Nakamura. Delta-polymatroids and an extension of Edmonds-Giles' TDI scheme. In G. Rinaldi and L. A. Wolsey, editors, *Proceedings of the 3rd Integer Programming and Combinatorial Optimization Conference, Erice, Italy, April 29 - May 1, 1993*, pages 401–412. CIACO, 1993.
- [Oxl92] J. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.
- [Qi88] L. Qi. Directed submodularity, ditroids and directed submodular flows. *Mathematical Programming* 42, 42:579–599, 1988.
- [Rad57] R. Rado. Note on independence functions. *Proc. London Mathematical Society*, 7:300–320, 1957.
- [Sch79] A. Schrijver. Matroids and linking systems. *Journal of Combinatorial Theory B*, 26:349–369, 1979.
- [Sch86] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [ST77] T. H. C. Smith and G. L. Thompson. A LIFO implicit enumeration search algorithm for the symmetric traveling salesman problem using held and karp's 1-tree relaxation. In P. L. Hammer, E. L. Johnson, B. H. Korte, and G. L. Nemhauser, editors, *Studies in Integer Programming*, volume 1 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 479–493. North-Holland, 1977.
- [Tut58] W. Tutte. Matroids and graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:527–552, 1958.
- [vdW71] B. L. van der Waerden. *Algebra I*. Springer-Verlag, eighth edition, 1971.
- [VJ82] T. Volgenant and R. Jonker. A branch and bound algorithm for the symmetric traveling salesman problem based on the 1-tree relaxation. *European Journal of Operational Research*, 9:83–89, 1982.
- [VJ83] T. Volgenant and R. Jonker. The symmetric traveling salesman problem and edge exchanges in minimal 1-trees. *European Journal of Operational Research*, 12:394–403, 1983.
- [Wel76] D. J. A. Welsh. *Matroid Theory*. Academic Press, London, 1976.

- [Whi35] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal on Mathematics*, 57:509–533, 1935.
- [Whi86] N. White, editor. *Theory of Matroids*. Cambridge University Press, 1986.



Inklusions-Diagramm der Mengensysteme

Zusammenfassung

Das Twisten von Matroiden steht für das Versammeln der symmetrischen Differenzen aller Matroid-Mengen mit einer vorgegebenen Teilmenge der Grundmenge, die Matroide dabei im Kontext der Mengensysteme interpretierend. In dieser Arbeit werden die so entstehenden Mengensysteme eingehend untersucht, samt einiger Derivate und beschreibender Funktionen. Ein Schwerpunkt besteht in der Einordnung der getwisteten Matroide in ein Gefüge von bekannten Greedoid-Klassen, beschränkt hier auf Systeme, die auf ungeordneten Mengen basieren und eine Affinität zu Greedy-Algorithmen bezüglich linearer Optimierung aufweisen. Diese Beziehungen werden beschrieben und die Klassen voneinander abgegrenzt.

Zusätzlich wird eine Greedoid-Eigenschaft hervorgehoben, die die Bildung einer weiteren Klasse rechtfertigen soll, mit der Begründung, dass diese Systeme, falls sie gleichzeitig Δ -Matroide sind, die lineare Optimierung einem hier dargelegten Greedy-Algorithmus anvertrauen dürfen. Dieser benötigt lediglich das gewöhnliche Mengensystem-Orakel, um in polynomiell vielen Zeitschritten, abhängig von der Größe der Grundmenge, erfolgreich zu sein.

In diese Klasse gehören neben den getwisteten Matroiden auch die Matroid-Twistvereinigungen, die hier vorgestellt und diesbezüglich untersucht werden. Das Auftreten dieser Konstrukte im Rahmen des Traveling-Salesman-Problems und des verwandten Vehicle-Routing-Problems wird beschrieben.

Ein Exkurs in die Polyedertheorie beinhaltet den Nachweis, dass der von Dunstan und Welsh vorgestellte verallgemeinerte Polymatroid-Algorithmus eine Charakterisierung bisubmodularer Polyeder bereitstellt. Dabei kommt der Spiegelung, als Vektorraum-Analogon zum Twisten, eine Funktion zu, die auch zu weiteren Beschreibungen für Δ -Matroide führt.

Twisting Matroids

Twisting matroids means collecting the symmetric differences of all the sets in a matroid with a previously fixed subset of the ground set, thereby interpreting matroids in the context of set systems. In this thesis the set systems arising this way are extensively examined including some derivations and depicting functions. A main focus lies in the classification of twisted matroids inside a framework of well-known greedoid classes. We restrict ourselves to systems which are based on unordered sets and show some affinity to greedy algorithms regarding linear optimization. The relations are described and the classes are dissociated one from another.

In addition, a special property of greedoids is stressed, which justifies the introduction of a new class, on the basis that these systems, if they are at the same time Δ -matroids, can leave linear optimization to a greedy algorithm. This algorithm only needs the ordinary set system oracle to succeed in polynomial many time steps, dependent on the size of the ground set.

Aside from the twisted matroids, which belong to the class, this also holds for matroid twistunions, which are presented and analyzed in this respect. The occurrence of these objects within the scope of the traveling salesman problem and the related vehicle routing problem is described.

An excursion into the theory of polyhedra contains the proof that the generalized polymatroid algorithm presented by Dunstan and Welsh provides a characterization of bisubmodular polyhedra. There, the concept of reflection, being the vector space analogon of twisting, plays a role that leads to further descriptions of Δ -matroids.

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbstständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Schrader betreut worden.

Köln, 15. September 2003

Markus Kloock

Lebenslauf

Am **21.12.1967** wurde ich in **Euskirchen** als Sohn von Ursula und Eugen Kloock **geboren**. 1971 kam mein Bruder Guido zur Welt.

Von **1974 bis 1978** besuchte ich die Hermann-Josef-**Grundschule** in Euskirchen.

Von **1978 bis 1980** lernte ich dort am Emil-Fischer-**Gymnasium**.

Von **1980 bis 1987** war ich Schüler des Staatlichen Gymnasiums in **Lahnstein**, das ich mit dem **Abitur** verließ.

Meiner **deutschen Staatsangehörigkeit** wegen verbrachte ich die Zeit von 1987 bis 1988 mit dem Grundwehrdienst in Diez an der Lahn.

1988 bis 1996 studierte ich **Mathematik** an der Universität zu **Köln** mit den Nebenfächern Betriebswirtschaftslehre im Grundstudium bzw. Informatik im Hauptstudium. Meine Abschlussarbeit, die zum **Diplom** führte, wurde dem Gebiet der Analytischen Zahlentheorie zugerechnet. Nebenher war ich vier Jahre lang als Übungsgruppenleiter am Mathematischen Institut beschäftigt.

1996 und **1997** arbeitete ich freiberuflich für die Firma Canfor GmbH an der Installation einer Internet-Firewall für das Rechenzentrum der Universitätsklinik Bonn und für die Firma **Euro-Tec** GmbH wirkte ich an der **Programmierung** des Börsenanalyseprogramms ProChart mit.

Von **1997** bis heute war ich als **wissenschaftlicher Mitarbeiter** am **Zentrum für angewandte Informatik** der Universität zu Köln beschäftigt. Dort arbeitete ich an einem Projekt zur virtuellen Lehre mit, befasste mich mit der Dienstschnittplanung für Straßenbahnfahrer und forschte im Bereich der **Kombinatorischen Optimierung**.