

# **Mathematische Methoden zur Bildbearbeitung**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Markus Mester

aus Engelskirchen

Köln, 2003

Berichterstatter: Prof. Dr. B. Kawohl  
Prof. Dr. R. Seydel

Tag der mündlichen Prüfung: 14.01.2004

## **Zusammenfassung:**

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zum theoretischen Verständnis verschiedener mathematischer Bildbearbeitungsverfahren liefern. Sie enthält Theoreme über das Verhalten von Minimierern des sogenannten Mumford-Shah Funktionals in einer Dimension. Aufgrund dieser neuen Theoreme kann man sicher sein, daß beim mathematischen Zugang über solche Funktionale die wesentlichen Merkmale eines Bildes (Unstetigkeiten in der Helligkeit) erhalten bleiben. Ein weiterer Teil der Arbeit vergleicht verschiedene Varianten von Diffusionsfiltern. Insbesondere wird der Zugang von Perona und Malik analysiert und anhand numerischer Simulation studiert.

## **Abstract:**

This thesis is intended to make a contribution to the theoretical understanding of different mathematical image processing methods. It contains theorems about the behaviour of minimizers of the so called Mumford-Shah functional in one dimension. These new theorems show, that in the mathematical approach via such functionals the essential features of an image (discontinuities of brightness) are preserved. Another part of the thesis compares different variants of diffusion filters. In particular the approach of Perona and Malik is analyzed and further investigated by means of numerical simulation.

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Das Mumford-Shah Funktional</b>	<b>6</b>
1.1	Funktionenklassen . . . . .	6
1.2	Existenz einer Lösung . . . . .	12
1.3	Approximationen des Mumford-Shah Funktionals . . . . .	13
1.3.1	Approximation durch elliptische Funktionale . . . . .	15
1.3.2	Das stückweise konstante Mumford-Shah Modell . . . . .	17
1.4	Eigenschaften einer Lösung . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Das Mumford-Shah Funktional im Eindimensionalen</b>	<b>20</b>
2.1	Das Anfangsbild $g$ in der Form $\chi_{[b_1, b_2]}$ . . . . .	22
2.1.1	Der Minimierer sei stetig . . . . .	23
2.1.2	Der Minimierer habe eine Sprungstelle . . . . .	24
2.1.3	Der Minimierer habe zwei Sprungstellen . . . . .	43
2.2	Das Anfangsbild $g$ in der Form $\chi_{[b_1, b_2]} + \chi_{[b_3, b_4]}$ . . . . .	44
2.2.1	Der Minimierer sei stetig . . . . .	44
2.2.2	Der Minimierer habe eine Sprungstelle . . . . .	45
2.2.3	Der Minimierer habe 2 Sprungstellen . . . . .	48
2.2.4	Der Minimierer habe 3 Sprungstellen . . . . .	51
2.3	Das Anfangsbild $g$ in allgemeiner Form . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Bildbearbeitung mit partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>60</b>
3.1	Einleitung . . . . .	60
3.2	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	61
3.3	Scale-Space Theorie und Kantenerkennung . . . . .	65
3.4	Mean Curvature Motion (MCM) . . . . .	69
3.5	Shock Filter . . . . .	72
3.6	Die Perona-Malik Gleichung . . . . .	76
3.6.1	Maximum-Prinzip für die Perona-Malik Gleichung . . . . .	83
3.6.2	Variationelle Formulierung der Perona-Malik Gleichung . . . . .	84
3.6.3	Stufenbildung - staircasing effect . . . . .	85

<b>4</b>	<b>Von Mumford-Shah zu Perona-Malik</b>	<b>93</b>
4.1	Das zugehörige Energiefunktional . . . . .	94
4.2	Stabilitätsaussagen . . . . .	96

# 0 Einleitung

Kaum ein anderes Gebiet in der Mathematik hat sich in den letzten zehn bis fünfzehn Jahren so schnell ausgebreitet und etabliert wie die mathematische Bildbearbeitung. Aufgrund der Leistungsstärke heutiger Computer ist es überhaupt erst möglich geworden, dem Datenvolumen und der Komplexität der hier angewendeten Methoden gerecht zu werden. Das gesamte Gebiet ist zudem sehr facettenreich. Neben der Segmentierung und Restaurierung von Bildern beinhaltet es auch Bereiche wie Bildkompression, Bearbeitung von Bildsequenzen (Filmen) oder Kantenerkennung. Die dabei verwendeten mathematischen Techniken sind demzufolge ebenso vielfältig und behandeln neben der Minimierung nichtkonvexer Funktionale auch andere Fragestellungen aus der Variationsrechnung sowie Methoden der partiellen Differentialgleichungen, wie zum Beispiel Viskositätslösungen und schwache Lösungen. Außerdem werden Krümmungsflüsse aus der Differentialgeometrie oder Teilbereiche der Fourier-Analyse benutzt.

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Segmentierung und der Restaurierung von Bildern. Bei der Bildsegmentierung kommt es darauf an, die signifikanten Objekte und deren Ränder aus einem Bild zu extrahieren, wie es zum Beispiel bei der Auswertung von Satellitenfotos oder Röntgenbildern in der Medizin von Bedeutung ist. Als Bild wird eine Abbildung  $u$  aufgefaßt, die auf einem Gebiet  $\Omega$  definiert ist, wobei die Elemente aus  $\Omega$  in ein reelles Intervall abgebildet werden.  $\Omega$  versteht man in der Regel als ein Rechteck, das die Maße des Bildes widerspiegelt. Die Elemente aus  $\Omega$  werden als reelle Bildpunkte oder im numerischen Zusammenhang als Pixel bezeichnet, und die Wertemenge beinhaltet die Grauwerte der Bildpunkte. Dabei handelt es sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit um das Intervall  $[0, 255]$ , das die Grauwerte von 0 (schwarz) bis 255 (weiß) enthält. Um nun ein vorgegebenes Ausgangsbild zu segmentieren, versucht man mit Hilfe variationeller Methoden das von Mumford und Shah [MS89] eingeführte Funktional

$$F(u, K) := \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx + \gamma \mathcal{H}^{(n-1)}(K)$$

zu minimieren.  $K$  beschreibt hierbei die Menge aller Unstetigkeitsstellen von  $u$ , die die Kanten des Bildes repräsentieren. Das vorliegende Funktional hat sich für die Bildsegmentierung als Standard etabliert.

Die Bildrestaurierung hingegen beschäftigt sich mit der Wiederherstellung eines gestörten Ausgangsbildes. Dabei hängt die Methodik von der Beschaffenheit dieses Anfangsbildes ab. So können bei der Datenübertragung Fehler im Anfangsbild entstehen, die zur Folge haben, daß das Bild einzelne zerstörte Pixel oder gar ganze Löcher aufweist. Es können auch Bildmängel wie Verschwommenheit und Unschärfe durch den fotografischen Vorgang selbst entstehen. Bei der Bildrestaurierung werden zeitabhängige partielle Differentialgleichungen verwendet, welche die Evolution des Anfangsbildes hin zu einer verbesserten Qualität beschreiben. Da die relevanten Teile eines Bildes - wie beispielsweise die Konturen - aus Unstetigkeitsstellen in der Bildfunktion bestehen, die es zu erhalten oder zu erzeugen gilt, ist die zugehörige partielle Differentialgleichung häufig von hoher Komplexität und führt in den meisten Fällen zu mathematisch nicht korrekt gestellten Problemen. So kommt es vor, daß für die verwendeten Gleichungen keine oder nur eine sehr schwache Lösungstheorie existiert. Eine solche Gleichung ist die anisotrope Diffusionsgleichung von Perona und Malik [PM90], deren Eigenschaften wir untersuchen und anhand numerischer Simulation diskutieren werden. Schließlich wird ein Zusammenhang des bei der Segmentierung verwendeten Mumford-Shah Funktionals und der Perona-Malik Gleichung aufgezeigt. Außerdem sehen wir, daß einige Evolutionsgleichungen für große Zeitwerte Segmentierungseigenschaften besitzen.

## **Aufbau der Arbeit**

Die Arbeit ist in vier Kapitel unterteilt. Dabei beschäftigen wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit der Bildsegmentierung anhand des Mumford-Shah Funktionals. Im ersten Kapitel wird das Funktional erläutert. Dabei wird auf die unterschiedlichen Funktionenklassen eingegangen, in denen man nach Minimierern sucht. Desweiteren werden Existenz und Eigenschaften von Minimierern sowie verschiedene Approximationsmethoden angegeben.

Im zweiten Kapitel wird das Funktional in einer Raumdimension betrachtet. Innerhalb dieser werden Minimierer zu Ausgangsbildern in Form von Treppenfunktionen explizit berechnet. Dabei wird das Funktional zunächst unter der Nebenbedingung minimiert, daß die Anzahl der Unstetigkeitsstellen des Minimierers vorgegeben ist. Später wird diese Anzahl sukzessiv erhöht. Aus der anschließend nachgewiesenen Konkavität des Energiefunktional in Abhängigkeit von den Unstetigkeitsstellen lassen sich Aussagen über die Lage der entsprechenden Stellen treffen.

Das dritte Kapitel liefert eine Übersicht über verschiedene Bildbearbeitungsmethoden, die sich anhand partieller Differentialgleichungen beschreiben lassen. Dabei werden die Eigenschaften verschiedener Methoden analysiert, wobei ausführlicher auf die aniso-

trophe Diffusionsgleichung von Perona und Malik eingegangen wird. In diesem Kontext wird die Stufenbildung diskutiert und anhand numerischer Beispiele verdeutlicht. Im vierten Kapitel wird schließlich ein Zusammenhang zwischen dem Mumford-Shah Funktional und der Perona-Malik Gleichung erläutert. Außerdem werden Stabilitätsaussagen für eine anisotrope Gleichung angegeben, die aus dem Mumford-Shah Funktional abgeleitet wird. Diese besagen, daß das restaurierte Bild in der Nähe des Ausgangsbildes liegt.

## Bemerkungen

An dieser Stelle soll kurz auf die abgebildeten Figuren und Fotos sowie die Softwarepakete, die zur deren Erstellung benutzt wurden, eingegangen werden. So sind die im zweiten Kapitel angegebenen Abbildungen und die Energiewerte mit dem Computeralgebraprogramm `Maple` erstellt und berechnet worden. Dieses Programm diente auch dazu, die Korrektheit der umfangreichen algebraischen Umformungen zu überprüfen. Die Abbildungen 1.5-1.7, 3.1, 3.3-3.6, 3.8 und 3.9 wurden mit dem freien Softwarepaket `MegaWave` (<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave>) der École Normale Supérieure de Cachan bearbeitet und visualisiert. Abbildungen und Bilder, die aus der Anwendung der anisotropen Diffusionsgleichung hervorgehen (3.11-3.12, 3.14-3.16, 3.18 und 4.1), entstanden mit einem von Dr. H.-G. Reschke implementierten Programm, welches er im Rahmen seiner Dissertation [Res01] über eine parabolische Version der Minimalflächengleichung erstellt und darüber hinaus auf Probleme in der Bildbearbeitung angepaßt hat. Die dadurch entstandenen Daten wurden von mir in eine graphische Gestalt überführt.

## Dank

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. B. Kawohl. Bei der Anleitung zu dieser Arbeit fand er stets die Zeit auf alle Fragen einzugehen, wodurch eine überaus angenehme Arbeitsatmosphäre entstanden ist.

Dr. Alfred Wagner danke ich für die vielen Diskussionen und Hinweise und für das stets offene Ohr.

Desweiteren danke ich Dr. Hans-Günther Reschke für das Anpassen und zur Verfügung stellen seines Programmes.



# 1 Das Mumford-Shah Funktional

## 1.1 Funktionenklassen

Im Jahre 1989 führten David Mumford und Jayant Shah [MS89] ein Modell zur Bildsegmentierung ein. Gesucht ist darin ein Paar, bestehend aus einer Abbildung  $u$  und einer Menge  $K \subset \Omega$ , wobei die Menge  $K$  die Unstetigkeitsstellen der Abbildung  $u$  darstellt. Das Funktional, welches durch  $(u, K)$  minimiert wird, besteht aus drei Komponenten und besitzt die folgende Gestalt:

$$F(u, K) := \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx + \gamma \mathcal{H}^{(n-1)}(K). \quad (1.1)$$

$\alpha, \beta$  und  $\gamma$  seien hierbei nicht negative Konstanten,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  das Ausgangsbild und  $\mathcal{H}^{(n-1)}(K)$  das  $(n - 1)$  - dimensionale Hausdorffmaß von  $K$  (für  $n = 2$  die Länge von  $K$ ). In ihrem Artikel [MS89] verfaßten die beiden Autoren die folgende Vermutung:

*Vermutung: Es existiert ein Minimierer von  $F$  derart, daß die Unstetigkeitsmenge  $K$  aus der Vereinigung von  $C^{1,1}$  - Kurven  $\gamma_i$  besteht. Außerdem endet jede Kurve als abbrechende Kante ('crack-tip'), schneidet den Rand von  $\Omega$  oder trifft auf zwei weitere Kurven in einem Knotenpunkt (Triple-Punkt). Im letzteren Fall bilden jeweils zwei Kurven einen Winkel von  $120^\circ$  (siehe dazu auch Abbildung 1.1).*

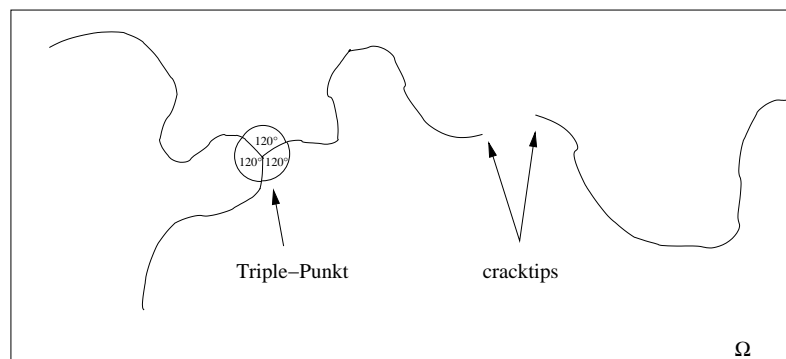


Abbildung 1.1: Formen von  $C^{1,1}$  - Kurven des Minimierers

Hierbei bemerken wir, daß - sofern die Mumford-Shah Vermutung zutrifft - diese Regularitätseigenschaften des Minimierers zu Verfälschungen des Ausgangsbildes führen, da aufeinandertreffende Kanten innerhalb des Anfangsbildes  $u_0$  stets in Winkel von 120 Grad überführt werden. Dies führt dazu, daß Gabelungen (Abb. 1.2) bzw. Kreuzungen (Abb. 1.3) verfälschte Formen annehmen.

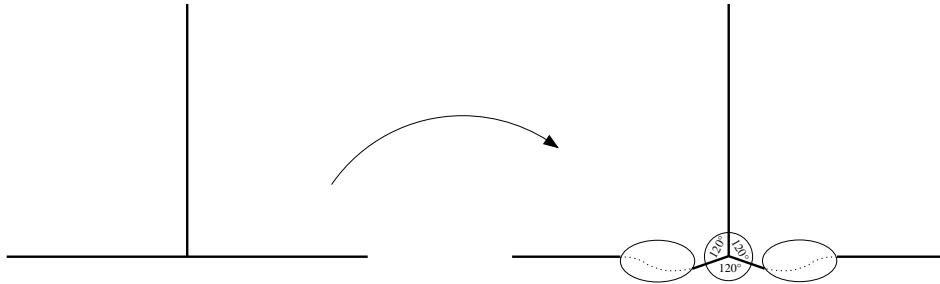


Abbildung 1.2: Eine Gabelung unter Einfluß des Mumford-Shah Funktionals

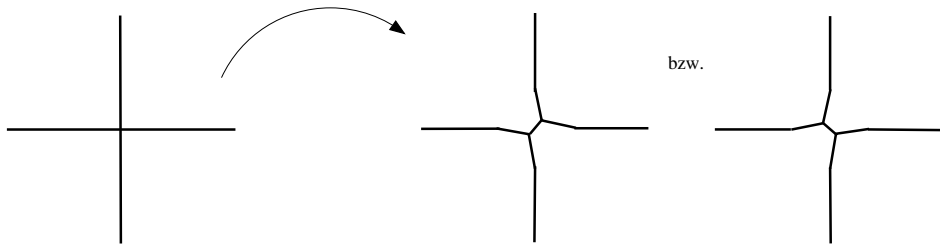


Abbildung 1.3: Eine Kreuzung unter Einfluß des Mumford-Shah Funktionals

Das Beispiel der Kreuzung verdeutlicht bereits, daß wir keine Eindeutigkeit der Lösung erwarten können, sofern die Vermutung zutrifft. Die Verfälschungen, welche aufgrund der Vermutung auftreten, lassen sich intuitiv erklären, indem wir lediglich den Hausdorffteil des Funktionals betrachten. Bei der Minimierung dieses Terms erhalten wir für die Kantenmenge eine Art Minimalflächengleichung in einer Dimension, bei deren Lösung sogenannte Steinerpunkte oder -knoten auftreten, die durch die 120-Grad-Winkel charakterisiert sind. Die Steinerpunkte treten in minimalen Steinerbäumen auf. Dabei versucht man, eine vorgegebene Menge von Punkten in der euklidischen Ebene durch Liniensegmente so zu verbinden, daß ein zusammenhängender Graph minimaler Länge entsteht. Anwendung finden die Steinerbäume z.B. im Chip-Design bei der Verdrahtung von Netzen zwischen verschiedenen Anschlüssen (Pins) oder auch beim Opaque-Square Problem (siehe dazu auch [Kaw97]).

Bevor wir uns mit der weiteren Analyse des Funktional befassen, suchen wir eine geeignete Klasse von Funktionenräumen, in der wir nach dem Minimierer  $(u, K)$  suchen, da wir a priori nicht davon ausgehen können, daß  $K$  aus der Vereinigung von relativ glatten Kurven besteht. Zunächst einmal betrachten wir  $K \subset \Omega$  als abgeschlossene Menge und  $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$ . Wir beobachten, daß das Funktional in der Hinsicht minimal ist, als daß keine der drei Komponenten weggelassen werden kann, ohne daß das Infimum des Funktional zu Null wird. Setzen wir beispielsweise  $\alpha = 0$ , so nimmt das Funktional für  $u = u_0$  und  $K = \emptyset$  das Minimum 0 an. Analog ist dies für  $u = 0$  und  $K = \emptyset$  der Fall, sofern wir  $\beta = 0$  setzen. Für  $\gamma = 0$  wird das Infimum 0 durch eine Folge von Treppenfunktionen  $u_n$  mit  $u_n \rightarrow u_0$  in  $L^2(\Omega)$  angenommen, da für diese Folge  $\nabla u_n = 0$  gilt.

**Bemerkung 1.1** *Der Fall  $\beta = 0$  wurde für festes  $K$  von Mumford und Shah [MS89], Morel und Solmini [MS94] bzw. von Massari und Tamanini [MT91] untersucht. Eine Betrachtung des Funktional auf dem Raum der stückweise konstanten Funktionen erfolgt im Abschnitt 1.3.2 auf Seite 17.*

Eine der Hauptschwierigkeiten des Mumford-Shah Funktional ist die Tatsache, daß das Auffinden der beiden Unbekannten  $u$  und  $K$  auf unterschiedliche Weise erfolgt. Zum einen ist  $u$  eine Abbildung auf einer Menge der Dimension  $n$ , während  $K$  lediglich eine  $(n - 1)$  - dimensionale Menge darstellt. Desweiteren ist es von Interesse, eine Topologie zu finden, bzgl. derer  $F$  unterhalbstetig ist und minimierende Folgen gewisse Kompaktheitseigenschaften aufweisen, um z.B. die direkte Methode der Variationsrechnung anwenden zu können. Jedoch scheitert dieses Vorhaben daran, daß die Abbildung, welche eine Borelmenge  $E$  auf ihr  $(n - 1)$  - dimensionales Hausdorffmaß abbildet, nicht unterhalbstetig bzgl. einer kompakten Topologie ist. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Beispiele:

❶. Beispiel: Wir definieren

$$\begin{aligned} S_1 &:= \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ S_2 &:= \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ S_3 &:= \left[0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \text{ etc.} \end{aligned}$$

Der Hausdorff-Abstand zweier Mengen  $A$  und  $B$  wird durch

$$\text{dist}(A, B) = \max \left( \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \text{dist}(A, b) \right)$$

definiert, wobei  $\text{dist}(p, Q) = \inf_{q \in Q} |p - q|$  den Abstand eines Punktes  $p$  von einer Menge  $Q$  bezeichnet. Die Mengen  $S_i$  konvergieren bzgl. der durch den Hausdorff-Abstand induzierten Hausdorff-Metrik gegen  $S_\infty = [0, 1]$ , wohingegen  $1 = \mathcal{H}^1(S_\infty) > \liminf \mathcal{H}^1(S_k) = \frac{1}{2}$  gilt.

②. Beispiel: Wir betrachten in  $\mathbb{R}^n$  die Folge  $x_i$  aller rationalen Punkte und definieren

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_i| \leq 2^{-i}\}, \quad E_k := \bigcup_{i=0}^k B_i \quad \text{und} \quad E := \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i.$$

Dann ist das  $(n - 1)$ - dimensionale Lebesguemaß von  $E$

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |B_i| = \omega_n \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-in} = \frac{\omega_n}{1 - 2^{-n}} < \infty,$$

wobei  $\omega_n$  das Lebesguemaß der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  sei. Da  $\mathbb{Q}^n$  dicht in  $\mathbb{R}^n$  liegt, gilt  $\overline{E} = \mathbb{R}^n$ , und  $\partial E = \overline{E} \setminus E$  besitzt unendliches Lebesguemaß. Dies impliziert  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \infty$ . Andererseits gilt

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_k) \leq \mathcal{H}^{n-1} \left( \bigcup_{i=0}^k \partial B_i \right) = n \omega_n \sum_{i=0}^k 2^{-i(n-1)} \leq n \frac{\omega_{n-1}}{1 - 2^{-(n-1)}} < \infty.$$

Dies zeigt die Notwendigkeit, eine andere Formulierung für das Funktional  $F(u, K)$  zu finden. Bei der Suche nach einem geeigneten Funktionenraum stößt man auf den Raum  $BV(\Omega)$ , den Funktionenraum von beschränkter Variation [EG92]. Ein Vorteil dieses Raumes besteht darin, daß die Kantenmenge  $K$  als Sprungmenge  $S_u$  von  $u$  aufgefaßt werden kann, womit wir die Unbekannte  $K$  eliminiert haben und zu folgender Fragestellung übergehen:

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} G(u) := \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \gamma \mathcal{H}^{(n-1)}(S_u). \quad (1.2)$$

Ein weiterer Vorteil dieser Formulierung ist die Unterhalbstetigkeit bei Funktionen, die wir, wie anhand obiger Beispiele deutlich geworden ist, bei Mengen nicht voraussetzen können. Desweiteren erfüllen BV-Funktionen die Eigenschaften, sowohl Bildkanten durch Sprünge entlang von Kurven beschreiben zu können, als auch Regularitätsbedingungen zu genügen, so daß obiges Funktional wohldefiniert ist. Bei dem Versuch, (1.2) in  $BV(\Omega)$  zu minimieren, bemerken wir, daß der Raum  $BV(\Omega)$  in dem Sinne zu groß ist, als daß er pathologische Funktionen enthält, die das Infimum von  $G(u)$  zu Null werden lassen. Zu den bekanntesten Beispielen dieser Art gehören die *Cantor-Vitali-Funktionen* (siehe dazu auch [Amb89b] und Abbildung 1.4). Diese Abbildungen sind nichtkonstant, stetig, liegen dicht in  $L^2(\Omega)$  und haben fast überall eine verschwindende erste Ableitung, so daß wir

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} G(u) = 0$$

erhalten.

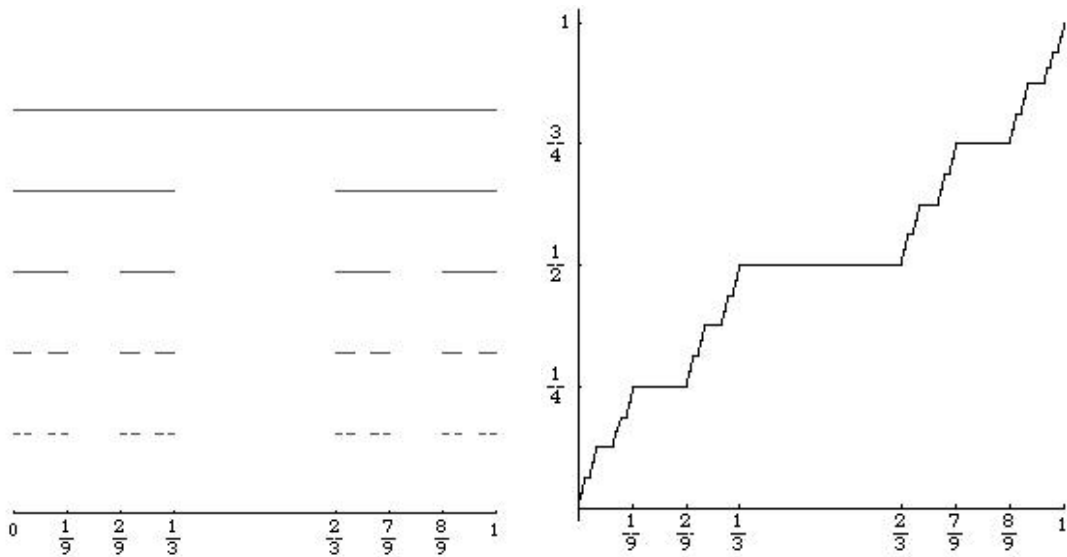


Abbildung 1.4: Links: die Cantormenge, außerhalb derer die Cantor-Vitali Funktion konstant ist  
 Rechts: Cantor-Vitali Funktion, auch unter dem Namen Devil's Staircase bekannt  
 Abgebildet ist in beiden Fällen die fünfte Iteration.

Abhilfe schafft hier die Tatsache, daß sich der Gradient einer BV-Funktion in drei Teile aufsplitten läßt, dergestalt, daß

$$Du = \nabla u \, dx + (u^+ - u^-) \, n_u \, \mathcal{H}_{|S_u}^{n-1} + C_u$$

gilt. Dabei bildet der erste Term den regulären, der zweite den Sprung- und  $C_u$  den Cantorteil des Gradienten. Gemäß De Giorgi [DG91, DGA89] definieren wir den Teilraum  $SBV$  der speziellen Funktionen von beschränkter Variation, indem wir  $C_u = 0$  fordern. Da die nichtkonstanten Abschnitte der Cantor-Vitali-Funktionen auf den Cantorteilen basieren, sind diese Funktionen nicht in  $SBV$  enthalten, womit  $SBV$  als ein geeigneter Raum erscheint, um nach Minimierern des Mumford-Shah Funktionals zu suchen.

Daß der Raum  $SBV$  nicht nur pathologische Funktionen ausschließt, sondern darüber hinaus über Eigenschaften verfügt, die bei der Minimierung des Mumford-Shah Funktionals von Bedeutung sind, zeigt uns der folgende Satz über die Kompaktheit von  $SBV$ -Funktionen.

**Satz 1.1 (Kompaktheits-Theorem für  $SBV$ -Funktionen)**

Gegeben sei eine Folge  $(u_n) \subset SBV(\Omega)$ , und es gelten die folgenden drei Bedingungen:

- ❶ Die Folge  $(u_n)$  sei in der  $BV$ -Norm gleichmäßig beschränkt.
- ❷ Die Gradienten  $\nabla u_n$  seien equi-integrabel, d.h. sie sind bezüglich der schwachen Konvergenz in  $L^1(\Omega)$  relativ kompakt.
- ❸ Es existiert eine Abbildung  $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(t)}{t} = \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{S_{u_n}} \Psi(|u_n^+ - u_n^-|) \, d\mathcal{H}^{n-1} < \infty .$$

Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_j})$  von  $(u_n)$ , welche in  $L^1(\Omega)$  gegen ein  $u \in SBV(\Omega)$  konvergiert. Desweiteren konvergiert sowohl der Lebesgue- als auch der Sprungteil des Gradienten getrennt voneinander, d.h.  $D^a u_{n_j} \rightarrow D^a u$  und  $D^j u_{n_j} \rightarrow D^j u$  im schwachen Sinne der Maß-Konvergenz.

Den Beweis dieses Satzes und weitere Aussagen über den Raum der speziellen Funktionen beschränkter Variation findet man in den Arbeiten von Alberti und Mantegazza [AM97] und bei Braides [Bra98].

## 1.2 Existenz einer Lösung

Um obige Vorüberlegungen zu rechtfertigen, betrachten wir die Kernfrage, ob beim Übergang von den Sobolevfunktionen zu den speziellen Funktionen von beschränkter Variation, d.h. von (1.1) zu (1.2), unterschiedliche Minimierer auftreten. Wie wir sehen werden, handelt es sich um ein und dieselbe Minimierungsaufgabe. Dazu betrachten wir die folgenden zwei Problemstellungen:

$$\inf_{u,K} \left\{ \begin{array}{l} F(u, K), \quad u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega), \\ K \subset \Omega, \quad K \text{ abgeschlossen, } \mathcal{H}^{n-1}(K) < \infty \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\inf_u \left\{ G(u), \quad u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \right\}, \quad (\text{II})$$

deren Äquivalenz Ambrosio [Amb89a, Amb90] mit Hilfe zweier Sätze zeigen konnte.

### Satz 1.2 ([Amb89a])

Es sei  $K \subset \Omega$  abgeschlossen,  $\mathcal{H}^{(n-1)}(K) < \infty$  und  $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega)$ .  
Dann ist  $u \in SBV(\Omega)$  und  $S_u \subset (K \cup L)$ , wobei  $\mathcal{H}^{(n-1)}(L) = 0$  gilt.

Aus Satz 1.2 folgt, daß  $\inf(\text{II}) \leq \inf(\text{I})$  gilt. Die Existenz eines Minimierers von (II) folgt aus dem folgenden Satz 1.3, den wir auf Minimalfolgen von (II) anwenden.

### Satz 1.3 ([Amb90])

Es sei  $(u_n)$  eine Folge in  $SBV(\Omega)$  und  $C > 0$  eine Konstante mit  $|u_n(x)| \leq C < \infty$  für fast alle  $x \in \Omega$  und  $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \mathcal{H}^{(n-1)}(S_{u_n}) \leq C$ .

Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})$ , die für fast alle  $x \in \Omega$  gegen ein  $u \in SBV(\Omega)$  konvergiert.

Außerdem konvergiert  $(\nabla u_{n_k})$  schwach in  $L^2(\Omega)^n$  gegen  $\nabla u$  und  $\liminf \mathcal{H}^{(n-1)}(S_{u_{n_k}}) \geq \mathcal{H}^{(n-1)}(S_u)$ .

Dabei können wir uns auf Minimalfolgen beschränken, bei denen  $|u_n|_{L^\infty(\Omega)} \leq |u_o|_{L^\infty(\Omega)}$  (ggf. durch Abschneiden) gilt. Für einen Minimierer von (II) gilt nach De Giorgi-Carriero-Leaci [DGCL89]

$$\mathcal{H}^{(n-1)}(\Omega \cap (\overline{S_u} \setminus S_u)) = 0.$$

Setzen wir nun  $K = \Omega \cap \overline{S_u}$ , so erhalten wir eine Lösung von (I) mit  $\min(I) = \min(II)$ . Somit haben wir die Existenz einer Lösung und die Äquivalenz der beiden Fragestellungen (I) und (II) sichergestellt. Ein Eindeutigkeitsresultat können wir nicht erwarten, wie wir auf der einen Seite anhand des Beispiels der Kreuzung (siehe Abbildung 1.3) gesehen haben. Auf der anderen Seite können wir den Minimierer jederzeit auf einer Menge vom  $(n - 1)$ -dimensionalen Hausdorffmaß Null abändern, ohne den Wert des Funktionals zu verändern.

### 1.3 Approximationen des Mumford-Shah Funktionals

Bei dem Versuch, das Mumford-Shah Funktional zu minimieren und den Minimierer explizit oder numerisch zu berechnen, treten einige Schwierigkeiten auf. Einerseits erscheint es wahrscheinlich, daß Teile der Kantenmenge zwischen den Gitterpunkten der numerischen Diskretisierung verlaufen; andererseits ist die Abbildung, die eine Borelmenge auf ihr Hausdorffmaß abbildet, nicht differenzierbar, so daß die Berechnung der Euler-Lagrange Gleichung auf direktem Wege nicht möglich ist. Im Abschnitt 1.4 werden wir dennoch - unter der Voraussetzung, daß ein Minimierer die Mumford-Shah Vermutung erfüllt - eine partielle Differentialgleichung angeben, welche den Minimierer von (1.1) auf den Zusammenhangskomponenten von  $\Omega \setminus K$  beschreibt. Um die soeben angesprochenen Hindernisse zu überwinden, approximiert man das Funktional  $F(u, K)$  bzw.  $G(u)$  durch eine Folge  $F_\varepsilon$ , die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  im Sinne der Gamma-Konvergenz (i.e.  $\Gamma$ -Konvergenz) gegen  $F$  konvergiert. Der Begriff der Gamma-Konvergenz wurde vor ca. 30 Jahren von Ennio De Giorgi [dGF75] geprägt, um das asymptotische Verhalten von Familien von Minimierungsproblemen beschreiben zu können, und sie ist wie folgt definiert.



**Definition 1.1 ( $\Gamma$ -Konvergenz)** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $F_\varepsilon : X \rightarrow [0, \infty]$  eine Familie von Funktionalen. Dann konvergiert  $F_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $F$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

❶ *Für alle  $u \in X$  und alle Folgen  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  mit  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $X$  gilt*

$$F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) .$$

❷ *Für alle  $u \in X$  existiert eine Folge  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  derart, daß  $u_\varepsilon \rightarrow u$  und*

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{gilt.}$$

*Hierbei ist die zweite Bedingung im Zusammenhang mit der ersten gleichbedeutend zu der Existenz einer Folge  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  mit  $u_\varepsilon \rightarrow u$  und  $F(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ .  $F$  heißt dann der  $\Gamma$ -Limes (Gamma-Limes) von  $F_\varepsilon$ , und man schreibt  $F = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon$  bzw.  $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ .*

Eine fundamentale Eigenschaft der  $\Gamma$ -Konvergenz liegt in der Stabilität minimierender Folgen. Falls eine Folge  $(v_\varepsilon)$  die Familie von Funktionalen  $F_\varepsilon$  auf  $X$  für alle  $\varepsilon > 0$  minimiert und  $F$  der  $\Gamma$ -Limes von  $F_\varepsilon$  ist, so minimiert jeder Häufungspunkt von  $(v_\varepsilon)$  das Funktional  $F$  auf  $X$ . Diese und einige weitere Eigenschaften der  $\Gamma$ -Konvergenz faßt der folgende Satz zusammen, der unter anderem in [DM93] oder [Alb00] nachzulesen ist.

**Satz 1.4 (Eigenschaften der  $\Gamma$ -Konvergenz)**

*Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $F_\varepsilon : X \rightarrow [0, \infty]$  eine Familie von Funktionalen und  $F$  der  $\Gamma$ -Limes von  $F_\varepsilon$ . Dann gilt:*

- *Der  $\Gamma$ -Limes ist auf  $X$  unterhalbstetig.*
- *Falls  $G$  stetig ist, so gilt  $F_\varepsilon + G \xrightarrow{\Gamma} F + G$ .*
- *Falls für alle  $\varepsilon > 0$   $F_\varepsilon$  durch  $v_\varepsilon$  auf  $X$  minimiert wird, so ist jeder Häufungspunkt von  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  ein Minimierer von  $F$  auf  $X$ .*

Einen ausführlichen Überblick über die Gamma-Konvergenz findet man in den Werken von Dal Maso [DM93] und Braides [Bra02].

Bei der Approximation des Mumford-Shah Funktionals existiert eine Vielzahl von Ansätzen. Meist führt man zusätzliche Terme (nicht lokale bzw. höheren Grades) ein, welche bei der Grenzwertbetrachtung das Hausdorffmaß der Kantenmenge beschreiben. Einen numerischen Ansatz liefert die Methode der finiten Differenzen. Hierbei betrachtet man  $F^h$  als diskrete Version des Mumford-Shah Funktionals auf einem Gitter der Schrittweite  $h$ . Die Arbeiten hierzu bauen auf den Ideen von Blake und Zissermann [BZ87] auf. Einen Überblick über die verschiedenen Approximationsmethoden verschafft man sich bei der Lektüre des Buches von Braides [Bra98] und der Arbeit von Aubert und Kornprobst [AK02].

### 1.3.1 Approximation durch elliptische Funktionale

An dieser Stelle gehen wir ausführlicher auf die Approximation von  $F(u, K)$  mittels elliptischer Funktionale ein. Um die Kantenmenge durch eine Funktion zu beschreiben, definieren wir eine glatte Funktion  $v$  auf  $\Omega$ , welche auf der Kantenmenge verschwindet und sonst den Wert 1 annimmt, so daß wir  $\mathcal{H}^{(n-1)}(S_u)$  durch  $\mathcal{H}^{(n-1)}(v = 0)$  ersetzen können.  $v$  kann dabei zum Beispiel als Faltung der Abbildung  $1 - \chi_{S_u}$  mit dem Gaußkern definiert werden. Modica und Mortola [MM77] approximierten im Jahre 1977 das  $(n-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß einer solchen Menge  $\mathcal{H}^{(n-1)}(v = 0)$  als  $\Gamma$ -Limes von

$$H_\varepsilon(v) = \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \, dx .$$

1990 zeigten Ambrosio und Tortorelli [AT90], daß das Mumford-Shah Funktional (für  $\gamma = 1$ )

$$G(u) := \alpha \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \, dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

der  $\Gamma$ -Limes von

$$F_\varepsilon(u, v) := \alpha \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \, dx + \beta \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} \left( \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) \, dx \quad (1.4)$$

ist. Die Existenz eines Minimierers  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  ergibt sich für eine etwas modifizierte Version von  $F_\varepsilon$  aus dem folgenden Satz.

**Satz 1.5** ([AK02])

Es sei  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h(\varepsilon) > 0$  derart, daß  $h(\varepsilon) = 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt und

$$\tilde{F}_\varepsilon(u, v) := F_\varepsilon(u, v) + h(\varepsilon) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Dann besitzt  $\inf \tilde{F}_\varepsilon(u, v)$  eine Lösung  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  mit  $|u_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Die Gamma-Konvergenz von  $\tilde{F}_\varepsilon$  gegen  $G$  erhält man mit Hilfe des folgenden Satzes:

**Satz 1.6** ([Bra98])

$\Omega$  sei eine beschränkte, offene Menge mit Lipschitzrand,  $h(\varepsilon) > 0$  derart, daß  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0$  gilt, und  $F_\varepsilon : L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  sei wie folgt definiert:

$$\tilde{F}_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} \alpha \int_\Omega |u - u_0|^2 dx + \beta \int_\Omega (v^2 + h(\varepsilon)) |\nabla u|^2 dx \\ \quad + \int_\Omega (\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2) dx & \text{falls } u, v \in W^{1,2}(\Omega) \\ \quad \text{und } 0 \leq v \leq 1 & (1.5) \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin sei  $G : L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  durch

$$G(u, v) = \begin{cases} \alpha \int_\Omega |u - u_0|^2 dx + \beta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u) & \text{falls } u \in GSBV(\Omega) \\ \quad \text{und } v = 1 \text{ f. ü.} & (1.6) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Dann folgt bzgl. der starken  $L^1(\Omega)^2$ -Topologie

$$\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{F}_\varepsilon(u, v) = G(u, v).$$

Weiterhin gilt für Minimierer  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  von  $\tilde{F}_\varepsilon$  (gegebenenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge)  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$  in  $L^1(\Omega)$  mit  $u \in SBV(\Omega)$  und  $\inf \tilde{F}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \inf G(u, v)$ .

Den Beweis dieses Satzes findet man für den eindimensionalen Fall im Kapitel 3 und für die Verallgemeinerung auf  $n$  Dimensionen mit Hilfe der *Slicing*-Methode in Kapitel 4 von [Bra98].

### 1.3.2 Das stückweise konstante Mumford-Shah Modell

Eine weitere Möglichkeit, das Mumford-Shah Funktional zu untersuchen, erhält man, indem man lediglich im Raum der stückweise konstanten Abbildungen nach einem Minimierer sucht. Da der Gradient dieser Abbildungen verschwindet, reduziert sich das Mumford-Shah Funktional (nach Division durch  $\beta$ ) auf die folgende Gestalt:

$$F(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx + \gamma \mathcal{H}^{(n-1)}(K) . \quad (1.7)$$

Diese recht schlichte Methode der Segmentierung wird in der Literatur als Mischen (region-merging bzw. region-growing) bezeichnet. Die Bezeichnung stammt von einem Algorithmus, der die Segmentierungsmethode folgendermaßen beschreibt. Stellen wir uns als erste Annäherung des Anfangsbildes  $u_0$  die Abbildung  $u_1$  vor, welche konstant auf allen 'Pixeln' bzw. Gitterpunkten der Diskretisierung den Funktionswert von  $u_0$  annimmt.  $u_1$  ist, anschaulich beschrieben, der Graph über einem Schachbrett, dessen Anzahl von Feldern als Auflösung des Bildes bezeichnet werden kann. Die Menge der Kanten  $K_1$  sei anfangs die Vereinigung der Pixel-Ränder bzw. die Umrandung der Schachbrettfelder. Nun mischt man solche Paare von benachbarten Regionen, für die die Energie (1.7) geringer wird. Auf diese Weise verschwinden für das Funktional *teure* Kanten zwischen den Feldern. Bei unterschiedlichen Funktionswerten zweier zu mischenden Regionen wählt man den Mittelwert der beiden Regionen als stückweise konstanten Funktionswert der neuen, größeren Region. Für  $\gamma = 0$  erhält man als Lösung das diskretisierte Anfangsbild, das eine Art Parkettierung mit Treppenfunktionen darstellt, sich jedoch als digitalisiertes Bild nicht sichtbar vom Anfangsbild unterscheidet. Dies liegt daran, daß die Parkettierung über dieselbe Anzahl von Elementen verfügt wie das diskretisierte Anfangsbild Pixel vorweist. Erhöht man den Wert für  $\gamma$ , vergrößern sich die Regionen, und man erhält eine Segmentierung, die bei sehr großen Werten von  $\gamma$  nur noch die Hauptobjekte des Bildes repräsentiert. In den drei Abbildungen auf den Seiten 18 und 19 sehen wir die Segmentierung durch stückweise konstante Funktionen einer Fotografie des Kölner Doms. Dieses Ausgangsbild besitzt eine Auflösung von 577 x 698 Pixeln und verfügt daher anfangs über 402746 (= 577 · 698) Gebiete. Innerhalb der Abbildungen wird  $\gamma$  aus Gleichung (1.7) auf die Werte  $\gamma = 586$ ,  $\gamma = 2831$  und  $\gamma = 12326$  gesetzt, so daß bei der Segmentierung 5000, 500 und 50 Regionen zurückbleiben. Weitere Eigenschaften und experimentelle Resultate der Approximation mittels stückweise konstanter Funktionen findet man in Kapitel 5 von [MS94].

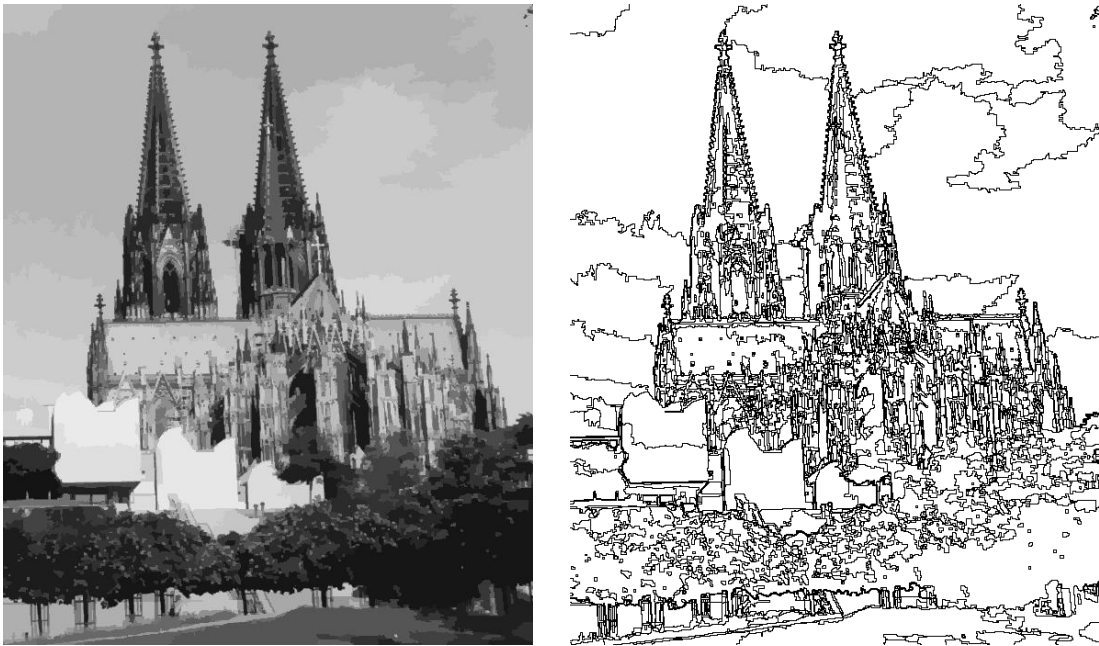


Abbildung 1.5: Segmentierung mit 5000 Regionen und deren Kantenmenge  $K$



Abbildung 1.6: Segmentierung mit 500 Regionen und deren Kantenmenge  $K$

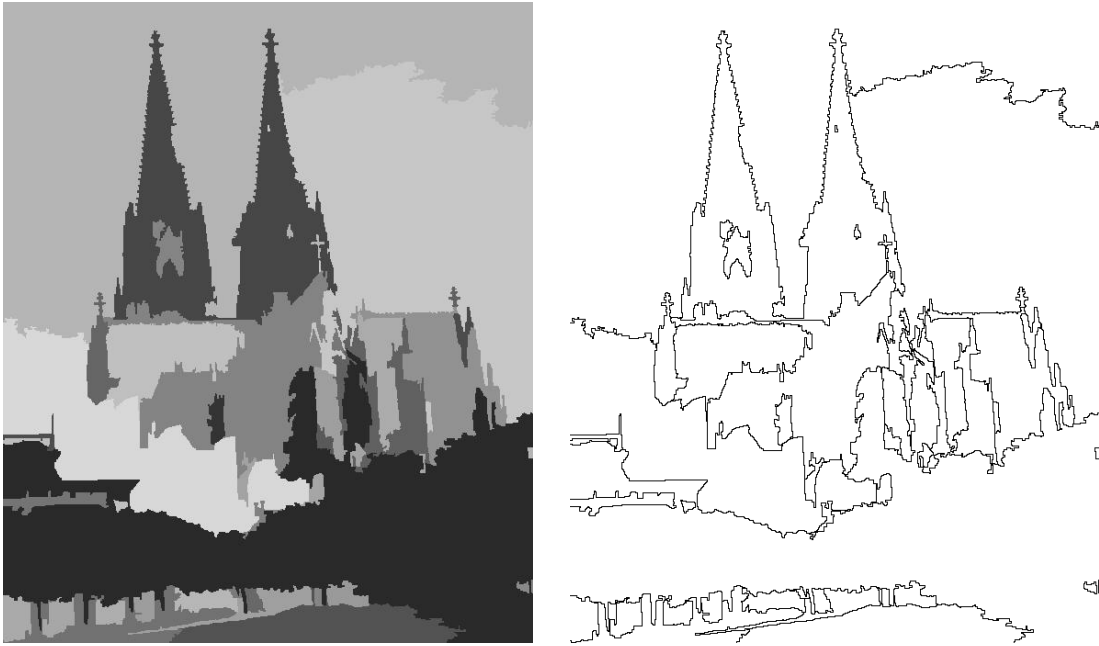


Abbildung 1.7: Segmentierung mit 50 Regionen und deren Kantenmenge  $K$

## 1.4 Eigenschaften einer Lösung

Gegeben sei eine Lösung  $(u, K)$  von Gleichung (I) auf Seite 12, d.h. es gilt  $F(u, K) \leq F(v, K')$  für alle  $v \in W^{1,2}(\Omega \setminus K') \cap L^\infty(\Omega)$ . Nehmen wir darüber hinaus an, daß es sich bei  $u$  auf jeder Zusammenhangskomponente um eine  $C^1$ -Lösung handelt, die der Mumford-Shah Vermutung genügt. Dann gilt der folgende Satz:

### Satz 1.7 ([AK02])

Es sei  $(u, K)$  eine Lösung von (I), welche die obigen Bedingungen erfüllt,  $e(u) := (u - u_0)^2 + \beta |\nabla u|^2$ ,  $u^+$  und  $u^-$  die Spuren von  $u$  auf jeder Seite von  $\gamma_i$  und  $\text{curv } \gamma_i$  die Krümmung von  $\gamma_i$ . Dann gilt:

$$\beta \Delta u = u - u_0 \text{ auf } \Omega \setminus K \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ und auf beiden Seiten } \gamma_i^\pm \text{ jeder } C^{1,1}\text{-Kurve von } K \quad (1.9)$$

$$e(u^+) - e(u^-) + \gamma \text{ curv } \gamma_i = 0 \text{ auf } \gamma_i. \quad (1.10)$$

Der Beweis dieses Satzes ist in [AK02] nachzulesen.

## 2 Das Mumford-Shah Funktional im Eindimensionalen

In diesem Kapitel betrachten wir das Funktional:

$$M(u, S(u)) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (u - g)^2 dx + \gamma \cdot (\#S(u)). \quad (2.1)$$

Dabei sei  $g$  eine vorgegebene Funktion von  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u$  die zu bestimmende Funktion von  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Funktional minimiert,  $S(u)$  deren Sprungmenge, und  $\gamma > 0$ .  $\#S(u)$  bezeichne das nulldimensionale Hausdorffmaß der Sprungmenge, d.h. die Anzahl der Sprünge von  $u$ . Das Mumford-Shah Funktional in einer Dimension besitzt ursprünglich die allgemeinere Gestalt

$$M(u, S(u)) := \alpha \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \beta \int_0^1 (u - g)^2 dx + \gamma \cdot (\#S(u)) \quad (2.2)$$

mit den zusätzlichen Parametern  $\alpha, \beta > 0$ . Wir reduzieren dieses allgemeinere Funktional auf die obige Form, indem wir  $v(x) := u(\frac{x}{A})$  auf dem Intervall  $[0, A]$  definieren. Dann ist  $v'(x) = u'(\frac{x}{A}) \cdot A^{-1}$ ,  $\alpha \int_0^A (u'(x))^2 dx = \alpha \cdot A^2 \int_0^A (v'(x))^2 dx$  und  $\beta \int_0^A (u - g)^2 dx = \beta \int_0^A (v - \tilde{g})^2 dx$  mit  $\tilde{g}(x) := g(\frac{x}{A})$ . Wir wählen nun  $A$  derart, daß  $\alpha A^2 = \beta$  gilt. Wenn wir nun das gesamte Funktional durch  $2\beta$  dividieren, die neu entstandene Konstante vor dem dritten Term wiederum  $\gamma$  zuweisen und die Intervalllänge auf 1 normieren, so erhalten wir die reduzierte Darstellung (2.1) des Funktionals (2.2). Die Betrachtungen und Aussagen dieses Kapitels beziehen sich auf das Funktional (2.1), lassen sich aber problemlos auf das Funktional (2.2) erweitern. Durch die vorherige Wahl der Parameter und die daraus resultierende Verkopplung der ersten beiden Terme ist eine Analyse der Lösbarkeit in Abhängigkeit des verbleibenden Parameters  $\gamma$  möglich, und die Rechnungen verkürzen sich.

Ziel dieses Kapitels ist es, für eine bestimmte Klasse von Anfangsdaten  $g$  und speziellen zulässigen Funktionen  $v$  Aussagen über den Minimierer  $u$  des Funktionals (2.1) zu treffen. Der letzte Term des Funktionals  $\#S(u)$  trägt dazu bei, daß  $u$  nur endlich viele Sprungstellen besitzt. Die Anzahl der Sprungstellen halten wir fest, bezeichnen diese mit  $a_1, \dots, a_r$  und berechnen  $u$  auf den jeweiligen Zwischenstücken. Ein solches  $u$  erfüllt auf jedem Intervall  $[a_i, a_{i+1}]$  die Euler-Lagrange-Gleichung  $u'' - (u - g) = 0$  mit Neumann-Randbedingungen  $u'(a_i) = u'(a_{i+1}) = 0$ . Aus Notationsgründen weisen wir  $a_0$  und  $a_{r+1}$  den Intervallgrenzen zu, d.h.  $a_0 = 0$ ,  $a_{r+1} = 1$ , und berechnen explizit ein solches  $u$  auf einem der Teilintervalle. Um die Gleichung

$$u'' - u = -g \tag{2.3}$$

zu lösen, betrachten wir die homogene Gleichung  $u'' - u = 0$  und bestimmen nach [Wal93] ein Fundamentalsystem  $u_1$  und  $u_2$  mit

$$\begin{aligned} u_1'' &= u_1, & u_2'' &= u_2 \text{ und} \\ u_1'(a_i) &= 0, & u_2'(a_{i+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Über den Ansatz  $u_h := c \sinh(x) + d \cosh(x)$  erhält man die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\tanh(a_i) \cdot \sinh(x) + \cosh(x) \quad \text{und} \\ u_2(x) &= -\tanh(a_{i+1}) \cdot \sinh(x) + \cosh(x), \end{aligned}$$

die die entsprechenden Randbedingungen erfüllen. Wiederum nach [Wal93] löst dann

$$\begin{aligned} u(x) &:= - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \Gamma(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad \text{mit} \tag{2.4} \\ \Gamma(x, \xi) &:= \frac{1}{c_i} \begin{cases} u_1(\xi) u_2(x) & \text{für } a_i \leq \xi \leq x \leq a_{i+1} \\ u_1(x) u_2(\xi) & \text{für } a_i \leq x \leq \xi \leq a_{i+1} \end{cases} \end{aligned}$$

die Eulergleichung (2.3). Hierbei bildet  $c_i = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = \tanh(a_i) - \tanh(a_{i+1}) \neq 0$  die sogenannte Wronskideterminante. Mit diesen Vorüberlegungen haben wir bereits eine explizite Darstellung des Minimierers in Abhängigkeit von den Sprungstellen gefunden.



## 2.1 Das Anfangsbild $g$ in der Form $\chi_{[b_1, b_2]}$

Wir nehmen an, daß  $g$  die Gestalt aus Figur 2.1 mit einer *Säule* bzw. einem *Bump* annimmt, d.h.  $g := \chi_{[b_1, b_2]}$ . Dabei gilt  $b_1 < b_2$  und  $b_1, b_2 \in (0, 1)$ . Um dieses Anfangsbild zu visualisieren, werden  $b_1$  und  $b_2$  innerhalb der Figuren die Werte  $b_1 = \frac{1}{8}$  und  $b_2 = \frac{5}{8}$  zugewiesen, wohingegen diese Variablen bei den Berechnungen und Aussagen abstrakt bleiben.

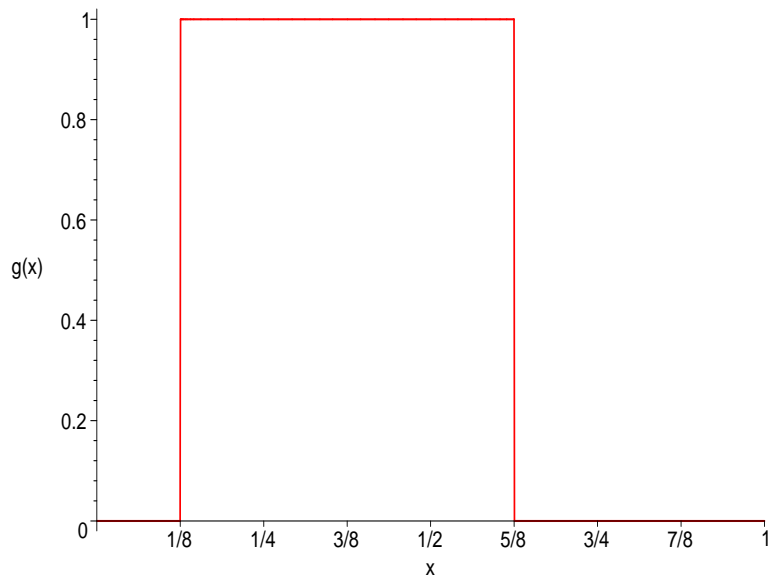


Abbildung 2.1: Das Anfangsbild mit einer Säule im Intervall  $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$

Zur Berechnung der Energie ist nun das Funktional (2.1) auszuwerten. Hierbei können wir die konkret vorliegende Gestalt (2.4) von  $u$  als Lösung von (2.3) benutzen. Die Gesamtenergie läßt sich dann als Summe der Energien  $M_i$  auf den Teilintervallen  $[a_i, a_{i+1}]$  beschreiben, so daß

$$M(u, S(u)) = \sum_{i=0}^r M_i(u, S(u)) + \gamma \cdot r \quad \text{gilt.} \quad (2.5)$$

Für die Energie  $M_i$  auf jedem Teilintervall  $[a_i, a_{i+1}]$  gilt dann die folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
 M_i(u, S(u)) &= \frac{1}{2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u(x) - g(x))^2 dx + \gamma \cdot (\#S(u)) \\
 &\stackrel{p.I.}{=} \frac{1}{2} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} -u''(x)u(x) + (u(x) - g(x))^2 dx + 0 \cdot \gamma \right) \\
 &\stackrel{(2.3)}{=} \frac{1}{2} \left( \int_{a_i}^{a_{i+1}} -(u(x) - g(x)) u(x) + (u(x) - g(x))^2 dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} -u^2(x) + u(x) g(x) + u^2(x) - 2 u(x) g(x) + g^2(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} -u(x) g(x) + g^2(x) dx \\
 &\stackrel{g^2=g}{=} \frac{1}{2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} -u(x) g(x) + g(x) dx . \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

### 2.1.1 Der Minimierer sei stetig

Sofern wir lediglich stetige Lösungen zulassen, können wir mit Hilfe der Gleichung (2.4)  $u$  explizit berechnen. Es gilt in diesem Fall  $[a_i, a_{i+1}] = [0, 1]$ , und es genügt,  $u$  lediglich auf einem Teilintervall zu bestimmen. Für  $g := \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]}$  aus Abbildung 2.1 erhält der Minimierer  $u$  dann die folgende Gestalt:

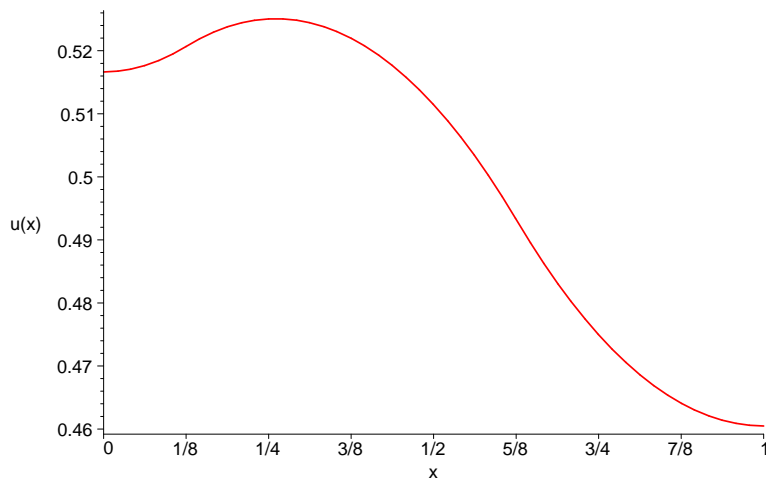


Abbildung 2.2: Die Lösung  $u$  aus dem Raum der stetigen Funktionen für ein Anfangsdatum  $g$  mit einer Säule im Intervall  $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$

Somit haben wir in der Klasse der stetigen Funktionen einen Minimierer des Mumford-Shah Funktionals im Eindimensionalen gefunden. Die Energie läßt sich nun mit Hilfe von (2.4) und (2.6) berechnen und nimmt für unser Beispiel  $g = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]}$  den Wert 0,3064 an.

### 2.1.2 Der Minimierer habe eine Sprungstelle

In diesem Abschnitt lassen wir für  $u$  genau eine Sprungstelle zu. Diese bezeichnen wir mit  $a$ . Wir suchen nun den Minimierer  $u$  und bezeichnen den Teil links von der Sprungstelle  $a$  mit  $u_l(x)$  und rechts davon mit  $u_r(x)$ . Es gelte

$$u(x) := \begin{cases} u_l(x) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ u_r(x) & \text{für } a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Das Funktional  $M(u, S(u))$  wird dann in Abhängigkeit von  $a$  zu

$$\begin{aligned} M(u, S(u); a) &:= \frac{1}{2} \int_0^a (u'_l(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a (u_l - g)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^1 (u'_r(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^1 (u_r - g)^2 dx + \gamma \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{2} \int_0^a (-u_l(x)g(x) + g(x)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^1 (-u_r(x)g(x) + g(x)) dx + \gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

und läßt sich explizit berechnen. Für unser Beispielanfangsbild  $g$  erhält man für die Energie den folgenden Graphen (zur Veranschaulichung wurde  $\gamma = 1$  gesetzt):

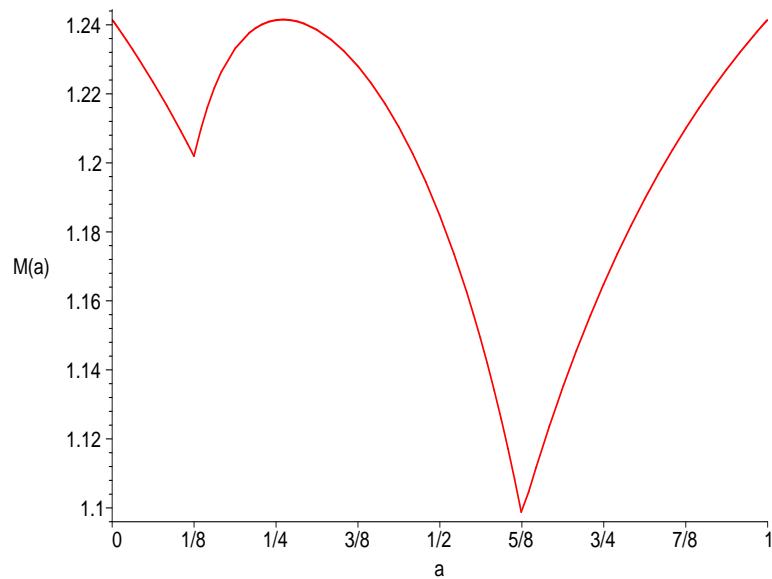


Abbildung 2.3: Die Energie in Abhängigkeit von  $a$  für das Anfangsbild  $g$  mit einer Säule im Intervall  $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$

Damit besitzt die Energie für dieses spezielle Anfangsbild  $g$  an der rechten Sprungstelle  $b_2$  des Anfangsbildes ein Minimum  $u$ . Wir beobachten weiter, daß

- ❶ der Minimierer  $u$  dort seine Sprungstelle annimmt, wo das Anfangsbild  $g$  eine Sprungstelle aufweist.
- ❷ die Energie außerhalb der Sprungstellen von  $g$  konkav ist und an den Sprungstellen von  $g$  lokale Minima annimmt.
- ❸ es für den Minimierer  $u$  günstig ist, auf einem größtmöglichen Intervall konstant zu bleiben (in unserem Beispiel auf  $[b_2, 1]$ ).

In Abbildung 2.4 sehen wir das Beispielanfangsbild  $g$  zusammen mit dem Minimierer  $u$  in der Klasse von Funktionen mit genau einer Sprungstelle. Die Energie nimmt für diesen Minimierer den Wert  $0,09805 + \gamma$  an.

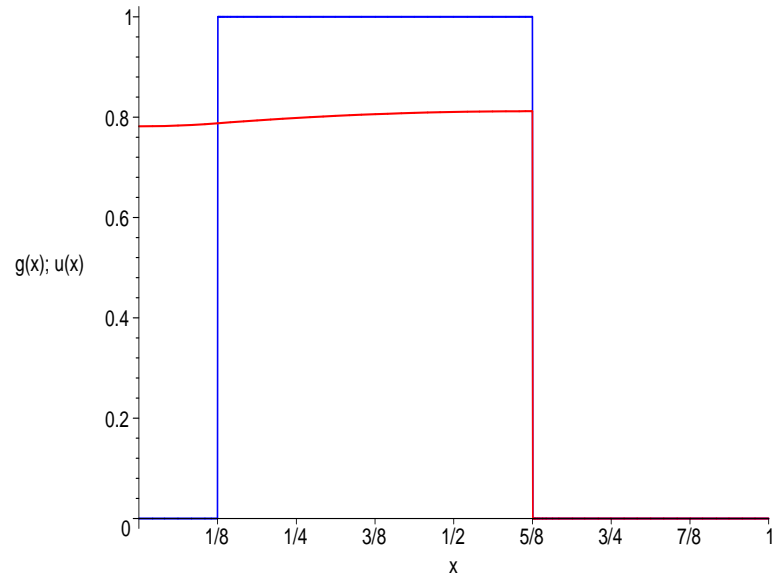


Abbildung 2.4: Das Anfangsbild  $g$  und der Minimierer  $u$  mit Sprungstelle bei  $b_2 = \frac{5}{8}$

**Satz 2.1 (Die Energie ist außerhalb der Unstetigkeitsstellen von  $g$  konkav)**  
 Es seien  $g = \chi_{[b_1, b_2]}$  und  $M(u, S(u); a)$  wie in (2.7) definiert. Dann ist  $M(u, S(u); a)$  auf  $[0, 1] \setminus \{b_1, b_2\}$  als Funktion von  $a$  konkav.

BEWEIS: Es sei  $a$  die Sprungstelle von  $u(x)$ . Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

- ❶ Fall:  $a \in (0, b_1)$
- ❷ Fall:  $a \in (b_1, b_2)$
- ❸ Fall:  $a \in (b_2, 1)$

Um die Konkavität des Funktionals für diese 3 Fälle zu zeigen, benötigen wir die explizite Darstellung von  $u_l(x)$  und  $u_r(x)$ , welche wir nun anhand von (2.4) berechnen.

Es gilt:

$$u_l(x) = - \int_0^a \Gamma(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad \text{mit}$$

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{1}{c_l} \begin{cases} u_{l1}(\xi) u_{l2}(x) & \text{für } 0 \leq \xi \leq x \leq a \\ u_{l1}(x) u_{l2}(\xi) & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \leq a \end{cases} \quad \text{und}$$

$$u_{l1}(x) = - \tanh(0) \sinh(x) + \cosh(x) = \cosh(x)$$

$$u_{l2}(x) = - \tanh(a) \sinh(x) + \cosh(x) \quad \text{und}$$

$$c_l = u_{l1}(x)u'_{l2}(x) - u'_{l1}(x)u_{l2}(x) = \dots = - \tanh(a) < 0 .$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} u_l(x) &= -\frac{1}{c_l} \int_0^a \begin{cases} \cosh(\xi) (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) & \text{für } 0 \leq \xi \leq x \leq a \\ \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \leq a \end{cases} g(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{c_l} \int_0^x \cosh(\xi) (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) g(\xi) d\xi \\ &\quad -\frac{1}{c_l} \int_x^a \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) g(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Analog berechnen wir  $u_r(x)$  :

$$u_r(x) = - \int_a^1 \Gamma(x, \xi) g(\xi) d\xi \text{ mit}$$

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{1}{c_r} \begin{cases} u_{r1}(\xi) u_{r2}(x) & \text{für } a \leq \xi \leq x \leq 1 \\ u_{r1}(x) u_{r2}(\xi) & \text{für } a \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$u_{r1}(x) = - \tanh(a) \sinh(x) + \cosh(x)$$

$$u_{r2}(x) = - \tanh(1) \sinh(x) + \cosh(x) \text{ und}$$

$$c_r = u_{r1}(x)u'_{r2}(x) - u'_{r1}(x)u_{r2}(x) = \dots = \tanh(a) - \tanh(1) < 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_r(x) &= -\frac{1}{c_r} \int_a^1 \begin{cases} (-\tanh(a) \sinh(\xi) + \cosh(\xi)) (-\tanh(1) \sinh(x) + \cosh(x)) \\ (-\tanh(a) \sinh(x) + \cosh(x)) (-\tanh(1) \sinh(\xi) + \cosh(\xi)) \end{cases} \cdot g(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{c_r} \int_a^x (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) g(\xi) d\xi \\ &\quad -\frac{1}{c_r} \int_x^1 (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) g(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir eine explizite Darstellung von  $u_l(x)$  und  $u_r(x)$  berechnet und können uns der anfänglich angegebenen Fallunterscheidung widmen.

Zu **1**: Für  $a \in (0, b_1)$  folgt aus (2.7)

$$\begin{aligned}
 M(u; a) &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} (-u_r(x)g(x) + g(x))dx + \gamma = \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} (-u_r(x))dx + \gamma + \frac{b_2 - b_1}{2} \\
 &= \frac{1}{2c_r} \int_{b_1}^{b_2} \int_a^x (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \cdot \\
 &\quad \cdot g(\xi) d\xi dx \\
 &\quad + \frac{1}{2c_r} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^1 (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) \cdot \\
 &\quad \cdot g(\xi) d\xi dx \\
 &\quad + \gamma + \frac{b_2 - b_1}{2} \\
 &= \frac{1}{2c_r} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) d\xi dx \\
 &\quad + \frac{1}{2c_r} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi dx \\
 &\quad + \gamma + \frac{b_2 - b_1}{2} .
 \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck leiten wir nun zweimal nach  $a$  ab, beachten dabei, daß  $c_r$  von  $a$  abhängt und zeigen anschließend, daß der berechnete Term ein negatives Vorzeichen besitzt.



$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial}{\partial a} M(u; a) = \\
& \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \frac{\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)}{\tanh(a) - \tanh(1)} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) d\xi dx \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \frac{\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)}{\tanh(a) - \tanh(1)} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi dx \right) \\
& = \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \frac{-\frac{\sinh(\xi)}{\cosh^2(a)} (\tanh(a) - \tanh(1)) - \frac{\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)}{\cosh^2(a)}}{(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
& \quad \cdot (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) d\xi dx \\
& + \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \frac{-\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(a)} (\tanh(a) - \tanh(1)) - \frac{\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)}{\cosh^2(a)}}{(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
& \quad \cdot (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi dx \\
& = - \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \frac{\sinh(\xi) (\tanh(a) - \tanh(1)) + \cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
& \quad \cdot (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) d\xi dx \\
& - \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \frac{\sinh(x) (\tanh(a) - \tanh(1)) + \cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
& \quad \cdot (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi dx \\
& = - \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \frac{(\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x))}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} d\xi dx \\
& - \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \frac{(\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi))}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} d\xi dx \\
& = - \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{(\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi))}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} d\xi dx
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die 2. Variation bzgl.  $a$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} M(u; a) &= - \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) \cdot \\
 &\quad \cdot \left( - \frac{2 \cosh(a) \sinh(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2 + 2 (\tanh(a) - \tanh(1))}{\cosh^4(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^4} \right) d\xi dx \\
 &= - \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} \overbrace{(\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x))}^{> 0} \overbrace{(\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi))}^{> 0} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( - 2 \frac{\underbrace{\cosh(a) \sinh(a)}_{> 0} \underbrace{(\tanh(a) - \tanh(1))}_{< 0} + 1}{\underbrace{\cosh^4(a)}_{> 0} \underbrace{(\tanh(a) - \tanh(1))^3}_{< 0}} \right) d\xi dx .
 \end{aligned}$$

Um die Konkavität von  $M(u; a)$  im **1**. Fall nachzuweisen, bleibt folgende Ungleichung zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 &\cosh(a) \sinh(a) (\tanh(a) - \tanh(1)) + 1 > 0 \\
 \Leftrightarrow &\sinh^2(a) - \cosh(a) \sinh(a) \tanh(1) + \underbrace{1}_{=\cosh^2(a) - \sinh^2(a)} > 0 \\
 \Leftrightarrow &\cosh^2(a) - \cosh(a) \sinh(a) \tanh(1) \\
 \Leftrightarrow &\underbrace{\cosh(a)}_{> 0} \underbrace{(\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a))}_{> 0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1} \checkmark .
 \end{aligned}$$

Zu **2**: Für  $a \in (b_1, b_2)$  folgt ebenfalls aus (2.7)

$$\begin{aligned}
 M(u; a) &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^a (-u_l(x)g(x) + g(x))dx + \int_a^{b_2} (-u_r(x)g(x) + g(x))dx + \gamma \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^a u_l(x)dx - \frac{1}{2} \int_a^{b_2} u_r(x)dx + const \\
 2 \frac{\partial}{\partial a} M(u; a) &= - \int_{b_1}^a \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x)) dx - \int_a^{b_2} \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) dx - u_l(a) + u_r(a) \\
 2 \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} M(u; a) &= - \int_{b_1}^a \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} (u_l(x)) dx - \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x)) \Big|_{x=a} - \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x=a)) \\
 &\quad - \int_a^{b_2} \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} (u_r(x)) dx + \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) \Big|_{x=a} + \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x=a)) \\
 &=: A + B .
 \end{aligned}$$

Hierbei seien die Terme in  $u_l$  in der Variablen  $A$  und die Terme in  $u_r$  in  $B$  zusammengefaßt. Da für  $a \rightarrow b_1$   $A \rightarrow 0$  und für  $a \rightarrow b_2$   $B \rightarrow 0$  folgt, betrachten wir  $A$  und  $B$  getrennt. Vorab einige Berechnungen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x)) &= -\frac{\partial}{\partial a} \int_{b_1}^a \Gamma(x, \xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial a} \left( \int_{b_1}^x \frac{u_{l1}(\xi) u_{l2}(x)}{c_l} d\xi \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_x^a \frac{u_{l1}(x) u_{l2}(\xi)}{c_l} d\xi \right) \\
 &= -\left( \int_{b_1}^x u_{l1}(\xi) d\xi \right) \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{u_{l2}(x)}{c_l} \right) - u_{l1}(x) \cdot \int_x^a \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{u_{l2}(\xi)}{c_l} \right) d\xi - \frac{u_{l1}(x) u_{l2}(a)}{c_l} \\
 &= -\left( \int_{b_1}^x u_{l1}(\xi) d\xi \right) \cdot \frac{\sinh(x) (1 - \tanh^2(a)) \tanh(a)}{\tanh^2(a)} \\
 &\quad - \left( \int_{b_1}^x u_{l1}(\xi) d\xi \right) \cdot \frac{(\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) (1 - \tanh^2(a))}{\tanh^2(a)} \\
 &\quad - u_{l1}(x) \int_x^a \frac{\sinh(\xi) (1 - \tanh^2(a)) \tanh(a)}{\tanh^2(a)} d\xi \\
 &\quad - u_{l1}(x) \int_x^a \frac{(\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) (1 - \tanh^2(a))}{\tanh^2(a)} d\xi - \frac{u_{l1}(x) u_{l2}(a)}{c_l} \\
 &= -\left( \int_{b_1}^x u_{l1}(\xi) d\xi \right) \cdot \left( \frac{\cosh(x) (1 - \tanh^2(a))}{\tanh^2(a)} \right) \\
 &\quad - u_{l1}(x) \cdot \int_x^a u_{l1}(\xi) d\xi \frac{1 - \tanh^2(a)}{\tanh^2(a)} - \frac{u_{l1}(x) u_{l2}(a)}{c_l} \\
 &= -\left( \int_{b_1}^a u_{l1}(\xi) d\xi \right) \cdot \frac{u_{l1}(x)}{\sinh^2(a)} + \frac{\cosh(x) (\cosh(a) - \tanh(a) \sinh(a))}{\tanh(a)} \\
 &= -\left( \int_{b_1}^a \cosh(\xi) d\xi \right) \cdot \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(a)} + \frac{\cosh(x)}{\sinh(a)} = \frac{\sinh(b_1) \cosh(x)}{\sinh^2(a)} \\
 \\
 \implies \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u_l(x) &= -\frac{2 \sinh(b_1) \cosh(x) \cosh(a)}{\sinh^3(a)} \\
 \implies \int_{b_1}^a \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u_l(x) dx &= -\frac{2 \sinh(b_1) \cosh(a)}{\sinh^3(a)} (\sinh(a) - \sinh(b_1)) \\
 &= \frac{2 \sinh^2(b_1) \cosh(a)}{\sinh^3(a)} - \frac{2 \sinh(b_1) \cosh(a)}{\sinh^2(a)}.
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 u_l(a) &= - \int_{b_1}^a \Gamma(\xi, a) d\xi = - \int_{b_1}^a \frac{u_{l1}(\xi) u_{l2}(a)}{c_l} d\xi \\
 &= \int_{b_1}^a \cosh(\xi) d\xi \cdot \left( \frac{\cosh(a) - \tanh(a) \sinh(a)}{\tanh(a)} \right) = \frac{\sinh(a) - \sinh(b_1)}{\sinh(a)} \\
 &= 1 - \frac{\sinh(b_1)}{\sinh(a)} \\
 \implies \frac{\partial}{\partial a} u_l(a) &= \frac{\sinh(b_1) \cosh(a)}{\sinh^2(a)} \text{ und} \\
 \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x))|_{x=a} &= \frac{\sinh(b_1) \cosh(a)}{\sinh^2(a)}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_{b_1}^a \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} (u_l(x)) dx - \frac{\partial}{\partial a} (u_l(x))|_{x=a} - \frac{\partial}{\partial a} (u_l(a)) \\
 &= \frac{\cosh(a)}{\sinh^3(a)} \cdot (-2 \sinh^2(b_1) + 2 \sinh(b_1) \sinh(a) - \sinh(b_1) \sinh(a) - \sinh(b_1) \sinh(a)) \\
 &= -2 \frac{\cosh(a)}{\sinh^3(a)} \sinh^2(b_1) < 0.
 \end{aligned}$$

Um  $B < 0$  zu verifizieren, erstellen wir ebenfalls einige Nebenrechnungen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) &= - \frac{\partial}{\partial a} \int_a^{b_2} \Gamma(x, \xi) d\xi \\
 &= - \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_a^x \frac{u_{r1}(\xi) u_{r2}(x)}{c_r} d\xi \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_x^{b_2} \frac{u_{r1}(x) u_{r2}(\xi)}{c_r} d\xi \right) \\
 &= - \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_a^x \frac{u_{r1}(\xi)}{c_r} d\xi \right) \cdot u_{r2}(x) - \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{u_{r1}(x)}{c_r} \right) \cdot \int_x^{b_2} u_{r2}(\xi) d\xi \\
 &= \dots = \frac{\cosh(a) - \tanh(a) \sinh(a)}{\tanh(a) - \tanh(1)} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \\
 &\quad + \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi \cdot \frac{\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \\
 &= \frac{\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi + (\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u_r(x) &= -\frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \\
 &\quad - 2 \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi \cdot (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^3(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^3} \\
 &\quad - \frac{(\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x))}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \\
 &= -2 \frac{(\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)) (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x))}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \right\}.
 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_a^{b_2} \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u_r(x) dx &= -2 \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \int_a^{b_2} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) dx \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \right\} \\
 &= -2 \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \int_a^{b_2} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\left( \int_a^{b_2} \cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x) dx \right)^2}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \right\}.
 \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $x = a$  in die erste Ableitung von  $u_r(x)$  nach  $a$  ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) |_{x=a} &= \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a)(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( (\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a) + \int_a^{b_2} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) dx \right).
 \end{aligned}$$

Um  $B$  vollständig zu errechnen, fehlt uns noch der folgende Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} (u_r(a)) &= -\frac{\partial}{\partial a} \left( \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi \cdot \frac{\cosh(a) - \tanh(a) \sinh(a)}{\tanh(a) - \tanh(1)} \right) \\
 &= \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi \cdot \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} + \\
 &\quad + \frac{(\cosh(a) - \tanh(a) \sinh(a)) (\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a))}{\tanh(a) - \tanh(1)} \\
 &= \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(1) \sinh(\xi)) d\xi + \cosh(a) (\tanh(a) - \tanh(1)) \right).
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun mit  $z(x) := \cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)$

$$\begin{aligned}
 B &= -\int_a^{b_2} \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} (u_r(x)) dx + \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) \Big|_{x=a} + \frac{\partial}{\partial a} (u_r(x)) \Big|_{x=a} \\
 &= \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \left( 2 \int_a^{b_2} z(x) dx + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{(\int_a^{b_2} z(x) dx)^2}{(\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a)} + 2 \int_a^{b_2} z(x) dx + 2(\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a) \right) \\
 &= 2 \frac{\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)}{\cosh^2(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( 2 \int_a^{b_2} z(x) dx + (\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a) + \frac{(\int_a^{b_2} z(x) dx)^2}{(\tanh(a) - \tanh(1)) \cosh(a)} \right).
 \end{aligned}$$

Da der Vorfaktor dieses Ausdrucks positiv ist, überzeugen wir uns nun davon, daß der Term innerhalb der runden Klammern negativ ist.

$$\begin{aligned}
 (\dots) &= 2 \cosh(b_2)(\tanh(b_2) - \tanh(1)) - 2 \cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1)) + \\
 &\quad + \cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1)) + \\
 &\quad + \frac{(\cosh(b_2)(\tanh(b_2) - \tanh(1)) - \cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1)))^2}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \\
 &= 2 \cosh(b_2)(\tanh(b_2) - \tanh(1)) - \cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1)) + \\
 &\quad + \frac{\cosh(b_2)^2(\tanh(b_2) - \tanh(1))^2 + \cosh(a)^2(\tanh(a) - \tanh(1))^2}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \\
 &\quad - \frac{-2 \cosh(b_2) \cosh(a)(\tanh(b_2) - \tanh(1))(\tanh(a) - \tanh(1))}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} \\
 &= \frac{\cosh(b_2)^2(\tanh(b_2) - \tanh(1))^2}{\cosh(a)(\tanh(a) - \tanh(1))} < 0
 \end{aligned}$$

$$\implies B < 0 \implies \bullet \checkmark .$$

Zu **3**: Für  $a \in (b_2, 1)$  folgt wiederum aus (2.7)

$$\begin{aligned}
 M(u; a) &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} (-u_l(x)g(x) + g(x))dx + \gamma \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} u_l(x)dx + \gamma + \frac{b_2 - b_1}{2} \\
 &= \frac{1}{2c_l} \int_{b_1}^{b_2} \int_0^x \cosh(\xi) (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) g(\xi) d\xi dx \\
 &+ \frac{1}{2c_l} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^a \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) g(\xi) d\xi dx \\
 &+ \text{const} \\
 &= \frac{1}{2c_l} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \cosh(\xi) (\cosh(x) - \tanh(a) \sinh(x)) d\xi dx \\
 &+ \frac{1}{2c_l} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi dx + \text{const} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \cosh(\xi) \left( \frac{\cosh(x)}{\tanh(a)} - \sinh(x) \right) d\xi dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \cosh(x) \left( \frac{\cosh(\xi)}{\tanh(a)} - \sinh(\xi) \right) d\xi dx + \text{const} \\
 \implies \frac{\partial}{\partial a} M(u; a) &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^x \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\cosh(\xi) \cosh(x)}{\tanh(a)} \right) d\xi dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_x^{b_2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\cosh(\xi) \cosh(x)}{\tanh(a)} \right) d\xi dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\cosh(\xi) \cosh(x)}{\tanh^2(a) \cosh^2(a)} d\xi dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\cosh(\xi) \cosh(x)}{\sinh^2(a)} d\xi dx \\
 \implies \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} M(u; a) &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{b_1}^{b_2} - \left( \frac{\cosh(\xi) \cosh(x)}{\sinh^4(a)} 2 \sinh(a) \cosh(a) \right) d\xi dx \\
 &< 0 \quad \implies \mathbf{3} \quad \checkmark \quad . \quad \square
 \end{aligned}$$

**Korollar 2.1 (Die Lage der Sprungstellen des Minimierers)**

Es sei  $g = \chi_{[b_1, b_2]}$  und  $u$  der Minimierer von  $M(u, S(u))$  mit einer Sprungstelle in  $a$ . Dann gilt  $a \in \{b_1, b_2\}$ , d.h.  $a = b_1$  oder  $a = b_2$ .



BEWEIS: Wir betrachten die Teilintervalle  $[0, b_1]$ ,  $[b_1, b_2]$  und  $[b_2, 1]$  getrennt. Aus Satz 2.1 folgt die Konkavität innerhalb eines jeden Intervalls. Daher werden die Minima jeweils an den Randpunkten angenommen. Da wir die Sprungstellen bei  $a = 0$  und  $a = 1$  ausschließen können, ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Satz 2.2 (Der Minimierer  $u$  ist auf möglichst großen Teilintervallen konstant)**

Es sei  $g = \chi_{[b_1, b_2]}$  und  $u$  der Minimierer von  $M(u, S(u))$  mit einer Sprungstelle in  $a$ . Dann gilt für  $c^* := \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$

$$c^* \leq \frac{1}{2} \implies a = b_2 \quad \text{bzw.} \quad c^* \geq \frac{1}{2} \implies a = b_1 .$$

BEWEIS: Da der Minimierer lediglich von der Sprungstelle  $a$  abhängt, gilt dies auch für das Energiefunktional. Aus diesem Grunde definieren wir  $\tilde{M}(a) := M(u, S(u))$  und werten das Energiefunktional an den beiden möglichen Sprungstellen  $a = b_1$  und  $a = b_2$  aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{M}(b_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{b_1} (-u_l g + g^2) dx + \frac{1}{2} \int_{b_1}^1 (-u_r g + g^2) dx + \gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^1 -(u_r'' + g) g + g^2 dx + \gamma = -\frac{1}{2} \int_{b_1}^1 u_r'' g dx + \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} u_r'' dx + \gamma = \gamma - \frac{1}{2} (u_r'(b_2) - u_r'(b_1)) . \end{aligned}$$

Analog berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{M}(b_2) &= \frac{1}{2} \int_0^{b_2} (-u_l g + g^2) dx + \frac{1}{2} \int_{b_2}^1 (-u_r g + g^2) dx + \gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{b_2} -(u_l'' + g) g + g^2 dx + \gamma = -\frac{1}{2} \int_0^{b_2} u_l'' g dx + \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} u_l'' dx + \gamma = \gamma - \frac{1}{2} (u_l'(b_2) - u_l'(b_1)) . \end{aligned}$$

In den vorausgehenden beiden Berechnungen der Energie bezeichnet  $u$  zwei verschiedene lokale Minima. Im ersten Fall handelt es sich um den Minimierer mit der Sprungstelle bei  $a = b_1$  und im zweiten Fall um den Minimierer mit der Sprungstelle bei  $a = b_2$ . Daher ist zu beachten, daß  $u_l$  und  $u_r$  zwei Funktionen darstellen, die jeweils Teile verschiedener Minimierer definieren. Somit wird  $u'_l$  im Fall  $a = b_2$  und  $u'_r$  im Fall  $a = b_1$  berechnet. Zunächst berechnen wir  $u'_l(x)$ :

$$\begin{aligned}
 u'_l(x) &= - \int_0^{b_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_l(x, \xi) \right) g(\xi) d\xi \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{b_1}^x \frac{u_{l1}(\xi) u_{l2}(x)}{-\tanh(b_2)} d\xi \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_x^{b_2} \frac{u_{l1}(x) u_{l2}(\xi)}{-\tanh(b_2)} d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(b_2)} \left( u_{l1}(x) u_{l2}(x) + \int_{b_1}^x u_{l1}(\xi) d\xi \cdot u'_{l2}(x) - u_{l1}(x) u_{l2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + \int_x^{b_2} u_{l2}(\xi) d\xi \cdot u'_{l1}(x) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(b_2)} \left( (\sinh(x) - \sinh(b_1)) (\sinh(x) - \tanh(b_2) \cosh(x)) \right. \\
 &\quad \left. + \sinh(x) (\sinh(b_2) - \tanh(b_2) \cosh(b_2) - \sinh(x) + \tanh(b_2) \cosh(x)) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(b_2)} \left( \sinh^2(x) - \tanh(b_2) \sinh(x) \cosh(x) - \sinh(b_1) \sinh(x) \right. \\
 &\quad \left. + \tanh(b_2) \sinh(b_1) \cosh(x) - \sinh^2(x) + \tanh(b_2) \sinh(x) \cosh(x) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(b_2)} \left( \tanh(b_2) \sinh(b_1) \cosh(x) - \sinh(b_1) \sinh(x) \right) \\
 &\implies \\
 u'_l(b_2) - u'_l(b_1) &= \frac{1}{\tanh(b_2)} \left( \sinh(b_1) \sinh(b_2) - \sinh(b_1) \sinh(b_2) \right. \\
 &\quad \left. - \tanh(b_2) \sinh(b_1) \cosh(b_1) + \sinh^2(b_1) \right) \\
 &= \frac{\sinh^2(b_1)}{\tanh(b_2)} - \sinh(b_1) \cosh(b_1)
 \end{aligned}$$

und analog  $u'_r(x)$  :

$$\begin{aligned}
 u'_r(x) &= - \int_{b_1}^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_r(x, \xi) \right) g(\xi) d\xi \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{b_1}^x \frac{u_{r1}(\xi) u_{r2}(x)}{\tanh(b_1) - \tanh(1)} d\xi \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_x^{b_2} \frac{u_{r1}(x) u_{r2}(\xi)}{\tanh(b_1) - \tanh(1)} d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( u_{r1}(x) u_{r2}(x) + \int_{b_1}^x u_{r1}(\xi) d\xi \cdot u'_{r2}(x) - u_{r1}(x) u_{r2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + \int_x^{b_2} u_{r2}(\xi) d\xi \cdot u'_{r1}(x) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( (\sinh(x) - \tanh(b_1) \cosh(x) - \sinh(b_1) + \tanh(b_1) \cosh(b_1)) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot (\sinh(x) - \tanh(1) \cosh(x)) \\
 &\quad + (\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2) - \sinh(x) + \tanh(1) \cosh(x)) \cdot \\
 &\quad \left. \cdot (\sinh(x) - \tanh(b_1) \cosh(x)) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( \sinh^2(x) - \tanh(1) \sinh(x) \cosh(x) - \tanh(b_1) \sinh(x) \cosh(x) \right. \\
 &\quad + \tanh(b_1) \tanh(1) \cosh^2(x) + \sinh(b_2) \sinh(x) - \tanh(b_1) \sinh(b_2) \cosh(x) \\
 &\quad - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(x) + \tanh(b_1) \tanh(1) \cosh(b_2) \cosh(x) - \sinh^2(x) \\
 &\quad + \tanh(b_1) \sinh(x) \cosh(x) + \tanh(1) \sinh(x) \cosh(x) \\
 &\quad \left. - \tanh(b_1) \tanh(1) \cosh^2(x) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( \sinh(b_2) \sinh(x) - \tanh(b_1) \sinh(b_2) \cosh(x) \right. \\
 &\quad \left. - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(x) + \tanh(b_1) \tanh(1) \cosh(b_2) \cosh(x) \right)
 \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned}
 u'_r(b_2) - u'_r(b_1) &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( \sinh^2(b_2) - \tanh(b_1) \sinh(b_2) \cosh(b_2) \right. \\
 &\quad - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(b_2) + \tanh(1) \tanh(b_1) \cosh^2(b_2) - \sinh(b_1) \sinh(b_2) \\
 &\quad \left. + \sinh(b_1) \sinh(b_2) + \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(b_1) - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(b_1) \right) \\
 &= \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \left( \sinh^2(b_2) - \tanh(b_1) \sinh(b_2) \cosh(b_2) \right. \\
 &\quad \left. + \tanh(1) \tanh(b_1) \cosh^2(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(b_2) \right) .
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Fälle  $c^* \leq \frac{1}{2}$  bzw.  $c^* \geq \frac{1}{2}$ . Im ersten Fall nimmt der Minimierer  $u$  die Sprungstelle genau dann bei  $a = b_2$  an, wenn

$$\tilde{M}(b_1) \geq \tilde{M}(b_2)$$

gilt, wohingegen er die Sprungstelle genau dann bei  $a = b_1$  besitzt, sofern die Ungleichung

$$\tilde{M}(b_1) \leq \tilde{M}(b_2)$$

erfüllt ist. Wir betrachten zunächst die folgende Differenz:

$$\begin{aligned} 2 \tilde{M}(b_1) - 2 \tilde{M}(b_2) &= 2\gamma - (u'_r(b_2) - u'_r(b_1)) - 2\gamma + (u'_l(b_2) - u'_l(b_1)) \\ &= (u'_l(b_2) - u'_l(b_1)) - (u'_r(b_2) - u'_r(b_1)) \\ &= \frac{\sinh^2(b_1)}{\tanh(b_2)} - \sinh(b_1) \cosh(b_1) - \frac{1}{\tanh(1) - \tanh(b_1)} \cdot \left( \sinh^2(b_2) \right. \\ &\quad \left. - \tanh(b_1) \sinh(b_2) \cosh(b_2) \right. \\ &\quad \left. + \tanh(1) \tanh(b_1) \cosh^2(b_2) \right. \\ &\quad \left. - \tanh(1) \cosh(b_2) \sinh(b_2) \right) \\ &=: \mathcal{F}(b_1, b_2) . \end{aligned}$$

Anschließend drücken wir innerhalb des Termes  $\mathcal{F}(b_1, b_2)$  die Funktionen  $\sinh$ ,  $\cosh$  und  $\tanh$  mit der Exponentialfunktion aus, d.h. wir substituieren diese Ausdrücke wie folgt:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} (\exp(x) + \exp(-x)), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x)) \quad \text{und} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Substitution wird obige Ungleichung zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(b_1, b_2) &= \frac{\exp(b_2 + b_1)}{2(\exp(2b_2) - 1)(\exp(2) - \exp(2b_1))} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( (2 \exp(b_2 + b_1) - 2 \exp(2 - b_2 - b_1) + \exp(-3b_1 + 2 + b_2) \right. \\
 &\quad \left. - \exp(3b_1 - b_2) + \exp(-3b_2 + 2 + b_1) - \exp(3b_2 - b_1)) \right) \\
 &=: \frac{\exp(b_2 + b_1)}{2(\exp(2b_2) - 1)(\exp(2) - \exp(2b_1))} \cdot \mathcal{G}(b_1, b_2) .
 \end{aligned}$$

Da der Bruch vor der Klammer bzw. vor dem Ausdruck  $\mathcal{G}$  lediglich aus positiven Faktoren besteht, können wir uns bei der weiteren Untersuchung auf  $\mathcal{G}$  beschränken. Wir setzen nun  $b := b_2 - b_1$  und vereinfachen den Term weiter.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(b_1, b_2) &= \mathcal{G}\left(c^* - \frac{b}{2}, c^* + \frac{b}{2}\right) \\
 &= 2 \exp(2c^*) - 2 \exp(2 - 2c^*) + \exp(-2c^* + 2b + 2) \\
 &\quad - \exp(2c^* - 2b) + \exp(-2c^* + 2 - 2b) - \exp(2c^* + 2b) \\
 \Rightarrow \exp(2c^*) \mathcal{G}(b_1, b_2) &= 2 \exp(4c^*) - 2 \exp(2) + \exp(2b + 2) \\
 &\quad - \exp(4c^* - 2b) + \exp(2 - 2b) - \exp(4c^* + 2b) \\
 &= \exp(4c^*) (2 - \exp(-2b) - \exp(2b)) \\
 &\quad - \exp(2) (2 - \exp(-2b) - \exp(2b)) \\
 &= 2 \cdot \underbrace{(\exp(2) - \exp(4c^*))}_{\left\{ \begin{array}{l} > \\ > \end{array} \right\} \text{ falls } c^* < \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(\cosh(2b) - 1)}_{>0 \text{ da } b \neq 0} .
 \end{aligned}$$

Da bisher alle Faktoren positiv waren, sehen wir an dieser Stelle, daß die Differenz und damit auch  $\mathcal{G}$  positiv ist, sofern  $c^* \leq \frac{1}{2}$  gilt, und negativ wird, falls  $c^* > \frac{1}{2}$ . Somit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

### 2.1.3 Der Minimierer habe zwei Sprungstellen

Falls wir bei der minimierenden Funktion zwei Sprungstellen zulassen, werden diese bei  $b_1$  und  $b_2$  angenommen, d.h. die Lösung  $u$  ist dann identisch mit dem Anfangsbild  $g = \chi_{[b_1, b_2]}$ , und das Funktional nimmt den Wert  $\gamma \cdot \#S(u) = 2\gamma$  an, da die Terme  $u(x) - g(x)$  und  $u'(x)$  verschwinden. Aus demselben Grund erhöhen mehr als zwei Sprungstellen lediglich den Wert des Funktionals.

Wenn wir das konkrete Anfangsbild aus den Abbildungen betrachten, ergeben sich in Abhängigkeit der zugelassenen Sprungstellen des Minimierers folgende Energiewerte:  $M(u) = 0,3064$  im stetigen Fall,  $M(u) = 0,09805 + \gamma$ , sofern wir genau eine Sprungstelle zulassen und  $M(u) = 2\gamma$  im Fall, für den der Minimierer zwei Sprungstellen aufweisen darf und mit dem Anfangsbild übereinstimmt. Die Gestalt des absoluten Minimierers hängt entscheidend davon ab, wie sehr das Funktional die Sprungstellen des Minimierers 'bestraft'. Für  $\gamma > 0,20835$  ergibt sich ein stetiger Minimierer, wohingegen für  $\gamma < 0,09805$  der Minimierer mit dem Anfangsbild übereinstimmt. Ein Minimierer mit einer Sprungstelle stellt sich für das Gewicht  $0,09805 < \gamma < 0,20835$  ein.

## 2.2 Das Anfangsbild $g$ in der Form $\chi_{[b_1, b_2]} + \chi_{[b_3, b_4]}$

Wir nehmen an, daß  $g$  die Gestalt aus Abbildung 2.5 mit zwei Säulen annimmt, d.h.  $g := \chi_{[b_1, b_2]} + \chi_{[b_3, b_4]}$ . Dabei gilt  $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$  und  $b_i \in (0, 1)$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Um das Anfangsbild zu visualisieren, werden  $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4$  innerhalb der Figuren die Werte  $b_1 = \frac{1}{8}, b_2 = \frac{2}{8}, b_3 = \frac{5}{8}$  und  $b_4 = \frac{7}{8}$  zugewiesen, wohingegen diese Variablen bei den Berechnungen und Aussagen abstrakt bleiben.

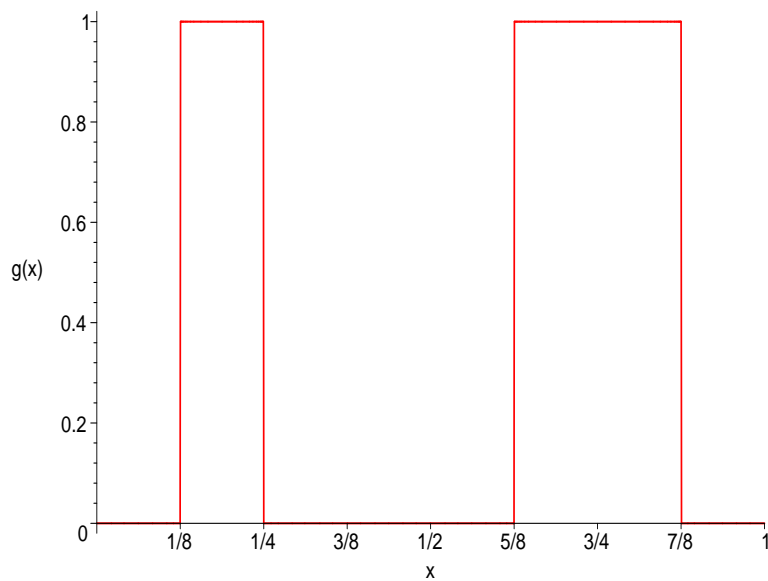


Abbildung 2.5: Das Anfangsbild  $g$  mit zwei Säulen in den Intervallen  $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$  und  $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$

### 2.2.1 Der Minimierer sei stetig

Unter der Bedingung, daß wir ausschließlich stetige Lösungen zulassen, können wir wie im Fall einer Säule mit Hilfe der Gleichung (2.4)  $u$  konkret errechnen. Es gilt  $[a_i, a_{i+1}] = [0, 1]$ , und wir müssen  $u$  lediglich auf einem Teilintervall bestimmen. Für das Anfangsbild  $g$  aus Abbildung 2.5 hat  $u$  dann die folgende Gestalt:

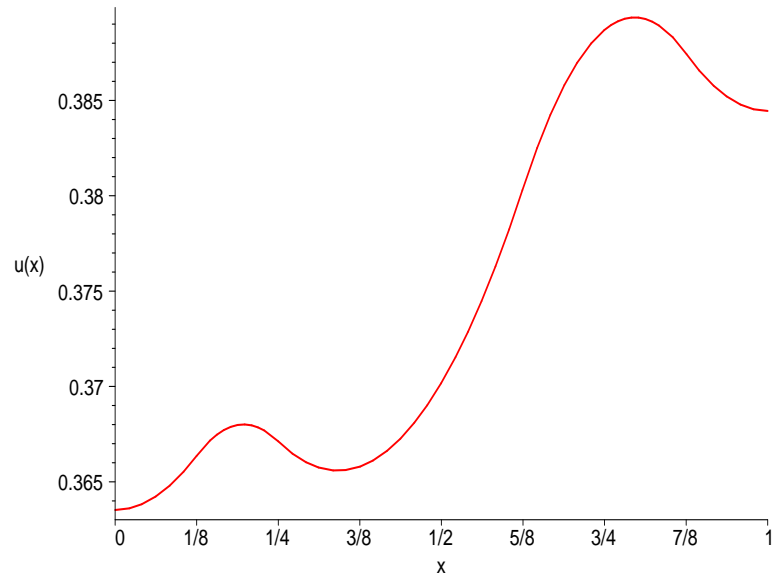


Abbildung 2.6: Die stetige Lösung  $u$  für ein Anfangsdatum  $g$  mit zwei Säulen in den Intervallen  $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$

In der Klasse der stetigen Funktionen haben wir somit einen Minimierer des Mumford-Shah Funktional gefunden. Die Energie, welche wir mit Hilfe der Gleichungen (2.4) und (2.6) berechnen, nimmt für das Beispiel mit dem Anfangsbild  $g = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]} + \chi_{[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]}$  den Wert 0,23228 an.

## 2.2.2 Der Minimierer habe eine Sprungstelle

In diesem Abschnitt lassen wir für den Minimierer  $u$  eine Sprungstelle zu, die wir mit  $a$  bezeichnen. Desweiteren unterteilen wir  $u$  links und rechts der Sprungstelle in  $u_l(x)$  und  $u_r(x)$ , so daß

$$u(x) := \begin{cases} u_l(x) & \text{für } 0 \leq x < a \\ u_r(x) & \text{für } a < x \leq 1 \end{cases}$$

gilt.



Das Funktional  $M(u, S(u))$  hängt dann lediglich von  $a$  ab, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 M(u, S(u); a) &:= \frac{1}{2} \int_0^a (u'_l(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a (u_l - g)^2 dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^1 (u'_r(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^1 (u_r - g)^2 + \gamma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a (-u_l(x)g(x) + g(x))dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^1 (-u_r(x)g(x) + g(x))dx + \gamma . \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Daher läßt sich das Funktional explizit berechnen, und der Graph der Energie besitzt dann für das Beispielanfangsbild  $g$  die folgende Gestalt (für  $\gamma = 0$ ):

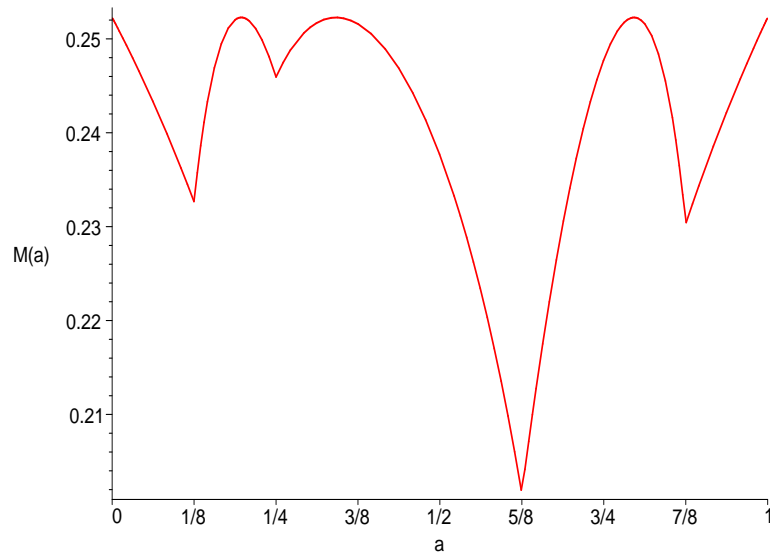


Abbildung 2.7: Die Energie in Abhängigkeit von  $a$  für das Anfangsbild  $g$  mit zwei Säulen in den Intervallen  $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$

Dabei beobachten wir, daß die Energie außerhalb der Unstetigkeitsstellen des Anfangsbildes konkav ist.

Der Minimierer, der die Sprungstelle bei  $a = b_3$  annimmt, hat die folgende Form:

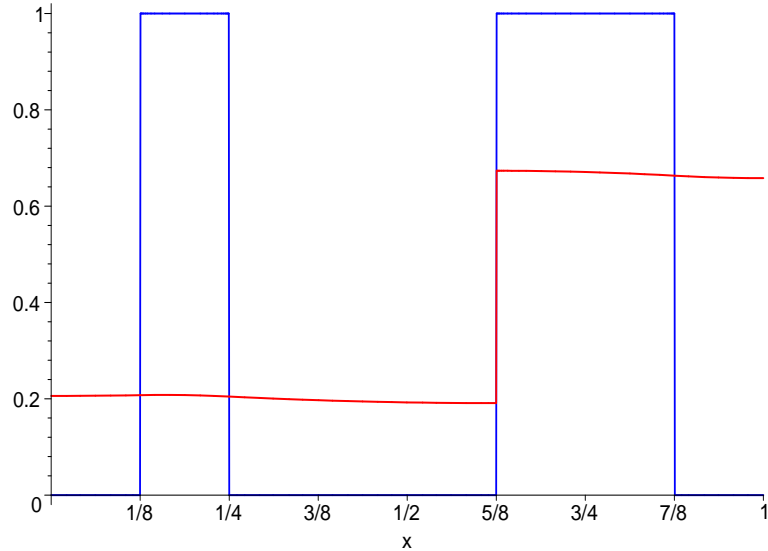


Abbildung 2.8: Der Minimierer  $u$  und das Anfangsbild  $g$  mit zwei Säulen im Intervall  $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$  und  $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$

Diese Form von  $u$  hat eine geringere Energie als die drei weiteren lokalen Minima (siehe Abbildung 2.7) mit Sprungstellen bei  $b_1, b_2$  bzw.  $b_4$ , deren Gestalt in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

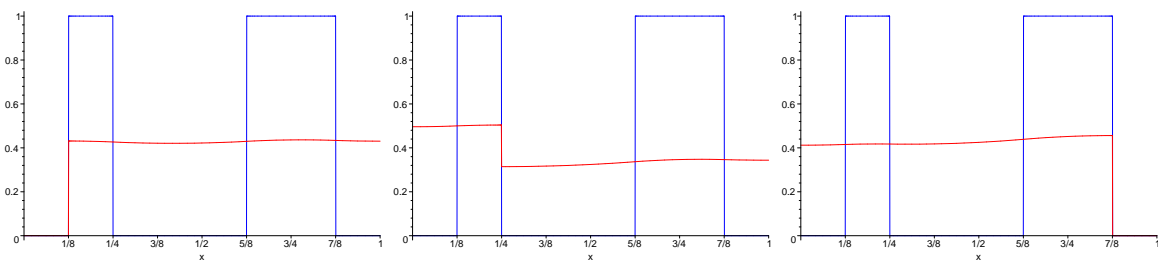


Abbildung 2.9: Lokale Minima mit jeweils einer Sprungstelle bei  $b_1, b_2$  bzw.  $b_4$

Um eine allgemeine Aussage über die Lage der Sprungstellen zu treffen, benötigen wir wiederum die Konkavität der Energie außerhalb der Sprungstellen der Anfangsfunktion. Hierzu dient der folgende Satz:

**Satz 2.3 (Die Energie ist außerhalb der Unstetigkeitsstellen von  $g$  konkav)**

Es seien  $g = \chi_{[b_1, b_2]} + \chi_{[b_3, b_4]}$  und  $M(u, S(u))$  wie in (2.8) definiert. Dann ist  $M(u, S(u))$  auf  $[0, 1] \setminus \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  konkav.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der allgemeineren Aussage von Satz 2.4 auf Seite 53 am Ende dieses Kapitels.

Aus der Aussage von Satz 2.3 folgern wir, daß der Minimierer lediglich an den Sprungstellen von  $g$  solche aufweisen kann. Daher kommen nur vier Minimierer mit jeweils einer Sprungstelle bei  $b_1, b_2, b_3$  oder  $b_4$  in Frage. Für das Beispielanfangsbild sind dies die vier Minimierer aus den Abbildungen 2.8 und 2.9, wobei die Funktion  $u$  aus Abbildung 2.8 das absolute Minimum der Energie (2.8) in der Klasse von Funktionen mit einer Sprungstelle darstellt, was man Abbildung 2.7 entnehmen kann. Der Energiewert für den Minimierer aus Abbildung 2.8 beträgt  $0,20160 + \gamma$ .

### 2.2.3 Der Minimierer habe 2 Sprungstellen

In diesem Abschnitt betrachten wir zulässige Minimierer mit genau zwei Sprungstellen. Diese bezeichnen wir mit  $a_l$  und  $a_r$  ( $a_l < a_r$ ) und unterteilen den Minimierer in drei Teilintervalle, so daß er die folgende Gestalt annimmt:

$$u(x) := \begin{cases} u_l(x) & \text{für } 0 \leq x < a_l \\ u_m(x) & \text{für } a_l < x < a_r \\ u_r(x) & \text{für } a_r < x \leq 1 \end{cases} .$$

Sofern wir wieder davon ausgehen, daß lediglich die Sprungstellen des Anfangsbildes als Sprungstellen des Minimierers in Frage kommen, haben wir sechs Möglichkeiten, die zwei Sprungstellen auf die vier des Anfangsbildes zu verteilen. Die bei dieser Überlegung entstandenen möglichen Minimierer lassen sich jeweils nach der Wahl der Sprungstellen explizit aus den Gleichungen (2.4) und (2.5) berechnen und sind in der folgenden Abbildung 2.10 zu sehen.

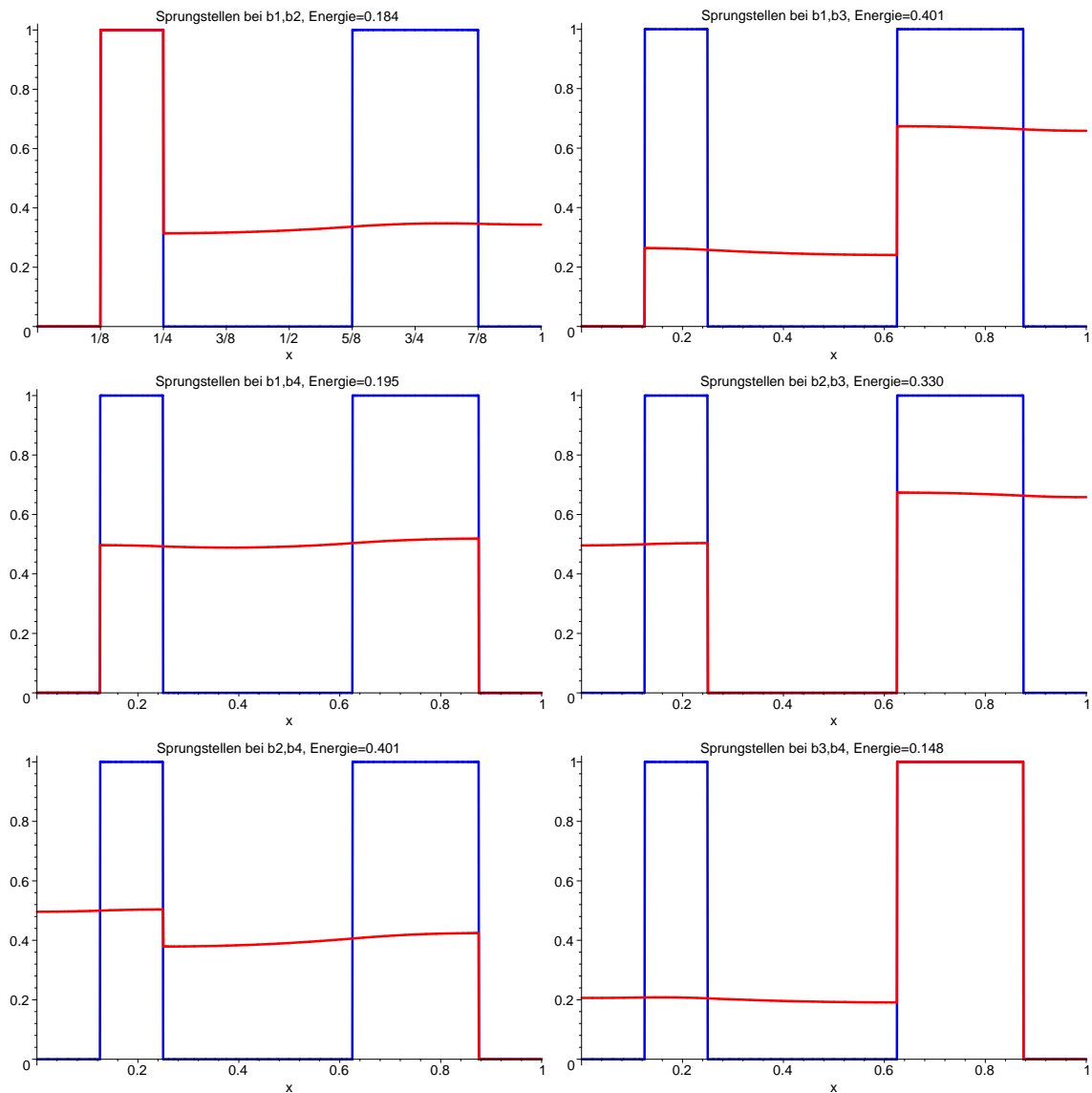


Abbildung 2.10: Lokale Minima (rot gefärbt) mit jeweils 2 Sprungstellen und das Anfangsbild  $g$  (blau gefärbt)

Man beachte, daß zu den Energiewerten aus den Abbildungen 2.10 und 2.11 der Wert  $2\gamma$  addiert werden muß. Die Tatsache, daß nur diese lokalen Minima als Minimierer in Frage kommen, folgt aus Satz 2.4 auf Seite 53 über die Konkavität des Funktionals außerhalb der Sprungstellen des Anfangsbildes. Bei der Veranschaulichung der Energie in Abhängigkeit von den beiden Sprungstellen  $a_l$  und  $a_r$  erhalten wir einen dreidimensionalen Graphen, der ebenfalls auf Konkavität schließen läßt.

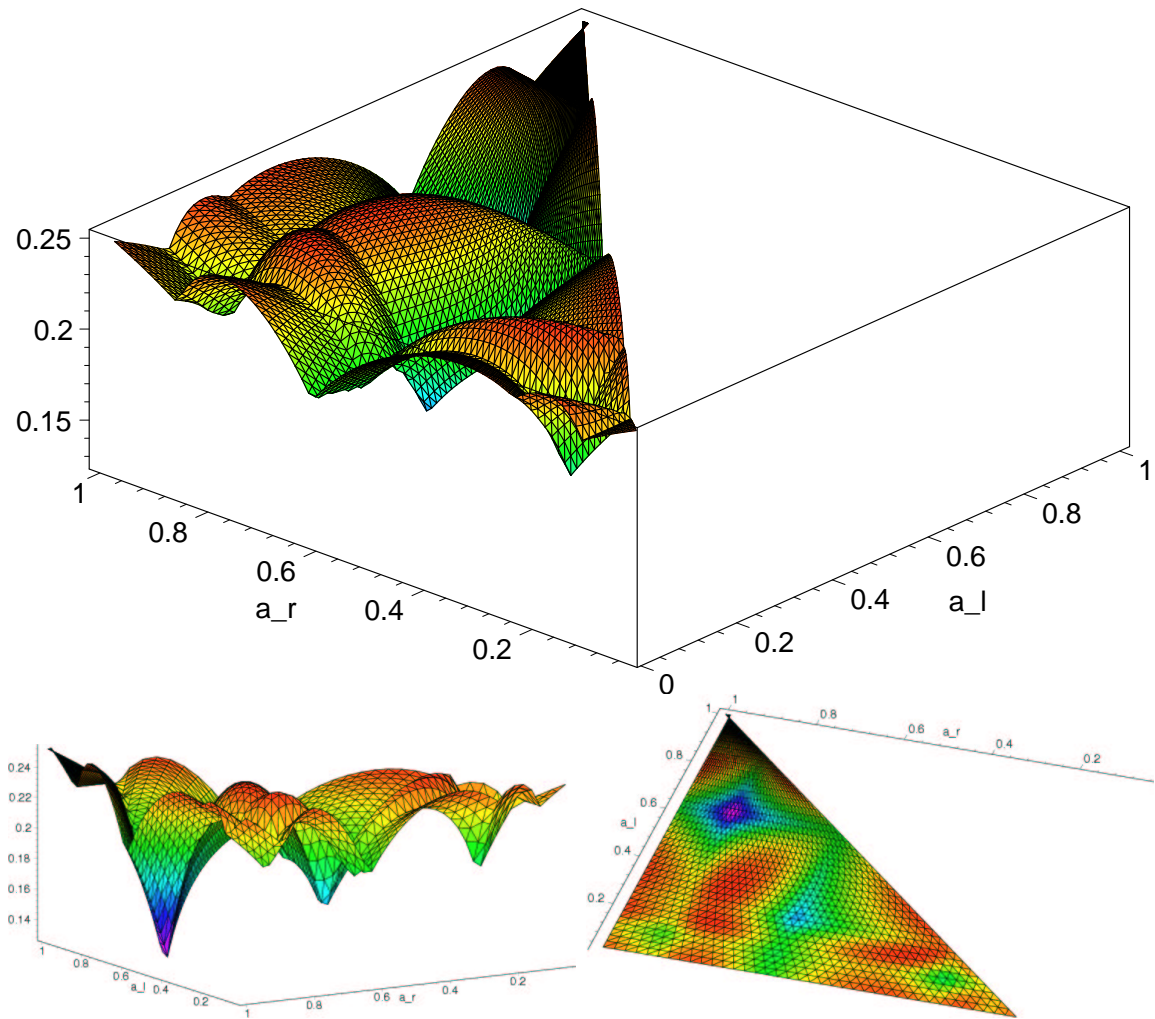


Abbildung 2.11: Die Energie in Abhängigkeit von den beiden Sprungstellen

In der Abbildung 2.11 sehen wir dreimal den Graphen der Energie in Abhängigkeit der beiden Sprungstellen  $a_l$  und  $a_r$ . Da  $a_l < a_r$  gilt, ist die Abbildung nur auf dem Einheitsdreieck definiert. Dabei besitzen Punkte gleichen Energiewertes dieselbe Färbung, und wir erkennen, daß der Minimierer für das Anfangsbeispiel die Sprungstellen bei  $b_3$  und  $b_4$  annimmt (siehe dazu auch Abbildung 2.10). Die Energie beträgt in diesem Fall  $0,14811 + 2\gamma$ .

### 2.2.4 Der Minimierer habe 3 Sprungstellen

Sofern der Minimierer drei echte Sprungstellen aufweist, bezeichnen wir diese mit  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ). Wir definieren den Minimierer abschnittsweise, so daß

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{für } 0 \leq x < a_1 \\ u_2(x) & \text{für } a_1 < x < a_2 \\ u_3(x) & \text{für } a_2 < x < a_3 \\ u_4(x) & \text{für } a_3 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{gilt.}$$

Da die Energie - wie auch in den Paragraphen zuvor - ein lokales Minimum annimmt, wenn die Sprungstellen des Minimierers sich auf denen des Anfangsbildes  $g$  verteilen, ergeben sich vier Möglichkeiten, die drei Sprungstellen des Minimierers auf die vier Unstetigkeitsstellen des Anfangsbildes zu verteilen. Die auf diese Weise entstandenen Minima betrachten wir in der folgenden Abbildung 2.12.

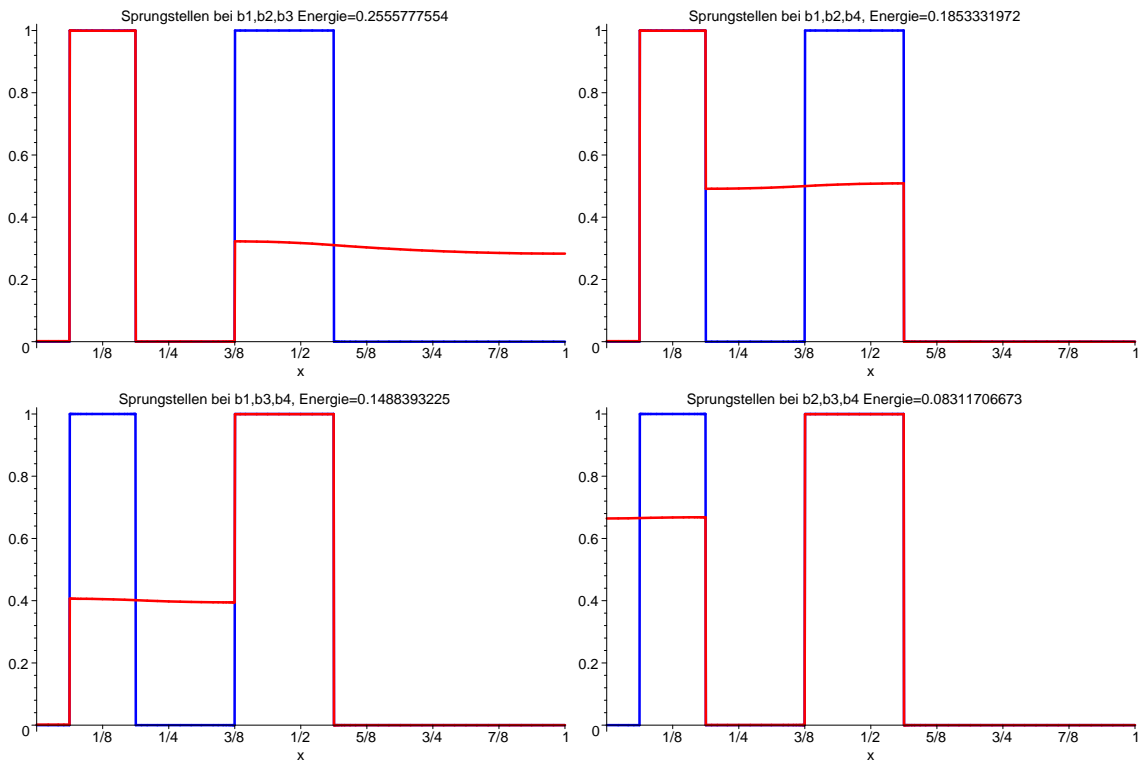


Abbildung 2.12: Lokale Minima (rot gefärbt) mit jeweils drei Sprungstellen und das Anfangsbild (blau gefärbt)

Zu den in Abbildung 2.12 angegebenen Energiewerten muß der Wert  $3\gamma$  addiert werden. Der absolute Minimierer für das Anfangsbild aus Abbildung 2.5 in der Klasse der Funktionen mit drei Sprungstellen wird angenommen, sofern  $a_1 = b_2$ ,  $a_2 = b_3$  und  $a_3 = b_4$  gilt. Der Energiewert beträgt dann  $0,08312 + 3\gamma$ , und der Minimierer besitzt die Gestalt des Graphen unten rechts aus Abbildung 2.12.

Falls für den Minimierer vier oder mehr Sprungstellen zugelassen werden, nimmt er die Gestalt des Anfangsbildes an, und der Energiewert beträgt  $\gamma (\#S(u))$ . In diesen Klassen ist die Energie im Falle eines Minimierers mit vier Sprungstellen minimal, da die ersten beiden Terme des Energiefunktionals bei vier oder mehr Sprungstellen verschwinden und weitere Sprungstellen lediglich den Wert des Funktionals erhöhen.

Somit haben wir für das konkrete Anfangsbild  $g$  aus Abbildung 2.5 jeweils einen Minimierer in der Funktionenklasse mit  $i$  Sprungstellen ( $i \in \mathbb{N}^{\geq 0}$ ) gefunden. Wir fassen die berechneten Energiewerte in Abhängigkeit der Anzahl zugelassener Sprungstellen zusammen und erhalten:

- $M(u) \approx 0,23228$  in der Klasse der stetigen Funktionen,
- $M(u) \approx 0,20160 + \gamma$  in der Klasse der Funktionen mit einer Sprungstelle,
- $M(u) \approx 0,14811 + 2\gamma$  in der Klasse der Funktionen mit zwei Sprungstellen,
- $M(u) \approx 0,08312 + 3\gamma$  in der Klasse der Funktionen mit drei Sprungstellen,
- $M(u) \approx \gamma \cdot i$  in der Klasse der Funktionen mit  $i$  Sprungstellen.

Insgesamt stellt sich demnach der stetige Minimierer aus Abbildung 2.6 ein, sofern  $\gamma \geq 0.05807$  gewählt wird. Für  $\gamma \leq 0.05807$  besitzt der Minimierer die Gestalt des Anfangsbildes mit vier Sprungstellen. Wenn wir also das Gewicht  $\gamma$  der Sprungstellen innerhalb des Mumford-Shah Funktionals erhöhen, springt die Anzahl der Sprungstellen an der Schwelle  $\gamma = 0.05807$  von Null auf vier. Die Minimierer in den Klassen mit ein bis drei Sprungstellen sind bei Vorgabe des speziellen Anfangsbildes  $g = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]} + \chi_{[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]}$  für keine Werte von  $\gamma$  optimal.

## 2.3 Das Anfangsbild $g$ in allgemeiner Form

In diesem Abschnitt wollen wir die Konkavität des Mumford-Shah Funktional (2.1) außerhalb der Sprungstellen für ein allgemeineres Anfangsbild und im Falle beliebig vieler Sprungstellen beweisen. Hierbei habe das Anfangsbild  $g$  eine beliebige Anzahl von Säulen, welche zusätzlich durch die Vorfaktoren  $\delta_i > 0$  gewichtet seien. Desweiteren lassen wir die Anzahl der Sprungstellen des Minimierers frei. Die Anzahl der Sprungstellen sei mit  $r$ , und die der Säulen des Anfangsbildes mit  $n$  bezeichnet.

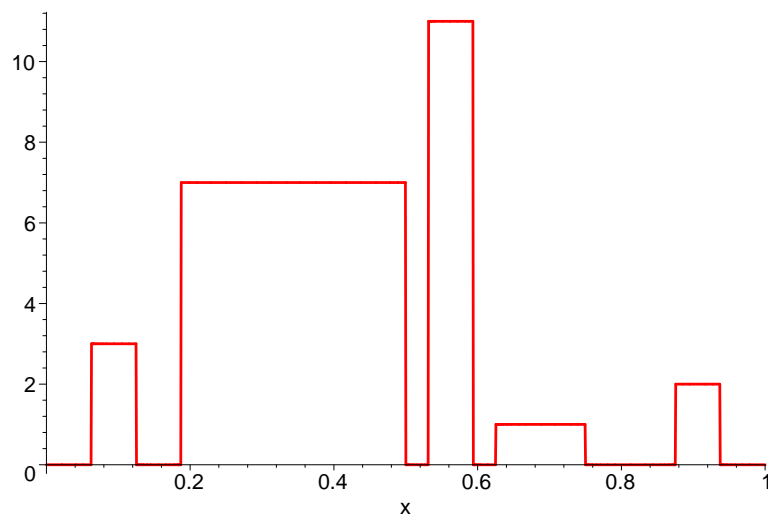


Abbildung 2.13: Das Anfangsbild  $g$  mit  $n$  gewichteten Säulen

**Satz 2.4 (Die Energie ist außerhalb der Unstetigkeitsstellen von  $g$  konkav)**

Es sei  $g = \sum_{i=1}^n \delta_i \chi_{[b_{2i-1}, b_{2i}]}$ ,  $S(u) = \{a_1 \dots a_r\}$  und  $M(u, S(u))$  wie in (2.1) definiert. Dann ist  $M(u, S(u))$  auf  $[0, 1] \setminus \{b_1, \dots, b_{2n}\}$  konkav bzgl.  $a_i, i = 1 \dots r$ .

BEWEIS: Wir beweisen diese Behauptung zunächst für  $r = 1$ , d.h. für eine Sprungstelle. Da der Minimierer explizit zwischen den Sprungstellen berechnet wurde, hängt er im vorliegenden Fall lediglich von der Sprungstelle  $a$  ab. Dies gilt daher auch für das Energiefunktional, und wir definieren  $\tilde{M}(a) := M(u, S(u))$ . Die Energie berechnet sich dann wie folgt:



$$\begin{aligned}
 \tilde{M}(a) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (u - g)^2 dx + \gamma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a (u_l')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a (u_l - g)^2 dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^1 (u_r')^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^1 (u_r - g)^2 dx + \gamma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a -u_l u_l'' + u_l^2 - 2u_l g + g^2 dx + \frac{1}{2} u_l(x) u_l'(x) \Big|_0^a \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^1 -u_r u_r'' + u_r^2 - 2u_r g + g^2 dx + \frac{1}{2} u_r(x) u_r'(x) \Big|_a^1 + \gamma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a -u_l (u_l - g) + u_l^2 - 2u_l g + g^2 dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^1 -u_r (u_r - g) + u_r^2 - 2u_r g + g^2 dx + \gamma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a -u_l g + g^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^1 -u_r g + g^2 dx + \gamma \tag{2.9} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a -(u_l'' + g)g + g^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^1 -(u_r'' + g)g + g^2 dx + \gamma \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^a u_l'' g dx - \frac{1}{2} \int_a^1 u_r'' g dx + \gamma \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^a u_l'' \sum_{i=1}^n \delta_i \chi_{[b_{2i-1}, b_{2i}]} dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_a^1 u_r'' \sum_{i=1}^n \delta_i \chi_{[b_{2i-1}, b_{2i}]} dx + \gamma . \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

In der obigen Rechnung erscheint die Darstellung (2.9) einfacher. Sie läßt sich jedoch nicht so gut auswerten, und nach erneuter Anwendung der Eulergleichung erhält man die Energie in Form von (2.10). Diese läßt sich durch Integration explizit ausrechnen.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Einerseits ist es möglich, daß die Sprungstelle  $a$  auf einer Säule liegt, andererseits kann sie zwischen zweien bzw. zwischen einer Säule und einer Intervallgrenze liegen.

1. Fall:  $a \notin \bigcup_{i=1}^n [b_{2i-1}, 2i]$ . Dann gilt

$$\tilde{M}(a) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \delta_i (u'_l(b_{2i}) - u'_l(b_{2i-1})) - \frac{1}{2} \sum_{i=n_0+1}^n \delta_i (u'_r(b_{2i}) - u'_r(b_{2i-1})) + \gamma .$$

2. Fall:  $a \in [b_{2n_0-1}, 2n_0]$  für ein  $n_0 \in \{1 \dots n\}$ . Dann errechnet sich die Energie wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(a) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0-1} \delta_i (u'_l(b_{2i}) - u'_l(b_{2i-1})) - \frac{1}{2} \sum_{i=n_0+1}^n \delta_i (u'_r(b_{2i}) - u'_r(b_{2i-1})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_{n_0} (u'_r(b_{2n_0}) - u'_l(b_{2n_0-1})) + \gamma . \end{aligned}$$

Insgesamt werden drei verschiedene Terme immer wieder aufsummiert. Wenn wir zeigen können, daß die drei Terme  $-\frac{1}{2} (u'_l(b_{2i}) - u'_l(b_{2i-1}))$ ,  $-\frac{1}{2} (u'_r(b_{2i}) - u'_r(b_{2i-1}))$  und  $-\frac{1}{2} (u'_r(b_{2n_0}) - u'_l(b_{2n_0-1}))$  konkav in  $a$  sind, ist die Behauptung bewiesen, da die Energie zwischen den Sprungstellen  $b_i$  als Summe von konkaven Abbildungen wiederum konkav ist. Die Gewichte  $\delta_i$  sind positiv, unabhängig von  $a$  und können daher bei den folgenden Berechnungen weggelassen werden. Aus Notationsgründen setzen wir  $b_1 := b_{2i-1}$ ,  $b_2 := b_{2i}$  und untersuchen im folgenden diese drei Terme.

❶. Term:  $-\frac{1}{2}(u'_l(b_2) - u'_l(b_1))$ . In diesem Fall gilt  $b_1 \leq b_2 \leq a$ , und wir berechnen

$$u_l(x) = \dots = -\frac{1}{c_l} \int_{b_1}^{b_2} \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi$$

$$u'_l(b_1) = -\frac{\sinh(b_1)}{c_l} \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi$$

$$u'_l(b_2) = -\frac{\sinh(b_2)}{c_l} \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi$$

$$-\frac{1}{2}(u'_l(b_2) - u'_l(b_1)) = \frac{1}{2 c_l} (\sinh(b_2) - \sinh(b_1)) \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi$$

$$= -\frac{(\exp(b_2) - \exp(-b_2) + \exp(-b_1) - \exp(b_1))}{4 (\exp(a) - \exp(-a))} .$$

$$\cdot (\exp(b_2 - a) - \exp(-b_2 + a) - \exp(b_1 - a) + \exp(-b_1 + a)) .$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Terme  $\sinh$ ,  $\cosh$  und  $\tanh$  mit Hilfe des Softwarepakets *Maple* durch deren Darstellung mit der Exponentialfunktion ersetzt und das Ergebnis anschließend überprüft. Wenn wir diesen Ausdruck zweimal nach  $a$  ableiten, erhalten wir

$$-\frac{(\exp(b_2) - \exp(-b_2) + \exp(-b_1) - \exp(b_1))^2 (\exp(a) + \exp(-a))}{(\exp(a) - \exp(-a))^3} < 0 ,$$

womit wir die Konkavität für den ersten Term bewiesen haben.

②. Term:  $-\frac{1}{2}(u'_r(b_2) - u'_l(b_1))$ . In diesem Fall gilt  $b_1 \leq a \leq b_2$ .

$$\begin{aligned} u_l(x) &= \dots = -\frac{1}{c_l} \int_{b_1}^a \cosh(x) (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi \\ &= -\cosh(x) \frac{(\sinh(b_1) - \tanh(a) \cosh(b_1))}{\tanh(a)} \end{aligned}$$

$$u'_l(b_1) = -\sinh(b_1) \frac{(\sinh(b_1) - \tanh(a) \cosh(b_1))}{\tanh(a)}$$

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \dots = -\frac{1}{c_r} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \int_a^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi \\ &= -(\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \frac{(\sinh(b_2) - \tanh(a) \cosh(b_2))}{\tanh(a) - \tanh(1)} \end{aligned}$$

$$u'_r(b_2) = -(\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2)) \frac{(\sinh(b_2) - \tanh(a) \cosh(b_2))}{\tanh(a) - \tanh(1)}.$$

Wir überprüfen nun die Konkavität des Ausdrucks in zwei Schritten. Dazu leiten wir  $u'_r(b_2)$  und  $u'_l(b_1)$  jeweils zweimal nach  $a$  ab und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} u'_r(b_2) &= -\frac{(\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2))}{(\tanh(a) - \tanh(1))^2} \left( -\frac{\cosh(b_2) (\tanh(a) - \tanh(1))}{\cosh^2(a)} \right. \\ &\quad \left. -\frac{\sinh(b_2) - \tanh(a) \cosh(b_2)}{\cosh^2(a)} \right) \\ &= \frac{(\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2))^2}{(\tanh(a) - \tanh(1))^2 \cosh^2(a)} \\ \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u'_r(b_2) &= -\frac{(\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2))^2}{(\tanh(a) - \tanh(1))^4 \cosh^4(a)} \left( 2 \cosh(a) \sinh(a) (\tanh(a) - \tanh(1))^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 (\tanh(a) - \tanh(1)) \frac{\cosh^2(a)}{\cosh^2(a)} \right) \\ &= -2 \frac{(\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2))^2}{(\tanh(a) - \tanh(1))^3 \cosh^4(a)} \cosh(a) (\cosh(a) - \tanh(1) \sinh(a)) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} u'_i(b_1) &= -\sinh(b_1) \frac{-\sinh(b_1)}{\tanh^2(a) \cosh^2(a)} = \frac{\sinh^2(b_1)}{\sinh^2(a)} \\ \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u'_i(b_1) &= -2 \frac{\sinh^2(b_1) \cosh(a)}{\sinh^3(a)} < 0.\end{aligned}$$

Für die Differenz gilt dann

$$\frac{\partial^2}{(\partial a)^2} \left( -\frac{1}{2} (u'_r(b_2) - u'_r(b_1)) \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u'_r(b_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial a)^2} u'_i(b_1) \stackrel{s.o.}{<} 0,$$

und die Konkavität des gemischten Terms ist gezeigt.

③. Term:  $-\frac{1}{2} (u'_r(b_2) - u'_r(b_1))$ . In diesem Fall gilt  $b_1 \leq b_2 \leq a$ , und es folgt

$$\begin{aligned}u_r(x) &= \dots = -\frac{1}{c_r} (\cosh(x) - \tanh(1) \sinh(x)) \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi \\ u'_r(b_1) &= -\frac{1}{c_r} (\sinh(b_1) - \tanh(1) \cosh(b_1)) \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi \\ u'_r(b_2) &= -\frac{1}{c_r} (\sinh(b_2) - \tanh(1) \cosh(b_2)) \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi.\end{aligned}$$

Für die Differenz gilt

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} (u'_r(b_2) - u'_r(b_1)) &= -\frac{1}{2c_r} (\sinh(b_2) - \sinh(b_1) - \tanh(1) (\cosh(b_2) - \cosh(b_1))) \cdot \\ &\quad \cdot \int_{b_1}^{b_2} (\cosh(\xi) - \tanh(a) \sinh(\xi)) d\xi \\ &= -\frac{(\exp(b_2 - a) - \exp(-b_2 + a) - \exp(b_1 - a) + \exp(-b_1 + a))}{4(-\exp(a) + \exp(2 - a))} \\ &\quad \cdot (-\exp(b_1) + \exp(2 - b_1) + \exp(b_2) - \exp(2 - b_2)),\end{aligned}$$

und die zweite Ableitung nach  $a$  ergibt

$$-\frac{(-\exp(b_1) + \exp(-b_1 + 2) + \exp(b_2) - \exp(-b_2 + 2))^2 (\exp(a) + \exp(2 - a))}{(-\exp(a) + \exp(2 - a))^3} < 0 .$$

Somit ist die Konkavität für alle drei vorkommenden Terme gezeigt. Die Art der Terme ändert sich nicht, wenn wir von einer zu mehreren Sprungstellen  $a_1 \dots a_r$  übergehen. Die Energie hat im Vergleich zu (2.10) die Gestalt

$$\tilde{M}(a_1, \dots, a_r) = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^r \int_{a_j}^{a_{j+1}} u_j'' \sum_{i=1}^n \delta_i \chi_{[b_{2i-1}, b_{2i}]} dx + \gamma \cdot r ,$$

wobei der Minimierer  $u$  abschnittsweise auf  $[a_j, a_{j+1}]$  durch  $u_j$  zwischen den Sprungstellen definiert sei. Analog zum Fall einer Sprungstelle wird die Lage der jeweiligen Sprungstelle  $a_j$  untersucht. Für jedes  $a_j$  entstehen durch eine Fallunterscheidung (liegt  $a_j$  auf einer Säule oder zwischen zweien) dieselben drei Arten von Termen. Diese sind konkav in den Veränderlichen  $a_j$ , womit der Beweis des Satzes 2.4 komplettiert ist.

□

Da die Treppenfunktionen dicht in  $L^\infty$  liegen, haben wir mit Hilfe des Satzes 2.4 gezeigt, daß der Minimierer des Mumford-Shah Funktionals für beliebige Anfangsbilder  $g \in L^\infty(0, 1)$  lediglich dort Unstetigkeitsstellen besitzt, wo auch das Anfangsbild Sprungstellen aufweist. Diese Eigenschaft ist in der Bildverarbeitung von Bedeutung, da bei der Minimierung keine neuen Kanten bzw. Konturen erzeugt werden. Desweiteren ist dies eine Eigenschaft, die für das Mumford-Shah Funktional in höheren Dimensionen verlorengeht, wie wir im Kapitel 1 anhand der Beispiele der Kreuzung und der Gabelung (Abbildungen 1.2 und 1.3) gesehen haben.

# 3 Bildbearbeitung mit partiellen Differentialgleichungen

## 3.1 Einleitung

In diesem Kapitel behandeln wir die mathematische Bildbearbeitung mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen. Ziel dieser Methodik ist die Bildrestaurierung, das Entrauschen und die Kantenverstärkung von Bildern. Wie bisher betrachten wir dabei ein Anfangsbild  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Bildsequenz  $u(x, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche das Bild zur Zeit  $t$  repräsentiert. Außerdem sei ein Bildoperator  $I$  in Abhängigkeit von  $u, \nabla u$  und von der Hessematrix  $D^2u$  von  $u$  gegeben. Der Großteil der Bildbearbeitungsoperatoren kann wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = I(u, \nabla u, D^2u) & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{in } \Omega . \end{cases} \quad (3.1)$$

Dabei hängt die Wahl der partiellen Differentialgleichung von der Beschaffenheit des Anfangsbildes bzw. von der Art der Störung ab. So können z.B. bei der Datenübertragung Daten verloren gehen, so daß Bilder mit zerstörten Pixeln bzw. fehlenden Regionen entstehen, oder sie sind mit einem Störsignal belegt, derart daß sich das Anfangsbild  $u_0$  als Summe des Originalbildes und einer Rauschfunktion zusammensetzt. Unschärfe eines Bildes, die dadurch entstehen kann, daß sich das Objekt bei der Aufnahme bewegt (u. a. bei der Wahl einer zu großen Verschußzeit), ist eine weitere Art von Störung. Eine Gleichung, welche jegliche Störsignale dieser Art entfernt, existiert nicht, und man hat von Fall zu Fall einen geeigneten Bildoperator zu wählen.

## 3.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Eine häufige Forderung an den Bildoperator ist die Glättung des Anfangsbildes. Die gängigste Methode hierfür liefert die lineare Wärmeleitungsgleichung<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0 . \quad (3.2)$$

Der physikalische Hintergrund dieser Gleichung setzt sich aus dem Fickschen Gesetz und der Kontinuitätsgleichung zusammen. Betrachten wir  $u$  als eine Konzentration (z.B. als Wärme, Druck oder den Grauwert bzw. die Helligkeitsintensität eines Bildes) und  $j$  als deren Fluß. Dann beschreibt das Ficksche Gesetz das Gleichgewicht

$$j = -D \cdot \nabla u ,$$

wobei die Relation zwischen  $j$  und  $\nabla u$  durch den Diffusionstensor  $D$  aufgefangen wird. Eine Art Massenerhaltung drückt nun die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u = -\operatorname{div}(j)$$

aus, gemäß welcher die Konzentration transportiert wird, sich aber nicht vermehrt oder verringert. Aus der Kombination dieser beiden Gesetze erhalten wir die allgemeine Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u) ,$$

die für  $D = Id$  die Wärmeleitungsgleichung widerspiegelt. Die Struktur des Diffusionstensors ist entscheidend für die Art der Gleichung. Ist er konstant, spricht man von einer homogenen Diffusion; ist er ortsabhängig, bezeichnet man die Diffusion als inhomogen. Sofern  $D$  Differentialstruktur aufweist, erhält man einen nichtlinearen Diffusionsfilter. Auf Gleichungen dieses Typs gehen wir später noch näher ein.

Die Diffusionsgleichung glättet Anfangsbilder und beseitigt irrelevante lokale Extrema und kleinere Störungen, so daß lediglich die vakanten Teile des Bildes zurückbleiben. Letztere Eigenschaft ist bei der Kantenerkennung hilfreich, die später in Paragraph 3.3 diskutiert wird. Aus der klassischen Theorie der partiellen Differentialgleichung

---

<sup>1</sup>oder auch Diffusionsgleichung



(siehe dazu u.a. [Eva98], [Jos98]) ist bekannt, daß das Lösen der Wärmeleitungsgleichung auf  $\Omega = \mathbb{R}^n$  mit  $u_0$  als Anfangsdatum äquivalent zur Faltung des Anfangsbildes mit dem Gaußkern ist. Somit besitzt die Wärmeleitungsgleichung für  $n = 2$  mit  $u(x, 0) = u_0 \in C(\mathbb{R}^2)$  als Anfangsdatum die eindeutige Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{für } t = 0, x \in \mathbb{R}^2 \\ G_{\sqrt{2t}} * u_0(x, t) & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

sofern  $u$  der Wachstumsbedingung  $|u(x, t)| \leq M \exp(ax^2)$  für  $M, a > 0$  genügt. Hierbei sei der Gaußkern mit Standardabweichung  $\sigma$  als

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

und die Faltung zweier Abbildungen durch

$$(G_\sigma * u_0)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x - y)u_0(y) dy$$

definiert.

In der folgenden Abbildung 3.1 sehen wir die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.2) für verschiedene Zeitwerte  $t$ . Dabei wurden Dirichlet-Randbedingungen gestellt, die dem Anfangsbild angepaßt sind, d.h. sie wurden so gewählt, daß sie den bereits im Bild vorhandenen Randwerten entsprechen.



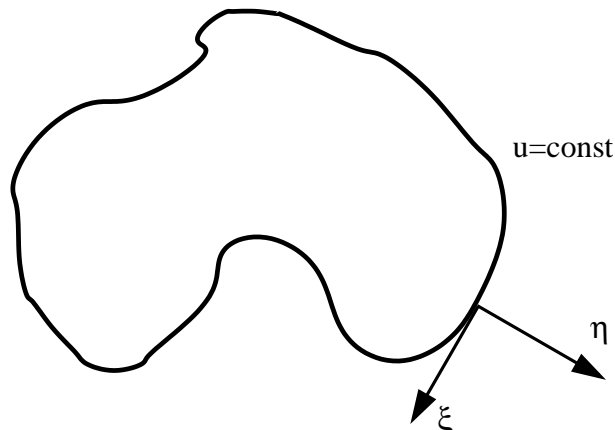
Abbildung 3.1: Oben links das Anfangsbild  $u_0$ , es folgen von links nach rechts und von oben nach unten die Lösungen  $u(x, t)$  für  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30$

Hierbei fällt auf, daß zwar eine Glättung erzielt wird, das Bild hingegen unschärfer wird. Dies liegt daran, daß die Glättung auch über Kanten hinweg vollzogen wird. Nehmen wir zur Veranschaulichung an, daß sich ein Bildoperator der Form (3.1) im Zweidimensionalen in die Form

$$I = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta} \quad (3.3)$$

mit  $\eta = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  und  $\xi \perp \eta$  überführen läßt (siehe dazu Abbildung 3.2). Die Diffusionskoeffizienten  $c_\xi$  und  $c_\eta$  mögen dabei von  $\nabla u$  abhängen. Dann ist die Wärmeleitungsgleichung (3.2) äquivalent zu

$$u_t(x, t) - u_{\xi\xi}(x, t) - u_{\eta\eta}(x, t) = 0 . \quad (3.4)$$

Abbildung 3.2:  $\eta = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  und  $\xi \perp \eta$  an einer Isophote

Bei der Wärmeleitungsgleichung gilt daher  $c_\eta = c_\xi = 1$ , und man sieht, daß sowohl entlang der Isophote<sup>2</sup> als auch orthogonal zu ihr eine Glättung eintritt. Da in der Nähe von Kanten  $u_\eta$  betragslich groß wird, ist die eintretende Unschärfe auf den Vorfaktor  $c_\eta$  zurückzuführen, der meist stark von  $|\nabla u|$  und damit auch von  $u_\eta$  abhängt und eine Glättung über die Kanten hinweg verursacht. Dieser Effekt ist jedoch nicht immer unerwünscht, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden. Die Wärmeleitungsgleichung benutzt man nämlich häufig als Vorfilter, um vor der weiteren Bildbearbeitung eine Glättung und Regularisierung vorzunehmen. Ebenso wird diese Methode oft angewendet, um die Kantenmenge aus einem Bild zu extrahieren. Lassen wir die Zeit in (3.4) fortschreiten und untersuchen die Punkte, für die der Betrag des Gradienten einen gewissen Schwellenwert überschreitet bzw. lokale Maxima annimmt, so erreichen wir bereits eine gute Annäherung an die Kantenmenge. Bevor wir näher auf die Kantenerkennungsalgorithmen eingehen, erläutern wir den Begriff des Skalenraumes<sup>3</sup> und der Multiskalen-Analyse.

---

<sup>2</sup>Kurven gleicher Helligkeit (in der Bildbearbeitung Kurven mit konstanten Grauwerten) werden auch Isophoten genannt

<sup>3</sup>engl.: Scale-Space

### 3.3 Scale-Space Theorie und Kantenerkennung

Eine bedeutende Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung liegt darin, daß sie die sogenannten *Scale-Space* Axiome erfüllt. Der Multiskalensatz zur Bildsegmentierung geht davon aus, daß Bilder in verschiedenen Zeitskalen betrachtet werden müssen, um robuste Segmentierungen zu erhalten. Diesen Ansatz greift das Scale-Space Filtering auf, bei dem ein Skalenraum (Scale-Space) durch sukzessives Tiefpaßfiltern (low pass filtering) erzeugt wird. Niedrige Skalen, bei denen wenig gefiltert wird, enthalten dadurch detaillierte Objektkonturen, während hohe Skalen homogene Regionen, d.h. Regionen geringer Helligkeitsvariation, beschreiben. Bei den Kantenerkennungsalgorithmen kann man voraussetzen, daß die Merkmale, die sich robust über große Skalen verhalten und somit durch das Filtern nicht entfernt werden, auch die signifikanten Bildobjekte repräsentieren. Betrachten wir den Operator  $I_\lambda$ , der das Anfangsbild  $u_0$  auf das Bild zur Zeit  $\lambda$  abbildet, d.h.  $u(x, t) = I_t(u_0)$ . Als Skalenraum wird dann der Raum  $\{I_\lambda u_0 \mid \lambda \geq 0\}$  mit einer stetigen Zeitskala bezeichnet, in den das Anfangsbild eingebettet wird. Die grundlegenden Scale-Space Axiome lauten wie folgt:

- $I_\lambda(u_0) \rightarrow u_0$  für  $\lambda \rightarrow 0$
- $I_\lambda(u_0)$  hängt für  $\lambda > \lambda'$  lediglich von  $I_{\lambda'}(u_0)$  ab (Kausalität)
- $I_\lambda(A(u_0)) = A(I_\lambda(u_0))$  für alle Isometrien  $A$  (Isometrie-Invarianz)

Die beiden ersten Eigenschaften werden auch oft durch die stärkere Halbgruppeneigenschaft

$$I_0(u_0) = u_0 \quad \text{und} \quad I_{\lambda+\mu}(u_0) = I_\lambda(I_\mu(u_0)) \quad \text{für } \lambda, \mu \geq 0$$

ersetzt. Die Glättungseigenschaften und der Verlust von Informationen sind aus der Forderung entstanden, daß beim Übergang von den kleineren (feinen) zu den größeren Skalen keine zusätzlichen Objekte hervorgebracht werden. Aus dieser und ähnlichen Forderungen resultieren weitere Scale-Space Axiome (Kontrast- und Translationsinvarianz bzw. Vergleichseigenschaften) verschiedener Autoren. Eine Zusammenfassung über die verschiedenen Scale-Space Axiome, deren Eigenschaften und den zugehörigen Operatoren findet man bei Weickert [Wei98] und in der gemeinsamen Arbeit von Alvarez, Guichard, Lions und Morel [AGLM93]. Als erste Referenzen über Scale-Space

werden die Arbeiten von Witkin [Wit83] aus dem Jahre 1983 angegeben. Allerdings ist die Idee noch 20 Jahre vorher von Taizo Iijima (in japanischer Sprache) eingeführt worden (siehe dazu auch [WII99]). In seinen Veröffentlichungen führt er eine Axiomatik ein, aus der die Faltung mit dem Gaußkern als Erzeuger eines Skalenraumes hervorgeht. Somit ist der Gaußsche Scale-Space der historisch älteste und auch meist erforschte Skalenraum. Wie schon erwähnt, entsteht er durch die lineare Diffusionsgleichung (3.2) oder äquivalent durch Faltung des Gaußkerns mit steigender Standardabweichung. Mit dieser Methode arbeiten auch einige Kantenerkennungsalgorithmen. Marr und Hildreth bezeichnen solche Punkte als Kantenpunkte zur *Skala*  $\sqrt{t}$ , für die  $\Delta(G_{\sqrt{t}} * u_0)$  das Vorzeichen wechselt und  $|\nabla(G_{\sqrt{t}} * u_0)|$  *groß* ist. Dabei entsteht eine abgeschlossene Kantenmenge. Man muß sich jedoch a priori auf einen Schwellenwert für den Betrag des Gradienten festlegen. Die genauere Wahl eines solchen Schwellenwertes und die Überlegungen, wie weit man im Skalenraum vorstoßen muß, um die Kantenmenge eines Bildes zu erhalten, entnehme man der Arbeit von Marr und Hildreth [MH80]. Ähnliche Methoden verwendet auch der Kantendetektor von Canny [Can86]. Er wird oft als effektivster linearer Kantendetektor bezeichnet und hat sich als Standardoperator für die Bestimmung der Kantenmenge von digitalisierten Bildern durchgesetzt. Er berechnet nach Unterdrückung nicht relevanter Maxima die erste Ortsableitung des durch die Diffusionsgleichung geglätteten Bildes. Lokale Maxima für den Betrag dieses Gradienten werden dann als Kanten aufgefaßt. In der folgenden Abbildung 3.3 wurden die Kantenmengen der in Abbildung 3.1 gegebenen Bilder durch den oben beschriebenen Canny-Operator bestimmt.

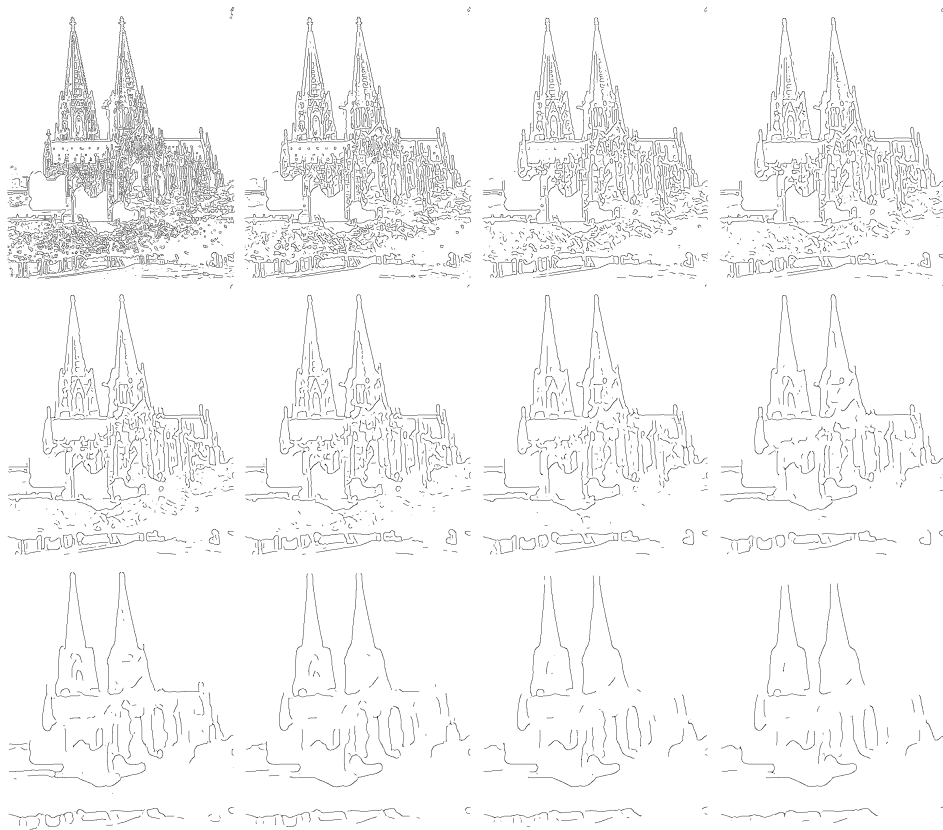


Abbildung 3.3: Der Canny Kantendetektor, angewendet auf die in Abbildung 3.1 gegebenen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung fortschreitender Zeitwerte

Diffusion bewirkt Glättung und das Verschwimmen von Konturen. Wenn man diesen Prozeß umkehren könnte, dürfte man auf die Restauration von Konturen und Kanten hoffen. Daher liegt es nahe, die Zeit in der Wärmeleitungsgleichung rückwärts zu betrachten. Man erhält so die inverse Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \Delta_x u(x, t) = 0, \quad (3.5)$$

die jedoch mathematisch ein nicht korrekt gestelltes Problem darstellt, da Lösungen innerhalb kürzester Zeit explodieren können oder das Problem unter bestimmten Voraussetzungen über unendlich viele Lösungen verfügt [HN83, Hö83]. Diskretisiert man den Laplace-Operator  $\Delta u_{i,j}$  auf dem Gitterknoten  $(i, j)$  mit finiten Differenzen der vier

Nachbarknoten  $\Delta u_{i,j} = h^{-2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})$ , so erhält man für kurze Zeitschritte eine Lösung. Diese numerische Lösung kann ebenfalls explodieren, d.h. es entstehen Funktionswerte außerhalb des vorgegebenen Intervalls<sup>4</sup>  $[0, 255]$ , die man durch Abschneiden wieder in den gewünschten Wertebereich zurückführt.  $h$  bezeichnet hierbei die Gitterschrittweite. In Kapitel 3.6 werden wir Rückwärtsdiffusion noch einmal aufgreifen, allerdings in einer abgewandelten Form. Zur Veranschaulichung betrachten wir die folgende Abbildung 3.4, in der wir ein mit Gaußrauschen<sup>5</sup> versehenes Bild (links) mit der soeben beschriebenen Rückwärtsdiffusion bearbeitet haben (Bild rechts). In der Tat erscheint das mit der Rückwärtsdiffusion bearbeitete rechte Bild etwas schärfer. Prinzipiell gehen detaillierte Daten bei der Vorwärtsdiffusion verloren und können nicht durch die Rückwärtsdiffusion zurück erlangt werden. Dies liegt daran, daß die Wärmeleitungsgleichung nicht invertierbar ist, d.h. Informationen gehen für fortschreitende Zeitwerte verloren. Daher ist die Anwendung der inversen Wärmeleitungsgleichung nur für sehr kurze Zeiten durchführbar.



Abbildung 3.4: links: Bild mit additivem Gaußrauschen (Standardabweichung  $\sigma = 5$ )  
rechts: Rückwärtsdiffusion ( $t = -0.15$ ), angewendet auf das linke Bild

---

<sup>4</sup>Der Wert 0 bezeichnet hierbei die Helligkeitsintensität Schwarz und der Wert 255 Weiß

<sup>5</sup>In einem mit Gaußrauschen kontaminierten Bild besteht jedes Pixel aus der Summe des ursprünglichen, originalen und einem zufälligen Grauwert. Dabei wird der zufällige Grauwert durch Gaußsche Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und vorgegebener Standardabweichung  $\sigma$  bestimmt.

### 3.4 Mean Curvature Motion (MCM)

Ein anderer Vorstoß, der durch die Wärmeleitungsgleichung verursachten Verwischung entgegenzuwirken, liefert die Gleichung für den mittleren Krümmungsfluß (mean curvature motion, MCM), deren Verhalten und Lösbarkeit in den Arbeiten von Evans und Spruck [ES91, ES92a, ES92b, ES95] beschrieben ist. Da die Verschwommenheit bei der Anwendung der Wärmeleitungsgleichung hauptsächlich aus der Diffusion in Richtung des Vektors  $\eta$  resultiert, läßt man diesen Term wegfällen, indem man in Gleichung (3.3)  $c_\eta = 0$  setzt. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}u = u_{\xi\xi} ,$$

welche man durch elementare Umformungen in folgende Gestalt bringen kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u &= u_{\xi\xi} = \Delta u - u_{\eta\eta} \\ &= \Delta u - \frac{1}{|\nabla u|^2} \left( \nabla u \cdot D^2 u \cdot \nabla u \right) \\ &= \frac{u_{xx}(u_x^2 + u_y^2) + u_{yy}(u_x^2 + u_y^2) - u_x^2 u_{xx} - u_y^2 u_{yy} - 2u_{xy}u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \frac{u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2u_{xy}u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ &= |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = |\nabla u| \operatorname{curv}(u) . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da  $\operatorname{curv}(u) = \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$  die Krümmung der Niveaumengen von  $u$  darstellt, und diese Mengen sich proportional zu ihrer mittleren Krümmung bewegen, bezeichnet man die Gleichung (3.6) als Gleichung für den mittleren Krümmungsfluß. Ihre Auswirkungen auf digitale Bilder versteht man am besten bei einem Blick auf die Isophoten eines Bildes im Laufe der Evolution. Dabei sieht man, daß sich diese in Richtung der inneren Normalen mit der Geschwindigkeit der Krümmung verändern. Dies impliziert, daß sich



Kurven gleicher Helligkeitsintensität zusammenziehen und von ihrem anfänglichen Erscheinungsbild wegbewegen. Da dies auch für Kanten der Fall ist, verändern sich die Objektkonturen für große Zeitwerte. Die Abbildung 3.5 zeigt diese Effekte für wachsende Zeitwerte auf ein Bild angewendet, wohingegen Abbildung 3.6 die Auswirkungen auf die Kantenmengen veranschaulicht. Trotz dieses Nachteils der *wandernden Kanten* spielt die Krümmungsgleichung eine große Rolle in der Bildbearbeitung. Sie ist translationsinvariant und kann als Grenzprozeß des Median-Filters<sup>6</sup> aufgefaßt werden. Für weitere Informationen über die Krümmungsgleichung im Hinblick auf Bildbearbeitung verweisen wir auf die Arbeit von Morel und Guichard [GM97].

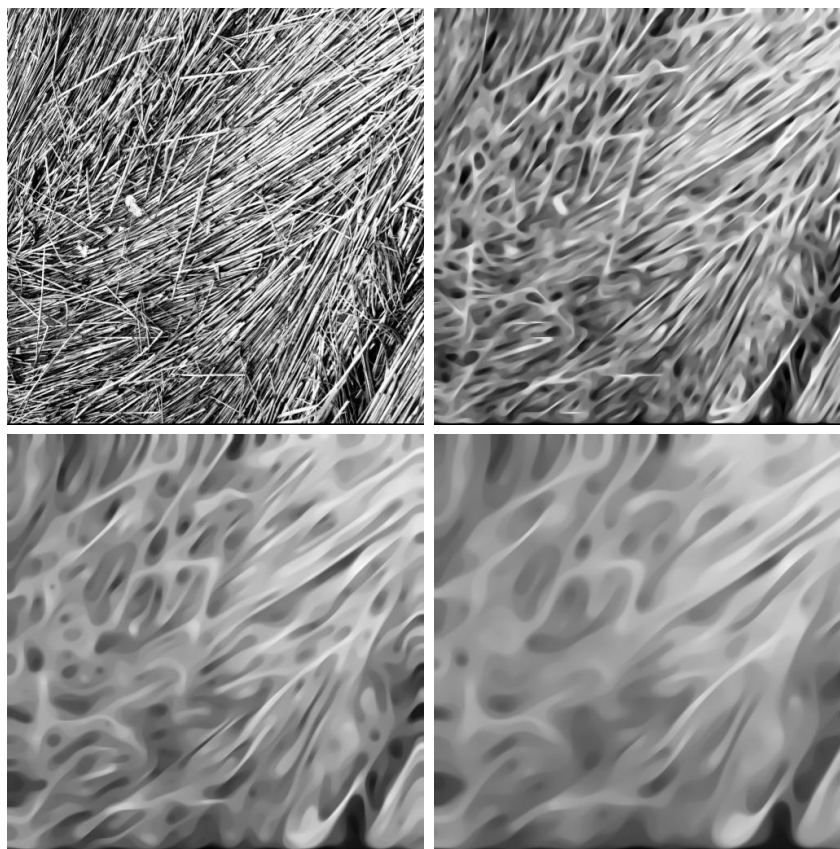


Abbildung 3.5: Einfluß der Krümmungsgleichung ( $t = 0, 5, 10, 15$ ) auf ein digitales Bild

In den Abbildungen 3.5 und 3.6 beobachtet man das Zusammenziehen der Objektkonturen. Dabei verändern sich Bereiche großer Krümmungswerte innerhalb der Kantenmenge nach nur kurzer Zeit.

---

<sup>6</sup>siehe dazu auch [GM97]

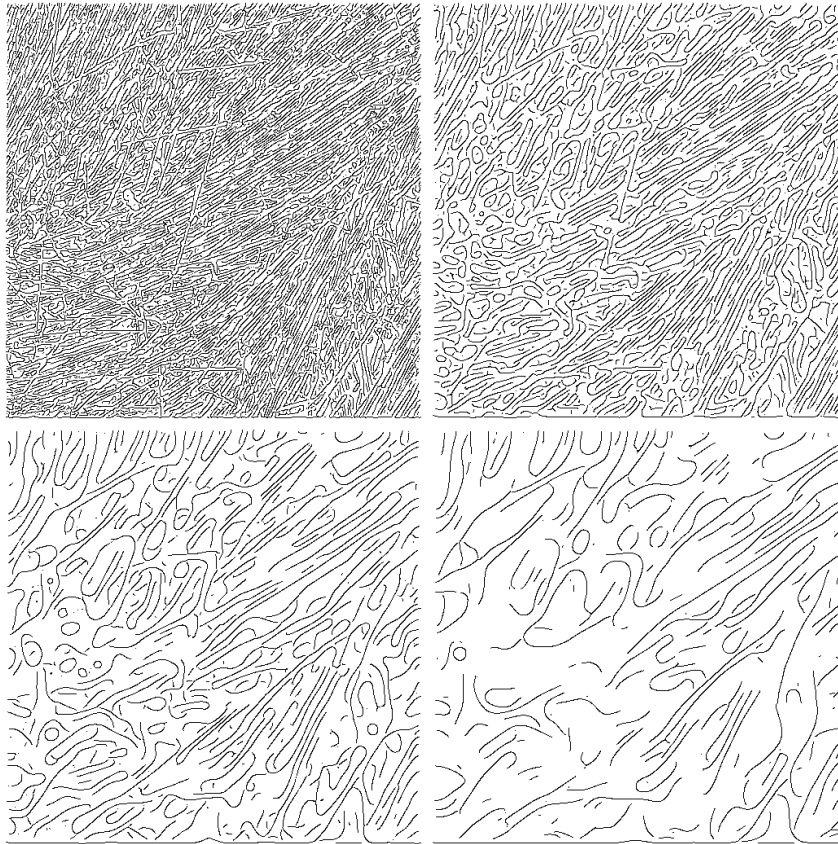


Abbildung 3.6: Einfluß der Krümmungsgleichung auf die Kantenmengen der in Abbildung 3.5 gegebenen Bilder

### 3.5 Shock Filter

Um verschwommene Bilder zu restaurieren, führten Osher und Rudin [OR90] 1990 einen Shock-Filter ein. Dieser Filter berechnet das restaurierte Bild als stationären Limes der Gleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = -|\nabla u| \operatorname{sgn}(\Delta u) & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases} \quad (3.7)$$

Was diese Methode von vielen anderen abhebt, ist die Tatsache, daß sie *Shocks* in Richtung der Kanten bildet und auf diese Weise Kanten entstehen läßt. Greifen wir die Idee von Marr und Hildreth auf, nach der Punkte, für die der Laplace-Operator das Vorzeichen wechselt, in der Kantenmenge enthalten sind. Solche Punkte bleiben durch den Shock-Filter unverändert, wohingegen die Gradienten in unmittelbarer Umgebung verstärkt werden. Betrachten wir die Gleichung etwas vereinfacht mit einer Konstanten  $a$  anstelle des Vorzeichenterms in einer Dimension, so erhalten wir

$$u_t = a u_x \quad \text{auf } \mathbb{R} \text{ mit } u(x, 0) = u_0 .$$

Dies ist die Transportgleichung mit der Lösung  $u(x, t) = u_0(x + at)$ . Gleichung (3.7) basiert daher auf der Theorie hyperbolischer Gleichungen, und die Lösung breitet sich (für  $n=1$ ) mit der Geschwindigkeit  $a$  aus. Um diese Ausbreitungsgeschwindigkeit zu kontrollieren und an die Gegebenheiten des Bildes anzupassen, setzt man  $a$  in Abhängigkeit von der zweiten Ableitung bzw. im Eindimensionalen in Abhängigkeit von der Krümmung. Abbildung 3.8 verdeutlicht das Verhalten der Gleichung (3.7) in einer Dimension.

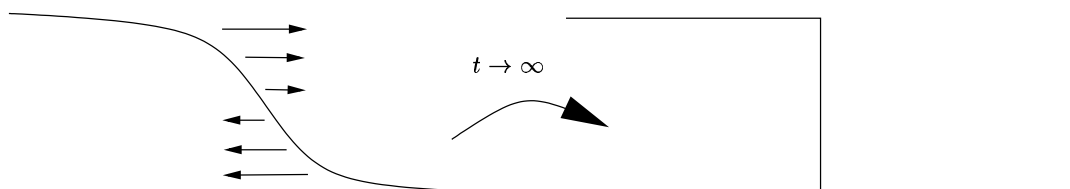


Abbildung 3.7: Kantengenerierung des Shock-Filters in einer Dimension

Im zweidimensionalen Fall gewährleistet das Vorzeichen des Laplace-Operators in Gleichung (3.7), daß sich die Kantenverstärkung auf die Kante zubewegt und somit in die gewünschte Richtung vollzogen wird. Es entsteht innerhalb der Bildregionen ein Fluß in Richtung deren Umrandungen, so daß es an diesen Konturen zu Stößen bzw. Sprüngen in der Helligkeit kommt. Dadurch werden die Kanten verstärkt, und das Bild erscheint schärfer.

Über die Lösbarkeit der durch den Shock-Filter gegebenen Differentialgleichung ist bisher wenig bekannt, da es sich um ein hochgradig nicht korrekt gestelltes Problem handelt. Eine der Schwierigkeiten liegt darin, einen geeigneten Lösungsbegriff zu finden, der schwach genug ist, um die gebildeten Unstetigkeitsstellen zuzulassen. Nichtsdestoweniger erzeugt die Gleichung numerisch gute Ergebnisse und läuft für große Zeitwerte in einen stationären Limes, der ein stückweise konstantes Bild repräsentiert. Auch bei verschwommenen Bildern einiger Objekte (siehe Abbildung 3.8) liefert der Shock-Filter eine gute Rekonstruktion. Im Grenzprozeß entstehen für große Zeitwerte Lösungen, die den stückweise konstanten Approximationen des Mumford-Shah Funktionals (1.7) auf Seite 17 ähneln und auch in Abbildung 3.9 sichtbar werden. In der nun folgenden Abbildung 3.8 sehen wir links oben ein durch die Diffusionsgleichung manipuliertes Bild und anschließend dessen Rekonstruktionen mit Hilfe des Shock-Filters zu verschiedenen Evolutionstufen. Dabei werden die Grauwerte zwischen Schwarz und Weiß in Kantennähe eliminiert, und die Kanten werden schärfer.

Die Approximation von glatten Flächen durch stückweise konstante Abschnitte tritt bei vielen Bildoperatoren auf. Diese Stufenbildung bezeichnet man auch als *staircasing effect*. In der folgenden Abbildung handelt es sich lediglich um zwei Stufen, während die Bilder aus Abbildung 3.9 für große Zeitwerte  $t$  mehrere solcher Stufen aufweisen. In Kapitel 3.6.3 gehen wir ausführlich auf die Stufenbildung und die unterschiedlichen Ursachen für deren Auftreten ein.

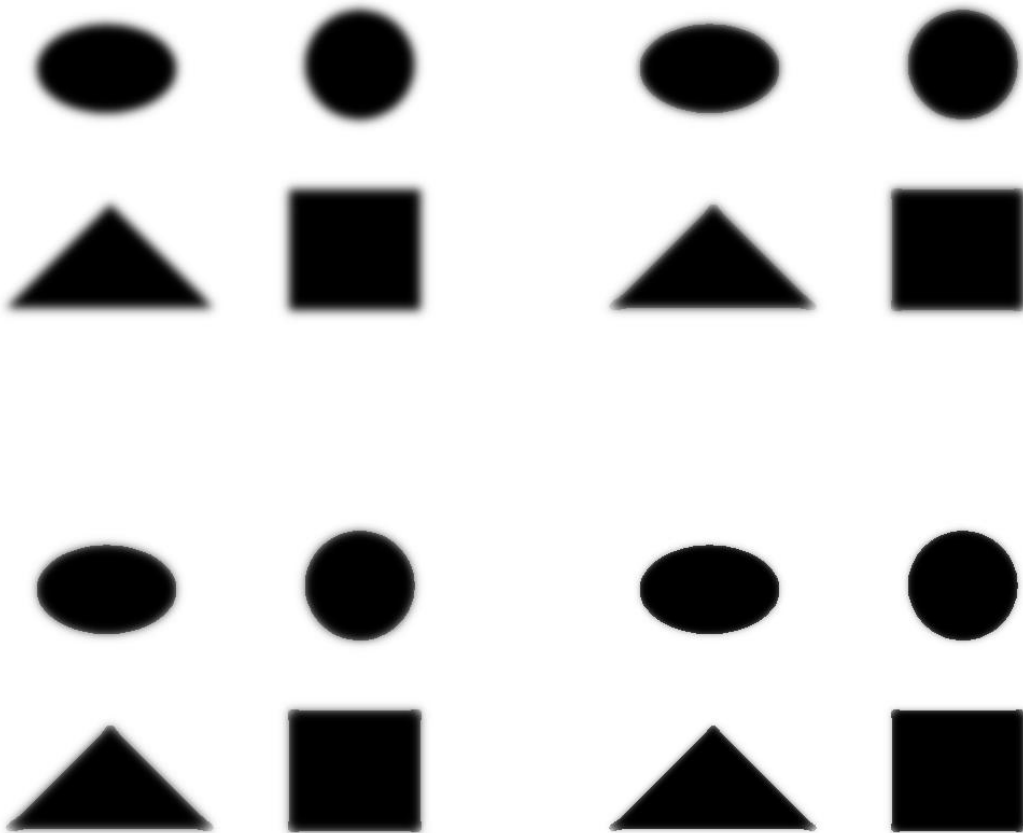


Abbildung 3.8: Rekonstruktion eines Bildes von vier Objekten mit Hilfe des Shock-Filters, oben links das mit der Diffusionsgleichung verwaschene Bild ( $t = 6$ ), anschließend drei Evolutionsschritte des Shock-Filters für  $t \in \{1, 2, 3\}$

In obiger Abbildung sehen wir die Auswirkungen des Shock-Filters zu drei verschiedenen Zeitwerten. Dabei werden die Grauwerte an den Objektkanten zwischen den schwarzen Objekten und dem weißen Hintergrund im Laufe der Zeit auf die Werte Schwarz und Weiß gesetzt. Der Shock-Filter verkleinert auf diese Weise die Übergangsbereiche zwischen Regionen mit geringer Helligkeitsveränderung und läßt Kanten dadurch abrupter werden und schärfer erscheinen.

In der folgenden Abbildung 3.9 sehen wir das Verhalten des Shock-Filters bei Anwendung auf ein digitales Bild. Für kleine Zeitwerte werden die Kanten deutlicher. Für fortschreitende Zeitwerte hingegen entstehen Regionen mit konstanten Grauwerten

ten, die sehr schroffe Kanten aufweisen. Dadurch erscheint das Bild ein wenig unecht (siehe dazu die unteren beiden Bilder für  $t = 4$  und  $t = 10$  in Abbildung 3.9).

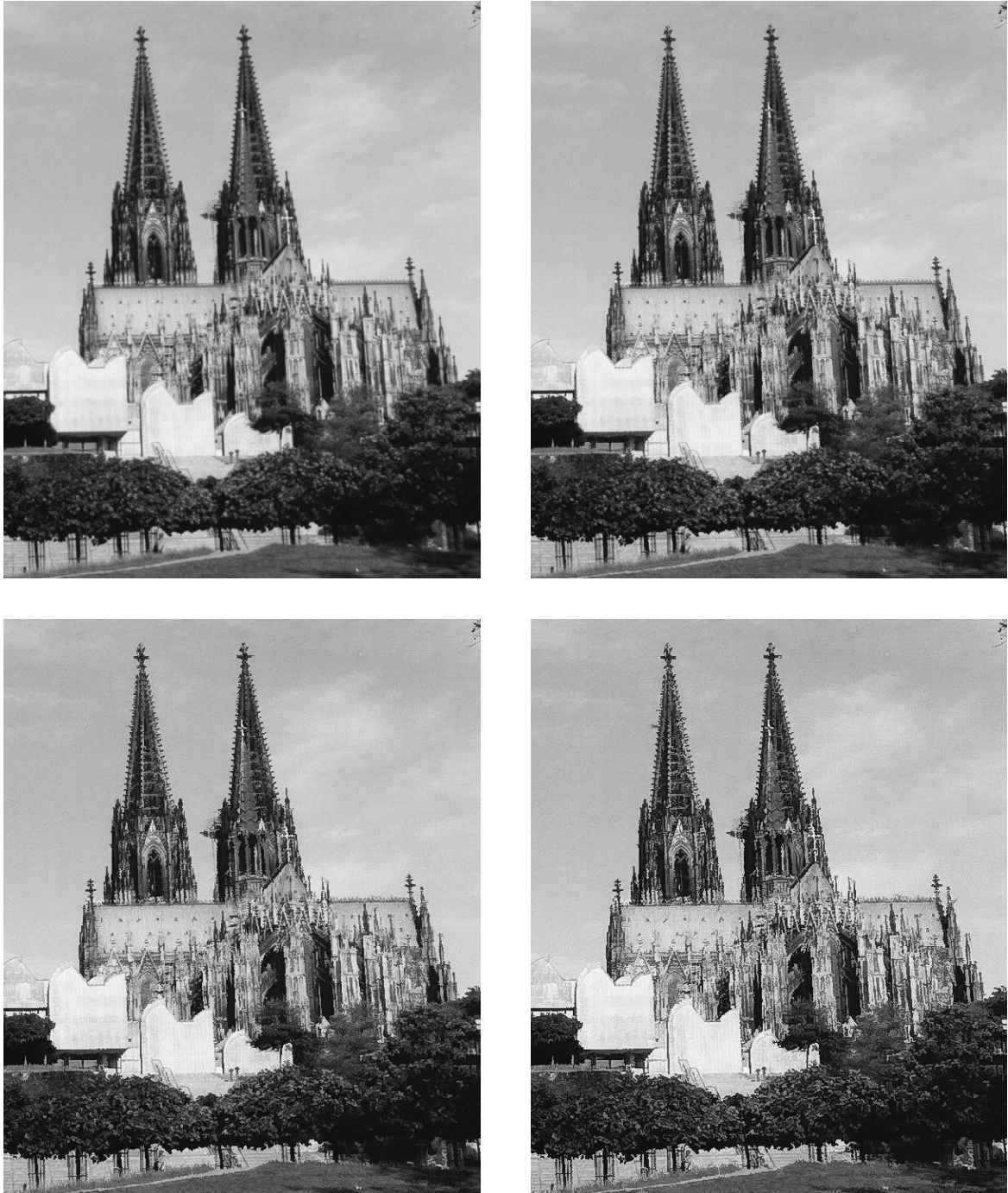


Abbildung 3.9: Einfluß des Shock-Filters auf Bilder. Links oben sehen wir das Originalbild, anschließend die durch den Shock-Filter bearbeiteten Bilder für die Zeitwerte  $t \in \{1, 4, 10\}$ .

### 3.6 Die Perona-Malik Gleichung

Qualitative Aussagen über Bildoperatoren lassen sich gut aus der in Gleichung (3.3) auf Seite 63 eingeführten Notationsform  $u_t = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta}$  ablesen. Um gleichzeitig eine Rauschunterdrückung und eine Kantenerhaltung zu erzielen, wird häufig eine Glättung für betraglich kleine Gradienten in alle Richtungen gefordert, während sie für große Gradienten lediglich in Richtung der Isophote erwünscht ist, nicht aber orthogonal zu ihr. Diese Forderung sieht für Operatoren obiger Gestalt wie folgt aus:

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow 0} c_\eta = \lim_{|\nabla u| \rightarrow 0} c_\xi = a > 0 \quad (3.8)$$

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} c_\eta = 0 \text{ und } \lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} c_\xi = b > 0 . \quad (3.9)$$

Betrachten wir eine Variante der Wärmeleitungsgleichung, welche auf der einen Seite kleinere Fehlsignale aus dem Bild entfernt und in Bereichen geringer Helligkeitsvariation eine Rauschunterdrückung erzielt, auf der anderen Seite aber im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung Kanten erhält. Die bekannteste Gleichung mit solchen Eigenschaften wurde von Perona und Malik [PM90] eingeführt. Es handelt sich hierbei um eine nichtlineare Differentialgleichung folgenden Typs:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \operatorname{div} \left( a(|\nabla u|^2) \nabla u \right) & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

mit  $a(s) : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Für  $a(s) \equiv 1$  erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung. Für den Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  mögen jedoch nunmehr die folgenden Bedingungen gelten:

- $a(0) = 1$
- $a$  ist monoton fallend und stetig differenzierbar
- $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0$  .

Die von Perona und Malik vorgeschlagenen und meist berücksichtigten Diffusionskoeffizienten sind von der Form

$$a(s) = \frac{1}{(1 + s/\lambda^2)^\alpha} \quad \text{bzw.} \quad a(s) = \exp\left(-\frac{s}{\lambda^2}\right) \quad \text{mit } \alpha \geq 1 \text{ und } \lambda > 0. \quad (3.11)$$

Um zu verstehen, welche Auswirkungen diese Gleichung auf Bilder hat, schauen wir uns die Gleichung (3.10) genauer an, indem wir eine Koordinatentransformation vornehmen und auf die folgenden Umformungen zurückgreifen:

$$\eta = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \quad \xi \perp \eta \quad \text{und} \quad \Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}.$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= \operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^2)\nabla u\right) \\ &= a(|\nabla u|^2)\Delta u + \langle \nabla a(|\nabla u|^2), \nabla u \rangle \\ &= a(|\nabla u|^2)\Delta u + 2a'(|\nabla u|^2) \nabla u D^2 u \nabla u \\ &= a(|\nabla u|^2)u_{\xi\xi} + a(|\nabla u|^2)u_{\eta\eta} + 2a'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 u_{\eta\eta} \\ &= a(|\nabla u|^2)u_{\xi\xi} + b(|\nabla u|^2)u_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit  $b(s) := a(s) + 2sa'(s)$ . Die Gleichung besitzt daher in Richtung des Vektors  $\xi$  die Diffusion  $a(s)$  und orthogonal dazu den Diffusionskoeffizienten  $b(s)$ , jeweils in Abhängigkeit von  $|\nabla u|^2$ . Somit läßt sich die Perona-Malik Gleichung (3.10) auf die Form von Gleichung (3.3) mit  $c_\xi = a(s)$  und  $c_\eta = b(s)$  überführen. Da für  $a(s) \neq \text{konst}$  die Koeffizienten echt verschieden sind, spricht man bei dieser Gleichung von einer *anisotropen* Diffusionsgleichung, wohingegen der Fall  $a(s) = b(s)$  oder allgemeiner  $c_\eta = c_\xi$



als *isotrope* Diffusion - wie bei der Wärmeleitungsgleichung - bezeichnet wird. Im vorliegenden Fall ist die Diffusion  $a(s)$  in Richtung der Isophote stets positiv, wohingegen sie in Richtung der Kanten, d.h. in Richtung der stärksten Helligkeitsveränderung, auch negativ werden kann, sofern der Fall  $b(s) < 0$  eintritt. Für die von Perona und Malik vorgeschlagenen Abbildungen  $a(s)$  in (3.11) existiert jeweils ein  $s_0$  derart, daß die Diffusion in Richtung  $\eta$  für  $|\nabla u|^2 < s_0$  positiv und für  $|\nabla u|^2 > s_0$  negativ wird. Insgesamt erzielt man auf diese Weise in Regionen geringer Helligkeitsvariation, in denen  $|\nabla u|$  klein ist, Diffusion in alle Richtungen bei einem Verhalten, das der Wärmeleitungsgleichung ähnelt, wohingegen die Diffusion für große Gradienten in Richtung der Isophote abnimmt und orthogonal zu ihr sogar negativ wird. Dadurch werden Kanten nicht nur erhalten, sondern sogar verstärkt. In Abbildung 3.10 sehen wir die Graphen der Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  und  $b(s)$ .

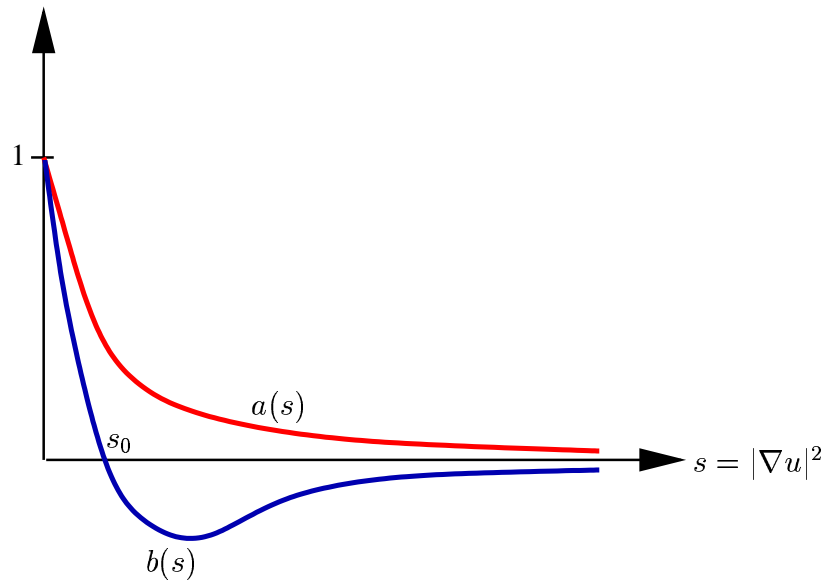


Abbildung 3.10: Die Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  in Richtung  $\xi$  und  $b(s)$  in Richtung  $\eta$

Anders als bei der Wahl in (3.11) existieren auch Diffusionskoeffizienten  $a(s)$ , für die die Diffusion  $b(s)$  in Richtung des Vektors  $\eta$  positiv bleibt und die Perona-Malik Gleichung parabolisch wird. Setzen wir beispielsweise  $\tilde{a}(s) := (\sqrt{1+s})^{-1}$ , so folgt  $\tilde{b}(s) = \tilde{a}(s) + 2s\tilde{a}'(s) = (1+s)^{-\frac{3}{2}} > 0$ . In diesen Fällen verhält sich das nichtlineare Diffusionsmodell wie eine Vorwärts-Diffusionsgleichung mit Glättungseigenschaften in Regionen geringer Helligkeitsveränderung bei gleichzeitiger Schonung der Kanten. Allerdings verletzen beide Typen von Diffusionskoeffizienten - sowohl die mit positivem  $b(s)$  als auch jene, für die  $b(s)$  negativ wird - die eingangs des Paragraphen angegebene

zweite Bedingung von (3.9), da für große Gradienten  $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} b(s) = 0$  gilt. Dagegen werden beide Forderungen aus (3.8) erfüllt. Im Gegensatz zu den Diffusionskoeffizienten, die eine Rückwärtsdiffusion implizieren, erfüllen jene mit positivem  $b(s)$  die folgende, im Vergleich zu (3.9) etwas abgeschwächte Bedingung

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \frac{b(s)}{a(s)} = 0 .$$

Letztere Forderung gewährleistet, daß für betragsmäßig große Gradienten die Diffusion in Richtung der Kanten schneller stoppt als die entlang der Isophoten. Da die Perona-Malik Gleichung für Diffusionskoeffizienten der Form (3.11), bei denen in Richtung  $\eta$  Rückwärtsdiffusion eintreten kann, bessere numerische Ergebnisse liefert, konzentrieren wir uns im folgenden auf Diffusionskoeffizienten dieser Art.

In der folgenden Abbildung 3.11 sehen wir die Auswirkungen der Gleichung auf ein Bild von vier Objekten. Dabei ist das Originalbild (links) durch die Wärmeleitungsgleichung (für  $t = 6$ ) kontaminiert worden. Rechts sehen wir das durch die anisotrope Diffusionsgleichung rekonstruierte Bild. Der Diffusionskoeffizient ist dabei durch  $a(s) = (1 + s/\lambda^2)^{-1}$  mit  $\lambda = 200$  definiert. Auch hier kann man eine Stufenbildung beobachten, wie sie bereits bei der Anwendung des Shock-Filters aufgetreten ist. Im Gegensatz zum Shock-Filter werden die Objekte geringfügig heller, d.h. die  $L^\infty$ -Norm wird kleiner. Dies belegt das in [KK98b] angegebene Maximum-Prinzip für die Perona-Malik Gleichung (siehe dazu auch Satz 3.2 auf Seite 83).

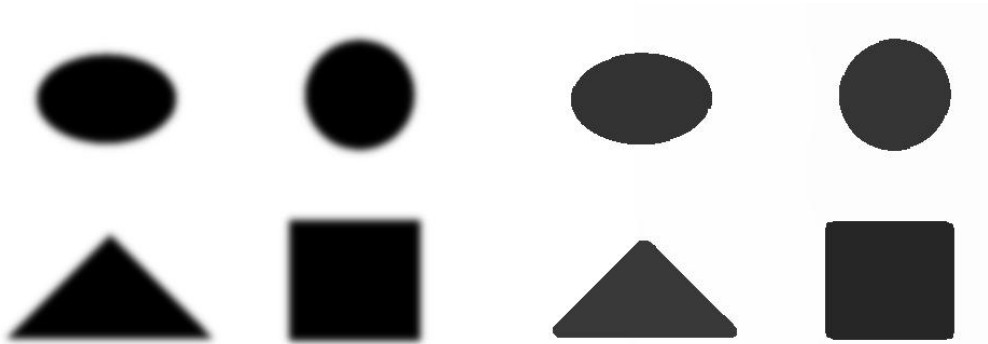


Abbildung 3.11: Rekonstruiertes Bild von Mengen mit Hilfe der Perona-Malik-Gleichung

Auch bei stark verrauschten Bildern erzielt die Perona-Malik Gleichung gute Ergeb-

nisse bei der Wiederherstellung. In Abbildung 3.12 wurde der Diffusionskoeffizient  $a(s) = (1 + s/\lambda^2)^{-1}$  mit  $\lambda = 40$  in die Gleichung implementiert. Dabei werden kleinere Störungen in Regionen niedriger Helligkeitsschwankungen herausgefiltert und die relevanten Konturen dadurch deutlicher. Darüber hinaus erscheint es schwierig, eine geeignete Zeit  $T > 0$  zu bestimmen, zu der der Prozeß stoppen möge.



Abbildung 3.12: Wiederherstellung eines stark verrauschten Bildes mit der anisotropen Diffusionsgleichung für  $a(s) = (1 + s/40^2)^{-1}$  und  $t = 0, 5, 10, 15, 20$  und  $25$  Hundertstel Sekunden

Bei dem Versuch, die anisotrope Diffusionsgleichung zu klassifizieren, stellen wir fest, daß es sich um einen gemischten Typ handelt. Für kleine Gradienten ( $|\nabla u|^2 < s_0$ ) liegt eine parabolische Gleichung vor, für große Gradienten ( $|\nabla u|^2 > s_0$ ) erhält man eine hyperbolische Gleichung. Betrachten wir lediglich die Diffusion in einer Dimension oder in Richtung des Gradienten (für  $a(s) \equiv 0$  in Gleichung (3.12)), so handelt es sich um eine Vorwärts-Rückwärts-Diffusionsgleichung.

Die Perona-Malik Gleichung ist seit ihrer Einführung viel diskutiert worden, da sie auf der einen Seite numerisch gute Ergebnisse liefert, auf der anderen Seite jedoch zu den mathematisch nicht korrekten Problemstellungen gehört, da sie sich in Richtung des Vektors  $\eta$  wie die inverse Wärmeleitungsgleichung (3.5) verhält. Die Vorwärts-

Rückwärts-Diffusionsgleichung mit unendlich vielen Lösungen von Höllig [Hö83] ist zwar von anderer Gestalt als die Perona-Malik Gleichung, allerdings läßt sie erahnen, welche Phänomene bei der Rückwärtsdiffusion auftreten können. Desweiteren kann die anisotrope Diffusionsgleichung zu glatten Anfangsdaten in beliebig kurzer Zeit Singularitäten erzeugen, oder die spezielle Wahl des Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  führt bei ähnlichen Anfangsdaten zu unterschiedlichen Ergebnissen [Dia90], d.h. die Lösung (sofern sie existiert) hängt nicht stetig von ihrem Anfangsdatum ab. Dies kann man sich anhand zweier Anfangsbilder  $u_0$  und  $v_0$  erklären, die sich dadurch unterscheiden, daß  $u_0$  entlang einer Kurve  $\Gamma$  Gradienten besitzt, für die  $|\nabla u_0(x)|^2 = s_0 - \varepsilon$  mit  $x \in \Gamma$  gilt, wohingegen für die Gradienten von  $v_0$  entlang dieser Kurve  $|\nabla v_0(x)|^2 = s_0 + \varepsilon$  gelte. In beiden Fällen nehme die Norm der Gradienten ein lokales Maximum auf  $\Gamma$  an, und  $s_0$  sei der Schwellenwert, für den der Diffusionskoeffizient  $b(s)$  in Richtung der stärksten Helligkeitsveränderung das Vorzeichen wechselt. Dann wird die Kurve  $\Gamma$  im ersten Fall durch positive Diffusion in eine Region mit nahezu ähnlichen Grauwerten überführt. Dagegen wird im zweiten Fall durch Rückwärtsdiffusion die Kurve  $\Gamma$  als Kante aufgefaßt und bleibt bestehen. Daher sind ähnliche Anfangsbilder, deren Gradienten lokale Maxima mit Werten nahe bei  $s_0$  annehmen, gute Kandidaten für Gegenbeispiele obiger Art. In Abschnitt 3.6.3 wird diese These numerisch belegt, indem die anisotrope Diffusionsgleichung mit ähnlichen Diffusionskoeffizienten auf ein und dasselbe Anfangsbild angewendet werden. Dabei entsteht einerseits eine nichttriviale Lösung, bei der sich Kanten bilden, wohingegen sich im anderen Fall die Nulllösung einstellt.

Ein weiterer Nachteil der Gleichung ist die mögliche Rauschverstärkung. Auch bei kleinen Störsignalen treten große Oszillationen und damit große Gradienten auf, die durch die Rückwärtsdiffusion verstärkt werden, was zu einer unerwünschten Kantenbildung führt. Kichenassamy [Kic97] konnte zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen keine schwache Lösung existiert, sofern das Anfangsdatum nicht unendlich oft differenzierbar ist. In seiner Arbeit erklärt er die Nichtexistenz von schwachen Lösungen in Fällen, in denen numerische Verfahren zu Lösungen führen. Kichenassamy führt dann im Falle einer Raumdimension einen verallgemeinerten Lösungsbegriff für die Perona-Malik Gleichung ein. Dieser erzeugt stückweise lineare Lösungen mit Sprungstellen, die den numerischen Lösungen ähneln.

Eine weitere Schwierigkeit der anisotropen Diffusionsgleichung ist das Auffinden eines geeigneten Zeitwertes  $T > 0$ , zu dem der Prozeß gestoppt wird. Die numerischen Beispiele belegen die These, daß die Perona-Malik Gleichung für kurze Zeitwerte zu einer Kantenverschärfung beiträgt und für große Werte von  $t$  in eine Bildsegmentierung übergeht. Dies hängt mit der im Abschnitt 3.6.3 untersuchten Stufenbildung zusammen, die sich für wachsende Zeitwerte mehr und mehr ausprägt, so daß letzten Endes lediglich Regionen konstanter Helligkeitswerte und deren umrandende Kanten zurückbleiben. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, führte Nordström [Nor90] eine nichthomogene rechte Seite ein. Die anisotrope Gleichung schreibt sich dann folgendermaßen:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \operatorname{div} (a(|\nabla u|^2)\nabla u) = u - u_0 .$$

Um die unerwünschten Merkmale der Perona-Malik Gleichung zu beseitigen und um den Diffusionsprozeß zu stabilisieren, sind verschiedene Regularisierungsmethoden entstanden. Catté, Lions, Morel und Coll [CLMC92] ersetzen den Gradienten innerhalb des Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  durch seine geglättete Version  $u_\sigma = G_\sigma * u$ , die durch Faltung von  $u$  mit dem Gaußkern mit Standardabweichung  $\sigma$  und Erwartungswert 0 entsteht. Die zugehörige Diffusionsgleichung besitzt dann folgende Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \operatorname{div} \left( a(|\nabla u_\sigma|)\nabla u \right) \quad \text{mit } u_\sigma = G_\sigma * u. \quad (3.13)$$

In [CLMC92] wurden Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit der Lösung von (3.13) gezeigt, so daß die obige Regularisierung ausreicht, um die Perona-Malik Gleichung in ein korrekt gestelltes Problem zu überführen. Die Resultate sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

**Satz 3.1 ([CLMC92])**

Es sei  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und  $a : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  eine Funktion mit  $a(0) = 0$  und  $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0$ . Desweiteren sei die Abbildung  $s \rightarrow a(\sqrt{s})$  glatt. Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u(x, t)$  mit  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , die im distributionellen Sinne die Gleichung (3.13) mit  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  auf  $\partial\Omega \times ]0, T[$  und  $u(0) = u_0$  löst. Ferner gilt für die Lösung  $|u|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} \leq |u|_{L^2(\Omega)}$  und  $u \in C^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ .

In einer weiteren Arbeit führten Alvarez, Lions und Morel [ALM92] einen Diffusionsprozeß ein, der eine Mischung aus der Gleichung für den mittleren Krümmungsfluß (3.6) und der regularisierten Variante der Perona-Malik Gleichung (3.13) darstellt. Die zugehörige Gleichung läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = a(|\nabla u_\sigma|) \left( (1 - h(|\nabla u|)) \Delta u + h(|\nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right). \quad (3.14)$$

$h(s)$  ist dabei eine monoton wachsende, stetige Abbildung mit  $h(s) \equiv 0$  für  $s \in [0, e]$  und  $h(s) \equiv 1$  für  $s \geq 2e$ , der die Diffusionsrichtung steuert. Für  $|\nabla u| \leq e$  verhält

sich die Gleichung wie die Wärmeleitungsgleichung mit dem Diffusionskoeffizienten  $a(|\nabla u_\sigma|)$  für alle Richtungen. Für  $|\nabla u| \geq 2e$  wird die Diffusion in Richtung der Kante gestoppt, während sie in Richtung der Isophoten bestehen bleibt. Für wachsende Werte der Norm des Gradienten zwischen  $e$  und  $2e$  wird die Diffusion in Richtung der Kanten langsam reduziert.  $e$  ist hierbei kein weiterer Parameter, sondern wird in Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  auf den Schwellenwert gesetzt, bis zu dem Vorwärtsdiffusion in alle Richtungen vollzogen wird. Durch Umformung kann man Gleichung (3.14) in die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a(|\nabla u_\sigma|) \{u_{\xi\xi} + (1 - h(|\nabla u|))u_{\eta\eta}\}$$

überführen. In [ALM92] wird für Lipschitzstetige Anfangsdaten die Existenz und die Eindeutigkeit einer Viskositätslösung gezeigt. Dabei wird die partielle Ableitung  $u_{\xi\xi}$  durch einen approximierenden Operator ersetzt.

### 3.6.1 Maximum-Prinzip für die Perona-Malik Gleichung

Neben den angesprochenen Nachteilen der Perona-Malik Gleichung existieren auch einige theoretische Resultate, die auf eine gewisse Gutartigkeit der Gleichung schließen lassen. Unter der Voraussetzung, daß für endliche Zeit schwache Lösungen existieren, bilden diese keine Extrema, die in der Maximumsnorm größer als die Extremwerte des Anfangsbildes sind, was uns der folgende Satz verdeutlicht.

**Satz 3.2 (Minimum/Maximum-Prinzip [KK98a, KK98b])**

*Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\nu$  die äußere Normale an  $\partial\Omega$  und  $u \in C^{0,1}$  eine schwache Lösung der anisotropen Diffusionsgleichung (3.10) mit  $a(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial\Omega \times (0, T)$ . Dann gilt  $\max |u(x, t)| = \max |u_0(x)|$ .*

Den Beweis dieses Satzes findet man sowohl in den Arbeiten von Kawohl und Kutev [KK98a, KK98b], als auch bei Weickert [Wei98].

### 3.6.2 Variationelle Formulierung der Perona-Malik Gleichung

In diesem Abschnitt leiten wir die Perona-Malik Gleichung über die Minimierung der totalen Variation eines Energiefunktional her. Dazu setzen wir  $A(t) = \int_0^t a(s) ds$  mit  $a(s)$  aus (3.10) und definieren das Energiefunktional  $E$  durch

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^2) dx .$$

Für eine Lösung  $u(x, t)$  der Perona-Malik Gleichung (3.10) gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u) = \int_{\Omega} a(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla u_t dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (a(|\nabla u|^2) \nabla u) u_t dx = - \int_{\Omega} u_t^2 dx \leq 0$$

womit das Energiefunktional  $E$  ein Ljapunovfunktional zur Perona-Malik Gleichung darstellt. Addieren wir den  $L^2$ -Abstand des Minimierers vom Anfangsbild zur Energie hinzu, so erhalten wir die folgende variationelle Formulierung

$$E(u) := \int_{\Omega} A(|\nabla u|^2) dx + \gamma \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx ,$$

die von Nordström [Nor90] eingeführt wurde und Ähnlichkeiten zum Mumford-Shah Funktional vorweist. Der zusätzliche Term zwingt  $u$  *nah* am Anfangsbild zu bleiben, und die zu diesem Ljapunovfunktional assoziierte Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \operatorname{div} \left( a(|\nabla u|^2) \nabla u \right) = \gamma (u - u_0) \tag{3.15}$$

hat den Vorteil, eine nichttriviale stationäre Lösung zu besitzen. Dadurch entfällt die bei Perona und Malik beschriebene Problematik, einen Zeitwert  $T > 0$  zu bestimmen, für den die anisotrope Diffusion aussetzt. Allerdings entsteht durch die inhomogene rechte Seite ein neuer Parameter  $\gamma$ , der ebenfalls zu bestimmen ist.

### 3.6.3 Stufenbildung - staircasing effect

Ein bereits angesprochener Effekt, der bei vielen Bildbearbeitungsmethoden auftritt, ist die Stufenbildung, die in der Literatur als *staircasing effect* bezeichnet wird. Diese kann auf der einen Seite aus der Diskretisierung und der Feinheit des Gitters resultieren, auf der anderen Seite entsteht sie auch häufig durch spezielle Eigenschaften des Bildoperators. Numerische Approximationen interpolieren die exakten Lösungen oft mit stückweise konstanten oder linearen Funktionen, die auf den Gitterpunkten mit der Lösung übereinstimmen. So werden beispielsweise bei der Finiten Element Methode (FEM) die Werte zwischen den Gitterpunkten durch Polynome ersten Grades approximiert. Näherungen höheren Grades benötigen zu viel Rechenzeit, und die gewünschte Genauigkeit kann durch eine Gitterverfeinerung in weniger Rechenschritten erzielt werden. Bei den Minimierungsmethoden der totalen Variation - wie beim Mumford-Shah Funktional - erkennt man die Ursache der Stufenbildung unmittelbar anhand des Regularisierungsterms  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , der für konstantes  $u$  minimal wird und dadurch einheitliche Grauwerte auf zusammenhängenden Regionen erzwingt. Aber auch die Glättung in Regionen geringer Helligkeitsvariation, die viele PDE-basierte Operatoren zur Unterdrückung nichtrelevanter Extrema nutzen, implizieren die treppenartige Gestalt der Lösungen für fortschreitende Zeitwerte  $t$ . Bei der Perona-Malik Gleichung kann man diese Eigenschaft durch die Wahl des Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  aus Gleichung (3.10) bestimmen und beeinflussen. Betrachten wir die Diffusion der anisotropen Perona-Malik Gleichung in Richtung  $\eta$  des steilsten Abstiegs, die durch den Diffusionskoeffizienten  $b(s) = a(s) + 2sa'(s)$  aus Gleichung (3.12) bestimmt wird. Anhand des Vorzeichenwechsels dieser Abbildung erkennen wir, in welchen Gebieten sich durch die Diffusion ein konstanter Mittelwert einstellt, bzw. in welchen Regionen durch die Rückwärtsdiffusion eine Kantenerhaltung bzw. -verstärkung eintritt. Ausschlaggebend hierfür ist der Schwellenwert  $s_0$ , für den  $b(s)$  das Vorzeichen wechselt. Um diese Beobachtungen anhand eines konkreten Beispiels zu analysieren, betrachten wir im folgenden das analytische Anfangsbild  $u_0(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$  auf dem Quadrat  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Diese Abbildung (siehe dazu das Ausgangsbild in Abbildung 3.14) besitzt auf  $\Omega$  zwei Minima und zwei Maxima mit den Funktionswerten  $-1$  und  $1$ . Der Betrag des Gradienten  $|\nabla u| = (u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}$  kann dann durch  $\sqrt{2}$  abgeschätzt werden, d.h.  $|\nabla u| \in [0, \sqrt{2}]$  bzw.  $s = |\nabla u|^2 \in [0, 2]$ . Dabei bleiben die Funktionswerte aufgrund des Maximum-Prinzips ([KK98a] bzw. Satz 3.2) nicht nur für das Anfangsbild  $u_0$  im Intervall  $[-1, 1]$ , sondern auch für  $t > 0$ . Weiterhin setzen wir

$$a(s) := \frac{1}{(1 + \lambda^2 s)^2}, \quad \text{woraus} \quad b(s) = \frac{1 - 3\lambda^2 s}{(1 + \lambda^2 s)^3} \quad \text{mit} \quad s_0 = \frac{1}{3\lambda^2} \quad (3.16)$$



folgt. Was passiert nun für verschiedene Werte von  $s_0$ ? Dabei unterscheiden wir zwei Fälle. Zu Anfang wählen wir  $\lambda$  derart, daß  $s_0 \notin [0, 2]$  gilt. Dann sind beide Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  und  $b(s)$  positiv, so daß sich die Gleichung in etwa wie die Wärmeleitungsgleichung verhält, lediglich mit dem Unterschied, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Richtung der Kanten geringer ist als die entlang der Isophoten. Dabei erwarten wir einen 'Zusammenfall' des Anfangsbildes zur Nulllösung. Dieser Fall tritt für solche  $\lambda$  ein, für die  $\lambda \leq \frac{1}{6}\sqrt{6} \approx 0.408$  gilt. Für  $\lambda = \frac{1}{4}$  sehen wir in Abbildung 3.13 die Graphen der Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  und  $b(s)$  und in Abbildung 3.14 den zugehörigen Evolutionsverlauf des Anfangsbildes. Hierbei beobachten wir, daß die Lösungen im Evolutionsverlauf glatter werden. Es werden keine Stufen bzw. Plateaus gebildet, bevor sich für wachsende Zeitwerte die Nulllösung einstellt.

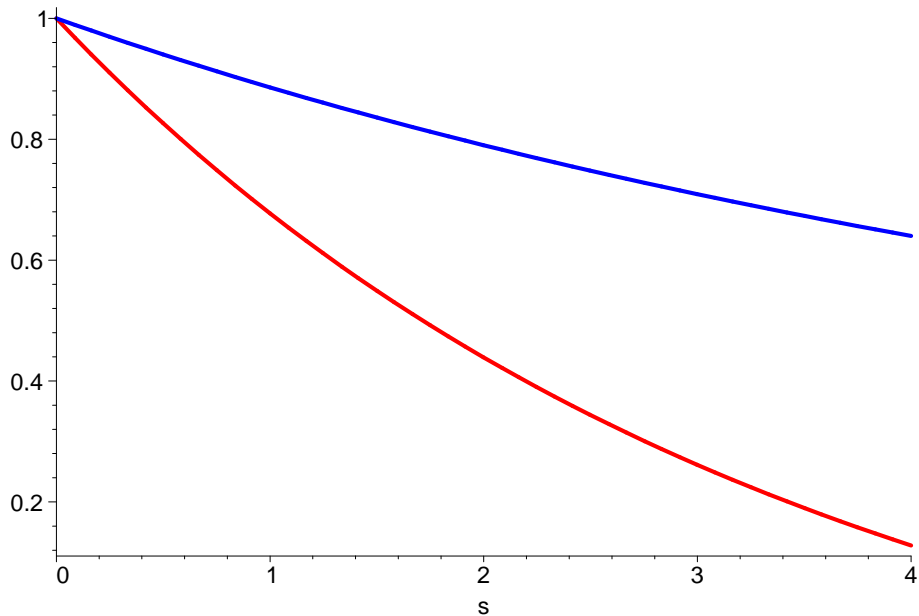


Abbildung 3.13: Positive Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  (blau) und  $b(s)$  (rot) aus Gleichung (3.16) für  $\lambda = 0.25$

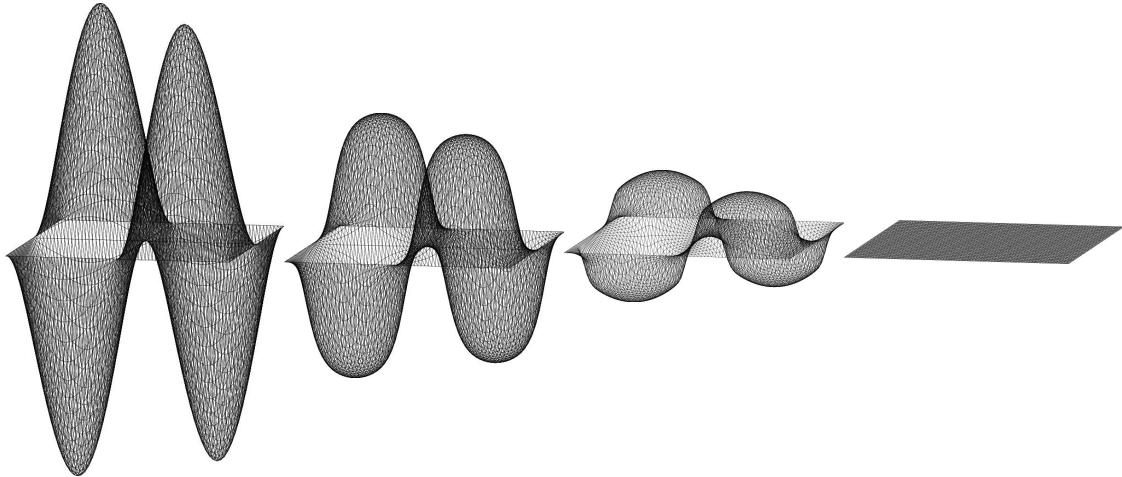


Abbildung 3.14: Die Lösung  $u(x, t)$  der Perona-Malik Gleichung für  $\lambda = \frac{1}{4}$  und  $t \in \{0, \frac{3}{100}, \frac{6}{100}, \frac{1}{10}\}$  bei positiver Diffusion

Aber auch für Werte von  $\lambda$ , die etwas größer als  $\frac{1}{6}\sqrt{6}$  sind, stellt sich die Nulllösung ein. Der Schwellenwert  $s_0$  liegt dann zwar im Intervall  $[0, 2]$ , aber die Rückwärtsdiffusion tritt nur selten auf. Im Vergleich zum letzten Rechenbeispiel aus Abbildung 3.14 beobachtet man jedoch, daß sich zunächst eine Stufe bildet, diese allerdings für große Zeitwerte doch noch in sich zusammensackt. Somit werden in einem kleinen Zeitfenster Kanten erhalten bzw. gebildet, die jedoch nicht groß genug sind, um über größere Zeitskalen zu bestehen. Abbildung 3.15, bei der innerhalb des Diffusionskoeffizienten  $\lambda = 0.45$  gesetzt wurde, veranschaulicht diese Beobachtung.

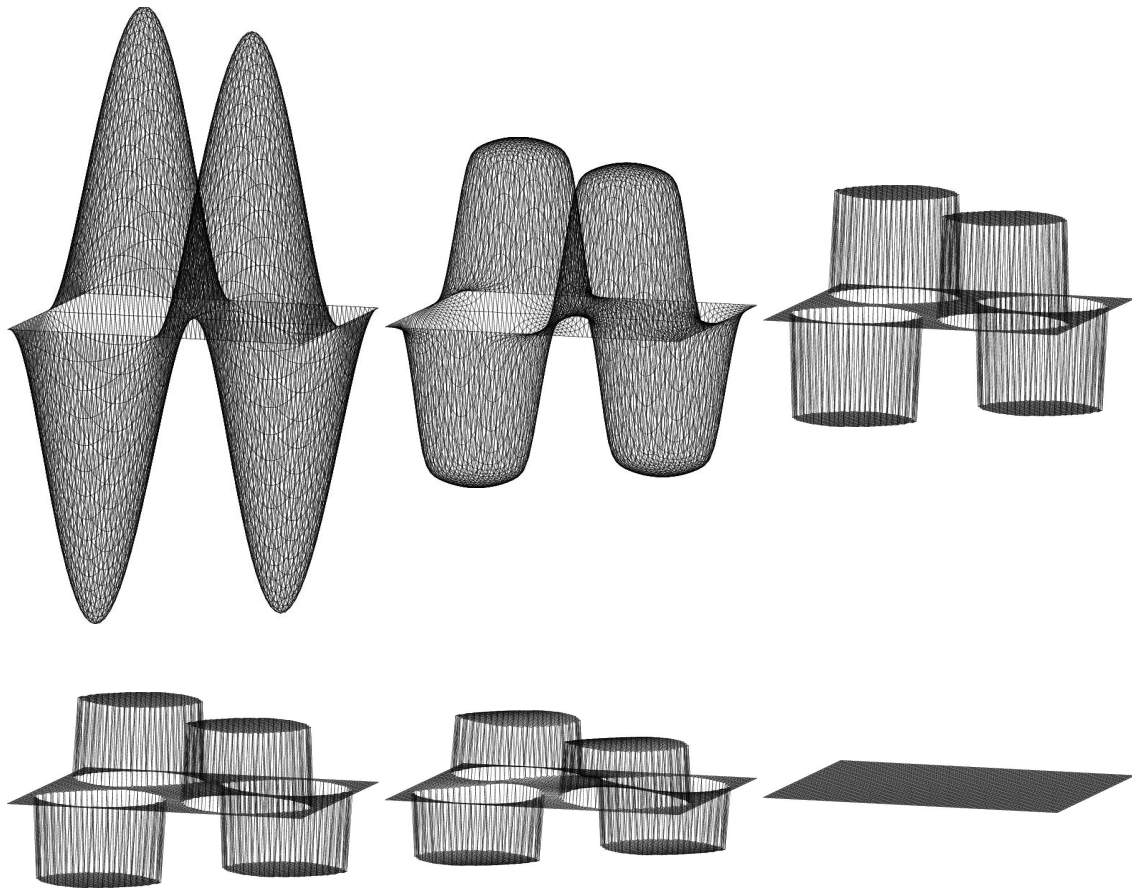


Abbildung 3.15: Die Lösung  $u(x, t)$  der anisotropen Diffusionsgleichung für  $\lambda = 0.45$  und  $t \in \{0, \frac{1}{25}, 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{10}, 2\}$ . Sie bildet Stufen, bevor sich die Nulllösung einstellt.

Je kleiner wir nun  $s_0$  wählen, desto eher erzwingen wir Rückwärtsdiffusion und Plateaubildung, d.h. die Anzahl der Stufen steigt für kleiner werdende Werte von  $s_0$ . Setzen wir  $\lambda = \frac{7}{10}$  wie in Abbildung 3.16, so setzt die Kantenbildung für Gradienten  $|\nabla u|^2 = s \geq s_0 \approx \frac{2}{3}$  ein, und es entstehen zwei Plateaus pro Extremum. Für  $\lambda = \frac{3}{2}$  wie in Abbildung 3.18 tritt die Rückwärtsdiffusion bereits für Gradienten  $|\nabla u|^2 = s \geq s_0 \approx \frac{1}{7}$  ein. Dabei entstehen sechs Plateaus pro Extremwertbereich. Die zugehörigen Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit zur jeweiligen Wahl von  $\lambda$  sind in Abbildung 3.17 gegeben.

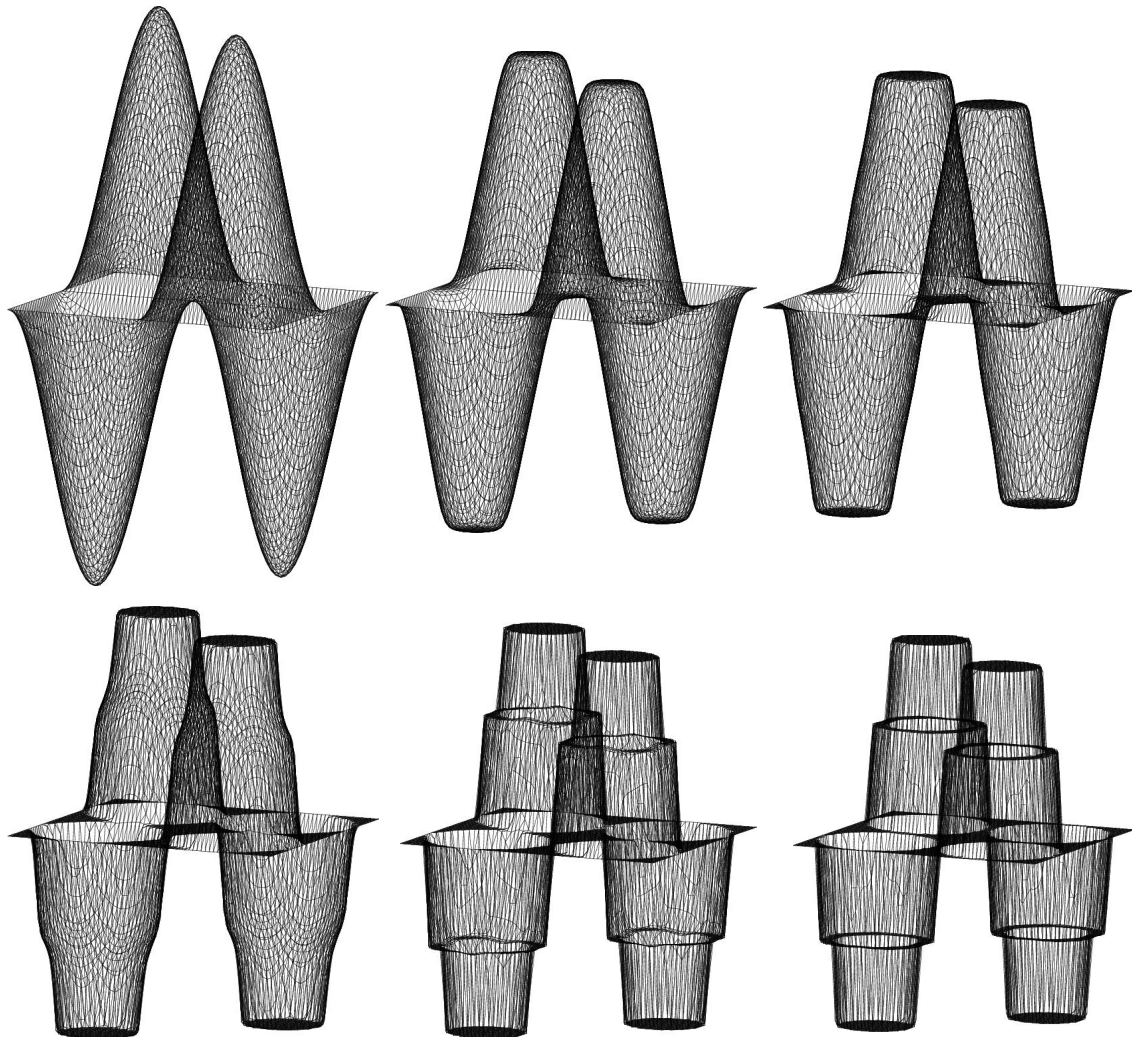


Abbildung 3.16: Die Lösung  $u(x, t)$  der Perona-Malik Gleichung für  $\lambda = \frac{7}{10}$  und  $t = \frac{2}{25}i$  ( $i = 0 \dots 5$ ). Es entstehen zwei Plateaus pro Extremwertbereich.

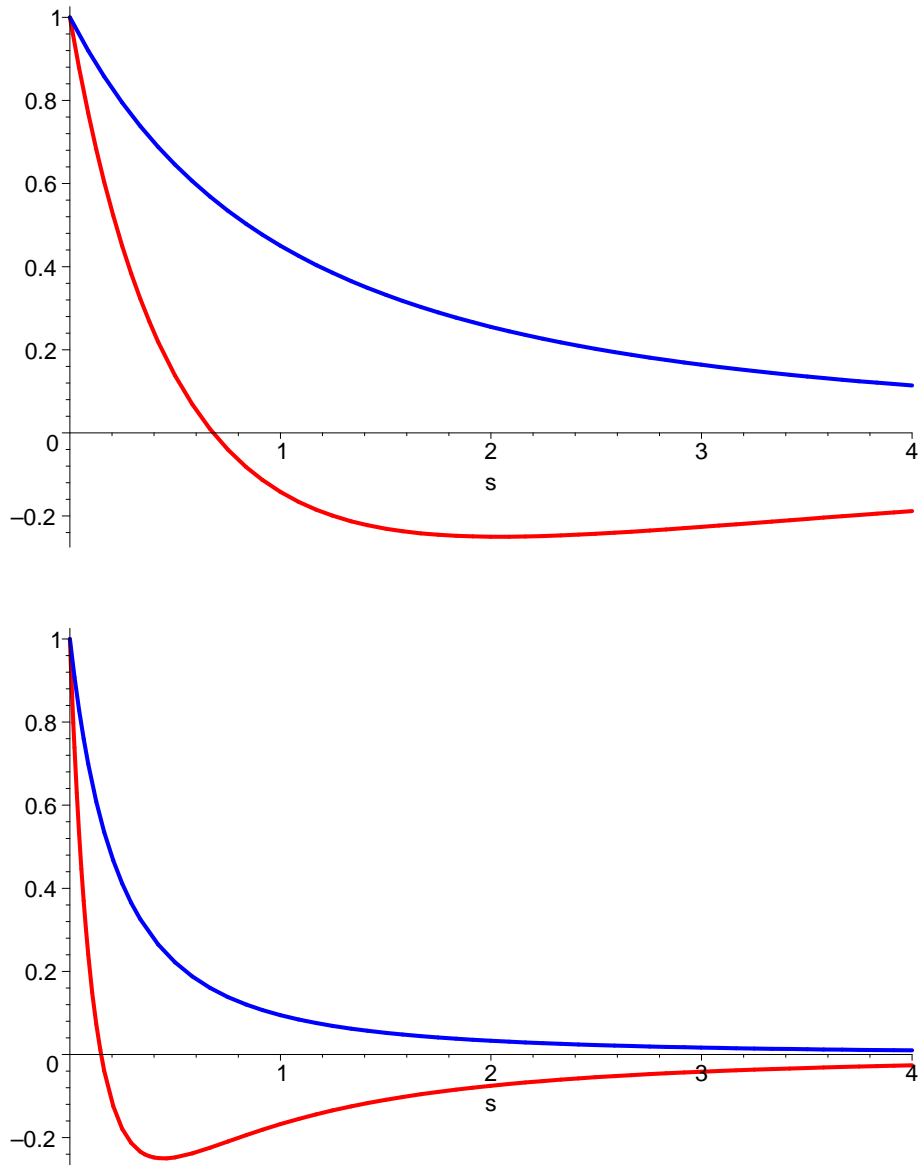


Abbildung 3.17: Die Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  und  $b(s)$  für  $\lambda = 0.7$  (oben) und  $\lambda = 1.5$  (unten). Die Nullstelle von  $b(s)$  liegt dann bei  $s_0 = \frac{100}{147} \approx 0.6802$  im oberen bzw.  $s_0 = \frac{4}{27} \approx 0.1481$  im unteren Fall.

In Abbildung 3.17 sehen wir die Graphen der Diffusionskoeffizienten  $a(s)$  (blau) und  $b(s)$  (rot) in den Fällen  $\lambda = 0.7$  und  $\lambda = 1.5$ . Im oberen Graphen, zu dessen Diffusionskoeffizienten die in Abbildung 3.16 angegebenen Evolutionsschritte entstehen, beobachten wir, daß die Rückwärtsdiffusion später als im unteren Fall eintritt. Außerdem ist die Vorwärtsdiffusion stärker als im Fall  $\lambda = 1.5$ . Dadurch erklärt sich

die niedrigere Anzahl und die größere Ausprägung der Plateaus in Abbildung 3.16 im Vergleich zu denen der folgenden Abbildung 3.18. Hier entstehen mehrere Stufen, die eine feinere Struktur hervorbringen.

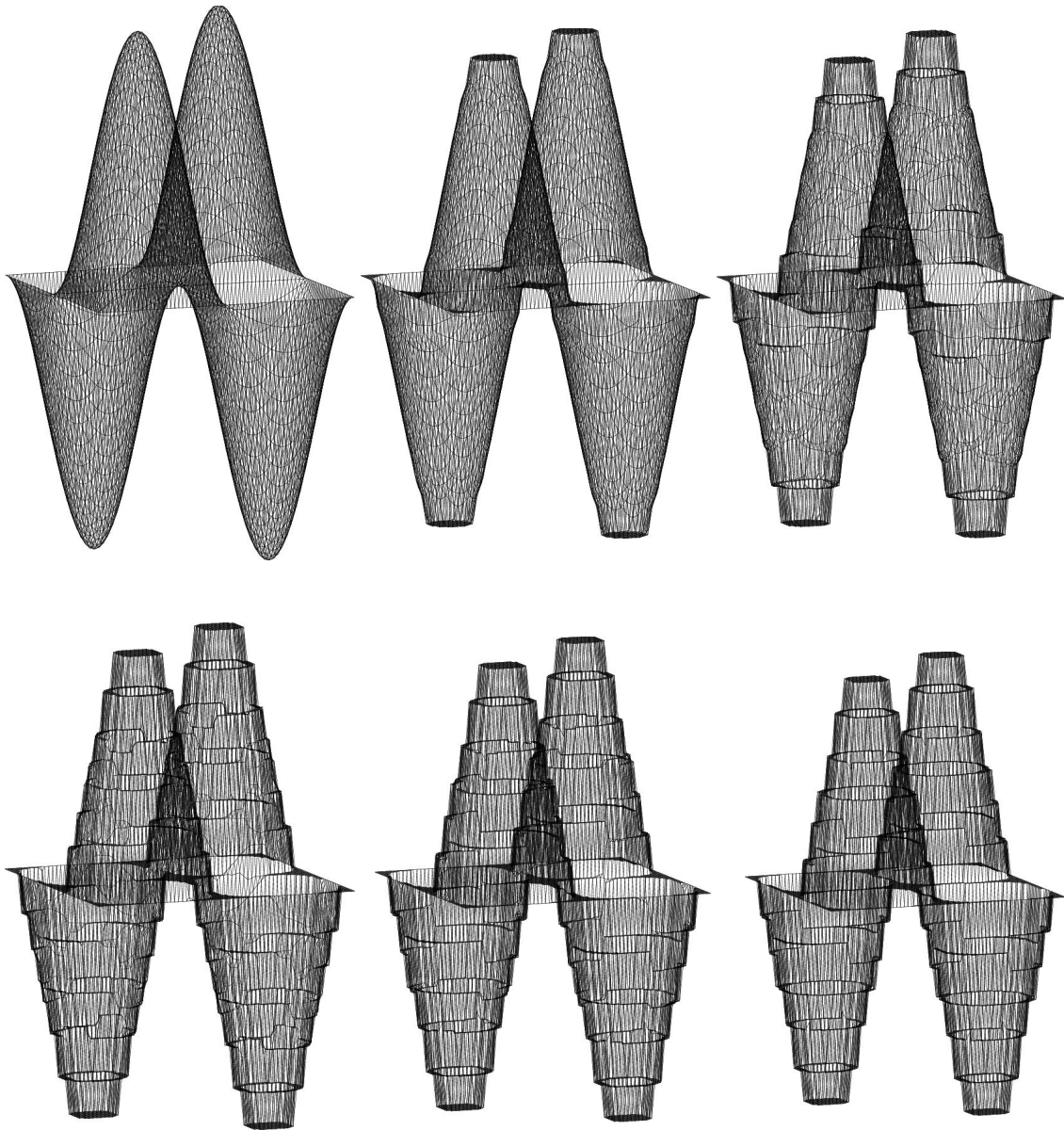


Abbildung 3.18: Feinere Plateaubildung bei der Lösung  $u(x, t)$  der anisotropen Diffusionsgleichung für  $\lambda = \frac{3}{2}$  und  $t = \frac{3}{10} i$  ( $i = 0 \dots 5$ )

Bei dem Versuch, die verschiedenen Filter miteinander zu vergleichen, fällt auf, daß jeder Filter spezielle Varianten von Störungen in den Ausgangsbildern behebt. Ein Filter, der alle Arten von Störungen beseitigt, existiert nicht. Daher hängt die Wahl der zu bevorzugenden Methode sehr stark vom Bildstörungstyp ab. So ist dem Shock-Filter bei leicht verschwommenen Bildern der Vorzug zu geben. Ist das Anfangsbild durch zusätzliche Störungen wie beispielsweise Gaußrauschen belegt, so ist der Diffusionsfilter von Perona und Malik zu favorisieren, da diese Methode auch Glättungseigenschaften besitzt, wohingegen der Shock-Filter diese Störungsart verstärkt und das Bild unkenntlich macht. Neben dem Störungs- muß auch der Bildtyp bei der Wahl eines Filters berücksichtigt werden. In Bildern, in denen zum Beispiel lediglich die Helligkeitswerte Schwarz und Weiß enthalten sind (wie bei der Texterkennung oder den Mengenbildern in den Abbildungen 3.8 und 3.11), muß daher auf die spezielle Gestalt der Gradienten eingegangen werden, deren Betrag in solchen Fällen sehr groß ist oder aber zu Null wird. Letztlich besteht auch nach der Wahl des geeigneten Filters die Problematik, die richtigen Parameterwerte für die entsprechende Methode zu finden. Speziell bei der Perona-Malik Gleichung bietet der Diffusionskoeffizient  $a(s)$  sehr viel Spielraum, um von Fall zu Fall auf unterschiedliche Störungen einzugehen. Ein Nachteil der Gleichung besteht darin, daß sie nicht kontrastinvariant ist. Ändert man den Kontrast eines Bildes, so verändert sich ebenso der Schwellenwert  $s_0$ , ab dem die Rückwärtsdiffusion in Richtung der Kanten eintritt. Man kann dem entgegenwirken, indem man die Kontrasteigenschaften bei der Wahl der Parameter berücksichtigt. Um ein bestmögliches Ergebnis zu erzielen, ist grundsätzlich die Optimierungsmethode auf den Zustand des Ausgangsbildes abzustimmen.

## 4 Von Mumford-Shah zu Perona-Malik

In diesem Kapitel greifen wir die Approximation des Mumford-Shah Funktionals von Ambrosio und Tortorelli [AT92] (Kapitel 1, Gleichung (1.4)) auf und leiten einen Übergang zur Perona-Malik Gleichung her, indem wir nach einer Idee von Chan und Vese [VC97] in einem gekoppelten System zweier partieller Differentialgleichungen einen Term wegfällen lassen und anschließend wie bei [Kaw] die Gestalt einer speziellen Perona-Malik Gleichung daraus ableiten. Betrachten wir zunächst den Minimierer  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  des Funktionals (1.4)

$$F_\varepsilon(u, v) := \alpha \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx + \beta \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \left( \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) dx$$

und berechnen getrennt für  $u_\varepsilon$  und  $v_\varepsilon$  die erste Variation. Wir erhalten dann

$$\alpha (u_\varepsilon - u_0) - \beta \operatorname{div} (v_\varepsilon^2 \nabla u_\varepsilon) = 0 \quad (4.1)$$

als Eulergleichung für  $u_\varepsilon$  und

$$\beta v_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 - \varepsilon \Delta v_\varepsilon + \frac{1}{4\varepsilon} (v_\varepsilon - 1) = 0 \quad (4.2)$$

als Eulergleichung für  $v_\varepsilon$ . Die Funktion  $v_\varepsilon$  wurde eingeführt, um die Kantenmenge von  $u_\varepsilon$  zu beschreiben. Beim Grenzübergang von  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt bzgl. starker Konvergenz in  $L^1(\Omega)$ :  $u_\varepsilon \rightarrow u$  und  $v_\varepsilon \rightarrow 1$ . Um eine dieser beiden Gleichungen zu eliminieren, wurde von Chan und Vese [VC97] der Term  $\varepsilon \Delta v_\varepsilon$  weggelassen, da er im Vergleich zu den anderen beiden Termen aus (4.2) vernachlässigbar klein wird. Mit diesem Ansatz läßt sich (4.2) folgendermaßen nach  $v_\varepsilon$  auflösen:

$$v_\varepsilon = \frac{1}{1 + 4\beta\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2} . \quad (4.3)$$



Setzt man diese Gleichung wiederum in (4.1) ein, ergibt sich

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{(1 + 4\beta\varepsilon|\nabla u|^2)^2} \nabla u \right) = \alpha(u - u_0) . \quad (4.4)$$

## 4.1 Das zugehörige Energiefunktional

Die auf diese Weise entstandene Gleichung ist dann ebenfalls Eulergleichung des Energiefunktionals  $J_\varepsilon(u)$  mit

$$J_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \beta(u - u_0)^2 + \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)} dx ,$$

wie wir der folgenden Rechnung entnehmen können.

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u + \delta\varphi) &= \int_{\Omega} \beta(u + \delta\varphi - u_0)^2 + \frac{|\nabla u + \delta\nabla\varphi|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u + \delta\nabla\varphi|^2)} dx \text{ und} \\ \frac{d}{d\varepsilon} J_\varepsilon(u + \delta\varphi)|_{\delta=0} &= \int_{\Omega} 2\beta(u - u_0)\varphi + \frac{2\nabla u(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2) - 8\beta\varepsilon|\nabla u|^2\nabla u}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \cdot \nabla\varphi dx \\ &= \int_{\Omega} 2\beta(u - u_0)\varphi + \frac{2\nabla u}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \cdot \nabla\varphi dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - u_0) - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \right) \right\} \cdot \varphi dx . \end{aligned}$$

Analog zu Abschnitt 3.6.2 sieht man leicht, daß  $J_\varepsilon$  ein Ljapunovfunktional für die Evolutionsgleichung

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{1}{(1 + 4\beta\varepsilon|\nabla u|^2)^2} \nabla u \right) = -\alpha(u - u_0) \quad (4.5)$$

ist. Gleichung (4.5) weist jedoch (siehe auch [Kaw]) vom Typ her Ähnlichkeit mit der von Perona und Malik untersuchten Gleichungen der Form

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^2} \nabla u \right) = 0$$

bzw.

$$u_t - \operatorname{div} (a(|\nabla u|^2) \nabla u) = 0 \quad \text{mit} \quad a(s) = \frac{1}{(1 + s)^2}$$

auf. Die nichthomogene rechte Seite kann dabei - ähnlich wie die von Nordström [Nor90] eingeführte rechte Seite bei der Modifikation der Perona-Malik Gleichung - als Zusatzterm betrachtet werden, der die Problematik löst, eine geeignete Zeit  $T > 0$  zu finden, zu der die Diffusionsgleichung stoppt. Andererseits können wir den Parameter  $\alpha$  aus (4.5) als Lagrange-Multiplikator der Minimierungsaufgabe

$$\min J_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)} dx$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_\Omega (u - u_0)^2 dx < \delta \tag{4.6}$$

auffassen. Dieses Problem können wir nun mit der Methode des steilsten Abstiegs lösen und erhalten mit dem Anfangsdatum  $u_0$  die Evolutionsgleichung

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{1}{(1 + 4\beta\varepsilon|\nabla u|^2)^2} \nabla u \right) = 0 . \tag{4.7}$$

Diese Gleichung kann so lange angewendet werden, wie die Nebenbedingung gültig ist. Die Tatsache, daß sich die Lösung nicht unmittelbar aus einer solchen  $\delta$ -Umgebung herausbewegt, wie sie durch obige Nebenbedingung beschrieben wird, entnehmen wir den folgenden Stabilitätsaussagen.

## 4.2 Stabilitätsaussagen

**Satz 4.1** ([Kaw])

Sei  $u$  eine Lösung von (4.7) mit  $u(\cdot, 0) = u_0$  und  $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ . Ferner gelte

$$a(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times \{t > 0\} \quad \text{und} \quad a(s) = \frac{1}{(1 + 4\beta\epsilon s^2)^2} .$$

Dann entfernt sich die Lösung höchstens linear in  $t$  vom Anfangsbild  $u_0$ .

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} (u - u_0) u_t dx \\ &\stackrel{(4.7)}{=} 2 \int_{\Omega} (u - u_0) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \right) dx \\ &= -2 \int_{\Omega} \nabla(u - u_0) \cdot \left( \frac{\nabla u}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \right) dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla u_0}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} dx \\ &\stackrel{2ab \leq a^2 + b^2}{\leq} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u_0|^2 - 2|\nabla u|^2}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_0|^2}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2} dx \\ &< \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_0|^2}{\underbrace{(1 + 4\epsilon\beta|\nabla u|^2)^2}_{\geq 0}} dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx . \end{aligned}$$

Somit haben wir eine Ungleichung vom Typ  $b'(t) < c$  bewiesen, woraus wir durch Integration  $b(t) \leq c \cdot t$  folgern können. Die Integrationskonstante verschwindet hierbei aufgrund der Anfangsbedingung  $b(0) = 0$ . Damit ist gezeigt, daß sich die Lösung  $u$  lediglich linear vom Anfangsbild  $u_0$  fortbewegt.  $\square$

Da die Perona-Malik Gleichung für kleine Zeitwerte  $t$  eine gute Kantenrestaurierung liefert, sich dagegen für große Zeitwerte eher wie eine Segmentierung verhält, rechtfertigt die Aussage des letzten Satzes die Anwendung der anisotropen Diffusionsgleichung für kurze Zeiten, ohne dabei die Nebenbedingung (4.6) zu verletzen.

Falls wir im Beweis des letzten Satzes die Diffusionsgleichung in der ursprünglichen Form (4.5) mit einer nichthomogenen rechten Seite belassen, bleiben die Lösungen sogar für alle Zeiten in einer hinreichend großen  $L^2$ - Umgebung des Anfangsbildes. Dazu betrachte man folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} (u - u_0) u_t dx \\
 &\stackrel{(4.5)}{=} 2 \int_{\Omega} (u - u_0) \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \right) - \alpha(u - u_0) \right) dx \\
 &= 2 \int_{\Omega} -\nabla(u - u_0) \cdot \left( \frac{\nabla u}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} \right) - \alpha(u - u_0)^2 dx \\
 &= 2 \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla u_0}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \alpha(u - u_0)^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u_0|^2 - 2|\nabla u|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \alpha(u - u_0)^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_0|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \frac{|\nabla u|^2}{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)^2} - \alpha(u - u_0)^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_0|^2}{\underbrace{(1 + 4\varepsilon\beta|\nabla u|^2)}_{\geq 0}} - \alpha(u - u_0)^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 - \alpha(u - u_0)^2 dx .
 \end{aligned}$$

Setzen wir  $b(t) := \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx$ , so erhalten wir die Differentialungleichung  $b'(t) \leq c - \alpha b(t)$ . Da  $b(0) = 0$  gilt, existiert aufgrund der Stetigkeit für  $\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx =: c > 0$  eine Zeit  $T > 0$  mit  $c - \alpha b(t) > 0$  auf  $[0, T]$ . Somit können wir obige Differentialgleichung integrieren und mittels Trennung der Variablen lösen.

$$\begin{aligned} -\ln(c - \alpha b(t)) \leq \alpha t + c_2 &\Rightarrow \frac{1}{c - \alpha b(t)} \leq \exp(\alpha t) \exp(c_2) \\ &\Rightarrow b(t) \leq \frac{1}{\alpha} \left( c - \exp(-\alpha t) \exp(-c_2) \right) \\ \stackrel{b(0)=0}{\Rightarrow} &b(t) \leq \frac{c}{\alpha} \left( 1 - \exp(-\alpha t) \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 4.2**

Sei  $u$  eine Lösung von (4.5) mit Anfangsdatum  $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$  und

$$a(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times \{t > 0\} \quad \text{mit} \quad a(s) = \frac{1}{(1 + 4\beta\epsilon s^2)^2}.$$

Dann gilt

$$|u - u_0|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \text{ aus (4.5) und} \quad c := \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$$

für alle  $t \geq 0$ , d.h. die Lösung bleibt für alle  $t > 0$  in der  $L^2$ -Kugel um  $u_0$  mit dem Radius  $\frac{c}{\alpha}$ .

In Abbildung 4.1 sehen wir die Auswirkungen der anisotropen Diffusionsgleichung auf ein verrauschtes Bild. Dabei wurde der Diffusionskoeffizient  $a(s)$  so gewählt, daß er mit dem aus dem Mumford-Shah Funktional hergeleiteten Diffusionskoeffizienten aus Gleichung (4.7) übereinstimmt. Es gilt dann

$$a(s) = \frac{\beta^2}{(1 + \alpha^2 s)^2} \text{ mit } \alpha = \frac{1}{250} \text{ und } \beta = 2 .$$

Wir sehen in Abbildung 4.1 neben dem verrauschten Anfangsbild (oben links) die numerischen Berechnungen zu verschiedenen Zeitpunkten. Mit Ausnahme des letzten Bildes, dessen Zeitabstand 0,8 Sekunden zum vorigen beträgt, ist für den Abstand der übrigen Bilder zueinander eine Zwanzigstel Sekunde gewählt. Dadurch soll gezeigt werden, daß die Diffusionsgleichung für große Zeitwerte Segmentierungseigenschaften besitzt, wohingegen sie für kleine Zeitwerte Bilder entrauscht.



Abbildung 4.1: Wiederherstellung eines verrauschten Bildes mit der anisotropen Diffusionsgleichung für  $a(s) = 4 \cdot (1 + s/250^2)^{-2}$  und  $t = 0, 5, 10, 15, 20, 100$  Hundertstel Sekunden

# Literaturverzeichnis

- [AGLM93] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123(3):199–257, 1993.
- [AK02] Gilles Aubert and Pierre Kornprobst. *Mathematical problems in image processing. Partial differential equations and the calculus of variations. Foreword by Olivier Faugeras*. Applied Mathematical Sciences. 147. New York, NY: Springer, 2002.
- [Alb00] Giovanni Alberti. Variational models for phase transitions, an approach via  $\Gamma$ -convergence. In *Buttazzo, G. (ed.) et al., Calculus of variations and partial differential equations. Topics on geometrical evolution problems and degree theory. Based on a summer school, Pisa, Italy, September 1996*. Berlin: Springer, 95-114, . 2000.
- [ALM92] Luis Alvarez, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3):845–866, 1992.
- [AM97] Giovanni Alberti and Carlo Mantegazza. A note on the theory of SBV functions. *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B*, 11(2):375–382, 1997.
- [Amb89a] L. Ambrosio. A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation. *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B*, 3(4):857–881, 1989.
- [Amb89b] Luigi Ambrosio. Variational problems in SBV and image segmentation. *Acta Appl. Math.*, 17(1):1–40, 1989.
- [Amb90] L. Ambrosio. Existence theory for a new class of variational problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 111(4):291–322, 1990.
- [AT90] Luigi Ambrosio and Vincenzo Maria Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence. *Commun. Pure Appl. Math.*, 43(8):999–1036, 1990.

- [AT92] Luigi Ambrosio and V.M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B*, 6(1):105–123, 1992.
- [BCM<sup>+</sup>00] P. Blomgren, T.F. Chan, P. Mulet, L. Vese, and W.L. Wan. Variational PDE models and methods for image processing. In *Griffiths, D. F. (ed.) et al., Numerical analysis 1999. Proceedings of the 18th Dundee biennial conference, Univ. of Dundee, GB, June 29th - July 2nd, 1999. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/ CRC. Chapman Hall/CRC Res. Notes Math. 420, 43-67.* 2000.
- [BD01] Alexis Bonnet and Guy David. *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*. Astérisque. 274. Paris: Société Mathématique de France, 259 p., 2001.
- [Bon96] Alexis Bonnet. On the regularity of the edge set of Mumford-Shah minimizers. In *Serapioni, Raul (ed.) et al., Variational methods for discontinuous structures. Applications to image segmentation, continuum mechanics, homogenization. Proceedings of the international conference, Como, Italy, September 8–10, 1994. Basel: Birkhäuser. Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 25, 93-103.* 1996.
- [Bra98] Andrea Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Lecture Notes in Mathematics. 1694. Berlin: Springer. 149 p., 1998.
- [Bra02] Andrea Braides.  *$\Gamma$ -convergence for beginners*, volume 22 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [BZ87] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual reconstruction*. MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1987.
- [Can86] John Canny. A Computational Approach to Edge Detection. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 8:679–698, 1986.
- [Cao03] Frédéric Cao. *Geometric curve evolution and image processing*. Lecture Notes in Mathematics. 1805. Berlin: Springer. 187 p., 2003.
- [CCM96] V. Caselles, B. Coll, and J.-M. Morel. Partial differential equations and image smoothing. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1995–1996*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XXI, 32pp. École Polytech., Palaiseau, 1996.



- [CLMC92] Francine Catté, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, and Tomeu Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1):182–193, 1992.
- [CMRVC97] M. Chipot, R. March, M. Rosati, and G. Vergara Caffarelli. Analysis of a nonconvex problem related to signal selective smoothing. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 7(3):313–328, 1997.
- [CV02] T.F. Chan and L.A. Vese. Active contour and segmentation models using geometric PDE’s for medical imaging. In *Malladi, Ravikanth (ed.), Geometric methods in bio-medical image processing. Berlin: Springer. Mathematics and Visualization, 63-75.* 2002.
- [DG91] E. De Giorgi. Free discontinuity problems in calculus of variations. In *Frontiers in pure and applied mathematics, Coll. Pap. Ded. J.-L. Lions Occas. 60th Birthday, North-Holland, Amsterdam, 55-62.* 1991.
- [DGA89] E. De Giorgi and L. Ambrosio. New functionals in calculus of variations. In *Nonsmooth optimization and related topics, Proc. 4th Course Int. Sch. Math., Erice/Italy 1988, Ettore Majorana Int. Sci. Ser., Phys. Sci. 43, 49-59.* 1989.
- [DGCL89] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 108(3):195–218, 1989.
- [dGF75] Ennio de Giorgi and Tullio Franzoni. Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 58:842–850, 1975.
- [Dia90] J.I. Diaz. A nonlinear parabolic equation arising in image processing. *Extracta Mathematicae, Universidad de Extremadura*, 1990.
- [DM93] Gianni Dal Maso. *An introduction to  $\Gamma$ -convergence.* Progress in Non-linear Differential Equations and their Applications. Basel: Birkhäuser., 1993.
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton: CRC Press. viii, 268 p. , 1992.
- [ES91] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I. *J. Differ. Geom.*, 33(3):635–681, 1991.
- [ES92a] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. II. *Trans. Am. Math. Soc.*, 330(1):321–332, 1992.

- [ES92b] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. III. *J. Geom. Anal.*, 2(2):121–150, 1992.
- [ES95] Lawrence C. Evans and Joel Spruck. Motion of level sets by mean curvature. IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1):79–116, 1995.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics. 19. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 662 p., 1998.
- [GM97] Frédéric Guichard and Jean-Michel Morel. Partial differential equations and image iterative filtering. In *The state of the art in numerical analysis (York, 1996)*, volume 63 of *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.*, pages 525–562. Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [Gob98] Massimo Gobbino. Gradient flow for the one-dimensional Mumford-Shah functional. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.*, 27(1):145–193, 1998.
- [HN83] Klaus Höllig and John A. Nohel. A diffusion equation with a nonmonotone constitutive function. In *Systems of nonlinear partial differential equations, Proc. NATO Adv. Study Inst., Oxford/U.K. 1982, NATO ASI Ser. Ser. C 111, 409-422*. 1983.
- [Hö83] Klaus Höllig. Existence of infinitely many solutions for a forward backward heat equation. *Trans. Am. Math. Soc.*, 278:299–316, 1983.
- [Jos98] Jürgen Jost. *Partielle Differentialgleichungen. Elliptische (und parabolische) Gleichungen*. Berlin: Springer. 289 S., 1998.
- [Kaw] Bernhard Kawohl. From Mumford-Shah to Perona-Malik in image processing. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pages 15, erscheint demnächst.
- [Kaw97] Bernd Kawohl. The opaque square and the opaque circle. In *General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995)*, volume 123 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 339–346. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [Kic97] Satyanad Kichenassamy. The Perona-Malik paradox. *SIAM J. Appl. Math.*, 57(5):1328–1342, 1997.
- [KK95] Bernd Kawohl and Nickolai Kutev. Global behaviour of solutions to a parabolic mean curvature equation. *Differ. Integral Equ.*, 8(8):1923–1946, 1995.

- [KK98a] B. Kawohl and N. Kutev. Image processing and anisotropic diffusion. In *Amann, H. (ed.) et al., Progress in partial differential equations. Papers from the 3rd European conference on elliptic and parabolic problems, Pont--Mousson, France, June 1997. Vol. 1. Harlow: Longman. Pitman Res. Notes Math. Ser. 383, 191-199*. 1998.
- [KK98b] Bernd Kawohl and Nikolai Kutev. Maximum and comparison principle for one-dimensional anisotropic diffusion. *Math. Ann.*, 311(1):107–123, 1998.
- [KK98c] Bernd Kawohl and Nikolai Kutev. Strong maximum principle for semi-continuous viscosity solutions of nonlinear partial differential equations. *Arch. Math.*, 70(6):470–478, 1998.
- [KK99] Bernd Kawohl and Nikolay Kutev. Viscosity solutions for degenerate and nonmonotone elliptic equations. In *Sequeira, Adélia (ed.) et al., Applied nonlinear analysis. In honor of the 70th birthday of Professor Jindrich Necas. New York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers. 231-254*. 1999.
- [MH80] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. *Proc. Roy. Soc. Lond. B207*, pages 187–217, 1980.
- [MM77] Luciano Modica and Stefano Mortola. Un esempio di  $\Gamma$ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1):285–299, 1977.
- [MS89] David Mumford and Jayant Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(5):577–685, 1989.
- [MS94] Jean-Michel Morel and Sergio Solimini. *Variational methods in image segmentation with 7 image processing experiments*. Basel, Birkhäuser. 245 p., 1994.
- [MT91] Umberto Massari and Italo Tamanini. Regularity properties of optimal segmentations. *J. Reine Angew. Math.*, 420:61–84, 1991.
- [Nor90] Niklas Nordström. Biased anisotropic diffusion - a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Computer Vision - ECCV'90, First European Conference on Computer Vision, Antibes, France, April 23-27, 1990, Proceedings*, pages 318–327, 1990.
- [OR90] Stanley Osher and Leonid I. Rudin. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(4):919–940, 1990.

- [PM90] P. Perona and J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. 12(7):629–639, 1990.
- [Res01] Hans Günther Reschke. Analysis und Numerik von singulären Lösungen der Minimalflächengleichung, Dissertation. *Kölner Universitäts-Publikations-Server*, <http://kups.ub.uni-koeln.de/volltexte/2003/572>, 2001.
- [VC97] Luminita Vese and Tony F. Chan. Reduced non-convex functional Approximations for Image Restoration and Segmentation, UCLA CAM Report 97-56, <http://citeseer.nj.nec.com/224521.html>, 1997.
- [Wal93] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1993. Eine Einführung.
- [Wei98] Joachim Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing*. Stuttgart: Teubner. 170 p. , 1998.
- [WII99] Joachim Weickert, Seiji Ishikawa, and Atsushi Imiya. Linear scale-space has first been proposed in Japan. 10(3):237–252, 1999.
- [Wit83] A. P. Witkin. Scale-space filtering. *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1019-1021*, 1983.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Formen von $C^{1,1}$ - Kurven des Minimierers . . . . .	6
1.2	Eine Gabelung unter Einfluß des Mumford-Shah Funktionals . . . . .	7
1.3	Eine Kreuzung unter Einfluß des Mumford-Shah Funktionals . . . . .	7
1.4	Links: die Cantormenge, außerhalb derer die Cantor-Vitali Funktion konstant ist Rechts: Cantor-Vitali Funktion, auch unter dem Namen Devil's Stair- case bekannt Abgebildet ist in beiden Fällen die fünfte Iteration. . . . .	10
1.5	Segmentierung mit 5000 Regionen und deren Kantenmenge $K$ . . . . .	18
1.6	Segmentierung mit 500 Regionen und deren Kantenmenge $K$ . . . . .	18
1.7	Segmentierung mit 50 Regionen und deren Kantenmenge $K$ . . . . .	19
2.1	Das Anfangsbild mit einer Säule im Intervall $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$ . . . . .	22
2.2	Die Lösung $u$ aus dem Raum der stetigen Funktionen für ein Anfangs- datum $g$ mit einer Säule im Intervall $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$ . . . . .	23
2.3	Die Energie in Abhängigkeit von $a$ für das Anfangsdatum $g$ mit einer Säule im Intervall $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}]$ . . . . .	25
2.4	Das Anfangsbild $g$ und der Minimierer $u$ mit Sprungstelle bei $b_2 = \frac{5}{8}$ . . . . .	26
2.5	Das Anfangsbild $g$ mit zwei Säulen in den Intervallen $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ und $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ . . . . .	44
2.6	Die stetige Lösung $u$ für ein Anfangsdatum $g$ mit zwei Säulen in den Intervallen $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ . . . . .	45
2.7	Die Energie in Abhängigkeit von $a$ für das Anfangsdatum $g$ mit zwei Säulen in den Intervallen $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ . . . . .	46
2.8	Der Minimierer $u$ und das Anfangsbild $g$ mit zwei Säulen im Intervall $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ und $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ . . . . .	47
2.9	Lokale Minima mit jeweils einer Sprungstelle bei $b_1, b_2$ bzw. $b_4$ . . . . .	47
2.10	Lokale Minima (rot gefärbt) mit jeweils 2 Sprungstellen und das An- fangsbild $g$ (blau gefärbt) . . . . .	49
2.11	Die Energie in Abhängigkeit von den beiden Sprungstellen . . . . .	50
2.12	Lokale Minima (rot gefärbt) mit jeweils drei Sprungstellen und das An- fangsbild (blau gefärbt) . . . . .	51
2.13	Das Anfangsbild $g$ mit $n$ gewichteten Säulen . . . . .	53

3.1	Oben links das Anfangsbild $u_0$ , es folgen von links nach rechts und von oben nach unten die Lösungen $u(x, t)$ für $t = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30$	63
3.2	$\eta = \frac{\nabla u}{ \nabla u }$ und $\xi \perp \eta$ an einer Isophote	64
3.3	Der Canny Kantendetektor, angewendet auf die in Abbildung 3.1 gegebenen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung fortschreitender Zeitwerte	67
3.4	links: Bild mit additivem Gaußrauschen (Standardabweichung $\sigma = 5$ ) rechts: Rückwärtsdiffusion ( $t = -0.15$ ), angewendet auf das linke Bild	68
3.5	Einfluß der Krümmungsgleichung ( $t = 0, 5, 10, 15$ ) auf ein digitales Bild	70
3.6	Einfluß der Krümmungsgleichung auf die Kantenmengen der in Abbildung 3.5 gegebenen Bilder	71
3.7	Kantengenerierung des Shock-Filters in einer Dimension	72
3.8	Rekonstruktion eines Bildes von vier Objekten mit Hilfe des Shock-Filters, oben links das mit der Diffusionsgleichung verrauschte Bild ( $t = 6$ ), anschließend drei Evolutionsschritte des Shock-Filters für $t \in \{1, 2, 3\}$	74
3.9	Einfluß des Shock-Filters auf Bilder. Links oben sehen wir das Originalbild, anschließend die durch den Shock-Filter bearbeiteten Bilder für die Zeitwerte $t \in \{1, 4, 10\}$ .	75
3.10	Die Diffusionskoeffizienten $a(s)$ in Richtung $\xi$ und $b(s)$ in Richtung $\eta$	78
3.11	Rekonstruiertes Bild von Mengen mit Hilfe der Perona-Malik-Gleichung	79
3.12	Wiederherstellung eines stark verrauschten Bildes mit der anisotropen Diffusionsgleichung für $a(s) = (1 + s/40^2)^{-1}$ und $t = 0, 5, 10, 15, 20$ und 25 Hundertstel Sekunden	80
3.13	Positive Diffusionskoeffizienten $a(s)$ (blau) und $b(s)$ (rot) aus Gleichung (3.16) für $\lambda = 0.25$	86
3.14	Die Lösung $u(x, t)$ der Perona-Malik Gleichung für $\lambda = \frac{1}{4}$ und $t \in \{0, \frac{3}{100}, \frac{6}{100}, \frac{1}{10}\}$ bei positiver Diffusion	87
3.15	Die Lösung $u(x, t)$ der anisotropen Diffusionsgleichung für $\lambda = 0.45$ und $t \in \{0, \frac{1}{25}, 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{10}, 2\}$ . Sie bildet Stufen, bevor sich die Nulllösung einstellt.	88
3.16	Die Lösung $u(x, t)$ der Perona-Malik Gleichung für $\lambda = \frac{7}{10}$ und $t = \frac{2}{25}i$ ( $i = 0 \dots 5$ ). Es entstehen zwei Plateaus pro Extremwertbereich.	89
3.17	Die Diffusionskoeffizienten $a(s)$ und $b(s)$ für $\lambda = 0.7$ (oben) und $\lambda = 1.5$ (unten). Die Nullstelle von $b(s)$ liegt dann bei $s_0 = \frac{100}{147} \approx 0.6802$ im oberen bzw. $s_0 = \frac{4}{27} \approx 0.1481$ im unteren Fall.	90
3.18	Feinere Plateaubildung bei der Lösung $u(x, t)$ der anisotropen Diffusionsgleichung für $\lambda = \frac{3}{2}$ und $t = \frac{3}{10}i$ ( $i = 0 \dots 5$ )	91
4.1	Wiederherstellung eines verrauschten Bildes mit der anisotropen Diffusionsgleichung für $a(s) = 4 \cdot (1 + s/250^2)^{-2}$ und $t = 0, 5, 10, 15, 20, 100$ Hundertstel Sekunden	99

## Erklärung

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; daß diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. B. Kawohl betreut worden.

Köln, im Oktober 2003

---

Markus Mester

Teilpublikationen: keine

## Lebenslauf

### Persönliche Daten:

Name:	Markus Mester
Geburtsdatum:	07. Mai 1973
Geburtsort:	Wipperfürth
Nationalität:	deutsch
Familienstand:	ledig
Konfession:	römisch-katholisch

### Schulischer Werdegang:

August 1979 - Juli 1983:	Kath. Grundschule Engelskirchen
August 1983 - Juni 1992:	Aggertal-Gymnasium Engelskirchen Abitur Juni 1992
Oktober 1992 - Februar 1998:	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität zu Köln Vordiplom Oktober 1994
Februar 1998	Diplom in Mathematik, Thema: Das Newton Problem und die Single Shock Bedingung für Kegel

### Berufserfahrung:

August 1994 - Februar 1998:	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
seit März 1998:	Wissenschaftliche Hilfskraft bzw. Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität zu Köln