

Ein Risikomodel für Bausparkkollektive

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Thomas Chevalier
aus Köln

Köln 2005

Berichterstatter: Prof. Dr. R. Schrader
Prof. Dr. E. Speckenmeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Dezember 2004

Kurzzusammenfassung

Die Quantifizierung von Geschäftsrisiken stellt im Bankenbereich eine zentrale Aufgabe dar. Das Risiko einer Bausparkasse wird wesentlich von der Entwicklung ihres Bausparkollektivs bestimmt, welches durch langfristige Festzinsvereinbarungen und zahlreiche Optionsrechte für den Kunden geprägt ist. Wir stellen hier ein Monte-Carlo-Simulationsmodell vor, welches durch stochastische Modellierung der wichtigsten exogenen Variablen Marktzins und Neugeschäft die Bestimmung von empirischen Wahrscheinlichkeiten für künftige Kollektiventwicklungen erlaubt. Zur Modellierung des Neugeschäfts werden auf Grund ihrer hohen Flexibilität Hidden-Markov-Modelle verwendet. Zinsszenarien werden mit Hilfe des Modells von Cox, Ingersoll und Ross generiert. Da das Zinsszenario nur indirekt über die Vorteilhaftigkeit bestimmter Kundenoptionen auf das Kollektiv einwirkt, muss diese Abhängigkeit durch Ableitung konkreter Simulationsparameter aus dem Zinsszenario erfasst werden. Hierzu verwenden wir eine Kombination aus Regressions- und Clusteranalyse, die das spezifische Verhalten bestimmter Teilkollektive bei der Parameterschätzung explizit berücksichtigt und mit Hilfe des Verfahrens von Quine-McCluskey eine interpretierbare Charakterisierung dieser Teilkollektive erzeugt. Anhand realer Daten wird die Funktionsfähigkeit und Angemessenheit des Gesamtmodells belegt.

Abstract

Quantifying business risks is one of the major challenges in finance. A building association's risk is strongly determined by the development of its savers' collective, since fixed interest-rates are guaranteed over a long range, and many options are granted to the savers. We present a Monte Carlo simulation model, which allows the determination of empirical probabilities for possible future states of the saver's collective by modelling the most important exogenous variables, market interest-rates and new business. Due to their high flexibility, hidden Markov models are used for modelling new business. Interest-rate scenarios are generated by using the Cox-Ingersoll-Ross model. Since the interest-rate scenarios influence the savers only indirectly through the benefits of their options, concrete simulation parameters have to be derived from an interest-rate scenario. For these purposes we use a combination of regression- and cluster analysis, where the specific behaviour of certain groups of savers can explicitly be included. An interpretable characterization of these groups can be obtained via the Quine-McCluskey algorithm. Using real-world data shows the efficiency and suitability of the whole model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellgrundlagen	5
2.1	Grundbegriffe des Bausparens	5
2.1.1	Ablauf eines Bausparvertrags	6
2.1.2	Anforderungen an die Kollektivsteuerung	8
2.1.3	Funktionsweisen ausgewählter Kollektivsimulationsmodelle	10
2.2	Herleitung des Modellkonzepts	12
2.2.1	Risikoarten	12
2.2.2	Risikomodelle	13
2.2.3	Exogene Variablen	15
2.2.4	Modellaufbau	22
2.3	Einsatzmöglichkeiten	25
2.3.1	Bestimmung des Liquiditätsrisikos	26
2.3.2	Risikogewichtete Bewertung des kollektiven Geschäfts	28
2.3.3	Auswirkungen auf die Messung des Zinsänderungsrisikos	30
2.3.4	Bestimmung des Ertragsrisikos	32
2.3.5	Chancen-/ Risikobewertung neuer Produkte	32
3	Regressionsmodell	35
3.1	Problemstellung	35
3.2	Regressionsanalyse	42
3.2.1	Grundlegende Überlegungen zur Wahl des Regressionsmodells	42
3.2.2	Das klassische lineare Regressionsmodell	45
3.2.3	Autoregressive Regressionsmodelle	49
3.2.4	Gütemaße der Regression	51
3.2.5	Anwendung auf Realdaten	52
3.2.6	Darlehensverzichtsanteile	55
3.2.7	Sondertilgungsanteile	59
3.3	Clusteranalyse	63
3.3.1	Proximitätsmaße	64
3.3.2	Hierarchische Clusterverfahren	65
3.3.3	Partitionierende Clusterverfahren	67

3.3.4	Bestimmung der Clusteranzahl	68
3.4	Kombination beider Ansätze: Regressionsclusterung	69
3.4.1	Problemformulierung	70
3.4.2	Anwendung auf Realdaten	72
4	Zinsmodell	83
4.1	Grundlagen	84
4.1.1	Zinsen	84
4.1.2	Itô-Prozesse	87
4.2	Einfaktor-Zinsmodelle	91
4.2.1	Eine Differentialgleichung zur Bondpreisbestimmung	92
4.2.2	Der Martingalansatz	95
4.2.3	Überblick über verschiedene Modellansätze	98
4.2.4	Das Modell von Cox, Ingersoll und Ross	101
4.2.5	Weitere Modellansätze	110
4.3	Bestimmung von Vergleichszinsen	112
4.3.1	Berechnung fixer Vergleichszinsen aus der Zinsstruktur	112
4.3.2	Berücksichtigung der Marge	113
4.3.3	Simulation von Vergleichszinsszenarien	114
5	Neugeschäftsmodell	117
5.1	Bestimmungsfaktoren und Modellierungsansatz	117
5.2	Hidden-Markov-Modelle	120
5.2.1	Definition und Notation	122
5.2.2	Basisalgorithmen für HMM	125
5.3	Modellwahl und Training	134
5.3.1	Überwindung lokaler Extrema	134
5.3.2	Wahl der Modelldimension	136
5.3.3	Wahl des Neugeschäftsmodells	143
6	Simulation	147
6.1	Modellaufbau	147
6.1.1	Zinsabhängige Verhaltensanteile	148
6.1.2	Abbildung des Sparverhaltens	148
6.1.3	Weitere Ergänzung der Schichtmuster	149
6.1.4	Bildung des Simulationsbestands	150
6.1.5	Berücksichtigung des Neugeschäfts	150
6.1.6	Modellablauf	151
6.1.7	Laufzeitverhalten	153
6.2	Modellvalidierung	155
6.2.1	Backtest-Simulation	156
6.2.2	Ex-Post-Simulation	161

6.3	Anwendung des Modells	164
6.3.1	Parametrisierung	164
6.3.2	Anwendungsergebnisse	164
6.4	Sensitivitätsanalyse	172
6.4.1	Simulation mit fixem Teilszenario	174
6.4.2	Parametrisierung des Zinsmodells	176
7	Zusammenfassung und Ausblick	181

Abbildungsverzeichnis

2.1	Typischer Ablauf eines Bausparvertrags	7
2.2	Systematisierung von Risikomodellen	14
2.3	Darlehensverzichtsanteil in Abhängigkeit von den Hypothekenzinsen .	16
2.4	Sondertilgungsanteil in Abhängigkeit von den Sparbriefzinsen	18
2.5	Anteil einzelner Vario-Varianten am Gesamtneugeschäft des Vario-Tarifs in Abhängigkeit von den Sparbriefzinsen	19
2.6	Vereinfachtes Modellkonzept	24
2.7	Bestimmungsfaktoren der Zuteilungsmasse	26
3.1	Darlehensverzichtsanteile verschiedener Teilkollektive in Abhängig- keit vom vergleichbaren Marktzins	38
3.2	Konfidenzintervalle auf 99%-Niveau für Darlehensverzichtsanteile ver- schiedener Teilkollektive	39
3.3	Saldierte Zahlungsströme der Kollektive 1 und 2	40
3.4	Zusammenhang zwischen Zinsszenario, marktzinsabhängigen Parame- tern und Kollektivzusammensetzung	41
3.5	Darlehensverzichtsanteile des Gesamtkollektivs in Abhängigkeit vom vergleichbaren Marktzins im zeitlichen Verlauf	44
3.6	Mittlere Bestimmtheit der Regression der $BSDV_t$ in Abhängigkeit vom Funktionstyp	57
3.7	Reale und geschätzte $BSDV_t$ für Teilkollektiv 0	58
3.8	Mittlere Bestimmtheit der Regression der $BSST_t$ in Abhängigkeit vom Funktionstyp	61
3.9	Reale und geschätzte $BSST_t$ für Teilkollektiv 2	62
3.10	Breite des 90%-Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von n und \hat{p} . . .	74
3.11	Zielfunktionswerte und Davies-Bouldin-Indices in Abhängigkeit von der Clusteranzahl K	77
3.12	$BSDV_t$ der Cluster C_0, C_1 und C_2	78
3.13	$BSST_t$ der Cluster C_0 und C_1	80
4.1	Historische Zinsstrukturkurven typischer Gestalt	86
4.2	Mit dem CIR-Modell simulierte monatliche Zinsstrukturkurven über einen Zeitraum von 20 Jahren	107

4.3	Vergleich der realen mit vom CIR-Modell berechneten Zinsstrukturen	108
4.4	Reales Vergleichszinsszenario und Quantile der empirischen Verteilungen simulierter Vergleichszinsen	116
5.1	Reales Neugeschäft einer Bausparkasse zwischen 1992 und 2003	118
5.2	Histogramm der relativen jährlichen Neugeschäftsänderung z_t	120
5.3	Graphische Darstellung eines einfachen HMM	121
5.4	Maximale und minimale Zielfunktionswerte bei zufälligen Initialparametern und drei Zuständen	136
5.5	Verteilungen der z_t der Trainings- und generierten Daten	138
5.6	$BIC_{0.05}$ der Trainingssequenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände	140
5.7	\bar{L}^{MCCV} und \bar{L}^{Train} in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände	142
5.8	Graphische Darstellung des trainierten HMM	144
5.9	Reales Neugeschäftsszenario zwischen 1992 und 2003 sowie Quantile der empirischen Verteilung simulierter Neugeschäfte	145
6.1	Modellablauf	152
6.2	CPU-Zeit des NBI-Rechenkerns bei verschiedener Anzahl BWZ-Klassen in Abhängigkeit von der Länge des Simulationshorizonts	154
6.3	Backtest-Resultate (a)	158
6.4	Backtest-Resultate (b)	159
6.5	Backtest-Resultate (c)	160
6.6	Resultate der Ex-Post-Simulation	163
6.7	Verteilung der Szenariogrößen bei Anwendung	165
6.8	Anwendungsergebnisse (a)	166
6.9	Anwendungsergebnisse (b)	167
6.10	Kollektivbarwertverteilung der Anwendungsergebnisse	169
6.11	Zuteilungsmasse der Anwendungsergebnisse	171
6.12	Kapitalisierte und verrechnete Zinsen bei Anwendung	173
6.13	Resultatvergleich bei fixen Teilszenarien	175
6.14	Resultatvergleich bei variierten Zinsmodellparametern (a)	177
6.15	Resultatvergleich bei variierten Zinsmodellparametern (b)	178
6.16	Vergleich der kollektiven Barwertverteilungen bei verschiedenen Zinsmodellparametern	179

Tabellenverzeichnis

2.1	Meldeformular für Ausnahmeregelung gemäß §1 Abs. 4 BSpKV	27
3.1	Notation zur Regressionsanalyse	43
3.2	Bestimmtheit der Regression der $BSDV_t$ je nach verwendetem Funktionstyp	56
3.3	Bestimmtheit der Regression der $B SST_t$ je nach verwendetem Funktionstyp	60
3.4	Notation zur Clusteranalyse	64
3.5	Notation Regressionsclustern	70
4.1	Verwendete Notation zu Renditen und Itô-Prozessen	91
4.2	Mit der einfachen Schätzfunktion ermittelte CIR-Parameter	105
4.3	Mit der Martingal-Schätzfunktion ermittelte CIR-Parameter	106
5.1	Verwendete HMM-Notation	123
5.2	D_{\max} bei trainiertem Modell mit unterschiedlicher Zustandsanzahl . .	137
5.3	$BIC_{0,05}$ der Trainingssequenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände	139
5.4	\bar{L}^{MCCV} und \bar{L}^{Train} in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände	141
6.1	90%-Konfidenzintervalle der empirischen Verteilungsgrößen der simulierten Bauspareinlagen im Jahr 2003	161

Kapitel 1

Einleitung

Simulationsmodelle für Bausparkkollektive sind in der Bauspartechnik seit Jahrzehnten fest etabliert. Sie verfolgen den Zweck, die Entwicklung eines Bausparkkollektivs möglichst genau abzubilden, um mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse unternehmens- und tarifpolitische Entscheidungen zu unterstützen [BHL98]. Auf Grund der komplexen Zusammenhänge in Bausparkkollektiven, die hauptsächlich durch die „Allgemeinen Bausparbedingungen“ (ABB) geregelt werden, ist die Simulationsmethodik im Bereich der Kollektivprognosen weitgehend alternativlos. Folgerichtig wurden im Laufe der Zeit zahlreiche, dem jeweiligen Stand der Forschung und Technik angemessene Simulationsmodelle entwickelt und eingesetzt (vgl. z. B. [Kel92, BBDW93, BFK⁺97, Van96, KSW⁺97, Kna00, Wic01]).

Einen klaren Bedeutungsgewinn erfuhren Kollektivsimulationsmodelle durch die Schaffung der Ausnahmeregelung in §1 Bausparkassenverordnung (BSpKV) im Jahr 2002. Durch die ergänzend erlassenen „Anforderungen für Kollektivsimulationsmodelle“¹ kommt entsprechenden Simulationsrechnungen seitdem auch aufsichtsrechtliche Relevanz zu. Mit Hilfe einer auf der Basis begründeter Prämissen durchgeführten Simulation und dem hieraus resultierenden Nachweis ausreichender (künftiger) Liquidität können Bausparkassen seither Ausnahmeregelungen von §1 BSpKV bei der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) in Anspruch nehmen, womit eine höhere Flexibilität bei der Anlage kollektiver Mittel am Markt gestattet wird.

Hiermit ist die Entwicklung allerdings längst noch nicht zu Ende. Die im Jahr 2004 veröffentlichte „Rahmenvereinbarung zur neuen Baseler Eigenkapitalempfehlung“ (Basel II) [Bas04] verlangt von den Kreditinstituten in ihren drei Hauptanforderungen („Säulen“) das Vorhalten eines bestimmten, vom jeweiligen Risiko abhängigen Mindesteigenkapitals (Säule 1), die überprüfbare Fähigkeit zur Ermittlung, Bewertung und Steuerung der eigenen Risiken (Säule 2) sowie erweiterte Offenlegungspflichten für diese Risiken (Säule 3). Das in Säule 1 geforderte Mindesteigenkapital berech-

¹Vgl. das entsprechende Schreiben der BaFin zu §1 Abs. 4 der Verordnung zum Schutz der Gläubiger von Bausparkassen vom 12. März 2002.

net sich proportional zur Summe der Anrechnungsbeträge verschiedener Risikoarten. Da für die Ermittlung dieser Anrechnungsbeträge Standardmethoden verwendet werden können, die nicht zwangsläufig der individuellen Risikosituation eines Instituts entsprechen, zielt Säule 2 darauf ab, Banken zur Entwicklung und Verfeinerung eigener Methoden zur Messung und Steuerung ihrer spezifischen Risiken zu ermutigen. Von der Beurteilung dieser Methoden kann es die jeweilige Bankenaufsicht abhängig machen, ggf. über die Mindesteigenanforderung der Säule 1 hinauszugehen. Um den Marktteilnehmern die Möglichkeit zur Beurteilung und zum Vergleich der Risiken verschiedener Banken zu gewähren, fordert Säule 3 zudem die Offenlegung sowohl des eingegangenen qualitativen als auch des quantitativen Risikos. Auf diese Weise wird für die Institute ein Anreiz geschaffen, durch Risikominimierung einen Wettbewerbsvorteil zu erzielen.

Im Zentrum der durch Basel II definierten Anforderungen steht damit das Problem der *Risikoquantifizierung*. Zu diesem Zweck sind gemäß Säule 2 bankinterne, auf die individuelle Risikoexposition des Instituts zugeschnittene Verfahren und Methoden ausdrücklich erwünscht und auch selbst Gegenstand des aufsichtsrechtlichen Prüfungsverfahrens. Für das spezifische Risiko von Bausparkassen spielt sicherlich das kollektive Geschäft mit seinen langfristigen Festzinsvereinbarungen und Optionen eine zentrale Rolle [Ber99, BEHR03]. Mangels konkreter aufsichtsrechtlicher Vorgaben über die Art und Weise, wie das aus dem kollektiven Geschäft einer Bausparkasse resultierende Risiko zu bewerten ist sowie der in Säule 2 verlangten Nutzung spezieller Risikomodelle, besteht in diesem Punkt für die Bausparkassen Handlungsbedarf.

Zur Risikobewertung des kollektiven Geschäfts sind Simulationen, die ausgehend von subjektiv festgelegten Szenarien und durch Expertenwissen abgeleiteten Simulationsparametern durchgeführt wurden, kritisch zu betrachten. Diese gewähren zwar unter Berücksichtigung diverser Szenarien Einblicke in mögliche künftige Kollektiventwicklungen auch unter Risikogesichtspunkten, erlauben aber letztendlich keine Aussage über die Wahrscheinlichkeiten solcher Entwicklungen. Da sich Simulationsmodelle zur Kollektivprognose aber bewährt haben, bietet eine Erweiterung solcher Modelle zur Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen den natürlichen Ansatzpunkt zur Bestimmung der sich aus dem kollektiven Geschäft ergebenden Risiken. Statt subjektiv vorgegebener Szenarien werden nur noch die in der Realität statistisch feststellbaren Verteilungseigenschaften für die ein Szenario definierenden exogenen Variablen vorgegeben. Auf diese Weise wird die Dynamik der Märkte mit der inneren Dynamik des Bausparkollektivs verknüpft, so dass auch Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Kollektiventwicklungen möglich werden.

Genau dieser Ansatz wird in dieser Arbeit verfolgt. Der Schwerpunkt liegt hierbei weniger auf der Ermittlung einer speziellen Risikokennzahl als vielmehr auf der automatischen Generierung von Szenarien für die anschließenden Kollektivsimulatio-

nen. Als Resultat erhalten wir nach hinreichend vielen Simulationsläufen empirische Verteilungen der einzelnen Kollektivgrößen, die der Ausgangspunkt für die Ableitung konkreter Kennzahlen für verschiedene Risikoarten sind. Als Datengrundlage für das zu entwickelnde Modell liegen die (verfremdeten) Einzelvertragsdaten eines realen Bausparkollektivs vor, die für alle hier dargestellten Datenanalysen und Simulationen verwendet werden. Somit kann die Modellierung auf Plausibilität und Realitätsnähe detailliert überprüft werden.

Aus dem Modellansatz ergibt sich für diese Arbeit folgende Struktur:

In Kapitel 2 wird zunächst ein Überblick über das Bausparen sowie die Prinzipien einiger Kollektivsimulationsmodelle gegeben, bevor das Konzept und die möglichen Einsatzzwecke des zu entwickelnden Gesamtmodells näher erläutert werden. Hierzu wird dargestellt, welche exogenen Variablen in welcher Weise Einfluss auf das Bausparkollektiv nehmen. Da es auch für die bislang durchgeführten Kollektivsimulationen notwendig war, Prämissen über die Entwicklung dieser Variablen als Szenario vorzugeben, sind diese im Wesentlichen bekannt. Es handelt sich hauptsächlich um die Entwicklung der Marktzinsen und des Neugeschäfts.

Ziel des Kapitels 3 ist die Modellierung der Reaktion des Bausparkollektivs auf Veränderungen der Marktzinsen. Diese Reaktionen betreffen hauptsächlich das Darlehensverzichts- und Tilgungsverhalten. Da im Gesamtmodell Szenarien in großer Zahl automatisch generiert werden sollen, müssen entsprechende Simulationsparameter ebenfalls automatisch aus den Prämissen über die Zinsentwicklung des jeweiligen Szenarios bestimmt werden.

In den beiden folgenden Kapiteln werden die ein Szenario definierenden exogenen Variablen, Marktzins- (Kapitel 4) und Neugeschäftsentwicklung (Kapitel 5), stochastisch modelliert. Die Modellierung der Marktzinsen erfolgt hierbei durch ein klassisches, aus der Literatur bekanntes Zinsmodell, dem Modell von Cox, Ingersoll und Ross [CIR85]. Für die Modellierung des Neugeschäfts wählen wir dagegen einen sehr viel allgemeineren, auf Hidden-Markov-Modellen basierenden Ansatz.

Nachdem damit alle notwendigen Komponenten sowohl zur Generierung von Szenarien als auch zur Ableitung jeweils adäquater Simulationsparameter vorhanden sind, wird in Kapitel 6 das Modell zur Durchführung von Kollektivsimulationen weiter vervollständigt und anhand der realen Kollektivdaten validiert. Danach wird für das Beispielkollektiv exemplarisch eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt und die gewonnenen Resultate zu empirischen Verteilungen verdichtet dargestellt und diskutiert. Abschließend findet in Kapitel 7 eine kritische Würdigung des entwickelten Modells statt. Anhand der zu nennenden Kritikpunkte werden Ansätze für eine Weiterentwicklung des Modells aufgezeigt.

Kapitel 2

Modellgrundlagen

In diesem Kapitel werden in Abschnitt 2.1 die Grundbegriffe des Bausparens dargestellt. Auf die kurze Beschreibung des Ablaufs eines Bausparvertrags und der Optionsmöglichkeiten, die sich darin für die Bausparer ergeben, folgt die Darstellung der grundlegenden Funktionsweisen einiger Kollektivsimulationsmodelle.

Hierauf aufbauend wird in Abschnitt 2.2 das Grundkonzept des in dieser Arbeit entwickelten Modells vorgestellt, um in Abschnitt 2.3 anhand konkreter Fragestellungen die Einsatzmöglichkeiten eines solchen Modells zu diskutieren.

2.1 Grundbegriffe des Bausparens

Die Grundidee des Bausparens lässt sich anhand seiner historischen Entwicklung gut darlegen. Nach dem ersten Weltkrieg erlebte das Bausparen in Deutschland seinen Durchbruch, obgleich die erste deutsche Bausparkasse bereits 1885 gegründet worden war. Die Ursache für diesen Durchbruch gründete sich einerseits auf die Notwendigkeit, zum Wiederaufbau notwendige Mittel für den Wohnungsbau bereitzustellen, auf der anderen Seite aber auch auf die Schwierigkeit – insbesondere für Privatleute – Fremdkapital zu beschaffen [Bun02]. Vor diesem Hintergrund sei die Idee des kollektiven Bausparens an folgendem, aus [Lau93] entnommenen, hypothetischen Beispiel erläutert:

Beispiel 2.1 *Angenommen, ein Interessent für den Bau oder Kauf eines Hauses kann p. a. 10% des erforderlichen Betrages (im Folgenden Bausparsumme genannt) sparen. Ohne Berücksichtigung von Zinseffekten und unter Ausschluss der Möglichkeit einer Kreditaufnahme am Kapitalmarkt muss der Interessent damit offenbar 10 Jahre sparen, bis er das Wohnhaus erwerben kann.*

Schließt sich der Interessent nun aber mit neun weiteren Bausparern mit demselben Sparziel und der gleichen Sparkraft zu einem (geschlossenen) Bausparkollektiv zusammen, so ist bereits nach einem Jahr die volle Bausparsumme zusammengekommen, so dass der erste Bausparer zugeteilt werden kann und ihm die volle Bausparsumme

ausgezahlt wird. Der Bausparer zahlt weiterhin 10% dieser Bausparsumme im Jahr, nun allerdings als Tilgung. Im nächsten Jahr wird ein weiterer Bausparer zugeteilt usw. Zwar muss der zuletzt zugeteilte Bausparer immer noch volle 10 Jahre auf den Erwerb des Wohnhauses warten, allerdings hat ihm der Zusammenschluss mit den anderen Bausparern doch immerhin die Chance gebracht, früher zugeteilt zu werden. Im Schnitt muss ein Bausparer aber nur noch 5,5 statt bisher 10 Jahre bis zur Verfügbarkeit der vollen Bausparsumme warten.

Der wichtigste Unterschied zwischen dem Beispielkollektiv und heutigen Bausparkollektiven besteht sicher darin, dass heutige Kollektive offen für Neuzugänge sind (daher *offenes Kollektiv* genannt). Zudem wird sowohl das Guthaben als auch das Darlehen verzinst, und die Zuteilung ist insoweit anders geregelt, als Bausparer mit gleicher Sparleistung i. Allg. auch nach derselben Zeit zugeteilt werden und das gleiche Darlehen erhalten. Die Vorteile des Selbsthilfesystems Bausparen bleiben jedoch in dem Sinne bestehen, dass dem Bausparer bereits zum Zeitpunkt des Abschlusses feste, i. d. R. niedrige Guthaben- und Darlehenszinsen garantiert werden können und zwar unabhängig von der Zinsentwicklung auf dem Kapitalmarkt.

2.1.1 Ablauf eines Bausparvertrags

Da dieser Grundidee entsprechend ein Bausparer dem Kollektiv seine Spareinlagen erst zu einem festen Zinssatz leihen muss, um hierdurch einen Anspruch auf ein ebenfalls festverzinsliches Darlehen zu gewinnen, gliedert sich der (idealtypische) Ablauf eines Bausparvertrags in folgende drei Phasen (s. auch Abb. 2.1):

Sparphase: Zunächst schließt der Bausparer in dem von ihm gewählten Tarif einen Bausparvertrag über eine bestimmte Bausparsumme ab. Die *Bausparsumme* entspricht dem Betrag, über den der Bausparer zum Zeitpunkt der Zuteilung verfügen will und kann im Verlauf der Sparphase vom Bausparer noch erhöht oder ermäßigt werden. Der Bausparer spart nun ein Guthaben an, welches mit einem in den Tarifbedingungen festgeschriebenen Zinssatz verzinst wird. Obgleich in den ABB Sparraten genannt sind, ist der Bausparer relativ frei darin, wie hoch er seine Spareinzahlungen wählt. Grundsätzlich ist die Bausparkasse allerdings gemäß Muster-ABB in [Bun02] berechtigt, Sonderzahlungen oberhalb der tariflichen Sparrate abzulehnen.

Zuteilungsphase: Sobald ein Bausparvertrag die tariflichen Zuteilungsbedingungen erfüllt hat, kann dieser zugeteilt werden. Zuteilungsbedingungen sind i. d. R. die Erreichung eines bestimmten Mindestanspargrades (häufig 40 oder 50 % der Bausparsumme), das Verstreichen einer Mindestwartezeit nach Vertragsabschluss sowie die Erzielung einer bestimmten Bewertungszahl. Die Bewertungszahl spiegelt die Dauer und die Höhe des dem Kollektiv zur Verfügung gestellten Guthabens wider. Die Zielbewertungszahl, also die Bewertungszahl, ab der ein

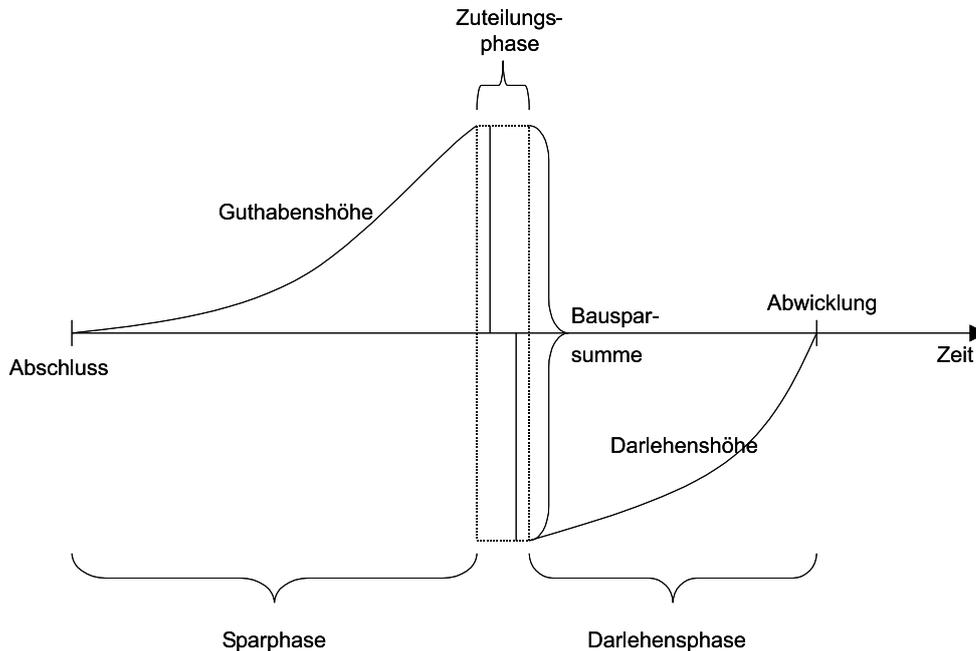


Abbildung 2.1: Typischer Ablauf eines Bausparvertrags

Vertrag zugeteilt wird, kann von der Kasse in Abhängigkeit von den zur Zuteilung zur Verfügung stehenden sowie den nachgefragten Bausparmitteln variiert werden. Der Bausparer kann sich nun die volle Bausparsumme auszahlen lassen.¹

Tilgungsphase: Mit der Auszahlung des Darlehens beginnt die Tilgungsphase. Die Höhe des Darlehens ergibt sich ohne Gebühren, Agio oder Disagio als Differenz zwischen Bausparsumme und Guthaben bei Zuteilung. Hierbei muss der Bausparer monatlich einen bestimmten, an der Bausparsumme orientierten Tilgungsbeitrag leisten bis das Darlehen getilgt und der Bausparvertrag abgewickelt ist. Die für das Darlehen anfallenden Zinsen sind ebenso wie die Guthabenzinsen von vorneherein in dem jeweiligen Tarif festgeschrieben.

Der tatsächliche Verlauf eines Bausparvertrags kann in der Realität allerdings erheblich von dem oben dargestellten typischen Verlauf abweichen. Die Ursache liegt in den Freiheitsgraden und Wahlrechten, die den Bausparern durch die Tarife zugestanden

¹Unter dem Stichwort Wahlzuteilung existieren im Gegensatz zu diesem Verfahren mittlerweile auch einige Tarife, die der Bausparer jederzeit zuteilen lassen kann. In diesem Fall bestimmt die Sparleistung nicht den Zuteilungszeitpunkt, sondern die Höhe des Darlehensanspruchs. Ein Vertreter dieser Tarifart ist z. B. der R66 der Allianz Dresdener Bauspar AG

werden. Neben dem bereits erwähnten, weitgehend beliebigen Sparverhalten, seien die wichtigsten hier genannt:

Kündigung: Ein Bausparvertrag kann zu jedem Zeitpunkt der Sparphase unter Einhaltung bestimmter Fristen gekündigt werden. In diesem Fall erhält der Bausparer sein verzinstes Guthaben ausgezahlt.

Fortsetzung: Erfüllt ein Bausparvertrag alle Zuteilungsbedingungen, so kann der Bausparer zunächst auf die Zuteilung verzichten und in der Sparphase verharren. Zu einem späteren Zeitpunkt kann er seine Zuteilung *wiedergeltend* machen und wird von der Bausparkasse zeitnah zugeteilt.

Auszahlungsverschiebe: Mit der Zuteilung ist der Bausparer keineswegs verpflichtet, sich die gesamte Bausparsumme sofort auszahlen zu lassen. Guthaben und Darlehen können auch zu verschiedenen Zeitpunkten ausgezahlt werden. Laut §9 Muster-ABB in [Bun02] bleibt der Anspruch auf das Darlehen wenigstens noch zwei Jahre nach Zuteilung bestehen. In der Praxis ist festzustellen, dass Darlehensauszahlungsverschiebe von Jahren keine Seltenheit sind. Hierbei können von der Bausparkasse allerdings Bereithaltungszinsen erhoben werden, was aber häufig nicht praktiziert wird.

Darlehensverzicht: Nach der Zuteilung muss der Bausparer das ihm zustehende Darlehen nicht in Anspruch nehmen, sondern kann ganz oder teilweise darauf verzichten. Dieser Fall trifft häufig in Tarifen zu, die hohe Guthaben- und Darlehenszinsen vorsehen. In diesem Fall sind die Bausparer entweder von vorneherein nicht an einem Darlehen interessiert oder finden auf dem Kapitalmarkt bessere Darlehenskonditionen. Ebenso wie bei der Darlehensauszahlung kann sich der Bausparer mit der Entscheidung über Darlehensannahme oder Darlehensverzicht mindestens zwei Jahre Zeit lassen.

Sondertilgung: Der Bausparer ist durch den jeweiligen Tarif verpflichtet, sein Darlehen mit einem bestimmten monatlichen Mindesttilgungsbeitrag zu bedienen. Er kann aber auch ohne Vorfälligkeitsentschädigung höhere Tilgungsbeiträge leisten. In der Regel finden solche Sondertilgungen nicht in Form eines erhöhten monatlichen Tilgungsbeitrages sondern als Ablösung des gesamten Restdarlehens statt.

Tatsächlich wird in der Praxis von diesen Optionen sehr häufig Gebrauch gemacht, so dass der idealtypische Verlauf keineswegs die Regel ist.

2.1.2 Anforderungen an die Kollektivsteuerung

Aus obiger Darstellung der möglichen Verläufe von Bausparverträgen können wir schon einige Punkte ableiten, die potentielle Risikofaktoren für die Liquidität und den

Ertrag einer Bausparkasse darstellen. Zu diesen Unsicherheitsfaktoren zählen im Einzelnen:

- Im offenen Kollektiv (s. Abschnitt 2.1) müssen durch den Vorlauf der Sparphase die Darlehen der zugeteilten Verträge durch die Einlagen der später durch Neuabschluss in die Sparphase eingetretenen Verträge refinanziert werden. Damit kommt insbesondere dem künftigen Neugeschäft eine wichtige Rolle zu. Ist dieses z. B. zu niedrig, so können die Bauspardarlehen u. U. nicht mehr vollständig über die Bauspareinlagen refinanziert werden. Eine alternative Mittelbeschaffung auf dem Kapitalmarkt würde so bei tariflichen Guthabenzinsen unter Marktzinsniveau zu erheblichen Zusatzaufwendungen führen.
- Die Bausparkasse gesteht ihren Kunden zahlreiche Optionen zu und begibt sich hierdurch in die Stillhalter-Position. Es ist klar, dass bestimmte Bausparer ihre Optionen je nach Entwicklung auf dem Kapitalmarkt zu ihrem eigenen Nutzen verwenden und sich dies nachteilig auf den Ertrag der Bausparkasse auswirkt. Zu den eindeutig marktzinsniveauabhängigen Optionen zählen sicherlich Darlehensverzichte und Sondertilgungen [Ber99, Wei99, Haf99, Cie02].
- Hinzu kommen kollektivinterne Unsicherheitsfaktoren. Nicht alle Optionsausübungen lassen sich vollständig aus exogenen Faktoren erklären. Die umfangreichen Freiheiten der Bausparer bei ihrem Spar-, Kündigungs-, Fortsetzungs- und Auszahlungsverhalten führen zu einer weiteren Verunsicherung der künftigen kollektiven Zahlungsströme.

Es ist damit offensichtlich, dass sich Ein- und Auszahlungen im Kollektiv i. d. R. nicht die Waage halten. Da die Summe der Bauspareinlagen üblicherweise die der Bauspardarlehen übersteigt, werden die überschüssigen Mittel von der Bausparkasse am Kapitalmarkt angelegt. Dennoch muss die Bausparkasse stets die liquiden Mittel bereithalten, um die anstehenden Auszahlungen aus Zuteilung und Kündigung bestreiten zu können. Für die Bausparkasse besteht damit das Problem, überschüssige kollektive Mittel am Markt möglichst gewinnbringend anzulegen, bei Bedarf aber wieder rechtzeitig in das Kollektiv zurückzuführen bzw. am Markt zwischenzufinanzieren. Kollektivsimulationsmodelle unterstützen diese Planung durch die Prognose zukünftiger kollektiver Zahlungsströme bei Zugrundelegung bestimmter Szenarien.

Daneben müssen die Auswirkungen der Neugestaltung bzw. Änderung von Tarifen untersucht werden. Da in Simulationsmodellen das Zusammenwirken aller Tarifparameter genau abgebildet werden kann, erlauben diese auch Aussagen über die Auswirkungen auf das Kollektiv, wenn sich diese verändern.

Der Nutzen von Kollektivsimulationsmodellen wird durch deren Anerkennung und Einbindung in aufsichtsrechtliche Normen seitens der BaFin abgerundet. Die Ergebnisse von Kollektivsimulationen dienen damit nicht nur als Planungs- sondern auch als Genehmigungsgrundlage geschäftlicher Entscheidungen im oben genannten Anwendungskontext.

2.1.3 Funktionsweisen ausgewählter Kollektivsimulationsmodelle

Wir stellen nun die prinzipiellen Funktionsweisen einiger Kollektivsimulationsmodelle in der Reihenfolge ihrer zeitlichen Entwicklung vor:

Schichtenmodell: Das in [Got85] beschriebene Modell basiert auf durch Erfahrungswerte gewonnenen, typischen Verhaltensmustern für den Ablauf eines Bausparvertrags vom Abschluss bis zur vollständigen Tilgung, den so genannten Schichten². Als Generalannahme geht man davon aus, dass sich das gesamte Kollektiv aus solchen Schichten zusammensetzt und versucht nun, in der Vergangenheit beobachtete kollektive Kenngrößen mit dem Modell dadurch möglichst gut zu reproduzieren, indem man die Anteile der einzelnen Schichten am historischen Neugeschäft geeignet wählt (Bestandsanpassung). Unter Verwendung dieser Anteile lässt sich das Kollektiv fortschreiben. Durch Variation künftiger Neugeschäftsanteile können Szenarien simuliert werden.

Der Hauptvorteil des Modells liegt in den geringen Anforderungen an das zugrunde liegende Datenmaterial, da lediglich Kollektivaggregate und keine Einzelvertragsdaten benötigt werden. Die vereinfachte Sichtweise des Modells führt aber auf der anderen Seite auch zu Problemen [BBDW93]. So ist die bei der Bestandsanpassung durchgeführte Optimierung nicht zwangsläufig eindeutig, da unterschiedliche Kollektive die gleichen Kollektivaggregate erzeugen können. Zum anderen ist das Modell schlecht steuerbar, so dass die Hauptaussagekraft des Modells eher in langfristigen Prognosen bis hin zum Beharrungszustand liegt.

Mikrosimulationsmodell: Zur Behebung dieser Nachteile wurde das Mikrosimulationsmodell entwickelt. Das in [Kel92, BBDW93, Van96] beschriebene Modell basiert im Gegensatz zum Schichtenmodell auf Einzelvertragsdaten, die zu so genannten „Superkonten“ verknüpft, Informationen über die Entwicklung jedes einzelnen Bausparvertrags im Zeitverlauf enthalten.

Anhand vorhandener Merkmale einzelner Verträge werden mittels Clusteranalyse Gruppen gebildet und Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die verschiedenen Aktionen (z. B. Durchführung einer Kündigung, Fortsetzung, Sondertilgung etc.) innerhalb dieser Gruppen ermittelt. Ein einzelner Vertrag wird dadurch simuliert, dass er in jedem Zeitschritt der jeweils passenden Gruppe zugeordnet wird und mit der jeweiligen, der Gruppe eigenen Wahrscheinlichkeit, eine Aktion zufällig durchführt oder nicht. Auf diese Weise werden sowohl alle Verträge des Bestands als auch die des zusätzlich generierten Neugeschäfts einzeln simu-

²Leider ist die Terminologie in den hier beschriebenen Modellen nicht einheitlich. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird der Begriff Schicht mit einer andere Bedeutung verwendet, so dass sich diese Bedeutung nur auf die Beschreibung des Schichtenmodells bezieht.

liert. Die kollektiven Kenngrößen werden durch Summation über alle Verträge ermittelt.

NBI: Das in [KSW⁺97] vorgestellte und im praktischen Einsatz weiterentwickelte Modell NBI³ basiert ebenso wie das Mikrosimulationsmodell auf Einzelvertragsdaten im Zeitverlauf, arbeitet im Gegensatz zu diesem aber deterministisch. Anhand dieser Daten werden typische Sparmuster gebildet, die so genannten *Prototypen*. Diese werden durch Untersuchung des Sparverhaltens im Zeitverlauf mittels Clusteranalyse ermittelt. Um möglichst repräsentative und auch für andere Kollektive einsetzbare prototypische Sparmuster zu erhalten, wird dieser Schritt anhand der Vertragsdaten einer Kasse mit weit zurückreichender Datengrundlage durchgeführt. Die Prototypen müssen zur vollständigen Abbildung des Sparerverhaltens noch zu *Schichtmustern* erweitert werden, indem jedes prototypische Sparmuster um die zusätzlich zum Sparverhalten möglichen Sparreaktionen (z. B. Kündigung, Fortsetzung, Darlehensverzicht etc.) ergänzt wird. Zur Durchführung einer Kollektivsimulation werden die Einzelverträge eines Bestands einem bestimmten Schichtmuster dadurch zugeordnet, dass das Schichtmuster gewählt wird, dessen prototypisches Sparmuster den geringsten Abstand zu dem bisher sichtbaren Sparverhalten des Vertrags aufweist. Als Abstandsmaß kommt hierbei dasselbe Maß wie bei der Clusterung zum Einsatz. Bei gegebener Zuordnung lassen sich für jedes Schichtmuster aus den Einzelvertragsdaten Aktionsanteile und Verschiebe für die Inanspruchnahme der verschiedenen Optionen gewinnen, die sich im Verlauf der Simulation je nach Szenario noch variieren lassen.

Anhand der Zuordnung werden nun die Einzelverträge zu einem Simulationsbestand aggregiert und können auf Grund des im Schichtmuster definierten prototypischen Sparverhaltens und der aus den Daten gewonnenen Aktionsanteile deterministisch – einschließlich eines vorzugebenden Neugeschäfts – fortgerechnet werden.

Von den hier vorgestellten Modellen stellt das Modell NBI derzeit das bewährteste dar. Es entspricht den Mindestanforderungen der BaFin für Kollektivsimulationsmodelle und befindet sich bereits seit einigen Jahren im praktischen Einsatz. Sein Hauptvorteil besteht im Wesentlichen im deterministischen Simulationskern, der die baupartechnisch korrekte Simulation von Schichtmustern unter exakter Berücksichtigung der jeweiligen Tarifparameter erlaubt. Aus den jeweils vorliegenden Prämissen über die exogenen Variablen lassen sich geeignete Simulationsparameter ableiten, die zudem im Zeitverlauf auch gut zu steuern sind. Auf diese Weise können sich die Auswirkungen eines Szenarios auf das Kollektiv genau untersucht werden.

³Die Abkürzung NBI steht für „Neuprogrammierung des baupartechnischen Instrumentariums“.

Hidden-Markov-Bausparmodell: Dem in [Kna00, Wic01] entwickelten Modell liegt der Gedanke zu Grunde, statt deterministischer Schichtmuster Hidden-Markov-Modelle (HMM)⁴ zu verwenden. In einem ersten Schritt werden aus den vorhandenen Einzelvertragsdaten im Zeitverlauf Trainingssequenzen gewonnen, die mit Hilfe von HMM geclustert werden. Verschiedene HMM dienen anschließend als prototypische Repräsentanten für eine größere Gruppe von Verträgen, mit deren Sequenzen das jeweilige Modell trainiert wurde. Die Simulation erfolgt durch Bestimmung eines HMM für jeden Vertrag, für das es am wahrscheinlichsten ist, dass dieses HMM die Sequenz des betrachteten Vertrags bis zum aktuellen Zeitpunkt ausgegeben hat. Die Sequenz des Vertrags kann nun durch das HMM verlängert werden, wodurch bei Betrachtung aller Verträge und eines bestimmten Neugeschäfts die stochastische Fortschreibung des ganzen Kollektivs zustande kommt.

Die hier dargestellten Modelle dienen der Durchführung einzelner Szenariosimulationen, wobei für jedes Szenario die entsprechenden Simulationsparameter vom Benutzer auf der Basis des von ihm bestimmten Szenarios geschätzt werden müssen. Wir erhalten auf diese Weise für ein gegebenes Szenario die Entwicklung der Kollektivgrößen im Zeitverlauf.

2.2 Herleitung des Modellkonzepts

Das Ziel des hier zu konzipierenden Modells besteht im Gegensatz zu den oben beschriebenen Modellen darin, für die Kollektivgrößen Verteilungen im Zeitverlauf zu berechnen, um auf dieser Basis die aus dem kollektiven Geschäft resultierenden Risiken einer Bausparkasse zu bestimmen.

Wir gehen in diesem Abschnitt daher zunächst auf einige konkrete Risikoarten ein, die für Banken bzw. Bausparkassen relevant sind, um anschließend eine grobe Klassifikation von Risikomodellen vorzustellen. Anhand dieser Klassifikation begründen wir die Wahl der Monte-Carlo-Simulationsmethode, bevor wir erläutern, welche ein Szenario definierenden exogenen Variablen auf welche Weise Einfluss auf das Bausparkollektiv nehmen und daher stochastisch modelliert werden müssen. Danach werden die einzelnen Module des Gesamtmodells in ihrem Zusammenhang vorgestellt.

2.2.1 Risikoarten

In [Jor97] werden verschiedene Arten von Finanzrisiken genannt, die zentral für das Risiko von Banken und damit auch von Bausparkassen sind. Hierzu zählen:

⁴Genauere Ausführungen zu Hidden-Markov-Modellen befinden sich in Kapitel 5.

Marktrisiken: Diese entstehen durch Preisänderungen auf den Finanzmärkten, beispielsweise durch Kursschwankungen auf den Aktien- und Devisenmärkten oder auch durch Zinsänderungen.

Kreditrisiken: Hierunter wird die Möglichkeit verstanden, dass ein Vertragspartner unwillig oder unfähig wird, seinen Zahlungsverpflichtungen nachzukommen.

Liquiditätsrisiken: In Umkehrung dazu besteht das Liquiditätsrisiko in der Gefahr, dass die Bank selbst ihren eigenen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen kann.

Betriebsrisiken: Diese fassen die Gefahr menschlichen oder technischen Versagens zusammen. Auch das Risiko, das von fehlerhaften Risikomodellen ausgeht, ist unter diese Risikoart zu subsumieren.

Rechtliche Risiken: Hiermit sind solche Risiken gemeint, die durch Gesetzgebung, aufsichtsrechtliche Maßnahmen oder Rechtsprechung entstehen.

Die durch die unsicheren Zahlungsströme des Kollektivs bedingten Risiken sind nicht einer Risikoart alleine zuzurechnen. Sie betreffen von den genannten Risikoarten im Wesentlichen das Zinsänderungsrisiko als Spezialfall des Marktrisikos und das Liquiditätsrisiko, wie wir in Abschnitt 2.3 darlegen werden.

2.2.2 Risikomodelle

Abhängig von der Risikoart und dem Risikomaß existieren in der Literatur verschiedene Analyseinstrumente und Klassen von Risikomodellen.

In [Rea98] wird eine grobe Systematisierung von Modellen zur Bestimmung des *Value-at-Risk* (s. Abschnitt 2.3.2, Definition 2.1) vorgestellt, die grundsätzlich auch im Zusammenhang mit der Zielsetzung dieser Arbeit verwendet werden kann und in Abbildung 2.2 dargestellt ist.

Bei *parametrischen Modellen* wird für die interessierende stochastische Größe eine bestimmte Verteilung angenommen bzw. gefolgert und anschließend die Verteilungsparameter bestimmt. Anhand dieser Verteilung können Risikokennzahlen ermittelt werden. Parametrische Modelle spielen insbesondere bei der *Value-at-Risk*-Bestimmung eine wichtige Rolle [Rea98, Jor97], da diese z. B. bei Annahme einer Normalverteilung sehr leicht handhabbar sind.

Die Alternative zu diesen parametrischen Modellen stellen *Simulationsmodelle* dar. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die interessierende, risikobehaftete Größe abhängig ist von bestimmten, stochastischen Risikofaktoren, für die Szenarien vorgegeben oder generiert werden können. Der kausale Zusammenhang zwischen diesen im Szenario festgelegten modellexogenen Variablen und den modellendogenen Variablen wird in der Simulation möglichst exakt abgebildet und die interessierende Größe auf

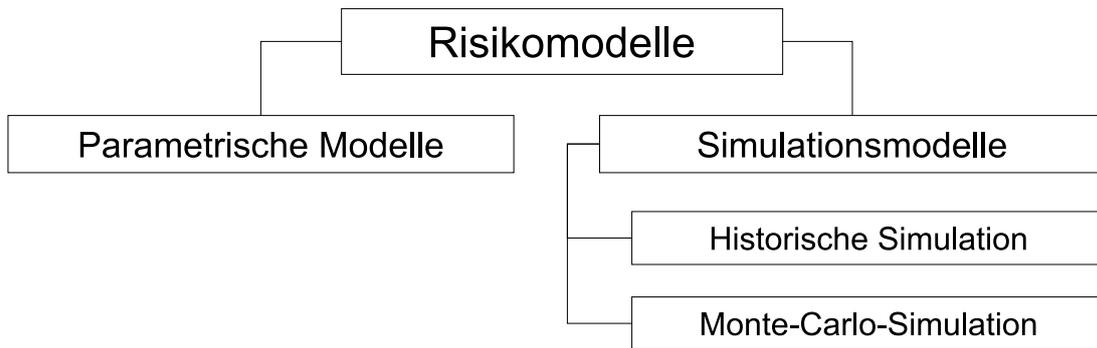


Abbildung 2.2: Systematisierung von Risikomodellen

diese Weise berechnet. Je nachdem, ob reale Szenarien der Vergangenheit verwendet werden oder Szenarien durch ein stochastisches Modell erzeugt werden, spricht man von einer *historischen* oder *Monte-Carlo-Simulation*.

Aufgrund der komplexen Zusammenhänge im Bausparkollektiv (s. Abschnitt 2.1.1) kommen für unsere Zwecke ausschließlich Simulationsmodelle in Betracht. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, die Risikobehaftung kollektiver Größen auch mit Hilfe der historischen Simulation zu analysieren. Hierdurch entfällt die Notwendigkeit von Submodellen zur stochastischen Generierung von Szenarien, was zu einer Verminderung des Gesamtaufwands und potentieller Fehlerquellen führt. Es werden hiermit auch nur Szenarien simuliert, die definitiv in der Vergangenheit aufgetreten sind, so dass diese unzweifelhaft durch eine hohe Realitätsnähe ausgezeichnet sind. Auf der anderen Seite werden aber Szenarien, die – obgleich nicht unrealistisch – in der Vergangenheit noch nie aufgetreten sind, von vorneherein ausgeschlossen.

Wir müssen die Möglichkeit der historischen Simulation als Modellansatz im Kontext dieser Arbeit allerdings ausschließen, da wir langfristige Szenarien benötigen und hierfür nicht über genügend viele historische Szenarien verfügen, um sinnvolle Aussagen über die Verteilung simulierter Kollektivgrößen treffen zu können. Damit bleibt als einzige Alternative die Wahl eines Monte-Carlo-Simulationsmodells, bei dem wir die zu simulierenden Szenarien von einem bzw. mehreren stochastischen Modellen erzeugen lassen. Der Vorteil von Monte-Carlo-Simulationsmodellen durch beliebig viele Szenarien zu signifikanten empirischen Verteilungen für die interessierenden Größen zu kommen, wird auf der anderen Seite allerdings durch einen erheblichen Rechenaufwand erkauft (s. Kapitel 6). Dennoch ist dieser Ansatz im Rahmen der Zielsetzung dieser Arbeit alternativlos, so dass wir die Szenarien generieren lassen müssen.

2.2.3 Exogene Variablen

Als exogene Variablen, die die Entwicklung des Kollektivs beeinflussen, und deren konkrete Vorgaben bzw. Prämissen jeweils ein Szenario definieren, betrachten und erläutern wir nachfolgend sowohl die Marktzinsentwicklung als auch das künftige Neugeschäft.⁵

Marktzinsen

Obgleich die in den ABB zwischen Kunde und Bausparkasse bei Vertragsabschluss vereinbarten Zinssätze unabhängig von der Entwicklung der Zinsen auf dem Kapitalmarkt sind, beeinflusst diese das Bausparkollektiv dennoch erheblich. Dieser Einfluss entsteht hauptsächlich durch die Optionen des Darlehensverzichtes und der Sondertilgung:

Darlehensverzicht: Findet ein finanzierungswilliger Bausparer bei Zuteilung auf dem Kapitalmarkt ein Darlehensangebot mit dem Bauspardarlehen vergleichbaren Konditionen zu einem geringeren Zinssatz als den, der in seinem Tarif vereinbart ist, so ist es für den Bausparer von Vorteil, das auf dem Markt angebotene Darlehen zu nehmen und auf das Bauspardarlehen zu verzichten. Die Option Darlehensverzicht besitzt also einen Wert [Cie02]. In [Wei99] wird tatsächlich das Vorhandensein einer solchen *Vorteilhaftigkeitsgrenze* für Darlehensverzichte nachgewiesen: Liegen die Marktzinsen oberhalb des Zinses des Bauspardarlehens, so bleibt der Anteil der Darlehensverzichte auf niedrigem Niveau weitgehend konstant. Erst wenn die Marktzinsen diese Vorteilhaftigkeitsgrenze unterschreiten, steigt der Anteil der Darlehensverzichte deutlich mit sinkenden Marktzinsen an.

Als ein dem Zinssatz des Bauspardarlehens trotz einiger Einschränkungen vergleichbarer Marktzens wird in [Haf99] der auf 10 Jahre feste Hypothekenzins genannt. Die Einschränkung besteht im Wesentlichen in den folgenden Eigenschaften, die ein Bauspardarlehen von einem Hypothekenkredit unterscheidet:

- Bauspardarlehen erfordern vergleichsweise hohe Tilgungsbeiträge
- Sondertilgungen können auch ohne Vorfälligkeitsentschädigung geleistet werden
- Bauspardarlehen werden nachrangig abgesichert

Je nach persönlicher Situation des Bausparers können natürlich einzelne dieser Unterschiede einen Zinsvorteil überwiegen. Wir gehen im Folgenden aber davon aus, dass sich die Vor- und Nachteile beider Darlehensarten weitgehend kompensieren.

⁵Auch in [BEHR03] wird ein Szenario durch Vorgabe eines Marktzins- und eines Neugeschäftsszenarios definiert.

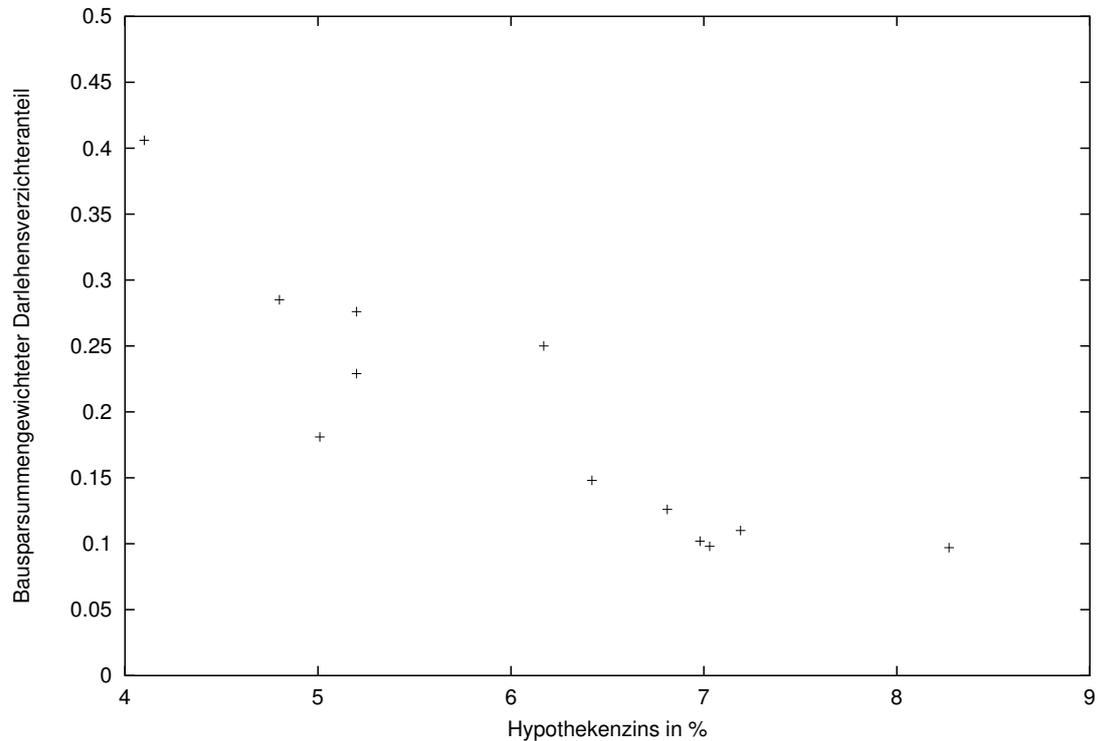


Abbildung 2.3: Darlehensverzichtsanteil in Abhängigkeit von den Hypothekenzinsen

Wir betrachten nun in Abbildung 2.3 die bausparsummengewichteten Darlehensverzichtsanteile pro Kalenderjahr zwischen 1992 und 2003 (zur Definition s. Abschnitt 3.1) im klassischen Finanzierertarif einer realen Bausparkasse⁶ in Abhängigkeit vom minimalen 10-Jahres-Hypothekenzins⁷ desselben Jahres. Diesen Zins betrachten wir im Fortgang der Arbeit als den dem Bauspardarlehenszins vergleichbaren Marktzinssatz. Der effektive Zinssatz des Bauspardarlehens beträgt in unserem Beispiel 5,43%. In der Abbildung wird der grundsätzliche Zusammenhang zwischen Darlehensverzichtsanteil und vergleichbarem Marktzins erkennbar, wenn auch die scharfe Trennung durch die Vorteilhaftigkeitsgrenze u. a. auf Grund der geringen zeitlichen Auflösung nicht klar sichtbar ist. Eine genauere Analyse der Abhängigkeit wird in Kapitel 3 gegeben.

⁶Einen solchen Tarif stellt z. B. der Tarif „Classic“ der Landesbausparkassen mit seinen Vorläufern und Nachfolgern dar. Private Bausparkassen bieten sehr ähnliche Tarife an.

⁷Quelle: Bundesbank, Zeitreihe SU0047. Es wird jeweils das Minimum der monatlich angegebenen Zinssätze eines Kalenderjahres verwendet. Der Wert für 2003 musste geschätzt werden. Zur weiteren Begründung der Wahl des minimalen Zinses s. Abschnitt 3.1.

Sondertilgung: Hat ein Bausparer erst einmal sein Bauspardarlehen in Anspruch genommen, so kann er immer noch von einer für ihn günstigen Marktzinsentwicklung profitieren. Abhängig von den am Markt herrschenden Zinsen ist nämlich auch, ob eine erhöhte Tilgungsleistung bis hin zu einer vollständigen Darlehensablösung für den Bausparer vorteilhaft ist oder nicht. Die Abhängigkeit zum Marktzins ist hier allerdings im Gegensatz zum Darlehensverzicht vielschichtiger [Bur98, Cie02]:

Fällt der Marktzins für ein dem Bauspardarlehen vergleichbares Darlehen unter den tariflich vereinbarten Zins, so bietet sich für den Bausparer eine Umschuldung an. Dieser *Umschuldungseffekt* ist dadurch gekennzeichnet, dass der Bausparer einen Kredit am Markt in Höhe seiner Restdarlehensschuld aufnimmt und sein Restdarlehen bei der Bausparkasse damit vollständig ablöst.

Bereits bevor die Hypothekenzinsen die Vorteilhaftigkeitsgrenze unterschreiten, greift üblicherweise der *Portfolioeffekt*. Stellt der Bausparer fest, dass die Guthabenzinsen auf dem Kapitalmarkt geringer sind als der Darlehenszins, den er für sein Bauspardarlehen zahlen muss, so ist es für den Bausparer günstiger, überschüssige Liquidität in eine erhöhte Tilgung zu stecken als zu Marktzinsen anzulegen. Da die Guthabenzinsen gemeinhin geringer sind als die Hypothekenzinsen, setzt dieser Effekt schon bei einem deutlich höheren Marktzinsniveau ein.

In der Abbildung 2.4 ist der bausparsummengewichtete Sondertilgungsanteil (zur Definition s. Abschnitt 3.1) pro Kalenderjahr im klassischen Finanzierertarif einer Bausparkasse bezogen auf den minimalen Zins für Sparbriefe mit vierjähriger Laufzeit⁸ desselben Jahres dargestellt. In Kapitel 3 befinden sich genauere Untersuchungen hierzu.

Neben diesen anerkannt marktzinsabhängigen und hochgradig relevanten Verhaltensweisen existieren aber noch weitere Optionsmöglichkeiten für die Bausparer, die je nach konkreten Tarifbedingungen marktzinsabhängig sein können. Die Vorteilhaftigkeit dieser nun erläuterten Optionen ist abhängig von dem Verhältnis zwischen den Guthabenzinsen auf dem Markt und den tariflichen Zinsen für Bauspareinlagen und tritt erst dann in Erscheinung, wenn die Marktzinsen für längerfristige Kapitalanlagen die Guthabenverzinsung des betrachteten Bauspartarifs unterschreitet.

Bausparkassen bieten spezielle Optionstarife an, bei denen der Bausparer sich bei Abschluss – aber auch noch später – für eine bestimmte Variante entscheiden kann, wobei diese Varianten im Wesentlichen durch verschieden hohe Verzinsungen des Guthabens und des Darlehens gekennzeichnet sind [Lau93]. Die Zinsen dieser Varianten liegen i. d. R. höher als die im jeweiligen Finanzierertarif der Kasse. Da die Guthaben-

⁸Quelle: Bundesbank, Zeitreihe SU0031. Es wird jeweils das Minimum der monatlich angegebenen Zinssätze eines Kalenderjahres verwendet. Der Wert für 2003 musste geschätzt werden. Zur weiteren Begründung der Wahl des minimalen Zinses s. Abschnitt 3.1.

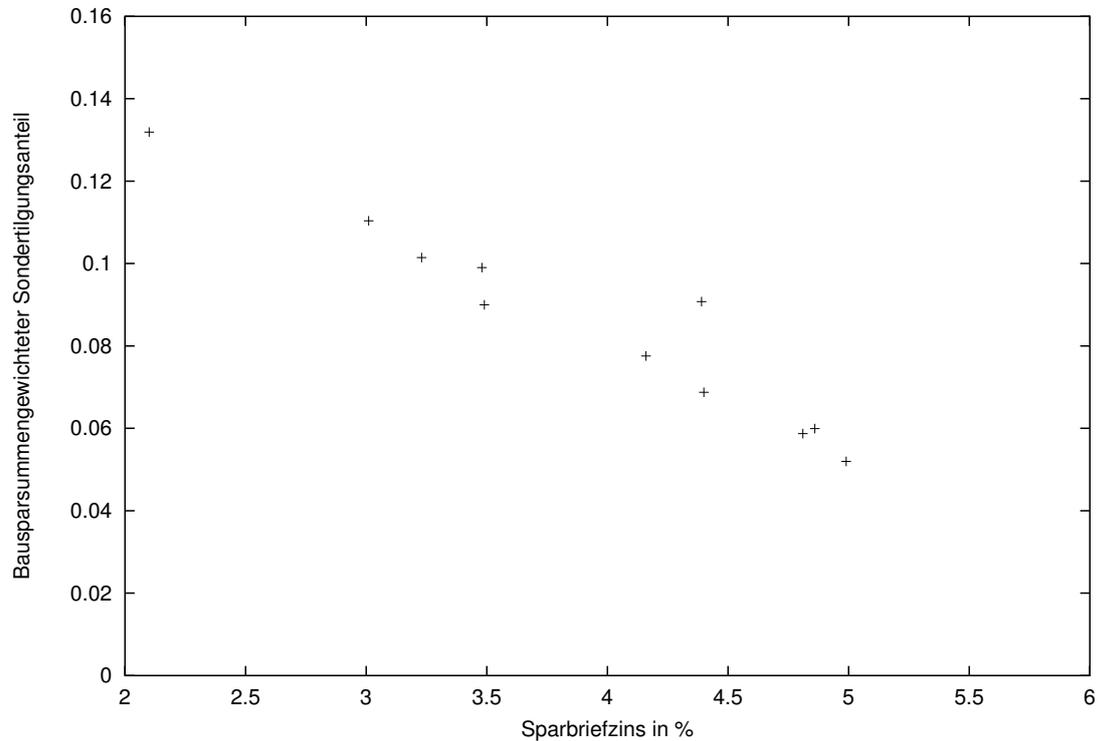


Abbildung 2.4: Sondertilgungsanteil in Abhängigkeit von den Sparbriefzinsen

verzinsung bei den meisten Varianten dieser Optionstarife geringer ist als die Sparzinsen für festverzinsliche Anlagen es jemals waren, ist die praktische Relevanz folgender marktzinsabhängiger Optionen weitgehend auf Hochzinsvarianten⁹ mit Guthabenverzinsungen um 4% beschränkt. Zu diesen Optionen zählen:

Variantenwahl bei Abschluss: In der Hochzinsvariante ist die Guthabenverzinsung zu einer Anlage am Kapitalmarkt für Privatleute je nach Marktzins konkurrenzfähig oder sogar vorteilhafter als diese. Bausparer ohne konkrete Finanzierungsabsicht schließen daher auf Grund der relativ hohen Rendite bei sinkenden Marktzinsen vermehrt Bausparverträge in dieser Variante ab. Dennoch bleibt den Bausparern die Möglichkeit erhalten, bei Bedarf durch einen späteren Variantenwechsel und dem damit verbundenen (Teil-) Verzicht auf den Bonus in den Genuss eines günstigen Bauspardarlehens zu kommen. In Abbildung 2.5 betrachten wir die Anteile der verschiedenen Varianten des Tarifs Vario am Gesamtneugeschäft dieses Optionstarifs in Abhängigkeit von den Sparbriefzinsen. Mit sinkenden Sparbriefzinsen steigt der Anteil der Hochzinsvariante Vario 3 mit 4%

⁹Für das Angebot der Landesbausparkassen wäre dies z. B. die Variante 3 des Vario-Tarifs („Vario 3“) mit maximal 4 % Guthabenverzinsung einschl. Bonus. S. hierzu auch den vorherigen Abschnitt.

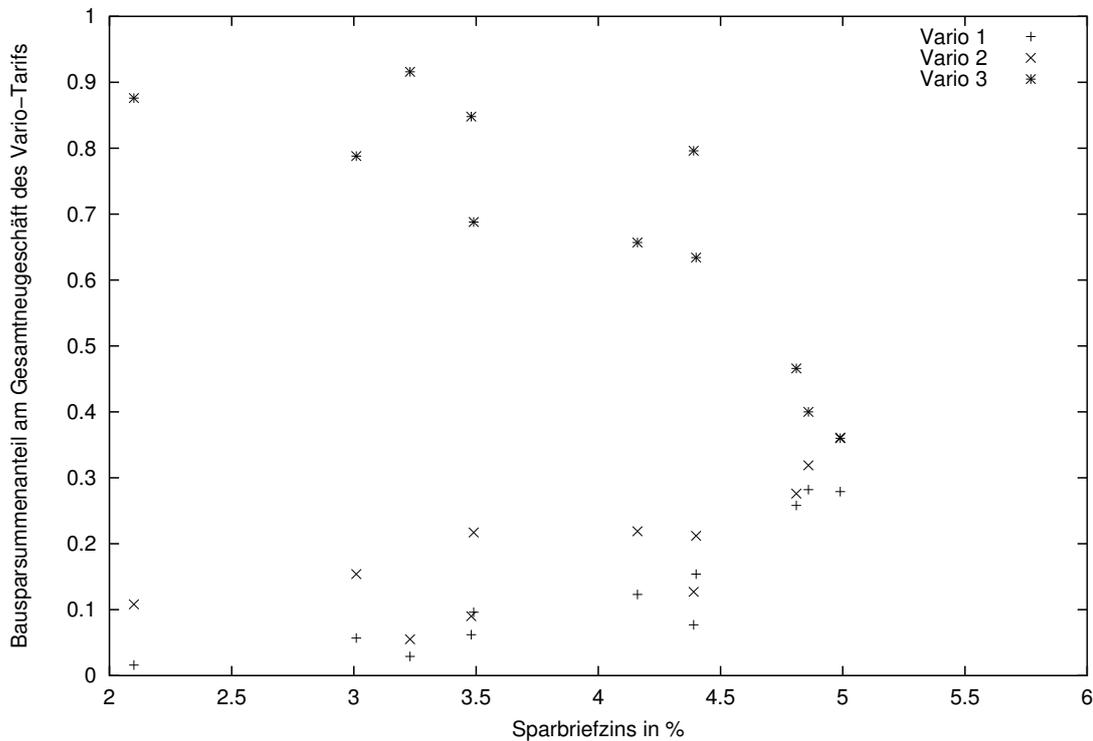


Abbildung 2.5: Anteil einzelner Vario-Varianten am Gesamtneugeschäft des Vario-Tarifs in Abhängigkeit von den Sparbriefzinsen

Guthabenzins einschließlich Bonus. Die Steigerung dieses Anteils geht zumindest teilweise auf die Kannibalisierung des Neugeschäfts der anderen Varianten zurück. Mit anhaltender Niedrigzinsphase tritt aber ein zusätzliches Neugeschäft durch Renditemaximierer hinzu, die nur auf Grund der relativ hohen Guthabenzinsung überhaupt einen Bausparvertrag abschließen.

Anders als bei den bisher genannten zinsabhängigen Optionen ist die Bausparkasse hier allerdings nicht hilflos, da sie den Verkauf solcher Hochzinsvarianten in Niedrigzinsphasen auch einstellen bzw. durch entsprechend geringer verzinsliche Varianten ersetzen kann. In der Praxis machen die Bausparkassen von diesen Möglichkeiten früher oder später auch tatsächlich Gebrauch, so dass die direkte Berücksichtigung der Marktzinsen aus der Modellierung der Gesamtneugeschäftshöhe ausgeschlossen werden kann (s. nächster Abschnitt).

Sparzahlungen: Um nach Abschluss auch tatsächlich in den Genuss der hohen Einlagenverzinsung zu gelangen, steigt in den Hochzinsvarianten die Sparintensität an. So werden von den Renditemaximierern hauptsächlich Soforteinzahlungen geleistet, aber auch die übrigen Bausparer neigen zu erhöhten Sparraten und

Zuzahlungen, so dass teilweise Guthaben weit jenseits des Mindestanspargrads erreicht werden.

Grundsätzlich besteht aber auch hier seitens der Bausparkasse eine Eingriffsmöglichkeit, da laut ABB die Bausparkasse die Annahme von Sonderzahlungen verweigern kann [Bun02]. Damit stellen die beiden zuletzt genannten „Optionen“ eigentlich keine Optionen im engeren Sinne dar, da die Bausparkasse nicht in der Stillhalter-Position verharren muss.

Kündigung: Analog zu der bisherigen Argumentation kann bei Sparern in der Hochzinsvariante auch davon ausgegangen werden, dass diese ihren Bausparvertrag nur noch dann kündigen, wenn diese das Guthaben zu Konsumzwecken verwenden wollen, sofern alternative festverzinsliche Anlagen zu Marktkonditionen keine höhere Rendite erbringen.

Entsprechende, allerdings relativ schwach ausgeprägte Abhängigkeiten lassen sich tatsächlich anhand der Realdaten feststellen.

Fortsetzung: Auch nach Erreichen der Zuteilungsbedingungen führt die relativ hohe Guthabenverzinsung dazu, dass viele Bausparer mangels besserer Anlagemöglichkeiten auf dem Kapitalmarkt die Sparphase fortsetzen bzw. selbst nach Zuteilung ihr Guthaben noch nicht abrufen.

Bei der Betrachtung der in diesem Abschnitt vorgestellten marktzinsabhängigen Optionen bleibt allerdings festzustellen, dass sich bei Weitem nicht alle Bausparer – aus den verschiedensten Gründen – vollständig rational bei der Ausübung ihrer tariflichen Optionen verhalten, auch wenn die Bausparer diese tendenziell schon zu ihrem Nutzen verwenden. Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zu den Optionen, die als Derivate auf den Finanzmärkten gehandelt werden. Die Optionen, die die Bausparkasse ihren Kunden gewährt, kosten sie mithin in der Summe deutlich weniger als sie eigentlich wert sind.

Insgesamt ergibt sich aus den in diesem Abschnitt gesammelten Erkenntnissen die Notwendigkeit, sowohl die Marktzinsen stochastisch zu modellieren als auch die Reaktion des Kollektivs in Form von Darlehensverzichten und Sondertilgungen geeignet abzubilden. Diese gehen anschließend als Simulationsparameter in die Szenarioberechnung ein. Daneben könnte man auch – wie oben dargelegt – für Hochzinsvarianten von Optionstarifen zusätzliche Reaktionen berücksichtigen.

Neugeschäft

Die zentrale Rolle des Neugeschäfts liegt in offenen Bausparkollektiven in der Tatsache begründet, dass dieses durch seine zukünftigen Sparzahlungen die kollektiven Refinanzierungsmittel für die spätere Darlehensphase des gegenwärtig in der Sparphase befindlichen Vertragsbestands bereitstellt (s. Abschnitt 2.1.2). Insofern ergibt nur die

Betrachtung simulierter kollektiver Zeitreihen einschließlich Neugeschäft zur Bewertung des kollektiven Geschäfts Sinn. Zudem werden die kollektiven Zahlungsströme mit zunehmender Simulationsdauer immer stärker von dem simulierten Neugeschäft bestimmt. Daher spielt insbesondere bei Kollektivsimulationen, die der Liquiditätsplanung dienen, die Wahl der Neugeschäftsvorgabe eine zentrale Rolle.

Grundsätzlich stellt sich die Frage, inwieweit die Gesamthöhe des Neugeschäfts nicht direkt selbst eine exogene Variable sondern vielmehr ein von mehreren exogenen Variablen abgeleiteter Parameter ist. In der Tat kann davon ausgegangen werden, dass die Höhe des Neugeschäfts einer Bausparkasse Resultat eines ganzen Bündels äußerer Einflüsse ist. Hierzu zählen insbesondere

- die gesamtwirtschaftliche Entwicklung,
- die Ausgestaltung der staatlichen Förderung des Bausparens,
- die horizontale und vertikale Konkurrenz auf dem Finanzmarkt und
- die Unternehmenspolitik.

Da diese Faktoren im Rahmen dieser Arbeit weder stochastisch modelliert werden können noch aus diesen Faktoren eine bestimmte Neugeschäftsentwicklung auf eindeutige Weise abzuleiten ist, werden wir die Neugeschäftsszenarien unmittelbar durch ein stochastisches Modell erzeugen lassen (s. Kapitel 5), in dem die oben genannten Einflüsse einschließlich bestimmter zeitlicher Restriktionen zumindest implizit berücksichtigt sind.

Für das Neugeschäft der Hochzinsvarianten in den Optionstarifen spielen zudem u. U. die Marktzinsen noch eine gewisse Rolle (s. vorheriger Abschnitt). Da das Neugeschäftsmodell die Gesamthöhe des Neugeschäfts über alle Tarife generieren soll, muss dieser Zusammenhang aber durch die Aufteilung des generierten Neugeschäfts auf die einzelnen Tarife berücksichtigt werden. Da wir uns in Kapitel 6 ausschließlich mit dem Finanziertarif der Beispielbausparkasse befassen, erübrigt sich dieses aber im Rahmen dieser Arbeit.

Weitere mögliche exogene Variablen

Wie in Abschnitt 2.1.1 gesehen, ist das Kollektiv noch weiteren zufälligen Einflüssen durch die Freiheiten der Bausparer beim Spar-, Kündigungs-, Fortsetzungs- und Auszahlungsverhalten ausgesetzt, die daher grundsätzlich auch als stochastisch zu modellierende exogene Variablen in Betracht kommen.

Im Rahmen dieser Arbeit verzichten wir aber auf eine stochastische Modellierung dieser Verhaltensmuster, da wir davon ausgehen, dass sich diese nur langfristig nennenswert verändern und kurzfristig nur schwach variieren. Wir unterstellen für das zu entwickelnde Modell daher der Einfachheit halber konstante Muster für diese Sparerverhalten (s. nächster Abschnitt bzw. Abschnitt 6.1).

Trotz dieser Vereinfachung können wir aber davon ausgehen, die entsprechenden, für unsere Zwecke alleine interessanten Kollektivzeitreihen, aus folgenden Gründen noch gut zu modellieren:

- Die zu beobachtenden Schwankungen in den entsprechenden Kollektivgrößen resultieren zu erheblichen Teilen aus Verschiebungen im Kollektiv, die im Gesamtmodell jedoch explizit abgebildet werden können. So können z. B. Spargeldschwankungen aus dem Vertragsbestand heraus durch Klassifikation des bisherigen Sparverhaltens der Bestandsverträge in bekannte und recht stabile Sparmuster bzw. Prototypen gut erklärt werden (ähnlich wie z. B. im NBI-Modell, s. Abschnitt 2.1.3). Als weitere wichtige Determinante für die Schwankung des Spargeldeingangs wird das Neugeschäft zudem bereits als exogene Variable stochastisch modelliert. Weiterhin lassen sich die Schwankungen des Kündigungsvolumens anführen, die auf Grund sehr unterschiedlicher, vertragsaltersabhängiger Kündigungsanteile im stärkeren Maße von der jahrgangsweisen Zusammensetzung des Kollektivs verursacht werden als von wirklichen Änderungen im Kündigungsverhalten.¹⁰ Eine wesentliche Ursache für diese unterschiedlichen Anteile besteht darin, dass ein Bausparvertrag mindestens sieben Jahre bestehen muss, um in den Genuss der Wohnungsbauprämie zu gelangen. Daher warten viele Bausparer mit ihrer Kündigung erst das Ende dieser Frist ab, so dass wir als Kündigungsanteil für siebenjährige Verträge das Vielfache dessen erhalten, was für Verträge anderen Alters üblich ist.
- Für unsystematische Schwankungen, die durch die zufälligen Entscheidungen der einzelnen Sparer entstehen, kann man davon ausgehen, dass sich diese auf Grund der Vielzahl der betrachteten Verträge im Kollektiv weitgehend ausmitteln. Die Modellierung dieser Unsicherheitsquelle kann damit unterbleiben.

Zur Berücksichtigung u. U. dennoch vorhandener Trends bietet es sich aber an, Verhaltensmuster für das Spar-, Kündigungs-, Fortsetzungs- und Auszahlungsverhalten aus möglichst jungen Daten zu ermitteln. Inwieweit die hier gemachten Annahmen angemessen und die hieraus resultierenden Fehler tatsächlich vernachlässigbar sind, wird später bei der in Abschnitt 6.2 stattfindenden Modellvalidierung genauer untersucht.

2.2.4 Modellaufbau

Da das zu entwickelnde Modell im Wesentlichen eine Erweiterung üblicher Kollektivsimulationsmodelle darstellt, können wir es auf ein geeignetes, bereits bestehendes Simulationsmodell aufsetzen. Für die Wahl des NBI-Modells als technischen Ausgangspunkt für das zu konzipierende Modell aus den oben vorgestellten Kollektivsimulationsmodellen sprechen folgende Gründe:

¹⁰Zur Einschränkung dieser Aussage – zumindest bei der Hochzinsvariante des Optionstarifs – sei auf die entsprechenden Ausführungen im oberen Teil dieses Abschnitts verwiesen.

- Durch den Rechenkern des NBI wird sichergestellt, dass jede einzelne Szenario-simulation tarifkonform und baupartechnisch konsistent ist.
- Das NBI-Modell ist durch die gute Steuerbarkeit der Simulationsparameter geeignet, Simulationen unter Berücksichtigung bestimmter Szenarien durchzuführen. Das NBI kann damit sicherstellen, dass bei geeigneter Ableitung der Simulationsparameter aus den Szenario-Prämissen die Simulationsergebnisse in jedem Fall konsistent zu dem betrachteten Szenario sind.
- Auf Grund der deterministischen Natur des NBI-Modells resultieren Schwankungen in den Ergebniszeitreihen alleine aus der Stochastik der exogenen Variablen. Jedem Szenario kann damit genau ein Simulationsergebnis zugeordnet werden. Zudem kann ermittelt werden, welche exogene Variable bzw. welcher hieraus abgeleitete Parameter welchen Beitrag zur Schwankung der Kollektivgrößen leistet.

Der Nachteil des NBI-Modells liegt allerdings in der vergleichsweise langen, pro Simulationslauf benötigten Rechendauer von mehreren Stunden, die aus der feinen Aufteilung des Kollektivs auf eine Vielzahl prototypischer Sparmuster (Prototypen) beruht (s. Abschnitt 2.1.3). Da dieser Rechenaufwand im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation nicht zu leisten ist, wird die Bestandsaufteilung in Prototypen aufgegeben und durch ein einfacheres Konzept ersetzt (s. Abschnitt 6.1).

Das Gesamtmodell setzt sich nun vereinfacht aus folgenden, in Abbildung 2.6 dargestellten Modulen zusammen:

Zinsmodell: Als eine exogene Variable geht die künftige Entwicklung der Marktzinsen in das Modell ein. Aufgabe des Zinsmodells ist es, eine vorgegebene Anzahl von zufällig generierten Zinsszenarien auszugeben. Dabei besteht ein Zinsszenario sowohl aus der zeitlichen Entwicklung der Zinsstruktur (s. Kapitel 4) als auch aus den daraus abgeleiteten vergleichbaren Marktzinsen. Da die Zinszeitreihen nicht direkt als Simulationsparameter in den Rechenkern eingehen, sondern nur indirekt über die in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen marktzensabhängigen Optionen, ist eine Ableitung entsprechender Simulationsparameter für die Inanspruchnahme dieser Optionen im nächsten Modul erforderlich.

Regressionsmodell: Im Regressionsmodell werden jeweils vor dem Start einer Szenario-Simulation aus dem aktuellen Zinsszenario Werte für die marktzenssensiblen Simulationsparameter mit Hilfe des Regressionsansatzes bestimmt. Wir betrachten im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteile.

Neugeschäftsmodell: Der Zweck des Neugeschäftsmodells besteht darin, eine vorgegebene Anzahl von Neugeschäftsszenarien zufällig zu generieren. Hierbei

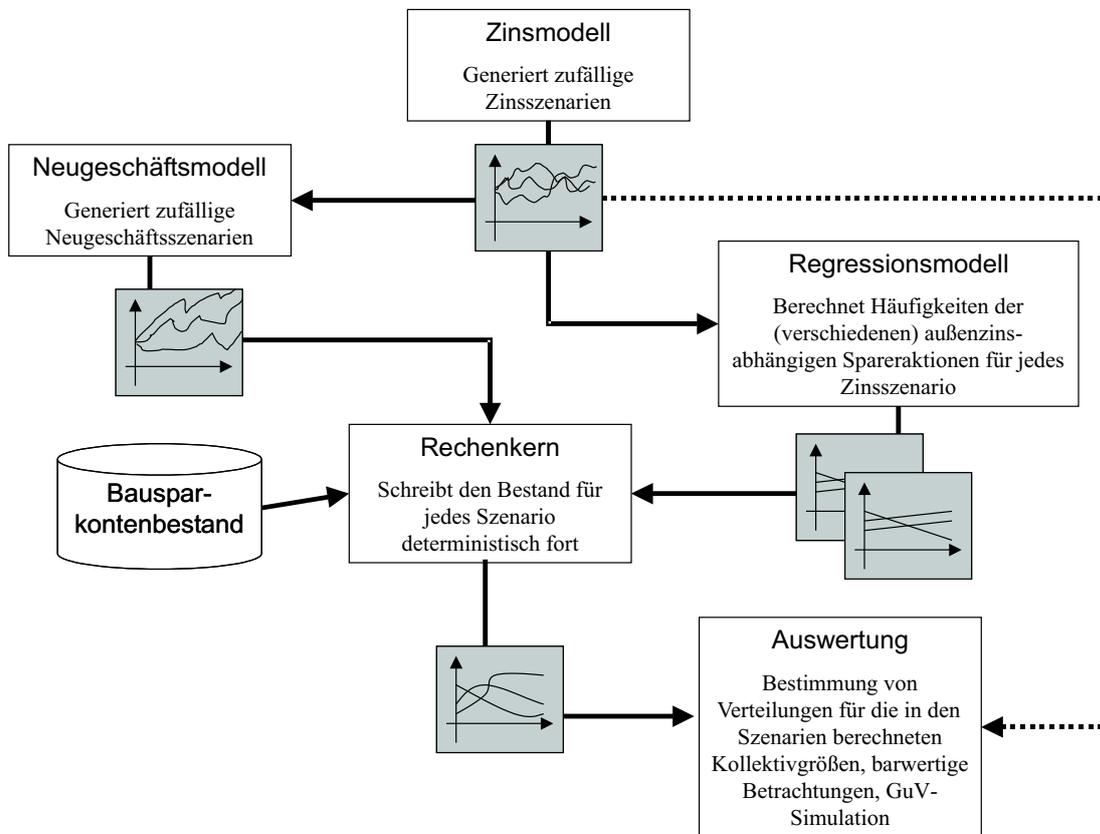


Abbildung 2.6: Vereinfachtes Modellkonzept

wird vom Modell zunächst nur die absolute Höhe des künftigen Neugeschäfts pro Periode über einen definierten Zeitraum ausgegeben, die anschließend noch auf die einzelnen Tarife aufgeteilt werden muss. Für Optionstarife kann dieses zudem noch unter Einbeziehung des jeweiligen Zinsszenarios auf die verschiedenen Varianten geschehen. Bei Betrachtung nur eines Tarifs wie in Kapitel 6 kann dieser Schritt natürlich unterbleiben. Das so generierte Neugeschäft pro Tarif kann nun direkt als Parameter in den Rechenkern eingehen.

Ein Neugeschäfts- und ein Zinsszenario definieren somit ein (Gesamt-)Szenario für das jeweils ein Simulationslauf durchgeführt werden muss.

Rechenkern: Neben den Neugeschäfts- und marktzensabhängigen Parametern benötigt der Rechenkern zur Durchführung einer Szenariosimulation zusätzliche Daten. Hierzu zählen neben den exakten Tarifparametern auch Angaben über das zu simulierende Spar-, Kündigungs-, Fortsetzungs- und Auszahlungsverhalten. Wir gehen davon aus, dass diese Verhaltensweisen in der Zukunft konstant bleiben (s. vorheriger Abschnitt) und bestimmen die entsprechenden Parame-

ter durch Mittelung aus den uns zur Verfügung stehenden Einzelvertragsdaten. Daneben wird aus den Einzelvertragsdaten eine Bestandsdatei gebildet, die die Kontostände sämtlicher Verträge zum Beginn des zu simulierenden Zeitraumes repräsentiert.

Der Simulationskern führt nun ebenso viele Szenariosimulationen durch wie es Szenarien gibt und speichert jedes Einzelergebnis separat. Diese Einzelergebnisse enthalten sämtliche relevanten Kollektivzeitreihen und können den jeweiligen Prämissen ihres Szenarios eindeutig zugeordnet werden.

Resultataufbereitung: Im letzten Schritt werden die Szenarioergebnisse aufbereitet und verdichtet. Für jede einzelne Kollektivzeitreihe oder hieraus abgeleitete Zeitreihe können die Verteilungen im Zeitverlauf bestimmt werden. Da bei jedem Szenarioergebnis das zugehörige Zinsszenario bekannt ist, können bei Annahme bestimmter Prämissen zur Anlagepolitik zusätzlich Gewinn- und Verlust-Simulationen (GuV-Simulationen) durch Modellierung einer außerkollektiven Anlagestrategie aufgesetzt werden.

Die einzelnen Module werden in den nachfolgenden Kapiteln detailliert beschrieben. Zu Verfremdungszwecken wurden alle Geldbeträge in den Vertragsdaten des realen Kollektivs, welches in dieser Arbeit für Datenanalysen und Simulationen herangezogen wird, mit einem konstanten Faktor skaliert. Die Aussagekraft der Daten und Ergebnisse wird hierdurch nicht beeinträchtigt, lediglich die Kasse, deren Daten hier verwendet werden, soll auf diese Weise unkenntlich gemacht werden.

2.3 Einsatzmöglichkeiten

Wir wenden uns nun dem realisierbaren Nutzen des oben skizzierten Modells zu. Ausgangspunkt der Überlegungen war, das dem kollektiven Geschäft immanente Risiko zu bestimmen. Die hierfür notwendige Datengrundlage kann von dem Modell erzeugt werden, da für alle Kollektivgrößen Verteilungen ermittelt werden können und wir jedem potentiellen künftigen Kollektivzustand – zumindest näherungsweise – eine Wahrscheinlichkeit zuordnen können.

In der Praxis ist es jedoch üblich, Risiken durch bestimmte Kennzahlen auszudrücken, nach Risikoarten zu untergliedern und zusammen mit anderen risikohaltigen Bilanzpositionen zusammenzufassen. Auf welche Weise sich die Resultate des hier zu entwickelnden Modells zu Kennzahlen aufbereiten lassen, stellen wir in diesem Abschnitt dar.

Die in den folgenden Unterabschnitten behandelten Risiken sind hierbei keineswegs überschneidungsfrei, sondern auf Grund ihrer gemeinsamen Abhängigkeit von der Kollektiventwicklung hochgradig interdependent.

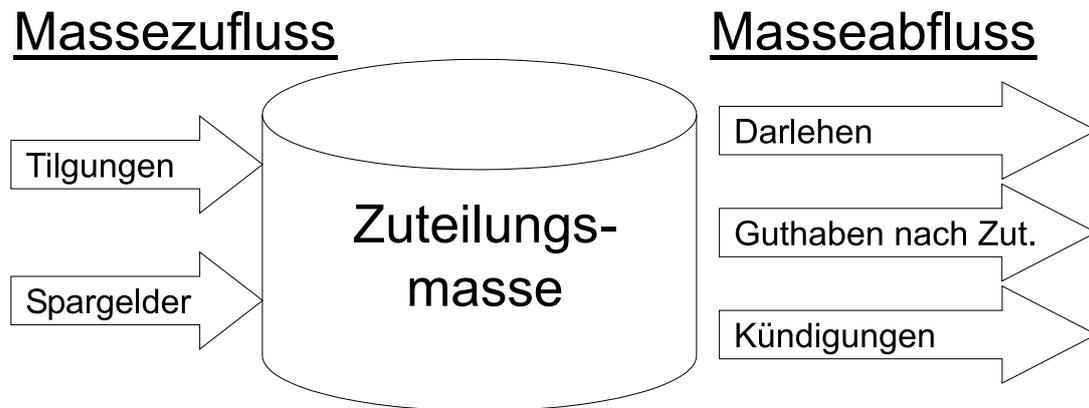


Abbildung 2.7: Bestimmungsfaktoren der Zuteilungsmasse

2.3.1 Bestimmung des Liquiditätsrisikos

Derzeitiger Anwendungsschwerpunkt von Simulationsmodellen im Bausparwesen ist – wie in der Einleitung dargelegt – die Sicherstellung einer ausreichenden Liquidität der Bausparkasse. Dieses beinhaltet, dass eine Bausparkasse jederzeit in der Lage sein muss, ihren Auszahlungsverpflichtungen gegenüber ihren Kunden auf Grund von Zuteilung oder Kündigung nachkommen zu können. Zudem muss sichergestellt werden, dass außerkollektiv angelegte kollektive Mittel rechtzeitig in das Kollektiv zurückgeführt werden, um so angemessene Wartezeiten bis zur Zuteilung zu gewährleisten.

Entscheidend für die Liquidität einer Bausparkasse ist die Verwendung der Zuteilungsmasse. Als Zuteilungsmasse wird die Summe der Bausparguthaben bezeichnet, die (noch) nicht als Bauspardarlehen angelegt sind [BHL98]. In Abbildung 2.7¹¹ sind die Bestimmungsfaktoren der Zuteilungsmasse dargestellt. Auf Grund der unsicheren Zu- und Abflüsse ist die Entwicklung der Zuteilungsmasse selbst stochastischer Natur. Die Zuteilungsmasse wird von den Bausparkassen zu erheblichen Teilen als Vor- und Zwischenfinanzierungskredite (VK/ZK) zu Marktkonditionen vergeben. Da die Langfristigkeit dieser Anlage dazu führen könnte, dass bei sinkender Zuteilungsmasse die Bausparkasse nicht mehr ausreichend liquide sein könnte, wird diese Anlagemöglichkeit seitens der BaFin eingeschränkt.

Mit Hilfe von Simulationsmodellen wird die Bewegung der Zuteilungsmasse simuliert, wobei ein bestimmtes Szenario zugrundegelegt wird, welches von der Bausparkasse als das wahrscheinlichste erachtet wird.

Das Resultat einer solchen Simulation ist in Form der Tabelle 2.1 bei der BaFin einzureichen. Von den Simulationsergebnissen werden hierbei lediglich die simulierten Bauspareinlagen und Darlehen in den Spalten (1) und (2) eingetragen.

¹¹Abbildung in Anlehnung an [Bun02]

Quartals- ende	Bauspar- guthaben	Bauspar- darlehen	Guthaben- überschuss	Sicher- heits- puffer	Modell- basierte freie Bauspar- guthaben	Kollektiv refinan- zierte VK/ZK
	(1)	(2)	(3) = (1)-(2)	(4)	(5) = (3)-(4)	(6)
März 2004 Juni 2004 Sept. 2004 Dez. 2004						
...
März 2014 Juni 2014 Sept. 2014 Dez. 2014						

Tabelle 2.1: Meldeformular für Ausnahmeregelung gemäß §1 Abs. 4 BSpKV

Da das angenommene Szenario nicht exakt eintreffen wird, ist in Spalte (4) ein Sicherheitspuffer zu berechnen. Dieser besteht aus zwei Komponenten: Die erste Komponente wird in Höhe von 10% des Guthabenüberschusses (Spalte (3)) festgelegt. Die zweite Komponente besteht im ersten Quartal aus 0,4 % des Bausparguthabens und erhöht sich in jedem Quartal um weitere 0,4 Prozentpunkte. Auf diese Weise vergrößert sich der Sicherheitspuffer, so dass der steigenden Prognoseunsicherheit der Simulation in fernerer Zukunft Rechnung getragen wird. Die sich in Spalte (5) ergebenden modellbasierten freien Bausparguthaben dürfen von den Kassen als Vor- und Zwischenfinanzierungskredite mit einer Laufzeit von bis zu zehn Jahren vergeben werden.¹²

Positiv hervorzuheben ist, dass durch dieses Verfahren die individuelle Situation der einzelnen Bausparkollektive berücksichtigt wird, anstatt starre Obergrenzen vorzugeben. Dennoch lassen sich folgende Kritikpunkte anbringen:

- Die Konstruktion des Sicherheitspuffers erlaubt keinerlei Aussagen darüber, wie sicher eine Überschreitung der modellbasierten freien Bausparguthaben durch Vor- und Zwischenfinanzierungskredite vermieden wird.
- Die Eingangsgrößen des Meldeformulars sind die Ausgabegrößen einer einzigen Szenariosimulation. Das zugrunde gelegte Szenario muss „plausibel“ sein und der aktuellen Markteinschätzung entsprechen. Innerhalb dieser vieldeutigen Forderung sind jedoch unterschiedliche Szenarien denkbar, so dass je nach

¹²Tabelle 2.1 und Berechnungen sind dem Schreiben der BaFin zu §1 Abs. 4 der Verordnung zum Schutz der Gläubiger von Bausparkassen vom 12. März 2002 entnommen.

Wahl eines solchen Szenarios auch die modellbasierten freien Bausparguthaben schwanken.

Letzterer Kritikpunkt wird bei der Simulation beliebig vieler generierter Szenarien – und so auch in unserem Modell – offenbar vollständig umgangen. Zudem wäre es statt Vorgabe eines bestimmten Sicherheitspuffers sicherlich sinnvoller, ein Wahrscheinlichkeitsniveau analog zum VaR-Konzept (s. nächster Abschnitt, Definition 2.1) vorzugeben, auf dessen Basis mit Hilfe des Modells für jedes Quartal ein modellbasiertes freies Bausparguthaben berechnet werden kann, das mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit im jeweiligen Quartal nicht unterschritten wird.

Auch in diesem Fall steckt eine gewisse, nicht zu vermeidende Willkür in der Wahl des Wahrscheinlichkeitsniveaus. Allerdings kann auf der anderen Seite Willkür bei der Wahl des Szenarios und der Dimensionierung des Sicherheitspuffers vermieden werden. Der Hauptvorteil besteht aber sicher in der ungleich höheren Aussagekraft dieser Größe.

2.3.2 Risikogewichtete Bewertung des kollektiven Geschäfts

Da Bausparkkollektive nicht gehandelt werden, existiert für sie offenbar auch kein Marktpreis. Möchten wir trotzdem den (risikobehafteten) „Wert“ des kollektiven Geschäfts ermitteln, müssen wir auf Methoden der Investitionsrechnung zurückgreifen. Das Standardinstrument zur Bewertung von Geschäften in der Investitionsrechnung [Eis96] stellt der so genannte *Bar-* bzw. *Kapitalwert* dar. Der Barwert wird dadurch berechnet, dass sämtliche künftigen Zahlungsströme des Geschäfts mit der gegenwärtigen Zinsstruktur diskontiert und aufsummiert werden. Der so errechnete Barwert stellt exakt den Wert des Geschäfts zum gegenwärtigen Zeitpunkt dar, da sämtliche künftige Zahlungen durch Geldaufnahme oder -anlage am Kapitalmarkt kompensiert werden können (vgl. Abschnitt 4.1.1).

Möchten wir auf dieser Basis den Wert des kollektiven Geschäfts bestimmen, so ergeben sich zwei Probleme:

1. Die künftigen kollektiven Zahlungsströme sind nicht von vorneherein gegeben, sondern müssen erst geeignet ermittelt werden.
2. Die künftigen kollektiven Zahlungsströme sind zudem nicht sicher, sondern stochastischer Natur.

Als Ausweg bietet es sich an, mit Hilfe des Modells den Erwartungswert des Barwerts aus den Zahlungsströmen der Szenariosimulationen zu berechnen und als Maß für die Risikobehaftung dieser Größe die leicht mitzuberechnende Varianz anzugeben. Ein übliches Vorgehen ist auch die Erstellung eines *Risikoprofils* (vgl. z. B. [Eis96]), welches die Überschreitungswahrscheinlichkeit eines bestimmten Barwerts angibt.

Ein sehr weit verbreitetes monetäres Risikomaß stellt der *Value-at-Risk* (VaR) (s. z. B. [Jor97]) dar:

Definition 2.1 (Value-at-Risk) *Der Value-at-Risk ist definiert als maximale Höhe des Verlustes einer einzelnen Position oder eines Portfolios, der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit über einen bestimmten Zeitraum nicht überschritten wird.*

Zur Verdeutlichung betrachten wir nun, [Rea98] folgend, den Wert $P(t)$ einer Position oder eines ganzen Portfolios zum Zeitpunkt t . Die absolute Wertänderung $\Delta P(t, T)$ der Position im Intervall $[t, T]$ ist dann durch

$$\Delta P(t, T) = P(T) - P(t) \quad (2.1)$$

gegeben, wobei $\Delta P(t, T) > 0$ einen Gewinn und $\Delta P(t, T) < 0$ einen Verlust bezeichnet.

Der $\text{VaR}(t, T, \alpha)$ entspricht dann definitionsgemäß dem α -Quantil der Portfoliowertänderung $\Delta P(t, T)$ mit

$$\text{pr}(\Delta P(t, T) \leq \text{VaR}(t, T, \alpha)) = \alpha. \quad (2.2)$$

Der Value-at-Risk ist damit offenbar eine monetäre Größe, die ökonomisch als Verlustpotential interpretiert werden kann. Besitzt der Inhaber des Portfolios ein aus dem Eigenkapital abgeleitetes Risikodeckungskapital in Höhe von $\text{VaR}(t, T, \alpha)$, so lässt sich aus der Definition des Value-at-Risk schließen, dass er mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ einen möglichen Verlust nach der angegebenen Haltedauer decken kann. Der Value-at-Risk ist auf Grund dieser Eigenschaft eine Größe, die einerseits zur Risikolimitierung, andererseits zur Dimensionierung der Eigenkapitalanforderungen prädestiniert ist.

Die obige Definition ist sicherlich gut auf eine Aktie oder ein Wertpapierportfolio anzuwenden, da diese zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten, sofort realisierbaren Wert haben. Ein solcher, sicherer Wert existiert für das Bausparkollektiv allerdings nicht. Weniger die Wertänderung, der Wert selbst ist unsicher. Es ist damit erforderlich, eine alternative Definition für einen „kollektiven Value-at-Risk“ zu finden.

Zentraler Aspekt des VaR ist die Bestimmung einer Mindesteigenkapitalausstattung, um u. a. potentielle Verluste abzufedern. Eine konzeptkonforme Definition eines kollektiven VaR könnte daher in dem (zukünftigen) kollektiven Barwert bestehen, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten wird. In diesem Fall kann eine solche, negative Größe zur Bestimmung einer Mindestausstattung an Risikodeckungskapital herangezogen werden, wobei der Barwert des außerkollektiv angelegten Einlagenüberschusses (Zuteilungsmasse) einbezogen werden müsste. Die Höhe des Verlustpotentials entspräche in diesem Fall dem Betrag des negativen Barwerts. Außerdem besteht die Möglichkeit, Szenarien mit besonders starken Verlusten (Worst-Case-Szenarien) zu analysieren, um geeignete Gegenmaßnahmen z. B. durch den Einsatz von Derivaten treffen zu können und so das Verlustpotenzial zu beschränken.

2.3.3 Auswirkungen auf die Messung des Zinsänderungsrisikos

Während im vorherigen Abschnitt das Augenmerk auf dem Gesamtrisiko des kollektiven Geschäfts einer Bausparkasse lag, wenden wir uns nun einem insbesondere für Banken zentralen Teilrisiko zu, dem Zinsänderungsrisiko und hierbei speziell dem Einfluss des kollektiven Geschäfts auf dieses Teilrisiko.

Allgemein kann das Zinsänderungsrisiko aus Sicht der Bank als „Gefahr einer Beeinträchtigung der Ertragsaussichten als Folge unerwarteter Zinsänderungen“ [Bur98] betrachtet werden. Das Zinsänderungsrisiko resultiert im Wesentlichen aus unterschiedlich langen Zinsbindungen auf der Aktiv- und der Passivseite der Bilanz. Ein einfaches Beispiel soll das Problem beleuchten:

Beispiel 2.2 *Eine Bank leiht einem Kunden 100 Euro zu 5% Zinsen fest auf zwei Jahre und refinanziert diese durch Kundenanlagen, die für ein Jahr zu ebenfalls 5 % fest angelegt sind. Nach einem Jahr können folgende drei Fälle auftreten:*

1. *Zins bleibt konstant: In diesem Fall erhält die Bank in den Jahren eins und zwei jeweils 5 Euro an Zinsen und muss ebenso viel an Zinsen aufwenden.*
2. *Zins steigt auf 6%: Die Bank erhält im Jahr eins 5 Euro und wendet ebensoviel an Zinszahlungen auf. Im Jahr zwei muss sie allerdings 6 Euro an Guthabenzinsen aufwenden, erhält aber nur 5 Euro an Darlehenszinsen. Im Jahr zwei entsteht darum ein Verlust von 1 Euro.*
3. *Zins fällt auf 4%: Analog hierzu entsteht im Jahr zwei ein Gewinn von 1 Euro, da nur 4 Euro an Zinsen aufzuwenden sind, jedoch 5 Euro eingenommen werden.*

Zur Erfassung, Messung, Bewertung und Steuerung von Zinsänderungsrisiken existieren verschiedene methodische Ansätze, die auf der Erfassung sämtlicher zinstragender Geschäfte nach Zinsbindungsfristen basieren. Eine umfassende Darstellung hierzu findet sich u. a. in [BG96].

Eine auf dem Barwert einer Position basierende, recht einfache Kennzahl stellt in diesem Zusammenhang der *Basis Point Value* dar [Sch03].

Definition 2.2 *Der Basis Point Value (BPV) misst als absolute monetäre Größe die Barwertänderung bei der Veränderung des Zinsniveaus um einen $\frac{1}{100}$ Prozentpunkt, einem so genannten Basispunkt. Dieser kann wie folgt berechnet werden (Notation s. Abschnitt 4.1.1):*

$$BPV = \sum_{t=0}^T \frac{z_t}{\left(q_t + \frac{1}{10.000}\right)^t} - \sum_{t=0}^T \frac{z_t}{q_t^t} \quad (2.3)$$

Der BPV kann also als Steigung des Barwerts auf dem Punkt des aktuellen Zinsniveaus interpretiert werden. Mit Hilfe des Basis Point Value lassen sich damit auf recht einfache Weise die barwertigen Auswirkungen einer Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve für verschiedene Positionen der Aktiv- und Passivseite der Bilanz näherungsweise untersuchen.

Wir gehen nun konkreter auf die spezielle Situation von Bausparkassen ein. Ursächlich für das Vorhandensein eines Zinsänderungsrisikos ist die Existenz von „Gaps“, also Differenzen zwischen den Summen festverzinslicher Positionen auf der Aktiv- und Passivseite der Bilanz in den kommenden Perioden. Eine Bausparkasse, deren Anlagegrad konstant und garantiert 100% beträgt, so dass der Darlehensbestand stets exakt dem Einlagenbestand entspricht, unterliegt demzufolge zumindest durch das kollektive Geschäft keinem Zinsänderungsrisiko. Sämtliche festverzinsliche Bauspardarlehen sind in diesem Fall zu jedem Zeitpunkt vollständig durch festverzinsliche Bauspareinlagen refinanziert, die selbst wiederum komplett in festverzinslichen Bauspardarlehen angelegt sind.

Dies ist in der Regel jedoch nicht der Fall, da zumeist höhere Bauspareinlagen als -darlehen existieren, so dass dieser passivische Kollektivüberhang im außerkollektiven Bereich angelegt wird. Bezüglich ihrer außerkollektiven Positionen bestehen bei Bausparkassen aber grundsätzlich dieselben Risiken wie bei anderen Banken. Im Falle der Bausparkassen kommt auf Grund der Abhängigkeit dieser Positionen vom kollektiven Geschäft die Schwierigkeit hinzu, dass die das Zinsänderungsrisiko verursachenden Gaps nicht sicher bekannt sind, sondern auch vom jeweiligen Zinsszenario abhängen. Steigen die Zinsen, so vermindert sich auch der passivische Überhang, da die Bausparer wieder vermehrt ihre Darlehen in Anspruch nehmen. Hierdurch wirken die Bausparer einem höheren Zinsertrag durch die außerkollektiv angelegte Zuteilungsmasse entgegen. Bei sinkenden Zinsen erhöht sich umgekehrt der passivische Überhang, so dass zwar die Zuteilungsmasse steigt, diese aber außerkollektiv schwächer verzinst wird. Auf diese Weise ergibt sich für die Bausparkasse ein asymmetrisches Risikoprofil, bei dem die Chancen bei steigenden Zinsen nicht im gleichen Maße steigen wie die Risiken bei sinkenden Zinsen [MH02].

Grundlage der Steuerungsmethoden für das Zinsänderungsrisiko sind i. d. R. Zahlungsströme, welche üblicherweise bei festverzinslichen außerkollektiven Positionen von vorneherein bekannt sind. Die kollektiven Zahlungsströme können durch Simulation ermittelt und anschließend gemeinsam mit den außerkollektiven Cash-Flows betrachtet werden. Genau hierbei tritt aber das Problem auf, dass Marktzinsänderungen auch zu Änderungen im kollektiven Zahlungsstrom führen und bei Nichtbeachtung dieser Abhängigkeiten in der Kollektivsimulation das Zinsänderungsrisiko auf Grund des asymmetrischen Risikoprofils systematisch unterschätzt wird [BEHR03]. Damit ist z. B. die oben dargestellte Basis-Point-Value-Methode in diesem Kontext nur bedingt brauchbar.

Unser Modell erlaubt die explizite Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten und damit eine nach Zinsszenario differenzierte Ausgabe von Cash-Flows sowie Bauspareinlagen und -darlehen, auf deren Basis sich sowohl Gap-Analysen, GuV-Simulationen als auch barwertige Betrachtungen durchführen lassen [MH02]. Die Frage, ob zur Bestimmung des Zinsänderungsrisikos die kollektiven Zahlungsströme einschließlich oder ausschließlich eines simulierten Neugeschäfts verwendet werden sollen, ist strittig [BEHR03]. Grundsätzlich ist unser Modell aber im Stande, auch mit konstantem bzw. ganz ohne Neugeschäft zu arbeiten.

2.3.4 Bestimmung des Ertragsrisikos

Ein Nachteil der Anwendung der Barwertmethode bei der Bewertung von Investitionen, die einen unsicheren Zahlungsstrom zur Folge haben, besteht darin, dass die – zumindest gedanklich – erfolgenden Ergänzungsgeschäfte nur unter dem angenommenen Szenario durchführbar sind, das aber i. d. R. nicht exakt eintreffen wird.

Alternativ kann man zur Bewertung des Geschäfts unter Risikogesichtspunkten die künftigen Erträge simulieren. Mit Hilfe des Modells lassen sich Verteilungen von Aufwendungen und Erträgen aus dem Kollektiv bestimmen, die durch die zusätzliche Abbildung einer Anlagestrategie für den außerkollektiven Bereich zu einer Gesamtbeurteilung ergänzt werden können.

In [Ket99] wird ausgeführt, dass das in Abschnitt 2.3.1 dargestellte Liquiditätsrisiko i. Allg. weniger ein Risiko für die Kunden darstellt, dass deren Auszahlungsansprüche evtl. nicht zeitgerecht befriedigt werden können, als vielmehr ein Rentabilitätsrisiko für die Bausparkasse, da diese notfalls auf dem Interbankenmarkt mit ggf. negativen Zinsmargen oder durch außerplanmäßige Wertpapierverkäufe Liquiditätsengpässe zwischenfinanzieren muss. Durch die zusätzliche Modellierung einer Anlagestrategie für die Zuteilungsmasse lassen sich die resultierenden Ertragsrisiken durch das Modell erfassen und damit die entsprechende Anlagestrategie bewerten. Damit könnte die Ausnahmeregelung gemäß § 1 BSpKV durch eine Vorgabe ersetzt werden, die auf die Ertragsrisiken einer solchen Zwischenfinanzierung abstellt und diese in Abhängigkeit von der Finanzkraft der Bausparkasse limitiert.

Inwieweit damit eine bestimmte Anlagestrategie zulässig ist und die entsprechenden Beschränkungen erfüllt, kann dann durch das Modell überprüft werden.

2.3.5 Chancen-/ Risikobewertung neuer Produkte

Die Simulation junger bzw. noch gar nicht existierender Tarife stellt bei Kollektivsimulationen insofern ein Problem dar, als Simulationsparameter für das Sparerverhalten nicht aus Realdaten gewonnen werden können. Dennoch ist die Kollektivsimulation im Rahmen der Produktkalkulation und Tarifgenehmigung ein zunehmend wichtiges Instrument.

Aus diesem Grund müssen auf der Basis bestehender Tarife Rückschlüsse auf das Verhalten neuer bzw. geplanter Tarife gezogen werden. Bei der Schätzung zinsabhängiger Optionen kann hierbei die Verschiebung der Vorteilhaftigkeitsgrenzen explizit berücksichtigt werden (s. Abschnitt 3.2.1). Für die übrigen Sparerverhaltensweisen müssen die Daten möglichst ähnlicher, bestehender Tarife herangezogen werden bzw. alternativ geeignete Annahmen getroffen werden. Die jeweiligen Tarifparameter hingegen können ohne weiteres explizit vom Simulationskern berücksichtigt werden.

Mit Hilfe des Modells lassen sich so die Auswirkungen der Einführung eines neuen Tarifs auf die Verteilungen der verschiedenen Kollektiv- und Risikokenngrößen untersuchen. Das Ziel besteht zum einen darin, dass die Bausparkasse zunächst die Chancen und Risiken verschiedener Produktvarianten besser beurteilen kann, und zum anderen darin, in einem zweiten Schritt die Einhaltung aufsichtsrechtlicher Vorgaben gegenüber der BaFin zur Tarifgenehmigung nachweisen zu können.

Kapitel 3

Regressionsmodell

Dem in Abschnitt 2.2 dargelegten Modellkonzept entsprechend wird mit diesem Kapitel bezweckt, ein automatisches Verfahren zu entwickeln, welches es erlaubt, bei gegebenem Zinsszenario die marktzinsabhängigen Simulationsparameter zu bestimmen. Wir erarbeiten zunächst in Abschnitt 3.1 den Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung des Kollektivs, dem Marktzins und den zinsabhängigen Simulationsparametern und entwickeln hieraus die Grundidee einer „Regressionsclustering“, welche die Regressions- mit der Clusteranalyse verbindet.

In den folgenden Abschnitten werden wir daher zunächst auf die Regressions- und Clusteranalyse (Abschnitte 3.2 und 3.3) eingehen, bevor wir in Abschnitt 3.4 das Regressionsclusterverfahren vorstellen und auf Realdaten anwenden.

3.1 Problemstellung

Ein naheliegender Ansatz, marktzinsabhängige Simulationsparameter aus einem bestimmten Zinsszenario zu bestimmen, ist die Verwendung einer *Regressionsanalyse*. Gegenstand der Regressionsanalyse ist die Spezifikation eines funktionalen Zusammenhanges zwischen verschiedenen Merkmalen von Objekten [HEK93]. Interessiert man sich ausschließlich für den Zusammenhang zweier Merkmale X und Y , so wird ein funktionaler Zusammenhang durch $y = f(x)$ angegeben, wobei die erklärende Ausprägungsvariable x *Regressor* und die zu erklärende Variable y *Regressand* genannt wird. Die mit einer Regressionsanalyse verfolgten Zwecke sind u. a.:

- Nachweis und Erkennung eines funktionalen Zusammenhangs sowie Schätzung der entsprechenden Funktionsparameter
- Interpolation fehlender bzw. Prognose zukünftiger Werte

Die Regressionsanalyse stellt damit ein geeignetes Werkzeug im Rahmen der Zielsetzung dieses Kapitels dar.

Als die mit Abstand wichtigsten marktzinsabhängigen Optionen untersuchen wir in

diesem Kapitel Darlehensverzichte und Sondertilgungen, deren Parameter wir mit Hilfe von Regressionsfunktionen schätzen wollen. Der sachlogische Zusammenhang zwischen Marktzins, Darlehensverzicht und Sondertilgung wurde bereits in Abschnitt 2.2.3 ausführlich dargelegt. Inwieweit sich die entsprechenden Simulationsparameter überhaupt sinnvoll maschinell ableiten lassen, ist in Literatur und Praxis allerdings strittig. Während in [Wei99] die Bestimmung von Darlehensverzichtsquoten und Tilgungsintensitäten aus dem Marktzinsniveau durch eine Regressionsanalyse empfohlen und selbst vorgenommen wird, wird in [BEHR03] grundsätzlich an der Sinnhaftigkeit maschineller Ableitungen von Simulationsparametern für das Sparerverhalten gezweifelt. Zur Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen ist allerdings eine solche maschinelle Ableitung von Simulationsparametern schon alleine auf Grund der großen Anzahl von Szenarien alternativlos. Wir befassen uns daher mit der automatischen Ableitung der die Sondertilgungen und Darlehensverzichte steuernden Parameter im NBI-Modell, die hier vorgestellt werden.

Als der die Darlehensverzichte steuernde Parameter geht in den Simulationsrechnern der bauparsummengewichtete Darlehensverzichtsanteil (BSDV) des jeweiligen Kalenderjahres t ein. Dieser ist wie folgt definiert:

$$BSDV_t = \frac{\text{BS Darlehensverzichter d. J. } t}{\text{BS Darlehensverzichter d. J. } t + \text{BS Darlehensnehmer d. J. } t}. \quad (3.1)$$

Analog dazu lässt sich der ungewichtete Darlehensverzichtsanteil (DV) definieren:

$$DV_t = \frac{\text{Anzahl Darlehensverzichter d. J. } t}{\text{Anzahl Darlehensverzichter d. J. } t + \text{Anzahl Darlehensnehmer d. J. } t}. \quad (3.2)$$

Da technisch bedingt im Rechenkern Sondertilgungen als vorzeitige Ablösungen abgebildet werden, soll ein Sondertilgungsbeitrag mindestens 10% der Bausparsumme betragen, um auf diese Weise nur Sondertilgungen zu erfassen, die definitiv über dem jeweiligen tariflichen jährlichen Regeltilgungsbeitrag liegen. Entsprechend werden die Sondertilgungen im Modell durch bauparsummengewichtete Sondertilgungsanteile (BSST) gesteuert, welche durch

$$BSST_t = \frac{\text{BS mit Tilgungsbeitrag im Jahr } t \geq 10\% \text{ der BS}}{\text{BS in Darlehensphase im Jahr } t} \quad (3.3)$$

berechnet werden. Für den ungewichteten Anteil ergibt sich analog

$$ST_t = \frac{\text{Anzahl Verträge mit Tilgungsbeitrag im Jahr } t \geq 10\% \text{ der BS}}{\text{Anzahl Verträge in Darlehensphase im Jahr } t}. \quad (3.4)$$

Für die nachfolgenden Untersuchungen beschränken wir uns in diesem Kapitel auf den Finanzierertarif einer Bausparkasse mit einem effektiven Darlehenszins von 5,43%; allerdings lassen sich die angestellten Überlegungen auch auf andere Tarife

übertragen.

Wir betrachten nun die Abhängigkeit der Darlehensverzichtsanteile vom Marktzinsszenario. Wie in Abschnitt 2.2.3 dargelegt, bietet sich als ein dem Zinssatz eines Bauspardarlehens vergleichbarer Marktzins der 10-Jahres-Hypothekenzins an. Von diesem Zinssatz ist es abhängig, ob es für den Bausparer vorteilhaft ist die Darlehensverzichtsoption in Anspruch zu nehmen oder sie verfallen und sich das Darlehen auszahlen zu lassen. Da die realen Darlehensverzichtsanteile nur über ganze Kalenderjahre aus den Daten ermittelt werden können, müssen wir als Regressor *einen* Vergleichszins aus den in der entsprechenden Bundesbankzeitreihe angegebenen zwölf monatlichen 10-Jahres-Hypothekenzinsen pro Kalenderjahr bestimmen. Wir wählen hierzu den minimalen 10-Jahres-Hypothekenzins des jeweiligen Jahres t und bezeichnen diesen mit h_t ¹. Speziell den minimalen Zinssatz des Jahres wählen wir, weil davon ausgegangen werden kann, dass bereits eine kurze Unterschreitung der Vorteilhaftigkeitsgrenze zu einem deutlichen Effekt führt, der sich nicht zwangsläufig abbilden lässt, wenn wir die Jahresdurchschnitte der Hypothekenzinsen verwenden. Den (effektiven) Zinssatz des Bauspardarlehens im betrachteten Tarif, welcher die Vorteilhaftigkeitsgrenze darstellt, bezeichnen wir fortan mit v .²

Da die Vorteilhaftigkeit der Sondertilgungsoption – zumindest für manche Bausparer – auf Grund des Portfolioeffektes bereits dann eintritt, wenn der i. d. R. deutlich geringere Guthabenzins die Vorteilhaftigkeitsgrenze unterschreitet, wählen wir analog zu oben als Regressor für die Bestimmung der bausparsummengewichteten Sondertilgungsanteile den minimalen Zins für Sparbriefe vierjähriger Laufzeit des jeweiligen Kalenderjahres t , den wir mit g_t bezeichnen.

Bevor wir uns auf dieser Basis der Regressionsanalyse zuwenden, betrachten wir nun die (ungewichteten) Darlehensverzichtsanteile DV_t eines Kollektivs in Abhängigkeit von h_t zwischen den Jahren 1992 und 2003. Neben dem Verhalten des Gesamtkollektivs untersuchen wir auch das Verhalten dreier Teilkollektive, nämlich sowohl der

- Vor-/Zwischenfinanzierungsverträge als auch
- „großer“ Bausparverträge mit einer Bausparsumme > 30.000 Euro
- sowie „kleiner“ Bausparverträge mit einer Bausparsumme ≤ 8.000 Euro

¹Mit h_t und g_t (s. u.) sind die bereits in Kapitel 2 verwendeten Zinssätze gemeint, die auch aus denselben, dort genannten Bundesbankzeitreihen stammen.

²Streng betrachtet stellt der gemäß PAngV berechnete Effektivzins des Bauspardarlehens nicht exakt die Vorteilhaftigkeitsgrenze für Darlehensverzichte und Sondertilgungen dar, weil bei seiner Berechnung ggf. anfallende Gebühren, (Dis-) Agio sowie weitere Annahmen berücksichtigt werden. Da die Abschlussgebühr bei Zuteilung bereits gezahlt wurde und i. d. R. nicht erstattet wird, liegt die „wahre“ Vorteilhaftigkeitsgrenze somit eher unter dem Effektivzins des Darlehens. Dieser Effekt wird bei den Sondertilgungen verstärkt, da hier zusätzlich bereits Darlehensgebühren bzw. ein (Dis-) Agio entrichtet wurde. Diese Ungenauigkeit nehmen wir aber der Einfachheit halber in Kauf.

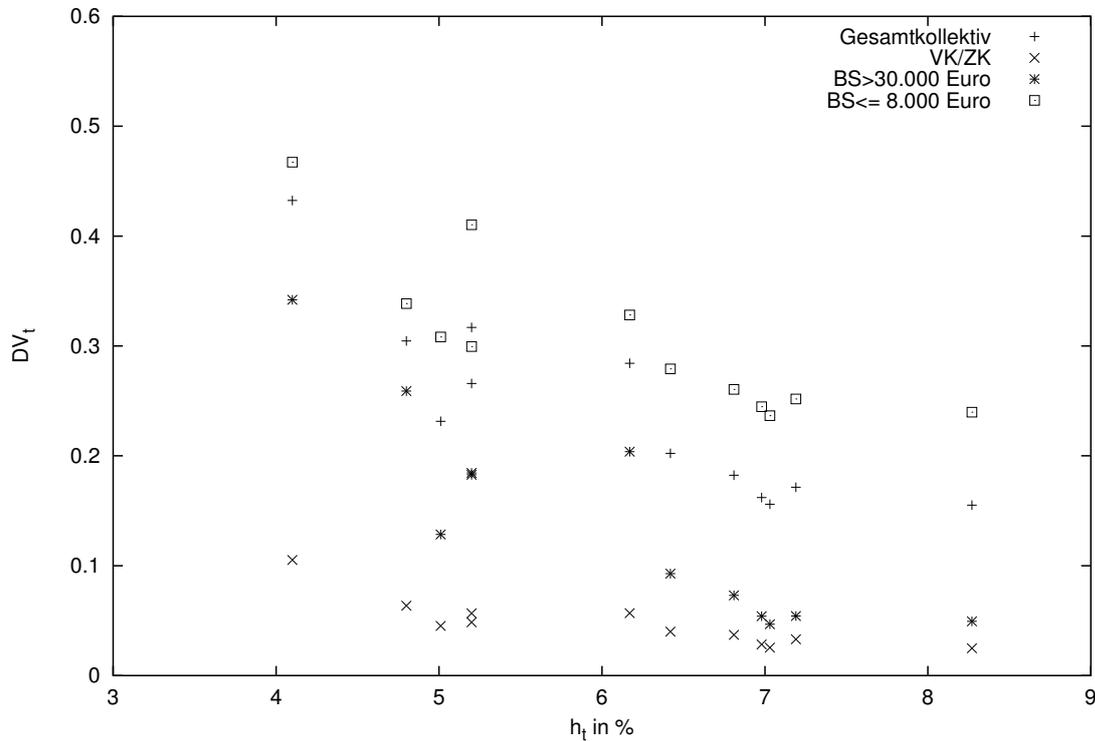


Abbildung 3.1: Darlehensverzichtsanteile verschiedener Teilkollektive in Abhängigkeit vom vergleichbaren Marktzins

Wie deutlich in Abbildung 3.1 zu sehen ist, weichen die Darlehensverzichtsanteile der drei Teilkollektive insbesondere in Abhängigkeit vom Marktzins sowohl untereinander als auch vom Gesamtanteil stark ab, was prinzipiell auch zufälligen Ursprungs sein könnte.

Um dieses auszuschließen, interpretieren wir die ermittelten Anteile DV_t als Punktschätzer für die (unbekannte) Darlehensverzichtswahrscheinlichkeit p und können so Konfidenzintervalle für die DV_t bestimmen (s. Abschnitt 3.4.2). Die entsprechenden Konfidenzintervalle auf 99%-Niveau der drei Teilkollektive sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Es zeigt sich damit, dass sich die Darlehensverzichtsanteile in den Teilkollektiven keineswegs zufällig unterscheiden. Offensichtlich setzt sich das Verhalten des Gesamtkollektivs zusammen aus dem signifikant stark unterschiedlichen Verhalten der anhand statischer Vertragsmerkmale unterscheidbarer Teilkollektive.³ Hieraus folgt aber, dass die Darlehensverzichtsanteile im Gesamtkollektiv nicht alleine von h_t bestimmt werden, sondern zusätzlich noch von der Zusammensetzung des Kollektivs abhängen.

³Diese Aussage wird schon – wenn auch ohne Bezug zum Marktzins – in [Van96] getroffen.

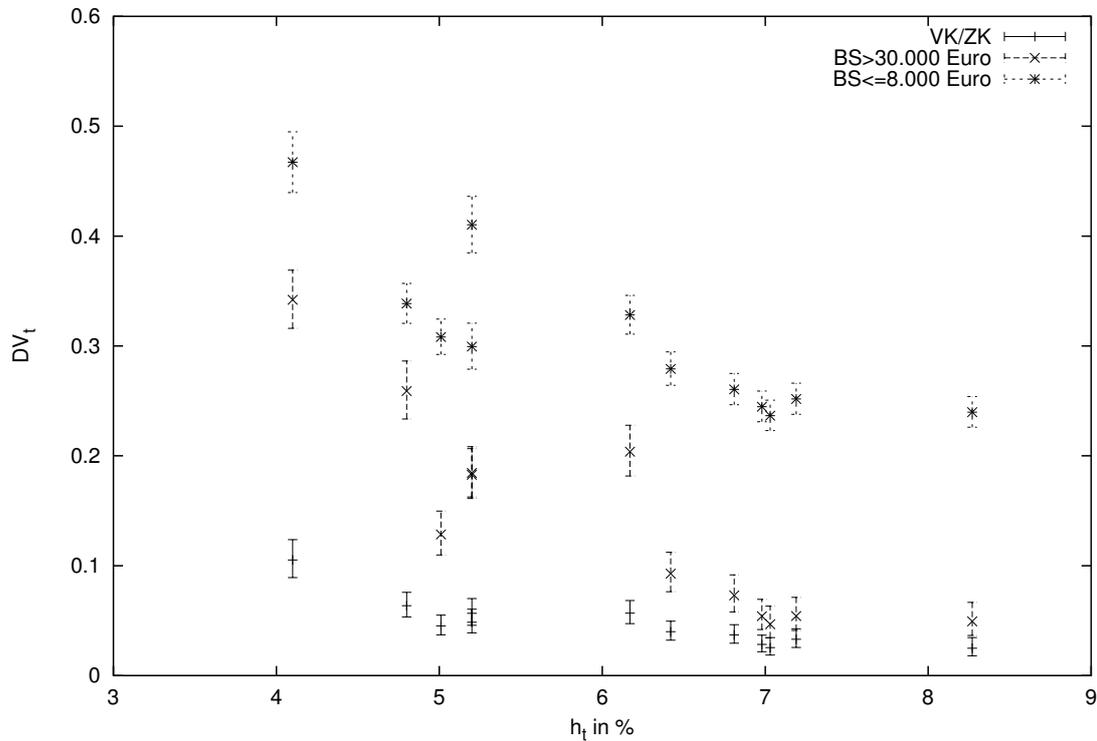


Abbildung 3.2: Konfidenzintervalle auf 99%-Niveau für Darlehensverzichtsanteile verschiedener Teilkollektive

Kennt man nun die Merkmale anhand derer sich signifikant unterschiedlich reagierende Teilkollektive unterscheiden lassen, so ergeben sich für das Regressionsmodell folgende Vorteile:

- Vermeidung von Verzerrungen bei Schätzung der Regressionsparameter durch unterschiedliche Bestandszusammensetzungen
- Verbesserte Schätzgenauigkeit bei Vorgabe von Zinsszenarien, da Verschiebungen im Bestand explizit berücksichtigt werden können

Solche zu berücksichtigenden Verschiebungen innerhalb des Bestands müssen dabei gar nicht zwangsläufig aus Umschichtungen im Neugeschäft resultieren, sondern können schon das Ergebnis des Zinsszenarios und der unterschiedlichen Marktzinssensibilitäten der Teilkollektive sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.1 Wir definieren die Bausparkollektive 1 und 2, die beide nur Verträge eines Finanzierertarifs beinhalten und auch jedes Jahr dasselbe Neugeschäft in Höhe

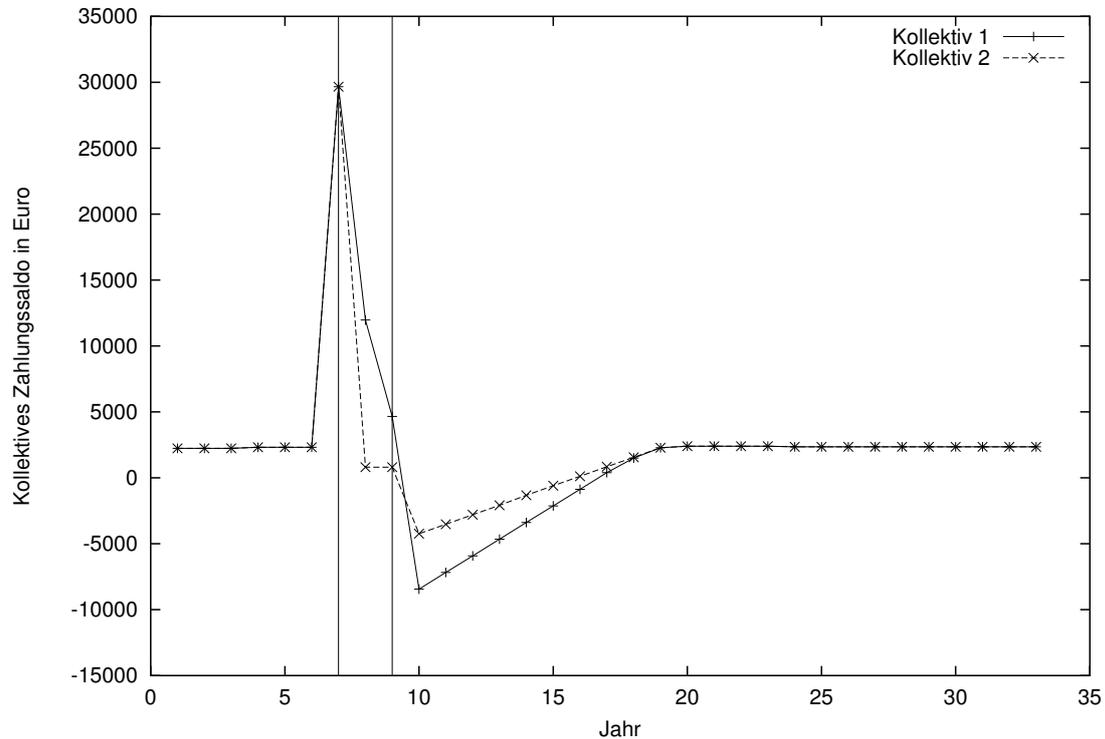


Abbildung 3.3: Saldierte Zahlungsströme der Kollektive 1 und 2

von 20.000 Euro haben. Beide Kollektive befinden sich anfangs im Beharrungszustand [BHL98], in dem es keine Kündigungen, Darlehensverzichte oder Sondertilgungen gibt. Wir gehen nun davon aus, dass sich, sobald der Marktzins unterhalb eines bestimmten Werts fällt, der kollektive Darlehensverzichts- und der Sondertilgungsanteil von 0 auf 0,5 erhöhen. In Kollektiv 1 unterscheiden wir nicht nach unterschiedlich zinssensiblen Verträgen. Bei Kollektiv 2 gehen wir jedoch davon aus, dass das Kollektiv zur Hälfte aus sehr zinssensiblen Verträgen besteht, deren Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteil von 0 auf 1 springt, sobald der Marktzins unter eine bestimmte Grenze fällt, während die andere Hälfte der Verträge bei einem Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteil von 0 bleibt. In Abbildung 3.3 sind die saldierten Zahlungsströme (Einzahlungen abzüglich aller Auszahlungen, s. auch Abschnitt 6.3.2) der beiden Kollektive dargestellt, wobei der Marktzins in den Jahren 7, 8 und 9 unterhalb der Vorteilhaftigkeitsgrenze fällt (angedeutet durch die beiden vertikalen Linien).

Das Beispiel lässt sich nun folgendermaßen interpretieren:

Während die Zahlungsströme im Jahr 7 noch übereinstimmen, weichen sie in den folgenden Jahren deutlich voneinander ab, auch dann noch, wenn sich die Marktzinsen oberhalb der Vorteilhaftigkeitsgrenze schon geraume Zeit wieder stabilisiert haben.



Abbildung 3.4: Zusammenhang zwischen Zinsszenario, marktzensabhängigen Parametern und Kollektivzusammensetzung

Die Ursache hierfür liegt in der unterschiedlichen Beeinflussung des Darlehensnehmerbestands in den beiden Kollektiven durch den Zinseinbruch. Im Kollektiv 1 kommen in den Jahren 7 bis 9 weitere Darlehensnehmer hinzu, von denen pro Jahr die Hälfte das Darlehen gleich wieder via Sondertilgung ablöst. Im Gegensatz dazu führt in Kollektiv 2 die marktzenssensible Hälfte der Verträge in der Darlehensphase im Jahr 7 eine vollständige Ablösung der Darlehen durch, so dass im Darlehensbestand nur noch völlig zinsunsensible Verträge verbleiben, die überhaupt keine Sondertilgungen durchführen. Da aufgrund des 100%-igen Darlehensverzichtsanteils der zinsunsensiblen Verträge keine solchen Verträge mehr in die Darlehensphase kommen, gibt es auch ab dem Jahr 8 keine Ablösungen mehr im Kollektiv 2.

Am Ende der Niedrigzinsphase ist aus diesem Grund der Darlehensbestand in Kollektiv 1 stärker geschrumpft als in Kollektiv 2, so dass sich in den darauf folgenden Jahren die Darlehensbestände wieder annähern müssen, um in den gemeinsamen Beharrungszustand zurückzukehren.

Wir verdeutlichen den Zusammenhang noch einmal anhand Abbildung 3.4. Die Reaktion der Parameter im Gesamtkollektiv hängt neben dem Zinsszenario auch von den Anteilen der unterschiedlich reagierenden Teilkollektive am Gesamtkollektiv ab. Diese unterschiedlichen Reaktionen führen selbst aber wiederum zu einer veränderten Zusammensetzung des Gesamtkollektivs, so dass hier eine Interdependenz besteht. Indirekt führt auf diese Weise das jeweilige Zinsszenario zu Umschichtungen im Bauparkkollektiv. Dieser Zusammenhang soll im Regressionsmodell mit abgebildet werden können.

Da a priori nicht bekannt ist, welche Merkmale bzw. Merkmalskombinationen ein sehr spezifisches Regressionsverhalten implizieren, liegt der Gedanke nahe, das Gesamtkollektiv anhand vorher festgelegter, möglicherweise relevanter Merkmale zu zerlegen und anschließend für jedes dieser Teilkollektive eine Schätzfunktion zu bestimmen. Da dieses Verfahren zu einer sehr feinen Zerlegung des Gesamtkollektivs in sehr viele Teilkollektive führt, bietet es sich – alleine aus Gründen der Recheneffizienz – bei der späteren Simulation an, Teilkollektive, die sich bezüglich ihres Regressionsverhaltens wenig unterscheiden, zusammenzufassen.

Wir kommen damit zu einem *Clusterproblem*, da wir Gruppen (Cluster) von Clusterobjekten erzeugen wollen, die intern möglichst homogen und untereinander möglichst

heterogen sein sollen, wobei die Güte der Regression als Proximitätsmaß fungiert. Als Zerlegungskriterien verwenden wir hier ausschließlich statische Vertragsmerkmale, d. h. solche Merkmale, die zu jedem Zeitpunkt für jeden Vertrag messbar sind. Grundsätzlich ist natürlich nicht auszuschließen, dass z. B. ein bestimmtes Vertragsalter bei Zuteilung oder ein bestimmtes Sparverhalten Einfluss auf Darlehensverzichte oder Sondertilgungen⁴ hat. Da diese Merkmale nicht für jeden Vertrag eines Bausparkollektivs feststellbar sind, können wir sie für eine Zerlegung des Gesamtbestands nur bedingt nutzen.

3.2 Regressionsanalyse

In diesem Abschnitt müssen zunächst einige sachlogische Anforderungen an ein geeignetes Regressionsmodell formuliert werden, bevor einige potentiell geeignete Modelle aus der Literatur vorgestellt werden. Danach werden anhand realer Daten verschiedene Modellansätze konkretisiert und auf ihre Eignung hin überprüft.

Wir verwenden in diesem Abschnitt die in Tabelle 3.1 zusammengefasste Notation.

3.2.1 Grundlegende Überlegungen zur Wahl des Regressionsmodells

Vor der Darstellung konkreter Regressionsmodelle sollen zunächst einige Anforderungen an entsprechende zu unterstellende funktionale Zusammenhänge zwischen den Regressoren und den Regressanden formuliert werden. Diese Anforderungen ergeben sich sowohl aus sachlogischen Zusammenhängen als auch aus der Art und Weise der Ermittlung der zu Grunde liegenden Daten:

1. Berücksichtigung der Vorteilhaftigkeitsgrenze

Auf Grund der ausführlich dargelegten Bedeutung dieser Grenze kann davon ausgegangen werden, dass sich das Verhalten der Bausparer ober- und unterhalb dieser Grenze deutlich unterscheidet, so dass ober- und unterhalb dieser Grenze unterschiedliche Funktionsparameter benutzt werden sollten (s. auch [Wei99]). Wir fordern aber, dass beiderseits dieser Grenze mit demselben Funktionstyp gearbeitet wird. Wir erhalten damit folgende Struktur:

$$\hat{y} = f(x) = \begin{cases} f_o(x) & \text{falls } x > v \\ f_u(x) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Eine solche Struktur erlaubt zumindest grundsätzlich für einen bestimmten Tarif ermittelte Regressionsfunktionen auch auf neue Tarife mit anderen Zinssätzen durch eine Verschiebung der Vorteilhaftigkeitsgrenze v zu übertragen.

⁴In [Cie02] wird mit Hilfe einer Logit-Analyse ein Zusammenhang zwischen Sondertilgungswahrscheinlichkeit und dem Sparverhalten empirisch festgestellt.

$BSDV_t$ $BSST_t$ v h_t g_t	bauparsummengewichteter Darlehensverzichtsanteil bauparsummengewichteter Sondertilgungsanteil Vorteilhaftigkeitsgrenze, zugleich Effektivzins des Bauspardarlehens minimaler 10-Jahres-Hypothekenzinssatz des Jahres t minimaler Zinssatz für Sparbriefe mit vierjähriger Laufzeit des Jahres t
Y $y' = (y_1, \dots, y_T)$ \bar{y} X_1, \dots, X_K X $x'_t = (x_{t1}, \dots, x_{tK})$	abhängiges Merkmal, Regressand Vektor der T Beobachtungen arithmetisches Mittel der y_1, \dots, y_T erklärende Merkmale, Regressoren Beobachtungsmatrix t -ter Beobachtungsvektor der Regressoren, Zeilenvek- tor von X
β $e' = (e_1, \dots, e_T)$ $\hat{\beta}$ $\hat{y}' = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_T)$ $\hat{e} = y - \hat{y}$ $S = \hat{e}'\hat{e}$	Vektor der Regressionskoeffizienten Vektor der Störterme Gewöhnlicher Kleinste-Quadrate-Schätzer für β Schätzer für den Regressanden Vektor der Schätzfehler (Residuen) Quadratsumme der Residuen
$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_G)$ $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_{(K-G)})$ $z'_t = (z_{t1}, \dots, z_{t(K-G)})$	Koeffizientenvektor der endogenen Variablen Koeffizientenvektor der exogenen Variablen t -ter Beobachtungsvektor der exogenen Variablen
$B_{Y,(X_1, \dots, X_K)}$ $\tilde{B}_{Y,(X_1, \dots, X_K)}$ U	das (multiple) Bestimmtheitsmaß das adjustierte (multiple) Bestimmtheitsmaß Prüfstatistik für F -Test

Tabelle 3.1: Notation zur Regressionsanalyse

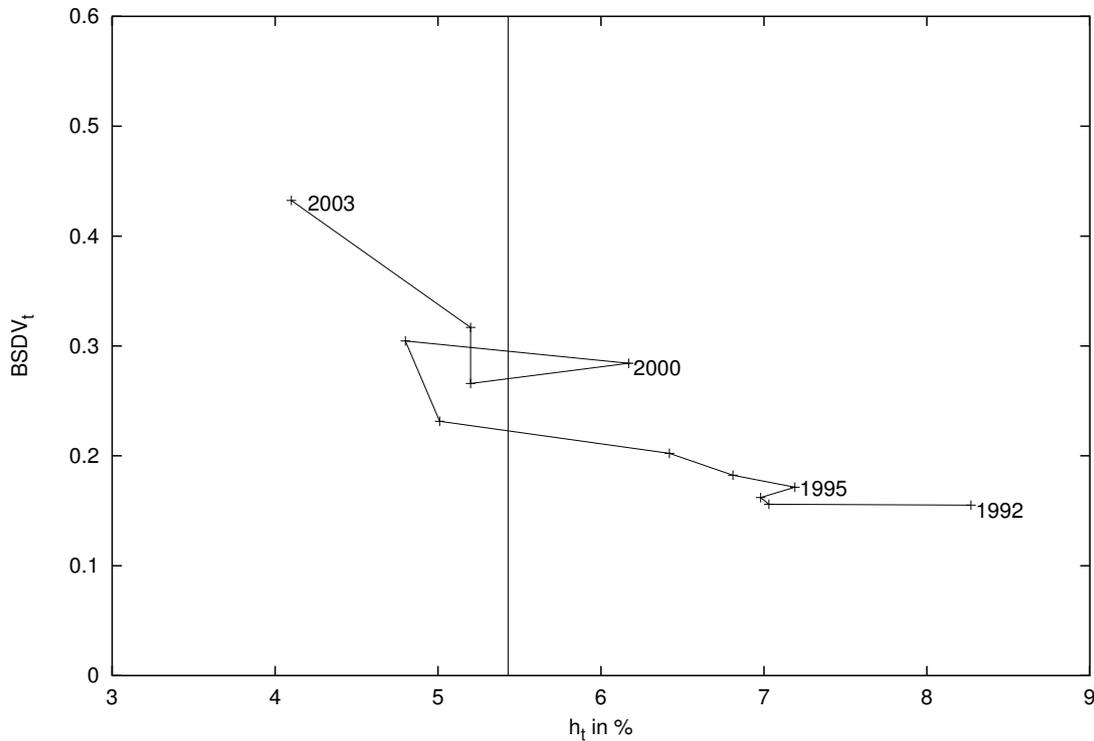


Abbildung 3.5: Darlehensverzichtsanteile des Gesamtkollektivs in Abhängigkeit vom vergleichbaren Marktzins im zeitlichen Verlauf

2. Berücksichtigung der Trägheit

Wir betrachten in der Abbildung 3.5 die von der Gestalt her typische Abhängigkeit zwischen den Darlehensverzichtsanteilen $BSDV_t$ des Gesamtkollektivs und den vergleichbaren Marktzinsen h_t zwischen 1992 und 2003. Zusätzlich eingetragen ist die Vorteilhaftigkeitsgrenze v als vertikale Linie. Der zeitliche Verlauf ist durch die die einzelnen Punkte verbindende Linie dargestellt.

Bei der Betrachtung der Darlehensverzichtsanteile fällt sofort die insbesondere in den Jahren 1995 und 2000 deutlich hervortretende Trägheit bzw. „Hysterese“ dieser Größe auf. Diese Trägheit ist besonders für die Darlehensverzichtsanteile typisch und resultiert im Wesentlichen aus folgenden zwei Ursachen:

Darlehensverzichtsverschub: Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, führt die Entscheidung des Bausparers, ein Hypothekendarlehen zu Marktkonditionen dem Bauspardarlehen vorzuziehen nicht zwangsläufig direkt zu einem Darlehensverzicht. Mit seiner Verzichtserklärung kann sich der Bausparer mindestens zwei Jahre lang Zeit lassen, ohne seine Darlehensansprü-

che zu verlieren oder andere Nachteile zu erleiden, sofern keine Bereithaltungszinsen erhoben werden.

Ermittlung der Daten: Die zweite Ursache besteht darin, dass als h_t jeweils nur der minimale Hypothekenzins des Jahres t herangezogen wird, während der Darlehensverzichtsanteil $BSDV_t$ nur über das komplette Jahr ermittelt werden kann. Dieser Umstand führt tendenziell dazu, dass bei sinkenden Zinsen die Darlehensverzichtsanteile nur verzögert reagieren, da über das Gesamtjahr t gesehen die Zinsen höher als h_t waren. Im Gegensatz zum Darlehensverzichtsvershub ist dieser Effekt auch für die Schätzung der Sondertilgungsanteile relevant.

Die Problematik der Datenermittlung führt damit zwangsläufig zu gewissen Schätzfehlern, da unterjährige Zins- und Zuteilungsschwankungen in dem Modell nicht erfasst werden können, sicherlich aber einen Einfluss auf die zu schätzenden Regressanden haben. Die resultierenden Fehler schlagen sich daher voll in den Residuen nieder.

Die Güte der Modellierung ist damit stark abhängig von der Fähigkeit des Regressionsmodells, diese charakteristische Trägheit abbilden zu können.

3. Eingehende Größen

Weitere Faktoren neben den h_t bzw. g_t und den $BSDV_t$ bzw. $BSST_t$ sollen im Regressionsmodell selbst nicht berücksichtigt werden, sondern gehen ggf. über die Zerlegung in Teilkollektive mit ein.

3.2.2 Das klassische lineare Regressionsmodell

Bei dem klassischen linearen Regressionsmodell [FCHJ84] gehen wir davon aus, dass wir y_1, y_2, \dots, y_T Beobachtungen des Merkmals Y haben, die in linearem Zusammenhang mit den Regressoren X_1, X_2, \dots, X_K stehen.

Definition 3.1 (Klassisches lineares Regressionsmodell) *Im klassischen linearen Regressionsmodell wird folgender Zusammenhang zwischen Regressand und Regressoren unterstellt:*

$$y = X\beta + e \quad (3.6)$$

wobei

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{TK} \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Formulierung gehen wir von folgenden Annahmen aus:

1. Die Matrix X hat den Rang $K \leq T$ und ist nicht stochastisch. Zudem gilt für unendlich viele Beobachtungen, dass die Matrix $Q = \lim_{T \rightarrow \infty} (X'X/T)$ endlich und nicht-singulär sein soll.
2. Der Vektor e besteht aus den nicht-beobachtbaren, zufälligen Fehlern, mit den Erwartungswerten $E[e] = 0$ und $E[ee'] = \sigma^2 I$.

Bevor wir das Modell anwenden können, stellt sich das Problem, zunächst Werte für die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ anhand der durch die T Beobachtungen gegebenen $y_t, x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tK}$ zu finden. Dieses erfolgt in der Regel durch folgenden, weitverbreiteten Schätzer:

Definition 3.2 (Gewöhnlicher Kleinste-Quadrate-Schätzer) Der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer bzw. ordinary least squares estimator (OLSE) $\hat{\beta}$ ist im klassischen linearen Regressionsmodell durch

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (3.7)$$

gegeben.

Dieser Schätzer verdankt seine Bezeichnung der folgenden Eigenschaft:

Satz 3.1 Der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}$ minimiert im klassischen linearen Regressionsmodell die Residualquadratsumme S .

Beweis: Die Residualquadratsumme S ist gegeben durch

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \beta_1 x_{t1} - \dots - \beta_K x_{tK})^2 = (y - X\beta)'(y - X\beta). \quad (3.8)$$

Zur Minimierung von S leiten wir als notwendige Bedingung 3.8 nach β ab und setzen die erste Ableitung auf Null:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow X'X\hat{\beta} = X'y \quad (3.10)$$

Da X gemäß Annahme Rang K hat, existiert $(X'X)^{-1}$, so dass wir nach $\hat{\beta}$ auflösen können:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (3.11)$$

Da die aus der zweiten Ableitung resultierende Matrix

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'} = 2X'X \quad (3.12)$$

offenbar positiv definit ist, minimiert $\hat{\beta}$ Gleichung 3.8. \square

Dem gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzer sind zudem weitere sehr wünschenswerte Eigenschaften zu Eigen, die es hier noch kurz zu definieren gilt:

Definition 3.3 (Erwartungstreue) Sei β^* ein Schätzer für β . Gilt $E[\beta^*] = \beta$ so heißt β^* erwartungstreu bzw. synonym auch unverzerrt.

Definition 3.4 (Effizienz) Sei β^* ein erwartungstreuer Schätzer bezüglich einer bestimmten Klasse von Schätzfunktionen. Dann heißt β^* effizient, falls kein anderer Schätzer derselben Klasse eine geringere Varianz hat.

Satz 3.2 (Gauss-Markov-Theorem) Sind die Annahmen des klassischen linearen Regressionsmodells erfüllt, so ist der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}$ erwartungstreu und effizient bezüglich der Klasse der linearen, erwartungstreuen Schätzer.

Beweis: Wir ersetzen in 3.7 y durch 3.6 und erhalten

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + e) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'e \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'e\end{aligned}\tag{3.13}$$

Da X nicht stochastisch ist, gilt für den Erwartungswert von $\hat{\beta}$:

$$E[\hat{\beta}] = \beta + (X'X)^{-1}X'E[e].\tag{3.14}$$

Aus der Annahme der Definition 3.1, dass $E[e] = 0$ gilt, folgt damit sofort die Erwartungstreue:

$$E[\hat{\beta}] = \beta\tag{3.15}$$

Für die Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}$ gilt gemäß Definition

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])'] \\ &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'].\end{aligned}\tag{3.16}$$

Durch Einsetzen von 3.13 erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}) &= E[((X'X)^{-1}X'e)((X'X)^{-1}X'e)'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'ee'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E[ee']X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\sigma^2IX(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Zum Beweis der Effizienz von $\hat{\beta}$ wählen wir einen alternativen linearen Schätzer $\beta^* = Hy$. O.B.d.A. gelte

$$H = (X'X)^{-1}X' + C \quad (3.18)$$

mit C als Matrix konstanter Einträge. Dann gilt sowohl

$$\beta^* = Hy = HX\beta + He \quad (3.19)$$

als auch

$$E[\beta^*] = HX\beta. \quad (3.20)$$

Wir erhalten durch Einsetzen

$$HX = (X'X)^{-1}X'X + CX = I + CX. \quad (3.21)$$

Auf Grund der Erwartungstreue des Schätzers β^* folgt $HX = I$. Diese Aussage ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $CX = 0$. Für die Kovarianzmatrix von β^* gilt mit 3.19 und $HX = I$ offenbar

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\beta^*) &= E[Hee'H'] \\ &= E[((X'X)^{-1}X' + C)ee'(X(X'X)^{-1} + C')] \\ &= \sigma^2[(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'C' + CX(X'X)^{-1} + CC'] \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2CC' \text{ da } CX = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da σ^2CC' positiv semidefinit ist, sind alle Einträge auf der Diagonalen ≥ 0 . Hieraus folgt mit 3.17 die Effizienz des gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzers $\hat{\beta}$, da

$$\text{Var}(\beta_i^*) = \text{Var}(\hat{\beta}_i) + (\sigma^2CC^T)_{ii} \geq \text{Var}(\hat{\beta}_i) \quad \forall i = 1, \dots, K \quad (3.23)$$

□

Haben die Störterme e_i nicht mehr die gleiche Varianz oder existieren beispielsweise Korrelationen zwischen ihnen, so geht die Effizienz des gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzers verloren, da wir von der Kovarianzmatrix σ^2I zu einer allgemeineren Kovarianzmatrix $\sigma^2\Omega$ übergehen müssen. In diesem Fall bietet sich der Übergang zum im Theorem von Aitken (1935) formalisierten *generalisierten Kleinste-Quadrate-Schätzer (GLSE)* an, um einen effizienten Schätzer zu bestimmen [FCHJ84].

Das klassische lineare Regressionsmodell ist nicht zwangsläufig auf lineare Zusammenhänge zwischen Regressor und Regressand beschränkt. Durch Umbenennung der Regressoren lassen sich zumindest eingeschränkt auch nichtlineare Regressionsgleichungen im Modellrahmen der Definition 3.1 betrachten (s. [HEK93] bzw. Abschnitt 3.2.5).

3.2.3 Autoregressive Regressionsmodelle

Sind wir bei dem klassischen linearen Regressionmodell noch davon ausgegangen, dass die Regressanden y_t sich ausschließlich durch die Regressorenwerte x_{t1}, \dots, x_{tK} sowie einen zufälligen Fehler e_t erklären lassen, so ist bei Zeitreihen manchmal auch der Rückgriff auf die Werte der Regressanden der G Vorperioden y_{t-1}, \dots, y_{t-G} nötig. Hieraus resultiert die Unterscheidung in *exogene* Variablen Z_1, \dots, Z_{K-G} und *endogene* Variablen Y_{-1}, \dots, Y_{-G} wobei der Index der Y die Zeitverzögerung bzw. den „lag“ in Perioden angibt. Darauf beruht die in der englischsprachigen Literatur gebräuchliche Bezeichnung „lagged dependent variable model“ für solche Regressionsmodelle [HEK93]. Eine allgemeine Form solcher (linearer) autoregressiver Regressionsmodelle wird in [FCHJ84] dargestellt:

Definition 3.5 (Lineares autoregressives Regressionsmodell) *Das lineare autoregressive Regressionsmodell hat die Form*

$$y_t = \sum_{l=1}^G \alpha_l y_{t-l} + z_t' \gamma + e_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.24)$$

In dieser Notation teilen sich die insgesamt K erklärenden Variablen auf in G endogene und $(K - G)$ exogene Variablen. Die Faktoren α_l dienen der Gewichtung der G endogenen Variablen, der Vektor γ gewichtet den Vektor der exogenen Variablen z_t . Hierzu werden folgende Annahmen getroffen:

1. *Die Fehler e_t sind unabhängig gleichverteilt.*
2. *Zur Sicherstellung der (schwachen) Stationarität des autoregressiven Prozesses (vgl. [SS84]) müssen die (komplexen) Nullstellen des Polynoms*

$$\lambda^G - \alpha_1 \lambda^{G-1} - \dots - \alpha_{G-1} \lambda - \alpha_G = 0 \quad (3.25)$$

betragsmäßig kleiner 1 sein.

3. *Ferner gilt für $\eta = 1, 2, \dots$, dass die Matrix*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \eta} \sum_{t=1}^{T-\eta} z_t z_{t+\eta}' = Q_\eta \quad (3.26)$$

für alle η existiert und für $\eta = 0$ nicht singulär ist.

Die Schreibweise von Gleichung 3.24 lässt sich leicht in die bereits bekannte Darstellung

$$y = X\beta + e \quad (3.27)$$

transformieren, indem wir

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_G \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{K-G} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$X = \begin{pmatrix} y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-G+1} & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1(K-G)} \\ y_1 & y_0 & \cdots & y_{-G+2} & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2(K-G)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-G} & z_{T1} & z_{T2} & \cdots & z_{T(K-G)} \end{pmatrix}$$

setzen.

Auf diese Weise behandelt man die verzögerten Variablen so, als ob sie Regressoren im Sinne des klassischen linearen Regressionsmodells wären. Neben den T Beobachtungen z_t benötigen wir offensichtlich zusätzlich die G vorhergehenden Beobachtungswerte von y , so dass wir insgesamt $T + G$ Beobachtungen benötigen. Zur Bestimmung der Parameterwerte lässt sich basierend auf dieser Form der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer nach 3.7 berechnen.

Satz 3.3 *Der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer für β ist im autoregressiven Regressionsmodell bei wenigen Beobachtungen verzerrt.*

Beweis: Die Zeilen von X enthalten y_{t-1}, \dots, y_{t-G} und sind daher nicht unabhängig von e_{t-1}, \dots, e_{t-G} . Daher gilt

$$E[(X'X)^{-1}X'e] \neq 0 \quad (3.28)$$

und mit 3.13 folgt

$$E[\hat{\beta}] \neq \beta. \quad (3.29)$$

□

Allerdings kann in [FCHJ84] die Aussage getroffen werden, dass der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer im autoregressiven linearen Regressionsmodell zumindest asymptotisch über die gleichen Eigenschaften verfügt wie im klassischen linearen Regressionsmodell.

Definition 3.6 (Konsistenter Schätzer) Sei $\hat{\beta}$ ein Schätzer für β . Dann heißt der Schätzer $\hat{\beta}$ genau dann konsistent, wenn $\hat{\beta}$ stochastisch gegen β konvergiert.

Satz 3.4 (Konsistenz des OLSE) Der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer ist für das lineare autoregressive Regressionsmodell ein konsistenter Schätzer.

Beweis: Siehe [FCHJ84].

3.2.4 Gütemaße der Regression

Bestimmtheitsmaß

Analog zur Bestimmung der Modellparameter setzt auch das (*multiple*) Bestimmtheitsmaß [HEK93] der Regression bei der Summe der quadrierten Fehler der Schätzung an:

Definition 3.7 (Multiples Bestimmtheitsmaß) Das multiple Bestimmtheitsmaß ist definiert durch

$$B_{Y, X_1, \dots, X_K} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}. \quad (3.30)$$

Es gibt somit an, welcher Anteil der Varianz des Merkmals Y durch die Regressoren X_1, \dots, X_K erklärt werden kann.

Adjustiertes Bestimmtheitsmaß

Offenbar können wir das Bestimmtheitsmaß alleine dadurch verbessern, dass wir immer mehr Regressoren im Modell berücksichtigen. Auf diese Weise ist es stets möglich, das maximale Bestimmtheitsmaß von eins zu erreichen, indem wir ebenso viele Regressoren wie Beobachtungen $T = K$ wählen, gleichgültig wie sinnvoll oder unsinnig der sachliche Zusammenhang zwischen Regressoren und Regressand ist. Um diesen schwerwiegenden Nachteil des Bestimmtheitsmaßes auszugleichen, wurde das korrigierte Bestimmtheitsmaß eingeführt [Job91]:

Definition 3.8 (Adjustiertes multiples Bestimmtheitsmaß) Das multiple Bestimmtheitsmaß ist gegeben durch

$$\tilde{B}_{Y, X_1, \dots, X_K} = 1 - \frac{T-1}{T-K} \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (3.31)$$

$$= 1 - \frac{T-1}{T-K} (1 - B_{Y, X_1, \dots, X_K}). \quad (3.32)$$

Der in Gleichung 3.31 im Vergleich zu Gleichung 3.30 neu hinzugekommene Bruch lässt sich offenbar als Strafterm für die Erhöhung der Anzahl K der Regressoren werten und wirkt der damit verbundenen Verringerung des Schätzfehlers entgegen.

F-Test

Wir möchten nun die Hypothese

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_K = 0 \quad (3.33)$$

testen. Hierbei wird davon ausgegangen, dass β_1 den Achsenabschnitt bezeichnet⁵ und alle Residuen identisch normalverteilt sind. Die Testgröße

$$U = \frac{T - K}{K - 1} \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2} \quad (3.34)$$

ist dann $F_{K-1, T-K}$ -verteilt.

Trifft die Nullhypothese zu, so haben die Regressoren keinen Einfluss auf den Regressanden, sondern dieser ist vielmehr zufällig um seinen Mittelwert verteilt. Die Regression müsste bei Gültigkeit der Hypothese demnach vollständig verworfen werden.

Wir müssen die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau α ablehnen, wenn die Prüfgröße den kritischen Wert der F -Verteilung überschreitet, also wenn gilt:

$$U > F_{K-1, T-K}^{-1}(1 - \alpha). \quad (3.35)$$

3.2.5 Anwendung auf Realdaten

Die im Verlauf dieses Abschnitts dargestellten Resultate sollen nun zur Bestimmung eines geeigneten Regressionsmodells zur Ableitung der $BSDV_t$ und $BSST_t$ aus dem jeweiligen Zinsszenario verwendet werden.

Modellwahl

Zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteilen sowie dem Marktzins kann offenbar kein spezieller Funktionstyp ausschließlich auf Grund sachlogischer Zusammenhänge angegeben werden. Wir ziehen daher neben den naheliegenden linearen Funktionstypen zusätzlich auch einfache Funktionstypen in Betracht, welche die Abbildung eines zunehmend abflachenden Verlaufs der Anteile mit sinkendem Marktzins als auch eines zunehmend steigenden Verlaufs ermöglichen. Auf diese Weise lassen sich z. B. Sättigungs- bzw. Wachstumspänomene berücksichtigen. Welcher dieser Funktionstypen am angemessensten ist, kann nur anhand der Daten festgestellt werden. Auf Grund der in Abschnitt 3.2.1 genannten Anforderungen sollen verschiedene Funktionsparameter für die Schätzung der Anteile benutzt werden, je nachdem, ob sich h_t bzw. g_t zum Beobachtungszeitpunkt unter- oder oberhalb der Vorteilhaftigkeitsgrenze v befindet.

Die in diesem Abschnitt untersuchten Funktionstypen, die letztendlich eine gewisse willkürliche Auswahl darstellen, werden nun strukturiert vorgestellt.

⁵Dieser Fall ist dann gegeben, wenn wir einen der Spaltenvektoren der Matrix X vollständig mit Einsen füllen.

Eindimensionale Funktionstypen: Wir beginnen zunächst mit dem einfachsten Funktionstyp, indem wir ausschließlich eine Abhängigkeit der Anteile vom jeweiligen Vergleichszins desselben Zeitraums postulieren. Wir erhalten damit

$$\hat{y}_t = f(x_t) = \begin{cases} f_o(x_t) = \hat{\beta}_1^o x_t + \hat{\beta}_2^o & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t) = \hat{\beta}_1^u x_t + \hat{\beta}_2^u & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 1}$$

als lineare Schätzfunktion. Zur Berücksichtigung zunehmend steigender und abflachender Verläufe betrachten wir zusätzlich

$$\hat{y}_t = f(x_t) = \begin{cases} f_o(x_t) = \hat{\beta}_1^o x_t^2 + \hat{\beta}_2^o & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t) = \hat{\beta}_1^u x_t^2 + \hat{\beta}_2^u & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 2}$$

sowie

$$\hat{y}_t = f(x_t) = \begin{cases} f_o(x_t) = \hat{\beta}_1^o \log(x_t) + \hat{\beta}_2^o & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t) = \hat{\beta}_1^u \log(x_t) + \hat{\beta}_2^u & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 3}$$

Zweidimensionale Funktionstypen: Alleine aus theoretischer Sicht ist die in Abschnitt 3.2.1 geforderte Berücksichtigung der Trägheit durch eine eindimensionale Regressionsfunktion nicht darstellbar, da für gleiche Vergleichszinsen unterschiedliche Anteile möglich sein sollen. Wir erweitern daher die eindimensionalen Funktionstypen durch Berücksichtigung des jeweils in der Vorperiode geltenden Vergleichszinses und erhalten im linearen Fall

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^o x_t + \hat{\beta}_2^o + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^u x_t + \hat{\beta}_2^u + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 4}$$

Zur Darstellung weiterer Funktionsverläufe betrachten wir folgende Typen:

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^o x_t^2 + \hat{\beta}_2^o + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^u x_t^2 + \hat{\beta}_2^u + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 5}$$

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^o x_t^2 + \hat{\beta}_2^o + \hat{\beta}_3 x_{t-1}^2 & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^u x_t^2 + \hat{\beta}_2^u + \hat{\beta}_3 x_{t-1}^2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 6}$$

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^o \log(x_t) + \hat{\beta}_2^o + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^u \log(x_t) + \hat{\beta}_2^u + \hat{\beta}_3 x_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 7}$$

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^o \log(x_t) + \hat{\beta}_2^o + \hat{\beta}_3 \log(x_{t-1}) & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = \hat{\beta}_1^u \log(x_t) + \hat{\beta}_2^u + \hat{\beta}_3 \log(x_{t-1}) & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 8}$$

Autoregressive zweidimensionale Funktionstypen: Alternativ zur Einbeziehung des Marktzinseszinses der Vorperiode besteht auch die Möglichkeit, die Trägheit der zu schätzenden Anteile durch die Berücksichtigung des jeweiligen Anteils der Vorperiode abzubilden. Wir erhalten somit als lineare autoregressive Schätzfunktion

$$\hat{y}_t = f(x_t, y_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^o x_t + \hat{\alpha}_2^o + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^u x_t + \hat{\alpha}_2^u + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 9}$$

sowie

$$\hat{y}_t = f(x_t, y_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^o x_t^2 + \hat{\alpha}_2^o + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^u x_t^2 + \hat{\alpha}_2^u + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 10}$$

und

$$\hat{y}_t = f(x_t, y_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^o \log(x_t) + \hat{\alpha}_2^o + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{falls } x_t > v \\ f_u(x_t, y_{t-1}) = \hat{\alpha}_1^u \log(x_t) + \hat{\alpha}_2^u + \hat{\gamma}_1 y_{t-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Typ 11}$$

als weitere Funktionstypen.

Der Vorteil der autoregressiven Funktionstypen gegenüber den zweidimensionalen Funktionstypen besteht darin, dass in die Schätzung des Anteils nicht nur der Vergleichszins der jeweiligen Vorperiode, sondern implizit über den Anteil y_{t-1} auch die länger zurückliegenden Zinsen eingehen.

Die bis hierher betrachteten Funktionstypen waren maximal zweidimensional. Eine weitere Ausdehnung der Modelldimension kommt auf Grund der relativ geringen Anzahl der Beobachtungen bei den gegebenen Daten nicht in Frage, wie sich nachfolgend zeigen wird.

Zur Schätzung der Parameter für f_u bzw. f_o können wir für alle vorgestellten Funktionstypen den in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten gewöhnlichen Kleinst-Quadrat-Schätzer verwenden. Hierzu werden zunächst die Beobachtungen der Regressanden und Regressoren unter Berücksichtigung der Vorteilhaftigkeitsgrenze geeignet aufgeteilt und die Parameter für f_u und f_o auf Basis dieser Aufteilung jeweils einzeln geschätzt. Hierzu setzen wir z. B.

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_T & 1 \end{pmatrix}$$

für den Funktionstyp 1 und

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\gamma}_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} \log(x_1) & 1 & y_0 \\ \log(x_2) & 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \log(x_T) & 1 & y_{T-1} \end{pmatrix}$$

für Modelltyp 11.

Prinzipiell ist bei den zweidimensionalen Regressionsmodellen auch mit einer gewissen *Kollinearität* zu rechnen, da x_t und x_{t-1} bzw. x_t und y_{t-1} nicht völlig unabhängig sind. Eine hohe Multikollinearität führt zu höheren Varianzen bei der Schätzung der Funktionsparameter sowie zu numerischen Problemen und kann im schlimmsten Fall dazu führen, dass der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer überhaupt nicht mehr berechnet werden kann, da die Matrix $(X'X)$ singular wird. In leichteren Fällen kann Multikollinearität zu extrem großen Werten in $(X'X)^{-1}$ führen und damit zu numerischen Problemen bei der Berechnung des Schätzers [Job91].

Die betrachteten Funktionstypen erlauben prinzipiell Schätzwerte größer eins und kleiner null, was bei der Schätzung von Anteilswerten ein unsinniges Resultat ist. Da aber mit unserem Beobachtungszeitraum das Spektrum der realistischen Zinsszenarien von der Hochzins- bis hin zur absoluten Niedrigzinsphase sehr gut abgedeckt ist, kann dieser Fall praktisch ausgeschlossen werden.

3.2.6 Darlehensverzichtsanteile

Wir betrachten nun die Darlehensverzichtsanteile von 15 disjunkten Teilkollektiven⁶. Zu jedem Teilkollektiv stehen die $BSDV_{1992}$ bis $BSDV_{2003}$ mit ausreichender Signifikanz (s. Abschnitt 3.4.2) zur Verfügung, anhand derer wir die verschiedenen Funktionstypen auf ihre Eignung hin überprüfen können.

Wir setzen nun $y_0 = BSDV_{1992}, \dots, y_{11} = BSDV_{2003}$ sowie $x_0 = h_{1992}, \dots, x_{11} = h_{2003}$ und können nun für jeden Funktionstyp anhand dieser Daten die Parameter schätzen. Zur Beurteilung der verschiedenen Funktionstypen ziehen wir die in Tabelle 3.2 vertafelten Bestimmtheitsmaße heran. Das nicht mitangegebene adjustierte Bestimmtheitsmaß lässt sich mit Hilfe von Definition 3.31 auch aus der Tabelle berechnen. Allerdings ändern sich die Verhältnisse zwischen den Funktionstypen nur sehr geringfügig zugunsten der eindimensionalen Funktionstypen, so dass das adjustierte Bestimmtheitsmaß für die Wahl eines geeigneten Funktionstyps keine Rolle spielt. Zusätzlich ist die insgesamt bei der Bestimmung der $BSDV_t$ erfasste Bausparsumme der Teilkollektive als „Gewichtung“ in der Tabelle mitangegeben. Es wird hierbei offensichtlich, dass der Übergang von den eindimensionalen zu den zweidimensionalen Funktionstypen zu deutlich verbesserten Bestimmtheiten führt. Berechnet man die Prüfgröße U zur Durchführung eines F -Tests z. B. für die Teilfunktion f_u , so erhält man auf Grund der geringen Anzahl Beobachtungen im Niedrigzinsabschnitt zudem Werte, die nur in wenigen Fällen die Ablehnung der Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% erlauben. Auf Grund dessen und der bereits erreichten hohen Bestimmtheit erscheint eine Einbeziehung weiterer Regressoren nicht sinnvoll.

Wir betrachten nun in Abbildung 3.6 die graphische Darstellung der mittleren Bestimmtheiten nach Funktionstypen.

⁶Zur Bestimmung dieser Teilkollektive s. Abschnitt 3.4.2.

Teilkollektiv	BS in Mio. Euro	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5	Typ 6	Typ 7	Typ 8	Typ 9	Typ 10	Typ 11
0	602	0.847	0.845	0.849	0.975	0.974	0.973	0.977	0.977	0.853	0.851	0.855
1	486	0.791	0.79	0.792	0.897	0.898	0.886	0.896	0.907	0.868	0.872	0.864
2	680	0.891	0.883	0.897	0.941	0.936	0.933	0.946	0.947	0.987	0.988	0.985
3	392	0.794	0.787	0.8	0.906	0.904	0.889	0.908	0.921	0.946	0.948	0.944
4	368	0.892	0.883	0.9	0.945	0.938	0.936	0.951	0.952	0.986	0.986	0.987
5	330	0.859	0.85	0.868	0.923	0.917	0.914	0.929	0.93	0.97	0.97	0.97
6	213	0.731	0.726	0.736	0.856	0.855	0.852	0.857	0.86	0.93	0.93	0.93
7	208	0.814	0.807	0.82	0.923	0.922	0.913	0.925	0.932	0.952	0.952	0.951
8	354	0.893	0.884	0.901	0.926	0.919	0.921	0.932	0.93	0.992	0.992	0.991
9	401	0.879	0.869	0.888	0.918	0.91	0.912	0.925	0.922	0.973	0.972	0.973
10	75	0.819	0.807	0.83	0.834	0.822	0.823	0.845	0.845	0.933	0.919	0.943
11	90	0.681	0.674	0.687	0.853	0.855	0.834	0.851	0.871	0.845	0.845	0.846
12	131	0.715	0.709	0.72	0.922	0.921	0.909	0.923	0.933	0.833	0.834	0.833
13	175	0.803	0.795	0.811	0.839	0.832	0.835	0.846	0.844	0.887	0.858	0.914
14	127	0.76	0.745	0.775	0.773	0.757	0.756	0.787	0.788	0.804	0.79	0.815

Tabelle 3.2: Bestimmtheit der Regression der $BSDV_t$ je nach verwendetem Funktionstyp

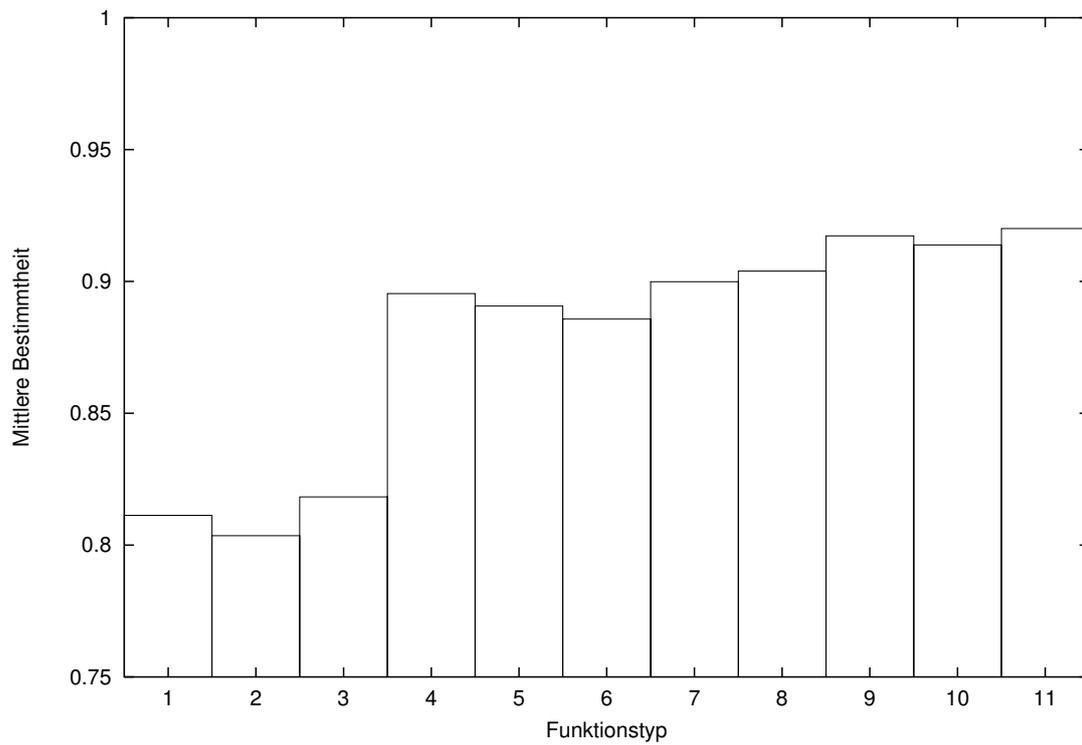


Abbildung 3.6: Mittlere Bestimmtheit der Regression der $BSDV_t$ in Abhängigkeit vom Funktionstyp

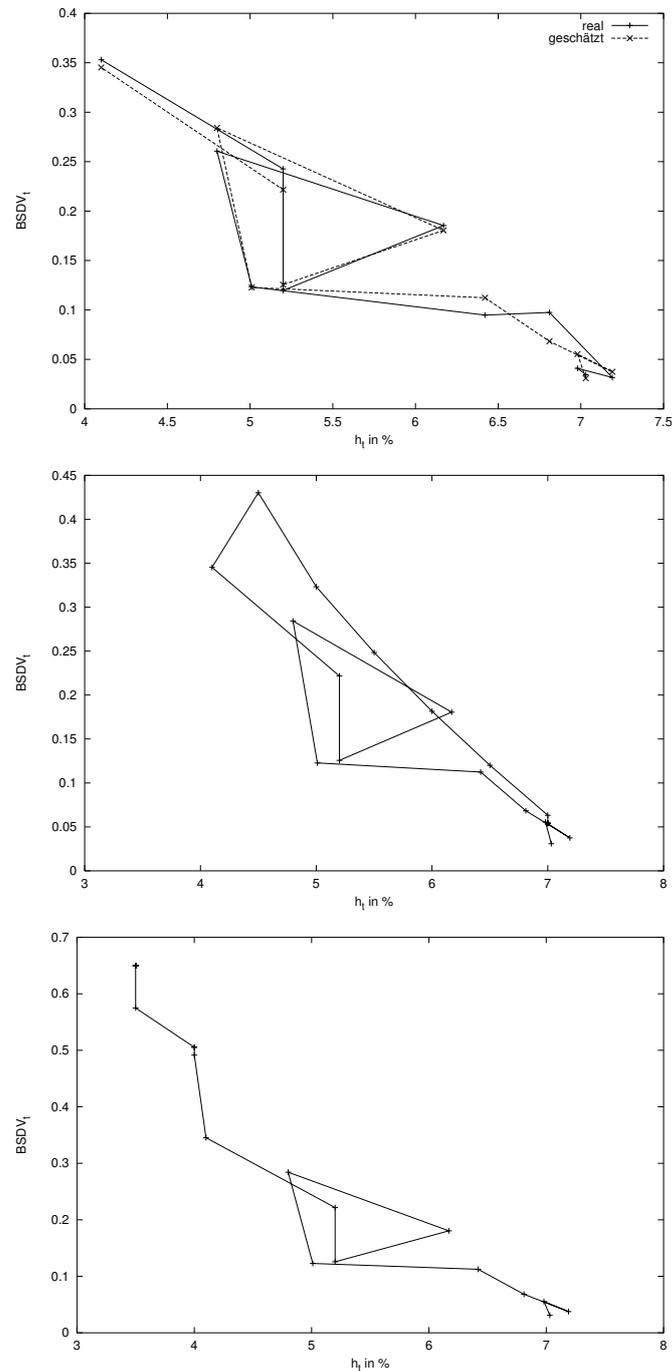


Abbildung 3.7: Reale und geschätzte $BSDV_t$ für Teilkollektiv 0. Von oben nach unten sind die realen und geschätzten $BSDV_t$ zwischen 1992 und 2003, die um ein steigendes Zinsszenario verlängerten geschätzten $BSDV_t$ und die um ein sinkendes Zinsszenario verlängerten geschätzten $BSDV_t$ dargestellt.

Die höchsten mittleren Bestimmtheiten werden offenbar durch die autoregressiven Funktionstypen erzielt. Leider garantiert der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer nicht die Einhaltung der in Definition 3.5 genannten Stationaritätsbedingung und liefert für einige Teilkollektive bei allen autoregressiven Funktionstypen Werte für $|\alpha_1| > 1$. Hieraus resultiert das Problem, dass bei konstant gehaltenen x_t die y_t gegen keinen endlichen Wert mehr konvergieren.

Wir verwerfen für die Schätzung der $BSDV_t$ daher die autoregressiven Funktionstypen und wählen den nächstbesten Funktionstyp 8. Wir erhalten so z. B. für das Teilkollektiv 0 folgende Schätzfunktion:

$$\hat{y}_t = f(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, x_{t-1}) = -0.634 \log(x_t) + 1.575 - 0.123 \log(x_{t-1}) & \text{falls } x_t > 5.43 \\ f_u(x_t, x_{t-1}) = -0.52 \log(x_t) + 2 - 0.561 \log(x_{t-1}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

In Abbildung 3.7 sehen wir neben den realen $BSDV_{1993}$ bis $BSDV_{2003}$ auch die geschätzten Werte, sowohl um ein Szenario mit sinkenden als auch um eines mit steigenden Zinsen verlängert. Die Schätzwerte der Szenarien zeigen hierbei einen recht plausiblen Verlauf, was für die Eignung des Modells spricht.

3.2.7 Sondertilgungsanteile

Zur Schätzung der Sondertilgungsanteile gehen wir analog vor. Wir betrachten nun 24 disjunkte Teilkollektive. Zu jedem Teilkollektiv stehen die $BSST_{1993}$ bis $BSST_{2003}$ mit ausreichender Signifikanz (s. Abschnitt 3.4.2) zur Verfügung, anhand derer wir die verschiedenen Funktionstypen überprüfen können. Allerdings stehen wir hier vor dem Problem, nur Beobachtungen mit $g_t < v$ vorliegen zu haben, so dass f_o nicht anhand eigener Beobachtungen geschätzt werden kann. Wir umgehen das Problem dadurch, dass wir f_o als konstant ansehen und auf den minimalen beobachteten Sondertilgungsanteil des jeweiligen Teilkollektivs setzen.

Wir definieren nun $y_0 = BSST_{1993}, \dots, y_{10} = BSST_{2003}$ sowie $x_o = g_{1993}, \dots, x_{10} = g_{2003}$ und können nun für jeden Funktionstyp anhand dieser Daten die Parameter schätzen. Die erzielten Bestimmtheitsmaße sind in Tabelle 3.3 vertafelt. Auffällig ist, dass einige Teilkollektive (insbesondere Nr. 18) sehr geringe Bestimmtheiten aufweisen. Untersucht man diese Teilkollektive näher, so erkennt man, dass diese Teilkollektive durch eine weitgehende Zinsunabhängigkeit geprägt sind.

Bei Betrachtung der mittleren Bestimmtheitsmaße in Abbildung 3.8 ergibt sich ein der Situation bei den Darlehensverzichtsanteilen sehr ähnliches Bild. Auch hier werden die besten Ergebnisse von den autoregressiven Funktionstypen erzielt.

Da die Trägheit der $BSST_t$ deutlich geringer ausgeprägt ist als bei den $BSDV_t$, führt die Verwendung des gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzers bei den gegebenen Daten stets zu $|\alpha_1| < 1$ und damit zu zulässigen autoregressiven Modellen. Angesichts der vorliegenden Daten erscheint der Funktionstyp 11 als am besten geeig-

Teilkollektiv	BS in Mio. Euro	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5	Typ 6	Typ 7	Typ 8	Typ 9	Typ 10	Typ 11
0	1780	0.847	0.84	0.825	0.956	0.949	0.944	0.948	0.945	0.93	0.926	0.915
1	942	0.728	0.705	0.73	0.878	0.863	0.857	0.886	0.887	0.858	0.835	0.874
2	2921	0.958	0.947	0.941	0.985	0.974	0.972	0.976	0.973	0.985	0.966	0.986
3	2136	0.874	0.887	0.831	0.952	0.96	0.958	0.928	0.923	0.979	0.976	0.968
4	634	0.903	0.908	0.866	0.947	0.95	0.949	0.924	0.919	0.958	0.96	0.939
5	2678	0.952	0.953	0.922	0.989	0.988	0.987	0.969	0.965	0.99	0.982	0.98
6	1227	0.857	0.853	0.836	0.938	0.934	0.931	0.929	0.927	0.969	0.953	0.976
7	822	0.882	0.875	0.861	0.959	0.952	0.948	0.95	0.948	0.933	0.932	0.911
8	114	0.827	0.877	0.741	0.86	0.9	0.902	0.796	0.786	0.86	0.904	0.791
9	589	0.897	0.877	0.889	0.955	0.938	0.933	0.955	0.955	0.962	0.94	0.965
10	2146	0.916	0.917	0.884	0.951	0.951	0.951	0.931	0.926	0.94	0.935	0.923
11	433	0.617	0.538	0.686	0.618	0.542	0.539	0.686	0.687	0.864	0.855	0.865
12	1361	0.87	0.877	0.838	0.956	0.959	0.957	0.939	0.935	0.979	0.971	0.98
13	892	0.557	0.461	0.653	0.563	0.479	0.47	0.654	0.658	0.827	0.776	0.869
14	91	0.46	0.489	0.413	0.549	0.567	0.565	0.526	0.521	0.536	0.547	0.512
15	216	0.874	0.899	0.823	0.902	0.922	0.924	0.864	0.857	0.923	0.93	0.909
16	439	0.873	0.893	0.824	0.953	0.966	0.966	0.924	0.917	0.96	0.972	0.936
17	1272	0.689	0.709	0.646	0.756	0.768	0.77	0.73	0.723	0.782	0.777	0.773
18	275	0.007	0.0	0.025	0.025	0.005	0.012	0.064	0.049	0.916	0.907	0.913
19	504	0.924	0.899	0.925	0.968	0.947	0.943	0.975	0.975	0.964	0.931	0.983
20	291	0.119	0.076	0.165	0.122	0.076	0.077	0.176	0.17	0.916	0.938	0.879
21	37	0.668	0.683	0.634	0.706	0.717	0.716	0.684	0.681	0.73	0.727	0.725
22	123	0.174	0.133	0.216	0.194	0.143	0.149	0.245	0.238	0.311	0.267	0.351
23	183	0.846	0.831	0.834	0.954	0.941	0.936	0.952	0.951	0.964	0.959	0.954

Tabelle 3.3: Bestimmtheit der Regression der $BSST_t$ je nach verwendetem Funktionstyp

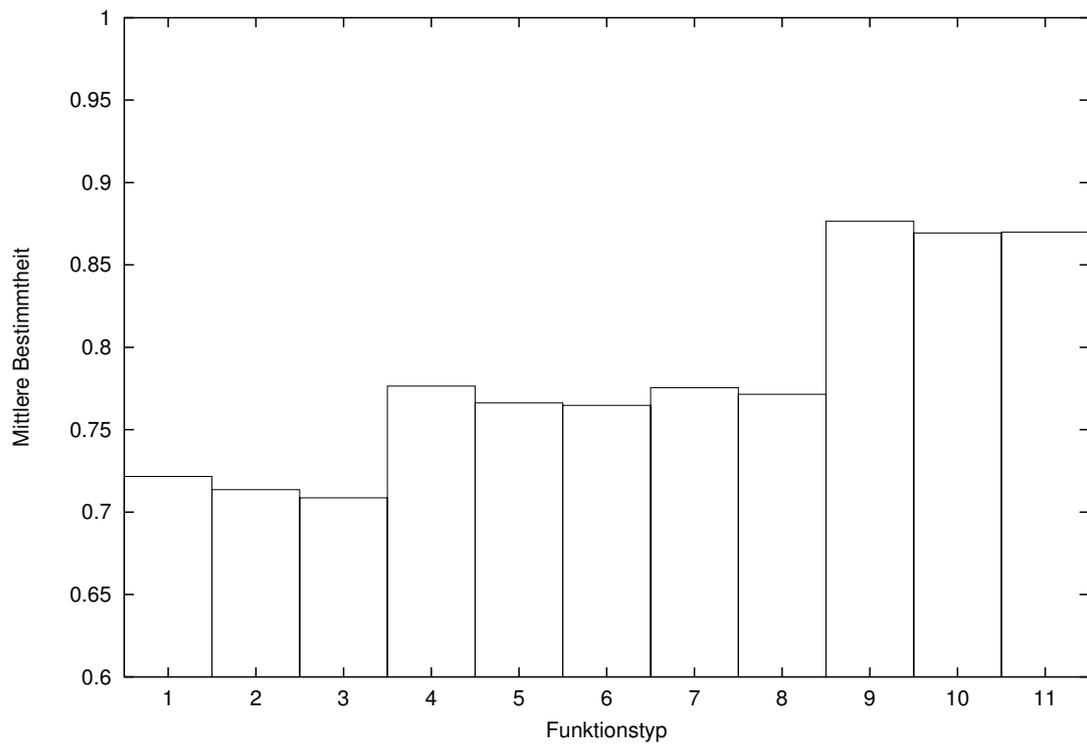


Abbildung 3.8: Mittlere Bestimmtheit der Regression der $BSST_t$ in Abhängigkeit vom Funktionstyp

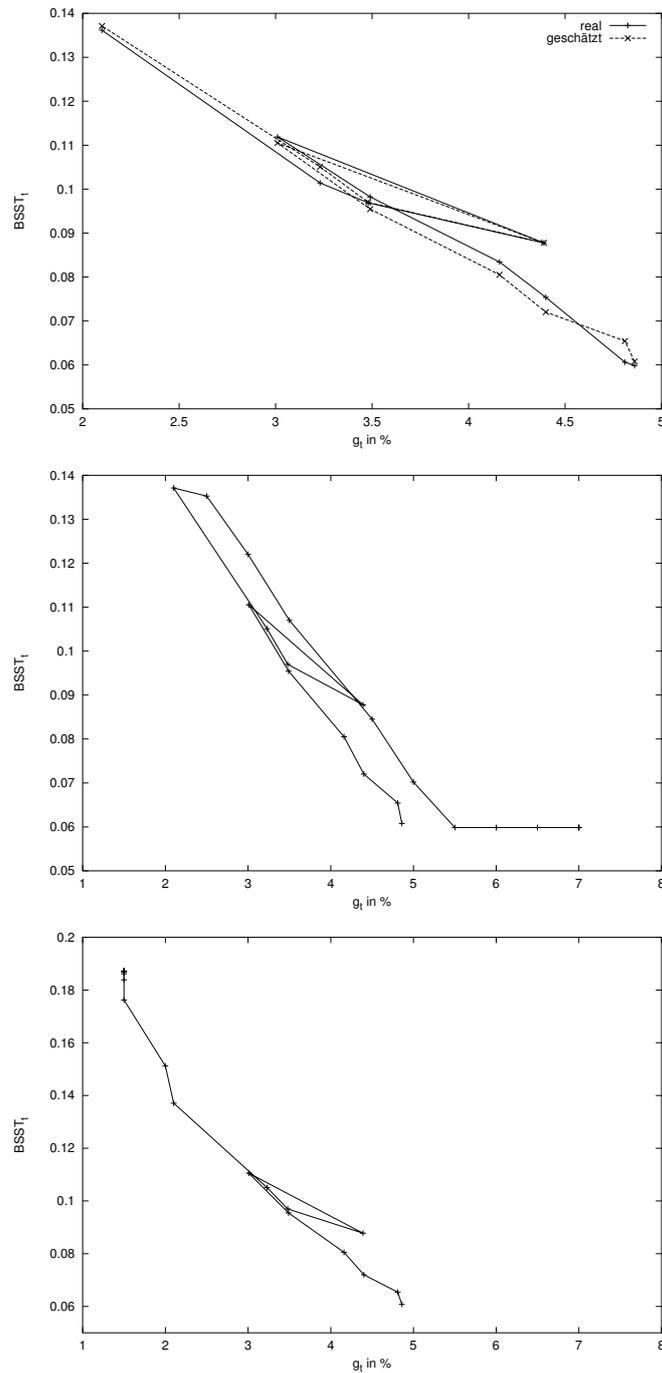


Abbildung 3.9: Reale und geschätzte $BSST_t$ für Teilkollektiv 2. Von oben nach unten sind die realen und geschätzten $BSST_t$ zwischen 1993 und 2003, die um ein steigendes Zinsszenario verlängerten geschätzten $BSST_t$ und die um ein sinkendes Zinsszenario verlängerten geschätzten $BSST_t$ dargestellt.

net. Für das (größte) Teilkollektiv 2 erhalten wir damit beispielsweise folgende Schätzfunktion:

$$\hat{y}_t = f(x_t, y_{t-1}) = \begin{cases} f_o(x_t, y_{t-1}) = 0.06 & \text{falls } x_t > 5.43 \\ f_u(x_t, y_{t-1}) = -0.071 \log(x_t) + 0.159 - 0.304y_{t-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

In Abbildung 3.9 sehen wir neben den realen $BSST_{1994}$ bis $BSST_{2003}$ auch die geschätzten Werte für das Teilkollektiv 2, sowohl um ein Szenario mit sinkenden als auch um eines mit steigenden Zinsen verlängert. Auch hier erhalten wir für die Szenarien plausible Schätzwerte.

3.3 Clusteranalyse

Allgemein verfolgt die Clusteranalyse das Ziel, in einer heterogenen Gesamtheit von Objekten homogene Teilmengen zu identifizieren. Mithin geht es um die Bildung von Gruppen oder Klassen („Clustern“) bestehend aus Clusterobjekten, wobei sich die zu einem Cluster gehörenden Clusterobjekte untereinander bezüglich eines zu definierenden Maßes möglichst ähnlich, zwischen den Clustern aber möglichst unähnlich sein sollen. Auf Grund der Allgemeinheit dieses Ansatzes finden sich zahlreiche Anwendungen in Wirtschafts-, Sozial- und Naturwissenschaften.

Für die Clusteranalyse ergibt sich stets folgender, grober Ablauf [BEPW94] :

1. Wahl des Proximitätsmaßes
Zunächst muß ein Maß definiert werden, welches die Ähnlichkeit bzw. Unähnlichkeit zwischen den Clusterobjekten auf der Basis ihrer Merkmale als Zahlenwert misst.
2. Wahl des Fusionierungsalgorithmus
Anschließend muss ein Algorithmus ausgewählt werden, der die geeignete Zusammenfassung der Objekte zu Clustern anhand des vorher definierten Proximitätsmaßes durchführt.

Wir formalisieren nun, weitgehend [KP96] folgend das Problem. Hierbei wird die in Tabelle 3.4 zusammengefasste Notation verwendet.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ der n Clusterobjekte, die in K Cluster bzw. Gruppen eingeteilt werden sollen. Die Clusterobjekte sind hierbei durch die Vektoren x_i der p gemessenen Merkmalswerte des Objekts charakterisiert. Damit erhalten wir für die Clusterobjekte eine Datenmatrix mit folgender Struktur:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$	Menge der n Clusterobjekte
$x'_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$	Merkmalsvektor der p Merkmale des Clusterobjekts i
X	Datenmatrix aller Clusterobjekte
\bar{x}_i	Arithmetisches Mittel der Merkmale des Clusterobjekts I_i
\bar{x}_{C_k}	Arithmetisches Mittel der Merkmale der zum Cluster C_k gehörigen Clusterobjekte
C	Teilmenge von \mathcal{I} , Cluster
$\mathcal{P}^*(\mathcal{I})$	Potenzmenge von \mathcal{I} ohne leere Menge
$d(I_i, I_j)$	Distanzmaß zwischen zwei Clusterobjekten
$D(C_i, C_j)$	Distanzmaß zwischen zwei Clustern
\mathcal{C}	Partition von \mathcal{I}
\mathcal{H}	Hierarchie von \mathcal{I}
h	Index zur Hierarchie \mathcal{H}

Tabelle 3.4: Notation zur Clusteranalyse

In den meisten praktischen Fällen wird nun eine disjunkte Zerlegung in Cluster gesucht.

Definition 3.9 (Partition) Eine Partition $\mathcal{C} = C_1, \dots, C_K$ bezeichnet eine disjunkte Zerlegung der Menge \mathcal{I} der Clusterobjekte in Teilmengen wobei

$$C_1 \cup \dots \cup C_K = \mathcal{I} \quad (3.37)$$

sowie

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (3.38)$$

gilt.

Verfahren, die nichtdisjunkte Cluster bilden, sind in der Literatur als „clumping methods“ bekannt und werden hier nicht weiter behandelt.

Darüber hinaus kann zwischen deskriptiven und stochastischen Verfahren unterschieden werden. Im Gegensatz zu den deskriptiven Verfahren wird bei den stochastischen Verfahren unterstellt, dass es sich bei den Beobachtungen um Zufallsvariablen handelt und die Cluster durch eine bestimmte, unbekanntes Verteilung charakterisiert sind. Unter Verwendung der geschätzten Verteilungen können nun die einzelnen Clusterobjekte den Clustern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. In diesem Abschnitt befassen wir uns jedoch ausschließlich mit deskriptiven Verfahren.

3.3.1 Proximitätsmaße

Die Festlegung eines (Un-)Ähnlichkeitsmaßes stellt offenbar einen fundamentalen Schritt bei Anwendung der Clusteranalyse dar. Im Allgemeinen fordert man von einem Distanzmaß die folgenden Eigenschaften (s. [KP96]):

Definition 3.10 (Distanzmaß) Die Funktion $d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Distanzmaß* oder *Distanzfunktion*, wenn für $i, j = 1, \dots, n$

$$d(I_i, I_i) = 0, \quad d(I_i, I_j) \geq 0 \quad \text{sowie} \quad d(I_i, I_j) = d(I_j, I_i)$$

gilt. Ist zusätzlich die Dreiecksungleichung erfüllt, so heißt d auch metrisches Distanzmaß. Die symmetrische Matrix der Distanzen zwischen den Clusterobjekten bezeichnen wir weiterhin mit D .

Da bei der Clusteranalyse die Zugehörigkeit der einzelnen Clusterobjekte zu bestimmten Clustern i. Allg. nicht a priori bekannt ist, gibt es kein richtiges oder falsches Abstandsmaß. Zur Beurteilung des Abstandsmaßes ist vielmehr die Sinnhaftigkeit der erhaltenen Klassifizierung zu bewerten.

Bei rein quantitativen Merkmalen wird häufig die euklidische (L_2 -)Distanz

$$d_2(I_i, I_j) = \sqrt{(x_i - x_j)'(x_i - x_j)} \quad (3.39)$$

$$= \|x_i - x_j\| \quad (3.40)$$

bzw. die quadrierte euklidische Distanz

$$d_2^2(I_i, I_j) = (x_i - x_j)'(x_i - x_j) \quad (3.41)$$

$$= \|x_i - x_j\|^2 \quad (3.42)$$

verwendet.

Wir benötigen nun noch ein Distanzmaß, welches den Abstand zwischen zwei Clustern misst:

Definition 3.11 (Klassen-Distanzmaß) Sei $\mathcal{P}^*(\mathcal{I})$ die Potenzmenge von \mathcal{I} ohne leere Menge. Die Funktion $D : \mathcal{P}^*(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}^*(\mathcal{I}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Klassen-Distanzmaß*, wenn

$$D(C_i, C_j) = D(C_j, C_i) \geq 0$$

gilt.

Je nach Gegenstand der Clusteranalyse können verschiedene Distanzmaße gewählt werden, die jedoch nicht zwangsläufig den Bedingungen in Definition 3.10 bzw. 3.11 genügen.

Wir wenden uns nun der algorithmischen Bestimmung von Clustern zu.

3.3.2 Hierarchische Clusterverfahren

Hierarchische Clusterverfahren konstruieren sukzessive eine Folge von Partitionen. Grundsätzlich lassen sich folgende Verfahren unterscheiden:

Agglomerative Verfahren: Die Anforderungen an die Homogenität innerhalb der Cluster wird schrittweise vermindert und Cluster werden zusammengelegt.

Divisive Verfahren: Es werden schrittweise immer höhere Anforderungen an die Homogenität der Cluster gestellt und diese immer weiter zerlegt.

Das Resultat hierarchischer Clusterverfahren wird oft sehr anschaulich als Dendrogramm dargestellt. Formal lässt sich eine Hierarchie wie folgt beschreiben:

Definition 3.12 (Hierarchie) Die Teilmenge \mathcal{H} von $\mathcal{P}^*(\mathcal{I})$ heißt Hierarchie von \mathcal{I} , wenn für verschiedene Menge $C_i, C_j \in \mathcal{H}$ genau eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft:

$$C_i \subset C_j \quad \text{oder} \quad C_j \subset C_i \quad \text{oder} \quad C_i \cap C_j = \emptyset$$

Enthält \mathcal{H} sowohl \mathcal{I} als auch $\{I_1\}, \dots, \{I_n\}$, so heißt \mathcal{H} totale Hierarchie. Die Elemente von \mathcal{H} heißen Klassen von \mathcal{H} .

Zur Messung der Homogenität einzelner Klassen muss für die Hierarchie noch ein Index definiert werden:

Definition 3.13 (Index) Ein Index zur Hierarchie \mathcal{H} ist eine für alle $C_i, C_j \in \mathcal{H}$ definierte, nichtnegative Funktion h , die für $C_i \subseteq C_j$

$$h(C_i) \leq h(C_j)$$

erfüllt. Zusätzlich gelte $h(C_i) = 0$ nur, wenn C_i nur merkmalsgleiche Clusterobjekte enthält.

Die einzelnen hierarchischen Clusterverfahren unterscheiden sich jeweils in der Wahl von h . Auch hier muss wiederum beachtet werden, dass nicht bei allen Clusterverfahren Indices eingesetzt werden, die die Bedingungen in Definition 3.13 zwangsläufig erfüllen.

Agglomerativer Clusteralgorithmus

Das allgemeine agglomerative Verfahren ist in Algorithmus 1 dargestellt. Ausgehend von der feinstmöglichen Partition werden in jedem Schritt die beiden ähnlichsten Klassen zusammengelegt, bis die Partition einelementig ist. Auf diese Weise können wir eine totale indizierte Hierarchie konstruieren.

Das Verfahren von Ward

Wir betrachten nun mit dem Verfahren von Ward [War63] ein konkretes und weit verbreitetes agglomeratives Clusterverfahren. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass die Merkmale zumindest intervallskaliert sind. Das Verfahren bildet Clusterzentren als

Algorithmus 1 Allgemeines agglomeratives Clusterverfahren

```

 $v := 0, h_0(I_i) := 0, \mathcal{C}^0 := \{\{I_1\}, \dots, \{I_n\}\}$ 
while  $\mathcal{C}^v \neq \mathcal{I}$  do
    Bestimme Partition  $\mathcal{C}^{v+1}$  durch Fusionierung von  $C_i, C_j \in \mathcal{C}^v$  mit  $D(C_i, C_j), i \neq j$ 
    minimal und Übernahme aller übrigen  $C_k \in \mathcal{C}^v$ 
     $h_v(C_i \cup C_j) := D(C_i, C_j)$ 
     $v := v + 1$ 
end while

```

Repräsentanten des gesamten Clusters. Diese Clusterzentren werden durch Mittelwertbildung der Merkmale der zugehörigen Clusterobjekte bestimmt [Bac94].

Dem Ansatz des Verfahrens liegt die Idee zu Grunde, dass in jedem Fusionsschritt der Verlust an Homogenität minimal sein soll. Die Homogenität H wird hierbei als Summe der Streuungen innerhalb der jeweils $K = (n - v)$ Cluster

$$H(\mathcal{C}^v) = \sum_{k=1}^K \sum_{I_i \in C_k} \|x_i - \bar{x}_{C_k}\|^2 \quad (3.43)$$

bestimmt. Der in jedem Schritt eintretende Homogenitätsverlust wird somit als Index h_v verwendet.

3.3.3 Partitionierende Clusterverfahren

Bei partitionierenden Clusterverfahren wird versucht, eine bezüglich eines bestimmten Gütekriteriums optimale Partition $\mathcal{C}^{opt} = \{C_1, \dots, C_K\}$ bei gegebener Clusteranzahl K zu finden. Wir können daher etwas formaler

$$\mathcal{C}^{opt} = \arg \max_{\mathcal{C} \in \Gamma} f(\mathcal{C}) \quad (3.44)$$

bzw.

$$\mathcal{C}^{opt} = \arg \min_{\mathcal{C} \in \Gamma} f(\mathcal{C}) \quad (3.45)$$

schreiben, wobei die Zielfunktion f das zu maximierende bzw. minimierende Gütekriterium ist und Γ die Menge aller zulässigen Partitionen mit K Clustern.

Das Optimierungsproblem ist mit Ausnahme einiger Spezialfälle \mathcal{NP} -schwer [GJ79, Van96]. Aus diesem Grund wird in der Praxis versucht, aus einer gegebenen Startpartition mit Hilfe von Verbesserungsheuristiken (insbesondere Austauschverfahren) iterativ eine möglichst gute Lösung zu erzeugen.

K -Means

Das Ziel des in [Mac67] vorgestellten K -Means-Algorithmus besteht darin, Clusterzentren für K Cluster so zu berechnen, dass die Streuungsquadratsumme innerhalb der Cluster minimal über alle Cluster wird, d. h.

$$f_{\Sigma}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^K \sum_{I_n \in C_k} \|x_n - \bar{x}_{C_k}\|^2 \rightarrow \min. \quad (3.46)$$

Der K -Means Algorithmus verbessert nach Wahl einer Startlösung sukzessive den Zielfunktionswert durch den Austausch von Clusterobjekten und anschließender Neuberechnung der Clusterzentren. Ist eine Verbesserung durch den Austausch einzelner Clusterobjekte nicht mehr möglich, terminiert das Verfahren.

Leider liefert der K -Means-Algorithmus bezüglich der Zielfunktion nur lokal optimale Lösungen [BB95], das Auffinden eines globalen Optimums ist bereits ab $K \geq 2$ \mathcal{NP} -schwer [DFK⁺04].

Der Ansatz des K -Means-Verfahrens ähnelt offenbar recht stark dem des Ward-Verfahrens. Brechen wir z. B. das Verfahren von Ward bei der Erreichung von K Clustern ab, so können wir das Verfahren als Greedy-Heuristik für das K -Means-Optimierungsproblem betrachten.

3.3.4 Bestimmung der Clusteranzahl

Es werden nun einige Kriterien vorgestellt, die der Beantwortung der nicht-trivialen Frage nach der „besten“ Anzahl K Cluster bei Einsatz des Ward- bzw. K -Means-Verfahrens dienen. Aus der Literatur sind verschiedene Maßzahlen (Clusterindices) bekannt, so dass man diese Maßzahlen abhängig von der Clusteranzahl grafisch darstellen und analysieren kann. Für die verschiedenen Clusterindices werden nun Extrema oder Sprungstellen gesucht, wobei das Ergebnis keinesweg eindeutig sein muss. Daher bieten die vorgestellten Clusterindices lediglich eine Entscheidungshilfe. Die Anzahl der Cluster ist nur eine von mehreren Entscheidungen, die im Rahmen einer Clusteranalyse getroffen werden müssen, so dass die Güte des Gesamtverfahrens letztlich nur durch die fachliche Beurteilung der resultierenden Klassifikation evaluiert werden kann.

Quadratsummennorm

Ein naheliegendes Maß, die Resultate verschiedener Clusterungen mit K und \tilde{K} verschiedenen Clusteranzahlen zu vergleichen, ist durch den jeweils resultierenden Zielfunktionswert f_{Σ} gegeben. Die Quadratsummennorm misst offenbar die Kompaktheit der Cluster, die um so stärker ist, je geringer f_{Σ} ist.

Da f_{Σ} mit sinkender Clusteranzahl K i. d. R. zunimmt, wird gemäß *Elbow-Kriterium* [BEPW94] die Clusteranzahl gewählt, nach der f_{Σ} vergleichsweise stark ansteigt. In graphischer Darstellung ähnelt dieser Punkt einem Ellenbogen.

Index nach Davies-Bouldin

Eine Erweiterung dieses Ansatzes stellt der Index nach Davies-Bouldin (DB) [DB79] dar, indem er die Kompaktheit innerhalb der Cluster in Beziehung zur Separiertheit zwischen den Clustern setzt. Bei stark ausgeprägten Clustern wird erwartet, dass der DB ein globales Minimum bei der besten Clusteranzahl aufweist.

Sei e_i der mittlere Abstand (gemittelt über alle Objekte) im Cluster C_i zum Clustermittelpunkt und $D(C_i, C_j)$ der Abstand zwischen Cluster C_i und Cluster C_j . Daraus berechnen sich $R_{i,j}$ und R_i wie folgt:

$$R_{i,j} = \frac{e_i + e_j}{D(C_i, C_j)} \quad (3.47)$$

$$R_i = \max_{j,j \neq i} \{R_{i,j}\} \quad (3.48)$$

Bei gegebener Clusteranzahl K berechnet sich damit der Davies-Bouldin Index durch

$$DB(K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K R_k \quad K > 1. \quad (3.49)$$

3.4 Kombination beider Ansätze: Regressionsclusterung

Wir betrachten nun wieder die in der Einleitung des Kapitels dargestellte Problematik und beschreiben das Problem hieran zunächst informal. Wir verfügen über eine Menge von Teilkollektiven, die sich bezüglich ihres Regressionsverhaltens mehr oder weniger stark unterscheiden. Die Teilkollektive entstehen durch disjunkte Zerlegung des Gesamtkollektivs anhand statischer Merkmale. Da einige dieser Merkmale dichotom sind (z. B. VK/ZK, VL-Empfänger etc.), passen wir das Skalenniveau entsprechend an, indem wir die metrisch skalierten Merkmale (z. B. Bausparsumme) in Klassen einteilen. Hierdurch können wir für jedes Teilkollektiv mit Hilfe einer booleschen Funktion bestimmen, ob ein Bausparvertrag zu dem betrachteten Teilkollektiv gehört oder nicht. Das Ziel des Verfahrens besteht nun darin, die ursprüngliche, feinstmögliche Untergliederung des Gesamtkollektivs in Teilkollektive (Clusterobjekte) so weit wie möglich zusammenzulegen, so dass Cluster von Teilkollektiven mit homogenen Regressionsverhalten entstehen. Homogen soll in diesem Zusammenhang heißen, dass die Regressanden der Clusterobjekte auch durch die gemeinsame Regressionsfunktion ihres Clusters noch gut geschätzt werden können. Auf diese Weise kann bei der Schätzung künftiger Verhalten die Zusammensetzung des Gesamtkollektivs angemessen berücksichtigt werden, ohne mehr Teilkollektive als nötig separat betrachten zu müssen.

$\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ $y'_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT})$ X_i	Menge der n Clusterobjekte Vektor der Regressanden des Clusterobjekts I_i Regressorenmatrix des Clusterobjekts I_i
$s' = (s_1, \dots, s_r)$ $q'_i = (q_{i1}, \dots, q_{ir})$	Eigenschaftsvektor Eigenschaftsvektor des Clusterobjekts I_i
C_k K z_{C_k} \tilde{z}_{C_k} f_{C_k}	Cluster Anzahl der Cluster clusterbeschreibende Funktion vereinfachte clusterbeschreibende Funktion Schätzfunktion des Clusters C_k

Tabelle 3.5: Notation Regressionsclustern

3.4.1 Problemformulierung

Das Problem soll nun folgendermaßen formalisiert werden:

Zu jedem Clusterobjekt I_i existiert eine Regressorenmatrix X_i und ein Regressandenvektor y_i sowie eine Schätzfunktion f_i . Darüberhinaus sei jedes Clusterobjekt eindeutig identifiziert durch einen Eigenschaftsvektor $q_i \in \mathbb{B}^r$, der die Ausprägung seiner r statischen Eigenschaften repräsentiert.

Wir kommen nun zu folgender Problemdefinition:

Definition 3.14 (Regressionscluster-Problem) *Finde die Partition \mathcal{C} bei gegebenem K , so dass*

$$f(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^K \sum_{I_i \in C_k} \|y_i - f_{C_k}(X_i)\|^2 \quad (3.50)$$

minimiert wird.

Die Wahl der Zielfunktion stellt sicher, dass die Partition mit der minimalen Residualquadratsumme gewählt wird. Damit ergibt sich eine gewisse Analogie zur Schätzung der Parameter der Regressionsfunktion beim gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzer (OLSE).

Wählen wir als jeweilige Regressionsfunktion f_{C_k} eines Clusters den Mittelwertvektor der \bar{y}_{C_k} der y_i mit $I_i \in C_k$, so erhalten wir direkt das K -Means Minimierungsproblem aus Gleichung 3.46. Damit ist K -Means auf das Regressionscluster-Problem offenbar polynomiell reduzierbar, und wir stellen fest:

Bemerkung 3.1 *Das Regressionscluster-Problem ist \mathcal{NP} -schwer bereits ab $K \geq 2$.*

Mit jedem ermittelten Cluster erhalten wir eine Menge von Eigenschaftsvektoren, die das Cluster bzw. die Menge seiner Elemente eindeutig beschreiben. Mit Hilfe dieser $q_i \in \mathbb{B}^r$ lässt sich für jedes Cluster C_k eine Boolesche Funktion in disjunktiver Normalform z_{C_k} formulieren [OV90]:

Definition 3.15 (Clusterbeschreibende Funktion) Die Boolesche Funktion $z_{C_k} : \mathbb{B}^r \rightarrow \mathbb{B}$ heißt clusterbeschreibende Funktion und ist durch

$$z_{C_k}(s) = \bigvee_{I_i \in C_k} m_{q_i}(s) \quad (3.51)$$

mit den Mintermen

$$m_{q_i}(s) = s_1^{q_{i1}} \wedge \dots \wedge s_r^{q_{ir}} \quad (3.52)$$

$$= \bigwedge_{j=1}^r s_j^{q_{ij}} \quad (3.53)$$

definiert, wobei

$$s_j^{q_{ij}} = 1 \Leftrightarrow s_j = q_{ij} \quad (3.54)$$

gilt.

Bemerkung 3.2 Die clusterbeschreibende Funktion hat damit die folgenden Eigenschaften, die ihren Namen rechtfertigen:

$$z_{C_k}(s) = z_{C_l}(s) = 1 \Rightarrow k = l \quad \forall s \in \mathbb{B}^r \quad (3.55)$$

$$z_{C_k}(q_i) = 1 \Leftrightarrow I_i \in C_k \quad (3.56)$$

Beweis: Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Eindeutigkeit der Eigenschaftsvektoren und der Partitionseigenschaft der Cluster. \square

Für die Bewertung der Clusterergebnisse ist eine fachliche Beurteilung von zentraler Bedeutung. Im Allgemeinen wird sich die Betrachtung der jeweils in einem Cluster zusammengefassten Clusterobjekte bzw. ihrer Eigenschaftsvektoren und ihrer Cluster-Schätzfunktion einer sachlogischen Interpretation entziehen.

Da z_{C_k} aber in disjunktiver Normalform vorliegt, kann der Ausdruck unter Zuhilfenahme des Verfahrens von Quine [Qui52] und McCluskey [McC56] zu \tilde{z}_{C_k} vereinfacht werden. Hierbei ist es das Ziel, eine zu z_{C_k} äquivalente Darstellung \tilde{z}_{C_k} in disjunktiver Form mit möglichst wenigen \wedge und \vee Operationen zu finden.

Die hiermit verbundene Elimination für die jeweilige Clusterzugehörigkeit irrelevanter Merkmale führt so zu einer Funktion, welche nur noch die hierfür wesentlichen Merkmale enthält und so idealerweise erlaubt, Zusammenhänge zwischen diesen Merkmalen und dem geclusterten Regressionsverhalten zu erkennen.

Hierfür werden zunächst aus den Mintermen von z_{C_k} mit Hilfe des Algorithmus von Quine-McCluskey alle Primimplikanten berechnet. Zur Berechnung des Minimalpolynoms \tilde{z}_{C_k} muss nun noch die kürzeste Darstellung von z_{C_k} aus Primimplikanten gefunden werden, so dass alle Minterme von Primimplikanten überdeckt sind. Da dieses Überdeckungsproblem aber \mathcal{NP} -schwer ist [OV90], müssen wir uns i. Allg. mit heuristischen Lösungen zufrieden geben.

3.4.2 Anwendung auf Realdaten

Wir wenden das oben beschriebene Verfahren nun an, um Teilkollektive zu bestimmen, die sich untereinander hinsichtlich ihres Darlehensverzichts- und Sondertilgungsverhaltens klar unterscheiden. Neben den jeweils (vereinfachten) clusterbeschreibenden Funktionen, die wir zur Zerlegung des Gesamtkollektivs in Teilkollektive benötigen, erhalten wir zusätzlich für jedes Teilkollektiv auch eine Regressionsfunktion.

Erzeugung der Clusterobjekte

Als Clusterobjekte verwenden wir Teilkollektive, die durch die feinstmögliche Partitionierung des Gesamtkollektivs anhand der vorgegebenen, dichotomen statischen Merkmale entstehen. Jedes Teilkollektiv wird so durch genau *einen* bestimmten Eigenschaftsvektor $q_i \in \mathbb{B}^r$ eindeutig identifiziert. Jeder Vertrag, der diese Merkmale aufweist, wird in dem jeweiligen Teilkollektiv erfasst.

Offenbar müssen zunächst solche Merkmale benannt werden, die möglicherweise in einem Zusammenhang mit der Marktzinssensibilität der Bausparer stehen. Leider sind solche Zusammenhänge a priori nicht vollständig bekannt, so dass sich eine eher großzügige Auswahl der Merkmale anbietet.

In unserem konkreten Fall bestimmen wir unter Berücksichtigung von $r = 9$ Merkmalen einen Eigenschaftsvektor $s = (s_1, \dots, s_9)$ für jeden Bausparvertrag wie folgt:

- $s_1 \Leftrightarrow$ Bausparsumme ≤ 8000 Euro
- $s_2 \Leftrightarrow 8000 <$ Bausparsumme ≤ 16.000 Euro
- $s_3 \Leftrightarrow 16.000 <$ Bausparsumme ≤ 30.000 Euro
- $s_4 \Leftrightarrow 30.000 <$ Bausparsumme ≤ 60.000 Euro
- $s_5 \Leftrightarrow 60.000 <$ Bausparsumme
- $s_6 \Leftrightarrow$ Vor-/Zwischenfinanzierungsvertrag
- $s_7 \Leftrightarrow$ bestehende Forderungsabtretung auf Vertrag
- $s_8 \Leftrightarrow$ Vertrag erhält VL
- $s_9 \Leftrightarrow$ Vertrag erhält WoP

Anhand dieser Definition lässt sich für jeden Vertrag mit dem Eigenschaftsvektor s entscheiden, ob er zum Teilkollektiv q_i gehört, nämlich genau dann, wenn

$$m_{q_i}(s) = 1 \tag{3.57}$$

gilt.

Wir bilden zunächst 2^r leere Teilkollektive mit jeder möglichen Merkmalskombination und erfassen das Darlehensverzichts- bzw. Sondertilgungsverhalten jedes Vertrags im jeweils zugehörigen Teilkollektiv.

Bereinigung der Clusterobjekte

Alleine auf Grund der Klasseneinteilung des Merkmals Bausparsumme ist klar, dass viele der 2^r erzeugten Teilkollektive leer bleiben und daher aus dem Verfahren entfernt werden müssen.

Zudem werden durch die zunächst feinstmögliche Untergliederung in einigen Teilkollektiven nur sehr wenige Verträge erfasst. Die in den entsprechenden Teilkollektiven berechneten Anteilswerte $BSDV_t$ sowie $BSST_t$ sind demzufolge wenig signifikant und sollten daher bereits im Vorfeld der Clustering mit anderen Teilkollektiven zusammengelegt werden, um „Ausreißer“ zu vermeiden.

Damit ergibt sich das Problem der Bestimmung einer Mindestanzahl von Verträgen, die in die Berechnung der $BSDV_t$ bzw. $BSST_t$ eingehen müssen. Wir gehen nun davon aus, dass näherungsweise $BSDV_t \approx DV_t$ und $BSST_t \approx ST_t$ gilt. Diese Annahme ist auf Grund der Berücksichtigung der Bausparsumme bei der Bildung der Teilkollektive gerechtfertigt und führt bei den Realdaten tatsächlich nur zu minimalen Abweichungen.

Jedes DV_t bzw. ST_t berechnet sich als Quotient aus einem Nenner n und einem Zähler m . Der so jeweils bestimmte Anteil lässt sich nun als Punktschätzer $\hat{p} = \frac{m}{n}$ einer unbekanntes Darlehensverzichts- bzw. Sondertilgungswahrscheinlichkeit p interpretieren. Für ausreichend viele Beobachtungen n lassen sich nun auf folgendem Wege Konfidenzintervalle bestimmen [HEK93]:

Gemäß zentralem Grenzwertsatz ist die Zufallsvariable Z approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt:

$$Z = \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.58)$$

Damit können wir aus der Gleichung

$$pr(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad (3.59)$$

$$pr\left(p - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{m}{n} \leq p + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.60)$$

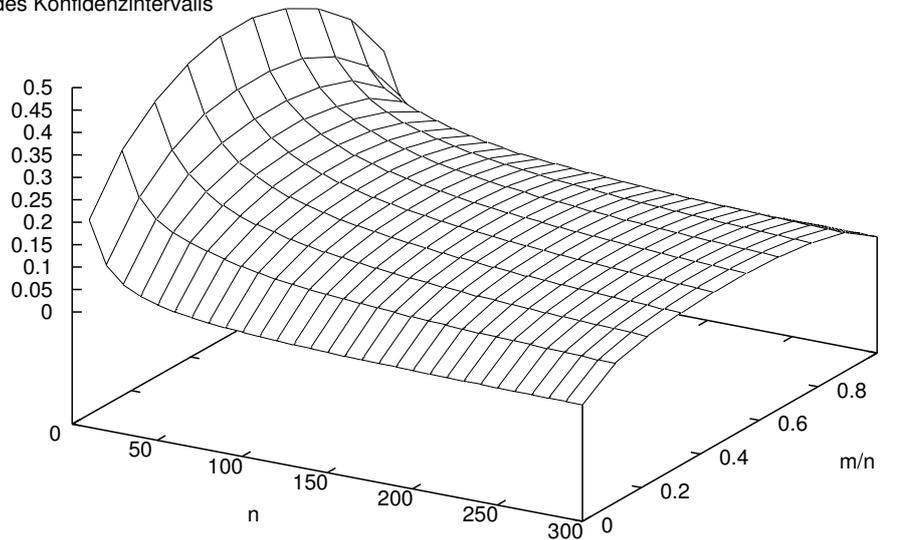
das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ bestimmen:

$$p_1 = \frac{2m + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 + 4m(1 - \frac{m}{n})}}{2(n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)} \quad (3.61)$$

$$p_2 = \frac{2m + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 + 4m(1 - \frac{m}{n})}}{2(n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)} \quad (3.62)$$

Wir stehen nun vor dem Dilemma, dass die einzelnen Anteilswerte auf der einen Seite möglichst signifikant sein sollen, wir aber auf der anderen Seite das Kollektiv auch

Breite des Konfidenzintervalls

Abbildung 3.10: Breite des 90%-Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von n und \hat{p}

noch fein genug zerlegen können wollen.

Um eine Mindestanzahl von Beobachtungen zu bestimmen, betrachten wir in Abbildung 3.10 die dargestellte Breite des Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von n und \hat{p} . Ab einer Beobachtungszahl von ungefähr 100 sinkt die Breite des Konfidenzintervalls nur noch langsam. Aus diesem Grund sollen Teilkollektive, bei denen in mindestens einen Anteilswert weniger als 100 Verträge eingegangen sind, als ungültig angesehen und von dem jeweils „ähnlichsten“ gültigen Teilkollektiv übernommen werden. Hierbei werden zwei Teilkollektive als umso ähnlicher angesehen, je weniger unterschiedliche Einträge in ihren Eigenschaftsvektoren stehen.

Zusammenfassend ergibt sich so zur Bereitstellung der n Clusterobjekte bzw. Start-Teilkollektive folgendes Vorgehen:

1. Für jeden der 2^r möglichen Eigenschaftsvektoren wird ein zunächst leeres Teilkollektiv gebildet. Für jeden Vertrag wird nun der Eigenschaftsvektor s bestimmt und der Vertrag im Teilkollektiv I_i mit $m_{q_i}(s) = 1$ erfasst.

2. Die Teilkollektive werden durchmustert und diejenigen entfernt, bei denen kein Vertrag erfasst wurde.
3. Die bereinigten Teilkollektive werden nun ein weiteres Mal durchmustert. Teilkollektive, bei denen ein y_{it} mit $t = 1, \dots, T$ auf Basis weniger als 100 erfasster Verträge bestimmt wurde, sind unzulässig und werden gelöscht. Die Regressandenzeitreihe y_i wird mit y_j zusammengelegt, wobei I_j das zulässige Teilkollektiv mit den wenigsten unterschiedlichen Einträgen im Eigenschaftsvektor ist.

Eine einfache Heuristik

Durch Anpassung des allgemeinen, agglomerativen Verfahrens (Algorithmus 1) erhalten wir in Anlehnung an das Verfahren von Ward einen einfachen Greedy-Algorithmus, der allerdings eine i. Allg. nicht optimale Lösung für das Problem aus Definition 3.14 aus den bereinigten Teilkollektiven erzeugt. Wir setzen zu diesem Zweck das Klassen-Distanzmaß wie folgt:

$$\begin{aligned}
 D(C_k, C_l) &= \sum_{I_i \in C_k \cup C_l} \|y_i - f_{C_k \cup C_l}(X_i)\|^2 \\
 &\quad - \sum_{I_i \in C_k} \|y_i - f_{C_k}(X_i)\|^2 \\
 &\quad - \sum_{I_i \in C_l} \|y_i - f_{C_l}(X_i)\|^2
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Wir bestimmen $f_{C_k \cup C_l}$ indem wir den Regressandenvektor des Clusters $y_{C_k \cup C_l}$ durch bauparsummengewichtete Mittelung über alle y_i mit $I_i \in C_k \cup C_l$ bestimmen und anschließend die Parameter des verwendeten Funktionstyps mit dem gewöhnlichen Kleinste-Quadrate-Schätzer bestimmen.

Da das Verfahren für alle möglichen Clusteranzahlen $K = 1, \dots, n$ Lösungen erzeugt, lassen sich mit Hilfe der bei jedem Fusionsschritt ausgegebenen Gütemaße die verschiedenen K bewerten.

Ergebnisvereinfachung

Als Resultat des Verfahrens entsteht für jedes Cluster C_k neben f_{C_k} eine clusterbeschreibende Funktion $z_{C_k} : \mathbb{B}^r \rightarrow \mathbb{B}$ in disjunktiver Normalform, welche bei Eingabe des Eigenschaftsvektors eines Clusterobjekts ausgibt, ob das Clusterobjekt zum Cluster C_k gehört oder nicht, wobei für jedes Clusterobjekt des Clusters exakt ein Minterm mit r Variablen enthalten ist.

Zur Vereinfachung von z_{C_k} zu \tilde{z}_{C_k} wird anschließend wie folgt vorgegangen:

Im ersten Schritt werden mit Hilfe des Algorithmus von Quine-McCluskey alle Primimplikanten ermittelt. Hierbei können die Eigenschaftsvektoren leerer bzw. unzulässiger Teilkollektive als „Don't care“-Fälle behandelt werden, so dass deutlich mehr

Variablen durch das Verfahren eliminiert werden können. Es bleibt hierdurch gewährleistet, dass \tilde{z}_{C_k} bezüglich der zulässigen Teilkollektive und damit der Clusterobjekte äquivalent zu z_{C_k} bleibt.

Da das nachfolgende Überdeckungsproblem zur Bestimmung des Minimalpolynoms aus den berechneten Primimplikanten \mathcal{NP} -schwer ist, arbeitet das von uns verwendete Programm⁷ für dieses Teilproblem nur heuristisch, so dass wir keine garantiert optimale Lösung erhalten.

Diese Eigenschaft stellt im Anwendungskontext einen eher geringen Nachteil dar, da der Sinn dieser Ergebnisvereinfachung weniger im reduzierten Aufwand bei der Zerlegung des Vertragsbestands in Teilkollektive zu sehen ist, als vielmehr darin, dass sich das Resultat der Clusterung auf diese Weise (besser) einer sachlogischen Interpretation erschließt, die letztlich fundamental für die Bewertung der gesamten Clusterung ist.

Darlehensverzicht

Wir wenden das Verfahren nun exemplarisch auf das Darlehensverzichtsverhalten an. Nach der Bereinigung der Clusterobjekte verbleiben noch 15 zulässige Teilkollektive. Als Regressionsfunktionstyp wählen wir aus den in Abschnitt 3.2.6 genannten Gründen Funktionstyp 8.

Als nächsten Schritt müssen wir eine möglichst geeignete Anzahl von Clustern bestimmen. Wir führen hierzu mit der in diesem Abschnitt angegebenen agglomerativen Heuristik eine Clusterung durch, die uns Partitionen für $K = 1, \dots, 15$ liefert. In Abbildung 3.11 sind die hierbei jeweils in Abhängigkeit von der Clusteranzahl berechneten Zielfunktionswerte sowie die Davies-Bouldin-Indices dargestellt, die eine Bewertung der Lösungen mit verschiedenen K erlauben. Die Betrachtung des Zielfunktionswerts legt auf Grund des „Elbow-Kriteriums“ die Wahl von $K = 2$ oder $K = 3$ nahe. Der Clusterindex von Davies-Bouldin hingegen deutet klar auf die Wahl von $K = 3$ hin. Aus diesem Grund entscheiden wir uns für drei Cluster.

Auf Grund der geringen Anzahl von Clustern und Clusterobjekten lässt sich das Optimierungsproblem aus Definition 3.14 in diesem Fall noch mit einem vertretbaren Aufwand von einigen Stunden⁸ exakt lösen. Wir erhalten dasselbe Resultat wie mit der in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Heuristik, die mithin das Optimalergebnis geliefert hat. In Abbildung 3.12 sind die $BSDV_{1992}, \dots, BSDV_{2003}$ der gebildeten Cluster in Abhängigkeit von den $h_{1992}, \dots, h_{2003}$ dargestellt. Das Darlehensverzichtsverhalten dieser Teilkollektive unterscheidet sich erwartungsgemäß recht deutlich.

Um zu einer Interpretierbarkeit dieser Cluster zu kommen, betrachten wir zusätzlich die jeweiligen vereinfachten clusterbeschreibenden Funktionen:

C_0 : Wir erhalten

$$\tilde{z}_{C_0}(s) = s_6$$

⁷Wir verwenden das Programm qmls-0.2 von Dannel Albert, zu finden bei <http://sourceforge.net>.

⁸Es wurde hierbei ein Sun E450-Unix-Server mit UltraSPARC-II 400 MHz-Prozessoren verwendet.

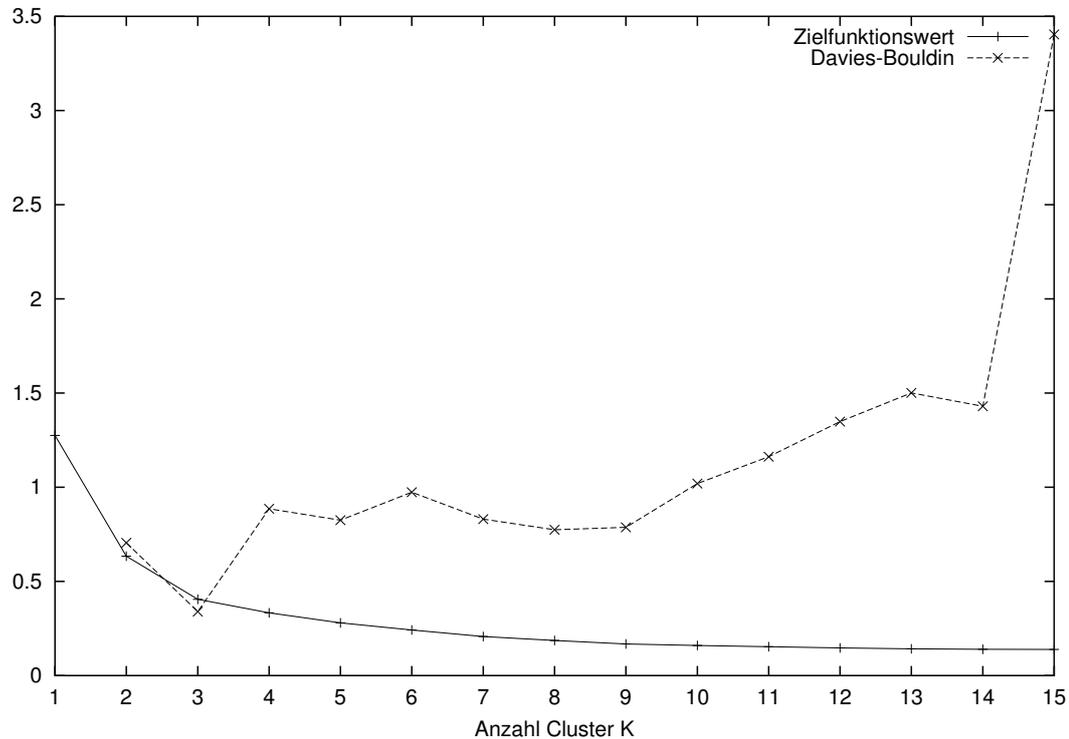


Abbildung 3.11: Zielfunktionswerte und Davies-Bouldin-Indices in Abhängigkeit von der Clusteranzahl K

und damit ein Teilkollektiv, das ausschließlich aus Verträgen besteht, zu denen ein Vor- bzw. Zwischenfinanzierungskredit besteht.

Hierdurch wird auch der Verlauf der Zeitreihe klar: Da solche Verträge in ein größeres Finanzierungskonzept eingebunden sind und das Bauspardarlehen zur (Teil-) Ablösung eines außerkollektiven Kredits bestimmt ist, hat der Bausparer vergleichsweise wenig Wahlfreiheit und muss das Darlehen in der Regel annehmen. Aus diesem Grund ist das generelle Niveau der Darlehensverzichte selbst bei äußerst geringen Marktzinsen extrem niedrig.

C_1 : Für dieses Cluster liefert der Algorithmus

$$\tilde{z}_{C_1}(s) = \bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 .$$

In diesem Cluster werden offenbar alle Verträge erfasst, deren Bausparsumme 16.000 Euro übersteigt. Zu einem Konflikt mit C_0 kann es nicht kommen, da die gültigen VK/ZK-Teilkollektive Bausparsummen unterhalb von 16.000 Euro besitzen.

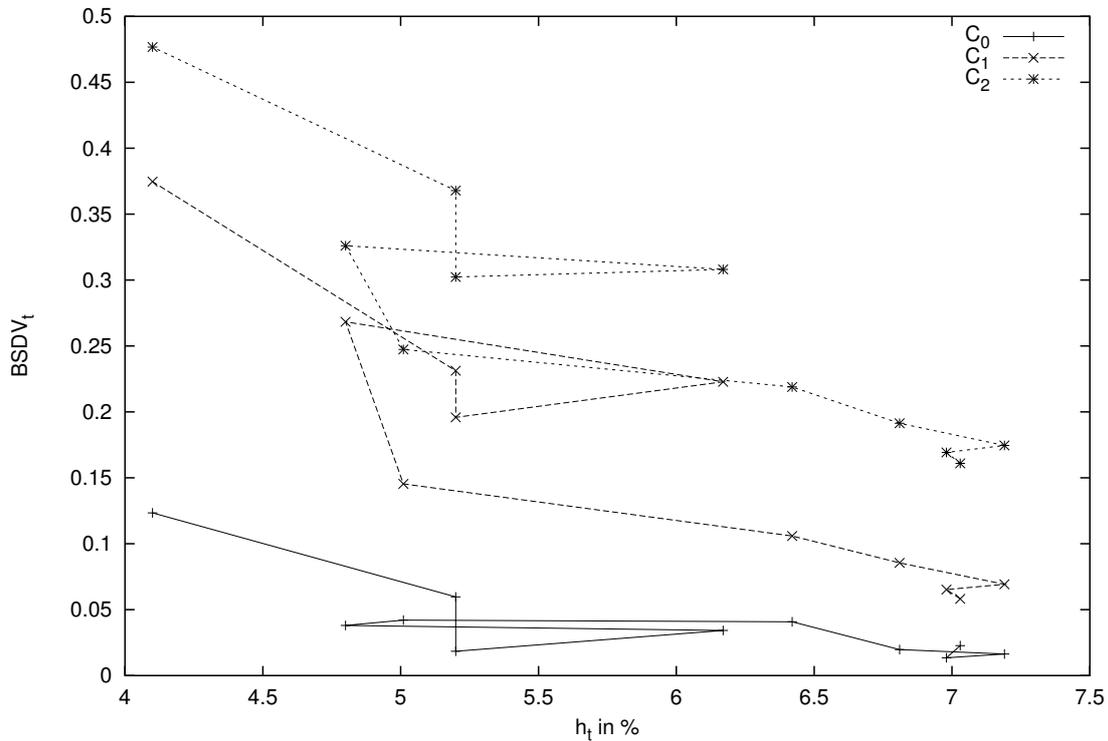


Abbildung 3.12: $BSDV_t$ der Cluster C_0 , C_1 und C_2

Auf Grund des mit der hohen Bausparsumme verbundenen hohen Kreditvolumens zeigen die Sparer hier offenbar ein vergleichsweise rationales Verhalten: Bei hohen Marktzinsen ist die Darlehensverzichtsquote mangels konkurrenzfähiger Alternativangebote sehr niedrig, während sie sich bei anhaltend niedrigen Marktzinsen versechseinhalbfacht.

C_2 : Alle übrigen Clusterobjekte werden von diesem Cluster erfasst:

$$\tilde{z}_{C_2}(s) = \bar{s}_3 \wedge \bar{s}_4 \wedge \bar{s}_5 \wedge \bar{s}_6 .$$

Es handelt sich um Verträge mit einer Bausparsumme bis 16.000 Euro, die nicht VK/ZK-Verträge sind.

Zwar ist der Darlehensverzichtsanteil bei niedrigem Marktzins hier am höchsten, allerdings ist er dies auch bei hohen Marktzinsen. Auf Grund des niedrigen Kreditvolumens ist hier mit deutlich weniger Rationalität bei der Darlehensinanspruchnahme zu rechnen als bei C_1 , und es kommt bei den Darlehensverzichtsanteilen lediglich zu einer Verdreifachung zwischen höchstem und niedrigstem Marktzins.

Es zeigt sich damit, dass für die Klassifizierung von Bausparverträgen bezüglich ihres Darlehensverzichtsverhaltens in Abhängigkeit vom Marktzins bei $K = 3$ die Merkmale Bausparsummenhöhe und VK/ZK bereits ausreichend sind und die unterschiedlichen Verhalten im Kollektiv alleine schon gut erklären können. Der Umstand, dass sich die in \tilde{z}_{C_i} zurückgebliebenen Merkmale sachlogisch gut mit dem Verlauf der $BSDV_t$ des entsprechenden Clusters in Einklang bringen lassen, spricht generell für die Angemessenheit der Clusterung.

Zur Beurteilung, wie gut wir mit der gegebenen Regressionsclusterung die realen $BSDV_t$ des Gesamtkollektivs treffen, schätzen wir die $BSDV_t$ aller drei gebildeten Cluster separat mit Hilfe ihrer jeweiligen gemeinsamen Regressionsfunktion f_{C_k} und berechnen aus den geschätzten Anteilen der Teilkollektive unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Bausparsumme anschließend Schätzwerte für die $BSDV_t$ des Gesamtkollektivs. Auf diese Weise erhalten wir die recht gute Bestimmtheit von 96,1%.

Sondertilgungen

Wir untersuchen nun auf analoge Weise das Sondertilgungsverhalten. Wir betrachten nach Bereinigung der Clusterobjekte noch 24 gültige Teilkollektive. Als geeigneter Regressionsfunktionstyp hat sich in Abschnitt 3.2.7 der autoregressive Typ 11 erwiesen.

Wir führen wieder eine Clusterung über alle $K = 1, \dots, 24$ durch und wählen als Clusteranzahl $K = 2$, da diese den geringsten Davies-Bouldin-Index liefert. Auch bei dieser Anzahl Cluster und Clusterobjekte lässt sich eine exakte Clusterung noch innerhalb einiger Stunden durchführen. Es zeigt sich, dass auch diese Partition optimal im Sinne der Definition 3.14 ist.

Bei Betrachtung einzelner Clusterobjekte können wir erkennen, dass das Sondertilgungsverhalten zwischen den einzelnen Teilkollektiven deutlich homogener ist, als dies bei den Darlehensverzichtsverhalten der Fall war. Damit unterscheidet sich auch das Sondertilgungsverhalten zwischen den beiden ermittelten Clustern (s. Abb. 3.13) nur relativ schwach, so dass sich diese mangelnde Trennschärfe auch in der Komplexität bzw. Interpretierbarkeit der \tilde{z}_{C_k} ⁹ widerspiegelt:

C_0 : Wir erhalten

$$\tilde{z}_{C_0}(s) = (\bar{s}_3 \wedge s_8) \vee (s_1 \wedge s_6 \wedge \bar{s}_9) .$$

Im Wesentlichen werden in diesem Cluster die VL-empfangenden Verträge mit einer Bausparsumme bis zu 16.000 Euro erfasst. Damit werden alle Clusterobjekte mit VL-Merkmal bis auf eines durch den ersten Primimplikant berücksichtigt.

⁹Die prinzipiell überflüssige Klammerung der Minterme dient der besseren Lesbarkeit.

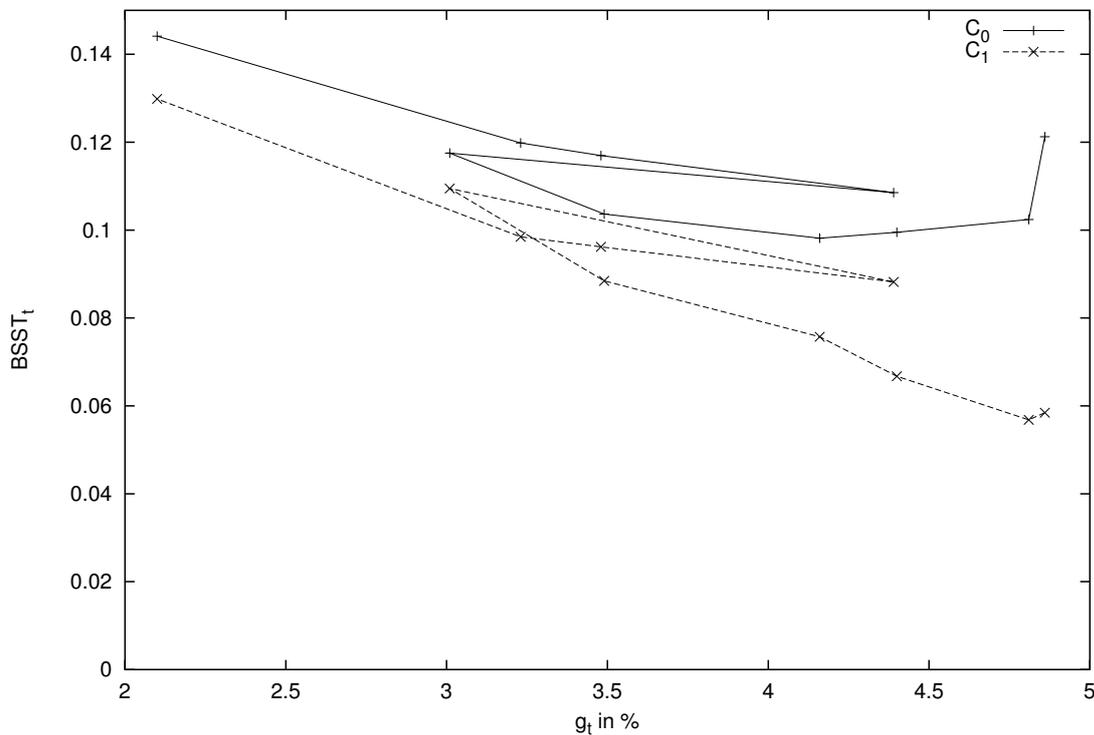


Abbildung 3.13: $BSST_t$ der Cluster C_0 und C_1

Durch den zusätzlichen Primimplikant wird nur noch ein weiteres Clusterobjekt zu dem Cluster hinzugefügt, nämlich das der VK/ZK-Verträge mit einer Bausparsumme unter 8.000 Euro. Daher bestimmt dieser Implikant das Cluster nur geringfügig mit.

Als Interpretationsversuch für den Verlauf der $BSST_t$ des Clusters kann man annehmen, dass auf Grund der meist geringen Bausparsummen der VL-Verträge zum einen der Vorteil durch Ausnutzung der Rückzahlungsoption klein bleibt, zum anderen auch schon geringe Summen zur Ablösung des Darlehens ausreichen.

C_1 : Das Cluster wird beschrieben durch

$$\tilde{z}_{C_1}(s) = (\bar{s}_7 \wedge \bar{s}_8) \vee (s_6 \wedge s_9) \vee (\bar{s}_2 \wedge s_3 \wedge \bar{s}_5 \wedge \bar{s}_6),$$

wobei das Cluster größtenteils durch den ersten Primimplikant charakterisiert ist, da das Cluster alle Clusterobjekte ohne VL-Merkmal bis auf eines enthält. Zur Interpretation des Verlaufs der $BSST_t$ können wir auf Grund der Aufteilung der Clusterobjekte in nur zwei Cluster analog zur Interpretation von C_0 argumentieren.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass sich Clusterobjekte mit VK/ZK-Merkmal anders als bei den Darlehensverzichtsanteilen im Sondertilgungsverhalten nicht nennenswert von den anderen Teilkollektiven unterscheiden, sondern sogar schon früh mit anderen Teilkollektiven fusioniert werden. Dieser Effekt erweist sich sachlogisch als sinnvoll, da mit Zuteilung und Darlehensnahme der zugrunde liegende Vor- bzw. Zwischenfinanzierungskredit i. d. R. abgelöst wird, und sich solche Verträge anschließend nicht mehr von den übrigen Verträgen in der Darlehensphase unterscheiden.

Die Bedeutung des VL-Merkmales für die Clusterung wird dadurch unterstrichen, dass wir nur zwei Clusterobjekten zwischen den Clustern austauschen müssen, um z_{C_0} und z_{C_1} zu $\tilde{z}_{C_0} = s_8$ und $\tilde{z}_{C_1} = \bar{s}_8$ vereinfachen zu können.

Bei Schätzung der $BSS T_t$ des Gesamtkollektivs durch Bausparsummengewichtung der durch die f_{C_k} berechneten Schätzwerte der einzelnen Cluster erhalten wir insgesamt wieder eine gute Bestimmtheit von 98,6%.

Fazit der Anwendung

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Regressionsclusterung in dem eingangs dargelegten Anwendungskontext sinnvolle Resultate liefert, wobei sich der Einsatz des Verfahrens bei der Analyse des Darlehensverzichtsverhaltens als deutlich lohnender erweist.

Insgesamt erweist sich auch die Güte der Schätzung der realen $BSDV_t$ und $BSS T_t$ im Gesamtkollektiv als sehr brauchbar, so dass wir die in diesem Abschnitt dargestellten Resultate für das Kapitel 6 verwenden können.

Kapitel 4

Zinsmodell

Einen wesentlichen Baustein des Gesamtkonzepts (s. Abschnitt 2.2.4) stellt das Modell zur Generierung verschiedener Zinsszenarien dar. Dieses erfüllt hauptsächlich zwei Zwecke:

- Erzeugung von Szenarien für die vergleichbaren Marktzinsen h_t und g_t , so dass mit Hilfe des in Kapitel 3 vorgestellten Regressionsmodells Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteile berechnet werden können.
- Bestimmung der Zinsstruktur für jedes Szenario, so dass barwertige Auswertungen und GuV-Simulationen durchgeführt werden können (s. Abschnitt 2.3).

Konkret befassen wir uns in diesem Kapitel vornehmlich mit einer in Literatur und Praxis weit verbreiteten Klasse von Zinsmodellen, in der mit Hilfe der als Itô-Prozess modellierten kurzfristigen Zinssätze die Preise für zinsabhängige Anlagen bestimmt werden können. Mit diesen *Einfaktor-Zinsmodellen* lassen sich relativ leicht komplexe Zinsszenarien generieren, indem man den kurzfristigen Zinssatz simuliert und zu jedem Zeitpunkt die Zinsstruktur durch Berechnung der Preise der Null-Kupon-Bonds bestimmt.

Im ersten Abschnitt 4.1 dieses Kapitels werden zunächst einige wichtige Definitionen und Konzepte dargelegt, die für die folgende Beschreibung der Einfaktormodelle benötigt werden. Anschließend werden in Abschnitt 4.2 zwei verschiedene Bewertungsansätze erörtert, wie anhand einer vorgegebenen Dynamik für den kurzfristigen Zins die Preise für zinsabhängige Anlagen, insbesondere Null-Kupon-Bonds, ermittelt werden können. Einige klassische Einfaktormodelle werden danach kurz vorgestellt, bevor wir uns einem speziellen Modell, dem Modell von Cox, Ingersoll und Ross (CIR-Modell), näher zuwenden. Wir stellen dar, wie im Fall des CIR-Modells der kurzfristige Zins modelliert und simuliert wird und anschließend hieraus die zugehörige Zinsstrukturkurve bestimmt werden kann. Mit Hilfe der Kenntnis der kompletten Zinsstruktur in unseren simulierten Zinsszenarien können wir dann in Abschnitt 4.3 die vergleichbaren Marktzinsen h_t und g_t berechnen, die direkt in das Regressionsmodell eingehen können.

4.1 Grundlagen

4.1.1 Zinsen

Wir wollen zunächst mit einigen Definitionen beginnen und folgen hierbei weitgehend [HDK02]:

Definition 4.1 (Zinssatz) *Unter dem Zinssatz i wird der in Prozent der Kapitalsumme angegebene jährliche Preis für die Überlassung von Geldkapital verstanden [Sch94].*

Statt der Bezeichnung Zinssatz wird und wurde im Verlauf dieser Arbeit auch gelegentlich der Begriff Zins synonym gebraucht. Bei den betrachteten Hypotheken-, Sparbrief- und (effektiven) Bauspardarlehenszinssätzen handelt es sich um Zinssätze in diesem Sinne. Wichtig bei dieser Definition ist die implizite Verwendung des Bezugszeitraumes von einem Jahr, wie wir unten sehen werden.

Definition 4.2 (Zinsfaktor) *Als Zinsfaktor q bezeichnen wir die Größe*

$$q := 1 + i.$$

Das nach einem Jahr um den Zinsgewinn erhöhte Geldkapital berechnen wir damit durch Multiplikation des ursprünglichen Geldkapitals mit diesem Faktor. Entsprechend erhalten wir als Zinsfaktor für eine Anlagedauer (ohne Auszahlungen und Wiedanlage der Zinsen zu gleichen Konditionen) von t Jahren als Aufzinsungsfaktor q^t bzw. q^{-t} als Abzinsungsfaktor. Ein zentraler Nachteil der bisherigen Zinsdefinition besteht darin, dass davon ausgegangen wird, dass Zinsen nur einmal nach einem Jahr verrechnet werden. Da es keine unterjährigen Zinseszins effekte gibt, funktioniert die Berechnung des Werts einer festverzinslichen Anlage mit dem Auf- bzw. Abzinsungsfaktor offenbar nur für ganze Jahre. Ein Zinssatz, der von permanenter unterjähriger Zinsverrechnung ausgeht, muss – soll er p. a. auf dieselbe Zinszahlung kommen – auf Grund der Zinseszins effekte niedriger sein als der Zinssatz, der auf jährlicher Verrechnung basiert. Wir nehmen nun an, r sei ein solcher stetiger und konstanter Zinssatz, bei dem die unterjährigen Zinsen sofort gutgeschrieben und mitverzinst werden. Dann können wir für den Zinsfaktor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r \quad (4.1)$$

schreiben. Damit kommen wir zu folgender Definition:

Definition 4.3 (Stetiger Zinssatz) *Die Wertentwicklung A_t einer stetig mit dem konstanten Zinssatz r verzinsten Anlage (ohne Auszahlungen) mit $A_0 = 1$ Euro wird durch*

$$A_t = e^{rt}$$

beschrieben.

Wir können aus dem (jährlichen) Zinssatz mit Hilfe von

$$r = \log(q) = \log(1 + i)$$

leicht den stetigen Zinssatz berechnen und umgekehrt durch

$$q = e^r \quad \text{bzw.} \quad i = e^r - 1$$

den (jährlichen) Zinssatz aus dem stetigen. In der Praxis werden stetige Zinssätze nicht verwendet, jedoch kommt der Zinssatz bei täglicher Verrechnung dem stetigen Zinssatz bereits sehr nah.

Bislang sind wir davon ausgegangen, dass es einen konstanten stetigen Zinssatz gibt, der unabhängig von der Dauer der Anlage ist. In der Realität gilt dies natürlich nicht, vielmehr variieren die Zinssätze im Zeitverlauf und unterscheiden sich zudem nach Laufzeit der Anlage. Wir betrachten nun mit $r(t, T)$ den festen stetigen Zinssatz, der für den Zeitraum $[t, T]$ gilt.

Definition 4.4 (Kurzfristiger stetiger Zinssatz) *Der kurzfristige stetige Zinssatz $r(t)$ (auch short-rate genannt) ist definiert als*

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r(t, t + \Delta t) \quad (4.2)$$

Legt man Geld auf einem Konto an, das jeweils mit dem aktuellen kurzfristigen stetigen Zinssatz verzinst wird, so spricht man von einem *Geldmarktkonto*.

Definition 4.5 (Geldmarktkonto) *Wir definieren ein Geldmarktkonto als risikolose Anlageform, deren Wertentwicklung $B(t)$ bei Anlage eines Euros zum Zeitpunkt 0 durch*

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$$

nach t Jahren gegeben ist.

Das Geldmarktkonto wird auch *lokal-risikofrei* genannt, da seine kurzfristige Rendite durch $r(t)$ zum Zeitpunkt t bekannt und sicher ist. Als weitere Anlageform betrachten wir als nächstes Zero-, T- oder Null-Kupon-Bonds.

Definition 4.6 (Zerobond) *Ein Zero-, Null-Kupon- bzw. T-Bond ist eine festverzinsliche Anlage, die zum Fälligkeitszeitpunkt T und nur zu diesem Zeitpunkt genau 1 Euro auszahlt. Den Wert eines solchen Zerobonds zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $B(t, T)$, und es gilt offenbar $B(T, T) = 1$.*

Da Zerobonds vor Fälligkeit zu keinerlei Zahlungsströmen führen, lässt sich anhand der Preise verschiedener Zerobonds $B(0, T_n)$ zum Zeitpunkt 0 die *Zinsstruktur* zu diesem Zeitpunkt ableiten, also die festen Zinssätze, die in Abhängigkeit von der Anlagedauer T_n am Markt gelten. Wir bezeichnen nun entsprechend q_T bzw. i_T als jährlichen

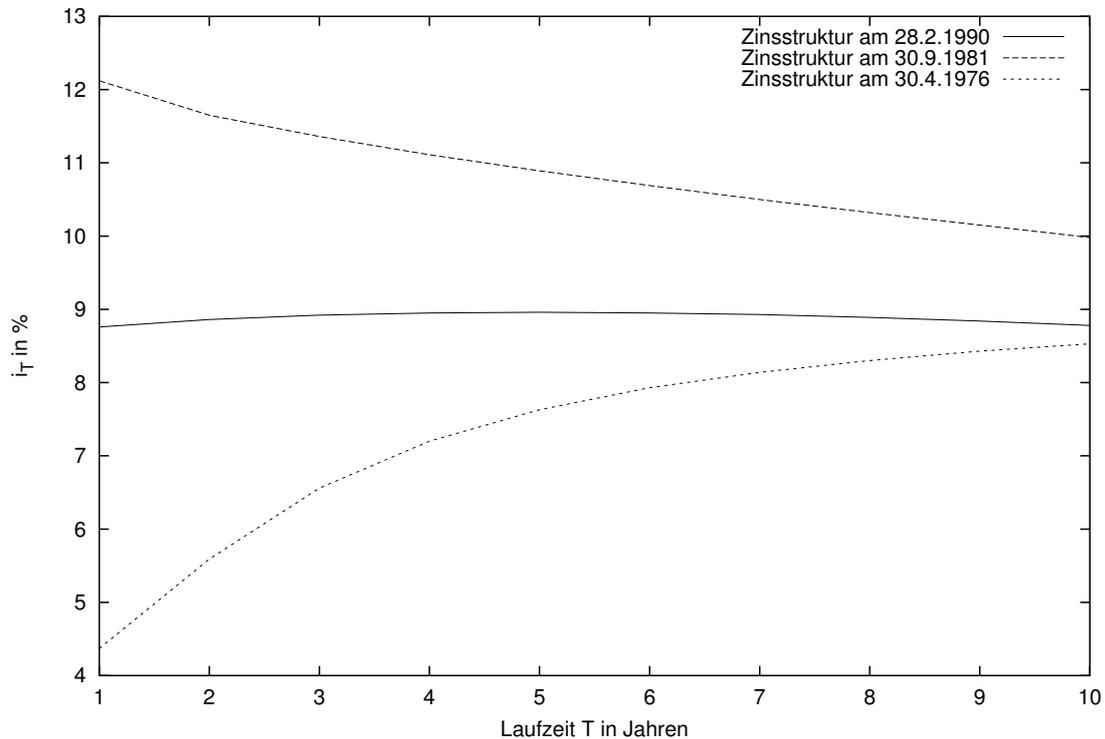


Abbildung 4.1: Historische Zinsstrukturkurven typischer Gestalt

Zinsfaktor bzw. Zinssatz eines Zerobonds mit Laufzeit T .

In Abbildung 4.1 sind einige reale *Zinsstrukturkurven* als graphische Darstellung der Zinsstruktur¹ abgebildet. Für die Gestalt der abgebildeten Zinsstrukturkurven haben sich bestimmte Bezeichnungen eingebürgert. So bezeichnet man i. Allg. die Kurve vom 30.4.1976 als „normal“, die vom 28.2.1990 als „flach“ und die vom 30.9.1981 als „invers“. Hinter der Bezeichnung „normal“ steckt die Annahme, dass ein Investor bei längeren Laufzeiten für seinen höheren Liquiditätsverlust auch mit einem höheren Zinssatz entschädigt werden will [HDK02]. In der Tat lässt sich anhand von Bundesbankzeitreihen von 1972 bis 2003 feststellen, dass die normale Zinsstruktur deutlich häufiger als eine inverse oder flache anzutreffen ist.

Ein bestimmter fester Zinssatz kann nicht nur zu Beginn eines Kreditgeschäfts für eine bestimmte Laufzeit vereinbart werden, sondern auch deutlich vorher:

Definition 4.7 (Forward-Zinsen) Der zum Zeitpunkt t_0 für den späteren Zeitraum $[t, T]$ vereinbarte feste, stetige Zinssatz heißt (stetiger) Forwardzinssatz $f(t_0, t, T)$. Die

¹Quelle: Bundesbank, Zeitreihen WZ9808 bis WZ9826

Größe

$$f(t_0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t_0, t, t + \Delta t)$$

heißt Forwardrate.

Die Forwardraten erlauben einen Rückschluss auf die Zinsstruktur, da

$$B(t_0, t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t f(t_0, s) ds\right) \quad (4.3)$$

gilt.

Bei der Beurteilung von Investitionen, die durch eine bestimmte Folge von Zahlungen z_t zu verschiedenen Zeitpunkten t charakterisiert ist, wird als Bewertungskriterium häufig der *Barwert* dieser Zahlungsreihe verwendet (vgl. z. B. [Eis96]), d. h. die Summe der auf den gegenwärtigen Zeitpunkt $t = 0$ diskontierten zukünftigen Zahlungen z_t . Damit erhalten wir die folgende Definition:

Definition 4.8 (Barwert) Bei gegebenen jährlichen Zahlungen z_0, \dots, z_T ist der Barwert bzw. Kapitalwert der Zahlungsreihe durch

$$C_0 = \sum_{t=0}^T z_t q_t^{-t}$$

definiert.

Hierbei geht man davon aus, dass man jederzeit Geld zum Zinssatz i_t leihen oder verleihen kann. Der Barwert und die dazugehörige Folge von Zahlungen sind dann gleichwertig, da sich jede künftige Zahlung z_t zum Zeitpunkt t durch die Anlage bzw. Aufnahme von $z_t q_t^{-t}$ zum Zeitpunkt 0 gegenfinanzieren lässt.

4.1.2 Itô-Prozesse

Die nachfolgend angestellten Überlegungen zur Modellierung von Zinsverläufen und der Ableitung der Preise hiervon abhängiger Anlagen basieren stark auf der Theorie stochastischer Integrale und Differentialgleichungen im Sinne von Itô². Daher ist hier eine kurze Skizzierung zumindest der im weiteren Kapitel verwendeten Definitionen und Sätze notwendig. Für eine mathematisch vollständige und detaillierte Darstellung sei auf die Standardwerke zu diesem Thema (z. B. [KS94, vWW90, Øks92]) verwiesen. Wir orientieren uns bei der folgenden Darstellung an [Sey00]. Einen stochastischen Prozess bezeichnen wir nachfolgend allgemein mit $\{X_t; t \geq 0\}$.

Definition 4.9 (Wiener-Prozess) Ein stochastischer Prozess $\{W_t; t \geq 0\}$ heißt Wiener-Prozess oder Standard Brownsche Bewegung falls gilt:

²Kiyosi Itô, 1915 geborener japanischer Mathematiker

1. $W_0 = 0$
2. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ für alle $t \geq 0$. Damit gilt für den Erwartungswert $E[W_t] = 0$ und für die Varianz $\text{Var}(W_t) = E[W_t^2] = t$.
3. Alle Zuwächse ΔW sind unabhängig voneinander.

Für Wiener-Prozesse gilt auf Grund der Definitionseigenschaften für $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s). \quad (4.4)$$

Diese Eigenschaft erweist sich bei der zu Simulationszwecken notwendigen Diskretisierung als äußerst hilfreich (s. Algorithmus 2).

Mit Hilfe des Wiener-Prozesses lässt sich eine größere Klasse stochastischer Prozesse definieren, die sich gut zur Modellierung von stochastischen Prozessen in vielen Bereichen der Wissenschaft eignet. Ähnlich wie bestimmte Vorgänge in Natur, Ökonomie und Technik häufig durch deterministische Differentialgleichungen beschrieben werden, werden diese stochastischen Prozesse durch *stochastische Differentialgleichungen* modelliert, indem wir die durch einen Wiener-Prozess erzeugten zufälligen Störungen additiv hinzunehmen. Damit erhalten wir folgende Definition:

Definition 4.10 (Itô Stochastische Differentialgleichung) Die Itô Stochastische Differentialgleichung (Itô-SDE bzw. SDE) ist definiert durch

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (4.5)$$

und ist die symbolische Schreibweise für das Itô-Integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s. \quad (4.6)$$

Die Lösung der Itô Stochastischen Differentialgleichung $\{X_t; t \geq 0\}$ heißt *Itô-Prozess*. Wir werden im Folgenden den in der Itô Stochastischen Differentialgleichung auftauchenden Term

- $\mu(X_t, t)dt$ als *Drift-Term* und
- $\sigma(X_t, t)dW_t$ als *Diffusions-Term*

bezeichnen.

Ein gutes intuitives Verständnis von Itô-Prozessen erhalten wir, indem wir uns der numerischen Simulation solcher Prozesse zuwenden. Eine einfache Methode hierzu ist der Algorithmus von Euler-Maruyama, der von der Diskretisierung der den Prozess definierenden Itô-SDE ausgeht:

$$\Delta X_t = \mu(X_t, t)\Delta t + \sigma(X_t, t)\Delta W \quad (4.7)$$

Algorithmus 2 Euler-Maruyama-Algorithmus

```

t := 0
X_t := Startwert
Δt :=  $\frac{T}{m}$ 
while t < T do
    ΔW := Z√Δt mit Z ~ N(0, 1)
    X_{t+Δt} := X_t + μ(X_t, t)Δt + σ(X_t, t)ΔW
    t := t + Δt
end while

```

Durch Realisierung eines bestimmten Wiener-Prozesses kann nun mit Hilfe des Algorithmus 2 und Gleichung 4.7 ein Pfad des Itô-Prozesses angenähert werden.

Wir kommen nun zu einem zentralen Hilfsmittel für die Behandlung von Itô-Prozessen, die eine Art „Kettenregel“ für Itô-Prozesse darstellt.

Lemma 4.1 (Itô) Sei $\{X_t; t \geq 0\}$ ein Itô-Prozess mit der SDE

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

und ferner $g(X_t, t)$ eine Funktion mit stetigen $\frac{\partial g(X_t, t)}{\partial X_t}$, $\frac{\partial^2 g(X_t, t)}{\partial X_t^2}$, $\frac{\partial g(X_t, t)}{\partial t}$. Dann folgt auch $\{Y_t; t \geq 0\}$ mit $Y_t = g(X_t, t)$ einem Itô-Prozess mit dem gleichen Wiener-Prozess $\{W_t; t \geq 0\}$ und der SDE:

$$\begin{aligned}
 dY_t = dg(X_t, t) = & \left[\frac{\partial g(X_t, t)}{\partial t} + \mu(X_t, t) \frac{\partial g(X_t, t)}{\partial X(t)} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\sigma^2(X_t, t)) \frac{\partial^2 g(X_t, t)}{\partial X_t^2} \right] dt \\
 & + \sigma(X_t, t) \frac{\partial g(X_t, t)}{\partial X_t} dW_t
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Zum Beweis vgl. z. B. [KK99].

Wir betrachten nun folgendes, in diesem Zusammenhang sehr beliebtes Beispiel [Sey00]:

Beispiel 4.1 (Geometrische Brownsche Bewegung) In der Black-Scholes-Gleichung werden Aktienkurse S_t durch folgende SDE modelliert:

$$dS_t = \tilde{\mu} S_t dt + \tilde{\sigma} S_t dW_t \tag{4.9}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)t + \tilde{\sigma} W_t\right) \tag{4.10}$$

eine Lösung der SDE 4.9 ist. Hierzu setzen wir $Y_t = S_t$ und $X_t = W_t$. Da der Itô-Prozess X_t ein einfacher Wiener-Prozess ist, folgt für seinen Driftkoeffizient $\mu = 0$ und für den Diffusionskoeffizient $\sigma = 1$. Hierdurch erhalten wir mit Hilfe von Lemma 4.1 und Gleichung 4.10 folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[\frac{\partial g(X_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(X_t, t)}{\partial X_t^2} \right] dt + \frac{\partial g(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t \\ &= \left[S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} X_t \right) \left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} X_t \right) \tilde{\sigma}^2 \right] dt \\ &\quad + S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} X_t \right) \tilde{\sigma} dW_t \\ &= \tilde{\mu} S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} X_t \right) dt \\ &\quad + S_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} X_t \right) \tilde{\sigma} dW_t \end{aligned}$$

Machen wir nun die Substitutionen rückgängig und setzen als Abkürzung Gleichung 4.10 ein, so erhalten wir als Ergebnis Gleichung 4.9.

In der Finanzmathematik spielt eine spezielle Klasse von stochastischen Prozessen eine zentrale Rolle, die so genannten *Martingale* [KK99]:

Definition 4.11 Ein stochastischer Prozess $\{X_t; t \geq 0\}$, der an die Filtration $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ adaptiert (d. h. X_t \mathcal{F}_t -messbar) ist, heißt

- *Super-Martingale*, falls für alle $0 \leq s \leq t$ gilt: $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$
- *Sub-Martingale*, falls für alle $0 \leq s \leq t$ gilt: $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$
- *Martingale*, falls für alle $0 \leq s \leq t$ gilt: $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$

Martingale eignen sich somit z. B. zur Modellierung von Glücksspielen. Verfügt der Spieler nach der n -ten Teilnahme über ein Vermögen von X_n , so sollte ein faires Spiel

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \quad (4.11)$$

erfüllen. Die Martingaleigenschaft wird daher auch in der Finanzmathematik verwendet, um *Arbitragefreiheit* zu modellieren (s. Abschnitt 4.2.2).

Arbitrageargumente stellen in der Finanzmathematik den fundamentalen Ansatz zur konsistenten Preisbestimmung verschiedener Anlagen auf einem Markt dar. Ein Markt ist dann arbitragefrei, wenn es nicht möglich ist, auf diesem Markt ein selbstfinanzierendes Portfolio aus Anlagen zusammenzustellen, so dass dieses zu Beginn den Wert

i	jährlicher Zinssatz
q	jährlicher Zinsfaktor
r	konstanter stetiger Zinssatz
$r(t, T)$	fester stetiger Zinssatz, gültig für den Zeitraum $[t, T]$
$r(t)$	kurzfristiger stetiger Zinssatz
C_0	Barwert einer Zahlungsreihe zum Zeitpunkt t_0
$B(t)$	Wert eines Geldmarktkontos zum Zeitpunkt t
$B(t, T)$	Wert eines T-Bonds zum Zeitpunkt t
i_T	fester jährlicher Zinssatz des T-Bonds
q_T	fester jährlicher Zinsfaktor des T-Bonds
$f(t_0, t, T)$	stetiger Forwardzinssatz
$f(t_0, t)$	Forwardrate
$\{X_t; t \geq 0\}$	stochastischer Prozess
$\{W_t; t \geq 0\}$	Wiener-Prozess
$\{W_t^P; t \geq 0\}$	Wiener-Prozess unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß P
$\{W_t^Q; t \geq 0\}$	Wiener-Prozess unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q
$\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$	Filtration, an den ein Prozess adaptiert ist
$\mu(X_t, t)dt$	Drift-Term des Itô-Prozesses $\{X_t; t \geq 0\}$
$\sigma(X_t, t)dW_t$	Diffusions-Term des Itô-Prozesses $\{X_t; t \geq 0\}$

Tabelle 4.1: Verwendete Notation zu Renditen und Itô-Prozessen

$V(t_0) = 0$ und zu irgendeinem späteren Zeitpunkt T niemals einen negativen, aber mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit einen Wert $V(T) > 0$ hat. Ließe sich ein entsprechendes Portfolio zusammenstellen, so könnten Anleger völlig ohne eigenen Kapitaleinsatz praktisch aus dem Nichts Gewinn (Arbitrage) erzielen. Als Generalannahme lässt sich unterstellen, dass alle realen Märkte arbitragefrei sind, da die Aussicht auf „free lunch“ sofort Arbitrageure auf den Plan ruft, die über Angebot und Nachfrage die Preise der Anlagen des Arbitrage-Portfolios so verändern, dass die Arbitragemöglichkeit gleich wieder verschwindet.

4.2 Einfaktor-Zinsmodelle

Einfaktor-Zinsmodelle verdanken – wie eingangs erwähnt – ihren Namen der Grundannahme, dass ein einzelner Faktor als alleinige erklärende Größe für die gesamte Zinsstruktur betrachtet wird. Üblicherweise – und so auch in diesem Abschnitt – wird als dieser Faktor der kurzfristige stetige Zinssatz $r(t)$ verwendet, obschon dieser nicht der einzige mögliche Kandidat ist.

Der große Vorteil solcher Modelle besteht darin, dass auf Grund dieser Annahme nur $r(t)$ modelliert werden muss und alle übrigen Größen (Zinssätze, Bondpreise etc.) durch die geforderte Arbitragefreiheit implizit gegeben sind.³ Folglich unterscheiden sich die in diesem Abschnitt vorgestellten Einfaktor-Zinsmodelle im Wesentlichen nur durch die Modellierung von $r(t)$.

Wir wollen nun untersuchen, wie durch Arbitrageargumente Null-Kupon-Bond-Preise und damit die Zinsstruktur bestimmt werden können, bevor wir auf die konkrete Modellierung von $r(t)$ in verschiedenen Einfaktor-Modellen eingehen.

4.2.1 Eine Differentialgleichung zur Bondpreisbestimmung

Der folgende Ansatz geht auf [Vas77] zurück und bildet ein lokal-risikofreies Portfolio aus zwei gleichen Anlagen unterschiedlicher Laufzeit. Obgleich dieser älteste Ansatz nicht direkt in den heute üblichen Martingalansatz passt, bietet er dennoch wertvolle Einsichten in die Natur der Zinsstruktur und die danach behandelte Bestimmung des martingal-äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes.

In Einfaktor-Zinsmodellen können Bonds als Derivat der kurzfristigen stetigen Zinsen betrachtet werden. Leider lassen sich die Bondpreise aber nicht ohne weiteres eindeutig aus der short-rate bestimmen, da der einzige, alleine durch die kurzfristigen stetigen Zinsen gegebene Preisprozess der des Geldmarktkontos ist. Alleine mit dem Geldmarktkonto ist es aber offenbar nicht möglich, ein replizierendes Portfolio für einen Bond oder irgendein anderes Derivat anzulegen. Man spricht daher auch davon, dass der a priori gegebene Markt – anders als z. B. bei Black und Scholes – *nicht vollständig* ist [Bjö96].

Ein Ausweg bietet sich, indem wir stattdessen zwei T-Bonds verschiedener Fälligkeiten gegeneinander absichern (hedgen) und auf diese Weise interne Konsistenzbedingungen zwischen den Bondpreisen ausnutzen. Mit Hilfe eines solchen lokal-risikofreien Portfolios erhalten wir eine Differentialgleichung, die zur Vermeidung von Arbitragemöglichkeiten von allen T-Bonds erfüllt werden muss. Die folgende Herleitung folgt weitgehend [Bjö96], weitere Varianten sind in [Vas77, Reb96, GLT99] dargestellt.

Sei $V(t) \equiv V(t, T, r(t))$ der Preis eines T-Bonds⁴, der ausschließlich abhängig ist vom kurzfristigen Zins $r(t)$ und der Restlaufzeit bis Fälligkeit ($T - t$). Der kurzfristige stetige Zinssatz sei unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß P durch folgenden Itô-Prozess modelliert:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t$$

³Streng genommen genügt die alleinige Modellierung von $r(t)$ allerdings nicht, wie wir im Verlauf des Abschnittes sehen werden.

⁴Wir schreiben $V(t)$, da die Argumentation grundsätzlich auch bei anderen, vom Zins abhängigen Anlagen funktioniert.

Zur Vereinfachung schreiben wir $\mu(\cdot)$ statt $\mu(t, r(t))$ und $\sigma(\cdot)$ statt $\sigma(t, r(t))$. Mit dem Lemma 4.1 von Itô ergibt sich

$$dV(t) = \left[\frac{\partial V(t)}{\partial t} + \mu(\cdot) \frac{\partial V(t)}{\partial r} + \frac{\sigma^2(\cdot)}{2} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial r^2} \right] dt + \left[\frac{\partial V(t)}{\partial r} \sigma(\cdot) \right] dW_t \quad (4.12)$$

Beide Seiten werden nun durch $V(t)$ geteilt, so dass wir mit

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{1}{V(t)} \underbrace{\left[\frac{\partial V(t)}{\partial t} + \mu(\cdot) \frac{\partial V(t)}{\partial r} + \frac{\sigma^2(\cdot)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right]}_{=\mu_V(\cdot)} dt + \frac{1}{V(t)} \underbrace{\left[\frac{\partial V(t)}{\partial r} \sigma(\cdot) \right]}_{=\sigma_V(\cdot)} dW_t \quad (4.13)$$

die Momentanrendite der Anlage erhalten, wobei $\mu_V(\cdot)$ und $\sigma_V(\cdot)$ Funktionen von t, T und $r(t)$ sind.

Wir bilden nun ein Portfolio aus zwei Anlagen mit den Fälligkeiten T_1 und T_2 sowie den Preisen $V_1(t)$ und $V_2(t)$. Da annahmegemäß beide Preisprozesse perfekt korreliert sind, muss es möglich sein, durch geeignete Wahl der relativen (wertmäßigen) Portfolioanteile u_1 und u_2 den Einfluss des Wiener-Prozesses auf die Entwicklung des Portfoliowerts zu eliminieren. Die Dynamik des Portfoliowerts ist durch

$$dP(t) = P(t) \left(u_1 \frac{dV_1}{V_1} + u_2 \frac{dV_2}{V_2} \right) \quad (4.14)$$

gegeben. Durch Einsetzen und Umsortieren erhalten wir

$$dP(t) = P(t)(u_1 \mu_{V_1}(\cdot) + u_2 \mu_{V_2}(\cdot)) dt + P(t)(u_1 \sigma_{V_1}(\cdot) + u_2 \sigma_{V_2}(\cdot)) dW_t. \quad (4.15)$$

Die Portfolioanteile werden nun als Lösung des Gleichungssystems

$$u_1 + u_2 = 1 \quad (4.16)$$

$$u_1 \sigma_{V_1}(\cdot) + u_2 \sigma_{V_2}(\cdot) = 0 \quad (4.17)$$

gewählt. Diese ist durch

$$u_1 = - \frac{\sigma_{V_2}(\cdot)}{\sigma_{V_1}(\cdot) - \sigma_{V_2}(\cdot)} \quad (4.18)$$

$$u_2 = \frac{\sigma_{V_1}(\cdot)}{\sigma_{V_1}(\cdot) - \sigma_{V_2}(\cdot)} \quad (4.19)$$

gegeben, so dass in Gleichung 4.15 der Diffusionsterm wegfällt und wir

$$dP(t) = P(t)(u_1 \mu_{V_1}(\cdot) + u_2 \mu_{V_2}(\cdot)) dt \quad (4.20)$$

$$= P(t) \frac{\mu_{V_2}(\cdot) \sigma_{V_1}(\cdot) - \mu_{V_1}(\cdot) \sigma_{V_2}(\cdot)}{\sigma_{V_1}(\cdot) - \sigma_{V_2}(\cdot)} dt \quad (4.21)$$

erhalten.

Auf diese Weise haben wir mit dem Portfolio eine Anlage erzeugt, die zum Zeitpunkt t kurzfristig eine sichere Rendite von $u_1\mu_{V_1}() + u_2\mu_{V_2}()$ garantiert. Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, muss diese Rendite offenbar exakt dem kurzfristigen stetigen Zinssatz $r(t)$ entsprechen. Wäre die Portfoliorendite z. B. höher als $r(t)$, so ließe sich zum Zeitpunkt t mit zu $r(t)$ verzinstem Geld ein solches Portfolio zusammenstellen, das nach Δt wieder verkauft einen risikolosen Gewinn (Arbitrage) ermöglichen würde. Im umgekehrten Fall würde man einfach ein solches Portfolio verkaufen und den Erlös zu $r(t)$ anlegen und könnte so wiederum Arbitrage einstreichen.

Somit dürfen wir annehmen, dass

$$\frac{\mu_{V_2}()\sigma_{V_1}() - \mu_{V_1}()\sigma_{V_2}()}{\sigma_{V_1}() - \sigma_{V_2}()} = r(t) \quad (4.22)$$

gilt. Diese Beziehung lässt sich zu

$$\frac{\mu_{V_1}() - r(t)}{\sigma_{V_1}()} = \frac{\mu_{V_2}() - r(t)}{\sigma_{V_2}()} \quad (4.23)$$

umformen. Da die rechte Seite nicht von T_1 und die linke nicht von T_2 abhängt, gilt auf einem arbitragefreien Markt für jedes T :

$$\frac{\mu_V() - r(t)}{\sigma_V()} = \lambda(t, r(t)). \quad (4.24)$$

Umgeformt lässt sich auch

$$\mu_V() = r(t) + \underbrace{\lambda(t, r(t))\sigma_V()}_{\text{Risikoprämie}} \quad (4.25)$$

schreiben. Die Momentanrendite μ_V der Anlage setzt sich damit aus dem kurzfristigen Zins plus einer Risikoprämie $\lambda(t, r(t))\sigma_V()$ zusammen, welche unabhängig von T ist. Der Prozess $\lambda(t, r(t))$ lässt sich mithin als der für alle Anlagen gleiche Marktpreis des Risikos interpretieren, d. h. als der Preis, den ein Investor pro Risikoeinheit über das sichere Maß hinaus fordert, wobei der „Risikogehalt“ der Anlage durch $\sigma_V()$ gegeben ist. Risikoaversion führt damit zu $\lambda(t, r(t)) > 0$, während Risikoneutralität $\lambda(t, r(t)) = 0$ impliziert.⁵ Macht man die Abkürzungen rückgängig, so erhält man

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} + (\mu() - \lambda(t, r(t))\sigma())\frac{\partial V(t)}{\partial r} + \frac{\sigma^2()}{2}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial r^2} - r(t)V(t) = 0. \quad (4.26)$$

Angewendet auf Zero-Bonds gilt damit folgender Satz:

⁵Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, stellt $\lambda(t, r(t))$ die Verbindung zwischen dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß P und dem risikoneutralen Q her.

Satz 4.1 Der Preis eines Null-Kupon-Bonds $B(t, T) \equiv B(t, T, r(t))$ muss jederzeit

$$\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + (\mu() - \lambda(t, r(t))\sigma()) \frac{\partial B(t, T)}{\partial r} + \frac{\sigma^2()}{2} \frac{\partial^2 B(t, T)}{\partial r^2} - r(t)B(t, T) = 0 \quad (4.27)$$

mit der Nebenbedingung

$$B(T, T) = 1$$

erfüllen.

Wir können die Lösung der Differentialgleichung 4.27 und der dazugehörigen Nebenbedingung alternativ auch als Erwartungswert wie folgt darstellen [Vas77, GLT99]:

Bemerkung 4.1 Der Preis eines Null-Kupon-Bonds ist gegeben durch

$$B(t, T) = E_P \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(s, r(s)) ds - \int_t^T \lambda(s, r(s)) dW_s \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.28)$$

Beweis: Siehe [Vas77].

Als Problem bleibt allerdings die Bestimmung des Marktpreises des Risikos $\lambda()$ bestehen, da dieses a priori bestimmt werden muss. Es wird damit deutlich, dass die Modellierung von $r(t)$ alleine tatsächlich nicht ausreicht, sondern zur eindeutigen Bestimmung der Bondpreise auch $\lambda()$ angegeben werden muss.

4.2.2 Der Martingalansatz

Eine in der Finanzmathematik weit verbreitete und allgemeine Methode zur arbitragefreien Preisbestimmung von Derivaten bildet der in [HK79] erstmals vorgestellte Martingalansatz. Dieser wurde darauf folgend in [AD89, HJM92] auf die Modellierung der Zinsstruktur angewendet.

Bei der Darstellung innerhalb dieser Arbeit beschränken wir uns nur grob auf die wichtigsten Ergebnisse, die wir später bei der Modellierung der Zinsstruktur benötigen. Eine mathematisch vollständige Herleitung dieser Ergebnisse einschließlich aller Beweise zu diesem Abschnitt findet sich u. a. in [AD89, Bjö96]. Eine ausführliche und allgemeine Einführung in die Martingalmethode einschließlich Anwendung auf die Modellierung von Zinsen ist mit [MR97] gegeben.

Die Idee des Martingalansatzes besteht darin, vom realen Wahrscheinlichkeitsmaß P zu einem künstlichen, äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q überzugehen, so dass die Prozesse der relativen, auf ein bestimmtes gemeinsames *Numeraire* bezogenen Preisprozesse Martingale bilden. Ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert, wenn die einzelnen Preisprozesse des Marktes arbitragefrei sind, ist aber nicht zwangsläufig eindeutig [Bjö96].

Sei nun $N(t)$ der (strikt positive) Preisprozess des Numeraire und $V(t)$ der Preis der zu bewertenden Anlage zum Zeitpunkt t , dann erhalten wir als relativen Preis

$$V^*(t) = \frac{V(t)}{N(t)}. \quad (4.29)$$

Haben wir nun ein martingal-äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q , so dass alle (relativen) Preisprozesse des betrachteten Marktes $\{V_i^*(t); t \geq 0\}$ unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß Martingale sind, so gilt definitionsgemäß

$$E_Q[V_i^*(T)|\mathcal{F}_t] = V_i^*(t). \quad (4.30)$$

Wir wenden uns nun konkret der Bewertung von Null-Kupon-Bonds zu. Als Numeraire betrachten wir nachfolgend das Geldmarktkonto $B(t)$. Als Bewertungsgleichung für einen Null-Kupon-Bond mit Fälligkeit T erhalten wir

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E_Q \left[\frac{B(t, T)}{B(t)} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_Q \left[\frac{B(T, T)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nun stellt sich die Frage, wie wir das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß Q bestimmen können. Wie wir im vorherigen Abschnitt 4.2.1 gesehen haben, ist der betrachtete Markt keinesweg vollständig und daher existiert auch kein eindeutiges Maß Q . Die Modellierung von $r(t)$ genügt offenbar nicht alleine zur Bestimmung von $B(t, T)$, sondern es ist zusätzlich nötig, den Marktpreis des Risikos $\lambda(\cdot)$ anzugeben, um Q eindeutig festzulegen. Die Angabe von Q bzw. $\lambda(\cdot)$ ist somit äquivalent. Da letztlich durch die Modellierung bezüglich der Wahl von $\lambda(\cdot)$ keinerlei Einschränkungen gegeben sind, erscheint damit auch die Wahl von Q zumindest aus theoretischer Sicht als weitgehend beliebig. Allerdings deutet die Bezeichnung „Marktpreis des Risikos“ den möglichen Ausweg bereits an: Lässt sich $\lambda(\cdot)$ nämlich am Markt – zumindest implizit – bestimmen, so erhalten wir auch das gesuchte risikoneutrale Maß Q [Bjö96].

Wir betrachten nun die Beziehung zwischen den Gleichungen 4.31 und 4.28:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_P \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(s, r(s)) ds - \int_t^T \lambda(s, r(s)) dW_s^P \right) | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Anschaulich gesprochen wird der Marktpreis des Risikos im Wahrscheinlichkeitsmaß Q verborgen. Insbesondere erkennen wir, dass wenn in der realen Welt Riskoneutralität herrscht ($\lambda(\cdot) = 0$), $Q = P$ gilt. Die Bezeichnung von Q als „risikoneutrales“ Wahrscheinlichkeitsmaß ist damit offenbar gerechtfertigt.

Wir wollen nun untersuchen, wie der Maßwechsel konkret vollzogen werden kann und welche Auswirkungen sich hieraus auf die Modellierung von $r(t)$ ergeben. Wie wir anhand der Gleichung 4.32 gesehen haben, spielt der Marktpreis des Risikos $\lambda(\cdot)$ eine Vermittlerrolle zwischen risikoneutraler und realer Welt. Mit Hilfe des Satzes von Girsanov erhalten wir folgenden Satz:

Satz 4.2 Die Radon-Nikodym-Ableitung von P nach Q ist durch

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s, r(s)) ds - \int_0^t \lambda(s, r(s)) dW_s^P\right) \quad (4.33)$$

gegeben. Die Beziehung zwischen dem Wiener-Prozess $\{W_t^P; t \geq 0\}$ unter P und dem Wiener-Prozess $W_t^Q; t \geq 0\}$ unter Q lässt sich entsprechend durch

$$W_t^Q = W_t^P + \int_0^t \lambda(s, r(s)) ds \quad (4.34)$$

beschreiben.

Beweis: Siehe [AD89].

Wir betrachten nun die Modellierung des kurzfristigen stetigen Zinssatzes als SDE unter P und unter Q . Mit Hilfe des Satzes 4.2 erhalten wir die Beziehung zwischen der Modellierung von $r(t)$ unter Q und P :

Lemma 4.2 Sei $r(t)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die SDE

$$dr(t) = \tilde{\mu}(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW_t^P \quad (4.35)$$

definiert. Dann gilt unter Q :

$$dr(t) = [\tilde{\mu}(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))] dt + \sigma(t, r(t)) dW_t^Q \quad (4.36)$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Kombination von Gleichung 4.35 und Satz 4.2 (vgl. [MR97]) \square

Analog zu den Gleichungen 4.27 und 4.28 können wir unter dem risikoneutralen Maß Q die $B(t, T)$ auch als Lösung einer partiellen Differentialgleichung angeben. Hierzu sei nun $r(t)$ unter Q wie folgt modelliert:

$$dr(t) = \mu(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW_t^Q \quad (4.37)$$

Dann gilt folgender Satz:

Satz 4.3 Der Preis eines T -Bonds $B(t, T)$ erfüllt jederzeit

$$\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \mu(r) \frac{\partial B(t, T)}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r)}{2} \frac{\partial^2 B(t, T)}{\partial r^2} - r(t)B(t, T) = 0 \quad (4.38)$$

mit der Nebenbedingung

$$B(T, T) = 1 \quad (4.39)$$

Beweis: Siehe [Bjö96]).

Dasselbe Resultat erhalten wir auch mit Hilfe von Gleichung 4.27 und Lemma 4.2, da für die Drift $\tilde{\mu}(t, r(t))$ unter P

$$\tilde{\mu}(t, r(t)) = \mu(t, r(t)) + \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))$$

gilt. □

Beide Darstellungen von $B(t, T)$ sind praktisch relevant. Können wir z. B. explizit eine Lösung für die Differentialgleichung 4.38 angeben, so können die Bondpreise schnell und genau berechnet werden. Existiert eine solche Lösung nicht, so bleibt noch die Möglichkeit, mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation Gleichung 4.31 zu approximieren. Beide Verfahren liefern letztlich das gleiche Resultat, was im allgemeinen Fall durch den Satz von Feynman-Kac sichergestellt wird. Allerdings benötigt die Monte-Carlo-Simulation i. d. R. erheblich mehr Rechenzeit bei ungenauem Ergebnis und ist daher lediglich zweite Wahl [Sey00].

4.2.3 Überblick über verschiedene Modellansätze

Wir werden nun verschiedene klassische Einfaktormodelle in Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung vorstellen. Diese unterscheiden sich jeweils in ihren spezifischen Modellierungen des kurzfristigen stetigen Zinssatzes, die im Folgenden immer unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q dargestellt werden. Wir folgen hierbei [BM01].

Zeithomogene Modelle

Die ersten vorgestellten Einfaktor-Modelle gehören zur Klasse der zeithomogenen Modelle. Diese Bezeichnung trägt dem Umstand Rechnung, dass die Dynamik von $r(t)$ durch konstante Koeffizienten bestimmt wird. Dies führt zu dem Vorteil, dass Bondpreise und damit die gesamte Zinsstruktur recht leicht analytisch bestimmt werden können. Auf der anderen Seite führt diese Starrheit aber auch dazu, dass bestimmte, am Markt beobachtbare Zinsstrukturen unabhängig von der Wahl der Parameter nicht reproduziert werden können. Klassische Vertreter dieser Modellklasse sind:

Vasicek (1977): Im Modell von Vasicek [Vas77] wird die Dynamik des kurzfristigen stetigen Zinssatzes durch

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma dW_t^Q, \quad r(0) = r_0 \quad (4.40)$$

modelliert, wobei r_0 , k , Θ und σ positive Konstanten sind. Die Konstruktion des Driftterms sorgt dafür, dass $r(t)$ um Θ herum schwankt, weshalb Θ als langfristiger Mittelwert des Zinssatzes betrachtet werden kann. Die Konstante k bestimmt die Stärke dieses *Mean-Reversion*-Verhaltens, welches grundsätzlich auch in der Realität zu beobachten ist.

Es lässt sich zeigen, dass $r(t)$ bezogen auf einen Zeitpunkt s mit $s \leq t$ normalverteilt ist. Damit besteht die Möglichkeit, dass $r(t)$ negativ wird. Die Normalverteilung der $r(t)$ macht das Modell auf der einen Seite zwar analytisch gut handhabbar, auf der anderen Seite können aber in der Realität negative Zinssätze nicht auftauchen.

Der Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes wird durch Angabe von $\lambda(\cdot)$ bestimmt. Es wird

$$\lambda(t, r(t)) = \lambda_0 r(t) \quad \text{mit } \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad (4.41)$$

gesetzt, so dass die entsprechende Radon-Nikodym-Ableitung durch Satz 4.2 und Gleichung 4.41 ermittelt werden kann. Die Dynamik von $r(t)$ unter P erhalten wir entsprechend mit Hilfe von Gleichung 4.40 und Lemma 4.2.

Cox, Ingersoll, Ross (1985): Das in [CIR85] eingeführte Modell von Cox, Ingersoll und Ross (CIR-Modell) definiert den Prozess des kurzfristigen stetigen Zinssatzes unter Q durch folgende SDE:

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^Q, \quad r(0) = r_0 \quad (4.42)$$

Hierbei sind r_0 , k , Θ und σ positive Konstanten. Der Unterschied zur SDE des Vasicek-Modells in Gleichung 4.40 besteht in dem zusätzlichen Quadratwurzelterm $\sqrt{r(t)}$ in der Diffusionskomponente. Neben dem auch beim Vasicek-Modell vorgefundenen Mean-Reversion-Verhalten führt diese Modifikation zu einer weiteren wünschenswerten Eigenschaft, die beim Vasicek-Modell nicht vorliegt, nämlich dass auf diese Weise negative $r(t)$ ausgeschlossen werden können.⁶ Intuitiv ist diese Eigenschaft klar, da zu dem Zeitpunkt, an dem $r(t) = 0$ gilt, der Einfluss des Diffusionsterm ganz wegfällt und nur noch die Mean-Reversion-Eigenschaft die Prozessrichtung beeinflusst.

Diesem Modell ist der Abschnitt 4.2.4 gewidmet, in dem wir uns genauer mit seinen Eigenschaften befassen.

Zeitinhomogene Modelle

Der Kritikpunkt, dass zeithomogene Einfaktor-Modelle eine gegebene Zinsstruktur teilweise nur schlecht abbilden, führte zu deren Erweiterung um zeitabhängige Parameter.

⁶Diese theoretisch sehr angenehme Aussage gilt leider bei Diskretisierung der SDE nicht mehr.

Hull und White [HW90] schlagen daher in ihrer allgemeinsten Form vor, den kurzfristigen stetigen Zins durch die SDE

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW_t^Q \quad (4.43)$$

zu modellieren, wobei $\vartheta(t)$, $a(t)$ und $\sigma(t)$ deterministische Funktionen von t sind. Dieses Modell kann nun an die jeweilige Zinsstruktur angepasst werden.

Eine gewisse „Überanpassbarkeit“ an die momentane, nicht zwangsläufig signifikante Marktlage führt dazu, nur bestimmte Parameter als Funktionen von der Zeit zu modellieren und die übrigen Parameter einfach konstant zu wählen [BM01]. Damit erhalten wir die letzten beiden der unten aufgeführten Modelle, die sich sowohl als Erweiterung bzw. Verallgemeinerungen der oben dargestellten, zeithomogenen Modelle auffassen lassen, als auch als Spezialfälle des allgemeinen Ansatzes von Hull und White aus Gleichung 4.43.

Wir betrachten nun konkret folgende Modelle:

Ho und Lee (1986): Das in [HL86] vorgestellte, historisch älteste hier beschriebene zeitinhomogene Modell modelliert $r(t)$ in der (stetigen) Notation von [HDK02] recht einfach wie folgt:

$$dr(t) = \vartheta(t)dt + \sigma dW_t^Q \quad (4.44)$$

Die zeitabhängige Funktion $\vartheta(t)$ kann mit Hilfe der gegenwärtigen Forwardraten an die aktuelle Zinsstruktur angepasst werden. Auch bei diesem Modell bleibt das Problem bestehen, dass negative Zinsen vorkommen können, jedoch hat seine analytische Einfachheit für eine weite praktische Verbreitung gesorgt.

Hull-White:Verallgemeinerung des Vasicek-Modells: Alternativ hierzu wird in [HW94] $r(t)$ durch

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW_t^Q \quad (4.45)$$

modelliert, wobei es sich bei a und σ im Gegensatz zum allgemeinen Ansatz in Gleichung 4.43 um positive Konstanten handelt. Es wird nun $\vartheta(t)$ so gewählt, dass die aktuelle Zinsstruktur vom Modell genau reproduziert wird. Dieses kann hier ähnlich wie bei dem Modell von Ho und Lee über die aktuellen Forwardraten geschehen. Ebenso wie bei Ho und Lee besteht auch hier das Problem, dass es zu negativen $r(t)$ kommen kann, wenngleich diese Möglichkeit auch eher theoretischer Natur ist [BM01].

Hull-White:Verallgemeinerung des CIR-Modells: Analog lässt sich auch eine entsprechende Erweiterung des CIR-Modells durchführen, indem wir von Gleichung 4.43 ausgehend $r(t)$ durch

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)]dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW_t^Q \quad (4.46)$$

modellieren [HW90]. Die Verwandtschaft wird sichtbar, wenn man a aus der Klammer zieht. Da dieses Modell keinen guten analytischen Zugang gewährt, kommt ihm in der Praxis keine große Bedeutung zu [BM01].

Kritische Würdigung der Einfaktormodelle

Obgleich sich Einfaktor-Zinsmodelle wegen ihrer vergleichsweise guten rechnerischen Handhabbarkeit in der Praxis großer Beliebtheit erfreuen, müssen folgende Kritikpunkte grundsätzlicher Natur angebracht werden [GLT99, HDK02, BM01]:

- Da längerfristige Zinssätze auf deterministischem Wege aus den kurzfristigen Zinsen berechnet werden, sind die Bondpreise unterschiedlicher Laufzeiten perfekt korreliert. In der Realität können im Widerspruch hierzu auch bei gleichem kurzfristigen Zinssatz T-Bonds mit gleicher Laufzeit unterschiedliche Preise haben.
- Es existiert kein (offensichtlicher) ökonomischer Grund dafür, warum alleine der kurzfristige stetige Zins die komplette Zinsstruktur beherrschen sollte.
- Bei empirischen Untersuchungen konkreter Einfaktor-Modelle werden reale Zinssätze und Optionspreise teilweise nur schlecht getroffen.

Ausgehend von dieser Kritik wurden einige Mehrfaktoren-Modelle entwickelt, die aber generell sowohl bei der Ableitung von Preisen als auch bei der Parameterbestimmung rechnerisch erheblich schwerer handhabbar sind.

4.2.4 Das Modell von Cox, Ingersoll und Ross

Wir betrachten nun das bereits in Abschnitt 4.2.3 vorgestellte CIR-Modell genauer, da dieses im Gesamtmodell zur Generierung der Zinsszenarien eingesetzt werden soll. Trotz seiner Schwächen spricht im Zusammenhang dieser Arbeit insbesondere das Vorhandensein analytischer Lösungen sowohl für die Bondpreisbestimmung als auch für die Parameterschätzung sehr für dieses Modell. Eine detailliertere Diskussion der Vor- und Nachteile dieses Modells findet am Ende dieses Abschnitts statt.

Das CIR-Modell lässt sich im Rahmen dieser Arbeit grundsätzlich als austauschbares Modul verstehen, welches ohne irgendeinen Einfluss auf das Modellkonzept durch ein „besseres“ Zinsmodell ersetzt werden kann. Es bleibt hierbei aber anzumerken, dass „das beste Zinsmodell“ nicht existiert, ebensowenig wie ein einheitliches Bewertungsschema zum Vergleich verschiedener Modelle. Daher müssen je nach Einsatzzweck die Vor- und Nachteile stets gegeneinander abgewogen werden [GLT99].

Maßwechsel beim CIR-Modell

Wir wollen uns nun mit dem Wechsel vom realen Wahrscheinlichkeitsmaß P hin zum risikoneutralen Maß Q und seinen Konsequenzen für die Modellierung von $r(t)$ unter P und Q befassen. Hierfür sind im Wesentlichen folgende drei Gründe ausschlaggebend:

1. Zur Simulation von Zinsszenarien in der realen Welt benötigen wir die Modellierung von $r(t)$ unter P .
2. Um aus den unter P simulierten Szenarien für $r(t)$ die passende Zinsstruktur berechnen zu können, müssen wir wieder auf Q wechseln können.
3. Historische Zeitreihen zur Parameterschätzung liegen nur unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß P vor, so dass wir die entsprechenden Parameter für Q aus denen für P bestimmen müssen.

Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen muss der Marktpreis des Risikos $\lambda()$ sein. Dieser wird in [CIR85] durch

$$\lambda(t, r(t)) = \lambda_0 \sqrt{r(t)} \quad \text{mit } \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad (4.47)$$

angegeben, ohne jedoch ökonomische Gründe hierfür zu nennen. Allerdings erlaubt diese Wahl, Parameter $\tilde{\Theta}$ und \tilde{k} unter P zu bestimmen, so dass die SDE von $r(t)$ sowohl unter Q als auch unter P dieselbe Gestalt annimmt, was bei der Parameterschätzung aus Realdaten Vorteile bringt (s. u. und [BM01, FMW03]). Wir können nun folgendes Lemma beweisen:

Lemma 4.3 *Wird unter Q die Dynamik von $r(t)$ durch die SDE*

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^Q \quad (4.48)$$

beschrieben, so gilt für diese Dynamik unter P

$$dr(t) = [k\Theta - (k - \lambda_0\sigma)r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^P \quad (4.49)$$

Beweis: Die Behauptung folgt durch Einsetzen der Gleichungen 4.42, 4.47 und Anwendung des Lemmas 4.2 (vgl. [FMW03]). \square

Als Radon-Nikodym-Ableitung erhalten wir daher unter Verwendung von Gleichung 4.47 und Satz 4.2

$$\frac{dQ}{dP} |_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda_0^2 r(s) ds - \int_0^t \lambda_0 \sqrt{r(s)} dW_s^P\right) \quad (4.50)$$

(vgl. [BM01]).

Bestimmung von Bondpreisen und Zinsstruktur im CIR-Modell

Wir nehmen nun an, dass die Modellierung von $r(t)$ unter Q allgemein durch folgende SDE gegeben ist:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t^Q \quad (4.51)$$

Dann muss nach Satz 4.3 der Bondpreis $B(t, T)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial B(\cdot)}{\partial t} + \mu(\cdot) \frac{\partial B(\cdot)}{\partial r} + \frac{\sigma^2(\cdot)}{2} \frac{\partial^2 B(\cdot)}{\partial r^2} - r(t)B(\cdot) = 0 \quad (4.52)$$

mit der Nebenbedingung

$$B(T, T) = 1 \quad (4.53)$$

erfüllen. Für das CIR-Modell betrachten wir konkret

$$\mu(\cdot) = k(\Theta - r(t)) \quad (4.54)$$

und

$$\sigma(\cdot) = \sigma \sqrt{r(t)}. \quad (4.55)$$

Im Fall des CIR-Modells können wir folgende, analytische Lösung für Gleichung 4.52 angeben, die [BM01] entnommen ist:

$$B(t, T) = C(t, T)e^{-D(t, T)r(t)} \quad (4.56)$$

wobei

$$C(t, T) = \left[\frac{2h \exp\{(k+h)(T-t)/2\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{2k\Theta/\sigma^2} \quad (4.57)$$

$$D(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \quad (4.58)$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma} \quad (4.59)$$

Eine aufwendige Ermittlung von Erwartungswerten erübrigt sich somit. Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich damit bei gegebenen Modellparametern und bekannten $r(0)$ die Zinsstruktur zum Zeitpunkt 0 einfach ermitteln, indem wir

$$r(0, T) = - \left(\frac{\log(B(0, T))}{T} \right) \quad (4.60)$$

berechnen.

Parameterbestimmung

Wir wollen nun geeignete Parameter für das CIR-Modell anhand von Marktdaten bestimmen. Hierzu folgen wir [FMW03].

Wir stehen vor folgendem grundsätzlichem Problem: Betrachten wir eine reale Marktzeitreihe von $r(t)$, so können wir anhand dieser Zeitreihe offenbar nur die CIR-Parameter unter P bestimmen. Damit können wir zwar $r(t)$ unter P modellieren, die dazugehörige Zinsstruktur können wir damit allerdings nicht bestimmen. Daher müssen wir zusätzlich die Parameter unter Q ermitteln. Dieses erfolgt durch Festlegung des Marktpreises des Risikos $\lambda()$, das daher zumindest implizit aus den Marktdaten gewonnen werden muss.

Wir wählen somit folgende Strategie:

1. Wir schätzen anhand historischer Zeitreihen die Dynamik von $r(t)$ unter P . Wir verwenden hierzu folgende SDE:

$$dr(t) = \tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^P \quad (4.61)$$

Hierfür existieren spezielle Schätzfunktionen, so dass sich für \hat{k} , $\hat{\Theta}$ und $\hat{\sigma}$ explizit Formeln angeben lassen (vgl. z. B. [Sch97, FMW03]).

2. Wir müssen nun noch Schätzer für die Parameter unter der Martingaldarstellung bestimmen. Diese ist durch die SDE

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^Q \quad (4.62)$$

gegeben, und es gilt nach Lemma 4.3 folgende Beziehung zu den Parametern unter P :

$$\tilde{k} = k - \lambda_0\sigma \quad (4.63)$$

und

$$\tilde{\Theta} = \frac{\Theta k}{\tilde{k}} = \frac{\Theta k}{k - \lambda_0\sigma}, \quad (4.64)$$

wie man leicht nachrechnen kann. Die Parameter unter Q lassen sich daher offenkundig aus denen für P bestimmen, wenn man einen Schätzer für λ_0 kennt. Wir wollen allerdings $\hat{\lambda}_0$ nicht explizit bestimmen sondern \hat{k} , da bei gegebenen Schätzwerten für die P -Parameter \hat{k} , $\hat{\Theta}$ und $\hat{\sigma}$ durch Bestimmung von \hat{k} auch die Parameter unter Q vollständig bestimmt sind. Damit können wir durch

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\hat{k} - \tilde{k}}{\hat{\sigma}} \quad (4.65)$$

auch einen Schätzer für λ_0 angeben, den wir allerdings im Folgenden weder benötigen noch weiter betrachten.

Datenzeitraum	\hat{k}	$\hat{\Theta}$	$\hat{\sigma}$	\hat{k}	$\hat{\Theta}$
1972-2001	0.974	0.058	0.154	1.101	0.051
1975-2001	0.375	0.051	0.069	0.327	0.059
1985-2001	0.076	0.035	0.034	-0.032	-0.082
1991-2001	0.176	0.025	0.028	0.007	0.632

Tabelle 4.2: Mit der einfachen Schätzfunktion ermittelte CIR-Parameter

Wir können nun k dadurch schätzen, dass wir bei gegebenen $r(0)$ die mit 4.56 berechneten T-Bondpreise $B(0, T)$ an die realen Preise $B^M(0, T)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ anpassen.

In [FMW03] wird das oben angegebene Verfahren auf Zeitreihen der Bundesbank angewendet. Als historische Zeitreihe für den kurzfristigen stetigen Zinssatz $r(t)$ werden die Frankfurter Geldmarktsätze für Tagesgeld benutzt. Die im selben Zeitraum gültigen Preise für T-Bonds liegen ebenfalls als Zeitreihe der Bundesbank vor, allerdings nur als Schätzwerte, da Null-Kupon-Bonds i. d. R. nicht gehandelt werden.

Zur Schätzung der Parameter unter P existieren verschiedene Schätzfunktionen. In unserem Fall wurden konkret sowohl die einfache (*simple estimating function*) als auch die Martingal-Schätzfunktionen (*martingale estimating function*) verwendet. Die Martingal-Schätzfunktion hat hierbei aber nichts mit dem bisher in diesem Kapitel betrachteten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q zu tun. Es handelt sich um ein alternatives Schätzverfahren, das im Gegensatz zum direkten Maximum-Likelihood-Ansatz der einfachen Schätzfunktion unverzerrte Schätzwerte liefert (vgl. [Sør96, Sch97, FMW03]).

Die Schätzwerte der Parameter unter Q ergeben sich gemäß Schritt 2 unserer Strategie durch die Bestimmung von k anhand der berechneten und der beobachteten Zinsstruktur. Es werden nun n T-Bonds betrachtet, wobei T_i die Laufzeit eines solchen Null-Kupon-Bonds bezeichnet, $B_i(0, T_i)$ den berechneten Preis und $B_i^M(0, T_i)$ den entsprechenden realen Marktpreis zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $i = 1, \dots, n$. Der zur Berechnung von $B_i(0, T_i)$ jeweils notwendige reale kurzfristige stetige Zinssatz $r(0)$ ist offenbar durch dieselbe Zeitreihe gegeben, mit deren Hilfe schon die CIR-Parameter unter P geschätzt wurden. Der Schätzer für k wird in [FMW03] durch

$$\hat{k} = \arg \min_k \sum_{i=1}^n (B_i(0, T_i) - B_i^M(0, T_i))^2 \quad (4.66)$$

angegeben und kann mit Hilfe von Standardsoftware berechnet werden.

Auf diese Weise erhalten wir die Tabellen 4.2 und 4.3, deren Werte [FMW03] entnommen sind.

Datenzeitraum	\hat{k}	$\hat{\Theta}$	$\hat{\sigma}$	\hat{k}	$\hat{\Theta}$
1972-2001	1.015	0.058	0.160	1.151	0.051
1975-2001	0.381	0.051	0.071	0.334	0.059
1985-2001	0.076	0.035	0.034	-0.032	-0.083
1991-2001	0.178	0.025	0.028	0.008	0.567

Tabelle 4.3: Mit der Martingal-Schätzfunktion ermittelte CIR-Parameter

Insgesamt erscheinen die Schätzwerte sowohl bei Verwendung des einfachen als auch des Martingal-Schätzers recht ähnlich, sie unterscheiden sich aber recht stark je nach dem, welcher Datenzeitraum für die Schätzung verwendet wurde.

Anzumerken ist, dass die negativen Werte bei Verwendung der Daten bei beiden Schätzverfahren von 1985 bis 2001 gemäß CIR-Modell unzulässig sind.

Simulation von Zinsszenarien

Um Zinsszenarien simulieren zu können, muss zunächst die stochastische Differentialgleichung des CIR-Modells unter P diskretisiert und mit anhand realer Daten geschätzten Parametern versehen werden. Die Simulation liefert dann für diskrete Zeitpunkte t den kurzfristigen Zins $r(t)$, so dass wir für alle diese Zeitpunkte mittels Gleichung 4.56 die zu diesem Zeitpunkt gültigen Bondpreise und damit die Zinsstruktur berechnen können.

Wir diskretisieren nun die SDE 4.61 des CIR-Modells unter P wie durch Gleichung 4.7 beschrieben und erhalten

$$\Delta r(t) = \tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t)}\Delta W \quad (4.67)$$

Mit dieser Diskretisierung können wir den Algorithmus von Euler-Maruyama (s. Algorithmus 2) anwenden.

Algorithmus 3 Simulation von Zinsszenarien mit dem CIR-Modell

```

t := 0
r(t) := r0 (= kurzfristiger stetiger Zinssatz zum Simulationsbeginn)
Δt :=  $\frac{T}{m}$ 
while t < T do
  ΔW := Z√Δt mit Z ~ N(0, 1)
  r(t + Δt) := r(t) +  $\tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t)}\Delta W$ 
  t := t + Δt
end while

```

Zusätzlich können wir in jedem Zeitschritt bzw. jeder Iteration der While-Schleife die Zinsstruktur angeben, indem wir $B(0, T)$ für verschiedene T berechnen, wobei wir für diese Berechnung $r(0)$ in Gleichung 4.56 auf das in diesem Zeitschritt simulierte

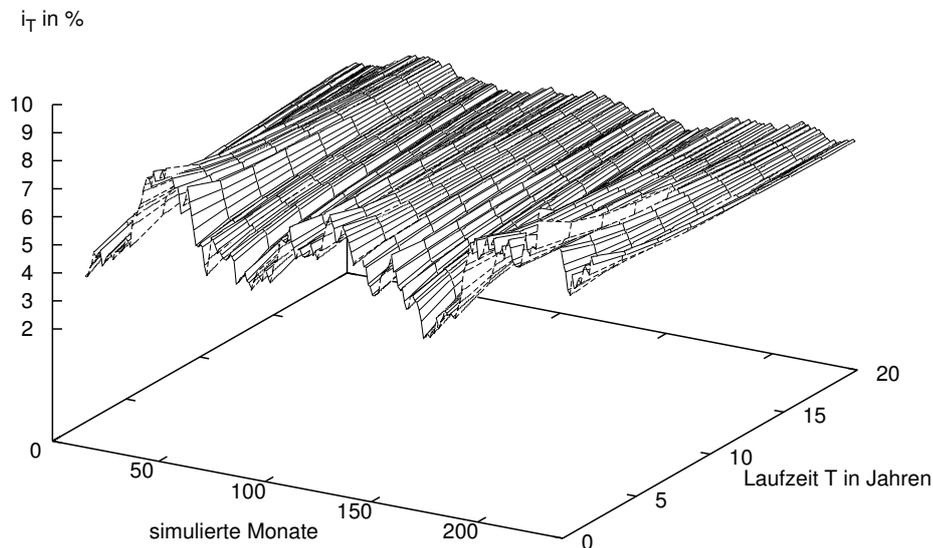


Abbildung 4.2: Mit dem CIR-Modell simulierte monatliche Zinsstrukturkurven über einen Zeitraum von 20 Jahren

$r(t)$ setzen. Den festen (jährlichen) Zinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit T i_T erhalten wir dann durch

$$i_T = \exp\left(-\frac{\log(B(0, T))}{T}\right) - 1 \quad (4.68)$$

bzw. den entsprechenden (jährlichen) Zinsfaktor durch

$$q_T = \exp\left(-\frac{\log(B(0, T))}{T}\right). \quad (4.69)$$

Wir simulieren nun mit dem angegebenen Verfahren ein Beispielszenario über 20 Jahre, wobei wir die mit der Martingal-Schätzfunktion ermittelten Parameter über die Jahre 1975 bis 2001 verwenden. Als Simulationsstart wählen wir den 1.1.2004, so dass wir aus dem Zinssatz für Tagesgeld zum 30.12.2003 $r_0 = 0.0212$ ermitteln⁷. Ferner verwenden wir monatliche Simulationsschritte und setzen $\Delta t = \frac{1}{12}$. Die Resultate sind in Abbildung 4.2 graphisch aufbereitet. Wir erkennen, dass die kurzfristigen Zinssätze

⁷Quelle: Bundesbank, Zeitreihe ST0101.

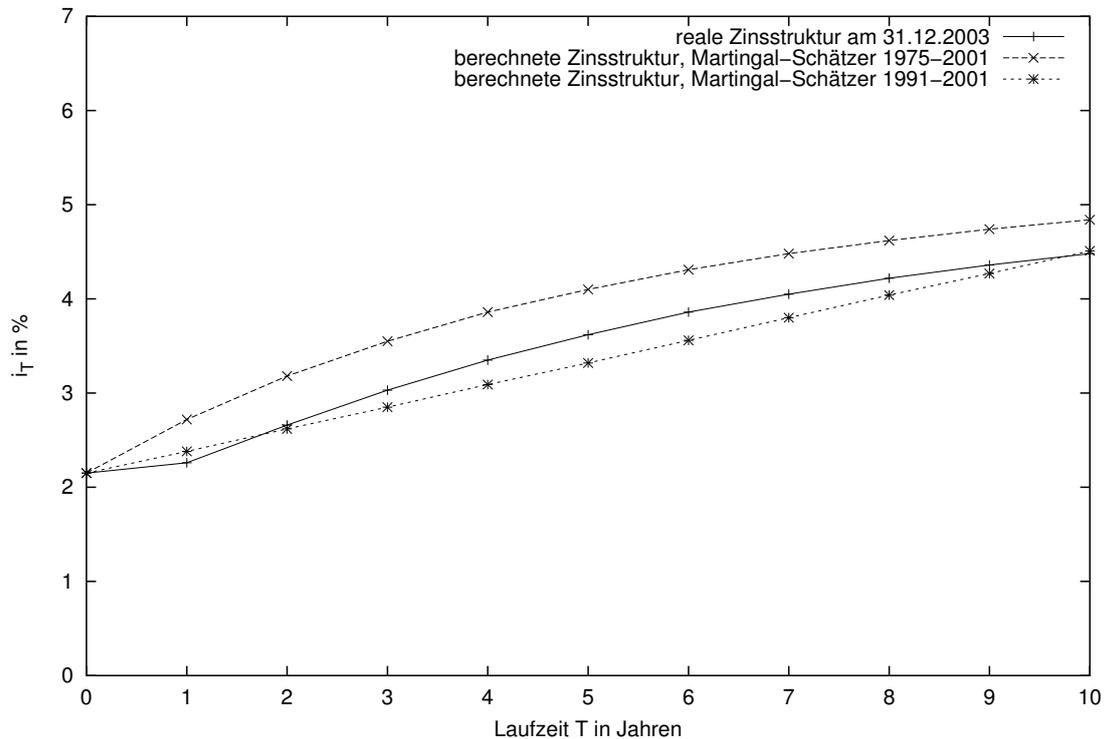


Abbildung 4.3: Vergleich der realen mit vom CIR-Modell berechneten Zinsstrukturen

relativ stark schwanken, allerdings stets um ihren Mittelwert. Die Schwankung baut sich mit steigender Langfristigkeit der Zinssätze ab, so dass die Zinssätze mit langer Laufzeit nur noch schwach variieren. Es können die typischen Verläufe (normal, flach, invers) der Zinsstrukturkurve aus Abbildung 4.1 wiedergefunden werden, jedoch keine „Buckel“, die bei realen Zinsstrukturkurven gelegentlich auch vorkommen.

Wir betrachten nun in Abbildung 4.3 die Güte der berechneten Zinsstruktur. Hierzu vergleichen wir die reale Zinsstrukturkurve Ende 2003 mit berechneten Zinsstrukturkurven, wobei wir unterschiedliche Parameter für das CIR-Modell verwenden. Wir erhalten je nach Datenzeitraum, über die wir die CIR-Parameter bestimmt haben, deutlich unterschiedliche Zinsstrukturkurven. Für unsere Zwecke scheinen auf Grund der besseren Annäherung an die aktuelle, reale Zinsstrukturkurve im hier betrachteten Laufzeitbereich zwischen einem und zehn Jahren die über den Zeitraum 1991 bis 2001 ermittelten CIR-Parameter geeigneter zu sein.

Kritische Würdigung des CIR-Modells

Wir fassen hier die Vor- und Nachteile des CIR-Modells zusammen. Da es sich bei dem CIR-Modell um ein Einfaktor-Modell handelt, treffen die an dieser Modellklasse

angebrachten, allgemeinen Kritikpunkte (s. Abschnitt 4.2.3) natürlich auch auf dieses zu, so dass wir sie hier nicht erneut anführen.

In [Reb96] wird eine genauere Analyse der speziellen Eigenschaften des CIR-Modells durchgeführt, die auch eine Zusammenfassung der Resultate empirischer Studien mit Realdaten der US-amerikanischen, britischen, italienischen und niederländischen Rentenmärkte umfasst. Eine entsprechende Untersuchung für den deutschen Rentenmarkt findet sich in [FMW03]. Die wesentlichen zusammengetragenen Kritikpunkte sind folgende:

- Mit der geringen Anzahl Parameter sind selbst einzelne Zinsstrukturkurven nicht exakt darstellbar, sondern können nur angenähert werden. Speziell ausgeprägte „Buckel“ der Zinsstruktur sind praktisch gar nicht darstellbar. Daraus resultieren insgesamt Schwächen bei der Abbildung der Zinsstrukturkurve.
- Die realen (empirischen) Verteilungseigenschaften der kurzfristigen stetigen Zinsen entsprechen denen der simulierten kurzfristigen Zinsen in vielen Fällen nur schlecht. Diese Schwäche pflanzt sich konstruktionsgemäß in der Zinsstruktur und allen übrigen abgeleiteten zinsabhängigen Preisen fort.
- Die für die CIR-Parameter vorhandenen Schätzmethode produzieren bei Anwendung auf Realdaten instabile, stark schwankende Schätzwerte (s. Tabellen 4.2 und 4.3). Dieser Umstand wird in [Reb96] als Indiz dafür angesehen, dass die mit der Parameterschätzung verbundene Optimierung versucht, die Realdaten in ein falsches Modell zu zwingen. Allerdings tritt dasselbe Phänomen auch bei anderen, wesentlich etablierteren Modellen auf, bei denen in der Praxis die Parameter einfach regelmäßig an die sich veränderten Marktbedingungen angepasst werden.

Trotz dieser Nachteile rechtfertigen die folgenden Vorteile den Einsatz des CIR-Modells im Rahmen dieser Arbeit:

- Die durch das CIR-Modell gegebene Dynamik der kurzfristigen stetigen Zinsen ist in der Lage, wesentliche Eigenschaften dieser Größe wie ihr Mean-Reversion-Verhalten sowie ihre Nicht-Negativität zu modellieren.
- Es existieren geschlossene Formeln zur Bestimmung von Bond- und Optionspreisen, wodurch diese sehr effizient berechnet werden können. Diese Eigenschaft stellt insbesondere im Zusammenhang mit dem in dieser Arbeit entwickelten Gesamtmodell einen bedeutenden Vorteil dar, da wir für die Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation auf die Generierung sehr vieler Zinsszenarien mit ihren jeweiligen Zinsstrukturen im Zeitverlauf angewiesen sind.
- Zur effizienten Bestimmung der CIR-Parameter existieren ebenfalls geschlossene Formeln, zumindest unter P . Die Kalibrierung der übrigen Parameter anhand der Zinsstruktur ist zwar komplizierter, aber dennoch mit vertretbarem Aufwand zu erledigen [FMW03].

4.2.5 Weitere Modellansätze

Neben den hier behandelten Vertretern der Familie der Einfaktor-Modelle existieren weitere Modellfamilien, die aus Gründen der Vollständigkeit zumindest erwähnt werden sollen. Zu einem umfassenden Überblick sei z. B. auf [BM01, GLT99] verwiesen.

Mehrfaktor-Modelle

Als Ausgangspunkt für die Entwicklung von Mehrfaktormodellen kann man die prinzipiellen Nachteile der Einfaktor-Modelle (vgl. Abschnitt 4.2.3) ansehen, die in deren Generalannahme begründet sind, $r(t)$ sei die alleinige, die Zinsstruktur determinierende Größe.

Durch die Modellierung zusätzlicher Einflussfaktoren als voneinander unabhängige Prozesse kann die starre Bindung von Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeiten aufgehoben werden. Entsprechende Modelle können damit z. B. unterschiedliche Veränderungen von kurz- und langfristigen Zinssätzen erlauben [BM01, HDK02]. Ein weiterer Nutzen durch den Übergang auf weitere Faktoren besteht in der besseren Anpassbarkeit der jeweiligen Modelle an die reale Zinsstruktur, die insbesondere bei den zeit-homogenen Einfaktormodellen nicht exakt reproduziert werden kann. Wir wollen als Beispiele einige wichtige Vertreter solcher Modelle kurz erläutern:

Richard (1978): In [Ric78] wird vorgeschlagen, neben dem kurzfristigen stetigen Zins auch die kurzfristige Inflationsrate als unabhängigen Diffusionsprozess zu modellieren.

Brennan und Schwartz (1979): Alternativ wird in [BS79] sowohl der kurzfristige als auch der langfristige stetige Zins modelliert, wobei beide Prozesse durch korrelierte Wiener-Prozesse gekoppelt sind.

Longstaff und Schwartz (1979): Ein ebenso auf zwei Faktoren basierendes Modell wird in [LS92] vorgestellt. Indirekt werden hier sowohl der kurzfristige stetige Zins als auch seine Varianz modelliert [GLT99].

Unabhängig davon, welche Faktoren man zusätzlich modelliert, führen alle diese Ansätze zu einer deutlich schlechteren analytischen Handhabbarkeit, durch die die oben genannten Vorteile solcher Mehrfaktor-Modelle erkauft werden.

Heath-Jarrow-Morton (1992)

Das von Heath, Jarrow und Morton [HJM92] entwickelte Modell (HJM-Modell) basiert auf der Modellierung der Forwardraten. Diese werden unter P modelliert für jedes T durch

$$df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dW_t^P, \quad (4.70)$$

wobei $\mu_f(t, T)$ und $\sigma_f(t, T)$ eigene Prozesse für jedes T sind. Zum Zeitpunkt 0 können wir für jedes T $f(0, T)$ auf die reale Forward-Rate setzen, so dass konstruktionsgemäß zu diesem Zeitpunkt die Zinsstruktur exakt abgebildet wird, da

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right) \quad (4.71)$$

gilt.

Arbitragefreiheit wird durch Gültigkeit der Beziehung

$$\mu_f(t, T) = \sigma_f(t, T) \left[\int_t^T \sigma_f(t, s)ds - \lambda(t) \right] \quad (4.72)$$

hergestellt, wobei $\lambda(t)$ wiederum den Marktpreis des Risikos repräsentiert. Damit können wir als SDE für die Bondpreisdynamik unter P

$$df(t, T) = \sigma_f(t, T) \left[\int_t^T \sigma_f(t, s)ds - \lambda(t) \right] dt + \sigma_f(t, T)dW_t^P \quad (4.73)$$

schreiben [GLT99]. Unter Q fällt $\lambda(t)$ auch hier weg, und wir erhalten für die Dynamik der Forward-Raten

$$df(t, T) = \sigma_f(t, T) \left[\int_t^T \sigma_f(t, s)ds \right] dt + \sigma_f(t, T)dW_t^Q. \quad (4.74)$$

Da die Wahl von $\sigma_f(t, s)$ weitgehend beliebig ist, wird in der Literatur statt von dem HJM-Modell auch von dem HJM-„Rahmen“ (*framework*) gesprochen. So können wir $\sigma_f(t, s)$ teilweise so wählen, dass wir in Abschnitt 4.2.3 genannte Einfaktor-Modelle erhalten [Bjö96, GLT99].

Durch die Hinzunahme weiterer, voneinander unabhängiger Wiener-Prozesse als Zufallsquelle, lässt sich die feste Bindung zwischen den Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeit auflösen, indem die Forwardraten durch

$$df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i}(t, T)dW_{t,i}^P \quad (4.75)$$

modelliert werden. Der Einfluss von $W_{t,i}$ ändert sich dadurch, dass $\sigma_{f,i}(t, T)$ nicht konstant ist. Die Arbitragebedingungen des Einfaktor-Falles lassen sich relativ einfach auf den Mehrfaktor-Fall übertragen [GLT99, HDK02].

Das HJM-Modell spannt insgesamt einen sehr weiten Rahmen. Teil dieses Rahmens sind auch die so genannten „LIBOR-Markt-Modelle“, die stärker auf Interbankenzinssätze mit ihren typischen Laufzeiten (daher der Name) von drei oder sechs Monaten gerichtet sind und Kompatibilität zu in der Praxis relevanten Bewertungsformeln für Zinsoptionen (insbesondere Caps und Floors) herstellen [HDK02]. Ein tieferer Einblick in diese Modellklasse wird z. B. in [BM01, MR97] gegeben.

4.3 Bestimmung von Vergleichszinsen

Mit der Simulation der künftigen Zinsstrukturkurven liegt ein Szenario für die Situation am Kapitalmarkt vor, das jedoch als Entscheidungsgrundlage für einen Bausparer aus folgenden Gründen nur sehr bedingt tauglich ist:

- Die Konditionen eines Bauspardarlehens entsprechen auch bei gleicher Laufzeit nicht denen eines Zerobonds, da das Bauspardarlehen durch gleichmäßige Tilgungsbeiträge über die Gesamtlaufzeit getilgt wird, während bei einem Zerobond Zins, Zinseszins und Tilgung erst zum Laufzeitende fällig sind. Ebenfalls von regelmäßigen Zins- und Tilgungszahlungen ist der (näherungsweise) vergleichbare 10-Jahres-Hypothekenzins geprägt (s. Abschnitt 2.2.3). Im Gegensatz hierzu fallen bei den Sparbriefen vor Fälligkeit nur die jährlichen Zahlungen der im Jahresverlauf erwirtschafteten Zinsen an.
- Die am Kapitalmarkt geltenden Zinssätze werden von den Kreditinstituten an Privatpersonen als Hypotheken- oder Sparzins mit bestimmten Auf- oder Abschlägen (Marge) weitergegeben.

Damit ist das Ziel dieses Abschnitts, aus einem durch die simulierten Zinsstrukturkurven gegebenen Szenario die vergleichbaren Hypotheken- und Sparbriefzinsen h_t und g_t durch Berücksichtigung der oben genannten Faktoren zu bestimmen. Die so berechneten Vergleichszinsen können dann unmittelbar in das Regressionsmodell eingehen.

4.3.1 Berechnung fixer Vergleichszinsen aus der Zinsstruktur

Zur Bestimmung eines festen jährlichen Zinssatzes aus einem Zinsszenario, der dem eines festverzinslichen Sparbriefes mit einer Laufzeit von vier Jahren vergleichbar ist, und wie wir ihn auch in Kapitel 3 als Vergleichszins verwendet haben, gehen wir nun davon aus, dass dieser dem Zinssatz eines Zerobonds mit einer Laufzeit von vier Jahren – abzüglich eines gewissen Zinsabschlages – entspricht. Da die hier anfallenden jährlichen Zinszahlungen nicht berücksichtigt werden, führt dies zu einer geringen, vernachlässigbaren Ungenauigkeit.

Die Ermittlung eines dem Bauspardarlehen vergleichbaren fixen Hypothekenzinses ist komplizierter: Das Bauspardarlehen läuft über ca. zehn Jahre. Während dieser Zeit hat der Bausparer regelmäßig einen bestimmten Prozentsatz seiner Bausparsumme als Tilgungsbeitrag aufzubringen, so dass das Darlehen innerhalb der Laufzeit durch die konstanten Zahlungen getilgt wird.

Wir gehen nun davon aus, dass das vergleichbare 10-Jahres Hypothekendarlehen dieselben bzw. recht ähnliche Zahlungsströme aufweist. Ein solches Darlehen lässt sich

dann mit Hilfe von Zerobonds replizieren, indem man ein Portfolio aus n Zerobonds mit dem jeweiligen Nennwert eines Jahrestilgungsbeitrags und den Laufzeiten $1, \dots, T$ zusammenstellt. Die Verzinsung der einzelnen Zerobonds des Portfolios ist i. Allg. unterschiedlich, es muss aber ein fester, äquivalenter Zinssatz gefunden werden. Seien $q_t, 1 \leq t \leq T$ die jährlichen Zinsfaktoren der Zerobonds mit der Laufzeit t . Dann gilt für den Barwert des replizierenden Portfolios C_0^P bei normierten jährlichen Tilgungsbeiträgen von einem Euro:

$$C_0^P = \sum_{t=1}^T q_t^{-t} \quad (4.76)$$

Für den Barwert C_0^H des entsprechenden Hypothekendarlehens mit dem festen Zinsfaktor q gilt:

$$C_0^H = \sum_{t=1}^T q^{-t} \quad (4.77)$$

Um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden muss

$$C_0^H = C_0^P \quad (4.78)$$

gelten. Die q_t sind durch die Zinsstruktur gegeben, damit kann auch C_0^P leicht berechnet werden. Daher können wir q bestimmen, indem wir

$$f(q) = q^{-T} + q^{-(T-1)} \dots + q^{-1} - C_0^P = 0 \quad (4.79)$$

lösen, was i. Allg. weder ohne weiteres möglich, noch eindeutig ist.

Allerdings lässt sich die Lösung relativ leicht approximieren, da q die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \min\{q_1, \dots, q_T\} &\leq q \leq \max\{q_1, \dots, q_T\} \\ q_t &\geq 1 \quad \forall t \text{ mit } 1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Zusätzlich ist $f(q)$ auf dem Intervall, in dem wir q bestimmen wollen, monoton fallend. Dieser Umstand lässt sich ausnutzen, um q mit Hilfe des in Algorithmus 4 angegebenen Bisektionsverfahrens q recht effizient zu approximieren (vgl. z. B. [Her99]). Der so bestimmte Zinssatz ist allerdings direkt aus der Zinsstruktur am Kapitalmarkt abgeleitet und kann als vergleichbarer Hypothekenzins für die Regression noch nicht verwendet werden.

4.3.2 Berücksichtigung der Marge

Wir müssen nun noch den jeweiligen Zinsaufschlag für das Hypothekendarlehen und den Zinsabschlag für den Sparbrief berechnen. Hierzu nehmen wir an, dass öffentliche Anleihen weitgehend frei von Zinsmargen sind. Wir schätzen nun die Marge für

Algorithmus 4 Approximiere q mit Genauigkeit ϵ

```

 $C_0^H := 0$ 
 $C_0^P = \sum_{t=1}^T q_t^{-t}$ 
 $q_{\min} := \min\{q_1, \dots, q_T\}$ 
 $q_{\max} := \max\{q_1, \dots, q_T\}$ 
while  $|C_0^H - C_0^P| > \epsilon$  do
   $q_{\text{tmp}} := (q_{\min} + q_{\max})/2$ 
   $C_0^H := \sum_{t=1}^T q_{\text{tmp}}^{-t}$ 
  if  $C_0^H \leq C_0^P$  then
     $q_{\max} := q_{\text{tmp}}$ 
  else
     $q_{\min} := q_{\text{tmp}}$ 
  end if
end while
return  $q_{\text{tmp}}$ 

```

die Hypothekenzinsen als Differenz zwischen den entsprechenden Bundesbankzinszeitreihen vergleichbarer Laufzeit SU0047 und WU8612 und erhalten einen mittleren Zinsaufschlag von 86,6 Basispunkten⁸. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass in Zeitreihe SU0047 die Untergrenze der Hypothekenzinsen betrachtet wird, so dass in der Praxis die Marge meistens höher sein dürfte.

Analog hierzu schätzen wir die Marge für die Sparbriefzinsen anhand der Bundesbankzeitreihen SU0031 und WU0914 auf einen mittleren Zinsabschlag von 43,6 Basispunkten.

4.3.3 Simulation von Vergleichszinsszenarien

Wir generieren nun ein Szenario für die in das Regressionsmodell eingehenden h_t und g_t (vgl. Abschnitt 3.1) wie folgt:

1. In monatlichen Zeitschritten wird mittels CIR-Modell die jeweils aktuelle Zinsstruktur über den gesamten Simulationshorizont berechnet (vgl. Abschnitt 4.2.4).
2. Für jede dieser monatlichen Zinsstrukturkurven werden die margenfreien fixen Zinssätze für Hypothekendarlehen und Sparbriefe berechnet (vgl. Abschnitt 4.3.1).
3. Auf die so errechneten monatlichen Hypotheken- und Sparbriefzinsen wird die mittlere Darlehensmarge aufgeschlagen bzw. die mittlere Sparbriefmarge abgeschlagen (vgl. Abschnitt 4.3.2).

⁸Ein Basispunkt entspricht $\frac{1}{100}$ Prozentpunkt des jährlichen Zinssatzes i . Vgl. auch Abschnitt 2.3.3.

4. Als h_t bzw. g_t des Simulationsjahres t wird nun der minimale monatliche Hypothekenzins bzw. Sparbriefzins des Jahres t gewählt. Damit entspricht die Art und Weise der Ermittlung der simulierten Vergleichszinsen exakt der Bestimmung der realen h_t und g_t in Kapitel 3, die zur Schätzung der Parameter des Regressionsmodells verwendet wurden.

Zur Überprüfung der Angemessenheit dieses Verfahrens simulieren wir 1000 Szenarien für $h_{1991}, \dots, h_{2003}$ sowie $g_{1991}, \dots, g_{2003}$. Wir ermitteln hieraus empirische Verteilungen und vergleichen die Quantile dieser Verteilungen mit den realen $h_{1991}, \dots, h_{2003}$ und $g_{1991}, \dots, g_{2003}$. Hierbei verwenden wir die in [FMW03] mit der Martingal-Schätzfunktion über die Jahre 1991 bis 2001 ermittelten CIR-Parameter.

Die in der Abbildung 4.4 dargestellten Resultate belegen die Angemessenheit des Verfahrens, da die realen Vergleichszinsen innerhalb des Zeitraums, über den auch die Modellparameter geschätzt wurden, von dem Modell als sehr wahrscheinlich angesehen werden.

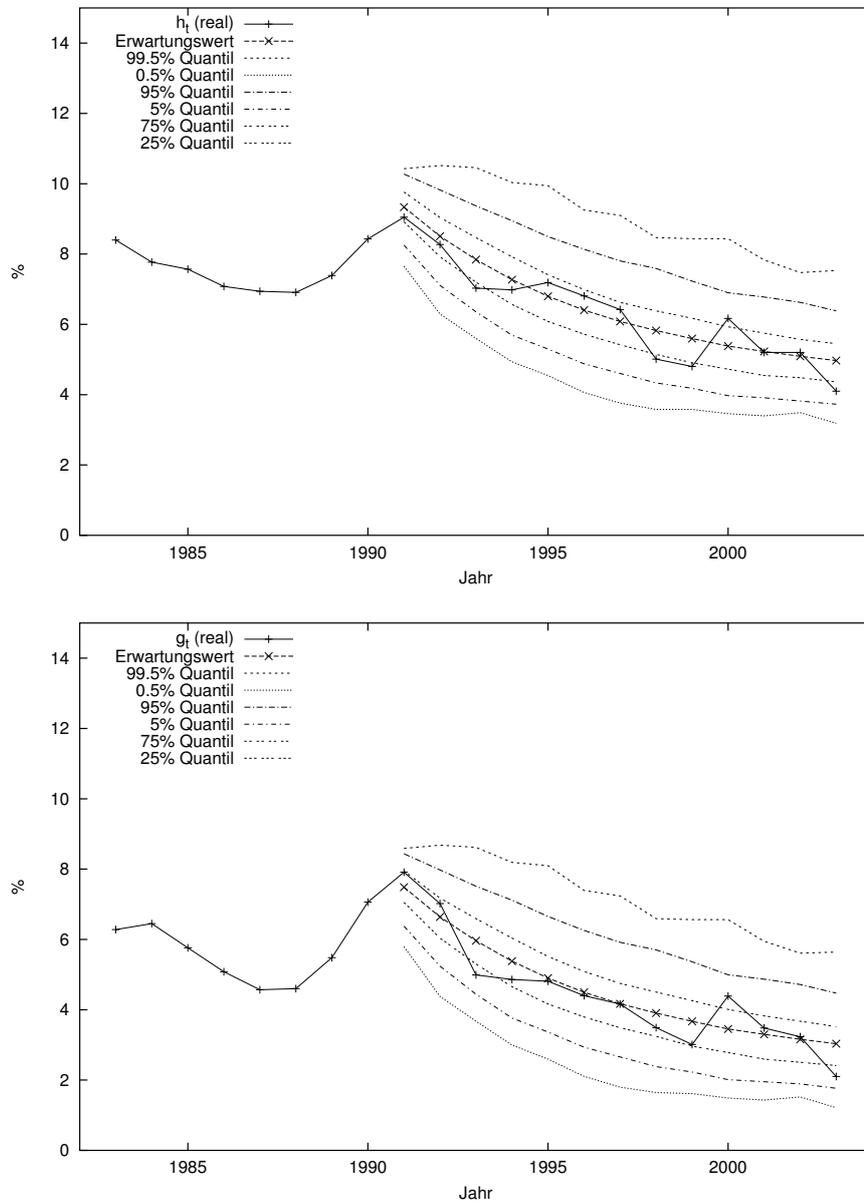


Abbildung 4.4: Reales Vergleichszinsszenario und Quantile der empirischen Verteilungen simulierter Vergleichszinsen: Dargestellt sind die die realen h_t (oben) und g_t (unten) zwischen 1983 und 2003 sowie Quantile der empirischen Verteilungen der jeweiligen simulierten Vergleichszinsen von 1991 bis 2003.

Kapitel 5

Neugeschäftsmodell

Die Modellierung des absoluten Gesamtneugeschäfts einer Bausparkasse über alle Tarife stellt das letzte zentrale Modul des Modellkonzepts dar. Das Neugeschäft wird im Rahmen dieser Arbeit als die in einem Jahr neu abgeschlossene und eingelöste Bausparsumme einschließlich Erhöhungen und abzüglich Ermäßigungen des Jahres definiert.

Die Bedeutung des Neugeschäfts für das Bausparkollektiv und damit das von diesem ausgehende Risiko wurde bereits in Kapitel 2 ausführlich dargelegt.

Wir beginnen in Abschnitt 5.1 zunächst mit der Erläuterung der Ursachen für die Schwankungen der Neugeschäftshöhe, um anschließend den in diesem Kapitel verfolgten, auf Hidden-Markov-Modellen basierenden Modellierungsansatz vorzustellen und zu begründen. Im zweiten Abschnitt 5.2 dieses Kapitels wird zunächst auf das Konzept, grundlegende Definitionen und Algorithmen von Hidden-Markov-Modellen (HMM) eingegangen. Hierauf aufbauend wird in Abschnitt 5.3 schließlich ein konkretes Modell anhand historischer Realdaten ermittelt. Wir befassen uns hierbei zunächst mit allgemeinen Fragen, die bei der praktischen Anwendung von HMM auftreten und die insbesondere auch für das hier konkret zu bestimmende Modell zu beantworten sind.

5.1 Bestimmungsfaktoren und Modellierungsansatz

In Abbildung 5.1 betrachten wir das reale Gesamtneugeschäft einer Bausparkasse über die Jahre 1992 bis 2003. Anhand dieser Abbildung wollen wir nun etwas detaillierter als in Abschnitt 2.2.3 die Ursachen, die für Schwankungen der Neugeschäftshöhe verantwortlich sind, erörtern:

Gesamtwirtschaftliche Entwicklung: Hierunter fallen u. a. das allgemeine Wirtschaftswachstum, Preis- und Einkommenssteigerungen. So lässt z. B. schon al-

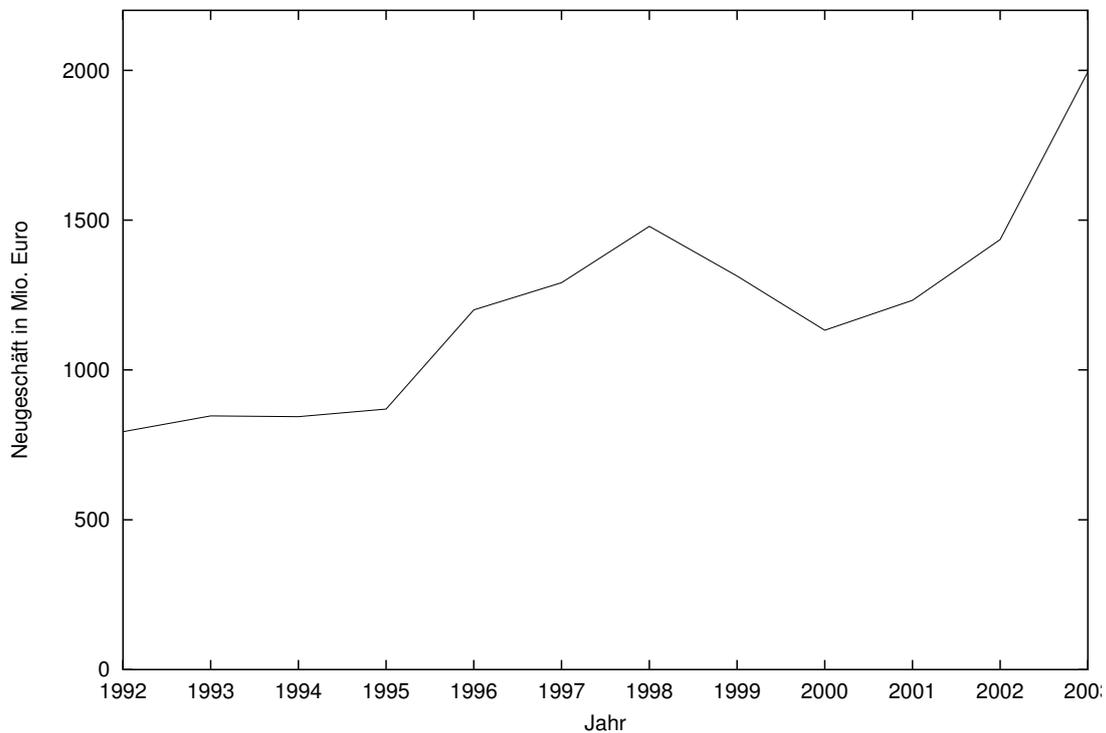


Abbildung 5.1: Reales Neugeschäft einer Bausparkasse zwischen 1992 und 2003

leine die Inflation zumindest auf längere Sicht erwarten, dass die abgeschlossenen Bausparsummen tendenziell leicht steigen. Da diese Faktoren selbst nur eine vergleichsweise geringe Schwankungsbreite aufweisen, kann man davon ausgehen, dass diese auch bei der Neugeschäftsentwicklung nur zu geringen Schwankungen führen. Auf diese Weise können wir z. B. die leichte, aber stetige Steigerung des Neugeschäfts zwischen 1992 und 1995 erklären.

Staatliche Förderung: Ein wichtiges Verkaufsargument für Bausparverträge besteht in dem Umfang der staatlichen Förderung des Bausparens. Ausweitungen oder Einschränkungen dieser Förderung können damit sporadisch zu erheblichen Schwankungen in der Neugeschäftshöhe führen. Als Beispiel drängt sich der extreme Sprung der Neugeschäftshöhe im Jahre 1996 auf. Dieser lässt sich klar auf die deutliche Anhebung der Einkommensgrenzen für die staatliche Förderung sowie die Aufstockung der Bausparprämie im November 1995 zurückführen [Höl96]. Denselben Effekt hat interessanterweise auch – zumindest kurzfristig – die Ventilierung des genauen Gegenteils: Die Diskussion um den Abbau der Bausparförderung hat den Bausparkassen in 2003 zu einem neuen Neuge-

schäftsrekord verholten, da viele Bausparer noch rechtzeitig in den Genuss der Förderung kommen wollten [Bre03].

Horizontale und vertikale Konkurrenz: Hinzu kommt der Einfluss der Konkurrenzsituation auf dem Kapitalmarkt. Dieses betrifft zum einen die Konkurrenz zwischen den einzelnen Bausparkassen mit ihren unterschiedlichen Produkten und Vertriebswegen (horizontale Konkurrenz), zum anderen die Konkurrenz zwischen der Anlageform Bausparvertrag und anderen Finanzprodukten wie z. B. Aktien (-fonds) (vertikale Konkurrenz). So wird der Neugeschäftsrückgang um die Jahrtausendwende der rasanten Entwicklung auf den Aktienmärkten zugeschrieben, gegen die ein Bausparvertrag als Alternativanlage unattraktiv war. Mit dem Ende dieser Entwicklung kehrten breite Bevölkerungsschichten „reumütig“ [Bre03] zu solideren Anlageformen zurück.

Unternehmenspolitik: In gewissem Maße können die Bausparkassen das Neugeschäft auch durch die Attraktivität ihrer Produkte (z. B. Zinssätze) oder bestimmte Marketingstrategien (z. B. Vor- und Zwischenfinanzierungskredite, Jubiläumsaktionen etc.) beeinflussen. Neben verkaufsfördernden Maßnahmen kann situationsabhängig auch das Gegenteil sinnvoll sein. So können Bausparkassen in der Niedrigzinsphase beispielsweise den Verkauf von Hochzinsvarianten in den Optionstarifen durch den Vertrieb einschränken oder ganz einstellen.

Da wir die genannten Faktoren nicht sinnvoll separat modellieren und das entsprechende Neugeschäft hieraus ableiten können, soll die Neugeschäftshöhe direkt als stochastischer Prozess folgender Form modelliert werden:

$$\{X_t; t \geq 0\} \quad (5.1)$$

mit

$$X_t = \begin{cases} S_0 & \text{für } t = 0 \\ X_{t-1}z_t & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Für den Startwert S_0 verwenden wir das letzte reale Neugeschäft. Durch die Zufallsvariable z_t wird ihre relative Veränderung zum Vorjahr modelliert. Damit besteht das eigentliche Modellierungsproblem in der Frage, welcher Dynamik diese relative Änderung der Neugeschäftshöhe z_t folgt.

Abbildung 5.2 stellt die aus dem realen Neugeschäft verschiedener Bausparkassen ab 1980 berechneten relativen Neugeschäftsänderungen

$$z_t = \frac{\text{Neugeschäfts des Jahres } t}{\text{Neugeschäft des Jahres } t - 1} \quad (5.3)$$

in Form eines Histogramms dar. Eine bestimmte Verteilung für die z_t ist zumindest nicht offensichtlich gegeben. Die Schwankungen der z_t resultieren – wie in diesem Abschnitt dargelegt – aus der Überlagerung sehr verschiedenartiger stochastischer

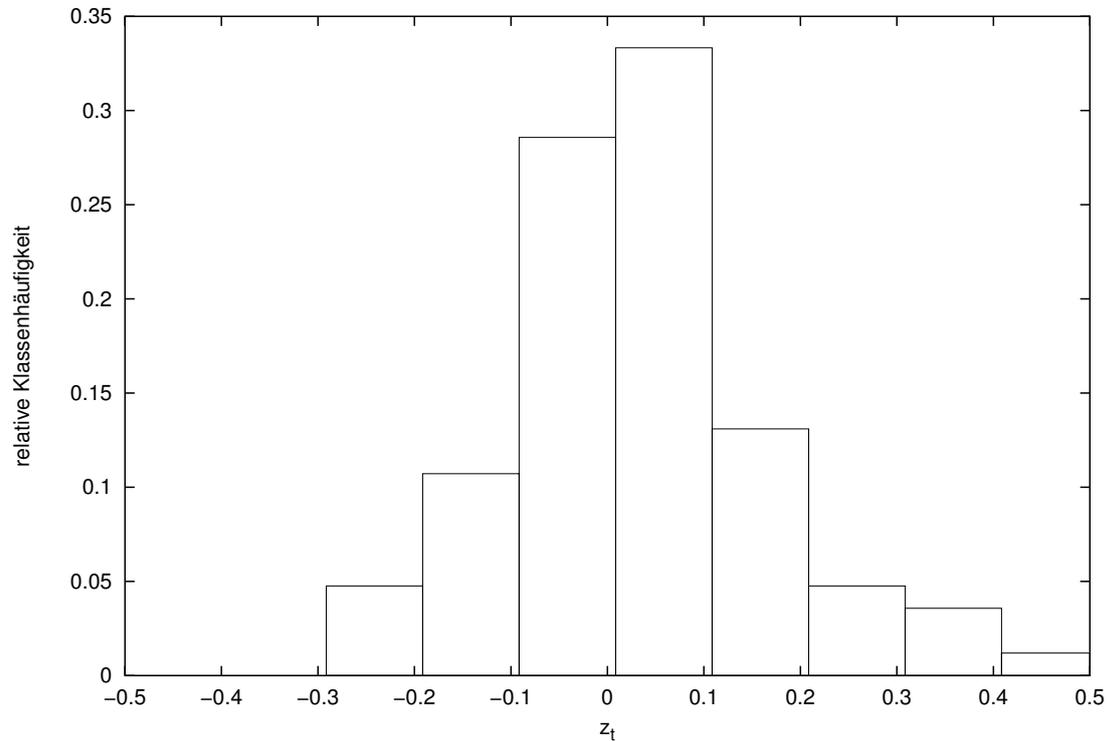


Abbildung 5.2: Histogramm der relativen jährlichen Neugeschäftsänderung z_t

Einflüsse einschließlich zeitlicher Abhängigkeiten. Eine einfache Anpassung einer bestimmten (theoretischen) Verteilung bzw. Mischverteilung an die empirisch ermittelte genügt deshalb nicht, weil hierdurch ggf. vorhandene zeitliche Abhängigkeiten zwangsläufig unberücksichtigt bleiben.

Aus diesem Grund verwenden wir in dieser Arbeit Hidden-Markov-Modelle als Modellierungsansatz. Hidden-Markov-Modelle werden zur stochastischen Modellierung und Klassifizierung in den verschiedensten Bereichen eingesetzt, da sich der sehr allgemeine und mächtige Modellansatz gut an die speziellen Eigenschaften unterschiedlichster Probleme anpassen lässt und auch schon in [Kna00, Wic01] erfolgreich zur Simulation von Bausparzeitreihen eingesetzt wurde.

5.2 Hidden-Markov-Modelle

Grundgerüst eines HMM stellt eine Markov-Kette dar, die sich in diskreten Zeitschritten von einem Vorgängerzustand mit gegebener Wahrscheinlichkeit in genau einen möglichen Nachfolgezustand begibt. In jedem Zustand gibt das Modell mit einer zu-

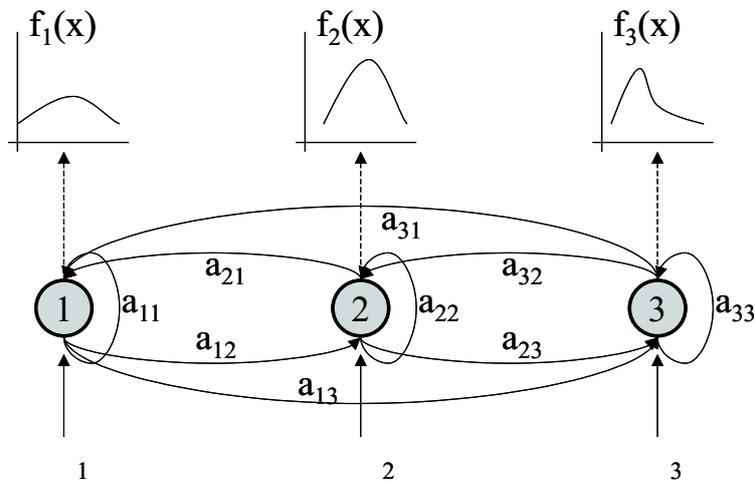


Abbildung 5.3: Graphische Darstellung eines einfachen HMM

standsspezifischen Wahrscheinlichkeit ein Symbol aus, so dass eine Symbolsequenz entsteht, die sich mit jedem Zeitschritt um ein Symbol verlängert.

Da nur die Symbolsequenz sichtbar wird, während die jeweiligen ausgebenen Zustände der Markov-Kette verborgen bleiben, ergibt sich der Name „Hidden-Markov“-Modell.

Verfügt man über entsprechende „Ausgabesequenzen“ des zu modellierenden realen Systems, so lässt sich ein HMM diesen Daten durch ein geeignetes Modelltraining anpassen. Ein so trainiertes Modell dient dann i. Allg. folgenden Zwecken:

- **Klassifizierung**

Durch Berechnung der Abstände zu verschiedenen HMM kann eine beobachtete Sequenz einem bestimmten HMM zugeordnet werden und somit den für dieses Modell verwendeten Trainingsdaten. Auf diese Weise lassen sich HMM für die Muster- bzw. Spracherkennung verwenden, die den Anwendungsschwerpunkt für HMM darstellt [HAJ90, RJ93, Jel01]. Mit [Bil02] existiert zu diesem Themengebiet ein umfassender Überblick. Daneben existieren weitere Anwendungen, u. a. in der Analyse biologischer Daten [Edd96, DEKM98].

- **Generierung und Fortsetzung von Sequenzen**

Durch das trainierte HMM lassen sich darüber hinaus künstliche Sequenzen generieren, die bezüglich ihrer statistischen Eigenschaften denen der Trainingssequenzen entsprechen. Auf diese Weise lassen sich z. B. Trainingssequenzen zu Prognosezwecken verlängern [Kna00, Wic01]. Diesen Zweck verfolgen wir hier.

5.2.1 Definition und Notation

Wir wenden uns nun [Wic01] folgend einer formaleren Definition von HMMs zu, bei der wir uns auf HMM mit kontinuierlichen Ausgaben¹ beschränken.

Darüber hinaus setzen wir für alle nachfolgend betrachteten HMM voraus, dass folgende Annahmen gelten:

1. Die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i zu Zustand j ist unabhängig vom Zustandspfad, der zu i geführt hat (*Markov-Eigenschaft*). Damit handelt es sich bei der zugrunde liegenden Markov-Kette um eine Markov-Kette erster Ordnung.
2. Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer bestimmten Ausgabe zum Zeitpunkt t hängt alleine vom Zustand zu diesem Zeitpunkt ab.
3. Die zugrunde liegende Markov-Kette ist *zeitinvariant*, d. h. die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen sind unabhängig vom jeweiligen Zeitpunkt t .

Modellparameter

Ein HMM wird beschrieben durch die Menge seiner Parameter:

- **Initialwahrscheinlichkeiten**

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das System zum Startzeitpunkt im Zustand i befindet mit $\pi_i = pr(q_1 = i)$. Der Vektor π ist damit definiert durch $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ und erfüllt

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1. \quad (5.4)$$

- **Übergangswahrscheinlichkeiten**

Die Wahrscheinlichkeit $a_{ij} = pr(q_{t+1} = j | q_t = i)$ von Zustand i in Zustand j zu wechseln, wird als $N \times N$ -Matrix A angegeben. Daraus folgt als Nebenbedingung für die Matrix A :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

¹Im Falle diskreter Ausgaben wird analog zur hier dargestellten Weise vorgegangen. Vgl. hierzu z. B. [Rab89]

$pr(A B)$ $p(O \lambda)$	bedingte Wahrscheinlichkeit von A, gegeben B Wahrscheinlichkeitsdichte der Sequenz O bei gegebenen Modellparametern λ
O_t T $O_{(t)} =$ O_1, \dots, O_t q_t $Q = q_1, \dots, q_T$	Ausgabesymbol zum Zeitpunkt t Länge einer Sequenz Teilsequenz von 1 bis t Zustand des Systems zum Zeitpunkt t ; die Zustände werden einfach durchnummeriert und durch ihre Nummer bezeichnet vollständiger Zustandspfad
N a_{ij} $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$	Anzahl der Zustände Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i zu Zustand j Initialwahrscheinlichkeiten
C $\lambda =$ $(A, \pi, f(x) =$ $(f_1(x), \dots, f_N(x))$ $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_C)$	Anzahl der Modelle Gesamtheit der Parameter eines Modells; Synonym mit dem Modell selbst Menge der Modelle
$f_i(x)$ $f_{im}(x)$ M $\mathcal{N}(x, \mu, \Sigma)$ μ Σ c_{im}	(gemischte) Ausgabedichte des Zustands i m -te Komponente der Ausgabedichte f_i des Zustands i Anzahl der Mischkomponenten der Ausgabedichten (multivariate) Normaldichte Erwartungswertvektor der Normaldichte Kovarianzmatrix der Normaldichte Mischkoeffizient der Ausgabedichte m des Zustands i

Tabelle 5.1: Verwendete HMM-Notation

Die einfache Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeiten als $N \times N$ -Matrix ist der Annahme der Markov-Eigenschaft zu verdanken, wonach

$$pr(q_t = i | q_{t-1}) = pr(q_t = i | q_{t-1}, q_{t-2}, \dots, q_1) \quad (5.6)$$

gilt.

- **Ausgabewahrscheinlichkeiten**

Zu jedem Zustand gehört im kontinuierlichen Fall eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Ausgaben. Offenbar muss diese

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) dx = 1, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

erfüllen. Im Rahmen dieser Ausführungen betrachten wir nur (multivariate) Normaldichten bzw. Mischungen hiervon mit folgender Gestalt:

$$f_i(X) = \sum_{m=1}^M c_{im} f_{im}(X) \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.8)$$

$$= \sum_{m=1}^M c_{im} \mathcal{N}(X, \mu_{im}, \Sigma_{im}) \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.9)$$

mit

$$\sum_{m=1}^M c_{im} = 1 \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.10)$$

und

$$c_{im} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq m \leq M. \quad (5.11)$$

Durch die Mischung verschiedener Normaldichten in 5.8 können andere Dichtefunktionen approximiert werden, wodurch wir ein breites Anwendungsspektrum für diese Art HMM erhalten, die in der Literatur auch „Gaussian-Mixture-HMM“ (GMHMM) [Bil98] genannt werden.

Die Gesamtheit der Parameter eines Modells werden nachfolgend mit $\lambda = (A, \pi, f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)))$ bezeichnet, die Menge unterschiedlicher λ mit Λ .

Modelltopologie

Die Parameter des HMM werden im Rahmen des Modelltrainings den gegebenen Trainingsdaten angepasst. Im Gegensatz dazu muss die Modelltopologie bzw. -struktur vorher festgelegt werden. Sie besteht aus folgenden Vorgaben:

- **Anzahl Zustände**

Die Anzahl der dem HMM zugrunde liegenden Zustände der Markovkette bezeichnen wir mit N .

- **Ausgaben**
Bei den hier betrachteten GMHMM muss ebenfalls die Anzahl der Mischkomponenten M vorgegeben werden.
- **Mögliche Zustandsübergänge**
Bestimmte Übergänge können von vorneherein verboten werden, so dass – abhängig vom spezifischen Anwendungsfall – nur noch bestimmte Zustandsfolgen möglich sind. So werden z. B. zur Spracherkennung oft Links-Rechts-Modelle eingesetzt, bei denen mit Ausnahme von Selbstübergängen kein bereits eingenommener Zustand erneut verwendet wird und ein ausgezeichneter Start- und ein Endzustand existieren [Rab89].

5.2.2 Basisalgorithmen für HMM

Zur Simulation verschiedener Neugeschäftsszenarien müssen nun die Parameter eines HMM den realen relativen Neugeschäftsschwankungen (Trainingssequenzen) z_t möglichst gut angepasst werden, damit mit Hilfe dieses trainierten Modells Neugeschäftsszenarien generiert werden können.

Demzufolge suchen wir Modellparameter λ , sodass bei gegebener Trainingssequenz O $p(O|\lambda)$ maximal wird. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte kann vom Baum-Welch-Algorithmus über den Zwischenschritt des Forward-Backward-Algorithmus zumindest lokal maximiert werden.

Forward-Backward-Algorithmus

Wir wenden uns zunächst der Frage zu, wie bei gegebenem Modell und einer beobachteten Sequenz effizient die Wahrscheinlichkeitsdichte (bzw. Wahrscheinlichkeit bei diskreten Ausgaben) berechnet werden kann, dass diese Sequenz vom Modell ausgegeben wird:

Problem 5.1 *Berechne bei gegebener Sequenz O und gegebenem Modell λ die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass O von λ erzeugt wird, also $p(O|\lambda)$.*

Grundsätzlich lässt sich diese Dichte dadurch bestimmen, dass wir die Dichten über alle möglichen Zustandspfade Q der Länge T aufsummieren und erhalten:

$$\begin{aligned}
 p(O|\lambda) &= \sum_{\text{mögliche } Q} p(O, Q|\lambda) \\
 &= \sum_{\text{mögliche } Q} p(O|Q, \lambda) pr(Q|\lambda) \\
 &= \sum_{\text{mögliche } Q} \pi_1 f_{q_1}(O_1) \prod_{t=2}^T a_{q_{t-1}q_t} f_{q_t}(O_t) .
 \end{aligned}$$

Offenbar wird die Laufzeit dieser Berechnung durch $O(TN^T)$ beschränkt, da zunächst N^T Pfade enumeriert werden müssen und für jeden Zustand auf einem solchen Pfad die T Dichten aufmultipliziert werden müssen. Mit Hilfe des hier vorgestellten Forward-Algorithmus kann $p(O|\lambda)$ jedoch deutlich effizienter berechnet werden.

Definition 5.1 Die Forward-Variable $\alpha_t(i)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass das HMM λ zum Zeitpunkt t den Zustand i angenommen und hierbei die Teilsequenz $O(t)$ ausgegeben hat:

$$\alpha_t(i) := p(O_1 \dots O_t, q_t = i | \lambda) \quad (5.12)$$

Bemerkung 5.1 Es gilt: $p(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$

Beweis: Da das System zum Zeitpunkt T in irgendeinem Zustand sein muss, gilt:

$$p(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N p(O, q_T = i | \lambda) \quad (5.13)$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_T(i) \quad (5.14)$$

□

Lemma 5.1 Die Forward-Variablen $\alpha_t(i)$ können in $O(TN^2)$ berechnet werden.

Beweis: Auf Grund der getroffenen Unabhängigkeitsannahmen gilt:

$$\alpha_{t+1}(j) = p(O_{(t+1)}, q_{t+1} = j | \lambda) \quad (5.15)$$

$$= p(O_{(t)}, q_{t+1} = j | \lambda) f_j(O_{t+1}) \quad (5.16)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^N p(O_{(t)}, q_t = i | \lambda) a_{ij} \right] f_j(O_{t+1}) \quad (5.17)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] f_j(O_{t+1}) \quad (5.18)$$

Wir können nun durch Algorithmus 5 die Forward-Variablen mit Hilfe von Gleichung 5.18 induktiv bestimmen.

Die Laufzeit des Forward-Algorithmus ist durch $O(TN^2)$ beschränkt. □

Satz 5.1 Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(O|\lambda)$ kann in $O(TN^2)$ berechnet werden.

Algorithmus 5 Forward-Algorithmus

```

for  $i := 1$  to  $i = N$  do
   $\alpha_1(i) := \pi_i f_i(O_1)$ 
end for
for  $t := 2$  to  $t = T$  do
  for  $j := 1$  to  $j = N$  do
     $\alpha_t(j) := \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] f_j(O_{t+1})$ 
  end for
end for

```

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Bemerkung 5.1 und Lemma 5.1. \square

Wir wenden uns nun der Berechnung der Backward-Variablen β zu, die wir im Rahmen des eingangs dargestellten Problems 5.1 streng genommen gar nicht mehr benötigen, sondern erst für den nachfolgend behandelten Baum-Welch-Algorithmus. Da die Berechnung aber analog zur Bestimmung der Forward-Variablen funktioniert, behandeln wir sie bereits hier.

Definition 5.2 Die Backward-Variable $\beta_t(i)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass das HMM λ bei zum Zeitpunkt t gegebenen Zustand q_t die Endsequenz $(O_{t+1} \dots O_T)$ ausgibt:

$$\beta_t(i) := p(O_{t+1} \dots O_T | q_t = i, \lambda) \quad (5.19)$$

Bemerkung 5.2 In gewisser Weise stellen die Backward-Variablen das Komplement zu den Forward-Variablen dar, denn es gilt für $t = 1, \dots, T$ und $i = 1, \dots, N$:

$$p(O, q_t = i | \lambda) = \alpha_t(i) \beta_t(i). \quad (5.20)$$

Beweis:

$$p(O, q_t = i | \lambda) = p(O | q_t = i, \lambda) pr(q_t = i) \quad (5.21)$$

$$= p(O_1 \dots O_t | q_t = i, \lambda) p(O_{t+1} \dots O_T | q_t = i, \lambda) pr(q_t = i) \quad (5.22)$$

$$= p(O_1 \dots O_t, q_t = i | \lambda) p(O_{t+1} \dots O_T | q_t = i, \lambda) \quad (5.23)$$

$$= \alpha_t(i) \beta_t(i) \quad (5.24)$$

\square

Aus der Bemerkung 5.2 lässt sich unmittelbar eine weitere ableiten:

Bemerkung 5.3 Es gilt:

$$p(O | \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \beta_t(i) \quad t = 1, \dots, T \quad (5.25)$$

Lemma 5.2 Die Backward-Variablen β können in $O(TN^2)$ berechnet werden.

Beweis: Wir gehen analog zum Fall der Forward-Variablen induktiv vor, allerdings in umgekehrter Richtung bei T beginnend. Für alle t mit $1 \leq t < T - 1$ gilt:

$$\beta_t(i) = p(O_{t+1} \dots O_T | q_t = i, \lambda) \quad (5.26)$$

$$= \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j(O_{t+1}) p(O_{t+2} \dots O_T | q_{t+1} = j, \lambda) \quad (5.27)$$

$$= \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j) \quad (5.28)$$

Für $\beta_{T-1}(i)$ gilt

$$\beta_{T-1}(i) = p(O_T | q_{T-1} = i, \lambda) = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j(O_T). \quad (5.29)$$

Für $i = 1, \dots, N$ initialisieren wir $\beta_T(i)$ mit 1. Wir können nun gemäß unserer Vorüberlegungen durch Algorithmus 6 die Backward-Variablen induktiv bestimmen.

Algorithmus 6 Backward-Algorithmus

```

for  $i := 1$  to  $i = N$  do
   $\beta_T(i) := 1$ 
end for
for  $t := T - 1$  to  $t = 1$  do
  for  $i := 1$  to  $i = N$  do
     $\beta_t(i) := \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$ 
  end for
end for

```

Damit erhalten wir ebenso wie beim Forward-Algorithmus eine Laufzeitbeschränkung von $O(TN^2)$. □

Baum-Welch-Algorithmus

Der Baum-Welch-Algorithmus dient dem Modelltraining, d. h. der Anpassung der Modellparameter an die Trainingssequenzen. Wir definieren hierfür zunächst das folgende Problem:

Problem 5.2 Bestimme bei gegebenen, stochastisch unabhängigen Trainingssequenzen O^1, \dots, O^K und gegebener Modelltopologie die Modellparameter $\hat{\lambda}$, so dass die Gesamtdichte

$$p(O^1, \dots, O^K | \hat{\lambda}) = \prod_{k=1}^K p(O^k | \hat{\lambda}) \quad (5.30)$$

maximal wird.

Die hier dargestellte Problemdefinition betrachtet das Trainings- bzw. Anpassungsproblem als Suche nach einem *Maximum-Likelihood-Schätzer* $\hat{\lambda}$. Aus diesem Grund bezeichnen wir im weiteren Verlauf den Zielfunktionswert auch als *Likelihood* und verwenden hierfür das Symbol $L_O(\lambda)$.

Zur Lösung dieses Problems sind keine effizienten Verfahren bekannt, die eine Parameterbelegung finden, die zu einem globalen Optimum der Zielfunktion führen. Aus diesem Grund ist der Baum-Welch-Algorithmus weit verbreitet, der von einer gegebenen Startlösung ausgehend durch iterierte Reestimierung der Modellparameter zumindest zu einem lokalen Maximum führt.

Wir beginnen mit der Definition einiger Hilfsvariablen, die wir für eine kompaktere und anschaulichere Darstellung der Reestimierungsformeln benötigen und die für jede der Trainingssequenzen O^1, \dots, O^K berechnet wird:

Sei $\gamma_t^k(i)$ definiert durch

$$\gamma_t^k(i) := pr(q_t = i | O^k, \lambda) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T, 1 \leq k \leq K \quad (5.31)$$

Offenbar gibt $\gamma_t^k(i)$ bei gegebenen Modellparametern und der gegebenen Trainingssequenz O^k die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System zum Zeitpunkt t in Zustand i befindet. Wir können zur Berechnung dieses Ausdrucks auf die Forward-Backward-Variablen zurückgreifen, indem wir mit Hilfe der Bemerkungen 5.2 und 5.3 schreiben:

$$\gamma_t^k(i) = pr(q_t = i | O^k, \lambda) \quad (5.32)$$

$$= \frac{p(O^k, q_t = i | \lambda)}{p(O^k | \lambda)} \quad (5.33)$$

$$= \frac{\alpha_t^k(i) \beta_t^k(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t^k(j) \beta_t^k(j)} \quad (5.34)$$

$$(5.35)$$

Weiterhin benötigen wir die Hilfsvariable $\xi_t^k(i, j)$, welche die gemeinsame Wahrscheinlichkeit beschreibt, zum Zeitpunkt t in Zustand i und zum Zeitpunkt $t + 1$ in Zustand j zu sein:

$$\xi_t^k(i, j) := pr(q_t = i, q_{t+1} = j | O^k, \lambda) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq k \leq K \quad (5.36)$$

Offenbar gilt:

$$\xi_t^k(i, j) = pr(q_t = i, q_{t+1} = j | O^k, \lambda) \quad (5.37)$$

$$= \frac{p(O^k, q_t = i, q_{t+1} = j | \lambda)}{p(O^k | \lambda)} \quad (5.38)$$

$$= \frac{\alpha_t^k(i) a_{ij} f_j(O_{t+1}) \beta_t^k(i)}{\sum_{l=1}^N \alpha_t^k(l) \beta_t^k(l)} \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Als letzte Hilfsvariable betrachten wir $\zeta_t^k(i, m)$, die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von Zustand i und Mischkomponente m zum Zeitpunkt t :

$$\zeta_t^k(i, m) := pr(q_t = i, m | O^k, \lambda) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T, 1 \leq k \leq K \quad (5.41)$$

Auch für $\zeta_t^k(i, m)$ lässt sich eine Darstellung durch die Forward-Backward-Variablen finden:

$$\zeta_t^k(i, m) = pr(q_t = i, m | O^k, \lambda) \quad (5.42)$$

$$= \frac{p(q_t = i, m, O^k | \lambda)}{p(O^k | \lambda)} \quad (5.43)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N (\alpha_{t-1}^k(i) a_{ij}) c_{jm} f_{jm}(O_t^k) \beta_t^k(j)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t^k(i) \beta_t^k(i)} & 2 \leq t \leq T \\ \frac{\pi_j c_{jm} f_{jm}(O_t^k) \beta_t^k(j)}{\sum_{i=1}^N \alpha_t^k(i) \beta_t^k(i)} & t = 1 \end{cases} \quad (5.44)$$

Wir können nun die Reestimierungsformeln darstellen, die benutzt werden, um von einem gegebenem HMM λ zu einem bezüglich der Zielfunktion besseren bzw. zumindest nicht schlechteren Modell $\bar{\lambda}$ zu kommen. Wir wählen hierzu für alle i, j, m [Bil98, LPP00]:

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \gamma_1^k(i) \quad (5.45)$$

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k-1} \xi_t^k(i, j)}{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k-1} \gamma_t^k(i)} \quad (5.46)$$

$$\bar{c}_{jm} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \zeta_t^k(j, m)}{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \gamma_t^k(i)} \quad (5.47)$$

$$\bar{\mu}_{jm} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \zeta_t^k(j, m) O_t^k}{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \zeta_t^k(j, m)} \quad (5.48)$$

$$\bar{\Sigma}_{jm} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \zeta_t^k(j, m) (O_t^k - \mu_{jm}) (O_t^k - \mu_{jm})^T}{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T^k} \zeta_t^k(j, m)} \quad (5.49)$$

Zu den Reestimierungsformeln sei Folgendes anzumerken:

- **Interpretierbarkeit:**

Die Reestimierungsformeln sind relativ gut interpretierbar und intuitiv naheliegend, da als reestimierte Parameter die bei gegebenem Modell und Trainingssequenzen erwarteten relativen Häufigkeiten gewählt werden.

So erhalten wir z. B. eine Schätzung für a_{ij} , indem wir die erwartete Anzahl der Sprünge von i nach j auf die erwartete Anzahl der Aufsuchungen von i beziehen.

- **Wahl des Initialmodells**

Bei der Wahl des Initialmodells ist zu beachten, dass mit der Belegung $a_{ij} = 0$ bereits ein Eingriff in die Topologie des Modells vorgenommen wird, da a_{ij} bei der Reestimierung multiplikativ eingeht und daher auf 0 bleibt.

- **Erhaltung der stochastischen Nebenbedingungen**

Konstruktionsgemäß bleiben die stochastischen Nebenbedingungen bei jedem Reestimierungsschritt erhalten. Es muss damit nicht eigens sichergestellt werden dass

$$\sum_{i=1}^N \bar{\pi}_i = \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \bar{c}_{jm} = 1 \quad 1 \leq i, j \leq N, 1 \leq m \leq M \quad (5.50)$$

gilt.

Mit Hilfe der Reestimierungsformeln können wir nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(O^1, \dots, O^K | \lambda)$ (lokal) maximieren. Der Baum-Welch-Algorithmus erwartet hierzu eine Startparameterbelegung λ und ein Abbruchkriterium ϵ , das den Algorithmus stoppt, sobald die Verbesserung des Zielfunktionswerts unter dieses ϵ fällt. Als zusätzliches Abbruchkriterium ließe sich auch eine maximale Anzahl von Iterationen vorgeben.

Algorithmus 7 Baum-Welch-Algorithmus

```

 $z_{\text{alt}} := p(O^1, \dots, O^K | \lambda)$ 
 $z_{\text{neu}} := \infty$ 
while  $z_{\text{neu}} - z_{\text{alt}} > \epsilon$  do
   $\bar{\lambda} :=$  Reestimiere  $\lambda$ 
   $z_{\text{alt}} := p(O^1, \dots, O^K | \lambda)$ 
   $z_{\text{neu}} := p(O^1, \dots, O^K | \bar{\lambda})$ 
   $\lambda := \bar{\lambda}$ 
end while
return  $\lambda$ 

```

Konvergenz des Baum-Welch-Algorithmus

Um beweisen zu können, dass bei Anwendung des Baum-Welch-Algorithmus die Likelihood gegen ein (lokales) Maximum konvergiert, muss gezeigt werden, dass die Reestimierung der Modellparameter stets zu einer Likelihood größer oder gleich der Likelihood der alten Modellparameter führt.

Satz 5.2 Seien $\bar{\lambda}$ die auf Basis von λ reestimierten Modellparameter bei gegebener Topologie und Trainingssequenzen (O^1, \dots, O^K) . Dann gilt

$$p(O^1, \dots, O^K | \bar{\lambda}) \geq p(O^1, \dots, O^K | \lambda). \quad (5.51)$$

Der Beweis soll hier nur skizziert werden und ergibt sich unmittelbar aus der Korrektheit des *EM-Algorithmus* [DLR77, MK97] und seiner Anwendung auf HMM [Bil98]. Der Expectation-Maximization-Algorithmus (EM-Algorithmus) ist ein sehr allgemeines und robustes Verfahren zur Bestimmung von lokal-optimalen Maximum-Likelihood-Schätzern bei unvollständigen Beobachtungen.

Sei nun $Z = (z_1, \dots, z_K)$ die Stichprobe des kontinuierlichen Zufallsvektors z vom Umfang K , zudem seien die Stichprobenelemente unabhängig und identisch verteilt. Wir gehen nun davon aus, dass jeder dieser Vektoren z_k aus einer beobachtbaren Komponente x_k und einer unbeobachtbaren Komponente y_k besteht. Daher werden in der Literatur $X = (x_1, \dots, x_K)$ die „unvollständigen“ Daten (*incomplete Data*), $Y = (y_1, \dots, y_K)$ die „versteckten“ Daten und $Z = (z_1, \dots, z_K)$ die vollständigen Daten (*complete Data*) genannt.

Ziel des EM-Algorithmus ist es, $(\log) L_X(\Theta)$ (*incomplete Data Likelihood*) zu maximieren, wobei Θ die Parameter des stochastischen Modells sind, dem wir unterstellen, dass es sowohl die beobachteten als auch die unbeobachteten Daten produziert hat. Da dies analytisch häufig nicht möglich ist, wird im EM-Algorithmus alternativ eine Hilfsfunktion, die so genannte Q-Funktion, iterativ maximiert.

Eine wesentliche Rolle im EM-Algorithmus spielt $\log L_{X,Y}(\Theta)$ also die Log-Likelihood der vollständigen Daten. Hierfür nehmen wir an, dass eine gemeinsame Dichtefunktion

$$p(z|\Theta) = p(x, y|\Theta) = p(y|x, \Theta)p(x|\Theta) \quad (5.52)$$

existiert. Der EM Algorithmus besteht im Wesentlichen aus zwei mehrfach hintereinander iterierten Schritten [Bil98]:

- **Erwartungswertberechnung (E-Schritt)**

Da $\log L_{X,Y}(\Theta)$ auf Grund der Unkenntnis von Y nicht berechnet werden kann, wird auf den Erwartungswert der Log-Likelihood der vollständigen Daten bei gegebenen X und Θ^i ausgewichen:

$$Q(\Theta, \Theta^i) := E[\log p(X, Y|\Theta) | X, \Theta^i] \quad (5.53)$$

Die Größe Θ^i bezeichnet hierbei die gegenwärtige Parameterbelegung in der i -ten Iteration, Θ^{i+1} demzufolge die der nächsten Iteration. Da Θ^i sowie die beobachteten Daten X gegeben und die unbeobachteten Daten Y $p(y|X, \Theta^i)$ -verteilte Zufallsvariablen sind, handelt es sich bei $Q(\Theta, \Theta^i)$ um eine Funktion von Θ .

Für Gleichung 5.53 können wir auch

$$E[\log p(X, Y|\Theta)|X, \Theta^i] = \int_{y \in \mathfrak{Y}} \log p(X, y|\Theta) p(y|X, \Theta^i) dy \quad (5.54)$$

schreiben. Hierbei stellt $p(y|X, \Theta^i)$ die Randverteilung bzw. -dichte der versteckten Daten dar und \mathfrak{Y} ihren möglichen Wertebereich.

- **Maximierung (M-Schritt)**

Wir maximieren nun Q indem wir

$$\Theta^{i+1} := \arg \max_{\Theta} Q(\Theta, \Theta^i) \quad (5.55)$$

setzen. Wie genau Θ^{i+1} hierfür bestimmt werden muss, hängt von der konkreten Formulierung der Q -Funktion ab.

Das Verfahren stellt sicher, dass durch die Maximierung der Q -Funktion stets

$$\log(L_X(\Theta^{i+1})) \geq \log(L_X(\Theta^i)) \quad (5.56)$$

gilt (zum Beweis s. z. B. [MK97]) und wird solange wiederholt, bis eine vorgegebene Anzahl von Iterationen durchgeführt wurde, oder die Verbesserung von $L_X(\Theta)$ pro Iteration unterhalb einer gewissen Schranke ϵ gefallen ist. Zu den Konvergenzeigenschaften, insbesondere der Konvergenzrate des EM-Algorithmus bei verschiedenen Anwendungen vgl. z. B. [Wu83, JX93, McL96, XI96].

Lässt sich das globale Maximum der Q -Funktion im M-Schritt nicht bestimmen, so genügt die Berechnung eines Θ^{i+1} mit

$$Q(\Theta^{i+1}, \Theta^i) \geq Q(\Theta^i, \Theta^i), \quad (5.57)$$

um die Konvergenz des EM-Algorithmus zu erhalten. In diesem Fall handelt es sich um den *generalisierten EM-Algorithmus*. Diese Eigenschaft ist für die praktische Anwendbarkeit des EM-Algorithmus von erheblicher Bedeutung, da je nach Struktur der Q -Funktion eine globale Maximierung analytisch nicht möglich bzw. zu aufwendig ist.

In [Bil98] wird gezeigt, dass sich für HMM eine solche Q -Funktion formulieren lässt, bei der die beobachtbaren Daten die Trainingssequenzen und die versteckten Daten die zugehörigen Zustandspfade sind. Die Maximierung der Q -Funktion im M-Schritt führt mit Hilfe der Lagrange-Methode zu den Baum-Welch-Reestimierungsformeln.

5.3 Modellwahl und Training

Im Zusammenhang mit dem praktischen Einsatz von HMM für bestimmte Probleme stellen sich zwangsläufig folgende Fragen:

- Wie können lokale Maxima beim Modelltraining überwunden werden?
- Welche Modelltopologie ist für den gegebenen Anwendungszweck geeignet?

Auch bei der hier anstehenden Modellierung der relativen jährlichen Neugeschäftsschwankungen z_t sind diese Fragen zu klären und werden innerhalb dieses Abschnitts behandelt.

Als Trainingsdaten stehen uns die realen z_t (bzw. O_t in HMM-Notation) ab frühestens dem Jahr 1980 von vier Bausparkassen als Trainingssequenzen O^1, O^2, O^3 und O^4 zur Verfügung. Diese relativ kleine Datenbasis führt dazu, dass wir von vorneherein nur kleine HMM betrachten können, um eine Überanpassung des Modells zu vermeiden. Im weiteren Gang dieses Abschnitts betrachten wir daher nur Modelle mit maximal 10 ($N \leq 10$) Zuständen und einfachen normalverteilten Ausgabedichten ($M = 1$). Ein weiterer Nachteil der Trainingsdaten besteht darin, dass diese über ähnliche Zeiträume im gleichen wirtschaftlichen und gesetzlichen Umfeld erhoben wurden, so dass die einzelnen Trainingssequenzen sicher nicht völlig unabhängig sind.

Zur programmtechnischen Umsetzung der dargestellten Basisalgorithmen verwenden wir die GHMM-Bibliothek², in der auch die auf Grund der hohen numerischen Anforderungen notwendigen Skalierungen umgesetzt sind.

5.3.1 Überwindung lokaler Extrema

Durch den Baum-Welch-Algorithmus werden die Modellparameter ausgehend von vorgegebenen Initialparametern sukzessive verbessert, bis eine Reestimierung dieser Parameter keine Verbesserung des Zielfunktionswerts mehr erbringt. Die hierbei gefundenen Parameter und die dazugehörige Likelihood hängen dabei i. d. R. sehr stark von der Wahl der Initialparameter ab (vgl. [DT98] und s. Abbildung 5.4). Um der Gefahr zu entgehen, bei ungeschickter Wahl dieser Initialparameter in ein vergleichsweise schlechtes lokales Maximum zu laufen, ist eine geeignete Anpassung des Baum-Welch-Algorithmus notwendig.

In [Wic01] werden verschiedene Methoden zur Überwindung lokaler Extrema dargestellt und anhand von Testdaten bezüglich Laufzeit und erreichtem Zielfunktionswert untersucht und verglichen. Diese Methoden sind:

²Die *General Hidden Markov Modell Library* von A. Gädke, P. Piepenbacher, A. Schliep et al., kann aus dem Internet unter <http://sourceforge.net> als Open-Source-Software bezogen werden.

- **Erweiterter Baum-Welch-Algorithmus**

Bei dem in [Wic01] vorgestellten erweiterten Baum-Welch-Algorithmus wird ausgehend von einer Startlösung ein lokales Optimum mit Hilfe des Baum-Welch-Algorithmus ermittelt. Anschließend werden die gefundenen Modellparameter zufällig gestört, um eine „benachbarte“ Parameterkombination zu erhalten. Wie weit entfernt diese Nachbarschaft sein darf, wird über einen Faktor ϵ gesteuert, der zunächst klein (ϵ_0) gewählt wird. Die variierte Parameterkombination dient danach als Startlösung für eine erneute Optimierung mit dem Baum-Welch-Algorithmus. Wird über eine gewisse Anzahl Versuche keine Verbesserung der bislang besten Lösung erzielt, so wird der Faktor ϵ erhöht. Wird tatsächlich eine bessere Lösung gefunden, wird ϵ wieder auf ϵ_0 zurück- und das Verfahren fortgesetzt.

- **Simulated-Annealing**

Simulated-Annealing [KGV83, Aze92] stellt einen sehr allgemeinen Ansatz dar, der häufig auf Grund seiner universellen Anwendbarkeit bei Optimierungsproblemen eingesetzt wird, bei der lokale Extrema überwunden werden müssen. Damit liegt die Verwendung des Verfahrens zum Modelltraining von HMM nah und wurde daher auch bereits von verschiedenen Autoren (z. B. [Dou85]) durchgeführt.

Die in [Wic01] durchgeführte Anwendung auf Hidden-Markov-Modelle ergibt grob folgendes Verfahren: Ausgehend von einem Startmodell λ wird ein benachbartes Modell $\tilde{\lambda}$ erzeugt. Ist der Zielfunktionswert dieses Modells höher, so wird dieses übernommen. Ist der Zielfunktionswert geringer, so wird mit einer im laufenden Verfahren sinkenden Wahrscheinlichkeit das neue Modell angenommen oder andernfalls verworfen.

- **Zufällige Initialparameter**

Das naheliegendste Verfahren besteht darin, wiederholt zufällige Initialparameter zu der gegebenen Modelltopologie generieren zu lassen und diese danach mit dem einfachen Baum-Welch-Algorithmus zu trainieren. Das trainierte Modell wird stets nur dann übernommen, wenn es einen besseren Zielfunktionswert als alle vorherigen Modelle bietet.

Das Resultat des in [Wic01] durchgeführten Vergleichs zeigt, dass der erweiterte Baum-Welch-Algorithmus bei ausreichend großem ϵ in das Verfahren mit zufälligen Initialparametern übergeht, allerdings bei erheblich längeren Rechenzeiten. Auch Simulated-Annealing findet bei vergleichbaren Rechenzeiten keine ähnlich guten Lösungen wie der Baum-Welch-Algorithmus mit zufälligen Initialparametern. Insgesamt wird dieses Verfahren als das praktikabelste erachtet, weswegen wir es im Weiteren bei jedem Modelltraining verwenden.

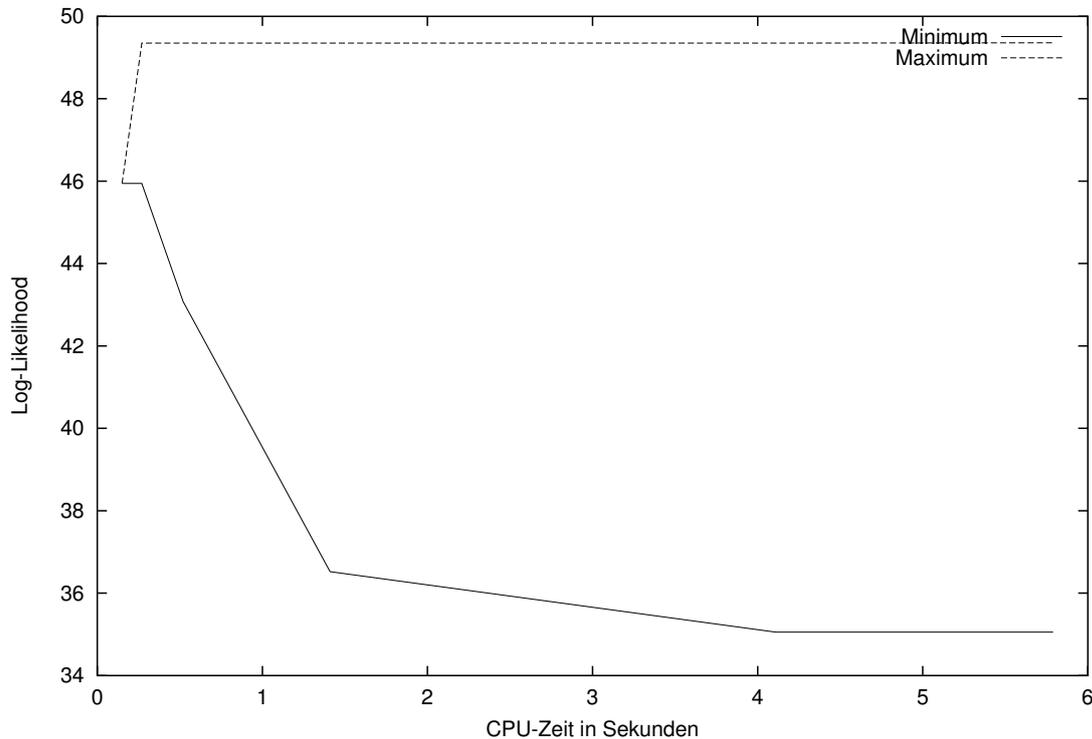


Abbildung 5.4: Maximale und minimale Zielfunktionswerte bei zufälligen Initialparametern und drei Zuständen

5.3.2 Wahl der Modelldimension

Wir definieren zunächst die Modelldimension d als Anzahl der freien, durch das Modelltraining veränderbaren Parameter, die sich daher unmittelbar aus der Modelltopologie ergibt.

Vor Anwendung des Baum-Welch-Algorithmus einschließlich seiner oben genannten Varianten ist es notwendig, die Modelldimension bzw. -topologie des Initialmodells vorzugeben. Hierzu ist in unserem Fall im Wesentlichen die Frage nach der „besten“ Anzahl Zustände N zu beantworten. Wie in unserem Anwendungskontext ergibt sich die Lösung dieses Problems oftmals nicht aus der Natur des zu modellierenden Gegenstands, so dass eine geeignete Modellwahl durch reines Expertenwissen nicht getroffen werden kann. Aus diesem Grund kommen in solchen Fällen datenbasierte Verfahren zur Anwendung, um die Modelldimension so zu wählen, dass die Trainingsdaten möglichst „gut“ modelliert werden. Offenbar ist hiermit das Problem der Quantifizierung der Modellierungsgüte eng verbunden. In der Literatur existieren hierzu mit [Sch78, SO94, Smy96, Keh96] einige Ansätze, mit deren Hilfe eine geeignete Modelldimension gefunden werden soll, welche einerseits eine Überanpassung an die Trai-

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_{\max}	0.108	0.045	0.068	0.053	0.051	0.043	0.071	0.066	0.076	0.066

Tabelle 5.2: D_{\max} bei trainiertem Modell mit unterschiedlicher Zustandsanzahl

ningsdaten (*Overfitting*) verhindert, andererseits die Trainingsdaten aber noch gut repräsentiert.

Zum Modelltraining stehen uns lediglich vier reale Sequenzen zur Verfügung, deren Länge T geringfügig um 20 schwankt. Nachfolgend wollen wir diese nutzen, um mit Hilfe verschiedener datenbasierter Methoden eine geeignete Modelldimension zu bestimmen. Die dargestellten Verfahren unterscheiden sich im Ansatz fundamental, so dass die Modellwahl auf eine breite Basis gestellt wird.

Wir definieren im weiteren Vorgehen unsere Initialmodelle immer so, dass die Ausgaben der Zustände univariat normalverteilt und die Zustände vollständig verbunden sind. Die Auswahl einer geeigneten Modelltopologie beschränkt sich damit im Wesentlichen auf die Wahl der Anzahl N Zustände. Unter diesen Annahmen können wir damit die Modelldimension recht einfach durch

$$d := \underbrace{N^2 - N}_A + \underbrace{2MN}_{\mu \text{ und } \sigma} + \underbrace{(M-1)N}_{\text{Komponentengewichte}} + \underbrace{N-1}_{\pi} \quad (5.58)$$

berechnen. Da die Anzahl der Mischkomponenten durch unsere Annahmen fixiert ($M = 1$) ist, ist d alleine abhängig von N .

Kolmogoroff-Smirnov-Test

Bei einer guten Modellierung der z_t sollte man davon ausgehen können, dass die empirische Verteilungsfunktion der Trainingsdaten mit der Verteilungsfunktion der Ausgaben des entsprechenden HMMs gut übereinstimmt. Ein Standardverfahren für dieses Problem stellt der Kolmogoroff-Smirnov-Test dar, der als Indikator für die Übereinstimmung der beiden Verteilungsfunktionen die maximale vertikale Abweichung D_{\max} zwischen beiden Verteilungsfunktionen verwendet [HEK93].

Wir trainieren nun die HMM λ_N mit jeweils $N = 1, \dots, 10$ Zuständen und bilden für jedes der trainierten Modelle eine (empirische) Verteilungsfunktion aus einer generierten Sequenz der Länge $T = 10.000$. Diese vergleichen wir mit der empirischen Verteilungsfunktion der Trainingssequenzen, indem wir D_{\max} bestimmen und erhalten die in Tabelle 5.2 dargestellten Ergebnisse.

In der Abbildung 5.5 sind die (empirischen) Verteilungsfunktionen für die Trainingsdaten sowie die der von den HMM mit $N = 1$ (D_{\max} maximal) und $N = 6$ Zuständen (D_{\max} minimal) generierten Sequenzen abgebildet. Die Stellen mit der höchsten Abweichung zwischen den Verteilungen der generierten Daten und der Verteilung der

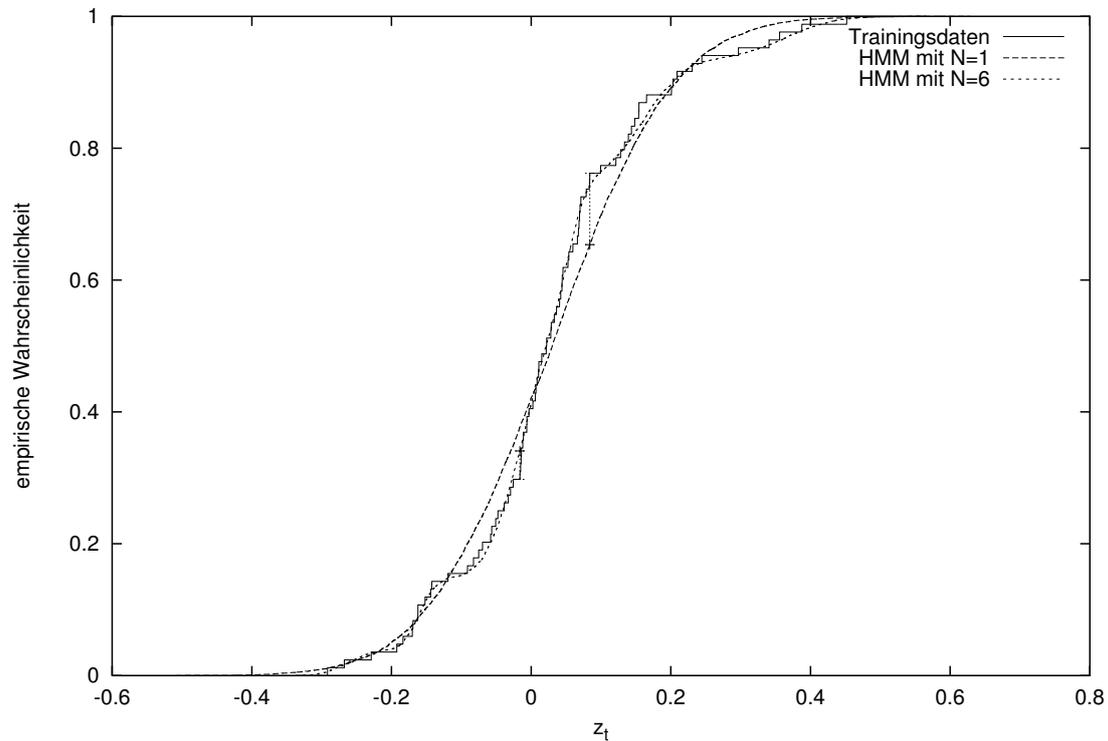


Abbildung 5.5: Verteilungen der z_t der Trainings- und generierten Daten

Trainingsdaten sind in der Abbildung durch einen Fehlerbalken markiert. Das Modell mit $N = 1$ Zuständen produziert gemäß Annahme eine Normalverteilung. Insgesamt ist die Anpassung der Verteilung der generierten Daten an die Trainingsdaten bereits ab $N = 2$ so gut, dass die Ablehnung der Übereinstimmungshypothese im Rahmen des Kolmogoroff-Smirnov-Tests praktisch nicht mehr möglich ist.

Bayes Information Criterion

Durch Maximierung des in [Sch78] vorgestellten und durch

$$BIC := \log(p(O|\lambda_i)) - \frac{1}{2}d_i \log(T) \quad (5.59)$$

definierten „Bayes Information Criteria“ (BIC) wird – zumindest näherungsweise – das Modell mit der größten a posteriori Wahrscheinlichkeit gewählt. Das BIC bietet hierbei den großen Vorteil, dass hierzu keine a priori Modellwahrscheinlichkeiten benötigt werden.

Da $\log(p(O|\lambda_i))$ mit der Dimension d_i von λ_i auf Grund der höheren Anpassbarkeit des Modells an die Trainingsdaten ansteigt, kann der zweite Term hier anschaulich als

N	O^1	O^2	O^3	O^4
1	15.867	9.548	12.427	7.282
2	20.060	9.757	13.756	5.679
3	20.814	10.518	13.829	4.869
4	21.23	10.523	13.061	8.94
5	21.564	11.355	12.142	9.991
6	20.703	12.033	12.546	11.781
7	19.416	14.047	12.207	9.634
8	23.085	9.649	9.961	10.123
9	20.516	8.046	9.293	8.15
10	20.708	7.881	5.781	3.183

Tabelle 5.3: $BIC_{0.05}$ der Trainingssequenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände

Strafkosten für eine höhere Modelldimension angesehen werden.

In [Wic01] ist eine Untersuchung der Güte der Dimensionsbestimmung anhand des BIC für generierte Daten dargestellt, bei der die tatsächliche Dimension des generierenden HMM von vorneherein bekannt war. Hierbei führte die Verwendung von Gleichung 5.59 für generierte Sequenzen mit einer Länge zwischen $T = 10$ und $T = 50$ aber zu einer klaren Unterschätzung der tatsächlichen Anzahl der Zustände des HMM, welches die Sequenzen generiert hatte, da offenbar die Sequenzlängen zu kurz für eine korrekte Modellwahl waren.

In [Wic01] wird daher die Verwendung einer flexibleren Definition vorgeschlagen, die verschiedene Gewichte für den Dimensionsstrafterm je nach Sequenzlänge zulässt:

$$BIC_g := \log(p(O|\lambda_i)) - gd_i \log(T) \quad (5.60)$$

Für Sequenzlängen zwischen 10 und 50 Ausgabesymbolen, wie sie auch bei unseren Trainingsdaten vorliegen, wurde im Rahmen dieser Untersuchungen eine Gewichtung von $g = 0.05$ empfohlen³.

Das Symbol λ_N bezeichne nun das mit Hilfe des Baum-Welch-Algorithmus und den Trainingsdaten optimierte HMM mit N Zuständen. Wir berechnen $BIC_{0.05}$ für alle vier Trainingssequenzen und alle λ_N mit $N = 1, \dots, 10$:

$$BIC_{0.05} := \log(p(O|\lambda_i)) - 0.05d_i \log(T) \quad (5.61)$$

Die Resultate sind in der Tabelle 5.3.2 und Abbildung 5.6 dargestellt.

Offenbar lässt sich anhand des $BIC_{0.05}$ Kriteriums und der gegebenen Trainingssequenzen keine eindeutige Aussage über die zu wählende Anzahl Zustände gewinnen. Immerhin aber legen die Ergebnisse nahe, N zwischen drei und acht zu wählen.

³Bei einer Sequenzlänge von $T = 500$ führte die in Gleichung 5.59 verwendete Gewichtung von $g = 0.5$ in [Wic01] zur korrekten Modellwahl.

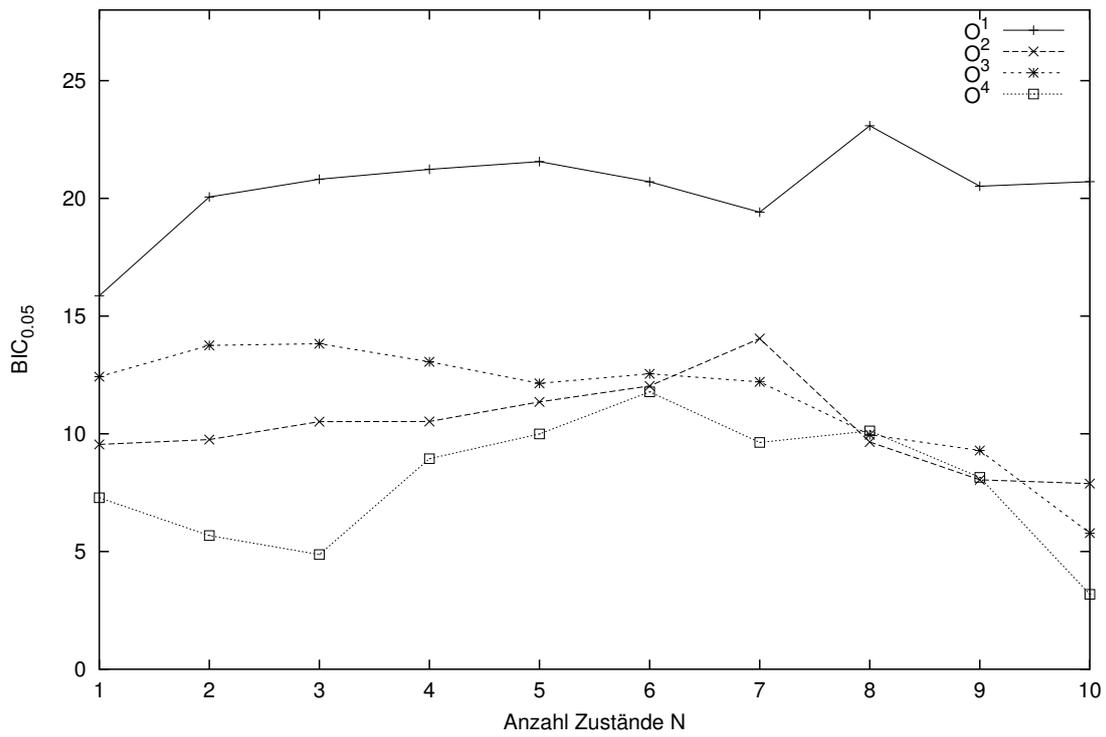


Abbildung 5.6: $BIC_{0.05}$ der Trainingssequenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände

N	$L^{\text{MCCV}}(N)$	$L^{\text{Train}}(N)$
1	22.193	23.267
2	16.113	28.717
3	1.192	35.500
4	-126.065	41.933
5	-60.533	48.172
6	-78.348	54.122
7	-167.797	59.225
8	-337.533	65.533
9	-410.132	70.375
10	-495.755	73.967

Tabelle 5.4: \bar{L}^{MCCV} und \bar{L}^{Train} in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände

Monte-Carlo-Cross-Validierung

Das in [Smy96, Smy98] entwickelte Verfahren der Monte Carlo Cross-Validierung (MCCV) stellt eine gute konzeptionelle Ergänzung zu den bereits dargestellten Verfahren dar.

Die recht allgemeine Idee des Verfahrens ist auf unser Problem angewandt folgende: Wir nehmen an, über zwei Stichproben zu verfügen, von denen wir eine als Trainingsdaten O^{Train} und eine als Testdaten O^{Test} verwenden. Offenbar steigt die (Log-) Likelihood der Trainingsdaten $\log L_{O^{\text{Train}}}(\lambda_i^{O^{\text{Train}}})$ bei einem auf Basis dieser Daten trainierten HMM $\lambda_i^{O^{\text{Train}}}$ mit d_i an, da das Modell sich mit höherer Dimension besser an die Trainingsdaten anpassen lässt. Damit lassen sich hieraus keine Hinweise auf die „wahre“ Modellklasse i ableiten. Betrachten wir hingegen $\log L_{O^{\text{Test}}}(\lambda_i^{O^{\text{Train}}})$ in Abhängigkeit von d_i , so können wir zunächst eine steigende Likelihood erwarten, die aber ab einer gewissen Modelldimension d_i wieder sinkt, ab der das Modell tendenziell übertrainiert wird und letztlich nur noch die Trainingsdaten angemessen modelliert. Intuitiv empfiehlt es sich daher, das Modell bzw. die Modellklasse mit der Anzahl Zustände zu wählen, welches $\log L_{O^{\text{Test}}}(\lambda_i^{O^{\text{Train}}})$ maximiert.

Die praktische Anwendbarkeit dieses Kriteriums birgt folgende Problempunkte, die ggf. zu einer starken Schwankung von $\log L_{O^{\text{Test}}}(\lambda_i^{O^{\text{Train}}})$ führen können:

- die insgesamt verfügbare Datenmenge ist zu klein
- der Baum-Welch-Algorithmus findet nur lokale Maxima

Hieraus resultiert der folgende, in [Smy96] vorgestellte Lösungsvorschlag: Die Gesamtmenge der K beobachteten Sequenzen wird P -mal zufällig in disjunkte Trainings- und Testmengen partitioniert, wobei β den Anteil an der Anzahl der Sequenzen bezeichnet, der dabei jeweils der Testmenge zugeordnet wird. Entsprechend enthält O^{Train}

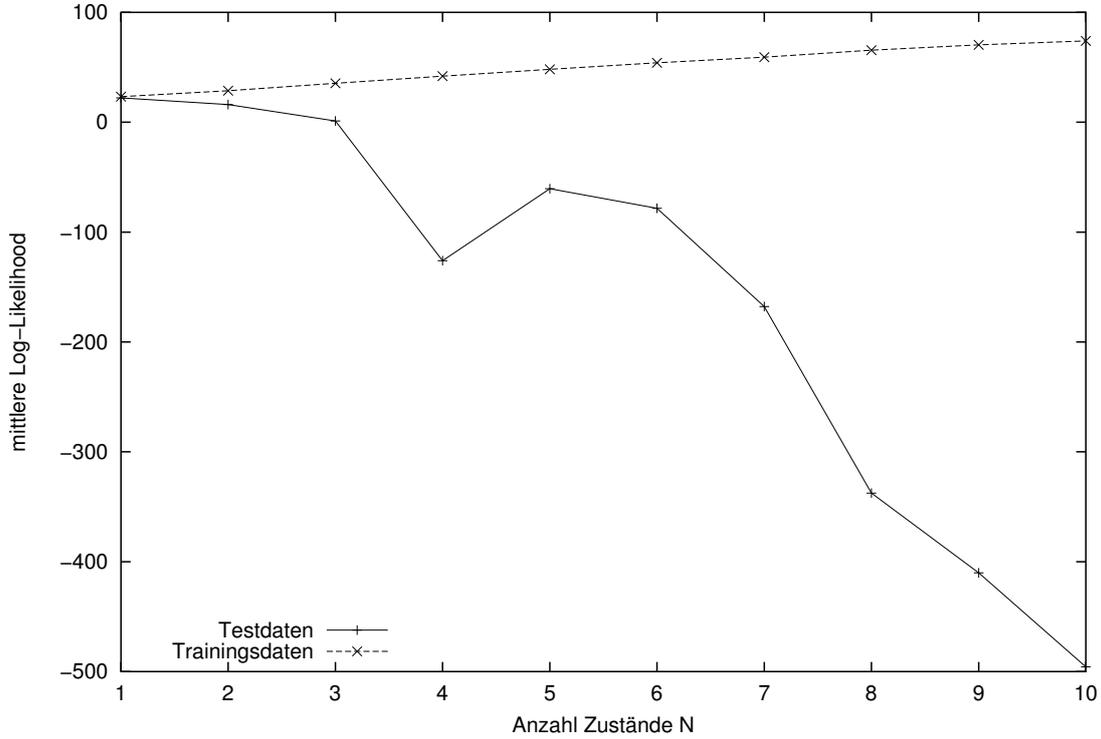


Abbildung 5.7: \bar{L}^{MCCV} und \bar{L}^{Train} in Abhängigkeit von der Anzahl der Zustände

$(1 - \beta)K$ Sequenzen. Es existiert zwar keine offensichtliche, systematische Methode zur Bestimmung von β , allerdings hat sich experimentell die Wahl von $\beta = 0.5$ (also gleich große Test- und Trainingsmengen) als recht robust für eine Vielzahl von Problemen erwiesen [Smy96]. Die Bezeichnung „Monte-Carlo“-Cross-Validierung ergibt sich aus der zufälligen Unterteilung in Test- und Trainingsmengen [Sha93].

Anschließend wird für jedes Paar $(O_p^{\text{Train}}, O_p^{\text{Test}})$ mit $1 \leq p \leq P$ und jede Modellklasse i ein Modelltraining durchgeführt und $\log L_{O_p^{\text{Test}}}(\lambda_i^{O_p^{\text{Train}}})$ berechnet, wobei $\lambda_i^{O_p^{\text{Train}}}$ das mit O_p^{Train} trainierte Modell der Modellklasse i bezeichnet. Zur Bewertung der Modellklassen führen wir nun eine Mittelung durch und erhalten

$$\bar{L}^{\text{MCCV}}(i) := \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \log L_{O_p^{\text{Test}}}(\lambda_i^{O_p^{\text{Train}}}) \quad (5.62)$$

als zu maximierenden Ausdruck [Smy98].

Da wir in unserem konkreten Fall lediglich über vier Sequenzen O^1, \dots, O^4 verfügen, können wir bei $\beta = 0.5$ auf eine zufällige Einteilung in Test- und Trainingssequenzen verzichten und bestimmen $\bar{L}^{\text{MCCV}}(N)$ über alle $P = \binom{4}{2} = 6$ möglichen Kombina-

tionen für Modelle mit $N = 1, \dots, 10$ Zuständen. Zusätzlich stellen wir die mittlere Log-Likelihood der Trainingssequenzen in Tabelle 5.4 mit dar, welche sich durch

$$\bar{L}^{\text{Train}}(N) := \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \log L_{O_p^{\text{Train}}}(\lambda_N^{O_p^{\text{Train}}}) \quad (5.63)$$

berechnet. Die von der Monte-Carlo-Cross-Validierung ermittelte optimale Zustandsanzahl beträgt damit $N = 1$. Mit etwas mehr Großzügigkeit bei der Interpretation der Resultate, die angesichts der geringen Menge realer Sequenzen angebracht zu sein scheint, können wir als Ergebnis festhalten, dass N zumindest drei nicht überschreiten sollte.

5.3.3 Wahl des Neugeschäftsmodells

Mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten geleisteten Vorarbeiten können wir nun ein konkretes HMM λ zur Generierung von Ausgabesequenzen der Form $O = z_1, \dots, z_T$ bestimmen. Hierfür ist zunächst die Wahl einer bestimmten Topologie sowie das Training des Modells notwendig, bevor wir uns der Simulation von Neugeschäftsszenarien zuwenden können.

Topologiewahl und Modelltraining

Betrachtet man die Resultate der verschiedenen Ansätze zur datenbasierten Bestimmung der Modelldimension, so lässt sich eine eindeutige Aussage für eine bestimmte Modelldimension schwer treffen. Das $BIC_{0.05}$ -Kriterium legt eine Zustandszahl zwischen drei und acht nah, während die Zielgröße D_{max} des Kolmogoroff-Smirnov-Tests ab einer Zustandszahl von zwei eine sehr gute Verteilungsanpassung zeigt. Die MCCV-Methode zeigt, dass es bereits bei mehr als einem Zustand zu einer gewissen Überanpassung kommt.

Bei Interpretation der Resultate aller datenbasierter Verfahren muss allerdings berücksichtigt werden, dass die Menge an Trainingsdaten in unserem Fall offenbar zu gering ist, um ausreichend aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, die eine klare Entscheidung für eine bestimmte Modelldimension rechtfertigen würden. Verstärkt wird dieses Problem dadurch, dass das Baum-Welch-Training nicht sicher das globale Optimum findet, so dass auch die Güte der Parameteranpassung zwischen den Modellen mit unterschiedlicher Zustandsanzahl schwankt.

Ein geeigneter Kompromiss zwischen den verschiedenen datenbasierten Verfahren scheint die Wahl von $N = 3$ zu sein, so dass wir nach Anwendung des Baum-Welch-Algorithmus mit zufälligen Initialmodellen das in Abbildung 5.8 graphisch dargestellte HMM⁴ erhalten.

⁴Zur Interpretation der Zahlenwerte s. auch Abbildung 5.3.

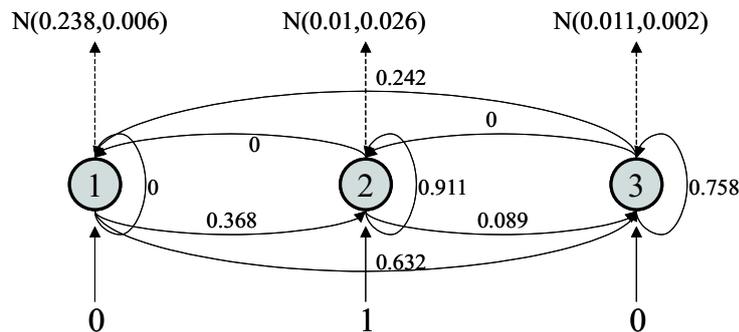


Abbildung 5.8: Graphische Darstellung des trainierten HMM

Die Zustände 2 und 3 produzieren eine sehr „breitflankige Normalverteilung“ mit relativ hoher Dichte direkt um den Erwartungswert von 0.01 herum und sind durch starke Selbstübergänge gekennzeichnet. Als Bestimmungsfaktoren des Neugesäfts (s. Abschnitt 5.1) können wir diesen Zuständen die gesamtwirtschaftliche Entwicklung, Konkurrenzsituation sowie die Unternehmenspolitik zuordnen, wobei die Konkurrenzsituation auf Grund der höheren Varianz der Ausgabeverteilung eher mit Zustand 2 assoziiert werden kann. Zustand 1 kann dagegen klar den extremen Neugesäftszuwächsen nach Änderungen bei der staatlichen Förderung zugeordnet werden. Die Selbstübergangswahrscheinlichkeit bei diesem Zustand wird auf Null trainiert, d. h. es finden keine solchen Ereignisse unmittelbar hintereinander statt, was im Kontext der Interpretation dieses Zustands sinnvoll erscheint.

Dass auch die Initialwahrscheinlichkeiten π_1 und π_3 auf Null trainiert werden, wodurch als alleiniger Startpunkt Zustand 2 in Betracht kommt, kann auf die geringe Anzahl von Trainingssequenzen zurückgeführt werden. Allerdings dürfte dieser Umstand bei der Simulation von Neugesäftsszenarien zu wenig Problemen führen, da dieser Zustand auf Grund der hohen Varianz seiner Ausgabeverteilung wenig einschränkend auf das erste Ausgabesymbol wirkt.

Simulation von Neugesäftsszenarien

Mit Hilfe dieses HMMs können wir aus jeder Ausgabesequenz $O = z_1, \dots, z_T$ leicht das Neugesäftsszenario bestimmen, indem wir mit Vorgabe des Startneugesäfts S_0 durch

$$X_t = S_0 \prod_{t=1}^T z_t \quad (5.64)$$

das Neugesäft X_t des Simulationsjahres t berechnen.

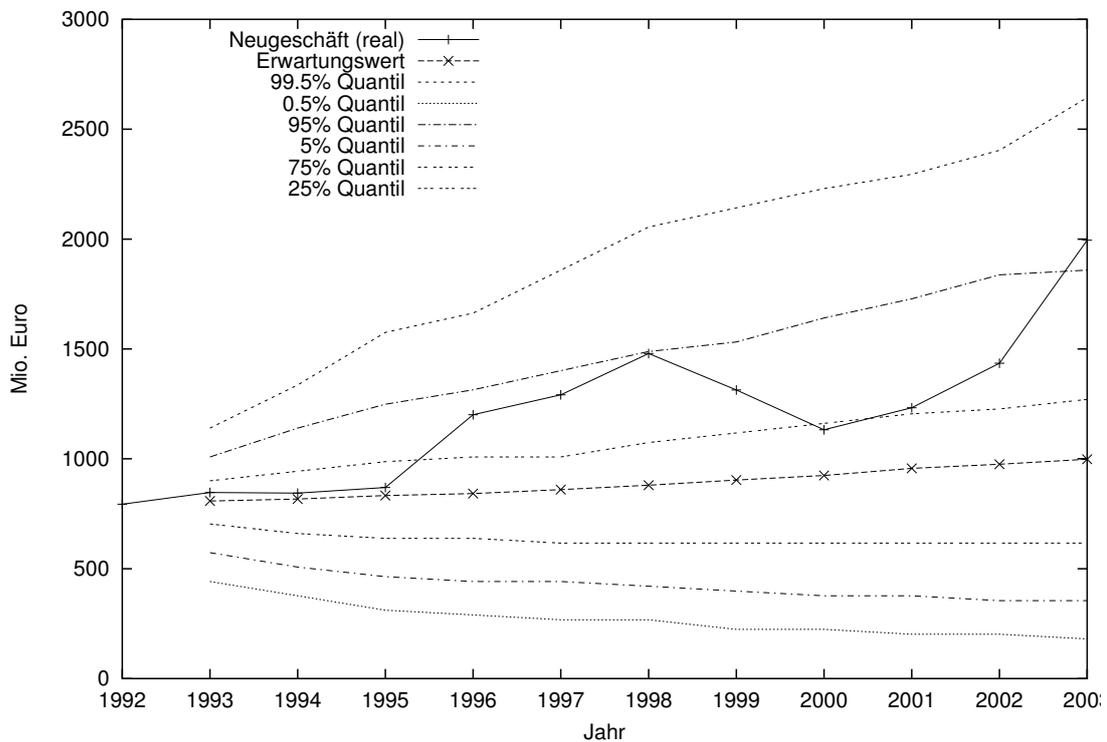


Abbildung 5.9: Reales Neugeschäftsszenario zwischen 1992 und 2003 sowie Quantile der empirischen Verteilung simulierter Neugeschäfte

Wir überprüfen die Angemessenheit der Modellierung wie bereits in Kapitel 4 grob in der Weise, dass wir ausgehend von einem vergangenen realen Neugeschäft mit dem Modell zahlreiche Neugeschäftsszenarien simulieren und die hieraus ermittelte empirische Neugeschäftsverteilung mit dem real eingetretenen Neugeschäft vergleichen. Als reales Neugeschäftsszenario verwenden wir die bereits in Abbildung 5.1 dargestellte Neugeschäftsentwicklung, wobei wir das Neugeschäft des Jahres 1992 als Startwert für die Simulation von 1000 Szenarien verwenden.

In Abbildung 5.9 sind neben dem realen Neugeschäftsszenario auch einige aus der empirischen Verteilung der simulierten Szenarien gewonnenen Quantile dargestellt. Es wird deutlich, dass das Neugeschäftsmodell die reale Entwicklung als durchaus wahrscheinlich ansieht, was die Eignung der Modellierung belegt.

Kapitel 6

Simulation

Wir führen nun die in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten Modellmodule auf die in Abschnitt 2.2.4 skizzierte Weise zusammen und wenden das Modell auf ein reales Bausparkollektiv an. Wir beschränken uns hierbei auf die Modellierung des klassischen Finanzierertarifs der (verfremdeten) Beispiel-Bausparkasse, da dieser insgesamt über 3/4 des Bausparsummenvolumens des Gesamtkollektivs abdeckt. Die Funktionstauglichkeit des Modellansatzes kann damit exemplarisch überprüft werden, da die Berücksichtigung weiterer Tarife auf analogem Weg erfolgen kann.

Wir stellen zunächst in Abschnitt 6.1 den technischen Aufbau des Modells dar. Das Gesamtmodell und seine Parametrisierung kann nun anhand einer Backtest- und einer Ex-Post-Simulation validiert werden (Abschnitt 6.2). Auf Grundlage des validierten Gesamtmodells führen wir in Abschnitt 6.3 eine Monte-Carlo-Simulation basierend auf einem aktuellen Kollektivbestand durch und diskutieren die Ergebnisse. Zur Untersuchung der Einflüsse der einzelnen Teilmodelle bzw. deren Parametrisierung auf das Gesamtergebnis führen wir zum Abschluss dieses Kapitels in Abschnitt 6.4 eine Sensitivitätsanalyse durch.

6.1 Modellaufbau

Das Modell stellt technisch gesehen eine Abwandlung des in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen NBI-Modells dar. Es basiert auf der Zusammenfassung der einzelnen Konten des Gesamtbestands nach bestimmten Kriterien zu *Schichten*. Eine Schicht wird vom NBI-Rechenkern wie *ein* Konto behandelt.

Die Aktionen, die ein Bausparer auf diesem Konto ausführen kann (z. B. Sparszahlungen, Kündigung, Fortsetzung etc.), sind in einem jeweils zugehörigen Schichtmuster abgelegt. Jede Schicht wird exakt von einem solchen Schichtmuster gesteuert, während ein Schichtmuster üblicherweise das Verhalten vieler weiterer Schichten bestimmt. Da manche der im Schichtmuster abgelegten Aktionen nicht von der gesamten Schicht durchgeführt werden sollen, sondern nur von bestimmten, simulationszeitabhängigen Anteilen (z. B. Darlehensverzichte), wird die Schicht bei Simulation einer entsprechenden Aktion anteilig in zwei Schichten zerlegt, wobei auf der einen die Aktion

durchgeführt wird, auf der anderen nicht. Auf diese Weise werden die ursprünglichen, aus dem Vertragsbestand gebildeten Schichten vom NBI-Rechenkern im Laufe der Simulation in immer feinere Schichten aufgespalten. Diese Anteile in ihrem zeitlichen Verlauf werden als Vektoren neben den ihnen zugehörigen Aktionen im jeweiligen Schichtmuster abgelegt.

Anhand der in Schichten aufgeteilten Bausparverträge sowie des in den Schichtmustern eindeutig festgelegten Verhaltens dieser Schichten und der jeweiligen Tarifparameter kann der NBI-Rechenkern die Entwicklung des Kollektivs nun deterministisch in die Zukunft fortschreiben, wobei im Simulationsverlauf zusätzliche Schichten für das Neugeschäft erzeugt werden.

Wie genau Schichten und Schichtmuster in unserem Modell ermittelt werden, wird in den folgenden Abschnitten detailliert erläutert.

6.1.1 Zinsabhängige Verhaltensanteile

Mit Hilfe des Regressionsmodells (s. Kapitel 3) schätzen wir aus einem bestimmten Zinsszenario sowohl Darlehensverzichts- als auch Sondertilgungsanteile für jedes Simulationsjahr. Da wir bei dieser Schätzung auch das unterschiedliche Verhalten der mittels Clusterung bestimmten Teilkollektive berücksichtigen wollen, sind einzelne Schichtmuster für jedes Paar der K_{DV} Darlehensverzichts- und K_{ST} Tilgungscluster notwendig. Aus diesem Grund benötigen wir bei $K_{DV} = 3$ Darlehensverzichts- und $K_{ST} = 2$ Sondertilgungsclustern bereits sechs verschiedene Schichtmuster (vgl. Abschnitt 3.4).

Auf diese Weise lässt sich jedem dieser Schichtmuster ein eindeutiges Paar Regressionsfunktionen für die Berechnung der Darlehensverzichts- und Sondertilgungsanteile zuordnen. Bei gegebenem Zinsszenario können wir so für jedes Schichtmuster einen Anteilsvektor der $BSDV_t$ und einen Vektor der $BSST_t$ im Zeitverlauf berechnen, mit denen die entsprechenden Aktionen im Schichtmuster parametrisiert werden.

6.1.2 Abbildung des Sparverhaltens

Schichtmuster sollen nicht nur Informationen über das Darlehensverzichts- und Sondertilgungsverhalten enthalten, sondern müssen u. a. auch ein bestimmtes Sparverhalten spezifizieren. Da ein Schichtmuster sinnvoll nur genau ein bestimmtes Sparverhalten beschreiben kann, führt die Anzahl der zu modellierenden Sparverhalten zu einer weiteren Vervielfachung der Zahl der benötigten Schichtmuster.

Wir wollen nun die nach Berücksichtigung der Darlehensverzichts- und Sondertilgungscluster gebildeten Schichtmuster weiter nach n verschiedenen Sparverhalten (*Sparklassen*) differenzieren. Als Zuordnungskriterium für die Einzelverträge zu den verschiedenen Sparklassen verwenden wir den mittleren Spargeldeingang bzw. – wo sichtbar – den Spargeldeingang im Jahr des Vertragsabschlusses, um auf diese Weise Soforteinzahlungsverhalten zu berücksichtigen.

Wir bilden zunächst Teilkollektive, deren Verträge sowohl der clusterbeschreibenden Funktion eines bestimmten Darlehensverzichts- als auch Sondertilgungsclusters entsprechen. Die Verträge dieser Teilkollektive werden nach Höhe ihres mittleren Spargeldeingangs in weitere $(n - 1)$ Klassen unterteilt. Verträge, deren Spargeldeingang 20% der Bausparsumme im Abschlussjahr überschreitet, werden als Soforteinzahler angesehen und in der n -ten Klasse gesondert betrachtet.

Über die einzelnen Verträge der so entstandenen Sparklassen mitteln wir nun den relativen, auf die Bausparsumme bezogenen Spargeldeingang im Zeitverlauf. Hierdurch erhalten wir für jede Sparklasse ein bestimmtes Sparmuster, das im jeweiligen Schichtmuster abgelegt wird.

Wir kommen so auf insgesamt $K_{DV} \times K_{ST} \times n$ Schichtmuster mit unterschiedlichen Spar-, Darlehensverzichts- oder Sondertilgungsverhalten.

6.1.3 Weitere Ergänzung der Schichtmuster

Die bis zu diesem Zeitpunkt betrachteten Schichtmuster, die bereits Darlehensverzichts-, Sondertilgungs- und Sparverhalten berücksichtigen, müssen nun noch um einige Aktionen für die Inanspruchnahme der weiteren Optionsmöglichkeiten der Bausparer ergänzt werden (vgl. Abschnitt 2.1.1). Für diese Aktionen müssen schichtmuster-spezifische Anteile und Verschiebe bestimmt werden, die wir – analog zur Bestimmung der Sparmuster – durch Mittelung über die zu jeweils einem Schichtmuster gehörenden Verträge bestimmen. Ebenso wie die gemittelten Sparmuster gehen diese als konstante Steuerungsparameter in das Modell ein, auch wenn sie in der Realität zufälligen Veränderungen unterworfen sind und somit auch als exogene Variablen stochastisch modelliert werden könnten. Auf Grund langfristiger Änderungen im Sparerverhalten sind diese Anteile und Verschiebe in gewissem Maße abhängig vom Datenzeitraum, über den diese gemittelt werden. Um entsprechende Veränderungen im Modell zu erfassen, empfiehlt sich eine Berechnung über möglichst junge Datenzeiträume (vgl. hierzu Abschnitt 2.2.3).

Als simulationszeitunabhängige Anteile für die in den Schichtmustern noch fehlenden Sparreaktionen definieren wir nun folgende Größen:

Kündigung: Die Steuerung der Kündigungen erfolgt über bauparsummengewichtete Kündigungsanteile K_i , differenziert nach Vertragsalter i . Diese werden durch

$$K_i = \frac{\text{im Jahr } i \text{ nach Abschluss gekündigte BS}}{\text{nicht zugeteilte BS im Jahr } i \text{ nach Abschluss}} \quad (6.1)$$

berechnet.

Fortsetzung: Fortsetzungen werden im Modell zum einen über den Anteil F gesteuert, der sich durch

$$F = \frac{\text{BS aller Verträge, die mit der Fortsetzung beginnen}}{\text{BS aller positiv bewerteten Verträge}} \quad (6.2)$$

berechnet. Als zusätzliche Parameter müssen zudem noch Anteile für die Wiedergeltendmachungen F_i nach jeweils i Jahren Fortsetzung angegeben werden.

Neben diesen Aktionsanteilen benötigen wir zur Vervollständigung der Schichtmuster Informationen über die mittleren Verschiebe, mit denen Guthaben- und Darlehensauszahlungen nach Zuteilung durchgeführt werden, sowie über die mittlere Dauer, die zwischen Zuteilung und Darlehensverzicht vergeht. Auch diese Zeiträume werden im Modell zur Vereinfachung als fix angesehen.

6.1.4 Bildung des Simulationsbestands

Die vom NBI-Rechenkern eingelesene Bestandsdatei repräsentiert das aus Einzelverträgen bestehende Kollektiv zu einem bestimmten Zeitpunkt, in der alle Verträge zu Schichten zusammengefasst wurden.

Mit Hilfe der clusterbeschreibenden Funktionen der Darlehensverzichts- und Sonder tilgungscluster sowie des Kriteriums für das Sparverhalten werden bei der Bestandsbildung einzelne Verträge eindeutig einem bestimmten Schichtmuster zugeordnet (s. o.). Da sich die zu einem Schichtmuster gehörenden Verträge je nach Alter und vorangegangenen, realem Sparverhalten deutlich unterscheiden können, werden diese Verträge abhängig von ihrem Abschlussjahr und ihrer erreichten Bewertungszahl zu Schichten zusammengefasst und die jeweiligen Kontogrößen zum Bestandsbildungszeitpunkt aufsummiert.

Die Berücksichtigung der Bewertungszahl erfolgt hierbei durch die Ermittlung einer Bewertungszahlklasse für jeden Vertrag. Hierzu wird der Bereich zwischen Null und der Zielbewertungszahl gleichmäßig in m Bewertungszahlklassen aufgeteilt.

Auf diese Weise bilden die einem Schichtmuster zuzuordnenden Verträge mit gleichem Abschlussjahr und ähnlicher Bewertungszahl im Bestand jeweils eine Schicht.

Verträge, deren Sparphase bereits beendet ist, werden in so genannten *reinen Bestands schichten* aggregiert, die nur noch anhand global parametrisierter Bestandsschichtmuster abgewickelt werden und kein Neugeschäft erhalten.

6.1.5 Berücksichtigung des Neugeschäfts

Da wir hier lediglich den klassischen Finanzierertarif der Beispielbausparkasse betrachten, ist eine Aufteilung des Gesamtneugeschäfts auf verschiedene Tarife und Tarifvarianten überflüssig, so dass wir mit dem in Kapitel 5 entwickelten Neugeschäftsmodell direkt Szenarien für die absolute Neugeschäftshöhe dieses Tarifs erzeugen können.

Bevor eine Simulation durchgeführt werden kann, muss die vom Neugeschäftsmodell generierte, absolute Neugeschäftshöhe im Zeitverlauf auf die einzelnen Schichtmuster umgelegt werden, da der NBI-Rechenkern in jedem simulierten Jahr für jedes Schichtmuster eine neue Schicht mit einer bestimmten, vorzugebenden Bausparsumme erzeugt. Hierfür geben wir für jedes Schichtmuster einen konstanten Anteil am

generierten Gesamtneugeschäft des jeweils simulierten Jahres an. Wir ermitteln diesen Anteil aus den Daten, indem wir die Bausparsumme der einem Schichtmuster zugeordneten, neu abgeschlossenen Verträge auf die Bausparsumme des Gesamtneugeschäfts des Tarifs über einen vorzugebenden Zeitraum beziehen.

6.1.6 Modellablauf

Wir wenden uns nun dem verfeinerten Modellablauf zu. Dieser ist in Abbildung 6.1 als Datenflussdiagramm in leicht abgewandelter Notation schematisch dargestellt. Ausgangspunkt des Modells sind die Einzelvertragsdaten des Bausparkollektivs im Zeitverlauf. Auf Basis dieser Daten werden zunächst verschiedene Analysen durchgeführt:

Regressionsclusterung: Als erster Schritt wird eine Regressionsclusterung des Darlehensverzichts- und Sondertilgungsverhaltens durchgeführt (s. Abschnitt 3.4). Die Parameter der jeweiligen clusterspezifischen Regressionsfunktionen werden in eine eigene Datei geschrieben, in der für jedes Schichtmuster die dem jeweiligen Cluster entsprechenden Funktionsparameter eingetragen werden.

Zuordnung: Mit Hilfe der clusterbeschreibenden Funktionen sowie des Sparkriteriums erster bzw. mittlerer Spargeldeingang kann für jeden Vertrag die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Schichtmuster ermittelt werden. Diese Vertragsnummern-Schichtmustersnummern-Zuordnung wird in einer eigenen Datei abgelegt, die im nächsten Schritt für die Bildung der Bestandsdatei benötigt wird (vgl. Abschnitt 6.1.4).

Sparverhalten: Nach Bestimmung der Zugehörigkeit eines Vertrags zu einem bestimmten Schichtmuster werden die relativen Spargeldeingänge des Vertrags im Verlauf seiner Sparphase zur Bestimmung des Sparverhaltens des Schichtmusters herangezogen (vgl. Abschnitt 6.1.2). Pro Schichtmuster wird ein (Sparmuster-) Vektor mit den gemittelten relativen Spargeldeingängen nach Vertragsalter in eine eigene Datei geschrieben.

Aktions- und Neugeschäftsanteile: Mit Hilfe der bekannten Zuordnung jedes Vertrags zu einem Schichtmuster werden nun die Neugeschäfts-, Kündigungs- und Fortsetzungsanteile für jedes Schichtmuster über einen vorzugebenden Datenzeitraum ermittelt, ebenso wie Auszahlungs- und Darlehensverzichtsverschiebe (vgl. Abschnitte 6.1.3 und 6.1.5). Diese Informationen werden in der so genannten *Häufigkeitstabelle* abgelegt.

Anschließend werden anhand der Zuordnungsdatei die Stände der Einzelverträge zu einem bestimmten Zeitpunkt (Bestandsdatum) zu Schichten aggregiert und in die Bestandsdatei geschrieben.

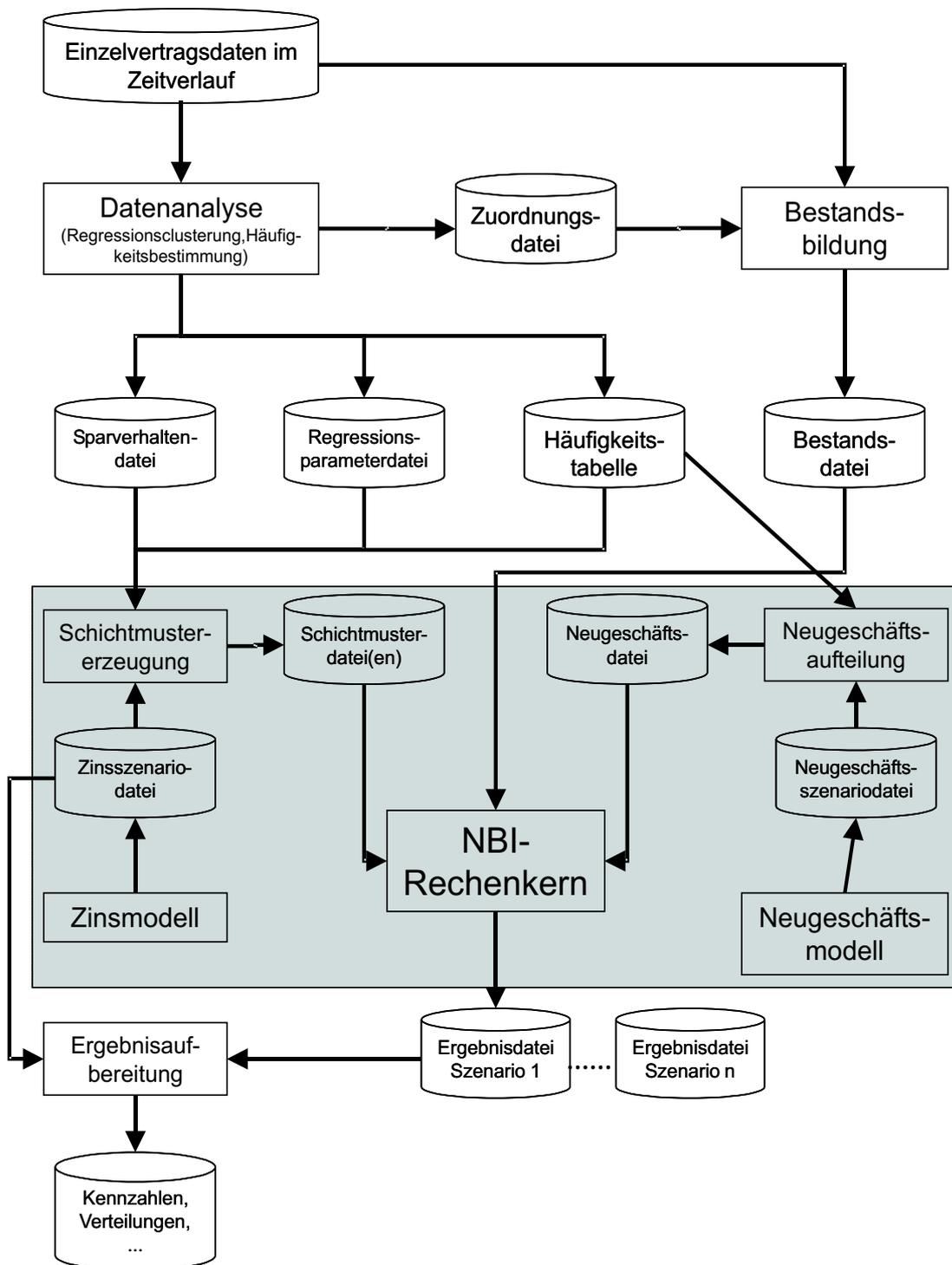


Abbildung 6.1: Modellablauf

Alle Vorgänge bis zu diesem Punkt sind auch bei einer Monte-Carlo-Simulation grundsätzlich nur einmal vorzunehmen und müssen nicht für jedes Szenario wiederholt werden. Aus diesem Grund spielt die Laufzeit dieser Schritte für die Gesamtlaufzeit des Verfahrens eine untergeordnete Rolle.

Die in der Abbildung 6.1 durch einen grauen Kasten unterlegten Schritte sind im Gegensatz hierzu für die Berechnung eines jeden Einzelszenarios erneut durchzuführen. Zu diesen Schritten zählt die Schichtmustererzeugung. Diese legt für jedes erforderliche Schichtmuster eine einzelne Schichtmusterdatei an, die die Informationen über das Sparverhalten, Verschiebe sowie Anteile für die verschiedenen Optionsmöglichkeiten des Sparers enthält, wobei die Vektoren der simulationszeitabhängigen Darlehensverzichts- und der Sondertilgungsanteile aus der vom Zinsmodell generierten, jeweiligen Zinsszenariodatei unter Zuhilfenahme der Regressionsparameterdatei berechnet werden. Die übrigen Anteile und Verschiebe werden aus der Häufigkeitstabelle übernommen und sind im Zeitverlauf fix.

In der anschließenden Neugeschäftsaufteilung wird das vom Neugeschäftsmodell generierte Gesamtneugeschäft des Finanzierertarifs im Zeitverlauf mit Hilfe der Anteile aus der Häufigkeitstabelle auf die einzelnen Schichtmuster umgelegt und die so berechneten Neugeschäftsbausparsummen pro Simulationsjahr und Schichtmuster in die Neugeschäftsdatei geschrieben.

Damit sind alle für eine Szenariosimulation notwendigen Informationen in Dateien abgelegt, die anschließend vom NBI-Rechenkern eingelesen werden. Der Rechenkern schreibt nach Abschluss jeder Szenariosimulation alle relevanten Kollektivgrößen im Zeitverlauf in eine eigene Szenario-Ergebnisdatei.

Nach Durchführung aller Szenariosimulationen werden die Ergebnisdateien der verschiedenen Szenariosimulationen ausgewertet, um auf diese Weise empirische Verteilungen der simulierten Kollektivgrößen und Kennzahlen zu bestimmen. Je nach zu berechnender Kennzahl kann auch das für das jeweilige Einzelergebnis verwendete Zinsszenario relevant sein (vgl. Abschnitt 2.3).

6.1.7 Laufzeitverhalten

Zur Erreichung einer hohen Signifikanz der empirischen Verteilungen ist es von zentraler Bedeutung, so viele Szenariosimulationen wie möglich durchzuführen (s. Abschnitt 6.2.2). Diese Anforderung kollidiert naturgemäß mit einer für eine hohe Resultatqualität ebenfalls notwendigen, möglichst „feinen“ Abbildung des Kollektivs, die zwangsläufig zu einem höheren Rechenaufwand jeder einzelnen Szenariosimulation und damit zu entsprechend weniger Szenariosimulationen bei gegebener CPU-Zeit führt. Der Rechenaufwand des Modells stellt daher einen kritischen Punkt dar, der einer genaueren Betrachtung Wert ist.

Für die insgesamt benötigte CPU-Zeit des Modells sind primär die Schritte relevant, welche für jede Szenariosimulation zu wiederholen sind (s. grau unterlegter Kasten in Abbildung 6.1). Da die Generierung einzelner Zins- und Neugeschäftsszenarien sowie

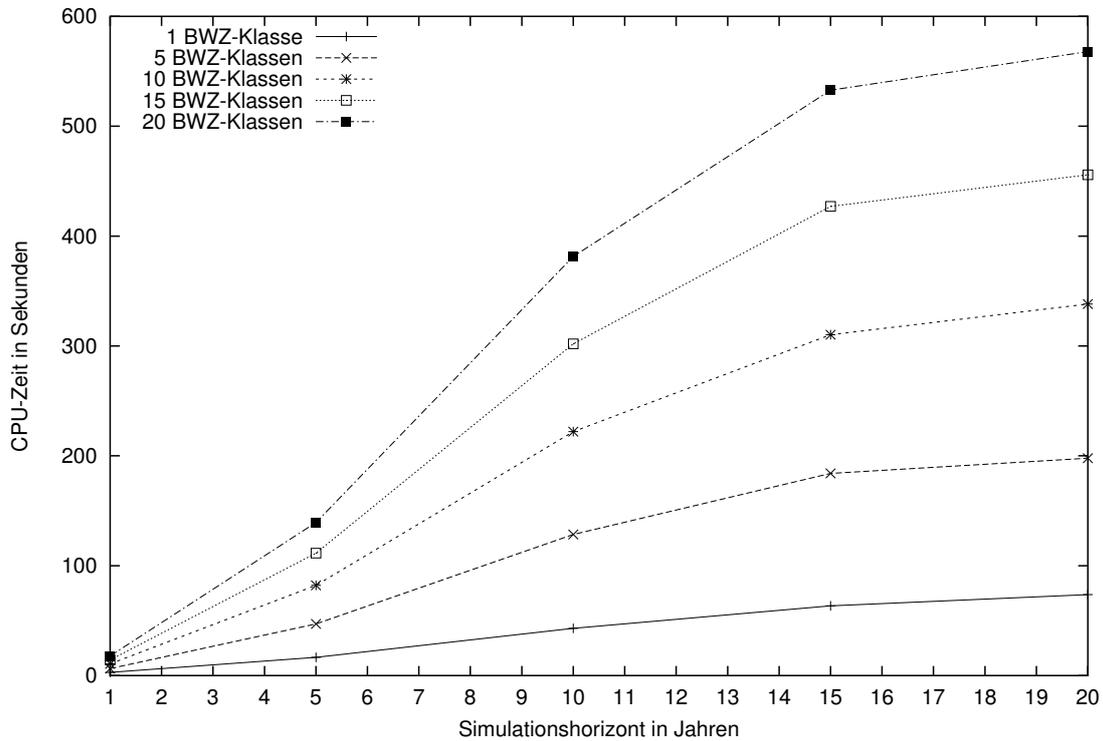


Abbildung 6.2: CPU-Zeit des NBI-Rechenkerns bei verschiedener Anzahl BWZ-Klassen in Abhängigkeit von der Länge des Simulationshorizonts

der entsprechenden Dateien sich im Bereich weniger Sekunden abspielt, ist für die Gesamtlaufrzeit des Modells die Berechnungsdauer jedes einzelnen Szenarios im NBI-Rechenkern von entscheidender Bedeutung, die im Minutenbereich angesiedelt ist.

Die Laufzeit des Rechenkerns hängt dabei prinzipiell ab von

- der Anzahl der Schichten
- und der Länge des Simulationshorizonts.

Die Anzahl der zu simulierenden Schichten selbst wiederum steigt sowohl mit der Anzahl der Schichtmuster als auch mit der Anzahl m der Bewertungszahlklassen bei Bestandsbildung. In Abbildung 6.2 ist die CPU-Zeit¹ des NBI-Rechenkerns in Abhängigkeit von dem Simulationshorizont T und der Zahl der bei Bestandsbildung verwendeten Bewertungszahlklassen dargestellt. Hierbei wurden 42 Schichtmuster verwendet

¹Die Messungen erfolgten auf einem Sun E450-Unix-Server mit UltraSPARC-II 400 MHz-Prozessoren.

(drei Darlehensverzichtscluster, zwei Sondertilgungscluster, sieben Sparklassen). Zu Beginn der Simulation nimmt die Anzahl der intern zu simulierenden Schichten auf Grund des hinzukommenden Neugeschäfts weiter zu, da noch keine oder nur wenige Schichten aus dem Bestand abgebaut sind. Hieraus erklärt sich der zunächst überproportional ansteigende Verlauf der CPU-Zeit. Sobald der gesamte Bestand abgebaut ist und durch das Neugeschäft pro Periode nur noch so viele neue Schichten hinzukommen, wie auch abgebaut werden, steigt die Rechenzeit nur noch linear. Dieser Effekt ist stark abhängig von der Zahl der bei Bestandsbildung verwendeten Bewertungszahlklassen m , da die Aufteilung der Bestandsjahrgänge auf Schichten m -fach feiner ist als die der Neugeschäftsjahrgänge. Da die Anzahl der Schichten zudem proportional mit der Anzahl der Schichtmuster zunimmt, steigt entsprechend auch die Rechenzeit proportional hierzu an. Insgesamt können wir damit den Rechenaufwand des NBI-Rechenkerns bei einer Szenariosimulation durch $O(nmK_{DV}K_{ST}T)$ abschätzen. Da die einzelnen Szenariosimulationen vollständig unabhängig voneinander durchgeführt werden können, kann die Gesamtdauer der Monte-Carlo-Simulation durch Hinzunahme weiterer Prozessoren annähernd proportional verringert werden.

6.2 Modellvalidierung

Es muss nun überprüft werden, ob das Modell in der Lage ist, die Entwicklung eines realen Bausparkkollektivs angemessen abzubilden. Es bietet sich an, basierend auf einem vergangenen Bestand Simulationen durchzuführen und die Simulationsergebnisse mit den tatsächlich eingetroffenen Kollektivgrößen zu vergleichen. Hierzu existieren zwei Varianten, die wir nachfolgend auch beide betrachten werden:

1. Durchführung einer einzelnen Simulation unter Verwendung des im vergangenen Zeitraum real eingetretenen Szenarios und Vergleich des (deterministischen) Ergebnisses mit den real eingetretenen Kollektivgrößen (*Backtest*, s. Abschnitt 6.2.1)
2. Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation für den vergangenen Zeitraum, Ermittlung der empirischen Verteilungen der Kollektivgrößen und Vergleich mit den real eingetroffenen Größen (*Ex-Post-Simulation*, s. Abschnitt 6.2.2)

Für beide Varianten bilden wir zunächst den (frühestmöglichen) Simulationsbestand zum 31.12.1993 unter Einbeziehung der Abschlussjahrgänge von 1965 bis 1993, so dass uns bei den gegebenen Daten Vergleichszahlen über zehn Jahre zur Verfügung stehen. Sparmuster, Verschiebe, Neugeschäfts-, Kündigungs- und Fortsetzungsanteile bilden wir durch Mittelung auf dem gesamten Datenzeitraum zwischen 1994 und 2003.

6.2.1 Backtest-Simulation

Für die Backtest-Simulation verwenden wir keine generierten Szenarien, sondern sowohl das reale Zins- als auch das reale Neugeschäftsszenario. Damit schließen wir die Modellierung des Neugeschäfts und des Marktzinses hier ausdrücklich aus und überprüfen damit hauptsächlich die Güte der in Abschnitt 6.1 vorgestellten Kollektivmodellierung. Konkret verfolgen wir mit diesem Verfahren folgende Zwecke:

- Durch die Unabhängigkeit vom Einfluss des Neugeschäfts- und Zinsmodells lässt sich klären, mit welchen Abweichungen in welchen Größenordnungen alleine aus der Kollektivmodellierung heraus zu rechnen ist. Auf diese Weise lassen sich die Modellgrundannahmen prüfen, z. B. inwieweit das Zins- und Neugeschäftsszenario und die hieraus abgeleiteten Parameter die reale Kollektiventwicklung bereits ausreichend determinieren, oder ob nicht noch andere, nicht explizit modellierte exogene Variablen eine bedeutende Rolle spielen (s. Abschnitt 2.2.3).

Ist das Modell schon bei gegebenem realen Szenario nicht in der Lage, die reale Kollektiventwicklung näherungsweise zu reproduzieren, so ist die Modellierung ungeeignet und muss überarbeitet bzw. ergänzt werden.

- Der Ansatz bietet zusätzlich die Möglichkeit, die Wahl der Anzahl Sparklassen n und Bewertungszahlklassen m zu unterstützen, indem die Resultate verschiedener Backtest-Simulationen mit unterschiedlichen n und m verglichen werden. Da jeweils nur die Durchführung *einer* Szenariosimulation notwendig ist, kann das Verfahren vergleichsweise effizient durchgeführt werden. Als Gütemaß, inwieweit eine bestimmte Anzahl Spar- und Bewertungszahlklassen geeignet ist, bietet sich die Summe der quadrierten Abweichungen der simulierten von den realen Zuteilungen im Zeitverlauf aus folgenden Gründen an: Erstens sind sehr viele Kollektivgrößen stark abhängig von dieser Größe (z. B. Guthaben- und Darlehensauszahlungen), so dass für eine adäquate Abbildung des Kollektivs die Zuteilungen notwendigerweise gut reproduziert werden muss. Zweitens stellen die Zuteilungen im Zeitverlauf in den ersten Jahren eine Resultante der Bestandsbildung und der Abbildung des Sparverhaltens dar, wodurch deren Güte implizit mitbeurteilt werden kann.

Entsprechende Untersuchungen mit verschiedenen Anzahlen von Bewertungszahl- und Sparklassen ergaben, dass für eine „brauchbare“ Abbildung der realen Zuteilungen und Spargeldeingänge zumindest sieben Sparklassen erforderlich sind. Hierbei sollte für eine durchgängig gute Abbildung der Zuteilungen aus dem Bestand im kurz- und mittelfristigen Bereich der Simulation die Anzahl der Bewertungszahlklassen zehn nicht unterschreiten, da sich Verträge gleichen Alters trotz Zugehörigkeit zur selben Sparklasse auf Grund individuell immer noch recht unterschiedlichen Sparverhaltens in der erreichten Bewertungszahl nennenswert unterscheiden können.

Insgesamt wurde bei dieser Untersuchung deutlich, dass die Modellierungsgüte der

Spargeldeingänge und der hieraus resultierenden Zuteilungen klar hinter der des ursprünglichen NBI-Modells (vgl. Abschnitt 2.1.3) zurückbleibt. Dieser Effekt war auf Grund der vorgenommenen Vergrößerung bei der Modellierung des Sparverhaltens zu erwarten. Wegen des eminenten Einflusses der Zuteilungen auf die meisten anderen Kollektivzeitreihen bietet es sich aber an, bei Verfügbarkeit zusätzlicher Rechenkapazität diese für eine Verfeinerung und ausgefeiltere Ermittlung der abgebildeten Sparverhalten zu verwenden. Entsprechende, auf Clusterverfahren basierende Ansätze wurden abgesehen vom NBI-Modell u. a. auch im Hidden-Markov-Bausparmodell [Kna00, Wic01] vorgestellt. Letzteres böte zudem den Vorteil, den Spargeldeingang stochastisch modellieren zu können, was der Zielsetzung dieser Arbeit entspricht.

Für die in den Abbildungen 6.3 bis 6.5 dargestellten Resultate wurden $n = 7$ Sparklassen sowie $m = 17$ Bewertungszahlklassen verwendet, bei denen sich bezüglich des obigen Gütemaßes ein lokales Optimum eingestellt hat.

Die Resultate rechtfertigen trotz einiger Schwächen den Modellierungsansatz. Neben den bereits angesprochenen, relativ groben Sparmustern führt auch die Verwendung fester, gemittelter Aktionsanteile und Verschiebe zu jedem Zeitpunkt zu kleinen Fehlern, die sich in einigen Bestandsgrößen auch kumulieren können. So begünstigt z. B. die Unterschätzung der gekündigten Bausparsumme sowie der Zuteilungen eine Erhöhung der nicht zugeteilten Bausparsummenbestände über den realen Wert hinaus, die im Simulationsverlauf immer stärker wird.

Analog hierzu sinken die Bauspareinlagen in der Simulation kurzfristig auf Grund zu hoher Auszahlungen am Simulationsbeginn zu stark. Da aber der simulierte Spargeldeingang lang- und mittelfristig höher ist als der reale, stimmen simulierte und reale Bauspareinlagen um das Jahr 2000 wieder überein. Statt sich zu kumulieren mitteln sich auf diese Weise viele dieser kleinen Fehler bei den entscheidenden Kollektivgrößen eher aus, da diese von vielen Faktoren abhängen.

Dennoch empfiehlt sich für die spätere Anwendung des Modells auf einen aktuellen Bestand, die im Modell als fix angenommenen Anteile und Verschiebe über möglichst junge Datenzeiträume zu berechnen, um auf diese Weise im Kollektiv stattgefundene Verhaltensänderungen zu berücksichtigen. So wird z. B. die Entwicklung der gekündigten Bausparsummen mit den über den gesamten Zeitraum gemittelten Kündigungsparameter insgesamt recht gut getroffen. Allerdings steigt die Abweichung im Jahr 2003 deutlich an, was auf eine grundsätzliche Änderung im Kündigungsverhalten hinweisen könnte.

Insgesamt lässt sich aber feststellen, dass die generelle Brauchbarkeit des Modells durch die Starrheit der Parameter für das Spar-, Kündigungs-, Fortsetzungs- und Auszahlungsverhalten nur geringfügig beeinträchtigt wird. Wir können hieraus auch schließen, dass die Berücksichtigung des Neugeschäfts- und Zinsszenarios die Kollektiventwicklung alleine bereits in ausreichendem Maße determinieren und damit nicht

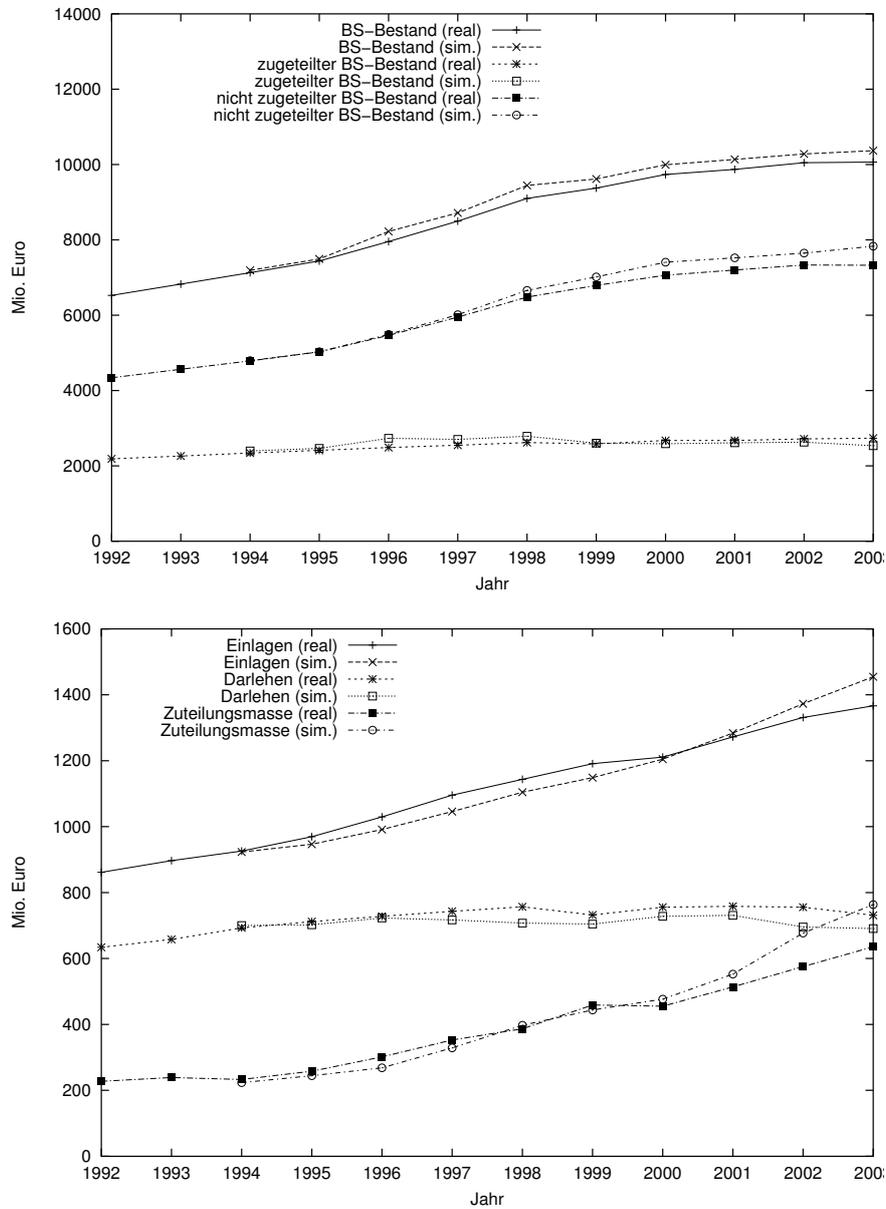


Abbildung 6.3: Bactest-Resultate (a): Oben dargestellt sind die simulierten und realen Entwicklungen des Bestands der gesamten, der zugeteilten und nicht zugeteilten Bausparsumme. Unten sind reale und simulierte (Bauspar-) Einlagen, (Bauspar-) Darlehen sowie die Entwicklung der Zuteilungsmasse abgebildet.

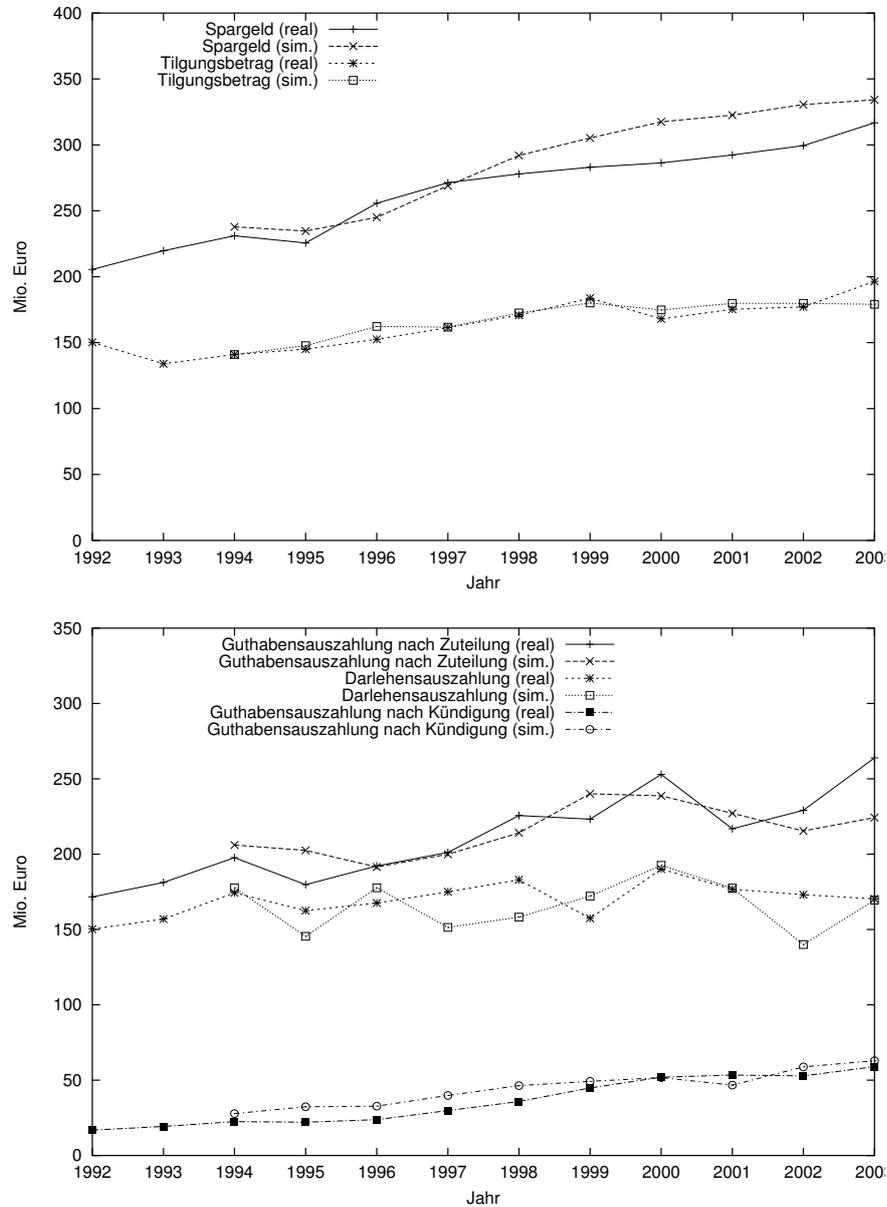


Abbildung 6.4: Backtest-Resultate (b): Oben dargestellt sind die simulierten und realen kollektiven Einzahlungen (Spargeld, Tilgungsbeitrag), unten die kollektiven Auszahlungen (Guthabensauszahlung nach Kündigung sowie nach Zuteilung und Darlehensauszahlungen).

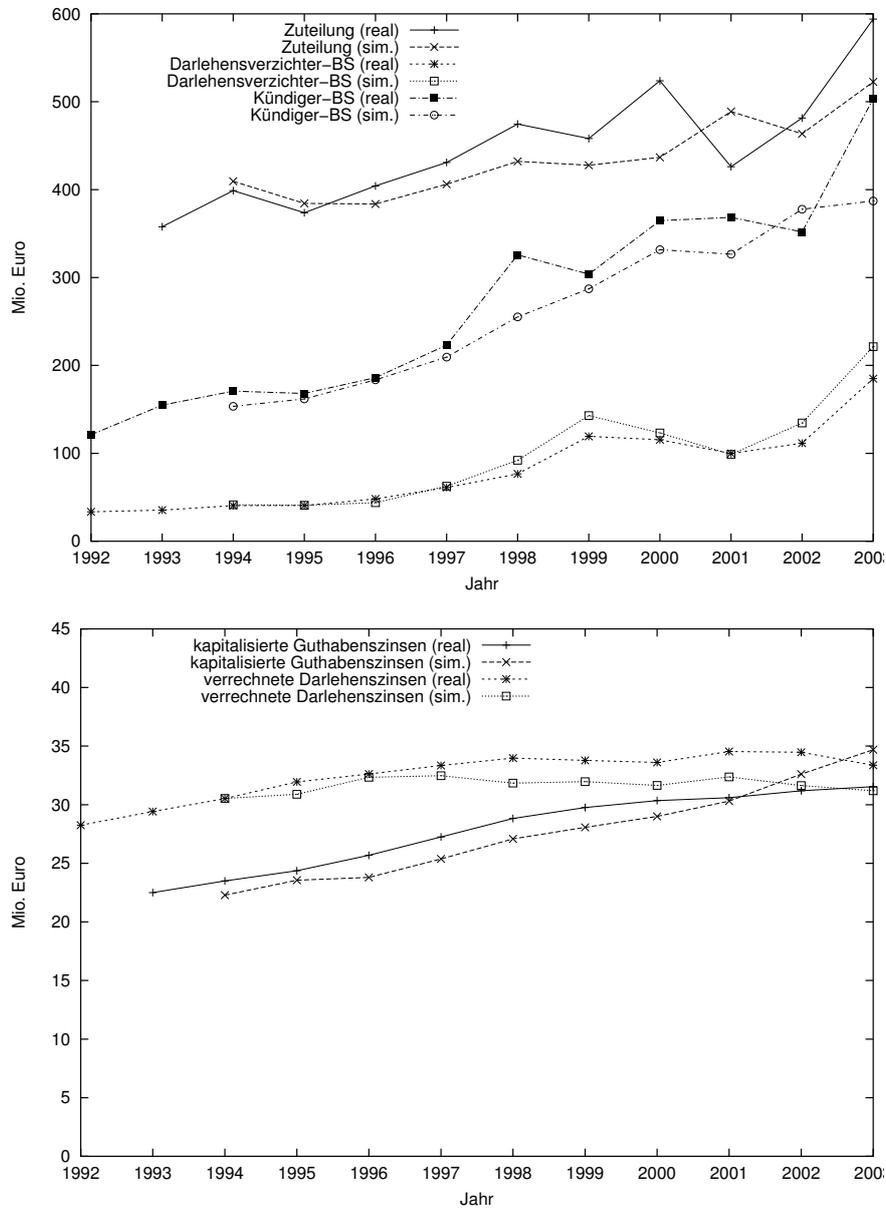


Abbildung 6.5: Backtest-Resultate (c): Oben dargestellt sind die Entwicklungen der simulierten und realen Zuteilungen, der Darlehensverzichter-Bausparsumme sowie der Kündiger-Bausparsumme. Unten sind die realen und simulierten kapitalisierten Guthabenszinsen sowie die verrechneten Darlehenszinsen dargestellt.

Verteilungsgröße	relative Intervallbreite
0,5%-Quantil	±10,42%
5%-Quantil	±4,17%
25%-Quantil	±1,52%
75%-Quantil	±1,89%
95%-Quantil	±1,91%
99,5%-Quantil	±11,21%
Erwartungswert	±1,44%

Tabelle 6.1: 90%-Konfidenzintervalle der empirischen Verteilungsgrößen der simulierten Bauspareinlagen im Jahr 2003

zwingend noch weitere exogene Variablen in die Modellierung einbezogen werden müssen.

6.2.2 Ex-Post-Simulation

Wir wählen nun alle Parameter wieder wie im vorhergehenden Abschnitt 6.2.1, geben aber weder das reale Neugeschäfts- noch das reale Zinsszenario vor. Stattdessen führen wir auf Basis des Bestands zum 31.12.1993 eine Monte-Carlo-Simulation mit 1000 generierten Szenarien durch. Für das Zinsmodell verwenden wir die über die Jahre 1991 bis 2001 mit der Martingal-Schätzfunktion ermittelten Parameter (s. Abschnitt 4.2.4, Tabelle 4.3).

Von einer guten Gesamtmodellierung dürfen wir erwarten, dass zumindest mittelfristig die real eingetretenen Kollektivgrößen vom Modell als wahrscheinlich angesehen werden. Aus diesem Grund berechnen wir aus den Resultaten der durchgeführten Szenariosimulationen (empirische) Verteilungen für einzelne, beispielhaft herausgegriffene Kollektivgrößen und stellen deren Erwartungswerte und Quantile sowie real eingetroffenen Werte zu Vergleichszwecken in Abbildung 6.6 graphisch dar. Neben den zentralen Kollektivgrößen Bauspareinlagen, Bauspardarlehen und Zuteilungsmasse zählen hierzu auch Guthabenauszahlungen nach Zuteilung, Tilgungsbeiträge sowie die Bausparsumme der Darlehensverzichter.

Vor der Analyse der Simulationsergebnisse drängt sich zunächst die Frage nach deren Signifikanz bei der gegebenen Anzahl von 1000 Szenariosimulationen auf. Generell sind bei Monte-Carlo-Simulationen mehr als 10.000 Szenariosimulationen zur Erzielung einer hohen Ergebnissignifikanz nicht unüblich (vgl. z. B. [Sey00]). Da wir für eine einzige Szenariosimulation aber ca. 6 Minuten an CPU-Zeit benötigen, kommt eine solch hohe Anzahl auf Grund des zu hohen Rechenaufwands nicht in Betracht, so dass wir Einbußen bei der Signifikanz der Resultate in Kauf nehmen müssen.

Betrachten wir die in Abbildung 6.6 dargestellten Erwartungswerte und Quantile, so

können wir anhand der Szenarienanzahl Konfidenzintervalle für jeden einzelnen Wert zur Fehlerabschätzung berechnen [HEK93]. Um einen Eindruck von der Größenordnung der zu erwartenden Fehler bei der gegebenen Anzahl Szenarien zu bekommen, führen wir eine solche Untersuchung exemplarisch für den Erwartungswert sowie die Quantile der Verteilung der simulierten Bauspareinlagen im Jahr 2003 durch, indem wir die Breite der 90%-Konfidenzintervalle der einzelnen Größen relativ zu dieser Größe selbst bestimmen. Die entsprechenden Resultate finden sich in Tabelle 6.1.

Wir können der Tabelle beispielsweise entnehmen, dass der wahre Erwartungswert mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit weniger als 1,44% von dessen empirischem Schätzwert abweicht. Mit deutlich höheren Fehlern ist bei den äußeren Quantilen zu rechnen. Für das 99,5%-Quantil erhalten wir hier auf Grund der hohen Bezugsgröße ein Intervall der absoluten Gesamtbreite von annähernd 470 Mio. Euro.

Insgesamt erzielen wir bei den simulierten 1000 Szenarien eine – mit Einschränkungen – akzeptable Signifikanz für die aus der empirischen Verteilung bestimmten Quantile und Erwartungswerte.

Wir wenden uns nun wieder den übrigen Resultaten der Ex-Post-Simulation zu. Da die verschiedenen Kollektivgrößen unterschiedlich schnell und stark auf das jeweilige Szenario reagieren, sind zumindest zu Simulationsbeginn reale Werte deutlich außerhalb der Konfidenzintervalle möglich und im Wesentlichen auf die mit der Modellierung des Kollektivs verbundene Vergrößerung zurückzuführen. So spannen z. B. die in Abbildung 6.6 dargestellten Quantile der Guthabenauszahlungen nach Zuteilung im kurzfristigen Bereich nur ein vergleichsweise schmales Konfidenzintervall auf, dessen Gestalt zunächst den Guthabenauszahlungen nach Zuteilung in der Backtest-Simulation (vgl. Abschnitt 6.2.1, Abbildung 6.4) entspricht. Da diese Größe hauptsächlich durch die Zuteilung beeinflusst wird, die wiederum nur vom Neugeschäftsszenario mit erheblicher Verzögerung durch die Sparphase abhängt, können die realen Werte anfangs nur dann im Konfidenzintervall liegen, wenn diese auch in der Backtest-Simulation sehr genau getroffen werden. Die dennoch auftretenden, relativ schwachen Schwankungen dieser Größe sind durch die unterschiedlichen Auszahlungsverschiebe der Darlehensnehmer und -verzichter verursacht.

Abgesehen von diesen erklärbaren Abweichungen belegen die in der Abbildung 6.6 dargestellten Resultate, dass das Modell die real eingetretene Kollektiventwicklung insbesondere bei den wichtigen Größen Bauspareinlagen, -darlehen und Zuteilungsmasse als durchaus wahrscheinlich ansieht, was das Gesamtmodell einschließlich seiner Parameter als geeignet erscheinen lässt.

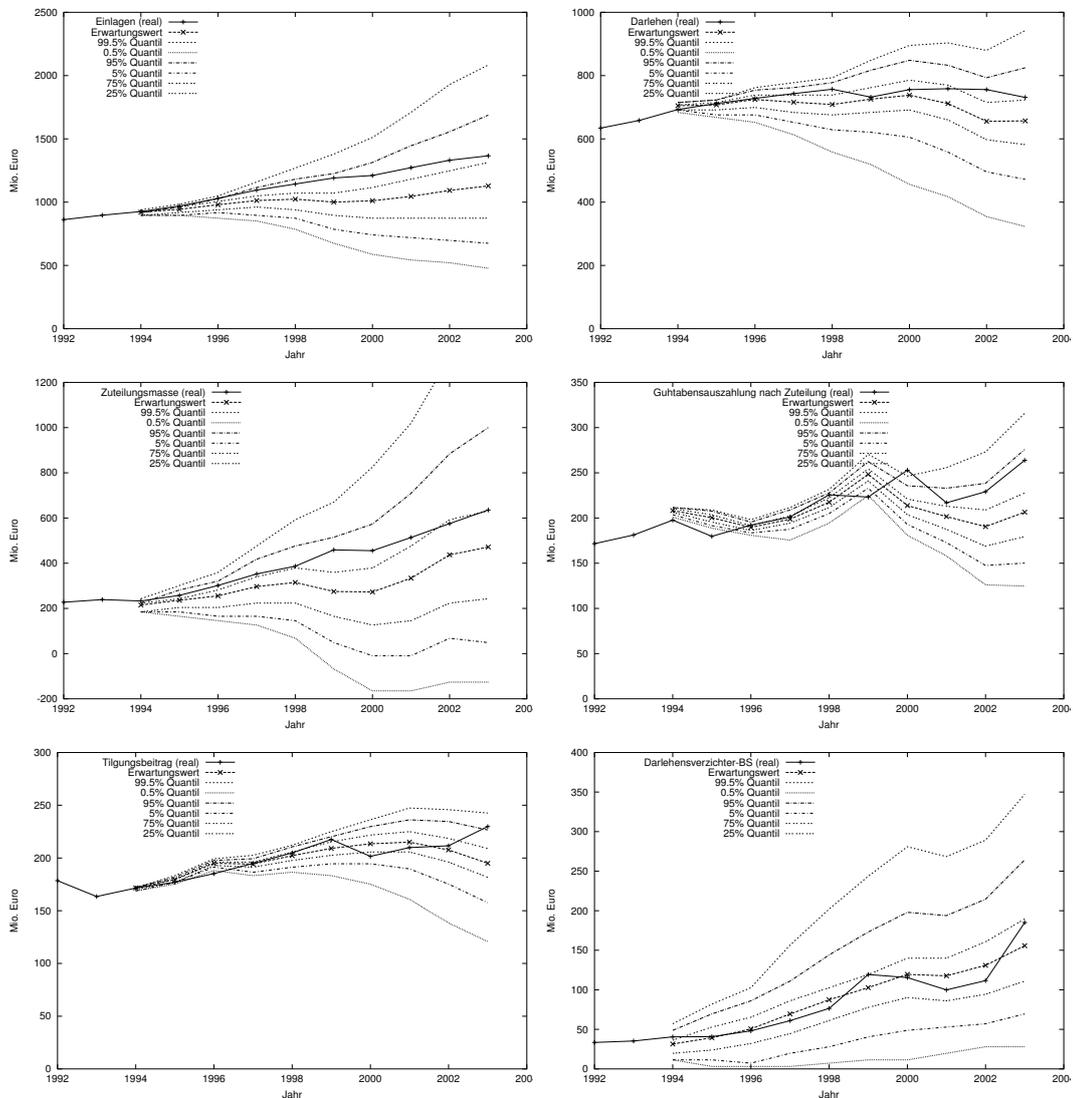


Abbildung 6.6: Resultate der Ex-Post-Simulation: In jeder Graphik ist der reale Verlauf jeweils einer Kollektivgröße, die 0,5%-, 5%-, 25%-, 75%-, 95%-, 99,5%-Quantile sowie der Erwartungswert der empirischen Verteilung derselben Größe abgebildet, die aus den Simulationsergebnissen bestimmt wurde. In der Reihenfolge von links oben nach rechts unten sind (Bauspar-)Einlagen, (Bauspar-)Darlehen, Zuteilungsmasse, Guthabenauszahlung nach Zuteilung, Tilgungsbeitrag und Darlehensverzichter-Bausparsumme dargestellt.

6.3 Anwendung des Modells

6.3.1 Parametrisierung

Wir setzen das Modell nun zur Simulation zukünftiger Kollektiventwicklungen ein und bilden den Bestand zum 31.12.2003. Hierbei verwenden wir die innerhalb des Abschnitts 6.2 ermittelten $n = 7$ Sparklassen sowie $m = 17$ Bewertungszahlklassen. Ebenso verwenden wir als Parameter für das Zinsmodell auch hier wieder die über die Jahre 1991 bis 2001 mit der Martingal-Schätzfunktion ermittelten Parameter (s. Abschnitt 4.2.4, Tabelle 4.3). Anders als in Abschnitt 6.2 berechnen wir Aktions- und Neugeschäftsanteile sowie Verschiebe aber über einen jüngeren Zeitraum, nämlich über die Jahre 2000 bis 2003, um auf diese Weise aktuellere Verhaltensweisen in der Simulation zu reproduzieren. Mit diesen Parametern führen wir nun 1000 Szenariosimulationen über den Zeitraum vom 1.1.2004 bis zum 31.12.2099 durch.

In Abbildung 6.7 sind die Quantile und Erwartungswerte der aus den generierten Szenarien bestimmten empirischen Verteilungen der g_t , h_t und des Neugeschäfts sowie deren historische Realwerte dargestellt. Den Verteilungen der g_t und h_t in der Abbildung ist deutlich zu entnehmen, dass das Zinsmodell bei den gegebenen Parametern eine Fortschreibung der Niedrigzinsphase erwartet. Wie sich dies bei der Verwendung anderer Parameter ändert und welche Auswirkungen sich hieraus auf die Ergebnisse des Gesamtkollektivs ergeben, wird in Abschnitt 6.4.2 untersucht.

Das Neugeschäftsmodell liefert einen gleichmäßig ansteigenden Erwartungswert für die Neugeschäftshöhe. Auch die Streuung dieser Größe steigt im Zeitverlauf an, während sich die der Vergleichszinsen ungefähr ab dem Jahr 2010 stabilisiert. Die Auswirkungen dieses Umstands auf die Simulationsergebnisse werden in Abschnitt 6.4.1 einer genaueren Untersuchung unterzogen.

6.3.2 Anwendungsergebnisse

Aus den Einzelergebnissen der Szenariosimulationen müssen nun noch Verteilungen der Kollektivgrößen bzw. Kennzahlen berechnet werden, die für die in Abschnitt 2.3 genannten Einsatzzwecke relevant sind. Die Resultate sind in den Abbildungen 6.8 und 6.9 sowie den nachfolgenden Unterabschnitten dargestellt, wobei in den einzelnen Abbildungen größtenteils neben den historischen Kollektivgrößen auch der Erwartungswert der entsprechenden Größe sowie verschiedene Quantile gezeigt werden, um die Verteilungseigenschaften zu visualisieren. Wie schon bei der Abbildung der Resultate der Ex-Post-Simulation in Abbildung 6.6, Abschnitt 6.2.2 sind jeweils die 0,5%-, 5%-, 25%-, 75%-, 95%- und 99,5%-Quantile zu sehen. Wir beschränken uns bei der Abbildung der einzelnen Kollektivgrößen der Übersichtlichkeit halber auf die ersten 20 simulierten Jahre.

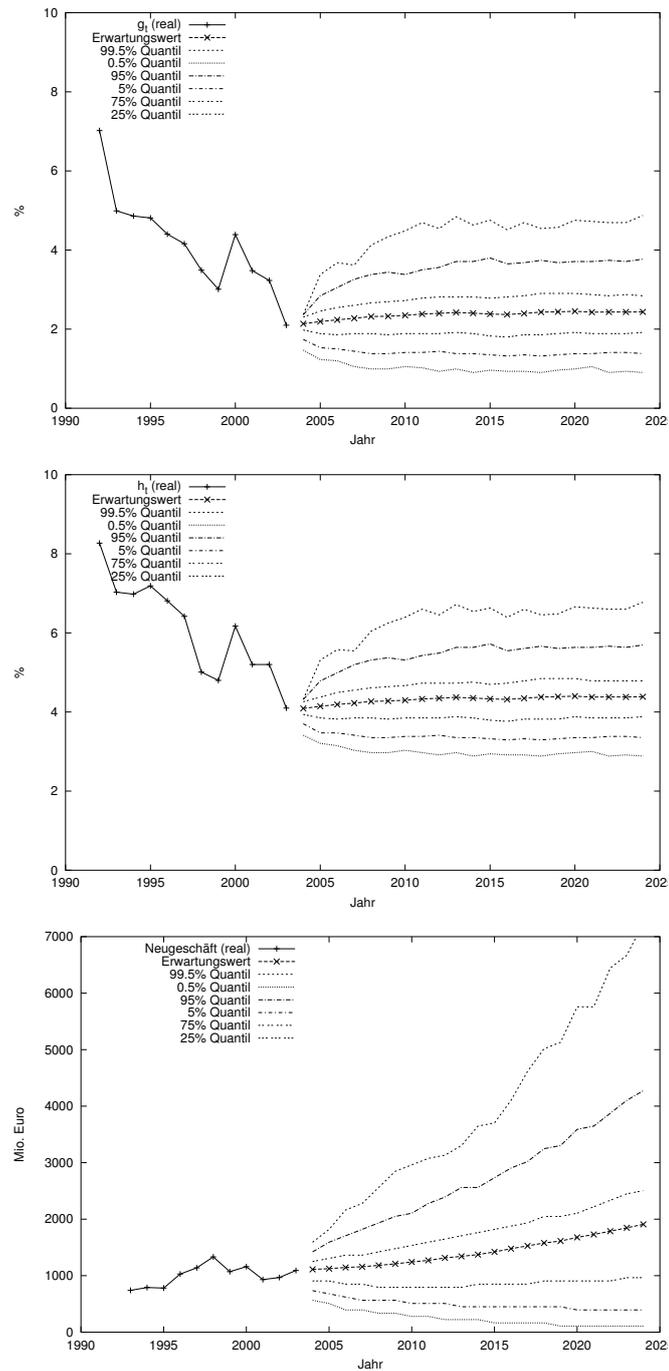


Abbildung 6.7: Verteilung der Szenariogrößen bei Anwendung: Jeweils dargestellt sind historische Realwerte sowie Erwartungswerte und Quantile der empirischen Verteilungen der Szenariogrößen. Von oben nach unten sind die entsprechenden Größen der Vergleichszinsen g_t und h_t sowie der Neugeschäftshöhe abgebildet.

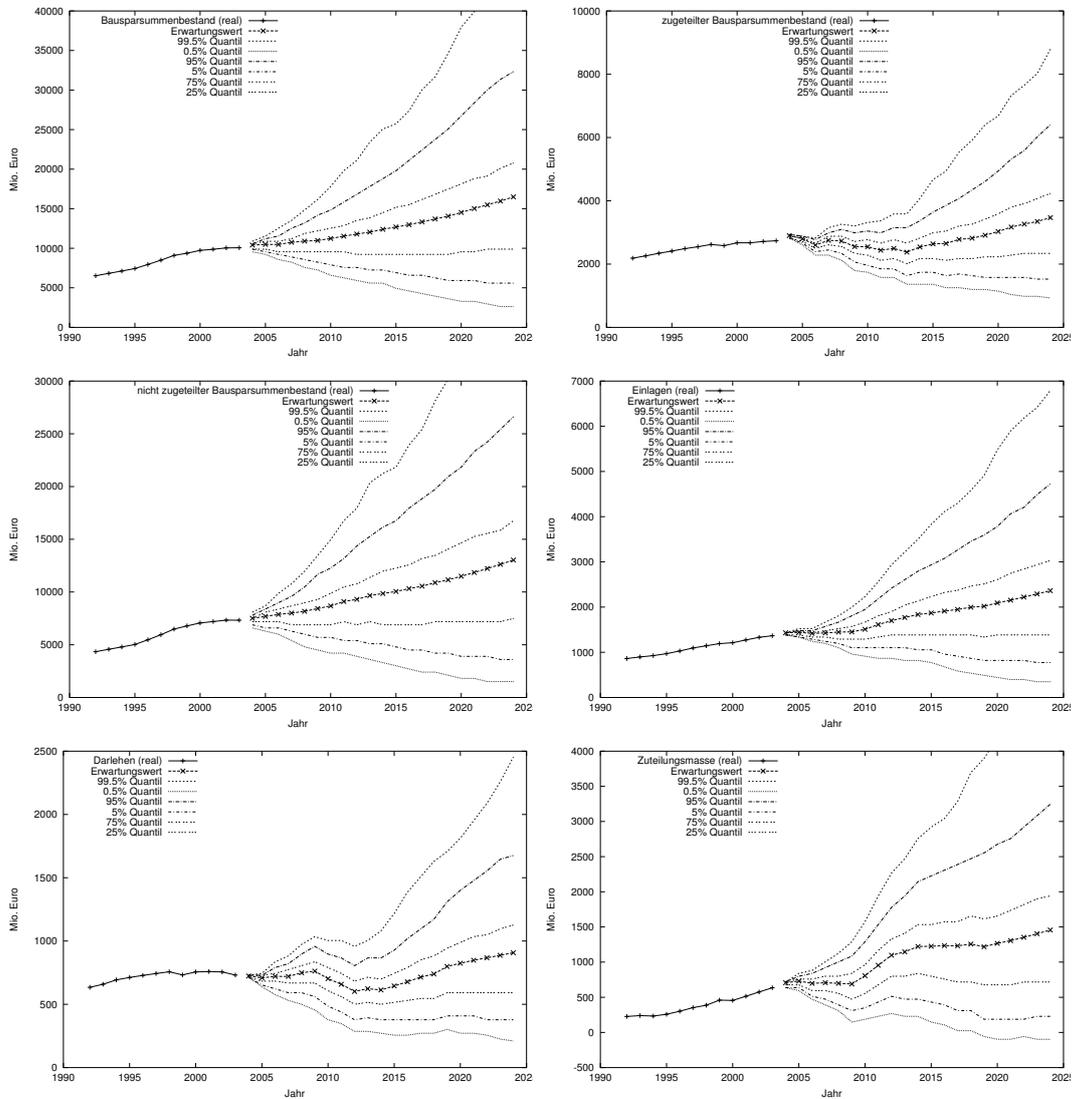


Abbildung 6.8: Anwendungsergebnisse (a): Von links oben nach rechts unten sind die historischen Realwerte, Quantile und Erwartungswerte des gesamten Bausparsummenbestands, des zugeteilten Bausparsummenbestands, des nicht zugeteilten Bausparsummenbestands, der (Bauspar-) Einlagen, der (Bauspar-) Darlehen sowie der Zuteilungsmasse dargestellt.

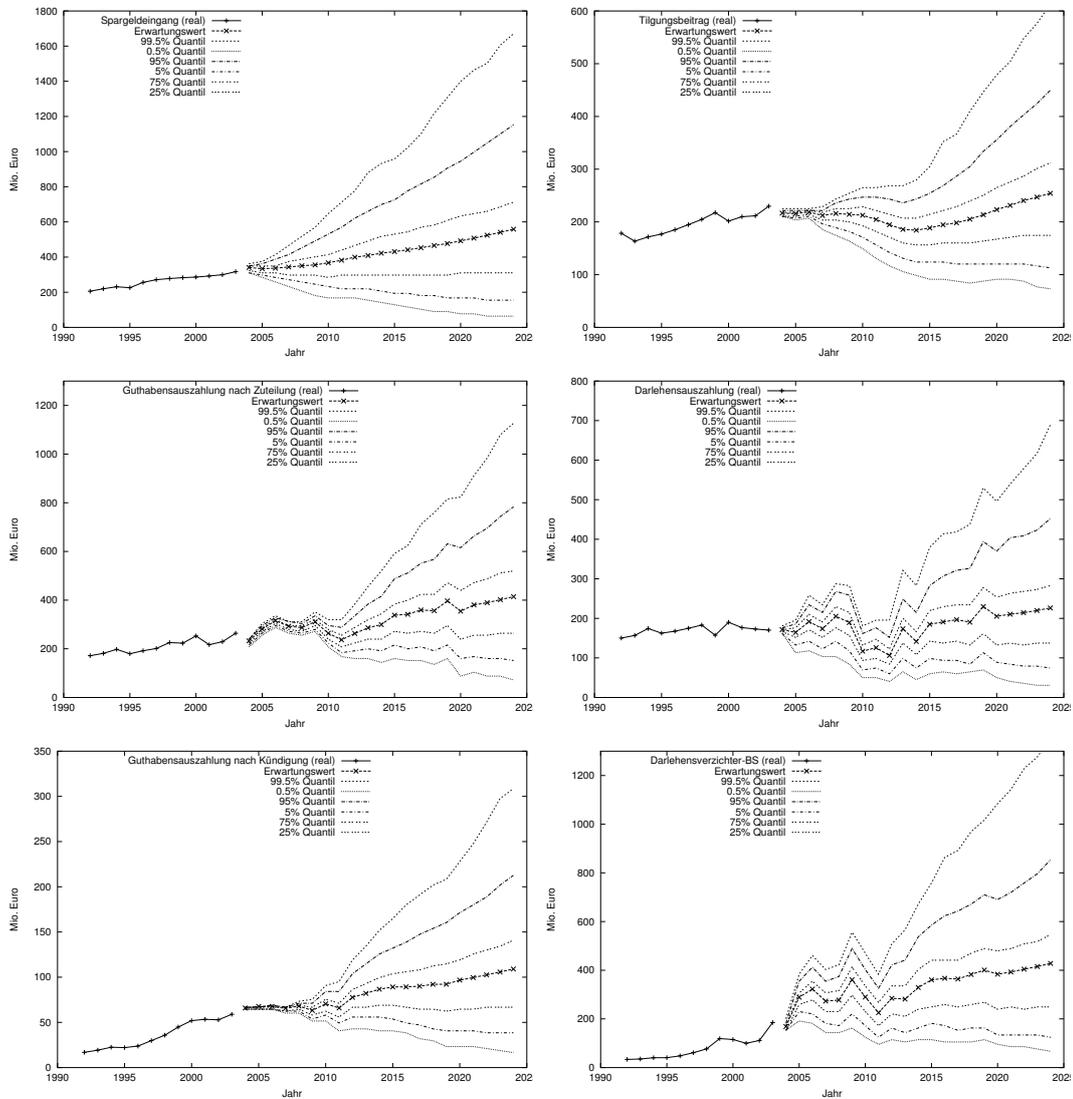


Abbildung 6.9: Anwendungsresultate (b): Von links oben nach rechts unten sind die historischen Realwerte, Quantile und Erwartungswerte des Spargeldeingangs, des Tilgungsbeitrags, der Guthabenauszahlung nach Zuteilung, der Darlehensauszahlung, der Guthabenauszahlung nach Kündigung sowie der Bausparsumme der Darlehensverzichter dargestellt.

Erwartungsgemäß finden wir für die meisten Kollektivgrößen langsam ansteigende Erwartungswerte vor, die mit dem erwarteten Anstieg des Neugeschäfts zu erklären sind. Schwankungen der Quantile im kurz- und mittelfristigen Bereich resultieren primär aus der Bestandsabwicklung, die ungefähr ab dem Jahr 2020 keine nennenswerte Rolle mehr spielt. Da außer der Zuteilungsmasse alle dargestellten Kollektivgrößen positiv und nach oben unbeschränkt sind, haben alle Verteilungen eine mehr oder weniger ausgeprägte „fat-tail“-Gestalt, wie sie in der Ökonomie häufig zu finden ist.

Wie bereits in Abschnitt 6.2.2 ausgeführt, sind die verschiedenen Größen unterschiedlich stark und mit unterschiedlich langen Verschieben abhängig vom jeweiligen Szenario. Daher dominiert die Bestandsabwicklung bei Größen mit langen Wirkungsverschieben, so dass die Konfidenzintervalle recht eng sein können und sich erst nach der allmählichen Abwicklung des Bestands weiten (z. B. Guthabenauszahlungen nach Zuteilung sowie nach Kündigung). Andere Größen reagieren trotz starker Abhängigkeit vom Bestand unmittelbar auf das jeweilige Szenario (z. B. Darlehensauszahlungen), so dass wir breite Konfidenzintervalle erhalten, die aber von ihrem Niveau im kurz- und mittelfristigen Bereich vom Bestand her bestimmt werden.

Insgesamt erscheinen die Simulationsresultate recht plausibel und konsistent, so dass wir sie nun im Hinblick auf einige der in Abschnitt 2.3 angesprochene Einsatzzwecke verwenden können.

Kollektiver Barwert

In Abbildung 6.10 ist die vom Modell ermittelte Verteilung des Barwerts dargestellt (s. Abschnitt 2.3.2). Hierfür wurden zunächst für jedes Jahr von 2004 bis einschließlich 2009 die saldierten Zahlungsströme ermittelt und mit der vom Zinsmodell errechneten aktuellen Zinsstruktur² zum 31.12.2003 diskontiert. Zahlungen nach dem Jahr 2009 werden vernachlässigt, da diese auf Grund der starken Diskontierung nicht mehr nennenswert ins Gewicht fallen.³ Hierbei berechnet sich der Zahlungsstrom z_t des Jahres t wie folgt:

$$\begin{aligned}
 z_t = & \text{(brutto) Spargeld des Jahres } t \\
 & + \text{Tilgungsbeitrag des Jahres } t \\
 & - \text{Auszahlung gekündigter Bauspareinlagen des Jahres } t \\
 & - \text{Auszahlung Bauspareinlagen nach Zuteilung des Jahres } t \\
 & - \text{Auszahlung Bauspardarlehen des Jahres } t
 \end{aligned}$$

In den jeweiligen Auszahlungen sind auch die angefallenen Zinsen enthalten.

Einschränkend muss zu dieser Berechnungsweise allerdings gesagt werden, dass alle

²Entsprechende Zeitreihen der Bundesbank enthalten nur die Zinsstruktur für Laufzeiten bis zehn Jahre und können daher nicht sinnvoll verwendet werden.

³Prinzipiell lassen sich auch andere Annahmen für die nach 2009 anfallenden Zahlungen treffen, z. B. eine Rückzahlung des gesamten Einlagen- und Darlehensbestand zu diesem Zeitpunkt.

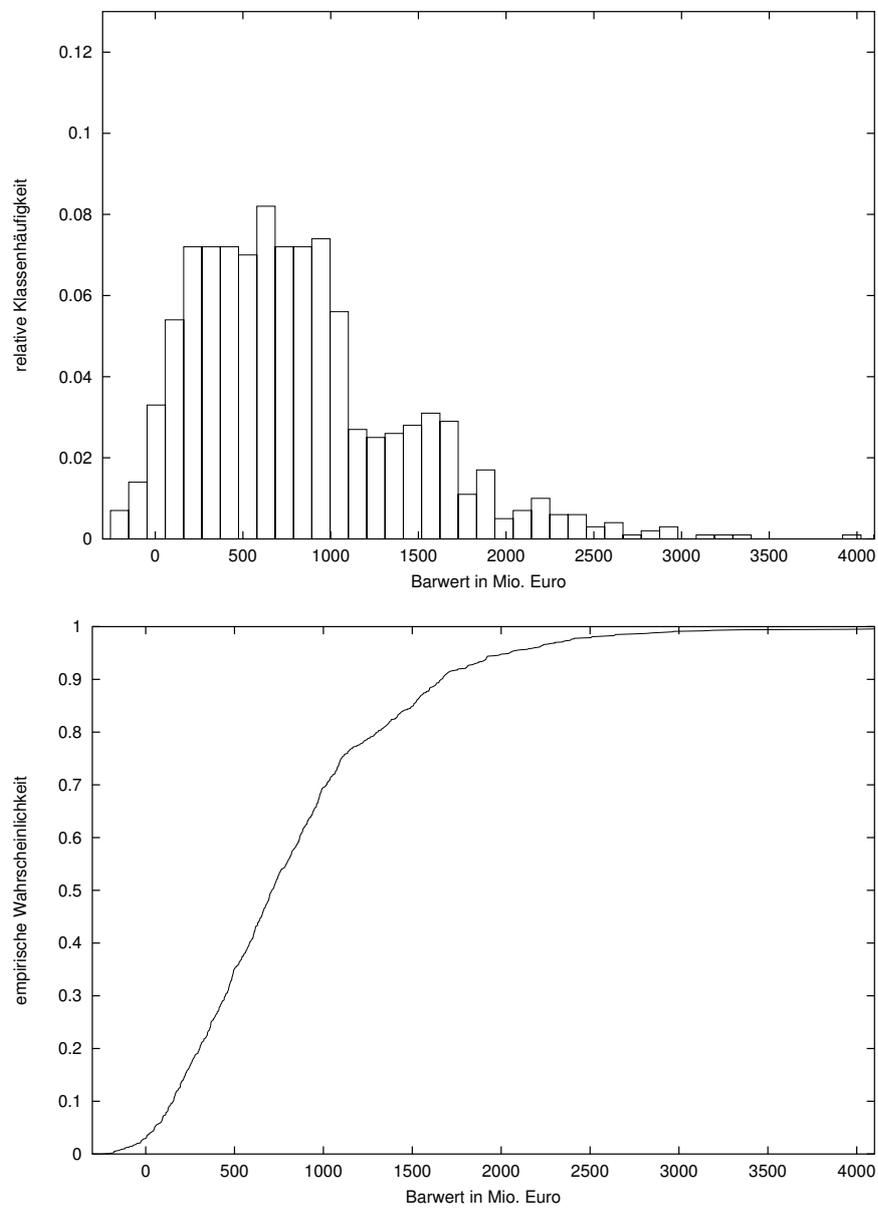


Abbildung 6.10: Kollektivbarwertverteilung der Anwendungsergebnisse. Oben: Histogramm des kollektiven Barwerts, unten: empirische Verteilung des kollektiven Barwerts.

über die reinen Zinsaufwendungen für die Bauspareinlagen hinausgehenden Kosten, wie z. B. Vertriebs- und Verwaltungskosten, einbezogen werden. Zur Bestimmung einer minimalen Risikodeckungskapitalausstattung müsste zudem auch der Barwert der außerkollektiv angelegten Zuteilungsmasse berücksichtigt werden.

Der empirischen Verteilung des Barwerts lässt sich entnehmen, dass der kollektive Barwert mit 97%-iger Wahrscheinlichkeit positiv ist. Das Resultat ist bei Betrachtung der Verteilungen der übrigen Kollektivgrößen und der Tarifparameter wenig verwunderlich. Da die Zuteilungsmasse mit hoher Wahrscheinlichkeit steigt, müssen auch die Zahlungssalden überwiegend positiv sein. Zu einem positiven Barwert trägt außerdem bei, dass die Guthaben durch die Zinsstruktur stärker abgezinst als tariflich aufgezinst werden. Hinzu kommt, dass im mittelfristigen Bereich die Zinsstruktur unter dem tariflichen (effektiven) Darlehenszins liegt. Im längerfristigen Bereich bewegt sich die Zinsstruktur zwar darüber, da aber die vergleichbaren Marktzinsen in den meisten Szenarien unterhalb der Vorteilhaftigkeitsgrenze liegen, bleibt der Darlehensbestand relativ zum Guthabenbestand auf Grund vieler Darlehensverzichte und Sondertilgungen gering.

Betrachtet man das Szenario, welches den geringsten Kollektivbarwert liefert, so ist dieses hauptsächlich von einem kurz- und mittelfristig stark einbrechenden Neugeschäft geprägt, wodurch es insbesondere auf Grund von Guthabenauszahlungen und geringen Sparzahlungen zu negativen Zahlungsströmen kommt, während die Darlehensauszahlungen wegen anziehender Vergleichszinsen und der Trägheit des Bestands zunächst stabil bleiben.

Bei einem Kollektiv, das nicht ausschließlich aus Verträgen eines Finanzierertarifs besteht, sondern aus Verträgen der Hochzinsvariante eines Optionstarifs, würde sich wohl das umgekehrte Bild ergeben: Höhere Verzinsung des Guthabens als Abzinsung durch die Zinsstruktur und praktisch kein Darlehensbestand müssten mit hoher Wahrscheinlichkeit zu negativen Barwerten führen.

Kollektive Liquidität

Für die kollektive Liquidität, deren Prognose derzeit den Einsatzschwerpunkt von Kollektivsimulationen darstellt, ist die Bewegung der Zuteilungsmasse von entscheidender Bedeutung. Wie in Abschnitt 2.3.1 zum Liquiditätsrisiko dargelegt, können wir mit Hilfe der Verteilung der Zuteilungsmasse für jeden Zeitpunkt einen Mindestbetrag nennen, der mit einer bestimmten, vorzugebenden Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten wird. In Abbildung 6.11 sind die unteren Quantile der Zuteilungsmasse nochmals in höherem Detaillierungsgrad als in Abbildung 6.8 dargestellt. Zusätzlich sind die „modellbasierten freien Bausparguthaben“ (s. Tabelle 2.1, Abschnitt 2.3.1) abgebildet, die sich ergeben, wenn man eine einzelne Szenariosimulation durchführt, wobei als Szenario für jedes Jahr der Erwartungswert der Neugeschäftshöhe, der g_t und h_t fest vorgegeben wird (s. Abbildung 6.7).

Die Simulationsergebnisse lassen sich beispielsweise so interpretieren, dass die Bau-

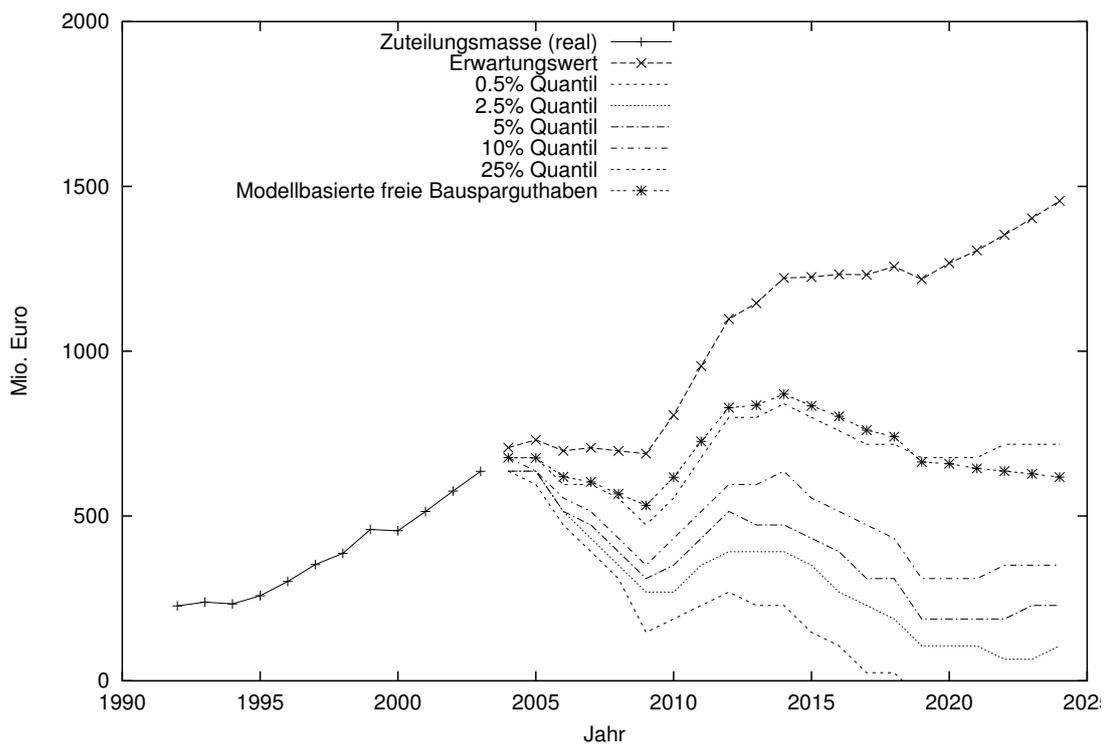


Abbildung 6.11: Historische Realwerte, Erwartungswerte und (untere) Verteilungsquantile der Zuteilungsmasse. Zusätzlich eingetragen sind die gemäß Meldeformular (vgl. Tabelle 2.1, Abschnitt 2.3.1) berechneten modellbasierten freien Guthaben.

sparkasse zu Simulationsbeginn bis 2009 und einige Jahre darüber hinaus bis zu 350 Mio. Euro aus der Zuteilungsmasse fest anlegen kann und hierbei mit 90%-iger Sicherheit keine Zwischenfinanzierung benötigen wird.

Nach Tabelle 2.1, Abschnitt 2.3.1 könnte die Bausparkasse sogar 532 Mio. Euro anlegen, was näherungsweise einer 75%-igen Sicherheit entspricht. Diese Grenze kann sich aber alleine dadurch verschieben, dass ein anderes Einzelszenario als das obige gewählt wird. Ebenfalls zu berücksichtigen ist, dass bei einer gemäß Meldeblatt durchgeführten Berechnung mit den Simulationsresultaten eines vollständigen, realen Kollektivs sicherlich eine höhere Sicherheit erreicht würde, da in der Hochzinsvariante eines Optionstarifs von einer deutlich stabileren Zuteilungsmasse als in einem Finanzierertarif ausgegangen werden kann.

Zinsaufwendungen und -erträge

Für die Rentabilität und damit das Ertragsrisiko einer Bausparkasse stellen die kollektiven Zinsaufwendungen und -erträge zentrale Komponenten dar. Die Verteilungen dieser beiden Größen sowie ihrer Differenz sind in Abbildung 6.12 dargestellt.

Da die Bausparkasse im Kollektiv mit großer Wahrscheinlichkeit wegen der hohen Zuteilungsmasse keinen positiven Zinsüberschuss erwirtschaften kann, sind zur Gewinnerzielung die Zinserträge aus der außerkollektiven Anlage der Zuteilungsmasse von großer Bedeutung.

Durch zusätzliche Modellierung und Simulation einer Anlagestrategie für den außerkollektiven Bereich sowie Berücksichtigung weiterer Aufwendungen und Erträge lässt sich mit dem Modell auch eine Verteilung für die künftigen Gewinne und Verluste der Bausparkasse insgesamt unter der gewählten Anlagestrategie ermitteln (s. Abschnitt 2.3.4). Eine mögliche Strategie wäre z. B. die Anlage der für jedes einzelne Szenario bekannten „modellbasierten freien Bausparguthaben“ als VK/ZK mit langer Laufzeit und eine kurzfristige Anlage des „Sicherheitspuffers“ am Kapitalmarkt. Die entsprechenden Marktzinssätze sind jeweils durch das in der Einzelsimulation verwendete Zinsszenario zu jedem Zeitpunkt gegeben bzw. sollten sich hieraus leicht durch Berücksichtigung von Zinsstruktur und Marge berechnen lassen. Damit würde auch implizit das Zinsänderungsrisiko miterfasst.

6.4 Sensitivitätsanalyse

Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse befassen wir uns mit der Frage, inwieweit das Resultat des Gesamtmodells von seinen Teilmodellen bzw. der Parametrisierung dieser Teilmodelle abhängt.

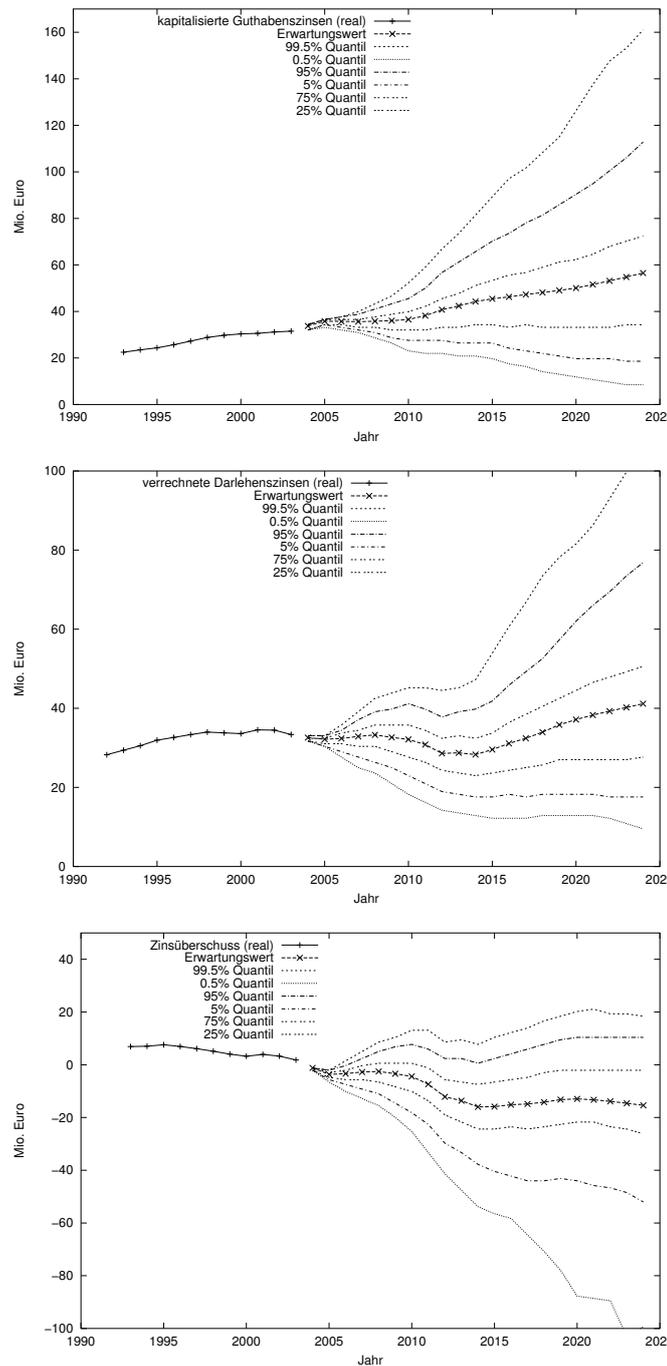


Abbildung 6.12: Kapitalisierte und verrechnete Zinsen der Anwendung: Abgebildet sind historische Realwerte, Erwartungswerte und Verteilungsquantile der (von oben nach unten) kapitalisierten Guthabenzinsen, verrechneten Darlehenszinsen und des als Differenz hieraus bestimmten Zinsüberschusses.

6.4.1 Simulation mit fixem Teilszenario

Wie bereits bei der Darstellung der Ergebnisse der Ex-Post-Simulation in Abschnitt 6.2.2 gesehen, reagieren unterschiedliche Kollektivgrößen unterschiedlich stark und unterschiedlich schnell auf verschiedene Szenarien. So können wir bei sämtlichen in der Sparphase erfassten Kollektivgrößen wie z. B. Guthabenauszahlungen erwarten, dass deren Schwankungen primär auf die Neugeschäftsszenarien zurückgeführt werden können. Bei der Darlehensverzichter-Bausparsumme sowie den Tilgungsbeiträgen beispielsweise ist zumindest im kurz- und mittelfristigen Bereich alleine das jeweilige Zinsszenario relevant, ehe langfristig mit steigender Zuteilung aus dem simulierten Neugeschäft auch das Neugeschäftsszenario als weitere Einflussgröße hinzukommt.

Wissen wir, wie schnell und wie deutlich sich ein Teil-Szenario auf welche Kollektivgröße auswirkt, lassen sich bestimmte simulierte Kollektiventwicklungen leichter der Wirkung eines bestimmten Teilmodells zuordnen und auch die Auswirkungen variiert Modellparameter auf die Simulationsresultate besser abschätzen. Zu diesem Zweck wiederholen wir die im vorhergehenden Abschnitt 6.3 durchgeführte Monte-Carlo-Simulation, wobei wir aber zum einen nur die Neugeschäftsszenarien generieren lassen und das Zinsszenario konstant halten, zum anderen die Neugeschäftshöhe konstant halten und nur die Zinsszenarien generieren lassen. Auf diese Weise können wir eine Überlagerung der Stochastik der beiden Teilmodelle ausschließen.

In der Abbildung 6.13 sind die Resultate der beiden Monte-Carlo-Simulationen zu Vergleichszwecken gegenübergestellt. Zur besseren Übersicht beschränken wir uns hierbei auf die Verteilungen der bedeutendsten Kollektivgrößen Bauspareinlagen, -darlehen und Zuteilungsmasse.

Erwartungsgemäß ist der Einfluss des Zinsmodells auf die Streuung der Bauspareinlagen minimal und nur darauf zurückzuführen, dass im Modell unterschiedliche Guthabenauszahlungsverschiebe für Darlehensverzichter und Darlehensnehmer verwendet werden. Die Streuung der Bauspareinlagen und aller übrigen Kollektivgrößen mit Einfluss auf diese kann damit dem Neugeschäftsmodell zugeordnet werden.

Umkehrt werden die Streuungen der Darlehen sowie der unmittelbar hierauf wirkenden Kollektivgrößen im kurz- und mittelfristigen Bereich vom Zinsmodell bestimmt. Erst nach einem Verschiebung von ca. sechs Jahren kommt langsam sichtbar der Einfluss des Neugeschäftsmodells durch Darlehensauszahlungen simulierter Neugeschäftsjahrgänge hinzu und ist bei langem Simulationshorizont sogar hauptsächlich für die starke Streuung verantwortlich.

Als Differenz zwischen Bauspareinlagen und -darlehen orientiert sich die Verteilung der Zuteilungsmasse damit offenbar bei fixem Neugeschäftsszenario an der Verteilung der Bauspardarlehen, bei fixem Zinsszenario an der der Bauspareinlagen. Entsprechend erklärt sich die Streuung der Zuteilungsmasse kurz- und mittelfristig zu ähnlichen Teilen aus Zins- und Neugeschäftsmodell, langfristig jedoch wird die Streuung hauptsächlich durch das Neugeschäftsmodell bestimmt, da dieses dann sowohl über die Bauspareinlagen als auch über die Darlehen auf die Zuteilungsmasse einwirkt.

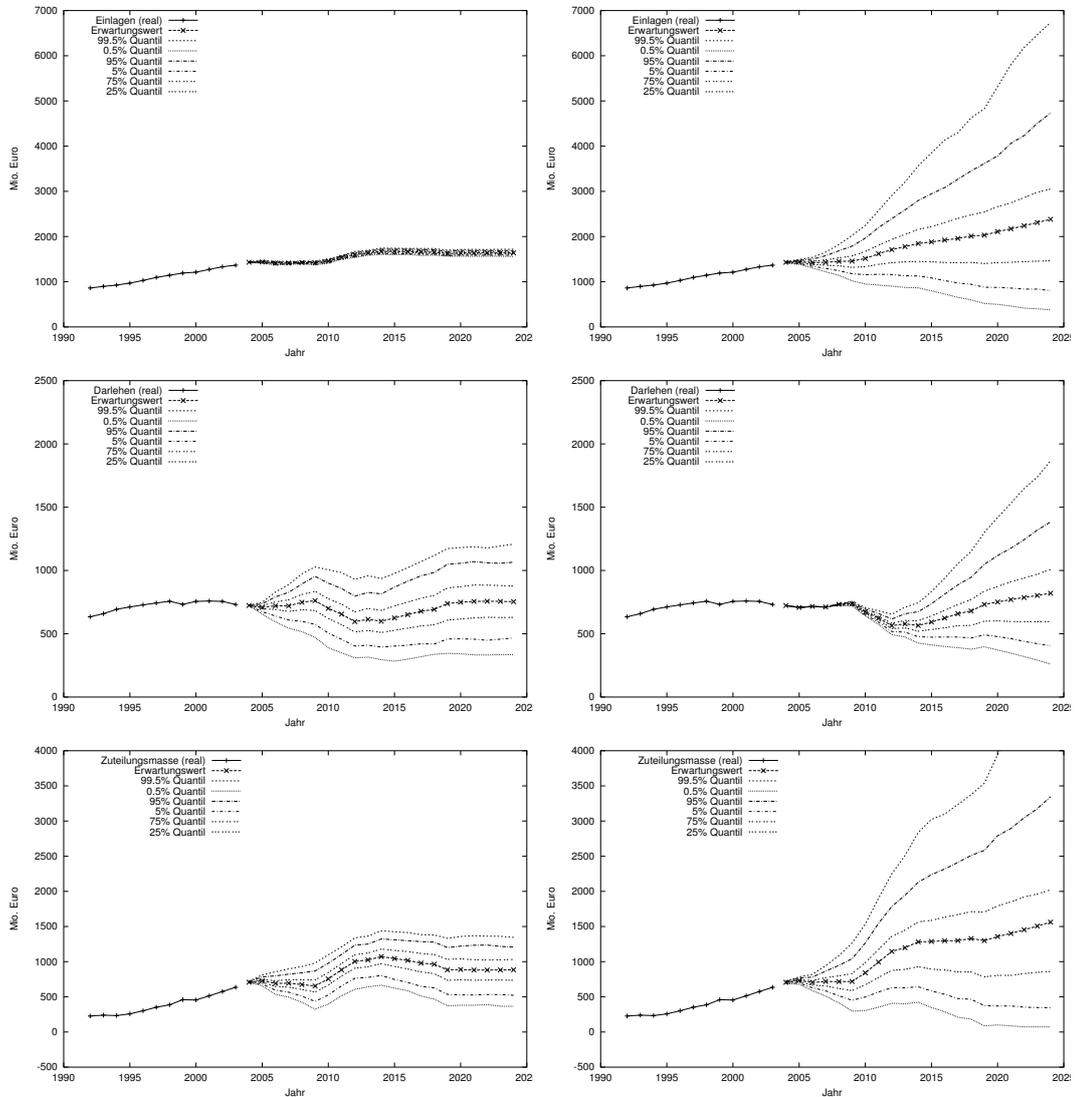


Abbildung 6.13: Resultatvergleich bei fixen Teilszenarien: Auf der linken Seite sind die Resultate der Simulation bei fixem Neugeschäftsszenario, auf der rechten Seite die Ergebnisse bei fixem Zinsszenario dargestellt. Jeweils abgebildet sind sowohl die historischen Realwerte, als auch Quantile und Erwartungswerte der aus den Einzelergebnissen ermittelten Verteilungen. Von oben nach unten sind die Bauspareinlagen, -darlehen und die Zuteilungsmasse zu sehen.

Allgemein können wir für das Modell feststellen, dass bei längerem Simulationshorizont die sich bei allen ermittelten Kollektivgrößen ergebende hohe und weiter ansteigende Varianz aus dem Neugeschäftsmodell resultiert. So wird bei Kollektivgrößen, die sich der Darlehensphase zuordnen lassen, die vom Zinsmodell hervorgerufene Streuung nach spätestens 16 bis 18 Jahren durch die Streuung des Neugeschäftsmodells übertroffen.

Dieser Effekt ist leicht dadurch zu erklären, dass das Neugeschäftsszenario durch einen stochastischen Prozess modelliert wird, dessen Varianz im Zeitverlauf ansteigt, während das Zinsmodell auf einem Prozess basiert, dessen Varianz auf Grund der Mean-Reversion-Eigenschaft konvergiert. Diese Eigenschaft wird durch den Verlauf der Quantile der Verteilung der Vergleichszinsen und der Neugeschäftshöhe in Abbildung 6.7 gut veranschaulicht.

6.4.2 Parametrisierung des Zinsmodells

Die in Abschnitt 4.2.4 beschriebene Bestimmung der CIR-Parameter zeigt, dass je nach Zeitraum, über den die Datengrundlage für die Schätzung der Parameter erhoben wird, sich die geschätzten Parameter deutlich unterscheiden können (s. Abschnitt 4.2.4, Tabellen 4.2 und 4.3). Für die Interpretation und Beurteilung der Simulationsresultate des Gesamtmodells ist somit von Interesse, inwieweit die Ergebnisse von der Wahl dieses Zeitraums abhängen.

Wir führen daher erneut eine Monte-Carlo-Simulation mit denselben Parametern wie in Abschnitt 6.3 durch, wählen aber dazu abweichend als Parameter für das CIR-Modell die auf den Daten des Zeitraums 1975 bis 2001 mit der Martingal-Schätzfunktion berechneten Werte. In den Abbildungen 6.14 bis 6.16 sind einige Ausgabegrößen dieser Simulation den entsprechenden Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation aus Abschnitt 6.3 gegenübergestellt. Neben den Erwartungswerten und Quantilen der Vergleichszinsverteilungen sind auch einige der besonders zinsabhängigen Kollektivgrößen abgebildet.

Bei Betrachtung der Zinsszenario-Verteilungen wird bereits ersichtlich, dass die neuen Parameter Szenarien mit deutlich höherem Zinsniveau erzeugen. Betrachtet man reale Zinszeitreihen vor 1991, so lässt sich im Mittel tatsächlich ein höheres Zinsniveau feststellen, das zudem von höherer Volatilität geprägt ist als ab 1991. Die höhere Volatilität schlägt sich insbesondere in einem über doppelt so hohem $\hat{\sigma}$ nieder, das grundsätzlich höhere Zinsniveau in einem ebenso deutlich stärkeren $\hat{\Theta}$ (vgl. Tabelle 4.3, Abschnitt 4.2.4). Damit erscheinen die höheren Erwartungswerte für die generierten Vergleichszinsen als auch deren höhere Varianz plausibel.

Das in den Szenarien höhere Zinsniveau führt erwartungsgemäß zu deutlich weniger Darlehensverzichten und damit zu höheren Darlehensbeständen sowie zu einer niedri-

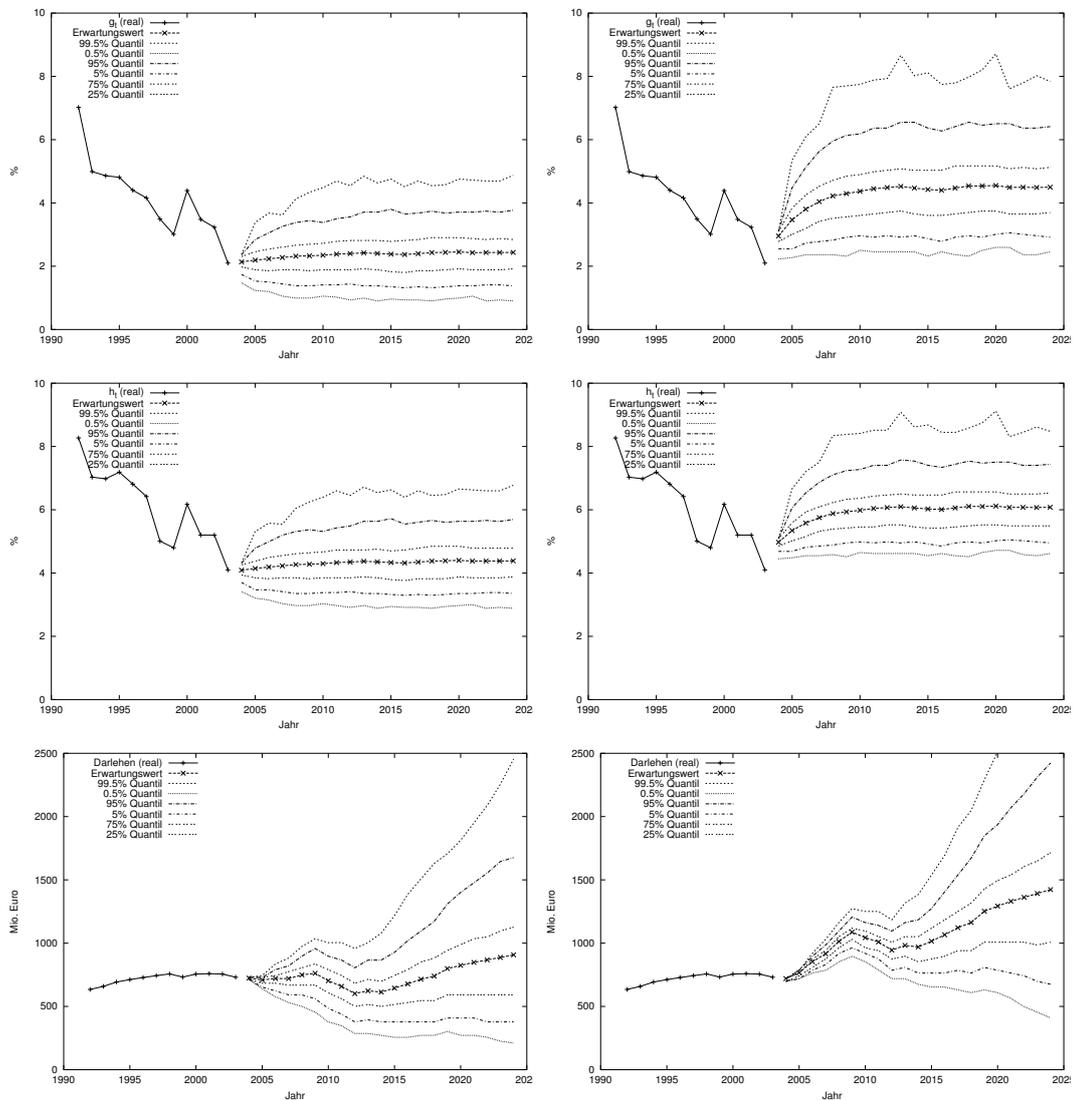


Abbildung 6.14: Resultatvergleich bei variierten Zinsmodellparametern (a): Jeweils dargestellt sind historische Realwerte, Erwartungswerte und Verteilungsquantile. Von oben nach unten sind zunächst die entsprechenden Größen der vom Zinsmodell generierten Vergleichszinsen g_t und h_t abgebildet, ganz unten sind die Ergebnisse für die Bauspardarlehen dargestellt. Auf der linken Seite befinden sich stets die Ergebnisse der Simulation aus Abschnitt 6.3, die wir hier zu Vergleichszwecken erneut darstellen, auf der rechten Seite die Ergebnisse bei variierten Zinsparametern.

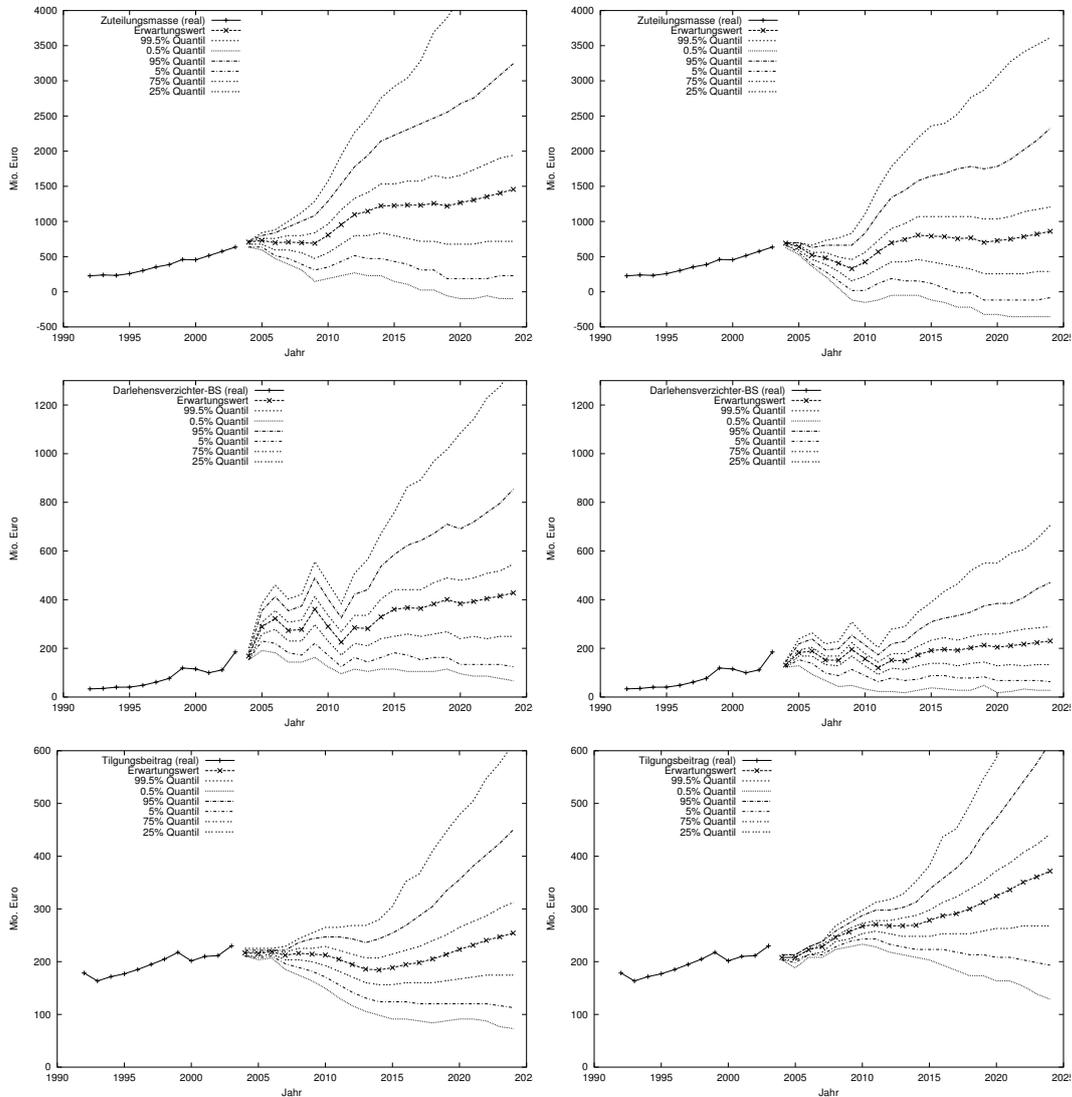


Abbildung 6.15: Resultate bei variierten Zinsmodellparametern (b): Historische Realwerte, Erwartungswerte und Verteilungsquantile der (von oben nach unten) Zuteilungsmasse, Darlehensverzichter-Bausparsumme und Tilgungsbeiträge. Auf der linken Seite sind die Resultate aus Abschnitt 6.3 erneut dargestellt, die entsprechenden Ergebnisse aus der Simulation bei variierten Zinsparametern sind jeweils rechts daneben positioniert.

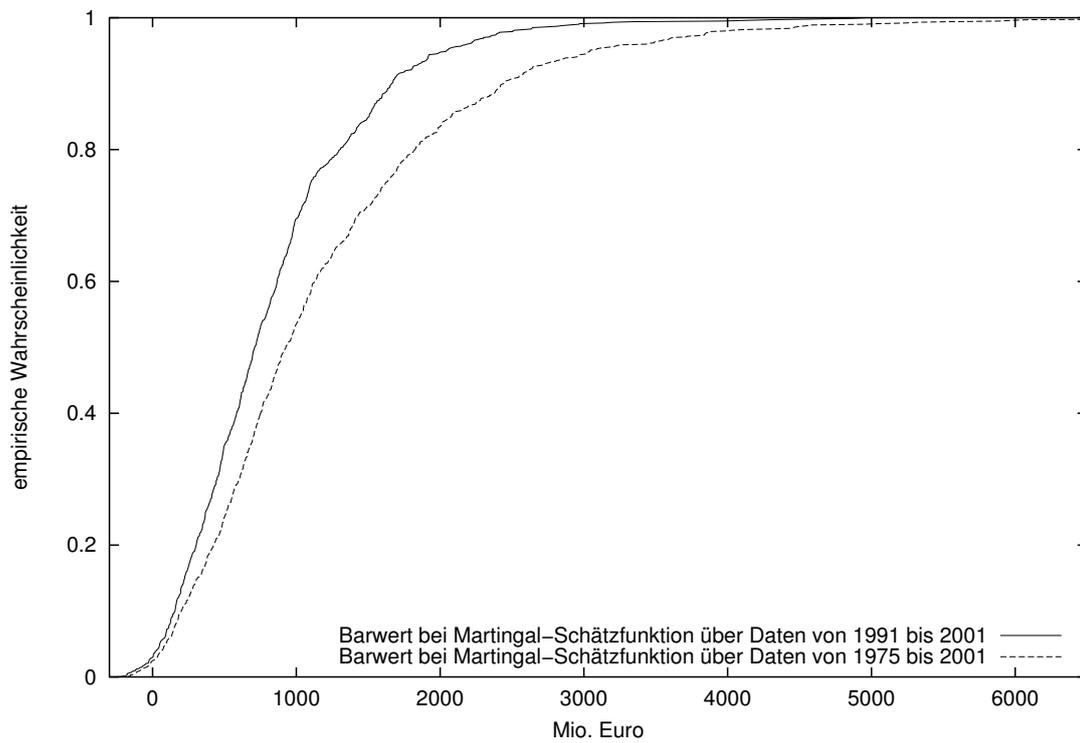


Abbildung 6.16: Vergleich der kollektiven Barwertverteilungen bei verschiedenen Zinsmodellparametern

geren Zuteilungsmasse. Die (erwartete) Summe der Tilgungsbeiträge übersteigt in der Summe die in Abschnitt 6.3 ermittelten, da die Tilgungszahlungen aus den höheren Darlehensbeständen die niedrigeren Sondertilgungen überkompensieren.

Die höhere Varianz der Zinsverteilungen führt indes nicht zu einer höheren Varianz der von den jeweiligen Vergleichszinsen abhängigen Kollektivgrößen. Diese auf den ersten Blick paradoxe Erscheinung lässt sich leicht dadurch erklären, dass die Streuung der Vergleichszinsen größtenteils oberhalb der Vorteilhaftigkeitsgrenze stattfindet, so dass die Bausparer hierauf nur noch schwach reagieren. Stark ausgeprägt ist dieser Effekt daher bei der von den h_t abhängigen Bausparsumme der Darlehensverzichter und schwächer bei den von g_t abhängigen Tilgungsbeiträgen.

Im Gegensatz dazu finden wir bei der Verteilung des Kollektivbarwerts in Abbildung 6.16 eine Erhöhung der Streuung vor. Da insbesondere spätere Zahlungsströme durch die auf Grund der neuen CIR-Parameter veränderten Zinsstruktur deutlich schwächer abgezinst werden, fallen diese bei der Barwertberechnung stärker ins Gewicht. Da die Varianz der späten Zahlungsströme primär vom Neugeschäftsmodell beeinflusst und damit erheblich höher ist (vgl. Abschnitt 6.4.1), wird die kurz- und mittelfristige Stabilisierung der mit der Darlehensphase verbundenen Zahlungsströme überkompensiert.

Insgesamt finden durch die geänderte Parametrisierung des Zinsmodells bei den zentralen Kollektivgrößen recht deutliche Veränderungen statt. Diese erscheinen angesichts der mit der Wahl eines Zeitraumes für die CIR-Parameterschätzung einhergehenden impliziten Annahme über die statistischen Eigenschaften der künftigen Marktzinsen plausibel. Dass das CIR-Modell versucht, die statistischen Eigenschaften der Schätzdaten zu reproduzieren, stellt keinen Mangel dar und darf von jedem Zinsmodell erwartet werden. Daher bleibt die Wahl der „richtigen“ Parameter das Problem des Anwenders, das ihn zwingt, seine Erwartungen an die zukünftige Zinsentwicklung zumindest einzugrenzen und entsprechende Schätzdaten auszuwählen. Die auf diese Weise in die Modellresultate einziehende, gewisse Willkür ist damit unvermeidlich.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein Modell zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen zukünftigen Zustände eines Bausparkkollektivs vorgeschlagen. Entsprechende Verteilungen stellen die Grundlage für jegliche Quantifizierungen von Risiken bereit, denen Bausparkkassen in ihrem Kerngeschäft unterworfen sind. Gerade die Quantifizierung von Risiken stellt auch den Kern aktueller aufsichtsrechtlicher Regelungen dar, so dass zumindest längerfristig die Entwicklung entsprechender Kollektivsimulationsmodelle notwendig erscheint.

Als Modellansatz wählen wir die Monte-Carlo-Simulationsmethode. Der Ansatz ist naheliegend, da alleine durch Simulation der Ablauf eines Bausparvertrags baupar-technisch korrekt modelliert werden kann und daher bereits ausgereifte Simulationsmodelle zur Kollektivprognose existieren, auf denen das zu entwickelnde Modell technisch aufsetzen kann. Der Modellansatz erfordert die Festlegung und stochastische Modellierung bestimmter exogener Variablen, deren konkrete Ausprägungen ein Szenario definieren. Als wichtigste exogene Variablen mit dem bedeutendsten Einfluss auf ein Bausparkkollektiv haben sich sowohl die Neugeschäfts- als auch die Marktzinsentwicklung etabliert, auf die wir uns in dieser Arbeit beschränken.

Die Zinsentwicklung auf dem Kapitalmarkt wirkt nicht direkt auf die Entwicklung des Bausparkkollektivs ein, sondern nur mittelbar durch das Verhalten der Bausparer, die die ihnen tariflich zustehenden Optionen unter Berücksichtigung der Situation auf dem Kapitalmarkt zu ihren Gunsten nutzen. So ist die Vorteilhaftigkeit eines Darlehensverzichts offenbar abhängig von dem aktuellen Marktzins eines dem Bauspardar-lehen vergleichbaren Kredits. Entsprechende Abhängigkeiten wurden in der Arbeit mit Hilfe von Regressionsfunktionen modelliert, wobei weitere statische Vertragsmerkmale berücksichtigt wurden, um die spezifische Empfindlichkeit anhand dieser Merkmale gebildeter Teilkollektive bei der Schätzung der Parameter zinssensiblen Sparerverhaltens zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck wurden Methoden der Regressions- und Clusteranalyse zusammengeführt. Durch das Verfahren von Quine und McCluskey konnten auf Basis der Clusterresultate wenige statische Merkmale bzw. Merkmals-

kombinationen identifiziert werden, die einen starken Einfluss auf die zu verwendende Regressionsfunktion haben, so dass sich die Resultate der Regressionsclusterung sachlogisch sinnvoll interpretieren ließen.

Zur Modellierung der Marktzinsen wurden verschiedene Modelle aus der Literatur in allgemeiner Form vorgestellt und gezeigt, wie diese mit Hilfe von Arbitrage-Argumenten grundsätzlich die Ableitung der jeweiligen Zinsstruktur erlauben. Konkreter betrachteten wir das Modell von Cox, Ingersoll und Ross (CIR-Modell), in dem alleine der kurzfristige, stetige Zinssatz durch einen Itô-Prozess modelliert und hieraus die Zinsstruktur abgeleitet wird. Anschließend wurde demonstriert, auf welche Weise das so generierte Zinsszenario die Berechnung verschiedener, für das Verhalten der Bausparer relevanter Marktzinsen unter Berücksichtigung von Zinsstruktur und -marge erlaubt.

Für die Modellierung der Neugeschäftshöhe bzw. der relativen Neugeschäftsänderungen wurden Hidden-Markov-Modelle (HMM) verwendet. HMM stellen einen recht allgemeinen Ansatz zur Modellierung stochastischer Zeitreihen dar. Weil die Neugeschäftshöhe als Zufallsvariable angesehen werden kann, die von zahlreichen, sich überlagernden politischen und ökonomischen Entwicklungen einschließlich zeitlicher Restriktionen abhängt, bieten HMM die zur Modellierung notwendige Universalität. Mit Hilfe spezieller, in der Arbeit dargestellter Algorithmen konnten wir ein konkretes HMM den durch reale Neugeschäftsverläufe gegebenen Trainingsdaten so anpassen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Modell diese Trainingsdaten reproduziert, (lokal) maximiert wird.

Zur Durchführung der einzelnen Szenariosimulationen wurde auf ein bereits vorhandenes Kollektivsimulationsmodell zurückgegriffen, in dem die automatische Ableitung zinsabhängiger Verhaltensanteile für die mit Hilfe der hierfür relevanten statischen Merkmale ermittelten Teilkollektive umgesetzt wurde. Zur Verminderung der bei Monte-Carlo-Simulationen chronisch knappen Rechenzeit wurde zudem die Abbildung der verschiedenen Sparverhalten drastisch vereinfacht.

Bei der anschließenden Modellvalidierung konnte anhand der Daten des Finanziererteilkollektivs einer realen Bausparkasse gezeigt werden, dass das so konstruierte Modell bei Vorgabe eines historischen Szenarios die tatsächlich eingetretenen Kollektivgrößen relativ gut reproduzieren konnte. Die durch eine Monte-Carlo-Simulation ermittelten empirischen Verteilungen wesentlicher Kollektivgrößen desselben vergangenen Zeitraumes konnten zudem der realen Kollektiventwicklung eine hohe Wahrscheinlichkeit zuweisen.

Bei der Anwendung des Modells auf den aktuellen Vertragsbestand des Finanzierertarifs der Beispielbausparkasse konnten wir plausible Verteilungen für die zukünftige Entwicklung der Kollektivgrößen ermitteln, die sich zur Bestimmung von Risikokennzahlen weiterverwenden lassen und teilweise auch weiterverwendet wurden. Damit hat

das entwickelte Modell gezeigt, dass es in der Lage ist, die stochastische Natur zukünftiger Kollektiventwicklungen angemessen abzubilden und vernünftige Aussagen über deren Risikobehaftung zu treffen, so dass die Ausdehnung des Modells auch auf die übrigen, bisher nicht mitmodellierten Tarife sinnvoll ist.

Die trotz seiner generellen Eignung bestehenden Schwächen des Modells bieten den Ausgangspunkt für eine Weiterentwicklung. Diese Schwächen bestehen im Wesentlichen aus den vorgenommenen Vergrößerungen und vereinfachenden Annahmen. Führt die Modellierung der Neugeschäfts-, Kündigungs- und Fortsetzungsanteile sowie der verschiedenen Verschiebe als Konstanten noch zu vergleichsweise moderaten Ungenauigkeiten, bietet die recht grobe Abbildung des Sparverhaltens deutlichere Ansatzpunkte für Verbesserungen. Hier wäre eine feinere Aufteilung in realitätsnähere Verhaltensmuster wünschenswert, bei der beispielsweise auch stochastische Schwankungen mitmodelliert werden könnten. Entsprechende, auf HMM-basierende Vorarbeiten sind mit [Kna00, Wic01] gegeben und ließen sich in das hier entwickelte Modell prinzipiell integrieren. Inwieweit sich solche Erweiterungen mit der Knappheit an Rechenzeit in Einklang bringen lassen, bleibt der künftigen Weiterentwicklung des Modells und der Computerhardware überlassen.

Als generelle Frage bleibt auch bestehen, inwieweit die Parameter des Neugeschäfts- und des Zinsmodells sowie die Resultate der Regressionsclustering stabil sind. Daher sollten die Parameterschätzung und die Datenanalysen zu späteren Zeitpunkten wiederholt werden. Neueren Entwicklungen im Bereich der Zinsmodelle kann dadurch Rechnung getragen werden, dass das in dieser Arbeit verwendete, aber durchaus problematische CIR-Modell einfach gegen ein (vermeintlich) besseres ausgetauscht wird, was durch die modulare Konstruktion des Gesamtmodells problemlos möglich ist.

Langfristig aber besteht das Ziel der Entwicklung in der Integration des Kollektivmodells in ein Unternehmensgesamtmodell, in dem auf Grund ihrer engen Verzahnung neben den kollektiven auch die außerkollektiven Positionen einer Bausparkasse abgebildet sind. Nur auf diese Weise lassen sich die verschiedenen Risiken des Gesamtinstituts sinnvoll quantifizieren.

Index

- ABB, *siehe* Allgemeine Bausparbedingungen
- Adjustiertes Bestimmtheitsmaß, 46
- Allgemeine Bausparbedingungen, 1
- Arbitrage, 84, 86, 87, 89, 172
- Auszahlungsvershub, 7, 139

- Backtest-Simulation, 145
- Backward
 - Algorithmus, 120
 - Variable, 118
- Barwert, 26, 81, 105, 155, 159, 169
- Basel II, 1
- Basis Point Value, 28
- Baum-Welch
 - Algorithmus, 116, 119, 122, 133
 - Reestimierungsformeln, 121
- Bausparsumme, 6
- Bayes Information Criterion, 129, 133
- Bereithaltungszinsen, 8
- Bestimmtheitsmaß, 46
- Betriebsrisiken, 12
- Bewertungszahlklasse, 140, 143, 146
- BIC, *siehe* Bayes Information Criterion
- BPV, *siehe* Basis Point Value

- CIR-Modell, 93, 94, 107, 165, 169, 172, 173
- Clusteranalyse, 31, 58
- clusterbeschreibende Funktion, 65
- Clusterindices, 62

- Darlehensverzicht, 8, 14, 32, 50, 70
- Davies-Bouldin-Index, 63, 70, 73

- Diffusions-Term, 82
- disjunktive Normalform, 65
- Distanzmaß, 59
- Drift-Term, 82

- effizienter Schätzer, 42
- Eigenschaftsvektor, 64–66, 69
- Einfaktor-Zinsmodelle, 77, 85
- EM-Algorithmus, *siehe* Expectation-Maximization-Algorithmus
- Ertragsrisiko, 30, 161
- Erwartungstreue, 42
- Erweiterter Baum-Welch-Algorithmus, 125
- Euler-Maruyama-Algorithmus, 83
- Ex-Post-Simulation, 145, 150
- Expectation-Maximization-Algorithmus, 123

- Filtration, 84
- Finanzrisiken, 12
- Fortsetzung, 7, 19, 139
- Forward
 - Algorithmus, 118
 - Variable, 117
 - rate, 80, 93, 94, 103
 - zinssatz, 80

- Gauss-Markov-Theorem, 42
- Geldmarktkonto, 79
- generalisierter EM-Algorithmus, 124
- generalisierter Kleinster-Quadrate-Schätzer, 44

- gewöhnlicher Kleinste-Quadrate-Schätzer, 41, 64
- Häufigkeitstabelle, 142
- Hidden-Markov-Modell, 11, 109, 111, 112, 172
- Hierarchie, 60
- historische Simulation, 13
- HMM, *siehe* Hidden-Markov-Modell
- Itô, 81
 - Integral, 82
 - Lemma, 82
 - Prozess, 77, 81, 82
- K-Means, 62
- Kündigung, 7, 18, 139
- Kapitalwert, *siehe* Barwert
- Kollektive Liquidität, 159
- Kollektivsimulationsmodelle, 1, 8, 9, 171
- Kollinearität, 49
- Kolmogoroff-Smirnov-Test, 127, 133
- Konsistenter Schätzer, 46
- Kreditrisiken, 12
- kurzfristiger stetiger Zinssatz, 79
- Lineares autoregressives Regressionsmodell, 44
- Liquiditätsrisiken, 12, 24, 159
- Marktpreis des Risikos, 88, 90, 95, 97, 103
- Marktrisiken, 12
- Martingal, 84, 89
- martingal-äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, 89, 90
- Martingalansatz, 89
- MCCV, *siehe* Monte-Carlo-Cross-Validierung
- Mean-Reversion, 92, 93
- Monte-Carlo-Cross-Validierung, 131, 133
- Monte-Carlo-Simulation, 2, 13, 92, 171
- NBI, 10, 21, 137
- Null-Kupon-Bond, *siehe* Zerobond
- Numeraire, 89
- offenes Kollektiv, 6
- parametrische Modelle, 12
- Partition, 59
- Portfolioeffekt, 16
- Prototypen, 10
- Quadratsummennorm, 63
- Quine-McCluskey, 65, 70, 171
- rechtliche Risiken, 12
- Regressand, 31
- Regressionsanalyse, 31, 37
- Regressionsclusterung, 31, 63, 142
- Regressor, 31
- reine Bestandsschicht, 140
- risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß, *siehe* martingal-äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß
- Risikoprämie, 88
- Schicht, 137, 140, 142
- Schichtmuster, 10, 137–140, 142, 143
- SDE, *siehe* Stochastische Differentialgleichung
- Sensitivitätsanalyse, 161
- short-rate, *siehe* kurzfristige stetige Zinssatz
- Simulated-Annealing, 125
- Sondertilgung, 8, 15, 32, 54, 73
- Sparklasse, 138, 146
- Sparphase, 6, 8
- stetiger Zinssatz, 78
- Stochastische Differentialgleichung, 82
- T-Bond, *siehe* Zerobond
- Tilgungsphase, 7
- Umschuldungseffekt, 16
- Value-at-Risk, 12, 27
- VaR, *siehe* Value-at-Risk

-
- Vermögenswirksame Leistungen, 66, 73,
74
- VK/ZK-Vertrag, *siehe* Vor-/Zwischen-
finanzierungsvertrag
- VL, *siehe* Vermögenswirksame Leistun-
gen
- Vor-/Zwischenfinanzierungsvertrag, 33,
66, 74
- Vorteilhaftigkeitsgrenze, 14, 39
- Ward, Verfahren von, 61, 69
- Wiedergeltendmachung, 7, 139
- Wiener-Prozess, 81
- Wohnungsbauprämie, 20, 66
- WoP, *siehe* Wohnungsbauprämie
- Zerobond, 77, 79, 98, 105
- Zinsänderungsrisiko, 12, 28
- Zinsfaktor, 78
- Zinssatz, 78
- Zinsstruktur, 77, 79, 99, 105, 107, 172
- Zinsstrukturkurve, 80, 100, 104
- Zuteilung, 6, 146
- Zuteilungs
- bedingung, 6
 - masse, 24, 159, 161
 - phase, 6

Literaturverzeichnis

- [AD89] ARTZNER, P. und F. DELBAEN: *Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach*. Advances in Applied Mathematics, 10:95–129, 1989.
- [Aze92] AZENCOTT, R.: *Simulated Annealing*. Wiley, New York, 1992.
- [Bac94] BACHER, J.: *Clusteranalyse*. Oldenbourg, München u. a., 1994.
- [Bas04] BASELER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF SICHT: *Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen*. Basel, 2004.
- [BB95] BOTTOU, L. und Y. BENGIO: *Convergence Properties of the K-Means Algorithms*. In: TESAURO, G., D. TOURETZKY und T. LEEN (Herausgeber): *Advances in Neural Information Processing Systems*, Band 7, Seiten 585–592, Cambridge, MA, 1995. The MIT Press.
- [BBDW93] BACHEM, A., L. BETTMER, S. DITZEN und I. WINDMÖLLER: *Simulationsmodelle für Bausparkkollektive*. In: HIPPEL, C., W. EICHHORN und W.-R. HEILMANN (Herausgeber): *Beiträge zum 6. Symposium Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen, Dezember 1993*, Seiten 755–761, Karlsruhe, 1993. Verlag Versicherungswirtschaft.
- [BEHR03] BECK, A., F. EBELING, B. HAFEMANN und H. RECKER: *Integration des Kollektivgeschäfts in die Risikosteuerung einer Bausparkkasse*. Die Bank, (4):4–9, 2003.
- [BEPW94] BACKHAUS, K., B. ERICHSON, W. PLINKE und R. WEIBER: *Multivariate Analyse-Methoden*. Springer, Berlin u. a., 1994.
- [Ber99] BERTSCH, E.: *Bausparteknik - vom statischen Beharrungszustand zur dynamischen Risikosteuerung*. Der Langfristige Kredit, (24):794–798, 1999.
- [BFK⁺97] BACHEM, A., S. P. FEKETE, B. KNAB, R. SCHRADER, I. VANNAHME, I. WEBER, R. WEGENER, K. WEINBRECHT und B. WICHERN: *Analyse großer Datenmengen und Clusteralgorithmen im Bausparwesen*. In:

- HIPP, C., W. EICHHORN und W.-R. HEILMANN (Herausgeber): *Beiträge zum 7. Symposium Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen, Dezember 1996*, Seiten 955–961, Karlsruhe, 1997. Verlag Versicherungswirtschaft.
- [BG96] BEER, A. und W. GOJ: *Zinsrisikomanagement mit Ablaufbilanz und Barwertmethode*. Deutscher Sparkassenverlag, Stuttgart, 1996.
- [BHL98] BERTSCH, E., B. HÖLZLE und H. LAUX: *Handwörterbuch der Bauspartchnik*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH, Karlsruhe, 1998.
- [Bil98] BILMES, J. A.: *A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models*. Technischer Bericht TR-97-021, International Computer Science Institute, Berkeley, CA, 1998.
- [Bil02] BILMES, J. A.: *What HMMs can Do*. Technischer Bericht UWEETR-2002-0003, Dept. of EE, University of Washington, Seattle, WA, 2002.
- [Bjö96] BJÖRK, T.: *Interest Rate Theory*. Springer Lecture Notes in Mathematics, (1656):53–122, 1996.
- [BM01] BRIGO, D. und F. MERCURIO: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, Berlin u. a., 2001.
- [Bre03] BREUER, M.: *Das Bausparjahr 2003 - Wachstum auf Vorrat? Immobilien und Finanzierung*, (22):798–799, 2003.
- [BS79] BRENNAN, M. J. und E. S. SCHWARTZ: *A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds*. Journal of Banking and Finance, 3:135–155, 1979.
- [Bun02] BUNDESGESCHÄFTSSTELLE DER LANDESBPAUSPARKASSEN (Herausgeber): *Bausparkassen-Fachbuch 2002/2003*. Deutscher Sparkassenverlag GmbH, Stuttgart, 2002.
- [Bur98] BURGER, W.: *Das Zinsänderungsrisiko variabler Bankgeschäfte*. Dissertation, Universität Zürich, Zürich, 1998.
- [Cie02] CIELEBACK, M.: *Bausparen und Optionstheorie*. R. Müller GmbH, Köln, 2002.
- [CIR85] COX, J., J. INGERSOLL und S. ROSS: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. Econometrica, 53:385–407, 1985.
- [DB79] DAVIES, D. L. und D. W. BOULDIN: *A Cluster Separation Measure*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2:224–227, 1979.

- [DEKM98] DURBIN, R., S. EDDY, A. KROGH und G. MITCHISON: *Biological Sequence Analysis. Probabilistic Models of Proteins and Nucleic Acids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [DFK⁺04] DRINEAS, P., A. FRIEZE, R. KANNAN, S. VEMPALA und V. VINAY: *Clustering in Large Graphs via the Singular Value Decomposition*. Preprint, erscheint in Journal of Machine Learning, 2004.
- [DLR77] DEMPSTER, A. P., N. M. LAIRD und D. B. RUBIN: *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 39(1):1–38, 1977.
- [Dou85] DOUGLAS, B. F.: *Training of HMM Recognizers by Simulated Annealing*. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Process.*, Seiten 13–16, 1985.
- [DT98] DUNMUR, A. P. und D. M. TITTERINGTON: *The Influence of Initial Conditions on Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Binary Hidden Markov Model*. Statist. Probab. Lett., 40(1):67–73, 1998.
- [Edd96] EDDY, S. R.: *Hidden Markov Models*. Current Opinion in Structural Biology, 6:361–365, 1996.
- [Eis96] EISENFÜHR, F.: *Investitionsrechnung*. Verlag der Augustiner Buchhandlung, Aachen, 1996.
- [FCHJ84] FOMBY, T. B., R. CARTER HILL und S. R. JOHNSON: *Advances Econometric Methods*. Springer, Berlin u. a., 1984.
- [FMW03] FISCHER, T., A. MAY und B. WALTHER: *Anpassung eines CIR-1-Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve*. Blätter der DGVFM XXVI, (2):193–206, 2003.
- [GJ79] GAREY, M. R. und D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.
- [GLT99] GIBSON, R., F.-S. LHABITANT und D. TALAY: *Modeling the Term Structure of Interest Rates: A Review of the Literature*. Technischer Bericht 9801, HEC Lausanne, Lausanne, 1999.
- [Got85] GOTTERBARM, F.: *Modelle und Optimierungsansätze zur Analyse des kollektiven Bausparens*. Dissertation, Universität Bonn, Bonn, 1985.
- [Haf99] HAFEMANN, B.: *Anmerkungen zu teilvariablen Bausparverträgen*. Der Langfristige Kredit, (24):806–809, 1999.

- [HAJ90] HUANG, X. D., Y. ARIKI und M. A. JACK: *Hidden Markov Models for Speech Recognition*. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1990.
- [HDK02] HAUSMANN, W., K. DIENER und J. KÄSLER: *Derivate, Arbitrage und Portfolio Selection*. Vieweg, Braunschweig u. a., 2002.
- [HEK93] HARTUNG, J., B. ELPELT und K.-H. KLÖSENER: *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg, München u. a., 1993.
- [Her99] HERZBERGER, J.: *Einführung in die Finanzmathematik*. Oldenbourg, München u. a., 1999.
- [HJM92] HEATH, D., R. JARROW und A. MORTON: *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation*. *Econometrica*, 60:77–105, 1992.
- [HK79] HARRISON, M. J. und D. M. KREPS: *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. *Journal of Economic Theory*, 20:381–408, 1979.
- [HL86] HO, T. S. Y. und S.-B. LEE: *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. *Journal of Finance*, (41):1011–1029, 1986.
- [Höl96] HÖLZER, H.: *Fulminanter Bauspar-Start*. *Der Langfristige Kredit*, (8):729–734, 1996.
- [HW90] HULL, J. und A. WHITE: *Pricing Interest Rate Derivative Securities*. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [HW94] HULL, J. und A. WHITE: *Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single Factor Models*. *The Journal for Derivatives*, 2:7–16, 1994.
- [Jel01] JELINEK, F.: *Statistical Methods for Speech Recognition*. MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- [Job91] JOBSON, J. D.: *Applied Multivariate Data Analysis*. Springer, Berlin u. a., 1991.
- [Jor97] JORION, P.: *Value at Risk*. Irwin, Chicago, 1997.
- [JX93] JORDAN, MICHAEL I. und LEI XU: *Convergence Results for the EM Approach to Mixtures of Experts Architectures*. Technischer Bericht AIM-1458, Berkeley, CA, 1993.

- [Keh96] KEHAGIAS, A.: *Bayesian Classification of Hidden Markov Models*. Math. Comput. Modelling, 23(5):25–43, 1996.
- [Kel92] KELLERSHOHN, I.: *Mathematische Simulation von Bausparkollektiven mit Hilfe von empirischen Verteilungen in monothetischen hierarchischen Kollektivclusterungen*. Dissertation, Universität zu Köln, Köln, 1992.
- [Ket99] KETZNER, CH.: *Die Entwicklung der Liquiditätsregeln für Bausparkassen*. Der Langfristige Kredit, (24):810–812, 1999.
- [KGV83] KIRKPATRICK, S., C. D.JR. GELATT und M.P. VECCHI: *Optimization by Simulated Annealing*. Science, 220:671–680, 1983.
- [KK99] KORN, R. und E. KORN: *Optionsbewertung und Portfoliooptimierung*. Vieweg, Braunschweig u. a., 1999.
- [Kna00] KNAB, B.: *Erweiterungen von Hidden-Markov-Modellen zur Analyse ökonomischer Zeitreihen*. Dissertation, Universität zu Köln, Köln, 2000.
- [KP96] KAUFMANN, H. und H. PAPE: *Clusteranalyse*. In: FAHRMEIR, L., A. HAMERLE und G.. TUTZ (Herausgeber): *Multivariate statistische Verfahren*, Seiten 437–536. de Gruyter, Berlin, 1996.
- [KS94] KARATZAS, I. und S. E. SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin u. a., 1994.
- [KSW⁺97] KNAB, B., R. SCHRADER, I. WEBER, K. WEINBRECHT und B. WICHERN: *Ein Mesoskopisches Simulationsmodell zur Kollektivfortschreibung*. Technischer Bericht ZPR97-295, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Köln, 1997.
- [Lau93] LAUX, H.: *Bausparwissen für Bankkaufleute, Baufinanzierungs- und Anlageberater*. Fritz Knapp Verlag, Frankfurt a. M., 1993.
- [LPP00] LI, X., M. PARIZEAU und R. PLAMONDON: *Training Hidden Markov Models with Multiple Observations - A Combinatorial Method*. IEEE Transactions on PAMI, PAMI-22(4):371–377, 2000.
- [LS92] LONGSTAFF, F. und E. SCHWARTZ: *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model*. Journal of Finance, 47:1259–1282, 1992.
- [Mac67] MACQUEEN, J. B.: *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations*. In: *Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Nummer 1, Seiten 281–297, Berkeley, CA, 1967. University of California Press.

- [McC56] MCCLUSKEY, E. J.: *Minimization of Boolean Functions*. Bell Systems Technical Journal, 35(5):1417–1444, 1956.
- [McL96] MCLACHLAN, G.J.: *On Aitken's Method and other Approaches for Accelerating Convergence of the EM Algorithm*. In: *Proceedings of the A. C. Aitken Centenary Conference*, Seiten 201–209, Dunedin, 1996. University of Otago Press.
- [MH02] METZ, M. und W. HERZOG: *Das Zinsänderungsmanagement bei Bauparkassen*. Immobilien und Finanzierung, (6):174–177, 2002.
- [MK97] MCLACHLAN, G.J. und T. KRISHNAN: *The EM Algorithm and Extensions*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1997.
- [MR97] MUSIELA, M. und M. RUTKOWSKI: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, Berlin u. a., 1997.
- [Øks92] ØKSENDAL, B.: *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin u. a., 1992.
- [OV90] OBERSCHELP, W. und G. VOSSEN: *Rechneraufbau und Rechnerstrukturen*. Oldenbourg, München u. a., 1990.
- [Qui52] QUINE, W. V.: *The Problem of Simplifying Truth*. American Mathematics Monthly, 59(8):521–531, 1952.
- [Rab89] RABINER, L. R.: *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. Proceedings of the IEEE, 77(2):257–285, 1989.
- [Rea98] READ, O.: *Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk*. Dissertation, Universität zu Köln, Köln, 1998.
- [Reb96] REBONATO, R.: *Interest-Rate Option Models*. Springer, Berlin u. a., 1996.
- [Ric78] RICHARD, S.: *An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates*. Journal of Financial Economics, 6:33–57, 1978.
- [RJ93] RABINER, L. R. und B. H. JUANG: *Fundamentals of Speech Secognition*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [Sch78] SCHWARZ, G.: *Estimating the Dimension of a Model*. The Annals of Statistics, 6:461–464, 1978.
- [Sch94] SCHIERENBECK, H.: *Bank- und Versicherungslexikon*. Oldenbourg, München u. a., 1994.

- [Sch97] SCHULMERICH, MARCUS: *Statistische Verfahren für Diffusionsprozesse mit Anwendung auf stochastische Zinsmodelle der Finanzmathematik*. Diplomarbeit, Mainz, 1997.
- [Sch03] SCHIERENBECK, H.: *Ertragsorientiertes Bankmanagement - Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung*, Band 2. Gabler, Wiesbaden, 2003.
- [Sey00] SEYDEL, R.: *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*. Springer, Berlin u. a., 2000.
- [Sha93] SHAO, J.: *Linear Model Selection by Cross-Validation*. Journal of the American Statistical Association, 88(422):486–494, 1993.
- [Smy96] SMYTH, P.: *Clustering using Monte Carlo Cross-Validation*. In: SIMOUDIS, E., J. HAN und U. FAYYAD (Herausgeber): *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining*, Seiten 126–133, Menlo Park, CA, 1996. AAAI Press.
- [Smy98] SMYTH, P.: *Model Selection for Probabilistic Clustering Using Cross-Validation Likelihood*. Technischer Bericht ICS-TR-98-09, Irvine, 1998.
- [SO94] STOLCKE, A. und S. M. OMOHUNDRO: *Best-first Model Merging for Hidden Markov Model Induction*. Technischer Bericht TR-94-003, International Computer Science Institute, Berkeley, CA, Januar 1994.
- [Sør96] SØRENSEN, M.: *On Estimation for Discretely Observed Diffusions: A Review*. Technischer Bericht Research Report 348, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus, Aarhus, 1996.
- [SS84] SCHLITTGEN, R. und B. STREITBERG: *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg, München u. a., 1984.
- [Van96] VANNAHME, I.: *Clusteralgorithmen zur mathematischen Simulation von Bausparkollektiven*. Dissertation, Universität zu Köln, Köln, 1996.
- [Vas77] VASICEK, O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, 5:177–188, 1977.
- [vWW90] WEIZSÄCKER, H. VON und G. WINKLER: *Stochastic Integrals*. Vieweg, Braunschweig u. a., 1990.
- [War63] WARD, J.: *Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function*. Journal of the American Statistical Association, 58:236–244, 1963.
- [Wei99] WEILER, W.: *Die Aussagekraft von Kennzahlen im Bauspargeschäft*. Der Langfristige Kredit, (24):800–805, 1999.

- [Wic01] WICHERN, B.: *Hidden-Markov-Modelle zur Analyse und Simulation von Finanzzeitreihen*. Dissertation, Universität zu Köln, Köln, 2001.
- [Wu83] WU, C. F. J.: *On the Convergence Properties of the EM Algorithm*. *The Annals of Statistics*, 11:95–103, 1983.
- [XI96] XU, L. und JORDAN M. I.: *On the Convergence Properties of the EM Algorithm for Gaussian Mixtures*. *Neural Computation*, 8:129–151, 1996.

Danksagung

Bei der Erstellung dieser Arbeit haben mich viele Menschen auf unterschiedlichste Art und Weise unterstützt. Mein besonderer Dank gilt daher

- Prof. Dr. R. Schrader für die Möglichkeit am ZAIK zu arbeiten sowie die Betreuung meiner Dissertation;
- Prof. Dr. E. Speckenmeyer für die Übernahme des Koreferats;
- der Gruppe der Landesbausparkassen für die Finanzierung des Projekts, in dessen Rahmen diese Arbeit entstanden ist und die freundliche Unterstützung, die ich durch die Mitarbeiter dort erhalten habe;
- meinen (ehemaligen) Kolleginnen und Kollegen Dr. Nils Eissfeldt, Petra Fakler, Jürgen Gräfe, Martin Lätsch, Stefan Neuhaus, Thordis Linda Thorarinsdottir und Dr. Bernd Wichern für die zahlreichen Korrekturen, Anregungen und Diskussionen sowie nicht zuletzt ihre Hilfe im Kampf mit den Tücken der Technik;
- allen übrigen (ehemaligen) Kolleginnen und Kollegen am ZAIK, die zu der guten Atmosphäre am Institut beigetragen haben;
- meinen Eltern Inge und Wolfgang Chevalier für die Ermöglichung meines Studiums und die Übernahme der mühevollen Kleinarbeit, meine Arbeit von zahlreichen grammatikalischen, orthographischen und stilistischen Fehlern zu befreien;
- meiner lieben Frau Doris Freund für ihre tatkräftige und moralische Unterstützung sowie besonders für den notwendigen Freiraum, den sie mir zur Fertigstellung meiner Arbeit geschaffen hat.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. R. Schrader betreut worden.

Teilpublikationen: keine

Thomas Altmann

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Thomas Chevalier
Adresse: Raumerstraße 8, 50935 Köln
Geburtsdatum: 12. November 1971
Geburtsort: Köln
Familienstand: verheiratet, zwei Kinder
Staatsangehörigkeit: deutsch

Ausbildung/Studium

1978–1982 Gemeinschaftsgrundschule Rösrath
1982–1991 Freiherr-vom-Stein Gymnasium Rösrath,
Abschluss: Abitur
1991–1992 Grundwehrdienst als Fernmelder in
Rheinbach
1992–1998 Studium der Wirtschaftsinformatik an
der Universität zu Köln
10/1994 Vordiplom in Wirtschaftsinformatik
11/1998 Diplom in Wirtschaftsinformatik

Berufstätigkeit

1/1995 – 11/1998 Studentische Hilfskraft im PC-Pool
der Lehrstühle Mellis/Seibt/Derigs
12/1998–11/2004 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut/
Zentrum für Angewandte Informatik Köln, Universität zu Köln
in einem Drittmittelprojekt mit den Landesbausparkassen

Köln, im September 2004