

**Das Eigenwertproblem zum p -Laplace
Operator für p gegen 1**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

Vorgelegt von
Vladislav Fridman
aus Charkow

Köln 2003

Berichtersteller: Prof. Dr. B. Kawohl
HD F. Schuricht

Tag der mündlichen Prüfung: 18.11.2003

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung, Abstract	4
1. Einleitung	5
2. Eigenschaften der 1.Eigenfunktion	8
3. Das Problem (2) im eindimensionalen Fall	10
4. Funktionen von beschränkter Variation	13
5. Cheegersche Konstante	16
5.1 Berechnung der Cheegerschen Konstante für Hantelgebiete	21
6. Viskositätslösungen von (2)	32
7. Das Problem (2) für Kugelgebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 1$.	36
8. Konvexes Rearrangement	43
9. Der Fall konvexer Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^N$	45
10. Numerische Berechnungen der Lösungen von (2) für $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$	51
Abbildungsverzeichnis	61
Literatur	62

Zusammenfassung

Ich zeige, dass der 1. Eigenwert für den p -Laplace Operator für p gegen 1 gegen die sogenannte Cheegersche Konstante $h(S)$ konvergiert. Die zugehörige Eigenfunktion $u(p)$ konvergiert dabei gegen die charakteristische Funktion eines Cheegerschen Gebietes, d.h. eines Teilgebietes von S , welches unter allen einfach zusammenhängenden, kompakt in S enthaltenden Gebieten D den Quotienten $\text{Perimeter}(D)/\text{Volumen}(D)$ minimiert. Es wird das Cheegersche Gebiet für die Spezialfälle: Kugel, Quadrat, ebenes Hantelgebiet ermittelt. Ich zeige, dass für konvexe S das Cheegersche Gebiet ebenfalls konvex ist. Anschliessend wird die erste Eigenfunktion des p -Laplace Operators auf einem Quadrat numerisch berechnet.

Abstract

I show that the first eigenvalue of the p -Laplace operator converges to the so-called Cheeger constant $h(S)$ as p tends to 1. The associated eigenfunction $u(p)$ converges to the characteristic function of the Cheeger set, i.e. a subset of S which minimizes the ratio $\text{Perimeter}(D)/\text{Volume}(D)$ among all simply connected domains D , which are compact subsets of the domain S . The Cheeger domain for a ball, square, plane barbell domain is determined. I show that for convex S the Cheeger domain is also convex. Finally there is a numerical study of the first eigenfunction of the p -Laplace operator on a square domain.

1 Einleitung

Es sei der Operator Δ_p definiert durch $\Delta_p u(x) = \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$. Dieser Operator ist positiv homogen vom Grade $(p-1)$, d.h. für alle positive Zahlen k gilt:

$$\Delta_p [ku(x)] = k^{p-1} \Delta_p u(x) .$$

Das zum Operator $-\Delta_p$ zugehörige Eigenwertproblem ist deshalb ebenso homogen. Die Differentialgleichung lautet

$$-\Delta_p u(x) = \lambda_p |u(x)|^{p-2} u(x) \quad , \quad (1)$$

und als Randbedingung sei

$$u(x) = 0 \quad (1a)$$

gewählt. Der Operator Δ_p wird p -Laplace-Operator genannt.

Definition 1 Eine Funktion $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_p \neq 0$, heißt EIGENFUNKTION von (1), (1a), falls

$$\int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx = \lambda_p \int_{\Omega} |u_p|^{p-2} u_p \varphi dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. Die dazugehörige reelle Zahl λ_p heißt EIGENWERT.

Der Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist dabei der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|\varphi\| = \left(\int_{\Omega} (|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

und $C_0^\infty(\Omega)$ ist die Klasse aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω . Der erste Eigenwert $\lambda_p = \lambda_p(\Omega)$ wird als die kleinste positive reelle Zahl definiert, für welche die Gleichung (1) eine nicht-triviale Lösung u_p besitzt. Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist cu_p ebenso eine Eigenfunktion, da der p -Laplace-Operator homogen ist.

Im Kapitel 2 wird gezeigt, dass eine erste Eigenfunktion u_p von (1), (1a), die dem ersten Eigenwert λ_p entspricht, existiert und ihr Vorzeichen nicht wechselt. Da $-u_p$ auch eine erste Eigenfunktion ist, betrachte ich nur positive Eigenfunktionen. Ich untersuche also das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p = \lambda_p |u_p|^{p-2} u_p & \text{in } \Omega \\ u_p \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u_p = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) und $1 < p < \infty$ ist. Die Ungleichung

$$u_p = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

in (2) verstehen wir in dem Sinne, dass der Spuroperator von u_p auf $\partial\Omega$ gleich Null ist. Mit Hilfe der Regularitätstheorie für elliptische Differentialgleichungen (siehe [LU]) kann man auch zeigen, dass die Eigenfunktionen u_p für (2) nach einer Umdefinition auf einer Menge vom Maß Null stetig gemacht werden können. In diesem Sinne versteht man auch die Ungleichung

$$u_p \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

in (2).

Über das Problem (2) wurden zahlreiche Arbeiten geschrieben. Es wurden auch mehrere Eigenschaften des Laplace-Operators (für $p = 2$) auf den allgemeinen Fall $p > 1$ übertragen. Für das Problem (2) wird in dieser Arbeit das Verhalten der Eigenwerte λ_p sowie Eigenfunktionen u_p für $p \rightarrow 1$ untersucht. Wegen der Nichteindeutigkeit der Eigenfunktionen werden sie normiert durch

$$\int_{\Omega} u_p(x) dx = 1$$

Der Fall $p \rightarrow \infty$ wurde in [L] untersucht. Bei $p < 2$, wie man aus der Definition von $\Delta_p u$ sehen kann, wird der Operator dort singulär oder entartet, wo $|\nabla u(x)|$ verschwindet oder unendlich gross wird.

Wenn wir formal den Limes $\lim_{p \rightarrow 1} (-\Delta_p u)$ in Punkten berechnen, in denen $|\nabla u| > 0$ ist, erhalten wir den Operator der mittlerer Krümmung einer Niveaufäche von u :

$$H = -\Delta_1 u = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Aussage von Theorem 34, dass $\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p(\Omega) = h(\Omega)$ und $\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p(x) = \chi_{\omega}(x)$, wobei $h(\Omega)$ und ω durch die Geometrie von Ω bestimmt sind.

Der p -Laplace-Operator findet in verschiedenen Gebieten der Physik Anwendung, z.B. bei der Untersuchung nicht-Newtonischer Flüssigkeiten: dilatanten Flüssigkeiten (für $p > 2$), pseudoplastischer Flüssigkeiten (für $p < 2$), in nicht linearen Diffusionsproblemen, Flüssen durch poröse Medien, sowie in der Plasmaphysik (siehe [Di]).

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert.

In Sektion 2 zitiere ich bekannte Eigenschaften über Lösungen von (2) im n -dimensionalen und in Sektion 3 im eindimensionalen Fall. Numerische Resultate zum eindimensionalen Fall belegen, dass $\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p$ unstetig ist. Daher führen wir in Sektion 4 Funktionen beschränkter Variation als geeignete Lösungsklasse für das Limesproblem ein.

In Sektion 5 werden die Konvergenz von λ_p gegen die Cheegersche Konstante $h(\Omega)$ gezeigt und das Cheegersche Gebiet ω für die Spezialfälle Ω =Kugel, Ω =Quadrat und Ω =ebenes Hantelgebiet ermittelt.

Um die Konvergenz der Eigenfunktionen gegen χ_ω nachzuweisen, benötigen wir die Definition und Eigenschaften von Viskositätslösungen, die in Sektion 6 bereitgestellt werden. Sektion 7 behandelt dann den Fall n -dimensionaler Kugelgebiete (als Spezialfall von Theorem 34). Für die Untersuchung der Eigenfunktionen in konvexen Gebieten wird in Sektion 8 der Begriff "konvexes Rearrangement" eingeführt. In Sektion 9 wird die Konvexität der Cheegerschen Gebiete und die Konvergenz der Eigenfunktionen gegen χ_ω gezeigt.

Anschliessend werden in Sektion 10 Eigenfunktionen des p -Laplace Operators auf einem Quadrat numerisch berechnet.

Zunächst liste ich einige bekannte Eigenschaften der ersten Eigenfunktion auf, die bei der weiteren Untersuchung von Bedeutung sind.

2 Eigenschaften der 1.Eigenfunktion

Die erste Eigenfunktion $u_p(x)$ und der erste Eigenwert von (1), (1a) für $p \in (1, \infty)$ sind die Lösungen des Minimierungsproblems

$$\lambda_p(\Omega) := \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx}{\int_{\Omega} |v|^p dx}, \quad (3)$$

wobei $u_p(x)$ der Minimierer von (3) ist (siehe [L]). Das Funktional auf der rechten Seite von (3) nennt man Rayleigh-Quotient.

Lemma 2 *In jedem beschränkten Gebiet ist der erste Eigenwert von (2) positiv, einfach und isoliert.*

Beweis. Siehe den Artikel [L]. ■

Lemma 3 *Die erste Eigenfunktion $u(x)$ von (2) ist in Ω strikt positiv.*

Beweis. In [L] wurde gezeigt, dass die erste Eigenfunktion $u(x)$ von (2) ihr Vorzeichen nicht wechselt. Für die Funktion $u(x)$ gilt die Harnacksche Ungleichung [Tr], d.h. es existiert eine positive Konstante C , so dass

$$\max_{B_r} u \leq C \min_{B_r} u, \quad ,$$

wenn $B_{2r} \subset \Omega$ ist. Hier sind B_r und B_{2r} konzentrische Kugeln mit den Radien r und $2r$. Die Konstante C hängt nur von N und p ab. Aus der Harnackschen Ungleichung folgt, dass $u(x)$ in Ω positiv sein muß (der Fall $u \equiv 0$ ist laut Definition der Eigenfunktion nicht möglich). ■

Bemerkung 4 *Man kann sogar eine stärkere Aussage zeigen: jede positive Eigenfunktion ist immer die erste Eigenfunktion [L].*

Über die Regularität von $u_p(x)$ weiß man, dass $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ und dass der Höldersche Exponent α nur von n und p abhängt [L].

Lemma 5 *Für jede Eigenfunktion $u(x)$ von (2) in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ gilt folgende Abschätzung*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4^N \lambda_p^{\frac{N}{p}} \|u\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4)$$

Beweis. Den Beweis dieses Lemmas findet man in [L]. ■

In [H] wurde folgende Abschätzung für die Eigenwerte von (2) gezeigt:

Theorem 6 Sei $p > 1$ und $B_\tau(x_0)$ eine Kugel in Ω mit dem Radius τ . Dann ist

$$\lambda_p \leq \frac{(N+p) \cdot \dots \cdot (p+1)}{N! \tau^p}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Eigenfunktion, die mehrmals in dieser Arbeit verwendet wird, ist die folgende:

Theorem 7 Sei $u_p(x)$ eine positive Eigenfunktion von (2) und Ω ein beschränktes konvexes Gebiet. Dann ist die Funktion $\log u_p$ konkav.

Beweis. Die Aussage wurde von S.Sakaguchi in [S] bewiesen. ■

Für eine Kugel kann man auch eine stärkere Konkavitätseigenschaft beweisen. Das wird im Kapitel 7 gemacht.

Hier muß man darauf hinweisen, dass die Funktion u_p selber niemals konkav ist, außer im eindimensionalen Fall [L].

Zunächst werden wir das Problem (2) im eindimensionalen Fall untersuchen.

3 Das Problem (2) im eindimensionalen Fall

Falls $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist, d.h. $\Omega = (a, b)$, sieht die Gleichung (1) so aus:

$$\left(|u_p'|^{p-2} u_p'\right)' + \lambda_p |u_p|^{p-2} u_p = 0 \quad (5)$$

und die Dirichlet-Randbedingung lautet $u_p(a) = u_p(b) = 0$.

Dort, wo u_p zweimal differenzierbar ist, können wir (5) auch schreiben als

$$(p-1) |u_p'|^{p-2} u_p'' + \lambda_p |u_p|^{p-2} u_p = 0 .$$

Da die Funktion u_p positiv ist, muss u_p'' negativ sein. Das heisst, falls u_p zweimal differenzierbar ist, ist u_p konkav.

In $[\hat{O}]$ wurde der erste Eigenwert λ_p für allgemeines p berechnet:

$$\lambda_p = (p-1) \left\{ \frac{2}{b-a} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \right\}^p = \frac{(2\pi)^p (p-1)}{(b-a)^p p^p \sin^p \frac{\pi}{p}}$$

Die Werte von λ_p für $a = 0$ und $b = 1$ sind in der Abbildung 1 mit *Maple* geplottet.

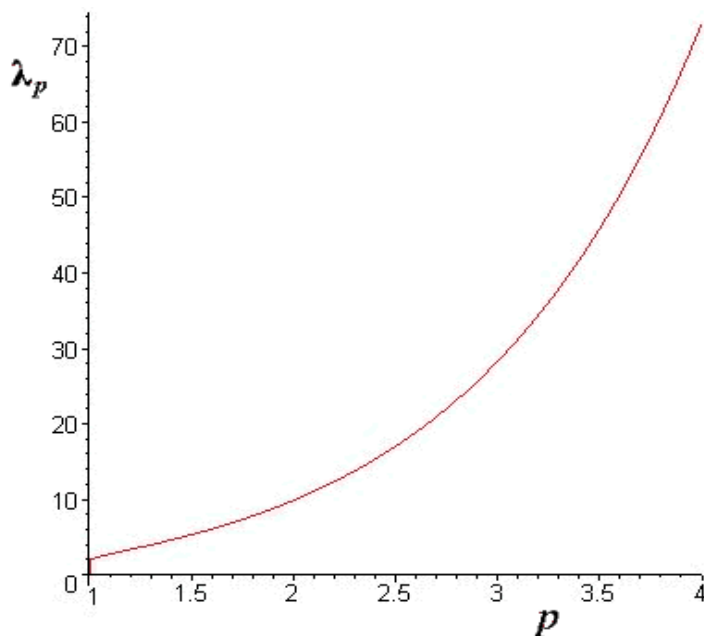


Abbildung 1: $\lambda_p(0, 1)$, $N = 1$.

Das gleiche monotone Verhalten von λ_p erhält man auch für 2-dimensionale Gebiete: $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $[0, 1] \times [0, 1]$ (siehe den Artikel [LW]). Ausserdem

gibt es folgenden Zusammenhang für λ_p für konjugierte p, q (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\sqrt[p]{\lambda_p} = \sqrt[q]{\lambda_q}$$

Mit Hilfe von *Matlab*, seiner Bibliothek "*Optimization Toolbox*" und der Methode der finiten Differenzen kann man die Lösungen von (5) approximieren und plotten. Für $a = 0$ und $b = 1$ betrachte ich dazu folgendes Minimierungsproblem

$$\min_{u \in W_0^{1,p}((0,1))} \int_0^1 |\nabla u|^p dx \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \int_0^1 |u|^p dx = 1 .$$

Ein Minimierer dieses Problems ist auch ein Minimierer von (3) für $\Omega = (0, 1)$.

```
%
% plap.m
%
% Minimierungsaufgabe
%
% durch Matlab-constr Funktion aus dem Optimization toolbox
% MATLAB Version 5.3.0.10183 (R11) auf SUN Solaris
% Eingabe:
u0 = [1 2 3 4 5 4 3 2 1];
options(1) = 1;
options(13) = 1;
p = 3/2;
u = constr('plap',u0,options,[],[],[],p)

% Der folgender Teil wird im File plap.m gespeichert:
% die Variablen val, con speichern dabei den Annäherungswert von  $\int_0^1 |\nabla u|^p dx$ 
% bzw.  $\int_0^1 |u|^p dx$  .
function [val,con] = plap(u,p)
n = length(u);
h = 1/(n+1);
du = diff(u);
val = h^(1-p)*(abs(u(1))^p + sum(abs(du).^p) + abs(u(n))^p);
con = h*abs(u(1))^p/(p+1) - 1;
x = 0:h/100:h-h/100;
for j=1:n-1,
```

```

y = (u(j)-u(j+1))*x/h + u(j+1);
y = abs(y).^p;
con = con + sum(y)*h/100;
end
con = con + h*abs(u(n))^p/(p+1);

```

Die Eingabe von verschiedenen Werten von p ergibt dann folgendes Bild:

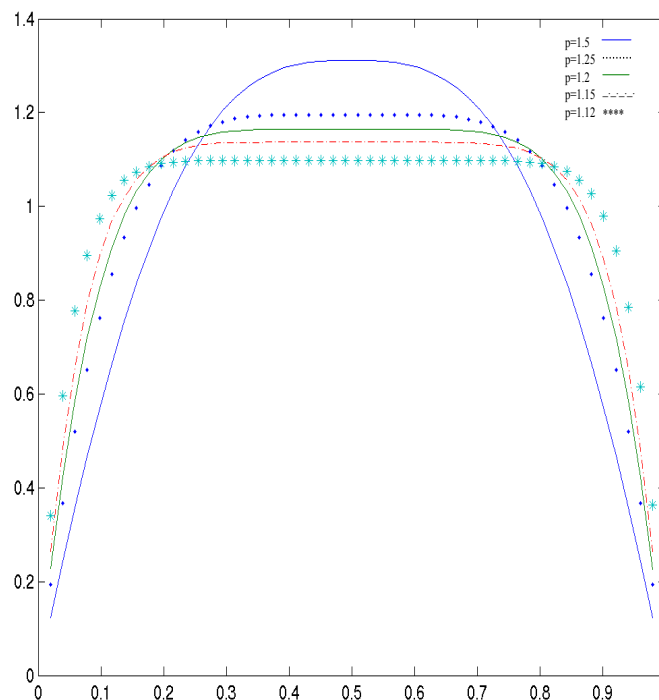


Abbildung 2: u_p auf $(0, 1)$

Die numerische Berechnungen suggerieren, dass $\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p(x) = 1$ für alle $x \in (0, 1)$ ist. Dies werden wir im Kapitel 7 beweisen. Gleichzeitig wird deutlich, dass $\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p(x)$ wegen Dirichlet-Randwerten von $u_p(x)$ eine unstetige Funktion sein kann. Dies motiviert die Einführung des Raumes $BV(\Omega)$ im nächsten Kapitel.

4 Funktionen von beschränkter Variation

Definition 8 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $f \in L^1(\Omega)$. Definiere

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ und } |g(x)| \leq 1 \text{ für } x \in \Omega \right\}.$$

Definition 9 Die Menge der Funktionen $\varphi \in L^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft $\int_{\Omega} |D\varphi| < \infty$ nennt man Funktionen der beschränkten Variation und bezeichnet sie mit $BV(\Omega)$. $\|\varphi\|_{BV(\Omega)} := \int_{\Omega} |\varphi| \, dx + \int_{\Omega} |D\varphi|$ ist eine Norm in $BV(\Omega)$.

Lemma 10 Sei $f \in W^{1,1}(\Omega)$. Dann ist $f \in BV(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx \quad ,$$

wobei $\nabla f = (f_1, \dots, f_N)$ und f_1, \dots, f_N verallgemeinerte Ableitungen von f sind.

Beweis. Dieses Lemma ist in [G] bewiesen. ■

Falls f die charakteristische Funktion eines beschränkten Gebietes ist, gilt folgendes Theorem:

Theorem 11 Es sei $E \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet von $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit dem C^2 -Rand. Für die charakteristische Funktion φ_E von E :

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

gilt dann

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| = H_{N-1}(\partial E) \quad ,$$

wobei $H_{N-1}(\partial E)$ das $(N-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß von ∂E ist.

Beweis. Dieses Lemma ist in [G] bewiesen worden. ■

Beim Beweis des Haupttheorems im Kapitel 9 werde ich aber das Theorem 11 mit schwächeren Voraussetzungen für die Regularität von E benötigen. Dazu benutze ich folgendes Theorem über die Fortsetzung der BV -Funktionen auf den ganzen \mathbb{R}^N :

Theorem 12 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene beschränkte Menge mit dem Lipschitz-Rand, $f_1 \in BV(\Omega)$ und $f_2 \in BV(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Definiere*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Omega \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} .$$

Dann gilt: $f \in BV(\mathbb{R}^N)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Df| = \int_{\Omega} |Df_1| + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |Df_2| + \int_{\partial\Omega} |f_1 - f_2| dH_{N-1}$$

Beweis. Dieses Theorem ist in [E] bewiesen. ■

Für die charakteristische Funktion von E kann man jetzt folgendes Theorem zeigen:

Theorem 13 *Es sei $E \subset \mathbb{R}^N$ eine offene beschränkte Menge mit lipschitzstetigem Rand. Dann ist*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D\varphi_E| = H_{N-1}(\partial E) . \quad (6)$$

Beweis. Ich benutze das Fortsetzungstheorem 12. Definiere die Funktionen $f_1 = 1$ auf E und $f_2 = 0$ auf $\mathbb{R}^N \setminus E$. Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in E \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von E und

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D\chi_E| = \int_{\partial E} dH_{N-1} = H_{N-1}(\partial E)$$

■

Für Funktionen der beschränkten Variation kann man folgende Coarea-Formel zeigen:

Theorem 14 *Sei $f \in BV(\Omega)$ und $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}$. Dann ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$: $\int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| < \infty$ und*

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| \right) dt .$$

Beweis. Dieses Theorem ist in [E] bewiesen.

■

Das folgende Theorem zeigt, dass die BV -Halbnorm $\int_{\Omega} |Df|$ unterhalbstetig ist.

Theorem 15 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $\{f_j\}$ eine Folge von Funktionen aus $BV(\Omega)$, die in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen eine Funktion f konvergieren. Dann gilt folgende Ungleichung:

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| \quad (7)$$

Beweis. Den Beweis findet man in [G, Satz 1.9]. ■

5 Cheegersche Konstante

Für ein beschränktes Gebiet Ω betrachten wir folgendes Minimierungsproblem

$$h(\Omega) := \inf_{\hat{\Omega}} \frac{|\partial\hat{\Omega}|}{|\hat{\Omega}|}, \quad (8)$$

wobei $\hat{\Omega}$ ein einfach zusammenhängendes, glatt berandetes Teilgebiet von Ω ist, welches den Rand $\partial\Omega$ nicht berührt. $|\partial\hat{\Omega}|$ und $|\hat{\Omega}|$ ist das $(N-1)$ - bzw. N -dimensionale Maß von $\partial\hat{\Omega}$ und $\hat{\Omega}$. Die Zahl $h(\Omega)$ nennt man CHEEGERSCHE KONSTANTE für das Gebiet Ω (siehe [C]) und eine Menge $\omega \subset \Omega$ mit der Eigenschaft

$$\frac{|\partial\omega|}{|\omega|} = h(\Omega)$$

ein CHEEGERSCHE GEBIET für Ω . Der Begriff wurde von J.Cheeger in seinem Artikel [Ch] für Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand eingeführt. In dieser Arbeit betrachte ich nur den Fall mit Rand. Nachfolgend werden Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Cheegerschen Gebiete untersucht.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) ein beschränktes Gebiet mit folgender Eigenschaft.

Definition 16 *Wir sagen, dass Ω die Großkreisbedingung (abgekürzt GK-BEDINGUNG) erfüllt, wenn es für eine größte Kugel $B_\Omega \subset \Omega$ einen Großkreis gibt, der eine Teilmenge von $\partial\Omega$ ist. Dabei ist ein Großkreis von B_Ω ein Schnitt von ∂B_Ω mit einer Hyperebene T_{B_Ω} , die durch das Zentrum von B_Ω geht.*

Definition 17 *Eine Borel-Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ hat endlichen Perimeter in Ω , falls die charakteristische Funktion χ_E eine Funktion ist, die zum Raum $BV(\Omega)$ gehört. Der Perimeter von E in Ω wird definiert durch $P(E, \Omega) := \int_{\Omega} |D\chi_E|$.*

Zwischen dem ersten Eigenwert für (2) und der Cheegerschen Konstante für Ω besteht folgender Zusammenhang:

Theorem 18 *Für jedes $p \in (1, \infty)$ gilt die Abschätzung (9) für den ersten Eigenwert von (2):*

$$\lambda_p(\Omega) \geq \left(\frac{h(\Omega)}{p} \right)^p \quad (9)$$

Beweis. Für $p = 2$ wurde die Abschätzung (9) von J.Cheeger gezeigt, daher kommt der Name für die Zahl $h(\Omega)$.

Das Theorem ist im Anhang von [LW] bewiesen und der Beweis wird hier wiedergegeben:

Nehmen wir eine positive Funktion $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ und setzen $A(t) := \{x \in \Omega \mid \omega(x) > t\}$. Aus der Coarea-Formel und dem Cavalierischen Prinzip folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \omega| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\partial A(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\partial A(t)|}{|A(t)|} |A(t)| dt \\ &\geq \inf_{\hat{\Omega}} \frac{|\partial \hat{\Omega}|}{|\hat{\Omega}|} \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)| dt = h(\Omega) \int_{\Omega} |\omega| dx . \end{aligned} \quad (10)$$

Da die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,1}(\Omega)$ liegt, gilt die Ungleichung (10) für jede Funktion $\omega \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Für jedes $p > 1$ nehmen wir eine beliebige Funktion $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und definieren $\Phi(v) := |v|^{p-1}v$. Die Höldersche Ungleichung ergibt dann

$$\int_{\Omega} |\nabla \Phi| dx = p \int_{\Omega} |v|^{p-1} |v| dx \leq p \|v\|_p^{p-1} \|\nabla v\|_p . \quad (11)$$

Deshalb ist $\omega = \Phi(v) \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Aus der Ungleichung (10) folgt

$$\int_{\Omega} |\nabla \Phi(v)| dx \geq h(\Omega) \int_{\Omega} |v|^p dx .$$

Insgesamt erhalten wir

$$h(\Omega) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \Phi(v)| dx}{\int_{\Omega} |v|^p dx} \leq \frac{p \|v\|_p^{p-1} \|\nabla v\|_p}{\int_{\Omega} |v|^p dx} = p \frac{\|\nabla v\|_p}{\|v\|_p} .$$

Da die Funktion $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ beliebig war, ist die Aussage des Theorems bewiesen. ■

Man sieht, dass die untere Schranke $\left(\frac{h(\Omega)}{p}\right)^p$ für den ersten Eigenwert für $p \rightarrow 1^+$ gegen die Cheegersche Konstante für Ω konvergiert. Wir zeigen jetzt mehr:

Theorem 19 Für $p \rightarrow 1^+$ konvergiert der erste Eigenwert gegen die Cheegersche Konstante $h(\Omega)$.

Beweis. Wir werden jetzt eine obere Schranke für $\lambda_p(\Omega)$ konstruieren, die auch gegen $h(\Omega)$ konvergiert und dann das Theorem 18 benutzen. Wir folgen einer Anregung von Kawohl und nehmen ein glatt berandetes Teilgebiet $D_k \subset\subset \Omega$ mit der Eigenschaft $\frac{|\partial D_k|}{|D_k|} - h(\Omega) \leq \frac{1}{k}$ und approximieren die charakteristische Funktion von D_k durch eine Funktion $v(x)$, für die gilt: $v \equiv 1$ auf D_k , $v \equiv 0$ ausserhalb einer ε -Umgebung von D_k und $|\nabla v| = \frac{1}{\varepsilon}$ in der ε -Schicht D_k^ε ausserhalb von D_k . Für genügend kleines ε ist $v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Einsetzen der Funktion in (3) ergibt:

$$\lambda_p(\Omega) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \frac{|D_k^\varepsilon|}{|D_k|}. \quad (12)$$

Da ∂D_k stetige Hauptkrümmungen hat, gilt (s. [Ha])

$$|D_k^\varepsilon| = \varepsilon |\partial D_k| + \varepsilon^2 P_{n-2}(\varepsilon), \quad (13)$$

wobei $P_{n-2}(\varepsilon)$ ein Polynom der Ordnung $(n-2)$ bezüglich ε ist, dessen Koeffizienten nur von ∂D_k abhängen. (12) und (13) ergeben dann

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p(\Omega) \leq \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{1}{\varepsilon^p} \frac{\varepsilon (|\partial D_k| + \varepsilon P_{n-2}(\varepsilon))}{|D_k|} = \frac{|\partial D_k| + \varepsilon P_{n-2}(\varepsilon)}{|D_k|} \quad (14)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$. Wenn wir in (14) zum Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$ und danach für $k \rightarrow \infty$ übergehen, erhalten wir

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p(\Omega) \leq h(\Omega). \quad (15)$$

Theorem 18 und Ungleichung (15) ergeben dann $\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p(\Omega) = h(\Omega)$. ■

Im folgenden berechnen wir die Cheegersche Konstante für einige Gebiete.

Beispiel 20 Falls Ω eine Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$ ist, so erhalten wir $h(\Omega) = \frac{N}{r}$. Denn bei einem gegebenen Perimeter bildet die Kugel mit demselben Perimeter das grösste Volumen. Deshalb ist die Cheegersche Konstante gleich

$$\inf_{B_{r_1}(0) \subset \Omega} \frac{N r_1^{N-1} |\omega_n|}{r_1^N |\omega_n|} = \frac{N}{r}.$$

Beispiel 21 Falls Ω ein Quadrat $(-a, a) \times (-a, a)$ ist, kann man das Cheegersche Gebiet ω als Vereinigung von Kugeln in \mathbb{R}^2 darstellen (siehe den Artikel [SZ]). Wie im Kapitel 9 gezeigt wird, ist das Cheegersche Gebiet für Ω konvex und eindeutig bestimmt. Es gibt deshalb folgende Möglichkeiten für das Gebiet ω :

(i) ω ist eine Kugel in Ω . Da der Cheegersche Quotient dann gleich $\frac{2}{r}$ ist, muß ω die grösste Kugel in Ω sein. Dabei ist $h(\Omega) = \frac{2}{a}$. Wie im Fall (ii) gezeigt wird, ist dieses Gebiet für das Problem (8) nicht optimal;

(ii) ω hat die Form:

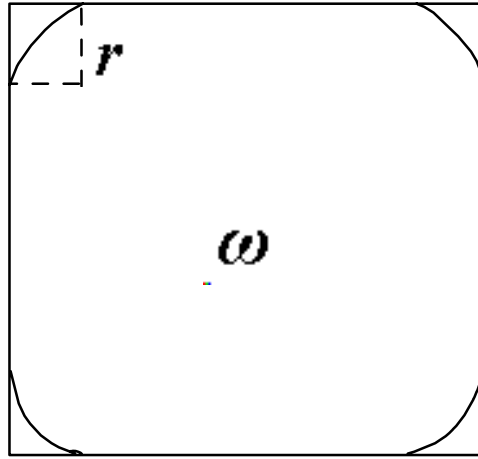


Abbildung 3: ω auf $(-a, a)^2$

Der Cheegersche Quotient für das Gebiet wie in der Abbildung 3 ist gleich:

$$\frac{4(2a - 2r) + 2\pi r}{(2a)^2 - 4(r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2)} = \frac{8(a - r) + 2\pi r}{4a^2 - (4 - \pi)r^2} =: f_a(r) \quad (16)$$

Jetzt muss die Funktion $f_a(r)$ minimiert werden. Berechne die Extrempunkte von $f_a(r)$:

$$\begin{aligned} f'_a(r) &= \frac{-8 + 2\pi}{4a^2 - (4 - \pi)r^2} + \frac{2(8a - 8r + 2\pi r)(4 - \pi)r}{(4a^2 - (4 - \pi)r^2)^2} \\ &= \frac{2(-4 + \pi)(4a^2 + 4r^2 - \pi r^2 - 8ra)}{(4a^2 - (4 - \pi)r^2)^2} \end{aligned}$$

Also hat die Funktion $f'_a(r)$ ihre Extrempunkte an der Stellen $r_1 = \frac{-4+2\sqrt{\pi}}{-4+\pi}a$ und $r_2 = \frac{-4-2\sqrt{\pi}}{-4+\pi}a$. Aus geometrischen Gründen kommt nur r aus dem Intervall $(0, a)$ in Betracht. Da $r_2 > a$, $r_1 \in (0, a)$ und

$$f''_a(r) = \frac{\pi(4 - \pi)^3(-2 + \sqrt{\pi})}{8a^3(\pi - 2\sqrt{\pi})^3} > 0,$$

wird der Cheegersche Quotient (16) für $r = \frac{-4+2\sqrt{\pi}}{-4+\pi}a \approx 0,53008a$ minimiert. Dabei ist

$$h(\Omega) = \frac{4 - \pi}{(4 - 2\sqrt{\pi})a} \approx \frac{1,88622}{a} .$$

Im Artikel [Ch] betrachtete J.Cheeger Hantelgebiete wie in der Abbildung 4:

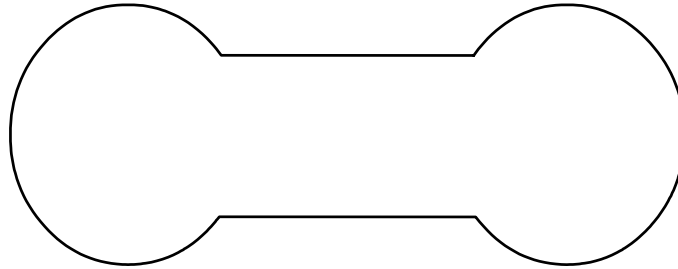


Abbildung 4: Hantelgebiet

Die zugehörige Cheegersche Konstante sowie ein entsprechendes Cheegersches Gebiet wurden aber nicht angegeben. Dies werde ich im folgenden Kapitel machen.

5.1 Berechnung der Cheegerschen Konstante für Hantelgebiete

Zunächst betrachte ich das Hantelgebiet, das nur aus zwei Kreisbögen besteht:

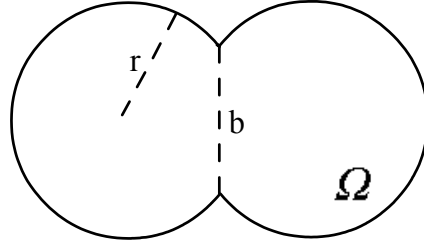
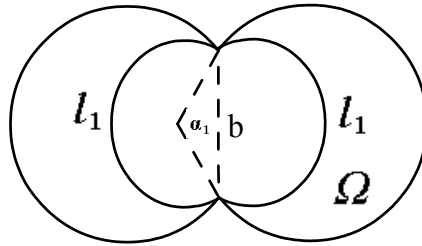


Abbildung 5

Im Artikel [SZ] wurde gezeigt, dass der Schnitt des Randes eines Cheegerschen Gebietes mit Ω nur aus Kreisbögen besteht. Jetzt werde ich alle möglichen Teilgebiete von Ω mit dieser Eigenschaft untersuchen und das Gebiet bestimmen, welches den minimalen Cheegerschen Quotienten hat. Es sind folgende Fälle möglich:

(i)



Betrachte das Gebiet, dessen Rand aus zwei Kreisbögen gleicher Länge l_1 besteht, so dass der Kreismittelpunkt für den linken Kreisbogen der Länge l_1 links von der Verbindungsstrecke b liegt und der Radius r_1 hat. Der Cheegersche Quotient für dieses Gebiet ist gleich

$$\begin{aligned} \frac{2l_1}{2s_1} &= \frac{(2\pi - a_1) r_1}{(2\pi - a_1) \frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{2} b r_1 \cos \frac{a_1}{2}} = \frac{2(2\pi - a_1)}{(2\pi - a_1) r_1 + b \cos \frac{a_1}{2}} \quad (17) \\ &= \frac{2(2\pi - a_1)}{(2\pi - a_1) \frac{b}{2 \sin \frac{a_1}{2}} + b \cos \frac{a_1}{2}} = \frac{4(2\pi - a_1) \sin \frac{a_1}{2}}{b(2\pi - a_1 + \sin a_1)}. \end{aligned}$$

Jetzt will ich den Quotienten

$$f(a_1) := \frac{(2\pi - a_1) \sin \frac{a_1}{2}}{(2\pi - a_1 + \sin a_1)}$$

aus (17) minimieren. Die Ableitung der Funktion f ist gleich

$$\frac{1}{2(2\pi - a_1 + \sin a_1)^2} * (-2 \sin \frac{a_1}{2} \sin a_1 + 4\pi^2 \cos \frac{a_1}{2} - 4\pi a_1 \cos \frac{a_1}{2} + 2\pi \cos \frac{a_1}{2} \sin a_1 + a_1^2 \cos \frac{a_1}{2} - a_1 \cos \frac{a_1}{2} \sin a_1 - 4\pi \sin \frac{a_1}{2} \cos a_1 + 2a_1 \sin \frac{a_1}{2} \cos a_1) .$$

Aus geometrischen Gründen sind für die Variable a_1 nur die Werte aus dem Intervall $(0, \pi)$ zulässig. Wie die folgenden numerischen Berechnungen mit Hilfe von Maple zeigen, ist die Funktion $f'(a_1)$ auf dem Intervall $(0, \pi)$ positiv:

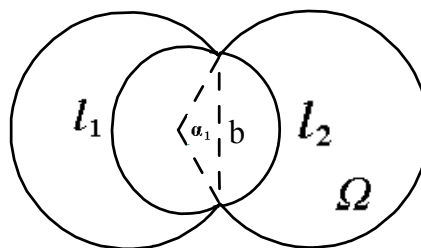
$$\begin{aligned} \text{bedingungen} := & \{ 0 < -2 \sin\left(\frac{al}{2}\right) \sin(al) + 4 \cos\left(\frac{al}{2}\right) \pi^2 - 4 \cos\left(\frac{al}{2}\right) \pi al \\ & + 2 \cos\left(\frac{al}{2}\right) \pi \sin(al) + \cos\left(\frac{al}{2}\right) al^2 - \cos\left(\frac{al}{2}\right) al \sin(al) \\ & - 4 \sin\left(\frac{al}{2}\right) \pi \cos(al) + 2 \sin\left(\frac{al}{2}\right) al \cos(al), 0 < al, al < \pi \} \end{aligned}$$

> l:=solve(bedingungen);

$$l := \{ al < \pi, 0 < al \}$$

Deswegen wird der Cheegersche Quotient für kleineres a_1 bzw. grösseres r_1 verringert. Deshalb ist das ganze Gebiet in diesem Fall optimal. Aus dem Beweis wird ersichtlich, dass das Gebiet, welches dem Wert $a_1 = \pi$ entspricht, auch nicht optimal sein kann. Denn die Gleichung (17) gilt auch für $a_1 = \pi$ und der Cheegersche Quotient als eine Funktion von a_1 ist in diesem Punkt stetig.

(ii)



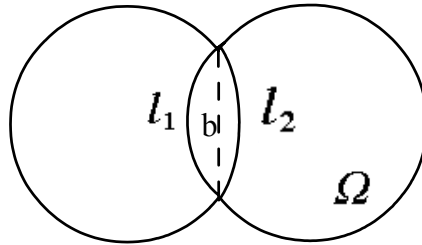
Hier haben wir die Situation wie in (i), nur der rechte Kreisbogen l_1 wird durch den kürzeren l_2 ersetzt. Es sei s_1 (bzw. s_2) die Fläche des

Gebietes, das durch l_1 (bzw. l_2) und die Verbindungsstrecke b abgegrenzt wird. Den Cheegerschen Quotienten kann man dann verringern, indem l_2 durch l_1 ersetzt wird:

$$\frac{l_1 + l_2}{s_1 + s_2} > \frac{2l_1}{2s_1} \Leftrightarrow l_1 s_1 + l_2 s_1 > l_1 s_1 + l_1 s_2 \Leftrightarrow \frac{l_2}{s_2} > \frac{l_1}{s_1} .$$

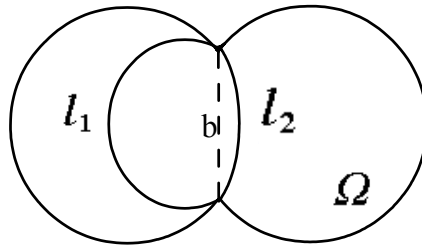
Die letzte Aussage ist wahr, denn laut (i) wird der Quotient $\frac{l_2}{s_2}$ für kleineres a_2 verringert und $a_1 < a_2$. Es ist also günstiger, das Gebiet ω zu symmetrisieren und dann auf das ganze Gebiet zu vergrössern [Fall (i)]. Der Beweis gilt auch für den Fall $a_2 = \pi$.

(iii)



Betrachte das Gebiet, welches aus zwei Kreisbögen der Längen l_1 bzw. l_2 besteht, so dass der Kreismittelpunkt für den linken (bzw. rechten) Kreisbogen rechts (bzw. links) von der Verbindungsstrecke b liegt. Das Gebiet ist aber in einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}b$ enthalten. Für den Cheegerschen Quotienten kann es deshalb nicht optimal sein. Falls $a_1 = a_2 = \pi$ ist, bilden l_1 und l_2 eine Kugel. Das Gebiet kann aber nicht optimal sein, denn Ω enthält eine Kugel mit einem grösseren Radius.

(iv)



Betrachte das Gebiet, welches aus zwei Kreisbögen der Längen l_1 bzw. l_2 besteht, so dass die Kreismittelpunkte der Kreisbögen links von der Verbindungsstrecke b liegen. Der Cheegersche Quotient wird verringert, falls l_2 durch l_1 ersetzt wird:

$$\frac{l_1 + l_2}{s_1 + s_2} > \frac{2l_1}{2s_1} \Leftrightarrow l_1 s_1 + l_2 s_1 > l_1 s_1 + l_1 s_2 \Leftrightarrow \frac{l_2}{s_2} > \frac{l_1}{s_1} .$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn

$$\frac{l_2}{s_2} = \frac{r_2 a_2}{a_2 \frac{r_2^2}{2} - \frac{1}{2} b r_2 \cos \frac{a_2}{2}} = \frac{2a_2}{a_2 \frac{b}{2 \sin \frac{a_2}{2}} - b \cos \frac{a_2}{2}} = \frac{4}{b} \frac{a_2 \sin \frac{a_2}{2}}{a_2 - \sin a_2}. \quad (18)$$

Die Ableitung der Funktion $\frac{a_2 \sin \frac{a_2}{2}}{a_2 - \sin a_2}$ ist gleich

$$\frac{\sin \frac{a_2}{2}}{a_2 - \sin a_2} + \frac{1}{2} \frac{a_2 \cos \frac{a_2}{2}}{a_2 - \sin a_2} - \frac{a_2 \sin \frac{a_2}{2} (1 - \cos(\frac{a_2}{2}))}{(a_2 - \sin a_2)^2}$$

Wie die folgenden Berechnungen mit Hilfe von *Maple* zeigen, ist die Ableitung der Funktion $\frac{a_2 \sin \frac{a_2}{2}}{a_2 - \sin a_2}$ negativ:

```
> R1 := diff(a2*sin(1/2*a2)/(a2-sin(a2)),a2);
> bedingungen:={R1<0,a2>0,a2<Pi}; l:=solve(bedingungen);
```

$$l := \{0 < a_2, a_2 < \pi\}$$

Deshalb wird der Quotient $\frac{l_2}{s_2}$ für grösseres a_2 verringert. D.h. es ist günstiger, der Kreismittelpunkt von l_2 auf die Verbindungsstrecke b zu verschieben, denn der Cheegersche Quotient (18) als eine Funktion von a_2 ist im Punkt $a_2 = \pi$ stetig. Die Anwendung vom Fall (ii) ergibt dann die Aussage $\frac{l_2}{s_2} > \frac{l_1}{s_1}$.

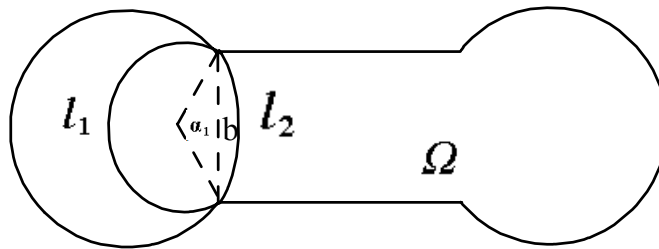
Insgesamt erhalten wir folgende Aussage: Für das Hantelgebiet, das nur aus zwei Kreisbögen besteht, ist

$$h(\Omega) = \frac{4}{b} \frac{(2\pi - a) \sin \frac{a}{2}}{(2\pi - a + \sin a)},$$

wobei a der Mittelpunktswinkel der Verbindungsstrecke b und das Cheegersche Gebiet für Ω das ganze Gebiet ist.

Jetzt betrachte ich allgemeine Hantelgebiete:

(a)



Es sei l_1, l_2 Kreisbögen mit den Kreismittelpunkten wie im Fall (iv). Genauso wie im Fall (iv) kann man zeigen, dass der Cheegersche Quotient für das Gebiet, welches durch l_1, l_2 abgegrenzt ist, verringert wird, wenn der Kreismittelpunkt von l_2 auf die Verbindungsstrecke b verschoben wird. Es ist auch günstiger, den Kreisbogen l_1 zu vergrößern. Für den grössten Kreisbogen l , der links von der Verbindungsstrecke b liegt, gilt

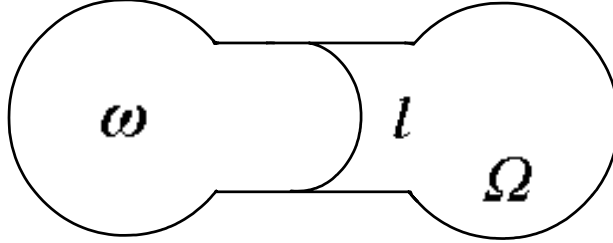
$$\frac{l_1 + l_2}{s_1 + s_2} > \frac{l + l_2}{s + s_2} \Leftrightarrow l_2(s - s_1) + s_2(l_1 - l) + l_1s - ls_1 > 0 \quad (19)$$

Die Ungleichung (19) ist immer erfüllt, denn wegen $\frac{l_1}{s_1} > \frac{l}{s}$ (siehe Beweis vom Fall (i)) ist der Term $(l_1s - ls_1)$ positiv und der Term $l_2(s - s_1) + s_2(l_1 - l)$ muss auch positiv sein. Sonst erhalten wir

$$\frac{l_2}{s_2} < \frac{l - l_1}{s - s_1} < \frac{l}{s}$$

einen Widerspruch zum Beweis von (i).

(b)



Der Fall ist nicht möglich, denn es ist günstiger, den Kreisbogen l nach links (oder nach rechts) zu verschieben, je nachdem, welche der folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

$$\frac{|\partial w| + 2\varepsilon}{|w| + b\varepsilon} < \frac{|\partial w|}{|w|} \Leftrightarrow \frac{2}{b} < \frac{|\partial w|}{|w|}, \quad (20)$$

$$\frac{|\partial w| + 2\varepsilon}{|w| + b\varepsilon} > \frac{|\partial w|}{|w|} \Leftrightarrow \frac{2}{b} > \frac{|\partial w|}{|w|}, \quad (21)$$

wobei ε die Länge der Strecke, um welche der Kreisbogen l verschoben wird. Wenn eine der Ungleichungen (20), (21) erfüllt ist, ist das Gebiet ω nicht optimal. Wenn $\frac{2}{b} = \frac{|\partial w|}{|w|}$ ist, kann man den Kreisbogen l nach rechts verschieben, ohne den Cheegerschen Quotienten zu ändern. So kann ich ein Gebiet erhalten, dessen Schnitt mit Ω nicht nur aus Kreisbögen besteht. Das Gebiet kann deshalb nicht optimal sein (siehe [SZ]).

- (c) jetzt zeige ich Symmetrie eines Cheegerschen Gebietes, d.h der Fall wie in der Abbildung 6:

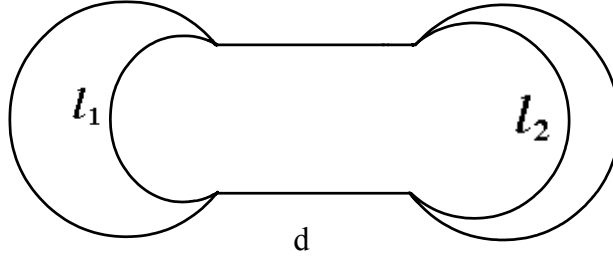


Abbildung 6

ist nicht möglich. In dieser Situation ist es günstiger, das Gebiet zu symmetrisieren, d.h. den Kreisbogen l_1 (bzw. l_2) durch den Kreisbogen l_2 (bzw. l_1) zu ersetzen. So, wenn die folgende Ungleichung

$$\frac{l_1 + l_2 + 2d}{s_1 + s_2 + bd} > \frac{2l_1 + 2d}{2s_1 + bd} \quad (22)$$

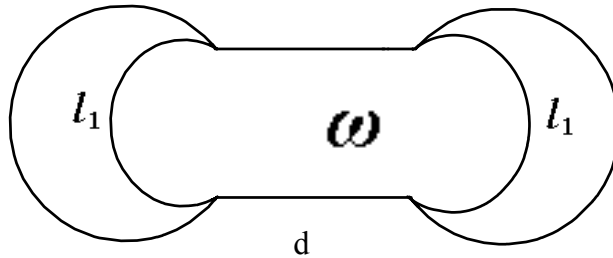
$$\Leftrightarrow bd(l_2 - l_1) + 2d(s_1 - s_2) + 2(l_2s_1 - l_1s_2) > 0$$

erfüllt ist, ersetzen wir l_2 durch l_1 . Der Term $(l_2s_1 - l_1s_2)$ in (22) ist wegen $\frac{l_2}{s_2} > \frac{l_1}{s_1}$ (siehe Beweis vom Fall (i)) positiv. Falls die Ungleichung (22) nicht erfüllt ist, muss $2d(s_1 - s_2) + 2l_2s_1 - l_1s_2$ negativ sein und

$$|2d(s_1 - s_2) + 2l_2s_1 - l_1s_2| > bd(l_2 - l_1) .$$

In diesem Fall ist es günstiger, l_1 durch l_2 zu ersetzen. Falls in (22) Gleichheit vorliegt, so wird der Cheegersche Quotient durch Symmetrisierung nicht verändert.

- (d) Ich betrachte jetzt Teilgebiete von Ω , die folgende Gestalt haben:



In dieser Situation ist es günstiger, l_1 durch einen grösseren Kreisbogen l_2 zu ersetzen:

$$\frac{2l_1 + 2d}{2s_1 + bd} > \frac{2l_2 + 2d}{2s_2 + bd} \Leftrightarrow 4(l_1s_2 - l_2s_1) + 2ab(l_1 - l_2) + 4a(s_2 - s_1) > 0 . \quad (23)$$

Die Ungleichung (23) ist immer erfüllt, denn der Term $l_1 s_2 - l_2 s_1$ ist wegen $\frac{l_2}{s_2} > \frac{l_1}{s_1}$ (siehe Beweis vom Fall (i)) positiv und der Term $[bd(l_2 - l_1) + 2d(s_1 - s_2)]$ muss auch positiv sein. Denn sonst erhalten wir

$$\frac{2}{b} < \frac{l_2 - l_1}{s_2 - s_1}. \quad (24)$$

Den Term auf der rechten Seite in (24) kann man nach oben mit Hilfe des Mittelwertsatzes abschätzen. Dazu berechne ich die Ableitungen von l und s .

$$l(a) = \frac{b(2\pi - a)}{2 \sin \frac{a}{2}}, \quad l'(a) = -\frac{b}{4} \frac{2 \sin \frac{a}{2} + 2\pi \cos \frac{a}{2} - a \cos \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}},$$

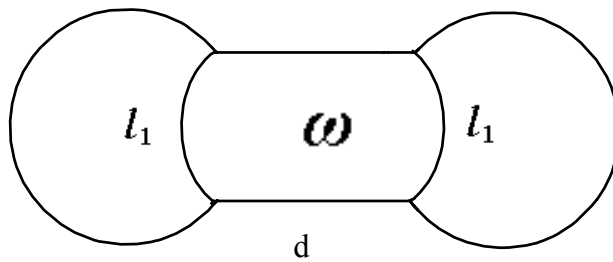
$$s(a) = \frac{b^2}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{2\pi - a}{\sin^2 \frac{a}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right), \quad s'(a) = -\frac{b^2}{8} \frac{2 \sin \frac{a}{2} + 2\pi \cos \frac{a}{2} - a \cos \frac{a}{2}}{\sin^3 \frac{a}{2}}.$$

Die Ungleichung (24) ergibt dann

$$\frac{2}{b} < \frac{l'(\xi_1)}{s'(\xi_2)} = \frac{2l'(\xi_1)}{b l'(\xi_2)} \sin \frac{\xi_2}{2}, \quad (25)$$

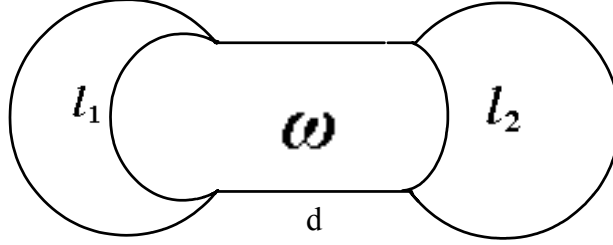
wobei $\xi_1, \xi_2 \in (a_1, a_2)$. Falls $a_1, a_2 \in (0, \pi)$ genügend nah aneinander liegen, erhalten wir in (25) einen Widerspruch zur Annahme, dass ω ein Cheegersches Gebiet ist. Das Gebiet, das dem Wert $a_1 = \pi$ entspricht, kann auch nicht optimal sein (siehe den Beweis vom Fall (b)).

(e) der folgende Fall:



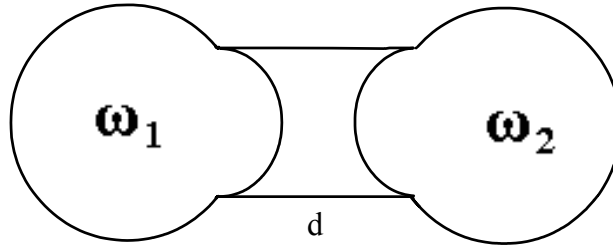
ist nicht möglich. Denn das Gebiet ω ist in einem grösseren Stadiongebiet $\hat{\Omega} \subset \Omega$ enthalten. Für $\hat{\Omega}$ ist ω nicht optimal (siehe Theorem 33, Kapitel 9). Deshalb ist ω auch für Ω nicht optimal.

(f) der Fall wie in der folgenden Abbildung:



ist nicht möglich, denn es ist günstiger, den Kreisbogen l_2 zu verschieben (siehe Fall (b)).

Insgesamt haben wir qualitativ nur 2 Kandidaten für ein Cheegersches Gebiet: das ganze Gebiet und die Gebiete ω_1 , ω_2 , $\omega_1 \cup \omega_2$ folgender Gestalt:



wobei die Gebiete aus den Kreisbögen l_1 , l_2 mit den Radien r bzw. $\frac{1}{2}b$ und Mittelpunktwinkeln a_1 , a_2 bestehen. Es ist klar, dass die Cheegerschen Quotienten von ω_1 , ω_2 , $\omega_1 \cup \omega_2$ gleich sind. Jetzt werde ich die Werte von b , r und d bestimmen, für welche die Ungleichung

$$\frac{l_1 + l_2}{s_1 + s_2} > \frac{2l_1 + 2d}{2s_1 + bd} \quad (26)$$

erfüllt ist. Die Ungleichung (26) ist äquivalent zu

$$\frac{\frac{b}{2} \frac{2\pi - a_1}{\sin \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{2}\pi b}{(2\pi - a_1) \frac{1}{8} \frac{b^2}{\sin^2 \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{4}b^2 \cot \frac{a_1}{2} + \frac{1}{8}\pi b^2} > \frac{\frac{b}{2} \frac{2\pi - a_1}{\sin \frac{a_1}{2}} + d}{(2\pi - a_1) \frac{1}{8} \frac{b^2}{\sin^2 \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{4}b^2 \cot \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}bd}$$

$$\frac{\frac{2\pi - a_1}{2 \sin \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{2}\pi}{(2\pi - a_1) \frac{1}{8 \sin^2 \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{4} \cot \frac{a_1}{2} + \frac{1}{8}\pi} > \frac{\frac{b}{2} \frac{2\pi - a_1}{\sin \frac{a_1}{2}} + d}{(2\pi - a_1) \frac{1}{8} \frac{b}{\sin^2 \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{4}b \cot \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}d} \quad (27)$$

Es sei $T_1 = \frac{2\pi - a_1}{2 \sin \frac{a_1}{2}}$ und $T_2 = (2\pi - a_1) \frac{1}{8 \sin^2 \frac{a_1}{2}} + \frac{1}{4} \cot \frac{a_1}{2}$. Dann hat (27) die Form

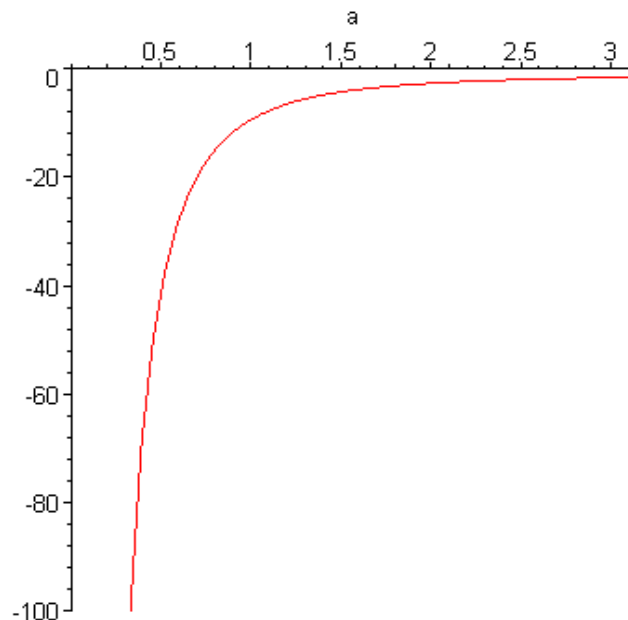
$$\frac{T_1 + \frac{1}{2}\pi}{T_2 + \frac{1}{8}\pi} > \frac{T_1 + d}{T_2 + \frac{1}{2}d} \Leftrightarrow \frac{1}{8}d(\pi + 4T_1 - 8T_2) > \frac{1}{8}\pi b(T_1 - 4T_2). \quad (28)$$

Numerische Berechnungen mit Hilfe von *Maple* ergeben, dass der Term auf der rechten Seite in (28) negativ ist:

> R:=(2*Pi-a)/2/sin(a/2)-4*((2*Pi-a)/8/(sin(a/2)^2)+
1/4*cos(a/2)/sin(a/2)+Pi/8);

$$R := \frac{1}{2} \frac{2\pi - a}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} - 4 \left(\frac{1}{8} \frac{2\pi - a}{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{4 \sin\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{\pi}{8} \right)$$

> plot(1/2*(2*Pi-a)/sin(1/2*a)-1/2*(2*Pi-a)/sin(1/2*a)^2-
cos(1/2*a)/sin(1/2*a)-1/2*Pi,a=0..Pi, -100..1);



Jetzt untersuche ich mit Hilfe von *Maple* den Term $\pi + 4T_1 - 8T_2$:

> T1:=(2*Pi-a)/2/sin(a/2);

$$T1 := \frac{1}{2} \frac{2\pi - a}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

> T2:=(2*Pi-a)/8/(sin(a/2)^2)+1/4*cos(a/2)/sin(a/2)+Pi/8;

$$T2 := \frac{1}{8} \frac{2\pi - a}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{\pi}{8}$$

> Pi+4*T1-8*T2;

$$\frac{2(2\pi - a)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{2\pi - a}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

> R0:=simplify(2*(2*Pi-a)/sin(1/2*a)-(2*pi-a)/sin(1/2*a)^2-2*cos(1/2*a)/sin(1/2*a));

$$R0 := \frac{-4 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \pi + 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) a + 2\pi - a + 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{-1 + \cos\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

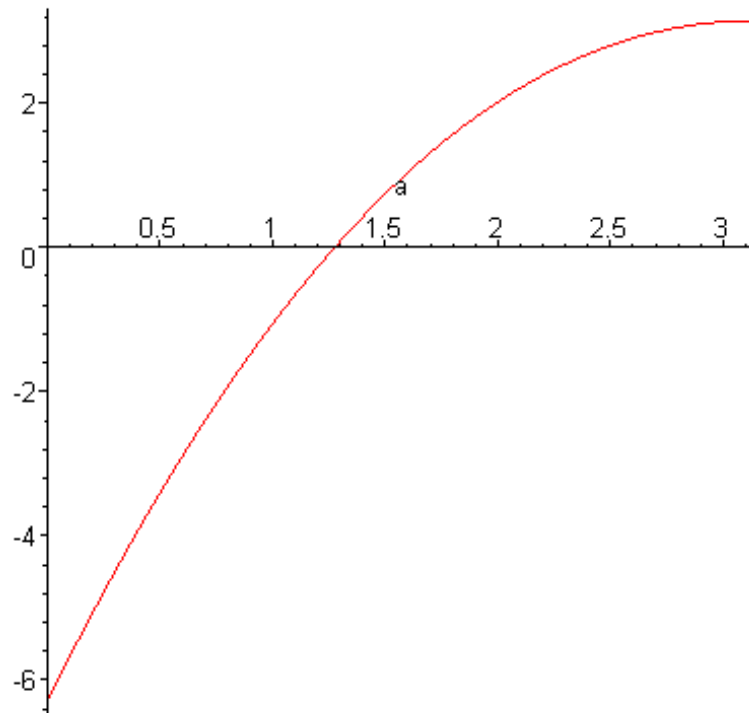
> R01:=4*sin(1/2*a)*Pi-2*sin(1/2*a)*a-2*Pi+a-2*cos(1/2*a)*sin(1/2*a);

$$R01 := 4 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \pi - 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) a - 2\pi + a - 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

> R1 := fsolve({R01},a=0..Pi);

$$R1 := \{a = 1.275883378\}$$

```
> plot(R01,a=0..Pi);
```



```
> 2*sin(1.275883378/2);
```

1.191086430

Der Term $\pi + 4T_1 - 8T_2$ ist also für $a \geq 1,275883378$ (d.h. für $b \geq 1.19108643r$) positiv. Deshalb ist die Ungleichung (26) immer erfüllt und folglich ist das Cheegersche Gebiet für Ω das Gebiet selbst. Für $a \leq 1,275883378$ (d.h. für $b \leq 1.19108643r$) ist das ganze Gebiet nur dann optimal, wenn die Bedingung

$$d < \pi b \frac{T_1 - 4T_2}{\pi + 4T_1 - 8T_2}$$

erfüllt ist.

Wie in [K2] gezeigt wurde, hat die Gleichung $-\Delta_1 u(x) = \lambda$ keine schwachen Lösungen. Dies motiviert deshalb die Einführung des Begriffes „Viskositätslösung“ im nächsten Kapitel.

6 Viskositätslösungen von (2).

In diesem Kapitel wird die verallgemeinerte Definition einer Viskositätslösung gegeben (laut [CGG]).

Definition 22 Sei $h_k : L \rightarrow \mathbb{R}$ ($L \subset \mathbb{R}^d$), ($k = 1, 2, \dots$). Die Funktion

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_*h_k : \bar{L} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} ,$$

die durch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_*h_k(x) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \inf_{\substack{l \geq k \\ y \in L \\ |x-y| < \varepsilon}} h_l(y)$$

für $x \in \bar{L}$ definiert ist, nennt man Γ^- -limes der Folge h_k .

Falls $h_k = h$ für alle k ist, dann wird Γ^- -limes von h_k eine unterhalb stetige Relaxation von h genannt und mit h_* bezeichnet. Aus der Definition von $\lim_{k \rightarrow \infty} {}_*h_k$ folgt dann, dass

$$h_*(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{\substack{|x-y| < \varepsilon \\ y \in L}} h(y) .$$

Die oberhalb stetige Relaxation von h wird durch $h^* = -(-h)_*$ definiert.

Definition 23 Eine Funktion $u = u(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man eine Viskositätsunterlösung (bzw. Viskositätsüberlösung) der Gleichung

$$E(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } A, \quad (29)$$

falls $u^* < \infty$ (bzw. $u_* > -\infty$) ist, und für jedes Paar $\varphi \in C^2(A)$ und $\bar{x} \in A$ mit der Eigenschaft $\max_A(u^* - \varphi) = (u^* - \varphi)(\bar{x})$ (bzw. $\min_A(u^* - \varphi) = (u^* - \varphi)(\bar{x})$) gilt

$$\begin{aligned} E_*(\bar{x}, u^*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) &\leq 0 \quad \text{in } A \\ (\text{bzw. } E^*(\bar{x}, u(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) &\geq 0 \quad \text{in } A) . \end{aligned}$$

Hier ist $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ und D^2u bezeichnet die Hessische Matrix von u . Eine Funktion $u = u(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man eine Viskositätslösung von (29), wenn sie gleichzeitig eine Viskositätsunterlösung und eine Viskositätsüberlösung von (29) ist.

Aus der Definition 23 folgt, dass nur ein lokales Verhalten der Funktionen $\varphi \in C^2(A)$ in den Punkten $\bar{x} \in A$ von Bedeutung ist. Im folgenden werden Viskositätsunterlösungen und Viskositätsüberlösungen einfach Unter- und Überlösungen genannt.

Theorem 24 (über Stabilität der Unterlösungen). Seien $E, E_k : W \rightarrow \mathbb{R}$ und u_k eine Unterlösung von

$$E_k(x, u_k, Du_k, D^2u_k) = 0 \quad \text{in } A,$$

$k = 1, 2, \dots$. Angenommen $\lim_{k \rightarrow \infty} *_E E_k \geq E_*$ und u_k konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ in jeder kompakten Teilmenge von A . Dann ist $u(x)$ eine Unterlösung von

$$E(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } A.$$

Beweis. Das Theorem ist in [CGG] bewiesen worden. ■

Aus dem Beweis des Theorems folgt, dass es ausreichend ist, die Bedingung $\lim_{k \rightarrow \infty} *_E E_k \geq E_*$ nur für die Testfunktionen φ aus Definition 23 zu überprüfen. Ausserdem gilt das Stabilitätstheorem auch für die Oberlösungen, wenn die Bedingung $\lim_{k \rightarrow \infty} *_E E_k \geq E_*$ durch $\lim_{k \rightarrow \infty} *_E E_k \leq E^*$ ersetzt wird.

Angenommen, die Lösung der Gleichung (1) u gehört zu $C^2(\Omega)$. Dann kann man (1) formal umschreiben in

$$E_p(u, Du, D^2u) = 0, \quad (30)$$

wobei

$$E_p = - \left[|\nabla u|^{p-2} \Delta u + (p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \lambda_p u^{p-1}$$

ist. Die Gleichung $E_p(u, Du, D^2u) = 0$ ist nicht linear. Ich zeige jetzt folgendes Theorem für Viskositätslösungen von (2).

Theorem 25 Sei $p > 1$, $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (2) und $|\nabla u_p(x)| \neq 0$ in einer ε -Umgebung von $x_0 \in \Omega$. Dann ist $u_p(x)$ eine Viskositätslösung von (30) in $U_\varepsilon(x_0)$.

Beweis. Für genügend große p wurde das Theorem in [JLM] bewiesen. Ich benutze aber dieselbe Idee.

Für den Beweis, dass u_p eine Viskositätsöberlösung von (30) ist, wähle eine Testfunktion $\varphi \in C^2(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, so dass $u_p(x_0) = \varphi(x_0)$ und $u_p(x) > \varphi(x)$ für $x \neq x_0$ ist. Wir wollen zeigen, dass

$$- \left[|\nabla \varphi(x_0)|^{p-2} \Delta \varphi(x_0) + (p-2) |\nabla \varphi(x_0)|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right] - \lambda_p \varphi^{p-1}(x_0) \geq 0 \quad (31)$$

Angenommen, das ist nicht der Fall. Da $|\nabla u_p(x_0)| \neq 0$ ist, gilt $|\nabla \varphi(x_0)| \neq 0$ und folglich $|\nabla \varphi(x)| \neq 0$ in $U_{\varepsilon_1}(x_0)$. Das heißt, dass die Funktion auf der linken Seite von (31) in $U_{\varepsilon_1}(x_0)$ stetig ist. Folglich gilt in dieser Umgebung die Ungleichung

$$- \left[|\nabla \varphi|^{p-2} \Delta \varphi + (p-2) |\nabla \varphi|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right] < \lambda_p \varphi^{p-1} \quad (32)$$

Definiere $m = \inf \{u_p(x) - \varphi(x) : |x - x_0| = \varepsilon\}$, $\Phi = \varphi + \frac{1}{2}m$. Die Funktion Φ genügt der Ungleichung $\Phi < u_p$ auf $\partial B(x_0, \varepsilon_1)$, $\Phi(x_0) > u_p(x_0)$ und aus (32) erhalten wir

$$-\Delta_p \Phi < \lambda_p \varphi^{p-1}. \quad (33)$$

Die Funktion $(\Phi - u_p)^+$ setze ich auf $U_\varepsilon(x_0)$ mit Null fort und nehme diese als Testfunktion für die Gleichung (1). Da nach unserer Annahme $u_p(x)$ eine schwache Lösung von (2) ist, gilt

$$\int_{\{\Phi > u_p\}} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla (\Phi - u_p) dx = \lambda_p \int_{\{\Phi > u_p\}} |u_p|^{p-2} u_p (\Phi - u_p) dx \quad (34)$$

Multipliziert man (33) mit $(\Phi - u_p)^+$ und integriert partiell, so erhält man

$$\int_{\{\Phi > u_p\}} |\nabla \Phi|^{p-2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\Phi - u_p) dx < \lambda_p \int_{\{\Phi > u_p\}} |\varphi|^{p-2} \varphi (\Phi - u_p) dx \quad (35)$$

Subtraktion der Ungleichungen (35) und (34) ergibt

$$\int_{\{\Phi > u_p\}} (|\nabla \Phi|^{p-2} \nabla \Phi - |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p) \cdot \nabla (\Phi - u_p) dx < \lambda_p \int_{\{\Phi > u_p\}} (|\varphi|^{p-2} \varphi - |u_p|^{p-2} u_p) (\Phi - u_p) dx \quad (36)$$

Der rechte Teil der Ungleichung (36) ist negativ, weil auf der Integrationsmenge $\Phi > u_p$ und $\varphi < u_p$ gelten. Ich zeige jetzt, dass für jedes $p > 1$ die linke Seite der Ungleichung nicht negativ ist: Für beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) = |a|^p + |b|^p - (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) a \cdot b .$$

Wenn wir annehmen, dass der Ausdruck negativ ist, dann muß gelten

$$\begin{aligned}
|a|^p + |b|^p - (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) a \cdot b < 0 &\Leftrightarrow \\
|a|^p + |b|^p < (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) a \cdot b &\leq (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) |a| \cdot |b| \leq \\
|a|^{p-1} |b| + |b|^{p-1} |a| &\Leftrightarrow |a|^{p-1} (|a| - |b|) - |b|^{p-1} (|a| - |b|) < 0 \Leftrightarrow \\
(|a| - |b|) (|a|^{p-1} - |b|^{p-1}) &< 0 \quad .
\end{aligned}$$

Da $p > 1$ ist, kann die Ungleichung nicht erfüllt sein. So erhalten wir einen Widerspruch zur Ungleichung (36) und folglich auch zur Annahme. Genauso wird gezeigt, dass u_p eine Viskositätsunterlösung von $E_p(u, Du, D^2u) = 0$ ist. Das Theorem ist somit bewiesen. ■

Mit Hilfe der eingeführten Begriffes von einer Viskositätslösung kann man das Problem (2) im \mathbb{R}^N für $N \geq 2$ untersuchen.

7 Das Problem (2) für Kugelgebiete

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N, N > 1.$$

Sei $\Omega = B_a(0) \subset \mathbb{R}^N$ eine Kugel mit dem Radius a und Zentrum im Koordinatenursprung. Es ist bekannt, dass die Eigenfunktionen von (2) in diesem Fall ein eindeutiges Maximum in Ω haben, und zwar im Mittelpunkt der Kugel $B_a(0)$. Die Lösungen von (2) sind radialsymmetrische Funktionen. Ausserdem sind die Funktionen $u_p(x)$ in radialer Richtung strikt monoton fallend [L1]. Also haben die Funktionen $u_p(x)$ in Polarkoordinaten, für die wir auch die Bezeichnung $u_p(r)$, $r \geq 0$ verwenden, qualitativ folgende Gestalt:

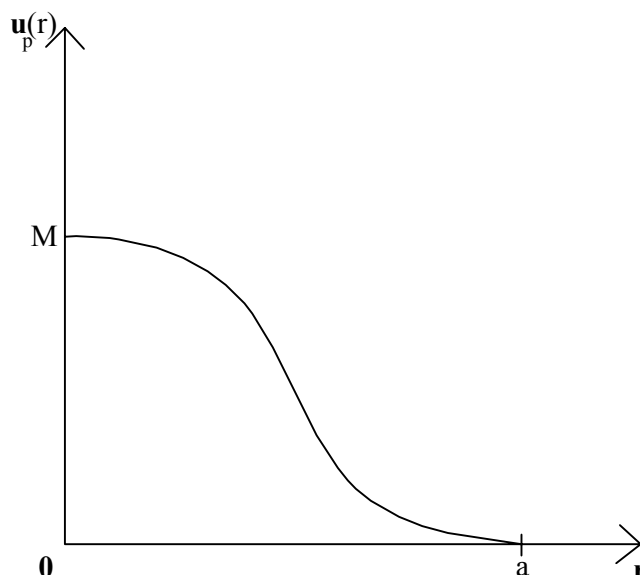


Abbildung 7: $u_p = u_p(r)$, $N > 1$

Die Ableitung der Funktion $u_p(r)$ an der Stelle $r = 0$ ist gleich Null, da die Funktion $u_p(x)$ dort ihr Maximum hat und wegen der Hölderstetigkeit der Ableitung $|\nabla u_p(0)| = 0$ gilt.

Für eine Kugel im \mathbb{R}^N ($N > 1$) gilt außer der Aussage: $\log u_p$ ist konkav, auch folgende Aussage:

Lemma 26 Für jedes $p > 1$ und $N > 1$ ist die Funktion $\sqrt[p]{u_p}$ konkav.

Beweis. Die Aussage ist in [L1, Satz 5.8] bewiesen. ■

Theorem 27 Sei u_p eine positive Eigenfunktion von (2), wobei Ω eine Kugel in \mathbb{R}^N ist, ($N > 1$). Dann existiert ein Exponent $\alpha = \alpha(N, p)$ im Intervall

$(\frac{1}{N}, 1)$, so dass u_p^α konkav ist. Den Exponenten kann man z.B. so wählen:

$$\alpha = \frac{pq\varepsilon - p + 1}{pq\varepsilon - p + N} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

wobei ε die größte positive Nullstelle der folgenden Gleichung ist:

$$\varepsilon^p - \frac{Np}{N-1}\varepsilon + \frac{N(p-1)^2}{p(N-1)} = 0$$

Beweis. Das Theorem ist in [L1, Satz 5.9] bewiesen. ■

Wir können jetzt das Verhalten von α für $p \rightarrow 1^+$ untersuchen.

Für den für uns relevanten Fall $N > 1$ beweisen wir folgendes Theorem

Theorem 28 Für $p \rightarrow 1^+$ konvergiert $\alpha = \alpha(N, p)$ gegen 1.

Beweis. Zunächst können wir aus der Gleichung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgern, dass $q = \frac{p}{p-1}$. Also ist

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} q = +\infty$$

Wenn wir jetzt den Ausdruck

$$\alpha = \frac{pq\varepsilon - p + 1}{pq\varepsilon - p + N}$$

in die Form

$$\alpha = \frac{pq\varepsilon - p + 1}{pq\varepsilon - p + N} = \frac{\varepsilon + \frac{1-p}{pq}}{\varepsilon + \frac{N-p}{pq}}$$

umschreiben, dann ist es für den Beweis des Theorems ausreichend zu zeigen, dass $\varepsilon(p) \not\rightarrow 0$ für $p \rightarrow 1^+$.

Wir wissen, dass ε die grösste positive Nullstelle der Gleichung

$$\varepsilon^p - \frac{Np}{N-1}\varepsilon + \frac{N(p-1)^2}{p(N-1)} = 0 \tag{37}$$

ist. Wir können (37) umschreiben in

$$\varepsilon \left(\frac{Np}{N-1} - \varepsilon^{p-1} \right) = \frac{N(p-1)^2}{p(N-1)} \tag{38}$$

und die Funktion $f(\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{Np}{N-1} - \varepsilon^{p-1} \right)$ auf der linken Seite der Gleichung untersuchen.

Die Nullstellen der Funktion $f(\varepsilon)$ sind $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = \left(\frac{Np}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, auf dem Intervall $\left(0, \left(\frac{Np}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)$ ist sie positiv (uns interessiert nur dieser Fall, da die rechte Seite von (38) positiv ist). Da

$$f'(\varepsilon) = \frac{Np}{N-1} - p\varepsilon^{p-1}$$

wird in $\hat{\varepsilon} = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ ein Maximum angenommen. Wir können jetzt die Funktion $f(\varepsilon)$ skizzieren

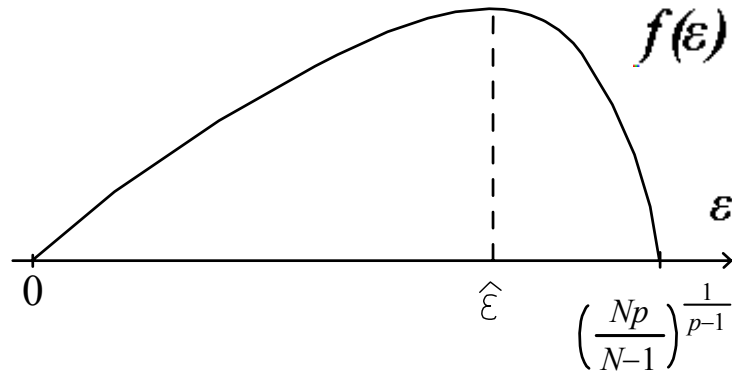


Abbildung 8

Der Wert der Funktion $f(\varepsilon)$ im Extrempunkt hat die Eigenschaft

$$f(\hat{\varepsilon}) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{Np}{N-1} - \hat{\varepsilon}^{p-1}\right) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{Np}{N-1} - \frac{N}{N-1}\right) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{N(p-1)}{N-1} \rightarrow +\infty, \text{ für } p \rightarrow 1^+ ,$$

$\hat{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ ($p \rightarrow 1^+$) und die rechte Seite von (38) $\frac{N(p-1)^2}{p(N-1)} \rightarrow 0$ (für $p \rightarrow 1^+$). Also geht die grösste positive Nullstelle der Gleichung (37) gegen $+\infty$. Daraus können wir folgern, dass

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \alpha = \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{pq\varepsilon - p + 1}{pq\varepsilon - p + N} = \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{\varepsilon + \frac{1-p}{pq}}{\varepsilon + \frac{N-p}{pq}} = 1 .$$

Die Aussage des Theorems ist somit bewiesen. ■

Jetzt können wir die folgende Aussage über das Verhalten von $u_p(r)$ (und folglich auch $u_p(x)$) für $p \rightarrow 1^+$ in einer Kugel beweisen:

Theorem 29 *Unter der Normierung $\int_0^a u_p(r) dr = 1$ ($a > 0$) konvergieren die Funktionen $u_p(r) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ für $p \rightarrow 1^+$ punktweise gegen die Konstante $\frac{1}{a}$.*

Beweis. Nehmen wir ein r_0 aus dem Intervall $(0, a)$ und betrachten eine ε -Umgebung von r_0 , so dass $U_\varepsilon(r_0) \subset\subset (0, a)$ ist. Aus dem Theorem 27 folgt, dass es ein $\alpha \in (\frac{1}{N}, 1)$ gibt, für das gilt: u_p^α ist konkav. Da $u_p(r)$ als Lösung von (2) stetig differenzierbar in Ω ist, erhalten wir

$$u_p^\alpha(r_2) - u_p^\alpha(r_1) \leq \alpha u_p^{\alpha-1}(r_1) u_p'(r_1) (r_2 - r_1)$$

für alle $r_1, r_2 \in (0, a)$. Die Ableitung der Funktion $u_p(r)$ ist in $(0, a)$ negativ. Für alle $r_1, r_2 \in (0, a)$, $r_2 > r_1$ gilt also die Abschätzung

$$|u_p'(r_1)| \leq \frac{|u_p^\alpha(r_2) - u_p^\alpha(r_1)|}{\alpha u_p^{\alpha-1}(r_1) (r_2 - r_1)}. \quad (39)$$

Wenn wir in (39) zum Limes für $r_2 \rightarrow a$ übergehen, erhalten wir für jedes $r \in U_\varepsilon(r_0)$

$$|u_p'(r)| \leq \frac{1}{\alpha(a-r)} u_p(r). \quad (40)$$

Aus dieser Ungleichung kann man folgern, dass die Ableitung von $u_p(r)$ in der Umgebung $U_\varepsilon(r_0)$ gleichmäßig beschränkt ist. Die obere Schranke für $|u_p'(r)|$ erhalten wir aus (40) mit Hilfe der gleichmäßigen Abschätzung für $u_p(r)$ unter der Normierung $\int_0^a u_p(r) dr = 1$ aus dem Lemma (5). Also sind $u_p(r)$, $u_p'(r)$ in $U_\varepsilon(r_0)$ gleichmäßig beschränkt. Deshalb existiert eine Teilfolge von $u_p(r)$ (ohne Einschränkung die ganze Folge), die in $C(U_\varepsilon(r_0))$ gegen eine Funktion $u(r)$ konvergiert (Satz von Arzela-Ascoli). Da die Funktionen $u_p(r)$ in $(0, a)$ monoton fallend sind, muß auch $u(r)$ diese Eigenschaft haben.

Nehmen wir ein α aus dem Theorem 27, so dass $u_p^\alpha(r)$ konkav ist. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_p^\alpha(r) - u(r)| &\leq |u_p^\alpha(r) - u_p(r)| + |u_p(r) - u(r)| \leq \\ &u_p(r) |u_p^{\alpha-1}(r) - 1| + |u_p(r) - u(r)| \end{aligned}$$

folgt, dass $|u_p^\alpha(r) - u(r)| \rightarrow 0$ ($p \rightarrow 1^+$) für jedes $r \in U_\varepsilon(r_0)$, denn $\alpha \rightarrow 1$ ($p \rightarrow 1^+$) und $u_p(r)$ sind gleichmäßig beschränkt. Die Funktion $u(r)$ ist damit konkav.

Angenommen, $u(r)$ ist nicht konstant in $U_\varepsilon(r_0)$. Jetzt wollen wir das Stabilitätstheorem 24 anwenden. Das Theorem ist in unserer Situation anwendbar, wenn die Bedingung $\lim_{p \rightarrow \infty} {}_*E_p \geq E_{1^*}$ für alle Testfunktionen φ aus

Definition 23 erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn die Gradienten aller Testfunktionen auf $U_\varepsilon(r_0)$ ungleich Null sind, weil dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} {}_*E_p(x, u, D\varphi, D^2\varphi) &= \\ \lim_{p \rightarrow \infty} {}_* \left(- \left[|\nabla\varphi|^{p-2} \Delta\varphi + (p-2) |\nabla\varphi|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \lambda_p u^{p-1} \right) &= \\ - \frac{1}{|\nabla\varphi|} \left(\Delta\varphi - \frac{1}{|\nabla\varphi|^2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \lambda_1 &= E_1(x, u, D\varphi, D^2\varphi) = \\ &= E_{1*}(x, u, D\varphi, D^2\varphi) . \end{aligned}$$

Angenommen, es existiert ein Punkt $\bar{r} \in U_\varepsilon(r_0)$, so dass $|\nabla\varphi(\bar{r})| = 0$. Da aber die Funktion $u(r)$ konkav und monoton fallend ist, muß die Funktion auf dem Intervall $[0, \bar{r}]$ konstant sein. Diese Prozedur kann man auch auf dem Intervall $[\bar{r}, r_0 + \varepsilon]$ anwenden. Wir zeigen damit die Existenz einer Umgebung $U_{\varepsilon_1}(r_1) \subset\subset (0, a)$, in der das Stabilitätstheorem 24 anwendbar ist. Genauso kann man zeigen, dass der Stabilitätstheorem für die Oberlösungen auch anwendbar ist (s. Bemerkung zum Theorem 24).

Da $u_p(r)$ als schwache Lösungen von (2) auch Viskositätslösungen von (2) sind (Theorem 25) und $\lim_{p \rightarrow 1^+} E_p = E_1$ für alle Testfunktionen $\varphi(r)$ auf $U_{\varepsilon_1}(r_1)$, ist $u(r)$ eine Viskositätslösung der Limesgleichung (Theorem 24), hierbei identifizieren wir wieder $u(r)$ mit $u(x)$, $x \in \Omega$. Die Limesfunktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist konkav. Folglich ist sie fast überall zweimal differenzierbar (Satz von Alexandrov), d.h. für fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$\left| u(y) - u(x) - Du(x) \cdot (y-x) - \frac{1}{2} (y-x)^T \cdot D^2u(x) \cdot (y-x) \right| = o(|y-x|^2)$$

für $y \rightarrow x$, $y \in \Omega$. Die Gleichung kann man auch in der Form

$$u(y) = u(x) + Du(x) \cdot (y-x) + \frac{1}{2} (y-x)^T \cdot D^2u(x) \cdot (y-x) + o(|y-x|^2)$$

für $y \rightarrow x$, $y \in \Omega$ schreiben. Da die Funktion u eine Viskositätsunterlösung der Limesgleichung $E_1(u, Du, D^2u) = 0$ auf $U_{\varepsilon_1}(r_1)$ ist, gilt für jedes $\bar{x} \in U_{\varepsilon_1}(r_1)$ und jede Testfunktion φ aus der Definition 23 die Ungleichung

$$E_{1*}(u(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \leq 0 .$$

Sei $\varphi_1(x) := \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) + u(\bar{x})$. Offensichtlich ist φ_1 auch eine Testfunktion, die folgende Eigenschaften besitzt: $\varphi_1(\bar{x}) = u(\bar{x})$ und φ_1 liegt oberhalb

von u . Ich nehme ein Punkt $\bar{x} \in U_{\varepsilon_1}(r_1)$, in dem die Funktion u zweimal differenzierbar ist, und konstruiere eine spezielle Testfunktion ψ , welche in \bar{x} die Eigenschaften von φ_1 besitzt. Sei $\psi(x) = u(\bar{x}) + Du(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \cdot D^2u(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \cdot M \cdot (x - \bar{x})$, wobei M eine $N \times N$ -Matrix und $M = \gamma I$, γ eine beliebige aber feste positive Zahl und I eine Einheitsmatrix ist. Die Funktion ψ ist zweimal stetig differenzierbar in Ω , $\psi(\bar{x}) = u(\bar{x})$ und ψ liegt in einer genügend kleinen Umgebung von \bar{x} oberhalb von u , denn sonst existiert ein y aus dieser Umgebung mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \psi(y) < u(y) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y - \bar{x})^T \cdot M \cdot (y - \bar{x}) < o(|y - \bar{x}|^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma < o(1) \end{aligned}$$

für $y \rightarrow x$, $y \in \Omega$. Wir erhalten deshalb einen Widerspruch zur Voraussetzung $\psi(y) < u(y)$. Deshalb ist ψ eine Testfunktion für die Viskositätsunterlösung u und $E_{1*}(\bar{x}, u(\bar{x}), D\psi(\bar{x}), D^2\psi(\bar{x})) \leq 0$. Wenn wir in dieser Gleichung zum Limes für $\gamma \rightarrow 0$ übergehen, erhalten wir

$$E_1(u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \leq 0.$$

Da die Funktion u auch eine Viskositätsüberlösung ist, erhalten wir analog die Ungleichung

$$E_1(u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq 0.$$

Insgesamt gilt

$$E_1(u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) = 0.$$

Wir wissen, dass die Funktion u radial symmetrisch ist, d.h. in Polarkoordinaten ist $u = u(r)$, $r \in (0, a)$. Die Funktion E_1 hat dann die Form

$$\begin{aligned} E_1(u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) &= -\frac{1}{|\nabla u|} \left[\Delta u - \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \lambda_1 = \\ &= -\frac{1}{|u'(r)|} \left[u''(r) + \frac{N-1}{r} u'(r) - \frac{1}{|u'(r)|^2} \sum_{i,j=1}^N |u'(r)|^2 \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \lambda_1. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen von u haben die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{cases} u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} & , \text{ falls } i = j \\ x_i x_j \frac{u''(r)r - u'(r)}{r^3} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$E_1(u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) = -\frac{1}{|u'(r)|} \left[u''(r) + \frac{N-1}{r} u'(r) - u''(r) \right] - \lambda_1 = \\ - \operatorname{sgn}(u'(r)) \frac{N-1}{r} - \lambda_1 = \frac{N-1}{r} - \lambda_1 ,$$

denn die Funktion u ist in $U_{\varepsilon_1}(r_1)$ monoton fallend und hat folglich eine negative Ableitung. Da die Limesfunktion u fast überall zweimal differenzierbar ist, existieren zwei Punkte s_1, s_2 in $U_{\varepsilon_1}(r_1)$, $s_1 < s_2$, in denen u zweimal differenzierbar ist. Wie ich gezeigt habe, gilt dann

$$\frac{N-1}{s_1} - \lambda_1 = 0 \\ \frac{N-1}{s_2} - \lambda_1 = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass $s_1 = s_2$ im Widerspruch zur Auswahl von s_1, s_2 . Folglich ist $u(r)$ auf $(0, a)$ konstant. Aus der Normierung der Funktion u : $\int_0^a u(r) dr = 1$, folgt, dass $u(r) = \frac{1}{a}$ auf dem Intervall $[0, a)$. In diesem Beweis betrachteten wir eine Teilfolge von $\{u_p\}$. Da aber die Limesfunktion u eindeutig ist, konvergiert die ganze Folge $\{u_p\}$ gegen u .

Der Theorem ist bewiesen. ■

Um die Eigenschaften vom $\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p(x)$ zu untersuchen, wobei u_p die Lösung von (2) in einem beliebigen konvexen Gebiet in \mathbb{R}^N ist, werde ich im folgenden Kapitel den Begriff „Konvexes Rearrangement“ einführen.

8 Konvexes Rearrangement

In diesem Kapitel verallgemeinern wir das Problem (8) und betrachten das folgende Problem:

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes konvexes Gebiet. Für eine
 (P_v) gegebene Zahl $v \in (0, |\Omega|)$ finde ein Gebiet $E \subset \Omega$ mit den Eigenschaften $|E| = v$ und $P(E) \leq P(F)$ für alle Gebiete
 $F \subset \Omega$, $|F| = v$, wobei $P(E)$ den Perimeter von E bezeichnet.

Es wird sich zeigen, dass Ergebnisse über (P_v) für Aussagen über das Problem (8) in \mathbb{R}^N verwendet werden können. Sei B_Ω eine grösste Kugel in Ω und H_Ω die Vereinigung von allen solchen Kugeln. In Abhängigkeit von der Raumdimension hat dann der Minimierer E folgende Eigenschaften (siehe [SZ]):

Theorem 30 *Es sei $N \geq 3$ und Ω ein beschränktes konvexes Gebiet, das die Grosskreisbedingung erfüllt. Für ein gegebenes $v \in (|B_\Omega|, |\Omega|)$ existiert ein eindeutiger Minimierer E , $|E| = v$, E ist konvex mit $C^{1,1}$ -Rand. Falls $|B_\Omega| < |E| < |H_\Omega|$, dann ist E die konvexe Hülle von zwei grössten Kugeln in Ω .*

Im 2-dimensionalen Fall gilt folgendes Theorem:

Theorem 31 *Sei $N = 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes konvexes Gebiet. Für den Minimierer E von (P_v) gelten dann die Aussagen des Theorems 29 und zusätzlich:*

- (i) falls $v \in (|H_\Omega|, |\Omega|)$, dann ist E eine Vereinigung von allen Kugeln in Ω , welche dieselbe Krümmung wie $\partial E \cap \Omega$ haben,*
- (ii) falls $v \in (|B_\Omega|, |H_\Omega|)$, dann ist E die konvexe Hülle von zwei grössten Kugeln in Ω ,*
- (iii) falls $v \in (0, |B_\Omega|]$, dann ist E eine Kugel.*

Um Eigenschaften der Lösungen eines Variationsproblems zu untersuchen, ist es häufig nützlich, bestimmte Symmetrisierungsverfahren auf die Lösungen anzuwenden. In diesem Kapitel wird ein solches Verfahren eingeführt (siehe [SZ]), dabei bleibt in der BV -Norm $\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |u| dx + \int_\Omega |Du|$ der Term $\int_\Omega |u| dx$ unverändert und $\int_\Omega |Du|$ nimmt im allgemeinen ab.

Angenommen, Ω ist ein beschränktes konvexes Gebiet in \mathbb{R}^N und entweder $N = 2$ oder Ω genügt einer Großkreisbedingung. In Abhängigkeit von v definieren wir $E(v)$ wie folgt:

- (i) für $0 < v < |B_\Omega|$ ist $E(v)$ eine Kugel vom Maß v , die in H_Ω zentriert ist,
- (ii) für $|B_\Omega| < v \leq |H_\Omega|$ ist $E(v)$ die konvexe Hülle von zwei grössten, in H_Ω symmetrisch liegenden Kugeln vom Maß v ,
- (iii) für $|H_\Omega| < v < |\Omega|$ ist $E(v)$ der eindeutige Perimeter-Minimierer vom Maß v .

Sei

$$BV_0^+(\Omega) = \{u \in BV(\mathbb{R}^N) : u \geq 0, u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Dann definiere das konvexe Rearrangement der Funktion $u \in BV_0^+(\Omega)$ durch

$$\tilde{u}(x) = \inf \{s \geq 0 : x \notin E(|\{u > s\}|)\}.$$

Für eine Menge E definiere ich

$$\partial^* E := \{x \in E \mid E \text{ hat einen Normalenvektor in } x\}$$

Für die hier eingeführten Begriffe kann man folgendes Theorem beweisen:

Theorem 32 *Es sei Ω ein beschränktes konvexes Gebiet in \mathbb{R}^N , das, falls $N > 2$ ist, die Großkreisbedingung erfüllt, und $u \in BV_0^+(\Omega)$. Dann ist \tilde{u} in \mathbb{R}^N eine oberhalb stetige Funktion. Sie ist stetig in Ω , sofern $|\{u > t\}|$ eine strikt monoton steigende Funktion ist. Ferner ist $\tilde{u} \in BV_0^+(\Omega)$,*

$$|\{\tilde{u} > t\}| = |\{u > t\}|$$

für alle t , und

$$\|\tilde{u}\|_{BV(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{BV(\mathbb{R}^N)}. \quad (41)$$

Wenn in (41) das Gleichheitszeichen gilt, dann ist $\tilde{u} = u$ in $\mathbb{R}^N \setminus H_\Omega$ im BV-Sinne und in H_Ω sind die Mengen $\partial^* \{\tilde{u} > t\}$ Translationen von $\partial \{u > t\}$.

Beweis. Den Beweis des Theorems findet man in [SZ]. ■

9 Der Fall konvexer Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Um das Verhalten der Lösungen u_p von (2) für $p \rightarrow 1^+$ zu untersuchen, werde ich verschiedene Eigenschaften der Cheegerschen Gebiete für Ω benötigen. Zunächst werde ich zeigen, dass ein Cheegersches Gebiet für Ω eindeutig bestimmt ist.

Theorem 33 *Es sei $N \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes konvexes Gebiet, das, falls $N > 2$ ist, die Grosskreisbedingung erfüllt. Dann ist das Cheegersche Gebiet für Ω eindeutig bestimmt.*

Beweis. Beim Beweis verwende ich die Sätze 30 und 31. Sei Ω_1 ein Cheegersches Gebiet für Ω . In Abhängigkeit vom Volumen von Ω_1 gibt es eine von 3 Möglichkeiten:

- (i) falls $0 < |\Omega_1| \leq |B_\Omega|$, so besagt Beispiel 20 aus dem Kapitel 5, dass Ω_1 eine Kugel sein muß. Da der Cheegersche Quotient für eine Kugel in \mathbb{R}^N mit dem Radius r gleich $\frac{N}{r}$ ist, wird die Kugel mit dem grösseren Radius den kleineren Cheegerschen Quotient haben. Also muß Ω_1 den Radius und folglich das Volumen von B_Ω haben. Vergleichen wir jetzt das Volumen von H_Ω und B_Ω : Der Fall $|H_\Omega| \neq |B_\Omega|$ (d.h. $|H_\Omega| > |B_\Omega|$) ist nicht möglich, denn (siehe Abbildung 9)

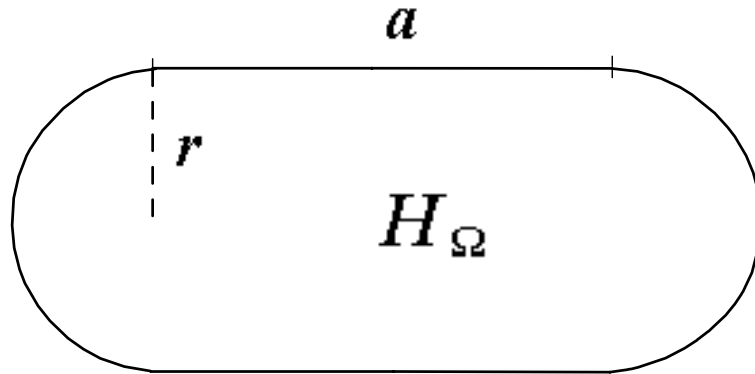


Abbildung 9: Stadiongebiet

Vergleich der Cheegerschen Quotiente für H_Ω und B_Ω ergibt:

$$\frac{|\partial B_\Omega|}{|B_\Omega|} = \frac{N}{r} \quad (42)$$

und

$$\frac{|\partial H_\Omega|}{|H_\Omega|} = \frac{Nr^{N-1}\omega_N + (N-1)r^{N-2}\omega_{N-1}a}{r^N\omega_N + r^{N-1}\omega_{N-1}a} = \frac{Nr\omega_N + (N-1)\omega_{N-1}a}{r^2\omega_N + r\omega_{N-1}a} \quad (43)$$

Die Differenz von (43) und (42) ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{|\partial H_\Omega|}{|H_\Omega|} - \frac{|\partial B_\Omega|}{|B_\Omega|} &= \frac{Nr\omega_N + (N-1)\omega_{N-1}a}{r^2\omega_N + r\omega_{N-1}a} - \frac{N}{r} = \\ &= \frac{Nr^2\omega_N + (N-1)r\omega_{N-1}a - Nr^2\omega_N - Nr\omega_{N-1}a}{r^2(r\omega_N + \omega_{N-1}a)} = \\ &= \frac{\omega_{N-1}a(N-1-N)}{r(r\omega_N + \omega_{N-1}a)} = -\frac{\omega_{N-1}a}{r(r\omega_N + \omega_{N-1}a)} < 0 \quad , \end{aligned}$$

wobei $\omega_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\Gamma(\frac{N}{2})}$ das Volumen der N -dimensionalen Einheitskugel ist. Also ist der Cheegersche Quotient für H_Ω im Vergleich zu B_Ω kleiner. Wir erhalten deshalb Widerspruch zur Voraussetzung (i): $|\Omega_1| \leq |B_\Omega|$. Es bleibt deshalb die einzige Möglichkeit $|H_\Omega| = |B_\Omega|$. Wir können dann folgern (siehe [SZ]), dass das Cheegersche Gebiet für Ω eindeutig ist.

- (ii) falls $|B_\Omega| \neq |H_\Omega|$ und $|B_\Omega| < |\Omega_1| < |H_\Omega|$, dann ist Ω_1 die konvexe Hülle von zwei grössten Kugeln in Ω (Sätze 30, 31). Ich werde jetzt zeigen, dass der Cheegersche Quotient für H_Ω kleiner ist, als der für Ω_1 und deshalb die Voraussetzungen von (ii) niemals erfüllt sind. Bei den Bezeichnungen wie in Abbildung 10

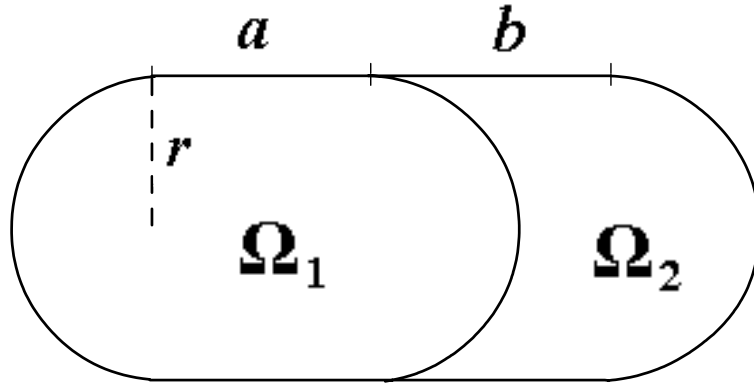


Abbildung 10

erhalten wir ($H_\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$)

$$\begin{aligned} \frac{|\partial H_\Omega|}{|H_\Omega|} - \frac{|\partial \Omega_1|}{|\Omega_1|} &= \frac{Nr\omega_N + (N-1)\omega_{N-1}(a+b)}{r^2\omega_N + r\omega_{N-1}(a+b)} \\ \frac{Nr\omega_N + (N-1)\omega_{N-1}a}{r^2\omega_N + r\omega_{N-1}a} &= \frac{r^2\omega_{N-1}\omega_N b(N-1) - r^2\omega_{N-1}\omega_N bN}{(r^2\omega_N + r\omega_{N-1}(a+b))(r^2\omega_N + r\omega_{N-1}a)} \\ &= -\frac{r^2\omega_{N-1}\omega_N b}{(r^2\omega_N + r\omega_{N-1}(a+b))(r^2\omega_N + r\omega_{N-1}a)} < 0. \end{aligned}$$

Deshalb ist $\frac{|\partial H_\Omega|}{|H_\Omega|} < \frac{|\partial \Omega_1|}{|\Omega_1|}$ und der Fall (ii) kann nicht auftreten.

(iii) falls $|B_\Omega| \geq |H_\Omega|$ ist, so gibt es ein eindeutiges Cheegersches Gebiet für Ω (siehe [SZ]).

Das Theorem ist damit bewiesen.

■

Jetzt werde ich das Haupttheorem dieses Kapitels beweisen:

Theorem 34 *Es sei $N \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes konvexes Gebiet, das, falls $N > 2$ ist, die Grosskreisbedingung erfüllt. Dann konvergieren die durch $\int_\Omega u_p(x) dx = 1$ normierten Eigenfunktionen $u_p(x)$ für $p \rightarrow 1^+$ gegen die Funktion*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_1|} & \text{auf } \Omega_1 \\ 0 & \text{auf } \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases},$$

wobei Ω_1 das Cheegersche Gebiet für Ω ist.

Beweis. Da das Cheegersche Gebiet für Ω eindeutig bestimmt ist (Theorem 33), ist die Limesfunktion $u(x)$ wohldefiniert.

Wie oben schon gezeigt wurde, sind die Funktionen $u_p(x)$ mit der Normierung $\int_\Omega u_p(x) dx = 1$ auf Ω gleichmäßig beschränkt und es gibt eine obere Schranke für $\lambda_p = \int_\Omega |\nabla u_p(x)|^p dx$, $p \rightarrow 1^+$. Das bedeutet, dass $\int_\Omega |\nabla u_p(x)| dx$ für $p \rightarrow 1^+$ auch gleichmäßig beschränkt sind. Also ist $\{u_p\}$ eine beschränkte Folge in $W_0^{1,1}(\Omega)$. Da die Einbettung $W_0^{1,1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge von $\{u_p\}$ (ohne Einschränkung die ganze Folge), die in $L^1(\Omega)$ für $p \rightarrow 1^+$ stark gegen eine Funktion $u(x)$ konvergiert. Das bedeutet insbesondere, dass u_p punktweise fast überall auf Ω gegen u konvergiert.

Laut dem Lemma 10 gilt für $u_p \in C^{1,\alpha}(\Omega)$:

$$\int_\Omega |Du_p| = \int_\Omega |\nabla u_p(x)| dx. \quad (44)$$

Mit Hilfe der Hölderchen Ungleichung erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_p(x)| dx}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \leq \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u_p(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \cdot |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} . \quad (45)$$

Da für $p \rightarrow 1^+$ die rechte Seite von (45) gegen λ_1 konvergiert:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1^+} \left[\frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u_p(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \cdot |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \right] = \\ \lim_{p \rightarrow 1^+} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_p(x)|^p dx}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} u_p^p(x) dx \right)^{\frac{1-p}{p}} \cdot |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \right] = \lambda_1 , \end{aligned}$$

ergibt (44), (45):

$$\liminf_{p \rightarrow 1^+} \frac{\int_{\Omega} |Du_p|}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \leq \lambda_1 . \quad (46)$$

Aus dem Theorem über die Kompaktheit der Einbettung $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ (siehe [G]) folgt, dass

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} |Du_p| . \quad (47)$$

Aus (46) und der Normierung $\|u_p\|_{L^1(\Omega)} = 1$ folgt, dass die rechte Seite in (47) nach oben beschränkt ist. Deshalb ist $\int_{\Omega} |Du| < \infty$ und $u \in BV(\Omega)$.

Sei \tilde{u} das konvexe Rearrangement der Funktion u . Dann gilt (siehe Kapitel 8, Theorem 32)

$$\int_{\Omega} |D\tilde{u}| \leq \int_{\Omega} |Du| . \quad (48)$$

Insgesamt ergeben (44)-(48):

$$\frac{\int_{\Omega} |D\tilde{u}|}{\int_{\Omega} u(x) dx} = \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{\int_{\Omega} |D\tilde{u}|}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \leq \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{\int_{\Omega} |D\tilde{u}|}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \leq \lim_{p \rightarrow 1^+} \inf \frac{\int_{\Omega} |Du_p|}{\int_{\Omega} u_p^p(x) dx} \leq \lambda_1 . \quad (49)$$

Jetzt will ich das Integral $\int_{\Omega} |D\tilde{u}|$ in (49) mit Hilfe der Coarea-Formel für Funktionen der beschränkten Variation (s. Theorem 14) nach unten abschätzen:

$$\frac{\int_{\Omega} |D\tilde{u}|}{\int_{\Omega} u(x) dx} = \frac{\int_{\Omega} |D\tilde{u}|}{\int_{\Omega} \tilde{u}(x) dx} \geq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| \right) dt}{\int_0^{+\infty} |\Omega_t| dt}, \quad (50)$$

wobei $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid \tilde{u}(x) > t\}$ ist. Für jedes $t > 0$ hat Ω_t lipschitzstetigen Rand, denn im Inneren von Ω ist der Rand von Ω_t glatt (s. Sätze 30, 31) und da Ω konvex ist, ist der Schnitt von $\partial\Omega_t$ mit $\partial\Omega$ lipschitzstetig. Deshalb ist für die Niveaumengen von \tilde{u} das Theorem 13 anwendbar und

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| \right) dt}{\int_0^{+\infty} |\Omega_t| dt} &= \frac{\int_0^{+\infty} \left(\int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| \right) dt}{\int_0^{+\infty} |\Omega_t| dt} \geq \frac{\int_0^{+\infty} H_{N-1}(\partial\Omega_t) dt}{\int_0^{+\infty} H_N(\Omega_t) dt} = \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \frac{H_{N-1}(\partial\Omega_t)}{H_N(\Omega_t)} H_N(\Omega_t) dt}{\int_0^{+\infty} H_N(\Omega_t) dt} \geq \inf_{t \in (0, +\infty)} \frac{H_{N-1}(\partial\Omega_t)}{H_N(\Omega_t)} = h(\Omega) = \lambda_1. \end{aligned} \quad (51)$$

(49), (50) und (51) ergeben eine Ungleichungskette, die an beiden Seiten die Konstante λ_1 hat. Aus (51) folgt dann, dass fast alle Niveaumengen von \tilde{u} Cheegersche Gebiete für Ω sind. Wir wissen aber, dass Ω ein eindeutiges Cheegersches Gebiet besitzt. Sei $S = \text{supp}(u)$. Die Menge S ist nicht leer, weil $\int_{\Omega} u_p(x) dx$ gleich 1 ist. Wenn wir jetzt zeigen, dass die Funktion $u \in L^1(\Omega)$ im Inneren von S einen stetigen Repräsentanten hat, gegen den die Funktionen u_p punktweise auf S konvergieren, dann ist $u = \tilde{u}$, auf der Menge $\{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ ist u konstant und die Behauptung des Theorems ist bewiesen.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in S$, in dem die Funktionen $|\nabla u_p|$ in jeder, beliebig kleinen Umgebung von x_0 für $p \rightarrow 1^+$ unbeschränkt sind. Wir wissen, dass $u_p(x)$ log-konkav sind, d.h.

$$u_p(x_0) \log \frac{u_p(x)}{u_p(x_0)} \leq \nabla u_p(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (52)$$

für alle $x \in \Omega$. Ich mache jetzt folgende Konstruktion:

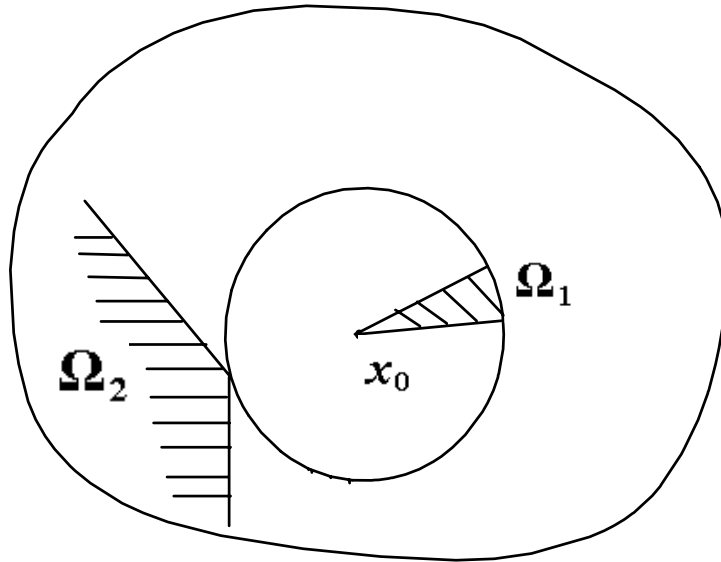


Abbildung 11

Wähle einen Sektor Ω_1 aus $U_\varepsilon(x_0)$ und eine Teilfolge $\bar{u}_p(x_0)$ von $u_p(x_0)$, so dass $\nabla \bar{u}_p(x)$ in Ω_1 unbeschränkt ist und parallel zu den Vektoren $\{v \mid v = w_1 - x_0, w_1 \in \Omega_1\}$ verläuft. Nehme auch einen Sektor Ω_2 , wie in der Abbildung 13, mit der Eigenschaft $\angle(w_1 - x_0, w_2 - x_0) > 90^\circ$, für jedes $w_1 \in \Omega_1$ und $w_2 \in \Omega_2$. Für $p \rightarrow 1^+$ und für alle $x \in \Omega_2$ folgt dann, dass die rechte Seite von (52) gegen $-\infty$ geht. D.h. $u_p(x) \rightarrow 0$ (für $p \rightarrow 1^+$) punktweise für alle $x \in \Omega_2$. Die Menge Ω_2 wird zu einer Halbebene, wenn das Maß von Ω_1 gegen Null geht. Für $\varepsilon \rightarrow 0^+$ erhalten wir dann, dass der Punkt x_0 im Widerspruch zu unserer Voraussetzung nicht im Inneren von S liegt.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Im nächsten Kapitel werde ich die Niveaulinien der Lösungen des Problems (2) auf dem Quadrat $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ berechnen.

10 Numerische Berechnungen der Lösungen von (2) für $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$

Die Lösungen von (2) werde ich mit Hilfe von *Matlab*, seiner Bibliothek "*Optimization Toolbox*" und der Methode der finiten Differenzen approximieren und plotten. Dazu betrachte ich folgendes Minimierungsproblem

$$I(u) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \int_{\Omega} |u|^p dx = 1 . \quad (53)$$

Um die Berechnungszeit zu verkürzen, benutze ich die Symmetrieeigenschaft des Gebietes Ω bezüglich der Geraden

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \end{aligned} \quad (54)$$

Mit Hilfe der Steinerscher Symmetrisierungsverfahren und Polya-Szegö Ungleichung, die unten angegeben werden, kann man zeigen (siehe [K1]), dass die Lösungen des Problems (2) symmetrisch bezüglich der Geraden (54) sind.

Definition 35 Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $x = (x', y)$, wobei $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ betrachte die eindimensionale Niveaumenge von u

$$\Omega_c(u(x', \cdot)) := \{y \in \mathbb{R} \mid u(x', y) \geq c\}$$

und definiere

$$\Omega_c^*(u(x', \cdot)) := \begin{cases} [-\frac{1}{2} |\Omega_c(u(x', \cdot))|, \frac{1}{2} |\Omega_c(u(x', \cdot))|] & \text{falls } \Omega_c(u(x', \cdot)) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Omega_c^*(u) := \bigcup_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}} \{x'\} \times \Omega_c^*(u(x', \cdot)) .$$

Dann wird die Funktion $u^*(x) := \sup \{c \in \mathbb{R} \mid x \in \Omega_c^*\}$ Steinersche Symmetrisierung der Funktion u in Richtung y genannt.

Da das $(N - 1)$ -dimensionale Hausdorffmaß der Niveaumengen $\Omega_c(u(x', \cdot))$ und $\Omega_c^*(u(x', \cdot))$ gleich ist, gilt für $\Omega^* := \Omega_c^*(u)$:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{\Omega^*} |u^*(x)|^p dx . \quad (55)$$

Theorem 36 (Polya-Szegö Ungleichung) Für die Funktionen u, u^* aus der Definition 35 und jedes $p \in (0, \infty)$ gilt

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p dx . \quad (56)$$

Aus (55) und (56) folgt dann, dass die Funktion u_p als Lösung des Minimierungsproblems (53) symmetrisch bezüglich der Geraden (54) sein muß, denn die Mengen Ω und Ω^* sind in diesem Fall gleich. Deshalb ist es ausreichend, die Methode der finiten Differenzen auf dem Dreieck $\{(x, y) \in \Omega \mid 0 \leq x \leq y \text{ und } y \geq 0\}$ anzuwenden. Das Dreieck werde ich triangulieren, d.h. in mehrere kleinere Dreiecke unterteilen. Danach diskretisiere ich das Problem (53), indem ich die Funktionswerte von u_p in der Ecken der Triangulierung betrachte. Anschliessend berechne ich das Integral $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$ und bestimme die Lösung des diskretisierten Problems mit Hilfe der *constr*-Funktion aus dem "*Optimization-Toolbox*" von *Matlab*.

Die Integrale $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx$ für das diskretisierte Problem berechne ich wie folgt:

```
% Der unten stehende Code wird im File plap(u,p).m gespeichert.
function [val,con] = plap(u,p)
n=(1/2)*(sqrt(1+8*length(u))-1);
A=zeros(n+1,n+1);
zaehler=1;
for j=1:1:n
for i=n+1:-1:n+2-j
A(i,j)=u(zaehler);
zaehler=zaehler+1;
end
end
grsumme=0;
flsumme=0;
for j=1:1:n
for i=n+1:-1:n+2-j
vektor1=[1/n 1/n A(i-1,j+1)-A(i,j)];
vektor2=[1/n 0 A(i,j+1)-A(i,j)];
t=cross(vektor1,vektor2);
t1=t(1);
t2=t(2);
t3=t(3);
grad3=(sqrt(t1*t1+t2*t2))/t3;
```

```

t4=t*[(j-1)/n (n+1-i)/n A(i,j)];
grsumme=grsumme+(1/2)*(1/(n*n))*(abs(grad3)^p);
integrnd1=inline('abs((1/t3)*(t4-t1*x-t2*y)).^p.*(y-x<=0)', 'x', 'y', //
't1', 't2', 't3', 't4', 'p');
flsumme=flsumme+dblquad(integrnd1, (j-1)/n, ((j-1)/n)+(1/n), (n+1-
i)/n,
((n+1-i)/n)+(1/n), [], [], t1, t2, t3, t4, p);
end
end
for i=n:-1:2
for j=n-i+2:1:n
vektor1=[0 1/n A(i+1,j)-A(i,j)];
vektor2=[1/n 0 A(i,j+1)-A(i,j)];
t=cross(vektor1,vektor2);
t1=t(1);
t2=t(2);
t3=t(3);
grad3=(sqrt(t1*t1+t2*t2))/t3;
t4=t*[(j-1)/n (n+1-i)/n A(i,j)];
grsumme=grsumme+(1/2)*(1/(n*n))*(abs(grad3)^p);
integrnd2=inline('abs((1/t3)*(t4-t1*x-t2*y)).^p.*(x-y<=0)', 'x', 'y', //
't1', 't2', 't3', 't4', 'p');
flsumme=flsumme+dblquad(integrnd2, ((j-1)/n), ((j-1)/n)+(1/n), //
(n-i)/n, ((n-i)/n)+(1/n), [], [], t1, t2, t3, t4, p);
end
end
val=grsumme;
con=flsumme-(1/8);

% Die Lösung des diskretisierten Problems wird wie folgt berechnet:
p=1.5;
u0=[4 3 3 2 2 2 1 1 1];
options(1)=1;

% Die Nebenbedingung des Problems besteht aus einer Gleichung.
options(13)=1;
u=constr('plap', u0, options, [0 0 0 0 0 0 0 0 0], [], [], p);

% Danach wird die Lösung auf das ganze Gebiet  $\Omega$  symmetrisch
% fortgesetzt:
function out=matr(v)

```

```

n=(1/2)*(sqrt(1+8*length(v))-1);
A=zeros(n+1,n+1);
zaehler=1;
for j=1:1:n
for i=n+1:-1:n+2-j
A(i,j)=v(zaehler);
zaehler=zaehler+1;
end
end
for i=2:1:4
for j=1:1:5
A(i,j)=A(6-j,6-i)
end
end
B=A(1:5,2:5);
B1=flipr(B);
D=[B1 A];
B=D(1:4,:);
B1=flipud(B);
out=[D;B1];

```

%Die Lösung wird geglättet:

```

H=matr(u);
[xi,yi]=meshgrid(-1:0.05:1);
zi3=interp2(X,Y,H,xi,yi,'bicubic');

```

%Die Niveaulinien der Lösung werden mit Hilfe der Funktion *contour* geplottet:

```

contour(xi,yi,zi3);

```

%Der Funktionsgraph wird mit Hilfe der Funktion *surf* geplottet:

```

surf(xi,yi,zi3);

```

Die Eingabe von verschiedenen Werten von p ergibt dann folgende Bilder:

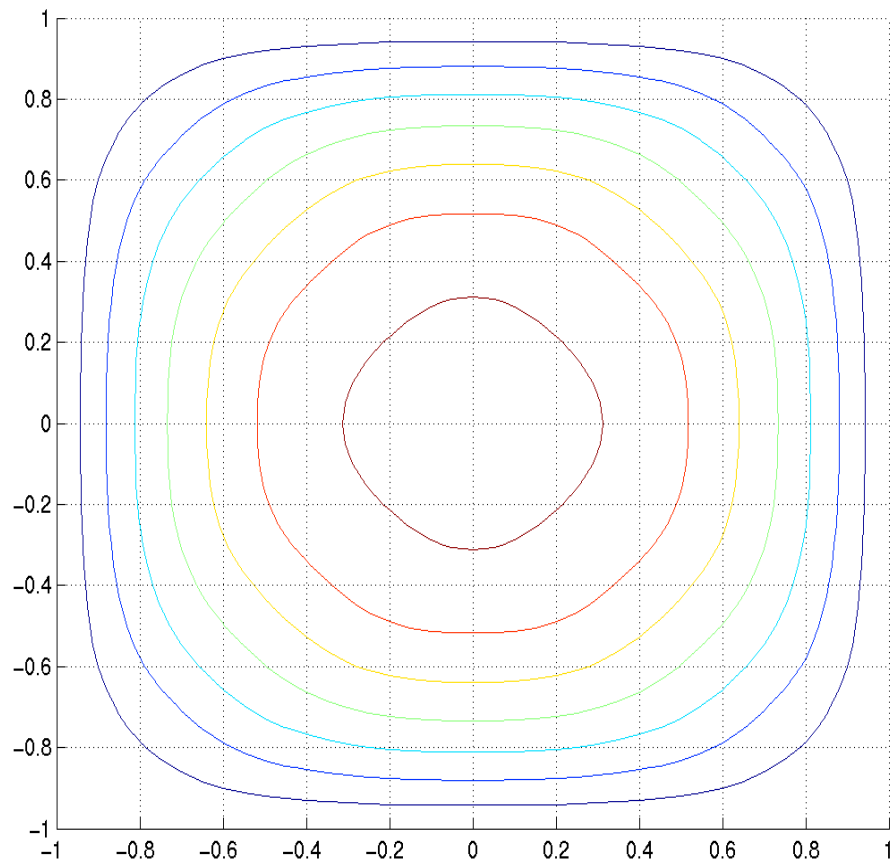


Abbildung 12: Niveaulinien von u_p , $p = 1.5$

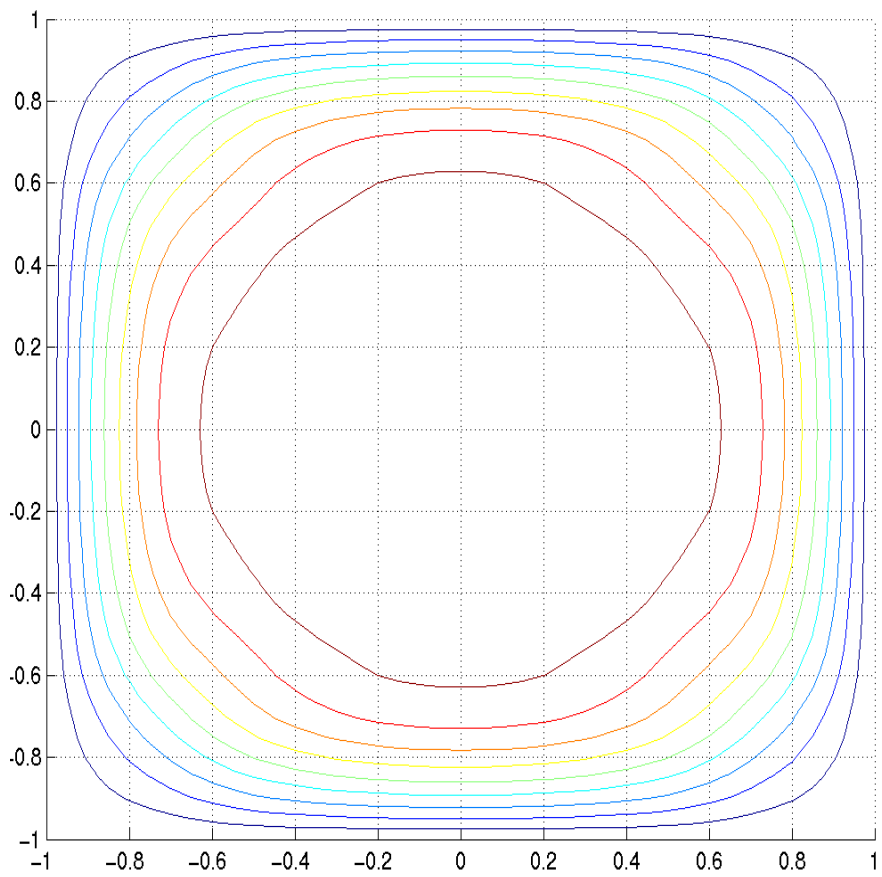


Abbildung 13: Niveaulinien von u_p , $p = 1.2$

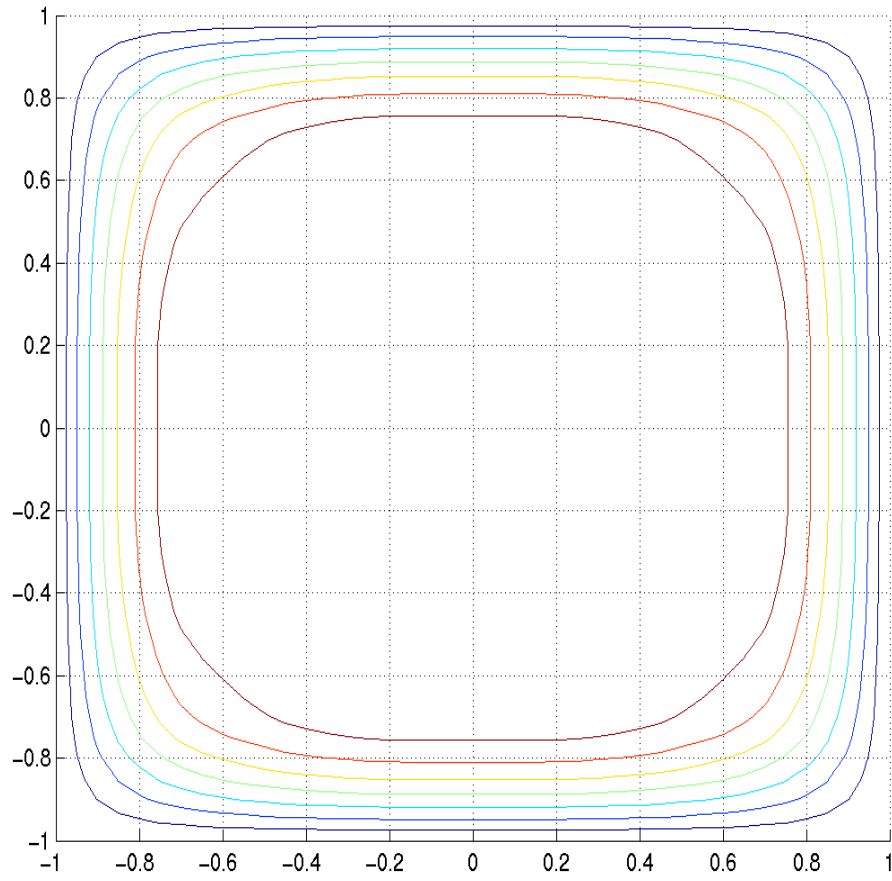


Abbildung 14: Niveaulinien von u_p , $p = 1.07$

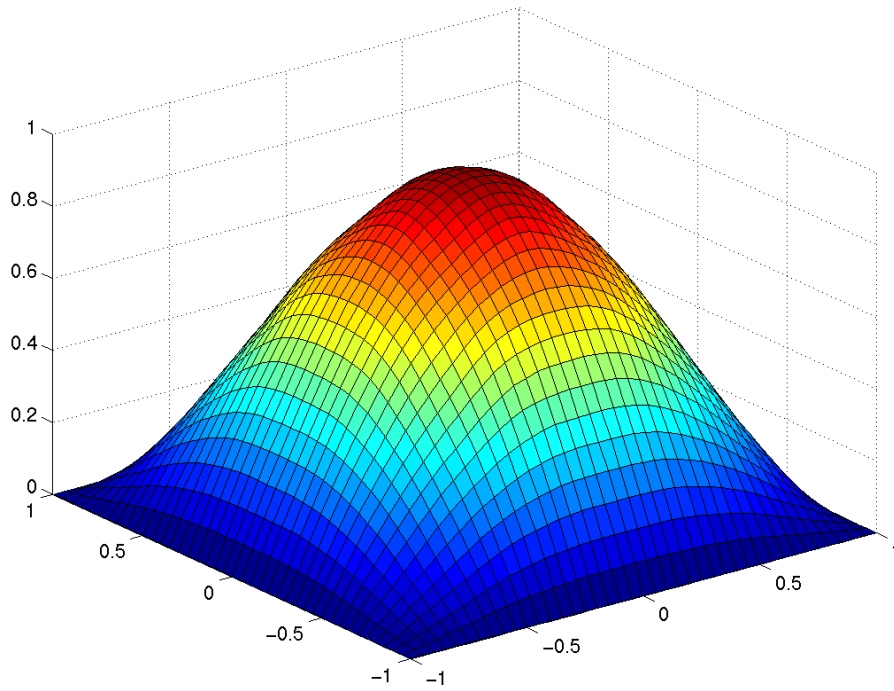


Abbildung 15: Graph von u_p , $p = 1.5$

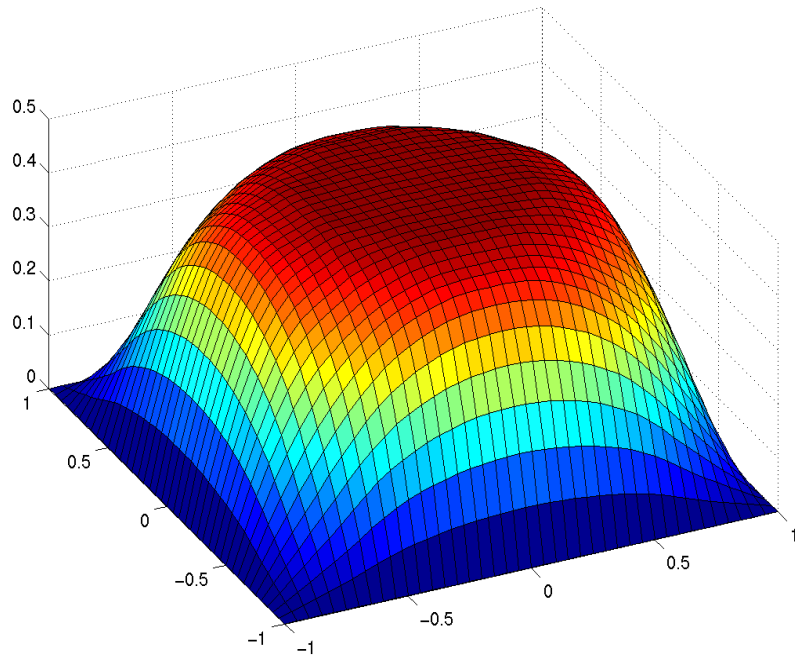


Abbildung 16: Graph von u_p , $p = 1.2$

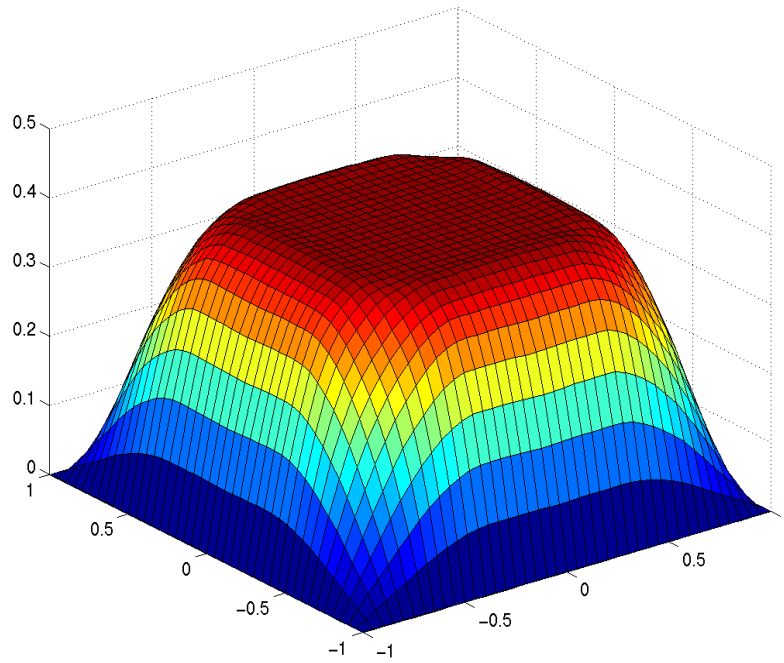


Abbildung 17: Graph von u_p , $p = 1.07$

Qualitativ zeigen die oben durchgeführten numerische Berechnungen, dass die Lösungen des Problems (2) auf einem konvexen Teilgebiet des Quadrates Ω für $p \rightarrow 1^+$ gegen eine Konstante konvergieren. Aus dem Theorem (34) wissen wir, dass diese Menge ein Cheegersches Gebiet für Ω ist. Die genaue Gestalt des Cheegerschen Gebietes wurde im Beispiel (21) ausgerechnet.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: $\lambda_p(0, 1)$, $N = 1$	10
Abbildung 2: u_p auf $(0, 1)$	12
Abbildung 3: ω auf $(-a, a)^2$	19
Abbildung 4: Hantelgebiet	20
Abbildung 5	21
Abbildung 6	26
Abbildung 7: $u_p = u_p(r)$, $N > 1$	36
Abbildung 8	38
Abbildung 9: Stadiongebiet	45
Abbildung 10	46
Abbildung 11	50
Abbildung 12: Niveaulinien von u_p , $p = 1.5$	55
Abbildung 13: Niveaulinien von u_p , $p = 1.2$	56
Abbildung 14: Niveaulinien von u_p , $p = 1.07$	57
Abbildung 15: Graph von u_p , $p = 1.5$	58
Abbildung 16: Graph von u_p , $p = 1.2$	59
Abbildung 17: Graph von u_p , $p = 1.07$	60

12 Literaturverzeichnis

- [B] T.Bhattacharya: *Some results concerning the eigenvalue problem for the p -laplacian*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica **14** (1990), 325-343.
- [C] I.Chavel: *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [CGG] Y.Chen, Y.Giga, S.Goto: *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geometry **33** (1991), 749-786.
- [Ch] J.Cheeger: *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, in: Problems in Analysis, A Symposium in Honor of Salomon Bochner, R.C. Gunning, Princeton Univ. Press (1970), 195-199.
- [D] F.Demengel: *Theorèmes d'existence pour des équations avec l'opérateur 1-Laplacien, première valeur propre pour $-\Delta_1$* , C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **334** (2002), 1071-1076.
- [Di] J.I.Diaz: *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol. 1: Elliptic equations*, Research Notes in Mathematics **106** (1985), Pitman advanced publishing program, London.
- [E] L.Evans, R.Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in advanced mathematics, CRC Press, 1992.
- [G] E.Giusti: *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [H] Y.X.Huang: *On the eigenvalues of the p -laplacian with varying p* , Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), 3347-3354.
- [Ha] H. Hadwiger: *Über das Volumen der Parallelmengen*, Mitt. Naturforsch. Ges. Bern (N.F) **3** (1946), 121-125.
- [K] N.J.Korevaar: *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana University Mathematics Journal **32** (1983), 603-614.

- [K1] B.Kawohl: *Symmetrization-or how to prove symmetry of solutions to a PDE*, Jäger, W. (ed.) et al., Partial differential equations: theory and numerical solution. Proceedings of the ICM'98 satellite conference, Prague, Czech Republic, August 10–16, 1998. Boca Raton, Chapman Hall/CRC Res. Notes Math. **406** (2000), 214-229.
- [K2] B.Kawohl: *On a family of torsional creep problems*, J. reine angew. Math. **410** (1990), 1-22.
- [KF] B.Kawohl, V.Fridman: *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p -Laplace operator and the Cheeger constant*, Comm. Math. Univ. Carolinae, erscheint demnächst.
- [KL] B.Kawohl, M.Longinetti: *On radial symmetry and uniqueness of positive solutions of a degenerate elliptic eigenvalue problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) **68** (1988), T459-T460.
- [JLM] P.Juutinen, P.Lindqvist, J.J.Manfredi: *The ∞ -eigenvalue problem*, Arch. Rational. Mech. Anal. **148** (1999), 89-105.
- [L] P.Lindqvist: *On a nonlinear Eigenvalue Problem*, Preprint “Minicorsi di Analisi Matematica”, Padova, 2000.
- [L1] P.Lindqvist: *On a nonlinear eigenvalue problem: Stability and Concavity*, preprint, 1990, Djursholm.
- [LU] O.Ladyzhenskaya, N.Ural'tseva: *Linear and Quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, 1968.
- [LW] L.Lefton, D.Wei: *Numerical approximation of the first eigenpair of the p -Laplacian using finite elements and the penalty method*, Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997), 389-399.
- [Ô] M. Ôtani: *A remark on certain nonlinear elliptic equations*, Proceedings of the Faculty of Science, Tokai University **19** (1984), 23-28.
- [R] R.T.Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University, 1970.
- [S] S.Sakaguchi: *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie IV (Classe di Scienze) **14** (1987), 403-421.

[SW] J.Stoer, C.Witzgall: *Convexity and optimization in finite dimensions*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[SZ] E.Stredulinsky, W.P.Ziemer: *Area minimizing sets subject to a volume constraint in a convex set*, J. Geom. Anal. **7** (1997), 653-677.

[TH1] F. de Thélin: *Quelques résultats d'existence et de non-existence pour une E.D.P. Elliptic non linéaire*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **299** (1984), 911-914 .

[TH2] F. de Thélin: *Sur l'espace propre associe a la première valeur propre du pseudo-laplacien*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **303** (1986), 355-358.

[Tr] N.Trudinger: *On a Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Communication on Pure and Applied Mathematics **20** (1967), 721-747.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschliesslich Tabellen und Abbildungen - die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe, dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegt hat, dass sie - abgesehen von meinen angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist, sowie, dass ich solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. B. Kawohl betreut worden.

Köln, im Juli 2003

Vladislav Fridman

Teilpublikationen:

1. B. Kawohl, V. Fridman: *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p -Laplace Operator and the Cheeger constant*, Comm. Math. Univ. Carolinae, erscheint demnächst.

Lebenslauf

Persönliche Information:

- Vorname, Name: Vladislav Fridman
- Familienstand: ledig
- Staatsangehörigkeit: Ukraine
- Geburtsdatum: 06.03.1976
- Geburtsort: Charkow (Ukraine)

Ausbildung:

- 09/1982 – 06/1990 Schule Nr. 135 in Charkow (Ukraine)
09/1990 – 06/1992 Schule-Lyzeum Nr. 89 in Charkow
09/1992 – 02/1996 Studium an der Charkower Staatlichen
Universität, Fachrichtung Mathematik
10/1997 – 01/2001 Studium an der Universität zu Köln
Hauptfach: Mathematik,
Nebenfach: Informatik.
Abschluss: Diplom-Mathematiker
02/2001 – laufend Promotionsstudium an der Universität zu Köln

Berufserfahrung:

- 10/2000 – 01/2001 Studentische Hilfskraft an der
Universität zu Köln
01/2001 – laufend Wissenschaftliche Hilfskraft an der
Universität zu Köln