Hecke-Operatoren und vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung

I n a u g u r a l–D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakulät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Oliver Stein

aus Salzkotten

Köln, im August 2007

Berichterstatter:	Prof. Dr. Jan Hendrik Bruinier
	Prof. Dr. Jens Funke

Tag der letzten mündlichen Prüfung: 23.10.2007

Zusammenfassung

In der Theorie der Modulformen sind Hecke-Operatoren von fundamentaler Bedeutung. Sie ermöglichen Aussagen über arithmetische Eigenschaften der Fourierkoeffizienten einer Modulform. Modulformen kann man auf verschiedene Weisen eine L-Reihe zuordnen. Hecke-Operatoren sind ein wichtiges Hilfsmittel bei deren Definition. Mit ihrer Hilfe kann man wichtige Eigenschaften dieser L-Reihe zeigen. Unter anderem über die zugeordnete L-Reihe erhalten Modulformen eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung eines Gitters sind eine weitgehende Verallgemeinerung der üblichen skalarwertigen elliptischen Modulformen. Sie sind ein bedeutender Bestandteil in der Theorie der Borcherdsprodukte. Sie ermöglichen die elegante Beschreibung der Fourierentwicklung verschiedener Theta-Lifts, die R. Borcherds konstruiert hat. Viele aktuelle Arbeiten sind im Zusammenhang mit dieser Theorie erschienen, in denen vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung eine wichtige Rolle spielen.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Aktion der Hecke-Algebra auf derartigen Modulformen definiert. Dies ermöglicht die Definition von Hecke-Operatoren. Es werden grundlegende Eigenschaften der Algebra dieser Operatoren untersucht. Insbesondere wird studiert, wie die Hecke-Operatoren auf den Fourierkoeffizienten einer Modulform operieren.

Abstract

Hecke operators are a fundamental tool in the study of modular forms. They can be used to obtain information on the arithmetic nature of the Fourier coefficients of a modular form. They are vital for the definition of L-functions associated to modular forms. Using Hecke operators one can show some important properties of these L-functions. Modular forms and their L-functions play an important role in number theory.

Vector valued modular forms associated with the Weil representation are a far reaching generalization of the classical elliptic modular forms. They are essential for the theory of Borcherds products. Borcherds uses them to provide an elegant description of the Fourier expansion of various theta liftings. There are many recent works dealing with Borcherds products which focus on vector valued modular forms associated with the Weil representation.

In this thesis we define an action of the Hecke algebra for these modular forms. This action allows the definition of Hecke operators. We discuss some fundamental properties of the algebra of Hecke operators. Moreover we compute the action of these operators on the Fourier coefficients of a modular form.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es bezeichne $\mathbb{H}$ die komplexe obere Halbebene und τ ein Element aus $\mathbb{H}$. Weiter sei $q = e^{2\pi i\tau}$. Die Delta-Funktion ist durch die Produktentwicklung

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

definiert. Das Produkt ist auf der oberen Halbebene absolut und lokal gleichmäßig konvergent und $\mathbb{Z}$-periodisch. Weiterhin erfüllt die Delta-Funktion die folgende Transformationsformel:

$$\Delta(-1/\tau) = \tau^{12}\Delta(\tau).$$

Diese Eigenschaften zusammengenommen bedeuten, daß Δ eine Spitzenform vom Gewicht 12 zur Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ ist und sich in eine Fourierreihe der Form

$$\begin{aligned}\Delta =& \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \\ =& q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 + \cdots\end{aligned}$$

entwickeln läßt. Die Fourierkoeffizienten $\tau(n)$ sind alle ganzzahlig. Die Funktion $n \mapsto \tau(n)$ wurde von vielen Mathematikern studiert, unter anderem von Ramanujan. Er beobachtete, daß $\tau(n)$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion ist. Genauer vermutete er unter anderem die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}&\tau(m)\tau(n) = \tau(mn), \quad \text{falls } (m,n) = 1 \text{ gilt, und} \\ &\tau(p^r)\tau(p) = \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1}) \text{ für alle Primzahlen } p \text{ und } r \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ein erster Beweis für diese Aussagen wurde 1917 von Mordell gegeben. Hecke gab 1937 eine konzeptionelle Erklärung für das Auftreten der obigen Eigenschaften. Er führte eine Familie von kommutierenden Operatoren $\{T(m),\ m \in \mathbb{N}\}$ auf dem Raum der elliptischen Modulformen vom Gewicht k zu $SL_2(\mathbb{Z})$ ein, die gleichzeitig selbstadjungiert sind bezüglich eines bestimmten Skalarproduktes. Der Raum der Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ besitzt damit eine Basis von simultanen Eigenfunktionen bezüglich dieser Familie von Operatoren. Eine Modulform vom Gewicht k zu $SL_2(\mathbb{Z})$ ist eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion, die unter anderem 1-periodisch und damit in eine Fourierreihe entwickelbar ist. Hecke bewies die folgenden Eigenschaften für die Fourierkoeffizienten $a(n)$ einer normalisierten (d.h. $a(1) = 1$) simultanen Eigenform:

$$\begin{aligned}&a(m)a(n) = a(mn), \text{ falls } (m,n) = 1 \text{ gilt, und} \\ &a(p^r)a(p) = a(p^{r+1}) + p^{k-1}a(p^{r-1}) \text{ für alle Primzahlen } p \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Diese Relationen resultieren aus entsprechenden Relationen, die in der Algebra der Hecke-Operatoren $\{T(m),\ m \in \mathbb{N}\}$ gelten. Es läßt sich zeigen, daß die Delta-Funktion eine normalisierte simultane Eigenform vom Gewicht 12 zu $SL_2(\mathbb{Z})$ ist. Damit liefern die Hecke-Operatoren im Rahmen der Theorie der Modulformen eine befriedigende Erklärung für bestimmte arithmetischen Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der Delta-Funktion.

Einer Modulform $f = \sum_{n\geq 1} a(n)q^n$ kann man via Mellin-Transformation eine L-Reihe

$$L(f,s) = \sum_{n\geq 1} a(n)n^{-s}$$

zuordnen. Aufgrund der obigen Relationen der Fourierkoeffizienten $a(n)$ besitzt $L(f,s)$ eine Eulerprodukt-Entwicklung. Vielen zahlentheoretischen bzw. geometrischen Objekten kann man ebenfalls eine L-Reihe zuordnen. In dieser L-Reihe sind viele Eigenschaften des Ausgangsobjektes kodiert, die sich vor allem aus deren analytischen Eigenschaften ergeben. Häufig liegt die L-Reihe als Eulerprodukt vor, und über deren analytische Eigenschaften läßt sich wenig ablesen. Es ist nun von großer Bedeutung, daß die geometrisch-zahlentheoretisch motivierte L-Reihe in manchen Fällen mit der L-Reihe einer Modulform übereinstimmt. Denn dann übertragen sich die analytischen Eigenschaften der L-Reihe der Modulform auf die der arithmetisch gewonnenen L-Reihe. Als prominentestes Beispiel hierfür ist der tiefliegende *Satz von Wiles* zu nennen, der besagt, daß die L-Reihe einer elliptischen Kurve E über dem Körper $\mathbb{Q}$ übereinstimmt mit der L-Reihe einer Modulform f_E vom Gewicht 2. Dieser Satz impliziert unter anderem den berühmten letzten *Satz von Fermat*.

Vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung haben in der letzten Zeit große Aufmerksamkeit erfahren. Der Grund hierfür ist, daß sie als Input zweier regularisierter Theta-Lifts dienen, die Borcherds in [Bo2] konstruiert hat. Beide Liftungen bilden in einen Raum von Modulformen zu einer Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O^+(L)$ ab. Borcherds erkannte, daß sich derartige Theta-Liftungen sehr elegant mit Hilfe der vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung beschreiben lassen. So läßt sich etwa das Bild einer vektorwertigen Modulform unter dem "multiplikativen" Lift in jeder Spitze als ein unendliches Produkt in Termen der Fourierkoeffizienten der Ausgangsform konstruieren. Daher spricht man auch von Borcherdsprodukten. In einer Reihe weiterer aktueller Arbeiten wurden diese Borcherds-Lifts verwendet, zu nennen sind zum Beispiel [Bo1], [Br1], [McG] und [Sc1]. Der "additive" Lift ist eine konzeptionelle Verallgemeinerung vieler bereits zuvor existierender Liftungen, wie etwa des Shimura-Lifts ([Sh2]), des Doi-Naganuma-Lifts ([DN]) oder des Saito-Kurokawa-Lifts ([EZ], Kapitel II). In der Theorie der Modulformen spielen Lifts eine wichtige Rolle. Dies sind Abbildungen zwischen Räumen von Modulformen verschiedenen Typs. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, Räume von Modulformen zu anderen klassischen Gruppen, wie der symplektischen oder orthogonalen Gruppe, besser zu verstehen, und insbesondere konkrete Beispiele daraus zu konstruieren.

Vor dem Hintergrund der zuvor skizzierten Bedeutung der Hecke-Operatoren in der Theorie der elliptischen Modulformen und darüber hinaus, ist es naheliegend, Hecke-Operatoren auch für andere, allgemeinere Klassen von Modulformen einzuführen. Diese Arbeit leistet einen Beitrag dazu. Es werden Hecke-Operatoren für vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung definiert. Im Anschluß daran werden einige der oben angesprochenen Eigenschaften der Algebra dieser Operatoren bewiesen. Es wird außerdem bestimmt, wie diese auf den Fourierkoeffizienten einer Modulform operieren.

Ein großer Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Definition der Hecke-Operatoren, die keineswegs offensichtlich ist. Aus diesem Grund werden im folgenden die wesentlichen Ideen geschildert, die zu der Definition führen. Zudem wird der restliche Inhalt der Arbeit genauer beschrieben.

Es sei L ein gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-) mit der quadratischen Form $x \mapsto x^2/2$. Mit N bezeichnen wir die Stufe von L, mit $\mathrm{sig}(L) = b^+ - b^-$ die Signatur des Gitters. Es sei weiter L' das zugehörige duale Gitter und $\mathbb{C}[L'/L]$ der Gruppenring der endlichen Gruppe L'/L. Die Standardbasis des Gruppenringes sei mit $(\mathfrak{e}_\lambda)_{\lambda \in L'/L}$ bezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber sei die Signatur des Gitters gerade. In diesem Fall gibt es nur nichttriviale Modulformen zur Weildarstellung, wenn das Gewicht k ganzzahlig ist. Der Fall ungerader Signatur wird in der Arbeit ebenfalls betrachtet. Mit ϱ_L sei die Weildarstellung

$$\varrho_L : SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow U(\mathbb{C}[L'/L])$$

zum Gitter L bezeichnet. Für die Definition von ϱ_L und weitere Details siehe Kapitel 4. Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ heißt vektorwertige Modulform vom Gewicht k zur Weildarstellung ϱ_L für die Gruppe $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$, falls

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k \varrho_L(\gamma) f(\tau)$$

für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ gilt, und falls f holomorph in der Spitze ∞ ist. Man kann leicht zeigen, daß die Komponentenfunktionen f_λ einer solchen Modulform $f = \sum_{\lambda \in L'/L} f_\lambda \mathfrak{e}_\lambda$ aus dem Raum $M_k(\Gamma(N))$, dem Raum der skalarwertigen Modulformen vom Gewicht k zu $\Gamma(N)$ sind.

Der Hecke-Operator soll durch die Operation der Hecke-Algebra der $\Gamma(1)$-Doppelneben -klassen in $GL_2^+(\mathbb{Q})$ definiert werden. Details zu Hecke-Operatoren und Hecke-Algebren finden sich zum Beispiel in [Sh1]. Demzufolge ist der Slash-Operator

$$f \mid_{k,L} \gamma = (c\tau + d)^{-k} \varrho_L^{-1}(\gamma) f(\gamma\tau) \tag{1}$$

auszudehnen auf geeignete Matrizen $M \in GL_2^+(\mathbb{Q})$. Insbesondere die Weildarstellung muß also auf diese Matrizen fortgesetzt werden. McGraw liefert in [McG] die entscheidende Grundlage für eine mögliche Fortsetzung. Er dehnt die Weildarstellung zu einer Operation auf Matrizen $J_\alpha := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ durch

$$\varrho_L(J_\alpha)(\sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda) = \sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda^{\sigma_\alpha^{-1}} \mathfrak{e}_\lambda \tag{2}$$

aus, um damit eine Operation der gesamten Gruppe $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ zu erhalten, die die Weildarstellung fortsetzt. Hierbei ist $\sigma_\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N}/\mathbb{Q})$, gegeben durch $e^{2\pi i/N} \mapsto e^{2\pi i\alpha/N}$, und $\sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})[L'/L]$. Man beachte, daß die Definition (2) *nicht* $\mathbb{C}$-linear ist. Damit erhält man eine Operation einer geeigneten Untergruppe von $GL_2^+(\mathbb{Q})$, die die Weildarstellung fortsetzt, indem man zunächst die Einträge modulo N reduziert, um dann McGraws Weildarstellung anzuwenden. Eine geeignete Untergruppe ist daher

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(N) = \{M \in GL_2^+(\mathbb{Q}); \quad & \exists r \in \mathbb{Z} \text{ mit } (r, N) = 1, \\ & \text{so daß } rM \in M_2(\mathbb{Z}) \text{ und } (\det(rM), N) = 1 \ \}. \end{aligned}$$

Verwendet man zur Ausdehnung des Slash-Operators McGraws Erweiterung der Weildarstellung, so stößt man dabei auf einige Schwierigkeiten. Diese werden im folgenden beschrieben, um damit gleichzeitig die Definition des Slash-Operators auf der Gruppe $\mathcal{G}(N)$ zu motivieren.

Die Fortsetzung verläuft in zwei Schritten. Zunächst dehnt man den Slash-Operator auf den Normalteiler

$$\mathcal{S}(N) = \big\{ M \in GL_2^+(\mathbb{Q}); \quad \exists r \in \mathbb{Z} \text{ mit } (r, N) = 1, \text{ so daß } rM \in M_2(\mathbb{Z}) \\ \text{und } \det(rM) \equiv 1 \pmod N \ \big\},$$

dann auf die Untergruppe

$$\mathcal{J}(N) = \left\{ J_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right); \quad \alpha = \frac{r}{s} \text{ mit } (rs, N) = 1 \ \right\}$$

aus. Das Lemma 4.2.5 liefert dann die Fortsetzung auf die gesamte Gruppe $\mathcal{G}(N)$. Für ein $M \in \mathcal{S}(N)$ stellt der Ansatz

$$f \mid_{k,L} M = \sum_{\lambda \in L'/L} \varrho_L^{-1}(M)(f_\lambda \mid_k M \mathfrak{e}_\lambda) \tag{3}$$

eine mögliche Fortsetzung dar. Diese Definition legt den Slash-Operator auf dem Schnitt

$$\mathcal{S}(N) \cap \mathcal{J}(N) = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{G}(N); \quad s \equiv 1 \pmod N \}$$

fest. Eine naheliegende Definition für $\mathcal{J}(N)$ wäre daher:

$$f \mid_{k,L} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) = \sum_{\lambda \in L'/L} \varrho_L^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) (f_\lambda \mid_k \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \mathfrak{e}_\lambda). \tag{4}$$

Die Weildarstellung für die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right)$ ist durch (2) gegeben. Es stellt sich also die Frage, wie man eine Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})/\mathbb{Q})$ auf den Komponentenfunktionen f_λ definiert. Der folgende Ansatz findet sich zum Beispiel in [Sh1], Kapitel 6, und in Anlehnung daran, in [McG]: Man nimmt direkt an, daß die Fourierkoeffizienten der Komponentenfunktionen in $R_N = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/N}, \frac{1}{N}]$ liegen (siehe Satz 2.2.1, 2.2.2) und definiert

$$f_\lambda^{\sigma_\alpha} = \sum_{n \geq 0} a(\lambda, n)^{\sigma_\alpha} q^n.$$

Diese Ansätze liefern in der Tat Operationen der Gruppen $\mathcal{S}(N)$ bzw. $\mathcal{J}(N)$. In Lemma 11.1.4 wird jedoch gezeigt, daß sich diese nicht zu einem Slash-Operator auf ganz $\mathcal{G}(N)$ fortsetzen lassen.

Aus dem Beweis des Lemmas geht der Grund dafür hervor. Dort taucht an entscheidender Stelle anstatt der Darstellung

$$\rho : SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(N))), \quad \rho(A)(f) = f \mid_k \gamma(A)$$

die Darstellung

$$\rho_\alpha : SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(N))), \quad \rho_\alpha(A)(f) = \rho(J_\alpha A J_\alpha^{-1})(f),$$

auf. Hierbei ist $\gamma(A) \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma(A) \equiv A \pmod N$. Dies liegt daran, daß die oben definierten Operationen von $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ und von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})/\mathbb{Q})$ auf dem Raum $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ (siehe (2.8)) nicht kommutieren.

Es ist daher naheliegend, die Definition (4) um einen äquivarianten Operator $L(\alpha)$ der Darstellungen ρ und ρ_α zu erweitern, um diesen "Fehler" zu kompensieren. In Satz 12.0.10 wird gezeigt, daß in der Tat der folgende Ansatz

$$f \mid_{k,L} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) = \sum_{\lambda \in L'/L} \varrho_L^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) (f_\lambda \mid_k \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \cdot L(\alpha) \mathfrak{e}_\lambda) \tag{5}$$

zusammen mit dem obigen Slash-Operator auf $\mathcal{S}(N)$ eine Fortsetzung auf ganz $\mathcal{G}(N)$ liefert. Dabei müssen jedoch weitere Bedingungen an den Operator gestellt werden, wie etwa dessen Invertierbarkeit.

Ein solches Resultat ist zwar von theoretischem Interesse, weil es eine Möglichkeit aufzeigt, eine Fortsetzung des Slash-Operators auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$ zu definieren, es stellt sich jedoch die Frage nach der Existenz eines Operators, der alle Voraussetzungen von Satz 12.0.10 erfüllt. Insbesondere stellt sich die Frage, für welche $\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ die beiden Darstellungen ρ und ρ_α äquivalent sind. In Kapitel 7 und 8 wird gezeigt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn α ein quadratischer Rest modulo N ist.

In Kapitel 8 wird ein Operator

$$L(\alpha, r) : M_k(\Gamma(N)) \longrightarrow M_k(\Gamma(N))$$

angegeben, der alle von Satz 12.0.10 geforderten Eigenschaften erfüllt. Die Definition des Operators ist abhängig von der Wahl einer Wurzel r von α modulo N. Da es verschiedene Wurzeln von α gibt, wird diese als Parameter von L mit aufgeführt.

Vor diesem Hintergrund erhält man also mit Ansatz (5) einen Slash-Operator für Matrizen aus $\mathcal{G}(N)$, deren Determinante ein Quadrat modulo N ist. Diese Matrizen bilden eine Untergruppe, die mit $\mathcal{Q}(N)$ bezeichnet wird. Aufgrund der Vieldeutigkeit der Wurzel von α betrachtet man anstatt der Gruppe $\mathcal{Q}(N)$ die Gruppe

$$\mathcal{Q}_1(N) = \left\{(M, r) \in \mathcal{G}(N) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*; \quad \det(M) \equiv r^2 \pmod N\right\}.$$

Mit der Fortsetzung von (1) gelingt dann auch die Definition eines Hecke-Operators in Termen von Doppelnebenklassen $\Gamma(1)(M, r)\Gamma(1)$ aus der Hecke-Algebra $H(\mathcal{Q}_1(N), \Gamma(1))$. Allerdings ist dieser Hecke-Operator zunächst per definitionem nur für Modulformen aus $M_{k,L}^{R_N}$ definiert, was daran liegt, daß der Slash-Operator für Matrizen aus $\mathcal{Q}_1(N)$ nur für solche Modulformen definiert ist. Hierbei ist mit $M_{k,L}^{R_N}$ der Untermodul aller vektorwertigen Modulformen bzgl. ϱ_L gemeint, deren Fourierkoeffizienten in R_N liegen. McGraw hat jedoch in [McG] bewiesen, daß der Raum $M_{k,L}$ eine Basis von Modulformen besitzt, deren Fourierkoeffizienten rational sind. Demzufolge definiert man den Hecke-Operator in Termen von Doppelnebenklassen zunächst auf dem Unterraum $M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$. Die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung auf den Raum $M_{k,L}^{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ ist dann kanonisch.

Zur Definition des Hecke-Operators verwenden wir eine $\mathbb{Q}$-lineare Fortsetzung der Weildarstellung auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$. Wie zuvor gesehen, führt dies zu erheblichen Problemen. Eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung der Weildarstellung würde weite Teile dieser Probleme umgehen und die Definition eines Slash-Operators auf ganz $\mathcal{G}(N)$ erlauben. In [BS] wird eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung der Weildarstellung angegeben, jedoch nur auf die Gruppe $\mathcal{Q}_1(N)$. In diesem Zusammenhang stellt sich daher die Frage, ob es nicht eine $\mathbb{C}$-lineare Erweiterung auf die gesamte Gruppe $\mathcal{G}(N)$ gibt. Wir zeigen in Kapitel 5, daß es eine derartige Fortsetzung im allgemeinen nicht gibt.

Es sei nun $m \in \mathbb{N}$. Falls m teilerfremd zu N ist, sei der Hecke-Operator $T(m^2)^*$ im obigen Sinne definiert durch die Doppelnebenklasse $\Gamma(1)(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), m)\Gamma(1)$. In Kapitel 14 dieser Arbeit wird die Definition der Hecke-Operatoren $T(m^2)^*$ auf alle $m \in \mathbb{N}$ erweitert.

Falls $(m, N) > 1$ gilt, liefert die Reduktion modulo N von Matrizen mit Determinante m^2 keine Elemente aus $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mehr. Demzufolge können die oben beschriebenen Methoden zur Definition von $T(m^2)^*$ nicht mehr herangezogen werden. Es ist dennoch möglich einen Hecke-Operator zu definieren. Da auch hier die Ansätze nicht offensichtlich sind, wird dies im folgenden beschrieben.

Man erhält zunächst eine Fortsetzung des Slash-Operators für $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ durch

$$f \mid_{k,L} \alpha = \sum_{\lambda \in L'/L} (f_\lambda \mid_k \alpha) (\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha) , \tag{6}$$

wobei $f = \sum_{\lambda \in L'/L} f_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ und

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha = \mathfrak{e}_{m\lambda}. \tag{7}$$

Man wählt zunächst $f \in M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$, um einen zum Fall $(m,N) = 1$ kompatiblen Ansatz zu bekommen.

Für $\delta = \gamma\alpha\gamma' \in \Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$ erhält man durch

$$f \mid_{k,L} \delta := \sum_{\lambda \in L'/L} (f_\lambda \mid_k \delta) \left(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma \mid_L \alpha \mid_L \gamma'\right)$$

eine Fortsetzung von (7) auf die Doppelnebenklasse $\Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$. Hierbei ist $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma = \varrho_L^{-1}(\gamma)(\mathfrak{e}_\lambda)$.

Im Unterschied zum Fall $(m,N) = 1$ wird hier nicht erst die Weildarstellung auf α fortgesetzt und *dann* der Slash-Operator passend dazu. Denn aufgrund der Ergebnisse in Abschnitt 14.1 liegt die Vermutung nahe, daß es keine kompatible Fortsetzung der Weildarstellung auf die Matrizen α gibt, die gleichzeitig eine wohldefinierte Fortsetzung auf die Doppelnebenklasse $\Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$ durch

$$\varrho_L(\gamma\alpha\gamma')(\mathfrak{e}_\lambda) = \varrho_L(\gamma)\varrho_L(\alpha)\varrho_L(\gamma')(\mathfrak{e}_\lambda)$$

erlaubt. Der Ansatz (7) stammt aus [BS]. Dort wird gezeigt, daß durch

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \delta = \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma \mid_L \alpha \mid_L \gamma'$$

(7) fortgesetzt werden kann auf die Doppelnebenklasse $\Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$, und zwar unabhängig von der Wahl der Vertreter $\gamma, \gamma' \in \Gamma(1)$. Zwar stimmt (7) *nicht* überein mit $\varrho_L^{-1}(\alpha)$, falls $(m,N) = 1$ gilt, man kann jedoch leicht zeigen, daß (6) bis auf einen Charakter übereinstimmt mit dem Slash-Operator $f \mid_{k,L} \alpha$ für $(m,N) = 1$ und $f \in M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$. Dies zusammengenommen motiviert die Ansätze (7) und (6).

Man erhält damit auf $M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ einen Hecke-Operator $T(m^2)^*$ für $(m,N) > 1$, der dort bis auf den oben erwähnten Charakter mit dem zuvor definierten Hecke-Operator im Falle $(m,N) = 1$ übereinstimmt.

Schließlich wird für alle $m \in \mathbb{N}$ gezeigt, daß der Operator $T(m^2)^*$ selbstadjungiert ist bezüglich des Petersson-Skalarproduktes. Die Familie $\{T(m^2)^*; \quad (m,N) = 1\}$ bildet eine kommutative Unteralgebra von $\mathrm{End}(M_{k,L})$, die den Raum der Spitzenformen auf sich abbildet. Damit besitzt der Raum der Spitzenformen eine Basis aus simultanen Eigenformen bzgl. dieser Familie, und es ist es ist möglich, einer solchen Eigenform ihre Standard L-Reihe zuzuordnen. Satz 14.2.16 zeigt, daß für alle teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$

$$T(m^2)^* T(n^2)^* = T(m^2 n^2)^*$$

gilt. Daraus läßt sich dann schließen, daß die Standard L-Reihe eine Eulerprodukt-Entwicklung besitzt.

Falls die Signatur des Gitters L ungerade ist, so lassen sich alle zuvor aufgeführten Resultate übertragen. In diesem Fall muß man anstelle von $\Gamma(1)$ die zweifache Überlagerung $\widetilde{\Gamma}(1)$ verwenden. Dies hat zur Folge, daß nicht die Gruppen $S(N)$, $G(N)$ und $\mathcal{Q}_1(N)$ operieren, sondern Gruppenerweiterungen davon durch $\{\pm 1\}$. Analog zur Theorie elliptischer Modulformen halbganzen Gewichts (siehe [Sh2]) ergibt sich, daß der Hecke-Operator $T(M, r)$ verschwindet, falls die Determinante von M kein Quadrat ist.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. J. H. Bruinier, der diese Arbeit ermöglicht hat. Ich bin ihm sehr verbunden für seine Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit.

Ferner möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Funke für seine Bereitschaft, als Zweitgutachter zu fungieren, herzlich bedanken.

Mein Dank gilt außerdem Frau Dipl.-Math. Heike Hagemeier, die die zum Teil recht technische Arbeit sehr gründlich durchgesehen und korrigiert hat, sowie allen anderen, die ein stetes Interesse am Fortgang dieser Arbeit hatten.

Kapitel 1

Notationen

In diesem Kapitel sollen einige grundlegende Notationen und Abkürzungen aufgeführt werden. Diese behalten während der gesamten Arbeit ihre Bedeutung, andernfalls wird explizit darauf hingewiesen.

Es ist mit $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ immer das Gewicht gewisser Räume von Modulformen gemeint, mit $\mathbb{H}$ wird die komplexe obere Halbebene bezeichnet. Weiter ist

$$V(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}\}\,. \tag{1.1}$$

Wir verwenden in allen Rechnungen die übliche Abkürzung $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Mit L bezeichnen wir immer ein gerades, nicht ausgeartetes Gitter, wobei die zugehörige Bilinearform durch $(\cdot, \cdot)$ und die quadratische Form durch $x \mapsto x^2/2 = \frac{1}{2}(x, x)$ symbolisiert werden. Häufig kürzen wir die Diskriminantengruppe L'/L mit A ab. Die natürliche Zahl N ist im Zusammenhang mit der Weildarstellung und vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung immer die Stufe des Gitters L. Andernfalls bezeichnet N die Stufe von skalarwertigen Modulformen. Es ist ζ_N standardmäßig das Symbol für eine primitive N-te Einheitswurzel. Neben dem Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ wird auch der Ring $R_N := \mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]$ benötigt. Weiterhin verwenden wir häufig den Restklassenring $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und dessen Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, die wir mit $U(N)$ abkürzen werden. Für zwei ganze Zahlen a, b bezeichnen wir wie üblich mit $\left(\frac{a}{b}\right)$ das Kronecker-Symbol. Für dessen genaue Definition siehe etwa [Bo1] oder [Sh2]. Wir verwenden das Kronecker-Symbol ausschließlich, wie es dort definiert ist. Im Zusammenhang mit der endlichen Gruppe $A = L'/L$ sind zwei Untergruppen später von Interesse. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$A_n = \{x \in A; \quad nx = 0\} \tag{1.2}$$

und

$$A^n = \{x \in A; \quad \exists y \in A : \, ny = x\}\,. \tag{1.3}$$

Die drei Gruppen sind durch die folgende exakte Sequenz miteinander verbunden:

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A \longrightarrow A^n \longrightarrow 0, \tag{1.4}$$

wobei der zweite Pfeil durch Einbettung und der dritte Pfeil durch Multiplikation mit n gegeben ist. Man beachte, daß falls die Gruppenordnung von A teilerfremd zu n ist, so gilt $A_n = \{0\}$ und $A^n = A$. Diese Untergruppen kann man für jede endliche Gruppe definieren. Speziell für $A = L'/L$ erhält man eine Bilinearform und die zugehörige quadratische Form nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ aus der Bilinearform auf L. Wir benutzen die oben eingeführten Symbole ebenfalls für die induzierten Formen. Bezüglich der induzierten Bilinearform ist A_n das orthogonale Komplement von A^n in A.

Neben den Untergruppen A^n und A_n ist noch die folgende Teilmenge von A von Interesse

$$A^{n*} = \left\{\alpha \in A; \quad (\alpha, \lambda) \equiv n\lambda^2/2 \pmod 1 \text{ für alle } \lambda \in A_n\right\}. \tag{1.5}$$

Es gilt

Lemma 1.0.1. *Falls $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, so gilt $A^{n*} = A^n$.*

Beweis. Zum Beweis verwendet man die Zerlegung von A in Jordan-Blöcke. Für Details siehe [Sc]. Falls m eine Primzahl ist, wird in Bemerkung 14.2.10 ein elementarer Beweis für diese Aussage gegeben. □

1.1 Einige Gruppen

In diesem Abschnitt sollen kurz die für diese Arbeit relevanten Gruppen mit den zugehörigen Bezeichnungen aufgeführt werden.

Zunächst ist $GL_2(\mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren 2×2- Matrizen mit reellen Einträgen. Mit $GL_2^+(\mathbb{Q})$ sei die Untergruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$ gemeint, deren Determinante positiv ist. Als weitere Untergruppe spielt die spezielle lineare Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ über den reellen Zahlen eine wichtige Rolle. Dies ist bekanntlich die Menge aller Matrizen aus $GL_2(\mathbb{R})$, deren Determinante 1 ist. Standardmäßig soll M eine Matrix aus einer der oben genannten Gruppen sein. Entsprechend ist $SL_2(\mathbb{Z})$ zu verstehen. Verschiedene sogenannte Kongruenzuntergruppen von $SL_2(\mathbb{Z})$ spielen in dieser Arbeit eine große Rolle. Dabei verwenden wir die Standardsymbole für diese Gruppen. Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}); \quad \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N\} \tag{1.6}$$

die Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N,

$$\Gamma_0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1); \quad c \equiv 0 \pmod N\right\}, \tag{1.7}$$

weiter

$$\Gamma^0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1); \quad b \equiv 0 \pmod N\right\} \tag{1.8}$$

und

$$\Gamma_0^0(N) = \Gamma_0(N) \cap \Gamma^0(N). \tag{1.9}$$

Demnach erhält man für $N = 1$ in allen Fällen $SL_2(\mathbb{Z})$ zurück. Wir setzen $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Elemente aus diesen Gruppen werden wir mit γ bezeichnen.

Eine große Rolle werden die Gruppe $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ und Untergruppen dieser Gruppe spielen. Dabei ist $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ zu verstehen wie die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$. Wir setzen abkürzend

$$G(N) := GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}). \tag{1.10}$$

Weiterhin ist $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ein Normalteiler von $G(N)$. Wir setzen

$$S(N) := SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}). \tag{1.11}$$

Die Elemente aus $S(N)$ wollen wir mit A bezeichnen. Es besteht keine Gefahr der Verwechslung mit dem Symbol $A = L'/L$, da wir auf deren beider Verwendung im selben Kontext verzichten. Schließlich sei

$$J(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \in G(N); \quad \alpha \in U(N)\}\,. \tag{1.12}$$

Es werden im Verlauf dieser Arbeit verschiedene Elemente aus $G(N)$ häufiger benutzt. Für $r \in U(N)$ ist

$$D_r := \left(\begin{smallmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in S(N), \tag{1.13}$$

$$J_r := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in J(N) \tag{1.14}$$

und

$$S_r := \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in G(N). \tag{1.15}$$

Es wird später benutzt, daß $G(N)$ das semidirekte Produkt von $S(N)$ und $J(N)$ ist. Ein Ziel dieser Arbeit ist die Definition eines Hecke-Operators auf dem Raum $M_{k,L}$, der vektorwertigen Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ bezüglich der Weildarstellung. Üblicherweise definiert man einen Hecke-Operator auf Modulformen in Termen einer Hecke-Algebra zu einem Paar von Gruppen. In unserem Fall ist die eine Gruppe eine geeignete Untergruppe von $GL_2^+(\mathbb{Q})$ und die andere Gruppe $\Gamma(1)$. Im folgenden soll diese Gruppe und relevante Untergruppen aufgeführt werden:

$$\mathcal{G}(N) = \left\{ M \in GL_2^+(\mathbb{Q}); \quad \exists r \in \mathbb{Z} \text{ mit } (r,N) = 1, \text{ so daß } rM \in M_2(\mathbb{Z}) \text{ und } (\det(rM), N) = 1 \right\}. \tag{1.16}$$

Man beachte, daß sich immer ein $r \in \mathbb{Z}$ finden läßt, so daß sogar $r \equiv 1 \pmod N$ gilt. Analog zu $G(N) = S(N) \rtimes J(N)$ läßt sich $\mathcal{G}(N)$ als inneres Produkt zweier Untergruppen schreiben. Die $S(N)$ entsprechende Gruppe ist

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(N) = \big\{ M \in GL_2^+(\mathbb{Q}); \quad \exists r \in \mathbb{Z} \text{ mit } (r,N) = 1, \text{ so daß } rM \in M_2(\mathbb{Z}) \\ \text{und } \det(rM) \equiv 1 \pmod N \big\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Die $J(N)$ entsprechende Gruppe ist

$$\mathcal{J}(N) = \left\{ J_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right); \quad \alpha = \frac{r}{s} \text{ mit } (rs, N) = 1 \right\}. \tag{1.18}$$

Dieses innere Produkt ist jedoch nicht semidirekt, da der Schnitt von $\mathcal{S}(N)$ und $\mathcal{J}(N)$ nicht leer ist.

Schließlich ist noch die folgende Untergruppe von $\mathcal{G}(N)$ im weiteren Verlauf der Arbeit von Interesse.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(N) = \big\{ M \in GL_2^+(\mathbb{Q}); \quad \exists r \in \mathbb{Z} \text{ mit } (r,N) = 1, \text{ so daß } rM \in M_2(\mathbb{Z}) \\ \text{und } \det(rM) \equiv \square \pmod N \big\}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

wobei mit $\square$ gemeint ist, daß $\det(rM)$ ein quadratischer Rest modulo N sein soll.

Mit π_N bezeichnen wir die Abbildung,

$$\pi_N : \mathcal{G}(N) \longrightarrow G(N), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \pmod N & b \pmod N \\ c \pmod N & d \pmod N \end{pmatrix},$$

wobei der Bruch r/s modulo N durch $r \pmod N \cdot s^{-1} \pmod N$ reduziert wird. Man beachte, daß die Reduktion modulo N in diesem Sinne für Matrizen aus $\mathcal{G}(N)$ immer möglich ist.

Kapitel 2

Modulformen zu $\Gamma(N)$

Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$, ganzen und halbganzen Gewichts, spielen in dieser Arbeit eine große Rolle. Ausführliche Darstellungen zu diesen Modulformen findet man zum Beispiel in [Ko]. Im ersten Abschnitt sollen kurz die Definitionen von Modulformen zu $\Gamma(N)$, sowohl ganzen wie halbganzen Gewichts angegeben werden. Dies geschieht vor allem deshalb, um gewisse Notationen für den restlichen Verlauf der Arbeit festzulegen.

Der zweite Abschnitt enthält einige arithmetische Eigenschaften der Räume $M_k(\Gamma(N))$. Dies sind einfache Resultate, die im wesentlichen auf dem q-Entwicklungsprinzip beruhen, allerdings in der Form vermutlich nirgendwo in der Literatur zu finden sind. Diese Resultate gelten meistens unabhängig davon, ob das Gewicht ganz oder halbganz ist.

2.1 Definitionen

Um Räume von Modulformen halbganzen Gewichts zu definieren, muß man eine Operation einer zentralen Erweiterung der Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ auf der Menge der Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ einführen. Im folgenden bezeichne $z^{1/2} = \sqrt{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ den Zweig der Wurzel mit $\arg(\sqrt{z}) \in (-\pi/2, \pi/2]$. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $z^{k/2} = \sqrt{z}^k$. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ sei

$$j(M, \tau) = \sqrt{c\tau + d}. \tag{2.1}$$

Mit $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Paare $(M, \phi(\tau))$, wobei $M \in SL_2(\mathbb{R})$ ist und $\phi(\tau) = j(M, \tau)$ oder $-j(M, \tau)$. Bekanntlich ist $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ eine Gruppe, wobei die Multiplikation durch

$$(M_1, \phi_1(\tau))(M_2, \phi_2(\tau)) = (M_1 M_2, \phi_1(M_2\tau)\phi_2(\tau))$$

gegeben ist. Es sei

$$P : \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R}), \quad (M, \phi(\tau)) \mapsto M$$

die Projektion auf die erste Komponente. Weiterhin bezeichnen wir für eine beliebige Untergruppe Γ das Urbild unter P mit $\tilde{\Gamma}$, so wie mit $\tilde{\gamma}$ eines der beiden Urbilder von γ.

Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ kann man nun auf der Menge der Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Operation von $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ durch

$$(f \mid_k (M, \phi))(\tau) = \phi(\tau)^{-2k} f(M\tau) \tag{2.2}$$

definieren.

Die Erweiterung $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ von $SL_2(\mathbb{R})$ ermöglicht die Definition der Slash-Operation (2.2), auch wenn k echt in $\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ enthalten ist. Geht man zu der Untergruppe $\Gamma_0(4)$ oder $\Gamma^0(4)$ über, so kann man ohne eine Gruppenerweiterung einen Automorphiefaktor und damit eine Slash-Operation definieren. Für die Details siehe [Ko].

Definition 2.1.1 (und Satz). *Es sei* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4) \cup \Gamma^0(4)$. *Dann definiert*

$$J(\gamma,\tau) := \epsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d}\right) \sqrt{c\tau + d} \tag{2.3}$$

einen Automorphiefaktor für die Gruppe $\Gamma_0(4)$, *wobei*

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4 \\ i, & \text{falls } d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{2.4}$$

Falls 4 ein Teiler von N ist, bildet $\Gamma(N)$ eine Untergruppe von $\Gamma_0(4)$. Der Automorphiefaktor J ist für Elemente aus $\Gamma(N)$ etwas einfacher,

$$J(\gamma,\tau) = \left(\frac{c}{d}\right) \sqrt{c\tau + d}. \tag{2.5}$$

Aufgrund der Gleichung

$$J(\gamma,\gamma'\tau)J(\gamma',\tau) = J(\gamma\gamma',\tau) \tag{2.6}$$

kann man

$$\Gamma(N)^* := \{(\gamma, J(\gamma,\tau)); \quad \gamma \in \Gamma(N)\} \tag{2.7}$$

als Untergruppe von $\widetilde{\Gamma}(1)$ auffassen. Es gilt sogar

Proposition 2.1.2. *Die Gruppe* $\Gamma(N)^*$ *ist ein Normalteiler von* $\widetilde{\Gamma}(1)$.

Beweis. Siehe [Sko], Seite 3. ☐

Definition 2.1.3. *Es sei* $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$. *Mit* $M_k(\Gamma(N))$ *sei der Raum der holomorphen Modulformen vom Gewicht* k *zu* $\Gamma(N)$ *bezeichnet, wobei* N *durch 4 teilbar sein soll, falls* $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ *gilt. Genauer liegt eine Funktion* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *in* $M_k(\Gamma(N))$, *wenn gilt*

1. f *ist holomorph auf* $\mathbb{H}$,
2. *für alle* $\gamma \in \Gamma(N)$ *gilt*
   $f \mid_k \gamma = f$, *falls* $k \in \mathbb{Z}$ *bzw.*
   $f \mid_k (\gamma, J(\gamma,\tau)) = f$, *falls* $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$,
3. *für alle* $(\gamma,\phi) \in \widetilde{\Gamma}(1)$ *besitzt* $f \mid_k (\gamma,\phi)$ *eine Fourierentwicklung der Gestalt*
   $$f \mid_k (\gamma,\phi) = \sum_{n\geq 0} a(n)e(n/N\tau).$$

   Entsprechend gilt dies für ganzes Gewicht.

2.2 Arithmetik von Modulformen zu $\Gamma(N)$

Die nun folgenden Resultate machen im wesentlichen Aussagen über die Existenz einer Basis von $M_k(\Gamma(N))$ mit Fourierkoeffizienten in gewissen Unterringen von $\mathbb{C}$.

Entscheidend dafür sind die beiden folgenden Theoreme. Insbesondere ermöglichen diese die sinnvolle Definition einer Galoisaktion auf Modulformen zu $\Gamma(N)$ mit Fourierkoeffizienten in einem gewissen Unterring oder Teilkörper von $\mathbb{C}$. Alle Aussagen sind gültig, unabhängig davon, ob $k \in \mathbb{Z}$ oder ob $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Satz 2.2.1 (([Sh1], Theorem 3.52),([SS], Lemma 8)). *Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Der Raum $M_k(\Gamma(N))$ besitzt eine Basis von Modulformen, deren Fourierkoeffizienten bei Unendlich in $\mathbb{Z}$ liegen.*

Satz 2.2.2 (q-Entwicklungsprinzip, [Ka]). *Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $N' = \mathrm{kgV}(N, 8)$ und $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(1)$. Es sei $f \in M_k(\Gamma(N))$ mit Fourierkoeffizienten bei Unendlich in $R_{N'}$. Dann liegt $f \mid_k \tilde{\gamma}$ ebenfalls in $M_k(\Gamma(N))$ und besitzt eine Fourierentwicklung in der Spitze Unendlich mit Koeffizienten in $R_{N'}$.*

Definition 2.2.3. *Es sei R ein Unterring der komplexen Zahlen. Mit $M_k^R(\Gamma(N))$ sei die Menge aller Modulformen aus $M_k(\Gamma(N))$ bezeichnet, deren Fourierentwicklung bei Unendlich Koeffizienten in R besitzt,*

$$M_k^R(\Gamma(N)) = \{f \in M_k(\Gamma(N));\ a(n, f)_\infty \in R \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.8}$$

Als Folgerung aus Theorem 2.2.1 erhält man

Korollar 2.2.4. *i) Sei R ein Unterring der komplexen Zahlen. Dann gilt*

$$M_k^R(\Gamma(N)) \cong M_k^{\mathbb{Z}}(\Gamma(N)) \otimes R. \tag{2.9}$$

ii) Es gilt außerdem

$$M_k(\Gamma(N)) \cong M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

Beweis. **zu i)** Der Isomorphismus ist in der einen Richtung gegeben durch

$$f \otimes c \mapsto cf.$$

Für die Rückrichtung wählt man eine Basis $\{f_1, \ldots, f_r\}$ von $M_k^R(\Gamma(N))$, deren Fourierentwicklung bei Unendlich ganzzahlige Koeffizienten besitzt (eine solche existiert nach Theorem 2.2.1), und setzt

$$\sum_{i=1}^{r} c_i f_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes c_i.$$

zu ii) Der Isomorphismus ist in beiden Richtungen wie für den ersten Teil des Beweises gegeben. Man beachte dabei, daß $\mathbb{Z} \subset R_N$, so daß eine Basis von $M_k(\Gamma(N))$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten insbesondere eine Basis von $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ ist. $\square$

Definition 2.2.5. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und $f \in M_k^K(\Gamma(N))$ mit Fourierentwicklung $f = \sum_{n\geq 0} a(n)q^n$, wobei $q = e(n\tau/N)$ sei. Dann kann man formal die konjugierte Form*

$$f^\sigma := \sum_{n\geq 0} a(n)^\sigma q^n \tag{2.11}$$

als Element von $K[[q]]$ bilden. Da σ ein Automorphismus von K ist, definiert die Abbildung

$$\sum_{n\geq 0} a(n)q^n \mapsto \sum_{n\geq 0} a(n)^\sigma q^n$$

einen Ringisomorphismus von $K[[q]]$.

Satz 2.2.6. *i) Sei $F \subset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann operiert $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ auf $M_k^F(\Gamma(N))$ durch*

$$f \mapsto f^\sigma, \tag{2.12}$$

wobei f^σ definiert ist wie in (2.11).

ii) Ist F ein Zahlkörper und $\mathcal{O}_F$ sein Ganzheitsring, so definiert (2.12) eine Operation von $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ auf $M_k^{\mathcal{O}_F}(\Gamma(N))$.

Beweis. **zu** *i)*

Zunächst muß man sich davon überzeugen, daß f^σ wieder in $M_k^F(\Gamma(N))$ liegt. Mit Theorem 2.2.1 bzw. Korollar 2.2.4 existiert eine Basis $\{f_1, \ldots, f_r\}$ von $M_k^F(\Gamma(N))$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, so daß sich f in der Form $f = \sum_{i=1}^r c_i f_i$ darstellen läßt. Die Koeffizienten c_i sind aus dem Körper F. Daher gilt $f^\sigma = \sum_{i=1}^r c_i^\sigma f_i \in M_k^F(\Gamma(N))$. Daß durch (2.12) eine Operation definiert wird, ist klar.

zu *ii)*

Mit dem ersten Teil folgt, daß $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ auf $M_k^F(\Gamma(N))$ operiert. Falls nun die Galoisgruppe $\mathcal{O}_F$ auf sich abbildet, folgt die Behauptung mit dem gleichen Argument wie in *i*). Dies folgt aber unmittelbar aus der Definition der ganzalgebraischen Zahlen. □

Korollar 2.2.7. *Sei $F = \mathbb{Q}(\zeta_N)$ der N-te Kreisteilungskörper und R_N der oben definierte Ring. Dann definiert (2.12) eine Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ auf dem Raum $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.2.6 folgt, daß es genügt zu zeigen, daß R_N durch $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ wieder auf sich abgebildet wird. Dies ist aber klar, da R_N aus Elementen der Form $\sum_{i=(i_1,i_2)} a_i (1/N)^{i_1} \zeta_N^{i_2}$ besteht. □

2.2.1 Fortsetzung der Galoisaktion auf Modulformen beliebiger Stufe

Man kann völlig analog zu $\widetilde{S}L_2(\mathbb{R})$ die Erweiterung

$$\widetilde{G}L_2(\mathbb{R}) = \{(M, \phi(\tau)); \quad M \in GL_2(\mathbb{R}), \phi(\tau) = \pm j(M,\tau)\}$$

von $GL_2(\mathbb{R})$ definieren. Damit läßt sich die Operation (2.2) fortsetzen auf diese Gruppe:

$$(f\,|_k\,(M,\phi))(\tau) = \phi(\tau)^{-2k} f(M\tau).$$

Man beachte, daß in der Literatur (zum Beispiel [Sh2] und [Ko]) üblicherweise $\phi(\tau) = \pm\det(M)^{-1/4} j(M,\tau)$ gesetzt wird. Hier soll auf den Faktor $\det(M)^{-1/4}$ verzichtet werden, um technische Schwierigkeiten im weiteren Verlauf der Arbeit zu vermeiden.

Lemma 2.2.8. *Es sei $d = p_1 \cdots p_r \in \mathbb{Z}$ eine ungerade quadratfreie Zahl und $m = 4p_1 \cdots p_r$. Dann gilt $\sqrt{d} \in R_m$.*

Beweis. Dies ist mehr oder weniger eine Aussage aus [Ri], Kapitel 4.2, allerdings mit der (offensichtlichen) leichten Verschärfung, daß $\sqrt{d}$ sogar in R_m liegt. Bekanntlich gilt

$$p = \tau^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\sum_{a \in U(p)} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta_p^a \right)^2 ,$$

so daß $\sqrt{p} \in R_p$, falls $p \equiv 1 \pmod 4$ oder $\sqrt{p} \in R_{4p}$, falls $p \equiv 3 \pmod 4$. □

Proposition 2.2.9. *Es sei $t \in \{\pm 1\}$, $\xi = (\alpha, tj(\alpha, \tau)) \in \widetilde{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, $r \in \mathbb{Z}$, so daß $r\alpha \in M_2(\mathbb{Z})$ und $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$. Dann gilt $f \mid_k \xi \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$, wobei $D = \det(r\alpha)$ gilt.*

Beweis. Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß $\alpha \in M_2(\mathbb{Z})$, andernfalls kann mit einer geeigneten Skalarmatrix multiplizieren. Mit dem Elementarteilersatz folgt

$$\xi = \gamma \left(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), \sqrt{n} \right) \gamma',$$

wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $D = mn = \det(\alpha)$ und $\gamma, \gamma' \in \widetilde{\Gamma}(1)$. Da $f \mid_k \gamma \in M_k(\Gamma(N))$ für $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(1)$ und $\Gamma(N)^*$ ein Normalteiler in $\widetilde{\Gamma}(1)$ ist, genügt es die Behauptung direkt für $\xi = \left(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), \sqrt{n} \right)$ zu zeigen. Sei also $\gamma_{ND} = \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{c}{d}\right) \sqrt{c\tau + d} \right) \in \Gamma(ND)^*$. Dann gilt gemäß [Sh2], Prop. 1.2

$$\begin{aligned} f \mid_k \xi \mid_k \gamma_{ND} =& f \mid_k \xi \mid_k \xi^{-1} \left(\begin{pmatrix} a & mb/n \\ nc/m & d \end{pmatrix}, \left(\frac{mnc}{d}\right) \sqrt{cn/m\tau + d} \right) \xi \mid_k (1, \left(\frac{mn}{d}\right)) \\ =& \left(\frac{D}{d}\right) f \mid_k \xi \\ =& f \mid_k \xi, \end{aligned}$$

da $\left(\frac{D}{d}\right) = \left(\frac{d}{D}\right) = 1$. Dies gilt, da $d \equiv 1 \pmod{ND}$, also insbesondere $d \equiv 1 \pmod 4$ und $d \equiv 1 \pmod D$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Fourierentwicklung von $f \mid_k \xi$ Koeffizienten in R_{ND} besitzt. Aufgrund von Satz 2.2.2 und der obigen Zerlegung von ξ genügt es $f \mid_k \left(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), \sqrt{n} \right) \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ zu zeigen. Es sei die Fourierentwicklung von f gegeben durch $f = \sum_{l \geq 0} a(l) e(l\tau/N)$. Dann ist $f \mid_k \xi = \sum_{l \geq 0} b(l) e(l\tau/Nn)$ mit

$$b(l) = \begin{cases} \sqrt{n}^{-2k} a(l/m) & \text{falls } m \mid l, \\ 0 & \text{sonst }. \end{cases}$$

Da gemäß Lemma 2.2.8 $\sqrt{n}$ in R_{4n} liegt, also insbesondere in R_{ND}, folgt die Behauptung (man beachte, daß $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, so daß $4 \mid N$). □

Es sei $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ und $\tilde{M} \in \widetilde{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ mit $\det(M) = D$ teilerfremd zu N. Gemäß Korollar 2.2.7 läßt sich eine Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ definieren. Später wird es notwendig sein, eine Galoisaktion von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ auf $f \mid_k \tilde{M}$ zu erklären. Vor dem Hintergrund von Proposition 2.2.9 ist es also notwendig, einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ auf primitive ND-te Einheitswurzeln ζ_{ND} fortzusetzen.

Die Elemente aus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ sind von der Form

$$\sigma_\alpha : \zeta_N \mapsto \zeta_N^\alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu N ist. Es ist nun $\sigma_\alpha(\zeta_{ND})$ im allgemeinen nicht wohldefiniert, da α nicht unbedingt teilerfremd zu D ist.

Um nun ein Element aus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ fortzusetzen auf $\mathbb{Q}(\zeta_{ND})$, $(D,N)=1$, betrachte die Isomorphie

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \cong U(N), \quad \sigma_\alpha \mapsto \alpha. \tag{2.13}$$

Hier bezeichne α auch die zugehörige Restklasse in $U(N)$. Über den Ringisomorphismus

$$\psi_D : (Z/N\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/ND\mathbb{Z}) \tag{2.14}$$

erhält man zu α eine Restklasse

$$\alpha_D := \psi_D(\alpha, 1) \in U(ND) \tag{2.15}$$

und damit via (2.13) einen Galoisautomorphismus $\sigma_{\alpha_D} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{ND}/\mathbb{Q})$. Wir setzen also

$$\sigma_\alpha(\zeta_{ND}) := \sigma_{\alpha_D}(\zeta_{ND}). \tag{2.16}$$

Lemma 2.2.10. *Es seien $N, D \in \mathbb{N}$ mit $(N,D)=1$ und $N \equiv 0 \pmod 4$. Weiter seien $\alpha \in U(N)$, α_D definiert durch* (2.13)*, und d die Anzahl der Primteiler von D, die kongruent* 3 *modulo* 4 *sind. Dann gilt*

$$\sigma_{\alpha_D}(\sqrt{D}) = \sqrt{D},$$

falls $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ ist. Falls $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ ist, so gilt

$$\sigma_{\alpha_D}(\sqrt{D}) = \begin{cases} \sqrt{D}, & \textit{falls } d \textit{ gerade ist,} \\ -\sqrt{D}, & \textit{falls } d \textit{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Beweis. Es kann D ohne Einschränkung als quadratfrei angenommen werden. Für jeden Primteiler p von D gilt

$$\sqrt{p} = \epsilon_p \sum_{a \in U(p)} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta_p^a. \tag{2.17}$$

Da $\alpha_D \in U(ND)$, gilt insbesondere für jeden Vertreter $r \in \alpha_D$, daß $(r,p)=1$. Bezeichnet man die Gauss-Summe in (2.17) mit $\tau(p)$, so ergibt sich

$$\tau(p)^{\sigma_{\alpha_D}} = \tau(p),$$

so daß

$$\sqrt{p}^{\sigma_{\alpha_D}} = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{falls } \alpha_D \text{ quadratischer Rest,} \\ \left(\frac{-1}{p}\right)\sqrt{p}, & \text{falls } \alpha_D \text{ quadratischer Nichtrest.} \end{cases}$$

$\square$

Notation 2.2.11. *Im weiteren Verlauf werden α_D und σ_α immer auf diese Weise erklärt.*

Lemma 2.2.12. *Es sei* $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$*,* $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$*,* $\xi(a,b,d) = (A, j(A,\tau)) \in \tilde{\mathcal{G}}(N)$ *und* $r \in \mathbb{Z}$*, so daß* $rA \in M_2(\mathbb{Z})$*. Setze* $D = \det(rA)$*. Es sei weiterhin* $\alpha \in U(N)$ *ein quadratischer Rest,* $\sigma_\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ *und* $\beta \in \mathbb{Z}$ *ein beliebiger Vertreter aus der Restklasse* $\alpha_D^{-1} \in U(ND)$*.*

Dann gilt

$$(f \mid_k \xi(a, b\beta, d))^{\sigma_\alpha} = f^{\sigma_\alpha} \mid_k \xi(a,b,d). \tag{2.18}$$

Beweis. Zunächst einmal ist zu bemerken, daß die linke Seite von (2.18) unabhängig ist vom gewählten Vertreter $\beta \in \alpha_D^{-1}$. Dies bestätigt man direkt durch Nachrechnen auf der Fourierentwicklung von $f = \sum_{n \geq 0} a(n) e(n\tau/N)$. Weiterhin sei ohne Einschränkung $A \in M_2(\mathbb{Z})$ und $D = \det(A)$.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
(f \mid_k \xi(a, b\beta, d))^{\sigma_\alpha} &= \left(\sum_{n \geq 0} \sqrt{d}^{-2k} a(n) e(nb\beta/Nd) e(na\tau/Nd) \right)^{\sigma_\alpha} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sqrt{d}^{-2k} a(n)^{\sigma_\alpha} e(nb\beta\alpha/Nd) e(na\tau/Nd) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sqrt{d}^{-2k} a(n)^{\sigma_\alpha} e(nb/Nd) e(na\tau/Nd) \\
&= f^{\sigma_\alpha} \mid_k \xi(a,b,d).
\end{aligned}$$

Die zweitletzte Gleichung gilt, da $\alpha\beta \equiv 1 \pmod{ND}$. □

Korollar 2.2.13. *Es sei* $\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$ *und* $\xi(m,n) = (\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), t\sqrt{n}) \in \tilde{\mathcal{G}}(N)$*. Weiter sei* $f \in M_k(\Gamma(N))$ *und* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$*. Dann gilt*

$$f^\sigma \mid_k \xi(m,n) = (f \mid_k \xi(m,n))^\sigma. \tag{2.19}$$

□

Kapitel 3

Eine Erweiterung der Gruppe $S(N)$

In diesem Kapitel soll eine Gruppenerweiterung $\tilde{S}(N)$ von $S(N)$ durch die abelsche Gruppe $\{\pm 1\}$ konstruiert werden. Es wird sich zeigen, daß diese Gruppe isomorph ist zu $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß es über diese Isomorphie möglich ist, die Weildarstellung als Darstellung von $\tilde{S}(N)$ zu interpretieren. Dies ist der Ausgangspunkt, um die Weildarstellung auszudehnen auf die Gruppe $G(N) \times \{\pm 1\}$.

Im folgenden soll kurz beschrieben werden, wie man $\widetilde{\Gamma}(1)$ aus $\Gamma(1)$ erhält, im wesentlichen um den Zusammenhang von $\tilde{S}(N)$ zu $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ zu beschreiben, und um einen Teil der Notation für die restliche Arbeit zu fixieren.

Bekanntlich definiert

$$f \mid_k \gamma = j(\gamma, \tau)^{-2k} f(\gamma\tau), \quad \gamma \in \Gamma(1), \tag{3.1}$$

eine projektive Darstellung von $\Gamma(1)$ auf $V(\mathbb{H})$, falls $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Denn aufgrund der Zweideutigkeit der Wurzel ist j kein Automorphiefaktor, vielmehr gilt die Gleichung

$$j(\gamma\gamma', \tau) = \omega(\gamma, \gamma') j(\gamma, \gamma'\tau) j(\gamma', \tau), \tag{3.2}$$

wobei

$$\omega : \Gamma(1) \times \Gamma(1) \longrightarrow \{\pm 1\} \tag{3.3}$$

bestimmt ist durch die Wurzel von j.

Aus der Assoziativität der Gruppenmultiplikation und der Gleichung

$$f \mid_{k/2} \gamma\gamma' = \omega(\gamma, \gamma') f \mid_k \gamma \mid_k \gamma' \tag{3.4}$$

folgt die Kozykelrelation

$$\omega(\gamma, \gamma'\gamma'')\omega(\gamma', \gamma'') = \omega(\gamma\gamma', \gamma'')\omega(\gamma, \gamma') \tag{3.5}$$

für $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma(1)$.

D. h. ω gibt Anlaß zu einer zentralen Gruppenerweiterung $\widetilde{\Gamma}(1)$ von $\Gamma(1)$ durch die Gruppe $\{\pm 1\}$.

Definition 3.0.14. *Sei G eine Gruppe, A eine abelsche Gruppe. Eine zentrale Gruppenerweiterung von G durch A ist eine Gruppe $\tilde{G}$ zusammen mit einer kurzen exakten Sequenz*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \tilde{G} \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1, \tag{3.6}$$

derart, daß $\alpha(A)$ Untergruppe des Zentrums von $\tilde{G}$ ist.

Bemerkung 3.0.15. *Seien G, A Gruppen und $\sigma : G \times G \to A$ ein Kozykel, dann kann man eine Gruppenerweiterung $\tilde{G}_\sigma$ von G durch A wie folgt definieren. $\tilde{G}_\sigma := G \times A$ mit der Multiplikation*

$$(g, a) \cdot (g', a') = (gg', aa'\sigma(a, a')). \tag{3.7}$$

Dies ist eine Gruppenmultiplikation, da σ ein Kozykel ist.

Die Abbildung α in (3.6) *ist in diesem Fall definiert durch $a \mapsto (1, a)$ und entsprechend β durch $(g, a) \mapsto g$.*

In der gleichen Weise wird $\widetilde{\Gamma}(1)$ konstruiert. Da der Kozykel ω hier von der Wurzel j bestimmt ist, wird diese zusätzlich mit in die Definition der Gruppenelemente aufgenommen.

Man kommt also zu

$$\widetilde{\Gamma}(1) = \{(\gamma, \pm j(\gamma, \tau))\,; \quad \gamma \in \Gamma(1)\}\,. \tag{3.8}$$

Die Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ ist eine zentrale Gruppenerweiterung von $\Gamma(1)/\Gamma(N)$, definiert durch die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^* \xrightarrow{\ p\ } \Gamma(1)/\Gamma(N) \longrightarrow 1, \tag{3.9}$$

wobei

$$i : \{\pm 1\} \mapsto (1, \pm 1)\Gamma(N)^* \tag{3.10}$$

die Einbettung ist und

$$p : (\gamma, \phi)\Gamma(N)^* \mapsto \gamma\Gamma(N) \tag{3.11}$$

die Projektion auf die erste Komponente.

Ersetzt man die Projektion p durch die Abbildung $\pi_N \circ p$ in der Sequenz (3.9), so erhält man, daß $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ zusammen mit dieser neuen Sequenz auch eine Gruppenerweiterung von $S(N)$ durch $\{\pm 1\}$ ist.

Wählt man einen Schnitt

$$s : S(N) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*, \tag{3.12}$$

d. h., es gilt $\pi_N \circ p \circ s = \mathrm{id}_{S(N)}$, so wird ein Kozykel

$$\omega_{S(N)} : S(N) \times S(N) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

durch die Gleichung

$$s(A)s(B) = i(\omega_{S(N)}(A, B))s(AB) \tag{3.13}$$

definiert.

Hier soll der Schnitt "normiert" sein in dem Sinne, daß $s(1) = \Gamma(N)^*$ gilt. In diesem Fall folgt aus (3.13), daß $\omega_{S(N)}(A, 1) = \omega_{S(N)}(1, B) = 1$ gilt.

Definition 3.0.16. *Es sei $A \in S(N)$ und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$, so daß $\gamma \equiv A \pmod N$ gilt. Dann setzen wir*

$$s(A) := \left(\gamma, \left(\frac{c}{d}\right) j(\gamma, \tau)\right) \Gamma(N)^*. \tag{3.14}$$

Im folgenden lassen wir $\Gamma(N)^*$ häufiger weg.

Der Kozykel $\omega_{S(N)}$ kann auch als Kozykel von $\Gamma(1)$ verstanden werden, indem man den Schnitt s von $\Gamma(1)$ nach $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ betrachtet:

$$\omega_{S(N)} : \Gamma(1) \times \Gamma(1) \mapsto \{\pm 1\},$$

definiert durch

$$s(\gamma)s(\gamma') = i(\omega_{S(N)}(\gamma, \gamma'))s(\gamma\gamma').$$

Lemma 3.0.17. *Die Kozykeln ω und $\omega_{S(N)}$ (als Kozykel von $\Gamma(1)$) sind kohomolog. Der Korand ist gegeben durch*

$$\eta : \Gamma(1) \to \{\pm 1\}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\frac{c}{d}\right). \tag{3.15}$$

Beweis. Es seien $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \gamma' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$, dann gilt

$$s(\gamma) = \left(\gamma, \left(\frac{c}{d}\right) j(\gamma, \tau)\right), \qquad s(\gamma') = \left(\gamma', \left(\frac{c'}{d'}\right) j(\gamma', \tau)\right),$$

und

$$s(\gamma\gamma') = \left(\gamma\gamma', \left(\frac{a'c + c'd}{b'c + dd'}\right) j(\gamma\gamma', \tau)\right).$$

Aus

$$j(\gamma, \gamma'\tau)j(\gamma', \tau) = \omega(\gamma, \gamma')j(\gamma\gamma', \tau)$$

und $s(\gamma)s(\gamma) = i(\omega_{S(N)}(\gamma, \gamma'))s(\gamma\gamma')$ folgt

$$\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right) j(\gamma, \gamma'\tau)j(\gamma', \tau) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right) \omega(\gamma, \gamma')j(\gamma\gamma', \tau),$$

sowie

$$\omega_{S(N)}(\gamma, \gamma') = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right)\left(\frac{a'c + c'd}{b'c + d'd}\right) \omega(\gamma, \gamma').$$

Dies gibt die Behauptung. □

Proposition 3.0.18. *Die Menge $\widetilde{S}(N) = S(N) \times \{\pm 1\}$ wird mit der folgenden Multiplikation*

$$(A, t_1)(B, t_2) = (AB, t_1 t_2 \omega_{S(N)}(A, B))$$

zu einer Gruppe. Diese Gruppe ist isomorph zu $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$.

Beweis. Der Isomorphismus ist definiert durch

$$\Psi : (A, t) \mapsto i(t)s(A). \tag{3.16}$$

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$(\gamma, tj(\gamma, \tau))\Gamma(N)^* \mapsto (\pi_N(\gamma), t\eta(\gamma))).$$

□

Man beachte, daß aus der Definition von Ψ folgt, daß für jedes $(\gamma_N, J(\gamma_N, \tau))$ $\psi^{-1}(\gamma_N, J(\gamma_N, \tau)) = (1, 1) \in \widetilde{S}(N)$ gilt. Daher ist $\widetilde{S}(N)$ als Gruppenerweiterung äquivalent zu $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$.

Kapitel 4

Zur Weildarstellung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$ und mit Erweiterungen dieser auf geeignete Untergruppen von $\widetilde{G}L_2^+(\mathbb{Q})$.

Die Weildarstellung wurde von Weil [Wei] als eine projektive Darstellung von $\mathrm{Sp}(G)$ auf dem Raum $L^2(G)$ eingeführt, wobei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe ist, die zu sich selbst dual ist. Wählt man für G die Diskriminantengruppe eines geraden Gitters L, so erhält man die Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir die Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$ und stellen die für uns relevanten Tatsachen im Zusammenhang mit der Weildarstellung dar. Im wesentlichen richtet sich diese Darstellung nach [Br1], [McG] und [BS].

4.1 Die Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$

Es sei L ein nichtausgeartetes, gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-). Es bezeichne $(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform auf L und $x \mapsto x^2/2 = \frac{1}{2}(x,x)$ die zugehörige quadratische Form. Weiterhin sei $\mathrm{sig}(L) = b^+ - b^-$ die Signatur von L. Es sei L' das zu L duale Gitter, d.h.

$$L' = \{x \in L \otimes \mathbb{Q}; \quad (x,y) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } y \in L\ \}\,.$$

Da L gerade ist, gilt $L \subset L'$, und es ist L'/L eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung dem Absolutbetrag der Determinante der Grammatrix entspricht.

Definition 4.1.1. *Es sei $(L, (\cdot,\cdot))$ wie oben definiert. Es sei $\mathbb{C}[L'/L]$ der Gruppenring von L'/L mit der Standardbasis $\{\mathfrak{e}_\lambda\}_{\lambda\in L'/L}$ und*

$$T = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1\right), \qquad S = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{\tau}\right)$$

die Standarderzeuger von $\widetilde{\Gamma}(1)$, dann wird durch

$$\varrho_L(T)(\mathfrak{e}_\lambda) = e(\lambda^2/2)\mathfrak{e}_\lambda, \tag{4.1}$$

$$\varrho_L(S)(\mathfrak{e}_\lambda) = \frac{e(-\mathrm{sig}(L)/8)}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_{\mu\in L'/L} e(-(\lambda,\mu))\mathfrak{e}_\mu \tag{4.2}$$

die Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$ definiert.

Bemerkung 4.1.2. *Es bezeichne* $Z = \left(\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right), i \right)$ *den Standarderzeuger des Zentrums von* $\widetilde{\Gamma}(1)$*. Es gelten in* $\widetilde{\Gamma}(1)$ *die folgenden Relationen:* $S^2 = (ST)^3 = Z$*. Man rechnet nach, daß die Weildarstellung diese Relationen respektiert. Es ist*

$$\varrho_L(Z)(\mathfrak{e}_\lambda) = e(-\operatorname{sig}(L)/4)\mathfrak{e}_{-\lambda}. \tag{4.3}$$

Weiter gilt $Z^2 = (1, -1)$ *und* $\varrho_L(Z^2)(\mathfrak{e}_\lambda) = (-1)^{\operatorname{sig}(L)}\mathfrak{e}_\lambda$*, so daß* $\varrho_L(M, \phi) = (-1)^{\operatorname{sig}(L)} \varrho_L(M, -\phi)(\mathfrak{e}_\lambda)$ *gilt. Damit faktorisiert die Weildarstellung über* $\Gamma(1)$*, falls die Signatur von* L *gerade ist.*

Bemerkung 4.1.3. *Es gilt die Formel von Milgram ([MH]):*

$$g(L) := \sum_{\lambda \in L'/L} e(\lambda^2/2) = \sqrt{|L'/L|}\, e(\operatorname{sig}(L)/8). \tag{4.4}$$

Die *Stufe* des Gitters L sei definiert als die kleinste natürliche Zahl N, für die $N\lambda^2/2 \in \mathbb{Z}$ gilt für alle $\lambda \in L'$. *Wann immer im folgenden die Zahl* N *im Zusammenhang mit der Weildarstellung auftaucht, so ist damit die Stufe des Gitters gemeint.*

Satz 4.1.4 (siehe [BS]). *Es sei* L *ein gerades Gitter der Stufe* N *und* ϱ_L *die zugehörige Weildarstellung. Dann ist* ϱ_L *trivial auf* $\Gamma(N)$*, falls* $\operatorname{sig}(L)$ *gerade ist. Falls* $\operatorname{sig}(L)$ *ungerade ist, so ist die Weildarstellung trivial auf* $\Gamma(N)^*$*.*

Damit faktorisiert ϱ_L *über die endliche Gruppe* $\Gamma(1)/\Gamma(N)$*, falls* $\operatorname{sig}(L)$ *gerade bzw. über die Gruppe* $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$*, falls* $\operatorname{sig}(L)$ *ungerade ist.* □

Das folgende Lemma macht eine Aussage über die Arithmetik der Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$.

Lemma 4.1.5 ([McG], Lemma 2.4). *Bezüglich der Basis* $\{\mathfrak{e}_\lambda\}_{\lambda \in L'/L}$ *gilt für alle* $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(1)$*, daß die Koeffizienten von* $\varrho_L(\gamma)$ *in* R_N *liegen.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Stufe von L und den Formeln (4.1), (4.2) zusammen mit Milgrams Formel. □

Wie in [McG] setzen wir für $a, d \in \mathbb{Z}$, beide koprim zu N, mit $ad \equiv 1 \pmod{N}$

$$R_d := ST^dS^{-1}T^aST^d. \tag{4.5}$$

Man bestätigt leicht, daß $R_d = (\gamma, \phi)$, wobei $\gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right) \pmod{N}$.

Lemma 4.1.6 ([McG], Lemma 4.6). *Für* a, d *wie oben gilt*

$$\varrho_L(R_d)\mathfrak{e}_\lambda = \frac{g_d(L)}{g(L)}\mathfrak{e}_{d\lambda}. \tag{4.6}$$

Hier bezeichnet $g_d(L)$ *die Gauss-Summe*

$$g_d(L) = \sum_{\lambda \in L'/L} e(d\lambda^2/2) \tag{4.7}$$

und $g(L) = g_1(L)$*.* □

Lemma 4.1.7 ([Bo1], Theorem 5.4). *Es sei L ein Gitter ungerader Signatur, N die Stufe von L und $M \in \mathbb{N}$ mit $N \mid M$. Weiter sei $g = \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), t\sqrt{c\tau + d}\right) \in \tilde{\Gamma}_0^0(M)$, dann gilt*

$$\varrho_L(g)(\mathfrak{e}_\lambda) = \chi_L(g)\mathfrak{e}_{d\lambda}, \tag{4.8}$$

wobei

$$\chi_L(g) = \left[t\epsilon_d\left(\frac{c}{d}\right)\right]^{1-\left(\frac{-1}{|L'/L|}\right)-\mathrm{sig}(L)}\left(\frac{d}{|L'/L|2^{\mathrm{sig}(L)}}\right) \tag{4.9}$$

gilt. □

Lemma 4.1.8 ([BS], Lemma 2.3). *Sei $U = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{\tau+1}\right) \in \widetilde{\Gamma}(1)$. Dann ist die Aktion von U^m gegeben durch*

$$\varrho_L(U^m)(\mathfrak{e}_\lambda) = \frac{1}{|L'/L|}\sum_{\mu,\nu\in L'/L} e\left(-m\mu^2/2 + (\mu, \lambda - \nu)\right)\mathfrak{e}_\nu.$$

□

4.2 McGraws Erweiterung der Weildarstellung

Im vorherigen Abschnitt ist die Weildarstellung ϱ_L von $\widetilde{\Gamma}(1)$ auf dem Gruppenring $\mathbb{C}[L'/L]$ definiert worden. In diesem Abschnitt soll vorgestellt werden, wie McGraw eine Erweiterung der Weildarstellung auf $\tilde{G}(N) = G(N) \times \{\pm 1\}$ definiert hat (N die Stufe von L). Dabei werden wir [McG] nicht vollständig folgen, sondern eine explizitere Darstellung wählen, die für die weitere Arbeit relevant ist.

Die Idee ist, durch die Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ eine projektive Operation von $G(N)$ auf dem Gruppenring zu definieren. Dazu definiert man zum einen über den Schnitt (3.14) eine projektive Darstellung von $S(N)$ auf $\mathbb{C}[L'/L]$. Weiterhin definiert McGraw eine Operation von $J(N)$ auf $R_N[L'/L]$. Mit Lemma 4.2.5 kann man beide Operationen zu einer projektiven Operation von $G(N)$ fortsetzen.

Definition 4.2.1. *Mit Hilfe des Schnittes s aus* (3.14) *kann man durch die Weildarstellung eine projektive Darstellung von $S(N)$ auf $\mathbb{C}[L'/L]$ definieren: Für $A \in S(N)$ setzen wir*

$$\varrho_L(A)(\mathfrak{e}_\lambda) := \varrho_L(s(A))(\mathfrak{e}_\lambda). \tag{4.10}$$

Man beachte, daß dies wohldefiniert ist, da nach Satz 4.1.4 die Weildarstellung über $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$ faktorisiert.

Bemerkung 4.2.2. 1. *Für $A, A' \in S(N)$ gilt*

$$\varrho_L(A)\varrho_L(A') = \omega_{S(N)}(A, A')\varrho_L(AA'),$$

so daß durch

$$\varrho_L(A, t)(\mathfrak{e}_\lambda) = t\varrho_L(s(A))(\mathfrak{e}_\lambda) \tag{4.11}$$

eine echte Darstellung von $\tilde{S}(N)$ durch die Weildarstellung definiert ist.

2. *Man erhält eine projektive Darstellung von* $\Gamma(1)$ *auf* $\mathbb{C}[L'/L]$ *durch*

$$\gamma \mapsto \varrho_L(s(\pi_N(\gamma))(\mathfrak{e}_\lambda) = \varrho_L(s(\gamma))(\mathfrak{e}_\lambda), \quad \gamma \in \Gamma(1). \tag{4.12}$$

Für $\gamma, \gamma' \in \Gamma(1)$ *bekommt man* $\omega_{S(N)}$ *durch die Gleichung*

$$\varrho_L(\gamma)\varrho_L(\gamma') = \omega_{S(N)}(\gamma, \gamma')\varrho_L(\gamma\gamma')$$

zurück.

Proposition 4.2.3. *Falls die Signatur des Gitters* L *gerade ist, so faktorisiert die Darstellung* (4.11) *über die Gruppe* $S(N)$. *Falls die Signatur von* L *ungerade ist, gilt*

$$\varrho_L(A, t) = \varrho_L(i(t)s(A)).$$

Beweis. Falls $\mathrm{sig}(L)$ gerade ist, so ist

$$\varrho_L(s(A)) = \varrho_L((p \circ s)(A)),$$

so daß durch (4.10) eine echte Darstellung gegeben ist. Wenn man jetzt $\varrho_L(A) := \varrho_L((p \circ s)(A))$ setzt, ergibt sich die erste Behauptung. Die zweite ergibt sich sofort mit Hilfe von (4.11). □

Es bleibt also die Operation von $J(N)$ auf $R_N[L'/L]$ zu definieren. Dazu ist zunächst zu beobachten, daß offensichtlich $J(N) \cong U(N)$ gilt. Damit ist wegen (2.13) $J(N)$ isomorph zu $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ und folgende Definition sinnvoll.

Definition 4.2.4. *Es sei* $J_\alpha \in J(N)$, $\sigma_\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ *und* $w = \sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in R_N[L'/L]$. *Dann definiere*

$$\varrho_L(J_\alpha)(w) := \sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda^{\sigma_\alpha^{-1}} \mathfrak{e}_\lambda. \tag{4.13}$$

Mit dem folgenden Lemma soll die projektive Darstellung (4.10) und die Operation (4.13) fortgesetzt werden zu einer projektiven Operation von $G(N)$ auf $R_N[L'/L]$. Dieses Lemma ist prinzipiell nichts Neues und der Beweis nicht schwer. Der Beweis wird dennoch ausgeführt, da einzelne Formeln daraus später benutzt werden.

Lemma 4.2.5. *Es sei* G *eine Gruppe,* A *eine Untergruppe und* N *ein Normalteiler von* G, *so daß* $G = NA$ *inneres Produkt von* N *und* A *ist. Es gebe eine projektive Linksoperation von* N *und* A *auf einer Menge* W. *Die zugehörigen Kozykel seien mit* ω_N *bzw.* ω_A *bezeichnet. Wir setzen voraus, daß* $\omega_N(1,1) = 1$ *und* $\omega_A(1,1) = 1$ *gilt. Definiere nun für* $g = na \in G$ *und* $w \in W$

$$g \cdot w = n \cdot a \cdot w. \tag{4.14}$$

Dann definiert (4.14) *eine projektive Linksoperation von* G *als innerem Produkt von* N *und* A *mit Kozykel* ω_G *genau dann, wenn es eine Funktion* $\varphi : G \times G \to \mathbb{C}^*$ *gibt, so daß*

$$a \cdot n \cdot a^{-1} \cdot w = \varphi(n, a)ana^{-1} \cdot w \tag{4.15}$$

gilt für alle $n \in N$ *und alle* $a \in A$. *Falls* φ *zusätzlich die Bedingungen*

$$\begin{aligned} \varphi(n, 1) =& 1 \ \textit{bzw.} \\ \varphi(1, a) =& \omega_A(a, a^{-1})^{-1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

erfüllt, so erhält man ω_N *bzw.* ω_A *zurück, falls man* ω_G *auf* N *bzw.* A *einschränkt.*

Beweis. Es seien $g_1 = n_1a_1$, $g_2 = n_2a_2 \in G$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} g_1g_2 \cdot w =& n_1a_1n_2a_2 \cdot w \\ =& n_1a_1n_2a_1^{-1} \cdot a_1a_2 \cdot w \text{ (per Definition)} \\ =& \omega_N(n_1, a_1n_2a_1^{-1})n_1 \cdot a_1n_2a_1^{-1} \cdot a_1a_2 \cdot w \\ =& \omega_N(n_1, a_1n_2a_1^{-1})\varphi(n_2, a_1)n_1 \cdot a_1 \cdot n_2 \cdot a_1^{-1} \cdot a_1a_2 \cdot w \text{ (mit (4.15))} \\ =& \omega_N(n_1, a_1n_2a_1^{-1})\varphi(n_2, a_1)\omega_A(a_1^{-1}, a_1a_2)^{-1}n_1 \cdot a_1 \cdot n_2 \cdot a_2 \cdot w. \end{aligned}$$

Der Kozykel ω_G für $g_1 = n_1a_1$ und $g_2 = n_2a_2$ ist gegeben durch

$$\omega_G(g_1, g_2) = \omega_N(n_1, a_1n_2a_1^{-1})\varphi(n_2, a_1)\omega_A(a_1^{-1}, a_1a_2)^{-1}. \tag{4.17}$$

Setzt man nun in (4.17) $a_1 = a_2 = 1$, so erhält man

$$\omega_G(n_1, n_2) = \omega_N(n_1, n_2)\varphi(n_2, 1) = \omega_N(n_1, n_2),$$

falls $\omega(n, 1) = 1$ für alle $n \in N$.

Setzt man in (4.17) $n_1 = n_2 = 1$, so ergibt sich die Gleichung

$$\omega_G(a_1, a_2) = \varphi(1, a_1)\omega_A(a_1^{-1}, a_1a_2)^{-1}.$$

Falls nun $\varphi(1, a) = \omega_A(a, a^{-1})^{-1}$, so ergibt sich zusätzlich unter Verwendung der Kozykelrelation

$$\omega_A(a_1^{-1}, a_1)\omega_A(1, a_2) = \omega_A(a_1^{-1}, a_1a_2)\omega_A(a_1, a_2)$$

die Behauptung. □

Satz 4.2.6. *Die projektive Darstellung* (4.10) *von* $S(N)$ *auf* $R_N[L'/L]$ *und die Operation* (4.13) *auf* $R_N[L'/L]$ *lassen sich zu einer projektiven Operation von* $G(N)$ *auf* $R_N[L'/L]$ *fortsetzen.*

Für den zugeordneten Kozykel gilt $\omega_{G(N)}(g_1, g_2) \in \{\pm 1\}$ *für alle* $g_1, g_2 \in G(N)$. *Außerdem gilt*

$$\begin{aligned} \omega_{G(N)}|_{S(N)} =& \omega_{S(N)}, \\ \omega_{G(N)}|_{J(N)} =& 1. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Lemma 4.2.5. Es ist zu zeigen, daß für alle $A \in S(N)$ und $J_\alpha \in J(N)$ eine Funktion $\varphi : G(N) \times G(N) \to \{\pm 1\}$ existiert, so daß gilt

$$\varrho_L(J_\alpha)\varrho_L(A)\varrho_L(J_\alpha^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) = \varphi(A, J_\alpha)\varrho_L(J_\alpha A J_\alpha^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda). \tag{4.18}$$

Es genügt dies für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ aus $S(N)$ zu zeigen, da diese Matrizen $S(N)$ erzeugen. Es gilt mit (5.5) aus [McG1]

$$\begin{aligned} \varrho_L(J_\alpha)\varrho_L(s(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)))\varrho_L(J_\alpha^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L(S)\varrho_L(R_\alpha^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =& \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), J_\alpha)\varrho_L(s(J_\alpha \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) J_\alpha^{-1}))(\mathfrak{e}_\lambda). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da $(\pi_N \circ p)(SR_\alpha^{-1}\Gamma(N)^*) = J_\alpha \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) J_\alpha^{-1} \in S(N)$, wobei p durch (3.11) gegeben ist. Daher gilt: $s(J_\alpha \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) J_\alpha^{-1})$ und $SR_\alpha^{-1}\Gamma(N)^*$ unterscheiden sich um ein Element der Form $(1,t)\Gamma(N)^*$, wobei $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), J_\alpha) = t$ gesetzt wird.

Entsprechend gilt mit [McG1], (5.4),

$$\begin{aligned}\varrho_L(J_\alpha)\varrho_L(s(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)))\varrho_L(J_\alpha^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L(T^{\alpha^{-1}})(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =& \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), J_\alpha)\varrho_L(s(J_\alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) J_\alpha^{-1}))(\mathfrak{e}_\lambda),\end{aligned}$$

wobei α^{-1} als eine ganze Zahl aus der zugehörigen Restklasse $\alpha^{-1} \in U(N)$ zu verstehen ist.

Die zweite Aussage folgt aus dem Beweis von Lemma 4.2.5 mit (4.17) und der Tatsache, daß $\varphi(A, J_\alpha)$ in $\{\pm 1\}$ liegt.

Für die letzte Aussage genügt es gemäß Lemma 4.2.5 zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}&\varphi(A, 1) = 1 \text{ bzw.} \\ &\varphi(1, J_\alpha) = 1\end{aligned}$$

gilt. Diese Gleichungen sind aber klarerweise erfüllt, wie man durch Einsetzen in die Gleichung (4.18) sieht. □

Korollar 4.2.7. *Falls die Signatur von L gerade ist, erhält man mit Satz 4.2.6 sogar eine echte Operation der Gruppe $G(N)$ auf $R_N[L'/L]$.*

Beweis. Mit Bemerkung 4.1.2 folgt, daß $\varrho_L(1,t) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[L'/L]}$ gilt. Damit folgt dann, daß durch (4.10) eine echte Darstellung von $S(N)$ gegeben ist. Aus dem gleichen Grund gilt $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), J_\alpha) = \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), J_\alpha) = 1$ und damit $\varphi(A, J_\alpha) = 1$ für alle $A \in S(N)$ und $J_\alpha \in J(N)$. □

Definition 4.2.8. 1. *Der Kozykel $\omega_{G(N)}$ aus Satz 4.2.6 gibt Anlaß zu einer Gruppenerweiterung von $G(N)$ durch $\{\pm 1\}$. Diese Gruppe sei mit*

$$\tilde{G}(N) \tag{4.19}$$

bezeichnet. Aus Satz 4.2.6 geht hervor, daß $\tilde{S}(N)$ eine Untergruppe von $\tilde{G}(N)$ ist.

2. *Man erhält eine echte Operation der Gruppe $\tilde{G}(N)$ auf $R_N[L'/L]$, die die Darstellung ϱ_L in* (4.11) *und die Operation* (4.13) *fortsetzt. Diese Operation sei auch mit ϱ_L bezeichnet. Sei $(AJ_\alpha, t) = (A,t)(J_\alpha, 1) \in \widetilde{G}(N)$ (beachte $\omega_{G(N)}(A, J_\alpha) = 1$), dann ist*

$$\varrho_L(AJ_\alpha, t) = \varrho_L(A,t)\varrho_L(J_\alpha, 1), \tag{4.20}$$

wobei $\varrho_L(J_\alpha, 1)$ definiert ist durch (4.13)*, d.h.*

$$\varrho_L(J_\alpha, 1) = \varrho_L(J_\alpha). \tag{4.21}$$

Man beachte, daß (4.20) *wegen Lemma 4.1.5 wohldefiniert ist.*

Bemerkung 4.2.9. *Man erhält durch Definition 4.2.8 keine $\mathbb{C}$-lineare Operation von $\tilde{G}(N)$ auf $R_N[L'/L]$, also keine Darstellung dieser Gruppe auf $\mathbb{C}[L'/L]$. Vielmehr wird in Kapitel 5 gezeigt, daß es keine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung der Weildarstellung auf die Gruppe $G(N)$ gibt, wenn Signatur des Gitters gerade ist.*

Korollar 4.2.10. *Durch*

$$(A,t) \mapsto \mathfrak{e}_\lambda \mid_L (A,t) := \varrho_L^{-1}(A,t)(\mathfrak{e}_\lambda), \quad (A,t) \in \tilde{G}(N), \tag{4.22}$$

wird eine Rechtsoperation von $\tilde{G}(N)$ *auf* $R_N[L'/L]$ *definiert.*

Beweis. Es ist

$$\mathrm{id}_{R_N[L'/L]} = \varrho_L(1,1) = \varrho_L((A,t)(A,t)^{-1}) = \varrho_L(A,t)\varrho_L((A,t)^{-1}).$$

Also

$$\varrho_L^{-1}(A,t) = \varrho_L((A,t)^{-1}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\varrho_L^{-1}(A_1,t_1)\varrho_L^{-1}(A_2,t_2) =& \varrho_L([(A_2,t_2)(A_1,t_1)]^{-1}) \\ =& \varrho_L^{-1}((A_2,t_2)(A_1,t_1)).\end{aligned}$$

□

4.3 Erweiterung der Weildarstellung auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$

In diesem Abschnitt wird die Weildarstellung ausgedehnt auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$ bzw. auf eine Gruppenerweiterung von $\mathcal{G}(N)$, je nachdem, ob $\operatorname{sig}(L)$ gerade oder ungerade ist. Diese Ausdehnung ist notwendig, um für vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung eine Aktion der Hecke-Algebra definieren können. Es werden die beiden Fälle getrennt betrachtet.

4.3.1 Der Fall gerader Signatur

Aus dem vorherigen Abschnitt geht hervor, daß die Gruppe $G(N)$ auf $R_N[L'/L]$ durch die Weildarstellung operiert, falls die Signatur von L gerade ist. Siehe Korollar 4.2.7. Dies erlaubt die folgende Definiton.

Definition 4.3.1. *Es sei* $M \in \mathcal{G}(N)$. *Dann wird durch*

$$\varrho_L(M)(\mathfrak{e}_\lambda) := \varrho_L(\pi_N(M))(\mathfrak{e}_\lambda) \tag{4.23}$$

eine Fortsetzung der Weildarstellung definiert. Dabei ist $\varrho_L(\pi_N(M))$ *durch* (4.20) *gegeben.*

Bemerkung 4.3.2.
1. *Es sei* $\gamma \in \Gamma(1)$, *dann ist* $(p \circ s)(\pi_N(\gamma)) = \gamma\Gamma(N)$, *so daß* $\varrho_L(\gamma)$ *gemäß* (4.23) *übereinstimmt mit der üblichen Weildarstellung von* $\Gamma(1)$.

2. *Als Komposition der Projektion* π_N *mit der Operation* (4.20) *ist* (4.23) *offensichtlich eine Operation von* $\mathcal{G}(N)$ *auf* $R_N[L'/L]$.

4.3.2 Der Fall ungerader Signatur

Wenn die Signatur von L ungerade ist, so operiert $\widetilde{\Gamma}(1)$ mittels der Weildarstellung auf $R_N[L'/L]$. Aus Satz 4.2.6 folgt, daß der Ansatz (4.23) im Falle ungerader Signatur nur eine projektive Operation der Gruppe $\mathcal{G}(N)$ liefert. Weiterhin folgt mit Satz 4.2.6, daß der Kozykel, der durch diese projektive Operation definiert wird, in $\{\pm 1\}$ liegt. Dieser Kozykel sei mit

$$\omega_{\mathcal{G}(N)}(M, M'), \quad M, M' \in \mathcal{G}(N), \tag{4.24}$$

bezeichnet. Es gilt also für $M, M' \in \mathcal{G}(N)$ die Gleichung

$$\varrho_L(MM') = \omega_{\mathcal{G}(N)}(M, M')\varrho_L(M)\varrho_L(M'). \tag{4.25}$$

Der Kozykel $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ definiert eine zentrale Gruppenerweiterung von $\mathcal{G}(N)$ durch $\{\pm 1\}$. Diese erweiterte Gruppe bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(N)$. Man erhält also durch

$$\varrho_L(M, t) = t\varrho_L(M), \quad (M, t) \in \mathcal{H}(N), \tag{4.26}$$

eine echte Operation der Gruppe $\mathcal{H}(N)$ auf $R_N[L'/L]$.

Mit Hilfe der folgenden Proposition sieht man, daß die Operation (4.26), bei geeigneter Einbettung von $\widetilde{\Gamma}(1)$, eine Fortsetzung der gewöhnlichen Weildarstellung von $\widetilde{\Gamma}(1)$ ist.

Proposition 4.3.3. *1. Da* (4.23) *eine Fortsetzung der projektiven Operation* (4.12) *ist, erhält man, daß $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ eine Fortsetzung des Kozykels $\omega_{S(N)}$ von $\Gamma(1)$ ist.*

2. Durch

$$L : \widetilde{\Gamma}(1) \longrightarrow \mathcal{H}(N), \quad (\gamma, tj(\gamma, \tau)) \mapsto (\gamma, t\eta(\gamma)), \tag{4.27}$$

wird eine Einbettung von $\widetilde{\Gamma}(1)$ nach $\mathcal{H}(N)$ gegeben, wobei η der Korand (3.15) *ist. Die Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)$ ist isomorph zu ihrem Bild in $\mathcal{H}(N)$.*

3. Für $\tilde{\gamma} = (\gamma, tj(\gamma, \tau))$ gilt

$$\varrho_L(\gamma, t\eta(\gamma)) = \varrho_L(\tilde{\gamma}).$$

Beweis. Die Aussage **1.** ist klar.

Für die Aussage **2.** ist nur zu zeigen, daß L ein Homomorphismus ist. Es seien $(\gamma, j(\gamma, \tau))$, $(\gamma', j(\gamma', \tau)) \in \widetilde{\Gamma}(1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L((\gamma, j(\gamma, \tau))(\gamma', j(\gamma', \tau))) =& (\gamma\gamma', \omega(\gamma, \gamma')\eta(\gamma\gamma')) \\ =& (\gamma\gamma', \eta(\gamma)\eta(\gamma')\omega_{\mathcal{G}(N)}(\gamma, \gamma')) \\ =& L(\gamma, j(\gamma, \tau))L(\gamma', j(\gamma', \tau)). \end{aligned}$$

Für die Aussage **3.** findet man unter Berücksichtigung der ungeraden Signatur:

$$\begin{aligned} \varrho_L(L(\tilde{\gamma})) =& \varrho_L(\gamma, t\eta(\gamma)) \\ =& t\eta(\gamma)\varrho_L(s(\gamma)) \\ =& \varrho_L(\tilde{\gamma}). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dabei sieht man die letzten beiden Gleichungen ein mit Hilfe von (3.14), (3.15) und (4.26). ☐

Kapitel 5

Über $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzungen der Weildarstellung

In der Einleitung wurde erläutert, daß es verlockend ist, die Weildarstellung $\mathbb{C}$-linear fortzusetzen auf die Gruppe $G(N)$. E. Freitag hat jedoch mittels Berechnungen mit *GAP* gezeigt, daß es eine solche Ausdehnung der Weildarstellung von der Gruppe $S(5)$ auf die Gruppe $G(5)$ nicht gibt.

In diesem Kapitel soll dieses Resultat allgemeiner für alle Primzahlen $p \geq 5$ gezeigt werden. Genauer wird bewiesen, daß es für keine Primzahl $p \geq 5$ einen Homomorphismus

$$\tilde{\varrho}_L : G(p) \longrightarrow GL(\mathbb{C}[A]), \quad A \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

gibt, so daß $\tilde{\varrho}_L|_{S(N)} = \varrho_L$ gilt.

Der Beweis verwendet darstellungstheoretische Methoden: Einerseits ist bekannt (siehe [NW]), daß die p-dimensionale Weildarstellung in eine $(p-1)/2$ und eine $(p+1)/2$-dimensionale irreduzible Darstellung zerfällt. Andererseits schließt man, daß jede p-dimensionale Darstellung von $G(p)$, die ϱ_L fortsetzt, schon selber irreduzibel sein muß. Schließlich stellt man fest, daß jede irreduzible p-dimensionale Darstellung von $G(p)$ irreduzibel bleibt, wenn man sie auf $S(p)$ einschränkt.

Lemma 5.0.4 ([NW], 6.1). *Es sei p eine ungerade Primzahl und $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit der quadratischen Form $x \mapsto \frac{rx^2}{p}$, wobei $r \in U(p)$ ist. Dann induziert die Operation der orthogonalen Gruppe $O(A) = \{1, -1\}$ eine Zerlegung von $\mathbb{C}[A]$ in die zwei Unterräume*

$$\mathbb{C}[A]^{\pm} := \left\{ w = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda; \quad \sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_{-\lambda} = \pm \sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \right\}.$$

Die zugehörigen Unterdarstellungen bezeichnen wir mit $\varrho_L(+)$ bzw. $\varrho_L(-)$.

Beweis. Eine Basis von $\mathbb{C}[A]^+$ ist gegeben durch

$$\{\mathfrak{e}_\lambda + \mathfrak{e}_{-\lambda}; \quad \lambda \in A,\ 1 \leq \lambda \leq (p-1)/2\} \cup \{\mathfrak{e}_0\}$$

und von $\mathbb{C}[A]^-$ durch

$$\{\mathfrak{e}_\lambda - \mathfrak{e}_{-\lambda}; \quad \lambda \in A,\ 1 \leq \lambda \leq (p-1)/2\}.$$

Diese Unterräume sind invariant unter der Weildarstellung, da ϱ_L mit der Aktion der orthogonalen Gruppe $O(A)$ vertauscht. □

Satz 5.0.5 ([NW], Theorem 4). *Es seien die Voraussetzungen gegeben wie in Lemma 5.0.4. Dann enthält die Darstellung $\varrho_L(\pm)$ genau eine irreduzible Darstellung $\varrho_L(\pm)_1$ der Dimension $(p \pm 1)/2$. Die Darstellungen $\varrho_L(+)_1$ und $\varrho_L(-)_1$ sind nicht äquivalent zueinander.* □

Korollar 5.0.6. *Mit denselben Voraussetzungen wie in Lemma 5.0.4 erhält man: Die Weildarstellung ϱ_L zerfällt in die irreduziblen Darstellungen $\varrho_L(+)$ der Dimension $(p+1)/2$ und $\varrho_L(-)$ der Dimension $(p-1)/2$.*

Beweis. Man muß lediglich beachten, daß $\varrho_L(+)$ die Dimension $(p+1)/2$ und $\varrho_L(-)$ die Dimension $(p-1)/2$ besitzt. □

Es sei nun $\tilde{\varrho}_L : G(p) \to GL(\mathbb{C}[A])$ eine Fortsetzung der Weildarstellung. Dann hat $\tilde{\varrho}_L$ die Dimension p. Bekanntlich zerfällt jede (endlich dimensionale) Darstellung in irreduzible Darstellungen. Die irreduziblen Darstellungen von $G(p)$ sind gegeben durch

Satz 5.0.7 ([Te], S. 374). *Es sei p eine ungerade Primzahl. Die Gruppe $G(p)$ besitzt die folgenden inäquivalenten irreduziblen Darstellungen, abhängig von den Charakteren α, β von $\mathbb{F}_p^*$ und den Charakteren ν von $\mathbb{F}_{p^2}^*$:*

$(p-1)$ *verschiedene* 1*-dimensionale Darstellungen* α,
$(p-1)$ *verschiedene* p*-dimensionale Darstellungen* π_α,
$(p-1)(p-2)/2$ *verschiedene Darstellungen* $\rho_{\alpha,\beta}$ *der Dimension* $p+1$,
$(p^2-p)/2$ *verschiedene Darstellungen* σ_ν *der Dimension* $p-1$.

□

Korollar 5.0.8. *Es sei $p \geq 5$ eine ungerade Primzahl. Eine Fortsetzung $\tilde{\varrho}_L$ der Weildarstellung muß eine irreduzible p-dimensionale Darstellung von $G(p)$ sein.*

Beweis. Ein Vergleich der Dimensionen zeigt, daß

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_L &= p\alpha \\ \tilde{\varrho}_L &= \alpha \oplus \sigma_\nu, \\ \tilde{\varrho}_L &= \pi_\alpha. \end{aligned}$$

die möglichen irreduziblen Darstellungen sind, in die $\tilde{\varrho}_L$ zerfallen kann. Die ersten beiden Zerlegungen von $\tilde{\varrho}_L$ sind jedoch nicht möglich, da α offensichtlich irreduzibel bleibt, wenn man $\tilde{\varrho}_L$ auf $S(p)$ einschränkt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Satz 5.0.7, wenn $p \geq 5$ ist. □

Daher muß für jedes $p \geq 5$ eine Fortsetzung $\tilde{\varrho}_L$ von ϱ_L eine p-dimensionale irreduzible Darstellung von $G(p)$ sein, deren Einschränkung auf $S(p)$ in eine $(p-1)/2$ und eine $(p+1)/2$-dimensionale irreduzible Darstellung zerfällt. Es bleibt also zu untersuchen, ob alle Darstellungen π_α bei Einschränkung auf $S(p)$ entsprechend in Irreduzible zerfallen. Eine Möglichkeit, dies zu untersuchen ist

Proposition 5.0.9. *Es sei G eine endliche Gruppe und ρ eine Darstellung von G mit Charakter χ. Dann ist ρ irreduzibel genau dann, wenn gilt*

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = 1.$$

□

Die Einschränkung von π_α auf $S(p)$ definiert eine Darstellung $\tilde{\pi}_\alpha$ von $S(p)$. Der zugehörige Charakter $\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}$ ist der Charakter $\chi_{\pi_\alpha}|_{S(p)}$. Dessen Werte sind durch die Charaktertafel von $G(p)$ gegeben.

Satz 5.0.10 ([Te], S. 369). *Mit denselben Voraussetzungen und Notationen wie in Theorem 5.0.7 erhält man für die Charaktertafel von $G(p)$*

	$\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$, $r \neq s$	$\left(\begin{smallmatrix} x & y\delta \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$, $y \neq 0$
χ_α	$\alpha(r)^2$	$\alpha(r)^2$	$\alpha(rs)$	$\alpha(N(z))$
χ_{π_α}	$p\alpha(r)^2$	0	$\alpha(rs)$	$-\alpha(N(z))$
$\chi_{\rho_{\alpha,\beta}}$ $\alpha \neq \beta$	$(p+1)\alpha(r)\beta(r)$	$\alpha(r)\beta(r)$	$\alpha(r)\beta(s) + \alpha(s)\beta(r)$	0
χ_{σ_ν}, $\nu \neq \nu^q$	$(p-1)\nu(r)$	$-\nu(r)$	0	$-\nu(z) - \nu(\overline{z})$

Hierbei ist $\delta \in \mathbb{F}_p$ ein quadratischer Nichtrest, δ' eine Wurzel von $x^2 - \delta$, so daß $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{F}_p(\delta')$ und $z = x + \delta' y \in \mathbb{F}_{p^2}$.

Um das innere Produkt $\langle \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}, \chi_{\tilde{\pi}_\alpha} \rangle$ zu berechnen, muß man jede Konjugationsklasse von $S(p)$ in die entsprechende Konjugationsklasse von $G(p)$ einordnen.

Proposition 5.0.11 ([Do], [Te]). *Es sei p eine ungerade Primzahl. Die Gruppe $S(p)$ hat $p+4$ Konjugationsklassen, gegeben durch die folgenden Vertreter.*

Vertreter	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$-\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
# Elemente in der Klasse	1	1	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$

Vertreter	$-\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{smallmatrix}\right)^n$, $n = 1 \ldots (p-3)/2$	S^m, $m = 1 \ldots (p-1)/2$
# Elemente in der Klasse	$(p^2-1)/2$	$p(p+1)$	$p(p-1)$

Hier ist α ein primitives Element von $U(p)$ und $S \in S(p)$ ein Element der Ordnung $p+1$.

Die Gruppe $G(p)$ hat $p^2 - 1$ Konjugationsklassen, gegeben durch die folgenden Vertreter.

Vertreter	$\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$, $r \neq s$	$\left(\begin{smallmatrix} r & s\delta \\ s & r \end{smallmatrix}\right)$, $s \neq 0$
# Elemente in der Klasse	*1*	$p^2 - 1$	$p^2 + p$	$p^2 - p$

Hier $\delta \in U(p)$ ist ein quadratischer Nichtrest. □

Proposition 5.0.12. *Es bezeichne $[A]_{S(p)}$ die Konjugationsklasse von A in $S(p)$ und entsprechend $[A]_{G(p)}$ die Konjugationsklasse von A in $G(p)$. Dann gilt:*

1. $[\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_{S(p)} \subset [\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_{G(p)}$,

2. $[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_{S(p)} \subset [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_{G(p)}$ *für alle $\alpha \in U(p)$.*

3. $\left[\left(\begin{smallmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right]_{S(p)} \subset \left[\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right]_{G(p)}$ *für alle $\alpha \in U(p)$,*

4. $\left[\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{smallmatrix}\right)^n\right]_{S(p)} \subset \left[\left(\begin{smallmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^{-n} \end{smallmatrix}\right)\right]_{G(p)}$, *falls $p > 3$.*

5. $[S^m]_{S(p)} \subset [\left(\begin{smallmatrix} r & s\delta \\ s & r \end{smallmatrix}\right)]_{G(p)}$.

Beweis. Die Fälle **1.** und **4.** sind klar.

Zu **2.** Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sind durch J_α in $G(p)$ konjugiert.

Zu **3.** Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}-1&-\alpha\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ sind durch $J_{-\alpha}$ in $G(p)$ konjugiert.

Zu **5.** Der Beweis ist indirekt. Angenommen, S^m ist konjugiert zu $\left(\begin{smallmatrix}r&1\\0&r\end{smallmatrix}\right)$ in $G(p)$. Dann gibt es ein $g \in G(p)$ mit

$$\begin{aligned} gS^m g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}r&1\\0&r\end{smallmatrix}\right) &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&\det g\end{pmatrix} hS^m h^{-1} \begin{pmatrix}1&0\\0&\det g^{-1}\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}r&1\\0&r\end{smallmatrix}\right) \\ &\Longleftrightarrow hS^m h^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&\det g^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}r&1\\0&r\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&\det g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r&\det g\\0&r\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $h \in S(p)$. Aus der letzten Gleichung von (5.1) folgt, daß S^m konjugiert ist zu $\left(\begin{smallmatrix}r&\det g\\0&r\end{smallmatrix}\right)$ in $S(p)$. Dies ist ein Widerspruch, da $\left(\begin{smallmatrix}r&\det g\\0&r\end{smallmatrix}\right)$ in einer der Klassen $[\pm\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_{S(p)}$ oder $[\pm\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_{S(p)}$ liegt. Auf die gleiche Weise sieht man, daß S^m nicht konjugiert ist zu $\left(\begin{smallmatrix}r&0\\0&r\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}r&0\\0&s\end{smallmatrix}\right)$. ☐

Proposition 5.0.13. *Für jede der Darstellungen π_α aus Satz 5.0.7 mit zugehörigem Charakter χ_{π_α} gilt*

$$\langle \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}, \chi_{\tilde{\pi}_\alpha} \rangle = \frac{1}{|S(p)|} \sum_{g\in S(p)} \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(g)\overline{\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(g)} = 1,$$

wobei $\chi_{\tilde{\pi}_\alpha} = \chi_{\pi_\alpha}|_{S(p)}$. Damit folgt aus Proposition 5.0.9, daß $\tilde{\pi}_\alpha$ eine irreduzible Darstellung von $S(p)$ ist.

Beweis. Es sei $x_i \in S(p)$, $i = 1, \ldots, p+4$, ein Vertretersystem der Konjugationsklassen von $S(p)$. Dann hat man

$$\frac{1}{|S(p)|} \sum_{g\in S(p)} \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(g)\overline{\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(g)} = \frac{1}{|S(p)|} \sum_{i=1}^{p+4} \#[x_i]_{S(p)} \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(x_i)\overline{\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}(x_i)}.$$

Die Werte von $\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}$ auf den Konjugationsklassen von $S(p)$ sind gegeben durch Satz 5.0.10 und Proposition 5.0.12. Die Anzahl der Elemente jeder Klasse erhält man aus den Tabellen in Proposition 5.0.11. Man beachte, daß $\chi_{\tilde{\pi}_\alpha}$ vom Charakter α abhängt, jedoch $\langle \chi_{\tilde{\pi}_\alpha}, \chi_{\tilde{\pi}_\alpha} \rangle$ nicht. Setzt man die Daten aus den Tabellen ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{p(p^2-1)} \big(p^2 + p^2 + p(p+1)(p-3)/2 + p(p-1)(p-1)/2\big) = 1.$$

Man beachte, daß diese Formel auch für $p = 3$ gültig ist. In diesem Fall existieren die Konjugationsklassen $\left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\alpha^{-1}\end{smallmatrix}\right)^n\right]$ nicht. ☐

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt weden, daß es eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung der Weildarstellung auf die Gruppe $G(p)$ gibt, wenn man einen Darstellungsraum wählt, der den Gruppenring $\mathbb{C}[A]$ als Unterraum enthält:

Es sei X die Gruppe aller Charaktere auf $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Mit $\mathbb{C}[A \times X]$ bezeichnen wir den Raum der komplexwertigen Funktionen auf $A \times X$ und mit $g(\chi)$ die Gauss-Summe

$$g(\chi) = |A|^{1/2} \sum_{\lambda\in A} \chi(\lambda^2/2) \text{ mit } \chi \in X.$$

Der folgende Satz stammt von Nobs, [No].

Satz 5.0.14 ([No], Satz 3). *Die durch*

$$\begin{aligned}
\varrho_L(T)f(\lambda,\chi) &= \chi(\lambda^2/2)f(\lambda,\chi),\\
\varrho_L(S^{-1})f(\lambda,\chi) &= g(\chi)|A|^{1/2}\sum_{\mu\in A}\chi((\lambda,\mu))f(\mu,\chi),\\
\varrho_L(J_\alpha)f(\lambda,\chi) &= f(\lambda,\chi^{1/d})
\end{aligned}$$

für alle $f \in \mathbb{C}[A \times X]$, $\lambda \in A$, $\chi \in X$ *und* $\alpha \in U(p)$ *gegebene Operation der Erzeuger von* $G(p)$ *auf* $\mathbb{C}[A \times X]$ *definiert eine Darstellung von* $G(p)$.

Bemerkung 5.0.15. *Der obige Satz definiert eine* $\mathbb{C}$*-lineare Fortsetzung der Weildarstellung auf die Gruppe* $G(p)$*. Dies sieht man leicht, indem man* $\chi = \chi_p$ *mit* $\chi_p(x) = e(x/p)$ *setzt für* $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *und den Gruppenring* $\mathbb{C}[A]$ *mit* $\mathbb{C}[A \times \{\chi_p\}]$ *identifiziert. Man beachte, daß die Operation von* S^{-1} *bei Nobs sich um den Faktor* $|A|^{1/2}$ *von der unsrigen unterscheidet.*

Kapitel 6

Eine Operation der Gruppe $\tilde{G}(N)$ auf Modulformen der Stufe N

Eines der wesentlichen Ziele dieser Arbeit ist die Definition eines Hecke-Operators auf vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung ϱ_L, insbesondere also die Definition eines Slash-Operators für geeignete Matrizen aus $GL_2^+(\mathbb{Q})$. Im Zusammenhang mit der Definition eines solchen Slash-Operators tauchen zwei Darstellungen ρ und ρ_α der Gruppe $\tilde{S}(N)$ ($S(N)$, falls $\mathrm{sig}(L)$ gerade) auf dem Raum $M_k(\Gamma(N))$ auf. In diesem Zusammenhang ist N wieder die Stufe des Gitters L. Diese Darstellungen lassen sich jedoch völlig unabhängig vom obigen Kontext für beliebiges $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{N}$ angeben.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden diese beiden Darstellungen, sowie eine Operation der Gruppe $\tilde{J}(N)$ (s. (4.19)) auf dem Raum $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ definiert.

Schließlich wird im zweiten Abschnitt eine Operation der Gruppe $\tilde{G}(N)$ definiert, die die Darstellung ρ fortsetzt.

6.1 Zwei Darstellungen der Gruppe $\tilde{S}(N)$

Proposition 6.1.1. *Es sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{N}$. Durch*

$$(f, \tilde{\gamma}) \mapsto f \mid_k \tilde{\gamma} \tag{6.1}$$

wird eine Darstellung der Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)$ auf dem Raum $M_k(\Gamma(N))$ definiert. Diese Darstellung faktorisiert über die endliche Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$.

Falls $k \in \mathbb{Z}$, so faktorisiert (6.1) über $\Gamma(1)/\Gamma(N)$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind klar, wenn man bedenkt, daß $\Gamma(N)^*$ ein Normalteiler von $\widetilde{\Gamma}(1)$ ist und man die Definition von $M_k(\Gamma(N))$ berücksichtigt.

Falls nun k ganzahlig ist, so gilt

$$f \mid_k (\gamma, \phi) = f \mid_k (\gamma, -\phi),$$

so daß

$$f \mid_k (\gamma, \phi) = f \mid_k \gamma$$

gilt. □

Es läßt sich nun mit Hilfe des Isomorphismus (3.16) eine Darstellung von $\tilde{S}(N)$ auf $M_k(\Gamma(N))$ definieren.

Definition 6.1.2. *Es sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $(A,t) \in \tilde{S}(N)$ und $f \in M_k(\Gamma(N))$, dann wird durch*

$$\rho : \tilde{S}(N) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(N))), \quad (A,t) \mapsto \rho(A,t)(f) = f \cdot (A,t) := f \mid_k i(t)s(A) \tag{6.2}$$

eine Darstellung von $\tilde{S}(N)$ definiert.

Proposition 6.1.3. *Es sei k ganzzahlig, dann faktorisiert die Darstellung ρ über die Gruppe $S(N)$.*

Beweis. Man beachte, daß per Definition $i(t) = (1,t)\Gamma(N)^* \in \widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(N)^*$. Falls nun $k \in \mathbb{Z}$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} f \mid_k i(t)s(A) =& f \mid_k s(A) \\ =& f \mid_k (p \circ s)(A). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich in diesem Fall also $f \cdot (A,t) = f \cdot A$, wenn man für $A \in S(N)$

$$f \cdot A := f \mid_k (p \circ s)(A) \tag{6.3}$$

setzt. □

Definition 6.1.4. *Es sei $\tilde{G}(N)$ die Gruppe aus (4.19), $(J_\alpha, 1) \in \tilde{G}(N)$. Dann liegt $(J_\alpha,1)(A,t)\ (J_\alpha,1)^{-1}$ in $\tilde{S}(N)$ für $(A,t) \in \tilde{S}(N)$. Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ wird durch*

$$\rho_\alpha : \tilde{S}(N) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(N))), \quad (A,t) \mapsto \rho_\alpha(A,t)(f) := \rho((J_\alpha,1)(A,t)(J_\alpha,1)^{-1})(f) \tag{6.4}$$

eine zu ρ konjugierte Darstellung von $\tilde{S}(N)$ auf $M_k(\Gamma(N))$ definiert.

Die folgende Bemerkung liefert eine etwas andere Form der Darstellung ρ_α.

Bemerkung 6.1.5. *Gemäß (4.17) gilt*

$$\omega_{G(N)}(AJ_\alpha, BJ_\beta) = \omega_{S(N)}(A, J_\alpha B J_\alpha^{-1})\varphi(B, J_\alpha). \tag{6.5}$$

Daher ist für $A \in S(N)$

$$\omega_{G(N)}(J_\alpha, A) = 1.$$

(Beachte, daß $\omega_{S(N)}$ normiert ist und $\varphi(1, J_\alpha) = 1$). Genauso sieht man

$$\omega_{G(N)}(J_\alpha A, J_\alpha^{-1}) = 1.$$

Daher läßt sich die Darstellung $\rho_\alpha(A,t)$ auch in der Form

$$\rho((J_\alpha A J_\alpha^{-1}, t))(f) = f \mid_k i(t)s(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) \tag{6.6}$$

schreiben.

Proposition 6.1.6. *Falls k ganzzahlig ist, so faktorisiert die Darstellung ρ_α über die Gruppe $S(N)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 6.1.3 sieht man mit Hilfe von (6.6), daß

$$\begin{aligned} f\cdot(J_\alpha A J_\alpha^{-1}, t) =& f\cdot J_\alpha A J_\alpha^{-1}\\ =& f\mid_k (p\circ s)(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

gilt. □

Bemerkung 6.1.7. *Aus dem q-Entwicklungsprinzip ergibt sich, daß für die Darstellungen ρ und ρ_α von $\tilde{S}(N)$*

$$\begin{aligned} &\rho(A,t)(M_k^{R_N}(\Gamma(N))) \subset M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \text{ und}\\ &\rho_\alpha(A,t)(M_k^{R_N}(\Gamma(N))) \subset M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \end{aligned} \tag{6.7}$$

für alle $(A,t)\in\tilde{S}(N)$ gilt. Daher erhält man in beiden Fällen Darstellungen von $\tilde{S}(N)$ auf dem Untermodul $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$.

Es soll im folgenden eine Operation der Untergruppe

$$\tilde{J}(N) = \Big\{(J_\alpha,1)\in\tilde{G}(N);\quad J_\alpha\in J(N)\Big\} \tag{6.8}$$

der Gruppe $\tilde{G}(N)$ erklärt werden. Man beachte, daß mit (6.5) folgt, daß $\tilde{J}(N)$ in der Tat eine Untergruppe ist.

Definition 6.1.8. *Es sei $f\in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ und $(J_\alpha,1)\in\tilde{J}(N)$. Dann wird eine Operation von $\tilde{J}(N)$ auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ durch*

$$(f,(J_\alpha,1))\mapsto f\cdot(J_\alpha,1) := f^{\sigma_\alpha}, \tag{6.9}$$

gegeben, wobei $\sigma_\alpha\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ ist.

Bemerkung 6.1.9. *Aufgrund von Korollar 2.2.7 ist sichergestellt, daß (6.9) tatsächlich eine Operation definiert.*

6.2 Eine Operation von $\tilde{G}(N)$

Lemma 6.2.1. *Es sei $(A,t)\in\tilde{S}(N)$. Dann ist $(A,t)^{-1} = (A^{-1}, t\omega_{S(N)}(A,A^{-1}))$ und es gilt*

$$\varrho_L^{-1}(A,t) = \varrho_L^{-1}(i(t)s(A)). \tag{6.10}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt durch Berechnung von $(A,t)(A^{-1}, t\omega_{S(N)}(A,A^{-1}))$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \varrho_L^{-1}(A,t) =& \varrho_L(A^{-1}, t\omega_{S(N)}(A,A^{-1}))\\ =& \varrho_L(i(t\omega_{S(N)}(A,A^{-1}))s(A^{-1})) \quad \text{(siehe (4.11))}\\ =& \varrho_L(i(t)s(A)^{-1}) \quad \text{(siehe (3.13))}. \end{aligned}$$

□

Definition 6.2.2. *Es sei L ein gerades Gitter der Stufe N mit positiv definiter quadratischer Form $x \mapsto x^2/2$ und $2k = \dim(L)$. Dann sei*

$$\vartheta(\tau,\lambda) = \sum_{\substack{x \in L' \\ x \equiv \lambda \pmod{L}}} e(x^2/2\tau) \tag{6.11}$$

und $\Theta(L)$ der von diesen Thetareihen erzeugte Raum.

Bemerkung 6.2.3. *Unter den Voraussetzungen von Definition ist bekannt, daß $\vartheta(\tau,\lambda) \in M_k(\Gamma(N))$ (siehe [Eb], Theorem 3.2).*

Lemma 6.2.4. *Es seien die Voraussetzung gegeben wie in Definition 6.2.2. Weiter sei $\theta : \mathbb{C}[L'/L] \to \Theta(L)$ ein Operator, definiert durch $\mathfrak{e}_\lambda \mapsto \vartheta(\tau,\lambda)$. Dann gilt für alle $(A,t) \in \tilde{S}(N)$ und alle $(J_\alpha, 1) \in \tilde{J}(N)$*

$$\begin{aligned} \theta(\mathfrak{e}_\lambda) \cdot (A,t) =& \theta(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L (A,t)) \\ \textit{und}\ \ \theta(\sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda) \cdot (J_\alpha,1) =& \theta(\sum_{\lambda \in L'/L} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \mid_L (J_\alpha,1)). \end{aligned}$$

Beweis. McGraw beweist in [McG], Lemma 5.2, für den Operator θ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \theta(\mathfrak{e}_\lambda)^\sigma =& \theta((\mathfrak{e}_\lambda)^\sigma) \\ \text{und } \theta(\mathfrak{e}_\lambda) \mid_k \tilde{\gamma} =& \theta(\varrho_L^{-1}(\tilde{\gamma})(\mathfrak{e}_\lambda)) \end{aligned} \tag{6.12}$$

für alle $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(1)$ und alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Damit folgt mit (6.2)

$$\begin{aligned} \theta(\mathfrak{e}_\lambda) \cdot (A,t) =& \theta(\mathfrak{e}_\lambda) \mid_k i(t)s(A) \\ =& \theta(\varrho_L^{-1}(i(t)s(A))(\mathfrak{e}_\lambda)) \\ =& \theta(\varrho_L^{-1}(A,t)(\mathfrak{e}_\lambda)) \text{ (siehe Lemma 6.2.1)} \\ =& \theta(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L (A,t)). \end{aligned}$$

Die zweite Aussage ergibt sich unmittelbar aus (6.9) und (4.21). □

Lemma 6.2.5. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 6.2.2 gilt die folgende Aussage:*

$$\vartheta(\tau,\lambda) \cdot (J_\alpha,1) \cdot (A,t) \cdot (J_\alpha,1)^{-1} = \vartheta(\tau,\lambda) \cdot [(J_\alpha,1)(A,t)(J_\alpha,1)^{-1}] \tag{6.13}$$

für alle $(A,t) \in \tilde{S}(N)$ und alle $(J_\alpha,1) \in \tilde{J}(N)$, wobei "$\cdot$" definiert ist durch (6.2) bzw. (6.9).

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Operators θ, dessen Eigenschaften aus Lemma 6.2.4 und Korollar 4.2.10. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau,\lambda) \cdot (J_\alpha,1) \cdot (A,t) \cdot (J_\alpha,1)^{-1} =& \theta(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L (J_\alpha,1) \mid_L (A,t) \mid_L (J_\alpha,1)^{-1}) \\ =& \theta(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L [(J_\alpha,1)(A,t)(J_\alpha,1)^{-1}]) \\ =& \vartheta(\tau,\lambda) \cdot [(J_\alpha,1)(A,t)(J_\alpha,1)^{-1}]. \end{aligned}$$

□

Satz 6.2.6. *Die Darstellung* (6.2) *von* $\tilde{S}(N)$ *und die Operation* (6.9) *von* $\tilde{J}(N)$ *lassen sich zu einer Rechtsoperation der Gruppe* $\tilde{G}(N)$ *auf dem Raum* $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ *fortsetzen.*

Beweis. Zum Beweis verwenden wir Lemma 4.2.5. Es bleibt die Identität

$$f \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1} = f \cdot [(J_\alpha, 1)(A, t)(J_\alpha, 1)^{-1}] \tag{6.14}$$

für alle $(A, t) \in \tilde{S}(N)$, $(J_\alpha, 1) \in \tilde{J}(N)$ und $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ zu zeigen. Um dies zu beweisen, sei $\vartheta(\tau, \lambda) \in \Theta(L)$, wobei L ein Gitter der Dimension $n = 2k$ und der Stufe N' sei. Dann ist $\vartheta(\tau, \lambda)$ eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma(N')$. Daher ist $\frac{f}{\vartheta(\tau,\lambda)}$ eine Modulfunktion zu $\Gamma(M)$ mit Fourierkoeffizienten in $\mathbb{Q}(\zeta_M)$ für alle $f \in \Gamma(N)$, wobei $M = \mathrm{kgV}(N, N')$ sei. Die linke Seite von (6.14) läßt sich dann in der Form

$$(\vartheta(\tau, \lambda) \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1}) \left[\frac{f \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1}}{\vartheta(\tau, \lambda) \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1}} \right]$$

schreiben. Wegen Lemma 6.2.5 braucht man die Aussage nur noch für den hinteren Teil des obigen Ausdrucks zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} \left[\frac{f \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1}}{\vartheta(\tau, \lambda) \cdot (J_\alpha, 1) \cdot (A, t) \cdot (J_\alpha, 1)^{-1}} \right] &= \left[\frac{(f^{\sigma_\alpha} \,|_k\, i(t)s(A))^{\sigma_\alpha^{-1}}}{(\vartheta(\tau, \lambda)^{\sigma_\alpha} \,|_k\, i(t)s(A))^{\sigma_\alpha^{-1}}} \right] \\ &= \left(\left(\frac{f}{\vartheta} \right)^{\sigma_\alpha} |_0\, (p \circ s)(A) \right)^{\sigma_\alpha^{-1}} \\ &= \frac{f}{\vartheta} \,|_0\, (p \circ s)(J_\alpha A J_\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung mit Theorem 6.6 aus [Sh1] folgt; siehe dazu auch Theorem 5.1 aus [McG]. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \frac{f}{\vartheta} \,|_0\, (p \circ s)(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) &= \frac{f \,|_k\, i(t)s(J_\alpha A J_\alpha^{-1})}{\vartheta \,|_k\, i(t)s(J_\alpha A J_\alpha^{-1})} \\ &= \frac{f \cdot [(J_\alpha, 1)(A, t)(J_\alpha, 1)^{-1}]}{\vartheta \cdot [(J_\alpha, 1)(A, t)(J_\alpha, 1)^{-1}]}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen Bemerkung 6.1.5 gilt. $\square$

Kapitel 7

Irreduzible Darstellungen von $S(p)$ und die Darstellungen ρ und ρ_α

Es sei p eine ungerade Primzahl und $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. In diesem Kapitel betrachten wir die zuvor eingeführten Darstellungen ρ und ρ_α aus Definition 6.1.2 bzw. 6.1.4 speziell für die Gruppe $\tilde{S}(p)$. Das Ziel ist es, für diesen Spezialfall zu zeigen, daß ρ und ρ_α nicht äquivalent sind, falls $p \equiv 3 \pmod 4$ und $\alpha \in U(p)$ ein quadratischer Nichtrest ist. Eine analoge Aussage für $p \equiv 1 \pmod 4$ läßt sich mit diesen Methoden nicht beweisen. Später wird sich die Frage stellen, ob und für welche $\alpha \in U(p)$ es einen invertierbaren äquivarianten Operator der Darstellungen ρ und ρ_α gibt. Dieses Kapitel zeigt, daß es allgemein für $N \in \mathbb{N}$ keinen solchen Operator gibt, wenn $\alpha \in U(N)$ ein quadratischer Nichtrest ist. Umgekehrt wird sich im Kapitel 8 herausstellen, daß ρ und ρ_α äquivalent sind für alle $N \in \mathbb{N}$, falls $\alpha \in U(N)$ ein quadratischer Rest ist.

Im folgenden wird die obige Aussage zunächst für den Fall $k \in \mathbb{Z}$ gezeigt. In diesem Fall gilt gemäß den Propositionen 6.1.3 und 6.1.6:

$$\begin{aligned} \rho(A,t)(f) &= f \mid_k (p \circ s)(A), \\ \rho_\alpha(A,t)(f) &= f \mid_k (p \circ s)(J_\alpha A J_\alpha^{-1}), \end{aligned} \tag{7.1}$$

wobei $(A,t) \in \tilde{S}(p)$ und s durch (3.14) und p durch (3.11) definiert ist. Die Darstellung $A \mapsto f \mid_k (p \circ s)(A)$ wurde von Hecke in [He1] und [He2] studiert. Um unser Resultat zu zeigen, werden im folgenden verschiedene Ergebnisse aus diesen Arbeiten verwendet. Schließlich wird dann gezeigt, daß die Darstellungen ρ und ρ_α für kein $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ äquivalent sind, wenn α ein quadratischer Nichtrest von $U(p)$ ist.

Eine Möglichkeit Darstellungen auf Äquivalenz zu überprüfen ist, die zugehörigen Charaktere χ_ρ und χ_{ρ_α} zu untersuchen. Denn es gilt

Satz 7.0.7 ([Do]). *Sei G eine endliche Gruppe, σ und σ' zwei endlich-dimensionale Darstellungen von G mit den Charakteren χ_σ und $\chi_{\sigma'}$. Dann sind σ und σ' genau dann äquivalent, wenn die Charaktere χ_σ und $\chi_{\sigma'}$ gleich sind.* $\square$

Der Charakter einer (solchen) Darstellung σ ist vollständig durch die Charaktertafel von G und die Multiplizitäten der irreduziblen Darstellungen in σ bestimmt. Mit Hilfe des obigen Kriteriums bestätigt man dann unter den oben genannten Voraussetzungen schon die Inäquivalenz von ρ und ρ_α, da $\chi_\rho(T) \neq \chi_{\rho_\alpha}(T)$ gilt (siehe Satz 7.0.12).

Die Charaktertafel von $S(p)$ ist seit langem bekannt und wurde von Frobenius und Schur [Su] bestimmt. Die Multiplizitäten der irreduziblen Darstellungen von ρ haben Hecke, Spiess und Feldmann in mehreren Arbeiten ([He1],[He2],[Fe] und [Sp]) bestimmt. Die hier aufgeführte Charaktertafel ist aus [Do], S. 228, entnommen. Zum Verständnis sollen einige der dort auftauchenden Notationen erklärt werden. Zunächst bezeichne ρ_n eine irreduzible Darstellung der Dimension n mit zugehörigem Charakter χ_n. Es gibt genau zwei irreduzible Darstellungen $\rho_{\frac{p+1}{2}}$ und $\rho'_{\frac{p+1}{2}}$ der Dimension $(p+1)/2$. Die Werte beider zugehöriger Charaktere unterscheiden sich in nur zwei Fällen voneinander durch ein Vorzeichen. Daher ist der zu $\rho_{p+1}2'$ gehörige Charakter $\chi'_{\frac{p+1}{2}}$ in Klammern in die Tabelle eingefügt worden. Entsprechendes gilt für die beiden irreduziblen Darstellungen $\rho_{\frac{p-1}{2}}$ und $\rho'_{\frac{p-1}{2}}$.

Satz 7.0.8. *Es sei $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine primitive Restklasse. Es bezeichne*

$$1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad -1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right),$$
$$T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad T' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \; R = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{smallmatrix}\right).$$

Es sei weiter $\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, ζ_{p-1} eine primitive $(p-1)$-te und ζ_{p+1} eine primitive $(p+1)$-te Einheitswurzel und $S \in S(p)$ ein Element der Ordnung $p+1$.

Dann ist die Charaktertafel von $S(p)$ gegeben durch

	χ_1	χ_p	$\chi_{\frac{p+1}{2}}$ $(\chi'_{\frac{p+1}{2}})$	$\chi_{\frac{p-1}{2}}$ $(\chi'_{\frac{p-1}{2}})$	$\chi^{(i)}_{p+1}$ $i=1\ldots(p-3)/2$	$\chi^{(k)}_{p-1}$ $k=1\ldots(p-1)/2$
1	1	p	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$	$p+1$	$p-1$
-1	1	p	$\varepsilon\frac{p+\varepsilon}{2}$	$-\varepsilon\frac{p+\varepsilon}{2}$	$(-1)^i(p+1)$	$(-1)^k(p-1)$
T	1	0	$\frac{1\pm\sqrt{\varepsilon p}}{2}$	$\frac{-1\pm\sqrt{\varepsilon p}}{2}$	1	-1
T'	1	0	$\frac{1\mp\sqrt{\varepsilon p}}{2}$	$\frac{-1\mp\sqrt{\varepsilon p}}{2}$	1	-1
R^a $a=1\ldots(p-3)/2$	1	1	$(-1)^a$	0	$\zeta^{ia}_{p-1}+\zeta^{-ia}_{p-1}$	0
S^b $b=1\ldots(p-1)/2$	1	-1	0	$(-1)^{b+1}$	0	$-\zeta^{bk}_{p+1}-\zeta^{-bk}_{p+1}.$

(7.2)

Die Charakterwerte für die Konjugationsklassen von $-T$ und $-T'$ ergeben sich durch die Formeln $\chi(-T) = \frac{\chi(-1)}{\chi(1)}\chi(T)$ bzw. $\chi(-T') = \frac{\chi(-1)}{\chi(1)}\chi(T')$ und sind daher in der Tabelle nicht aufgeführt. □

Bemerkung 7.0.9. *Für jede primitive Restklasse $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ folgt sofort, daß α ein quadratischer Nichtrest sein muß, da ein quadratischer Rest lediglich eine Untergruppe in der Gruppe der quadratischen Reste erzeugt.*

Die Darstellung ρ aus Definition 6.1.2 zerfällt nun gemäß der obigen Charaktertafel wie folgt in irreduzible Darstellungen

$$\rho = e\rho_1 + x\rho_p + y_1\rho_{\frac{p+1}{2}} + y_2\rho'_{\frac{p+1}{2}} + w_1\rho_{\frac{p-1}{2}} + w_2\rho'_{\frac{p-1}{2}} + \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} u_i\rho^{(i)}_{p+1} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} v_k\rho^{(k)}_{p-1}. \tag{7.3}$$

Die Notation für die Multiplizitäten ist an die Arbeit [He1] von Hecke angelehnt.

Für den zugehörigen Charakter χ_ρ ergibt sich für ein beliebiges $A \in SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ entsprechend

$$\begin{aligned}\chi_\rho(A) =& e\chi_1(A) + x\chi_p(A) + y_1\chi_{\frac{p+1}{2}}(A) + y_2\chi'_{\frac{p+1}{2}}(A) \\ &+ w_1\chi_{\frac{p-1}{2}}(A) + w_2\chi'_{\frac{p-1}{2}}(A) + \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} u_i\chi^{(i)}_{p+1}(A) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} v_k\chi^{(k)}_{p-1}(A).\end{aligned}$$

Es gilt nun per Definition für χ_{ρ_α}

$$\begin{aligned}
&\chi_{\rho_\alpha}(A)\\
&= \chi_\rho(J_\alpha A J_\alpha^{-1})\\
&= e\chi_1(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + x\chi_p(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + y_1\chi_{\frac{p+1}{2}}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + y_2\chi'_{\frac{p+1}{2}}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) +\\
&w_1\chi_{\frac{p-1}{2}}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + w_2\chi'_{\frac{p-1}{2}}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} u_i\chi_{p+1}^{(i)}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} v_k\chi_{p-1}^{(k)}(J_\alpha A J_\alpha^{-1}).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\chi_{\rho_\alpha}(T) = \chi_\rho(T')$. Um zu zeigen, daß ρ und ρ_α nicht äquivalent sind, genügt es zu zeigen, daß $\chi_\rho(T) \neq \chi_{\rho_\alpha}(T)$ gilt. Dies ist in diesem Fall also gleichbedeutend damit ist, daß $\chi_\rho(T) \neq \chi_\rho(T')$ gilt.

Betrachtet man nun in der Charaktertafel die Werte der Charaktere für die Konjugationsklassen T bzw. T', so findet man, daß sich diese lediglich für $\chi_{(p+1)/2}$ und $\chi_{(p-1)/2}$ bzw. $\chi'_{(p+1)/2}$ und $\chi'_{(p-1)/2}$ unterscheiden. Daher ist $\chi_\rho(T) = \chi_{\rho_\alpha}(T)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&y_1\chi_{(p+1)/2}(T) + y_2\chi'_{(p+1)/2}(T) + w_1\chi_{(p-1)/2}(T) + w_2\chi'_{(p-1)/2}(T)\\
&= y_1\chi_{(p+1)/2}(T') + y_2\chi'_{(p+1)/2}(T') + w_1\chi_{(p-1)/2}(T') + w_2\chi'_{(p-1)/2}(T')
\end{aligned}$$

gilt.

Setzt man die Werte der entsprechenden Charaktere ein, so ist die letzte Gleichung gleichwertig zu

$$(y_1 - y_2)\sqrt{\varepsilon p}/2 + (w_1 - w_2)\sqrt{\varepsilon p}/2 = -(y_1 - y_2)\sqrt{\varepsilon p}/2 - (w_1 - w_2)\sqrt{\varepsilon p}/2. \tag{7.4}$$

Zur weiteren Vereinfachung verwenden wir weitere Informationen über die Multiplizitäten y_i und w_i, $i = 1, 2$, aus den oben zitierten Arbeiten von Hecke und Spiess, die in den folgenden Propositionen zusammengefaßt sind.

Proposition 7.0.10 ([He2], S. 345). *Abhängig von der Parität von k in der Definition von ρ lassen sich folgende Aussagen über bestimmte Multiplizitäten in (7.3) treffen.*

1. *Ist k gerade, so gilt*

$$\begin{aligned}
y_1 = y_2 = 0 \text{ für } p &\equiv 3 \pmod 4,\\
w_1 = w_2 = 0 \text{ für } p &\equiv 1 \pmod 4.
\end{aligned}$$

2. *Ist k ungerade, so gilt $e = 0$, $x = 0$ und*

$$\begin{aligned}
y_1 = y_2 = 0 \text{ für } p &\equiv 1 \pmod 4,\\
w_1 = w_2 = 0 \text{ für } p &\equiv 3 \pmod 4.
\end{aligned}$$

$\square$.

Proposition 7.0.11 ([He2], S. 348 und [Sp], S. 346). *Es sei $p \equiv 3 \pmod 4$. Dann gilt für die Multiplizitäten y_1, y_2 und w_1, w_2 aus (7.3) die folgende Aussage:*

$$\begin{aligned}
&y_1 - y_2 \neq 0, \text{ falls } k \text{ ungerade ist und}\\
&w_1 - w_2 \neq 0, \text{ falls } k \text{ gerade ist.}
\end{aligned}$$

$\square$

Aus Proposition 7.0.11 folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnitts

Satz 7.0.12. *Es sei* $p \equiv 3 \pmod 4$ *eine Primzahl und* $\alpha \in U(p)$ *ein quadratischer Nichtrest. Dann sind die Darstellungen*

$$\rho : S(p) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(p))), \quad A \mapsto f\,|_k\,(p \circ s)(A)$$

und

$$\rho_\alpha : S(p) \longrightarrow GL(M_k(\Gamma(p))), \quad A \mapsto f\,|_k\,(p \circ s)(J_\alpha A J_{\alpha^{-1}})$$

nicht äquivalent.

Beweis. Falls $p \equiv 3 \pmod 4$ ist, läßt sich unter Verwendung von Proposition 7.0.10 die Gleichung (7.4) für gerades k schreiben in der Form

$$(w_1 - w_2)\sqrt{\varepsilon p}/2 = -(w_1 - w_2)\sqrt{\varepsilon p}/2, \tag{7.5}$$

für ungerades k in der Form

$$(y_1 - y_2)\sqrt{\varepsilon p}/2 = -(y_1 - y_2)\sqrt{\varepsilon p}/2. \tag{7.6}$$

Aus Proposition 7.0.11 geht jedoch hervor, daß sowohl die Gleichung (7.5) als auch die Gleichung (7.6) nie erfüllt sein kann. Damit gilt unter diesen Voraussetzungen $\chi_\rho(T) \neq \chi_{\rho_\alpha}(T)$, was bedeutet, daß ρ und ρ_α in diesem Fall nicht äquivalent sind. □

Korollar 7.0.13. *Es sei* $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$ *eine Primzahl mit* $p \equiv 3 \pmod 4$. *Dann sind die Darstellungen* ρ *und* ρ_α *nicht äquivalent.*

Beweis. Zunächst ist zu beachten, daß ρ bzw. ρ_α unabhängig davon definiert sind, ob k ganzzahlig oder halbganz ist.

Nimmt man nun an, daß es einen invertierbaren Intertwining-Operator der Darstellungen ρ und ρ_α gibt, so existiert dieser unabhängig davon, ob $k \in \mathbb{Z}$ oder $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ist. Insbesondere existiert also ein invertierbarer Intertwining-Operator für die Darstellungen aus (7.1), im Widerspruch zu Satz 7.0.12. □

Kapitel 8

Ein äquivarianter Operator

In diesem Kapitel soll zu den Darstellungen ρ aus Definition 6.1.2 und ρ_α aus Definition 6.1.4 ein äquivarianter Operator definiert werden. Dieser Operator wird eine große Rolle bei der Definition von Hecke-Operatoren auf vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung spielen. Im Anschluß an die Definition werden verschiedene Eigenschaften dieses Operators gezeigt.

Die Darstellung ρ_α hängt offensichtlich von $\alpha \in U(N)$ ab, so daß dies auch für den zu definierenden Operator gilt. Es wird sich später ergeben, daß dieser Operator notwendig invertierbar sein muß. In diesem Fall sind die Darstellungen ρ und ρ_α sogar äquivalent. Wir haben in Kapitel 7 gesehen, daß diese beiden Darstellungen nicht äquivalent sind, wenn α ein quadratischer Nichtrest modulo N ist. Andersherum wird sich im folgenden zeigen (siehe Satz 8.0.19, Satz 8.0.24), daß ρ und ρ_α äquivalent sind, wenn α ein quadratischer Rest in $U(N)$ ist. Diese Tatsache findet sich explizit in der Definition des Operators wieder, da dieser neben α auch von einer Wurzel $r \in U(N)$ von α abhängt. Hier, *und damit im gesamten Kapitel, ist N gegeben durch den Darstellungsraum $M_k(\Gamma(N))$* von ρ bzw. ρ_α. Insbesondere gilt also $4 \mid N$, falls $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ist.

Definition 8.0.14. *Es sei $\alpha \in U(N)$ ein quadratischer Rest, es bezeichne r sowohl die Restklasse mit $r^2 \equiv \alpha \pmod N$ als auch eine ganze Zahl aus dieser Restklasse. Weiter sei $D_r = \left(\begin{smallmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in S(N)$ und $(D_r, 1)^{-1} \in \widetilde{S}(N)$, dann definieren wir durch*

$$L(\alpha, r) : M_k(\Gamma(N)) \longrightarrow M_k(\Gamma(N)), \quad f \mapsto f \cdot L(\alpha, r) = \kappa(r) f \cdot (D_r, 1)^{-1}, \tag{8.1}$$

einen Operator auf $M_k(\Gamma(N))$, wobei $f \cdot (D_r, 1)^{-1}$ gegeben sein soll durch (6.2) *und*

$$\kappa(r) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ ganzzahlig ist,} \\ \epsilon_r \left(\frac{N}{r}\right), & \text{falls } k \text{ halbganz ist.} \end{cases}$$

Bemerkung 8.0.15.

1. *Der Faktor $\kappa(r)$ wurde eingeführt, um verschiedene Eigenschaften des Operators $L(\alpha, r)$ zu gewährleisten.*

   Er ist unabhängig vom gewählten Vertreter r modulo N. Für ϵ_r ist das klar, da im Fall halbganzen Gewichts $N \equiv 0 \pmod 4$ ist. Für $\left(\frac{N}{r}\right)$ ergibt sich aus Lemma 8.0.16.

2. *Unter Verwendung von Proposition 8.0.20 zeigt man leicht, daß κ ein Charakter auf der Untergruppe $\{(D_r, 1),\ r \in U(N)\}$ der Gruppe $\tilde{S}(N)$ ist.*

3. Falls $k \in \mathbb{Z}$, so gilt wegen Proposition 6.1.3

$$f \cdot L(\alpha, r) = f \mid_k (p \circ s)(D_r^{-1}). \tag{8.2}$$

4. Wegen des q-Entwicklungsprinzips gilt

$$L(\alpha, r)(M_k^{R_N}(\Gamma(N))) \subset M_k^{R_N}(\Gamma(N)).$$

Lemma 8.0.16. *Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $4 \mid N$, weiter seien $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu N mit $c \equiv d \pmod N$. Dann gilt*

$$\left(\frac{N}{d}\right) = \left(\frac{N}{c}\right).$$

Beweis. Man kann c schreiben in der Form $c = d + lN$, $l \in \mathbb{Z}$. Es ist zu zeigen, daß

$$\left(\frac{N}{d + lN}\right) = \left(\frac{N}{d}\right)$$

gilt. Es sei 2^s die höchste Potenz von 2, die in N vorkommt. Dann gilt

$$\left(\frac{N}{d + lN}\right) = \left(\frac{2}{d + lN}\right)^s \left(\frac{N/2^s}{d + lN}\right)$$

gilt. Mit dem Reziprozitätsgesetz folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{N/2^s}{d + lN}\right) &= (-1)^{(N/2^s-1)(d+lN-1)/4} \left(\frac{d + lN}{N/2^s}\right)\\ &= (-1)^{(N/2^s-1)(d+lN-1)/4} \left(\frac{d}{N/2^s}\right)\\ &= \left(\frac{N/2^s}{d}\right).\end{aligned}$$

Weiter gilt bekanntlich

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{d + lN}\right) &= (-1)^{\frac{(d+lN)^2-1}{8}}\\ &= (-1)^{(d^2-1)/8}\\ &= \left(\frac{2}{d}\right),\end{aligned}$$

falls $8 \mid N$. Andernfalls ist $s = 2$ und $\left(\frac{2}{d+lN}\right)^2 = \left(\frac{2}{d}\right)^2$. ☐

Der Rest des Kapitels beschäftigt sich damit, verschiedene Eigenschaften des Operators $L(\alpha, r)$ zu beweisen, die im folgenden von Interesse sind. Diese Eigenschaften sind gültig, unabhängig davon, ob das Gewicht k ganz oder halbganz ist. Die Beweise werden alle für den Fall $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ geführt, da diese aufwendiger sind und sich die Beweise im Fall $k \in \mathbb{Z}$ daraus ergeben.

Vor allem soll gezeigt werden, daß $L(\alpha, r)$ in der Tat ein äquivarianter Operator der Darstellungen ρ und ρ_α ist. Dazu werden zwei Lemmata benötigt.

Lemma 8.0.17. *Es sei* $S_r = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) = D_{r^{-1}} J_{r^2} \in G(N)$. *Es gilt*

$$\varrho_L(S_r)\varrho_L(A)(\mathfrak{e}_\lambda) = \varrho_L(A)\varrho_L(S_r)(\mathfrak{e}_\lambda) \tag{8.3}$$

für alle $A \in S(N)$.

Beweis. Falls die Signatur von L gerade ist, so ist die Aussage klar, da in diesem Fall $G(N)$ echt auf $R_N[L'/L]$ operiert (siehe Korollar 4.2.7).

Es sei also $\operatorname{sig}(L)$ ungerade. Es genügt, die Aussage für die Erzeuger $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu zeigen.

Betrachte zunächst $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man bestätigt die Gleichheit, indem man beide Seiten berechnet. Es ist per Definition die linke Seite gleich

$$\begin{aligned}
\varrho_L(s(D_{r^{-1}}))\varrho_L(J_{r^2})\varrho_L(s(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)))(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L(s(D_{r^{-1}}))\varrho_L(J_{r^2}) \left(g(L)^{-1} \sum_{\mu \in L'/L} e(-(\lambda,\mu))\mathfrak{e}_\mu \right) \\
=& \varrho_L(s(D_{r^{-1}})) \left(g(L)^{-1} \sum_{\mu \in L'/L} e(-(r^{-2}\lambda,\mu))\mathfrak{e}_\mu \right) \\
=& \sigma(D_{r^{-1}}) \frac{g_{r^{-1}}(L)}{g(L)} g(L)^{-1} \sum_{\mu \in L'/L} e(-(r^{-1}\lambda,\mu))\mathfrak{e}_\mu .
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\sigma(D_{r^{-1}}) \in \{\pm 1\}$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varrho_L(s(D_{r^{-1}}))(\mathfrak{e}_\lambda) =& \sigma(D_{r^{-1}})\varrho_L(R_{r^{-1}})(\mathfrak{e}_\lambda) \\
=& \sigma(D_{r^{-1}}) \frac{g_{r^{-1}}(L)}{g(L)} \mathfrak{e}_{r^{-1}\lambda} .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Für die rechte Seite verwenden wir zur Berechnung von $\varrho_L(s(D_{r^{-1}}))$ wieder $\varrho_L(R_{r^{-1}})$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\varrho_L(s(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)))\varrho_L(s(D_{r^{-1}}))\varrho_L(J_{r^2}))(\mathfrak{e}_\lambda) =& \sigma(D_{r^{-1}})\varrho_L(s(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right))) \left(\frac{g_{r^{-1}}(L)}{g(L)} \mathfrak{e}_{r^{-1}\lambda} \right) \\
=& \sigma(D_{r^{-1}}) \frac{g_{r^{-1}}(L)}{g(L)} g(L)^{-1} \sum_{\mu \in L'/L} e((r^{-1}\lambda,\mu))\mathfrak{e}_\mu .
\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ unter Verwendung von (8.4) für beide Seiten

$$\sigma(D_{r^{-1}}) \frac{g_{r^{-1}}(L)}{g(L)} e((r^{-1}\lambda)^2/2)\mathfrak{e}_{r\lambda} .$$

$\square$

Lemma 8.0.18. *Sei* S_r *definiert wie in Lemma 8.0.17, weiter sei* $A \in S(N)$ *und* (S_r, t'), $(A, t) \in \widetilde{G}(N)$. *Dann gilt*

$$(S_r, t')(A, t) = (A, t)(S_r, t'). \tag{8.5}$$

Beweis. Es ist $(S_r, t')(A, t) = (S_r A, \omega_{G(N)}(S_r, A)t't)$ und $(A, t)(S_r, t') =$ $(AS_r,\, \omega_{G(N)}(A, S_r)t't)$. Da $S_r A = AS_r$ in $G(N)$, muß noch gezeigt werden, daß $\omega_{G(N)}(S_r, A)$ $= \omega_{G(N)}(A, S_r)$ gilt. Wegen

$$\omega_{G(N)}(S_r, A)\varrho_L(S_r)\varrho_L(A) = \varrho_L(S_r A) = \varrho_L(AS_r) = \omega_{G(N)}(A, S_r)\varrho_L(A)\varrho_L(S_r)$$

folgt die Behauptung mit Lemma 8.0.17. $\square$

Satz 8.0.19. *Es sei $\alpha \in U(N)$ ein quadratischer Rest und $r \in U(N)$ eine Wurzel von α. Weiter sei $(A,t) \in \tilde{S}(N)$. Dann ist $L(\alpha, r)$ ein äquivarianter Operator der Darstellungen ρ und ρ_α.*

Beweis. Es sei $t' = \omega_{G(N)}(S_r, D_r)$. Dann gilt

$$(J_\alpha, 1) = (J_{r^2}, 1) = (S_r, t')(D_r, 1).$$

Unter Verwendung von Lemma 8.0.18 ergibt sich damit

$$(J_{r^2}, 1)(A,t)(J_{r^2}, 1)^{-1} = (D_r, 1)(A,t)(D_r, 1)^{-1},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} f \cdot L(\alpha, r) \circ \rho_\alpha(A,t) =& \kappa(r) f \cdot (D_r, 1)^{-1} \cdot (J_{r^2}, 1)(A,t)(J_{r^2}, 1)^{-1} \\ =& \kappa(r) f \cdot (A,t)(D_r, 1)^{-1} \\ =& f \cdot \rho(A,t) \circ L(\alpha, r). \end{aligned}$$

□

Im folgenden soll gezeigt werden, daß $L(\alpha, r)$ in gewissen Fällen mit der Galois-Operation (6.9) kommutiert. Als Vorbereitung dient die folgende Proposition und das darauf folgende Lemma.

Proposition 8.0.20. *Es seien $D_r, D_{r'} \in S(N)$, wie in Definition 8.0.14 definiert. Dann gilt*

$$\omega_{S(N)}(D_r, D_{r'}) = (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r'-1}{2}}. \tag{8.6}$$

Beweis. Der Kozykel $\omega_{S(N)}(D_r, D_{r'})$ ist per Definition gegeben durch die Gleichung

$$s(D_r)s(D_{r'}) = \omega_{S(N)}(D_r, D_{r'}) s(D_r D_{r'}).$$

Die Schnitte von $D_r, D_{r'}$ und deren Produkt kann man angeben durch

$$\begin{aligned} s(D_r) &= \left(\gamma, \left(\frac{c}{d}\right) j(\gamma, \tau)\right) \Gamma(N)^*, \\ s(D_{r'}) &= \left(\gamma', \left(\frac{c'}{d'}\right) j(\gamma', \tau)\right) \Gamma(N)^* \text{ und} \\ s(D_r D_{r'}) &= \left(\gamma\gamma', \left(\frac{a'c + c'd}{cb' + dd'}\right) j(\gamma\gamma', \tau)\right) \Gamma(N)^*, \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\gamma \equiv D_r \pmod N$ und $\gamma' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $\gamma' \equiv D_{r'} \pmod N$. Da 4 ein Teiler von N ist, liegen γ, γ' und das Produkt dieser Matrizen in $\Gamma_0(4)$, und es gilt

$$(\gamma, J(\gamma, \tau))(\gamma', J(\gamma', \tau)) = (\gamma\gamma', J(\gamma\gamma', \tau)),$$

wobei $J(\cdot, \tau)$ gegeben ist durch (2.1). Daher folgt

$$s(D_r) = (\gamma, \epsilon_r J(\gamma, \tau)),$$

entsprechend für $s(D_{r'})$ und $s(D_r D_{r'})$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s(D_r)s(D_{r'}) =& (\gamma\gamma', \epsilon_r \epsilon_{r'} J(\gamma, \gamma'\tau) J(\gamma', \tau)) \\ =& (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r'-1}{2}} (\gamma\gamma', \epsilon_{rr'} J(\gamma\gamma', \tau)) \\ =& (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r'-1}{2}} s(D_r D_{r'}). \end{aligned}$$

□

Lemma 8.0.21. *Seien $\alpha, \beta \in U(N)$, β quadratischer Rest modulo N. Dann gilt* $\omega_{G(N)}(D_\alpha, J_\beta) = \omega_{G(N)}(J_\beta, D_\alpha) = 1$.

Beweis. Für $\omega_{G(N)}(D_\alpha, J_\beta)$ ergibt sich das aus Bemerkung 6.1.5.

Der Kozykel $\omega_{G(N)}(J_\beta, D_\alpha)$ ist gegeben durch

$$\varrho_L(J_\beta)\varrho_L(D_\alpha) = \omega_{G(N)}(J_\beta, D_\alpha)\varrho_L(J_\beta D_\alpha).$$

Die linke Seite dieser Gleichung berechnet sich analog zu Lemma 8.0.17 zu

$$\sigma(D_\alpha)\varrho_L(J_\beta)\left(\frac{g_\alpha(L)}{g(L)}\mathfrak{e}_{\alpha\lambda}\right) = \sigma(D_\alpha)\frac{g_\alpha(L)}{g(L)}\mathfrak{e}_{\alpha\lambda},$$

da β ein quadratischer Rest ist und damit $g_{\alpha\beta}(L) = g_\alpha(L)$ für alle $\alpha \in U(N)$. Andererseits ist

$$\varrho_L(J_\beta D_\alpha) = \varrho_L(D_\alpha J_\beta),$$

da D_α und J_β in $S(N)$ kommutieren. Per Definition ist

$$\begin{aligned}\varrho_L(D_\alpha J_\beta)(\mathfrak{e}_\lambda) &= \varrho_L(D_\alpha)\varrho_L(J_\beta)(\mathfrak{e}_\lambda)\\ &= \varrho_L(D_\alpha)(\mathfrak{e}_\lambda).\end{aligned}$$

□

Satz 8.0.22. *Seien $\alpha, \beta \in U(N)$ quadratische Reste modulo N und $\sigma_\beta \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$. Es sei weiter $r \in U(N)$ mit $r^2 \equiv \alpha \pmod N$ und $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$. Dann gilt*

$$f^{\sigma_\beta} \cdot L(\alpha, r) = (f \cdot L(\alpha, r))^{\sigma_\beta}.$$

Beweis. Es ist β ein quadratischer Rest modulo N, damit folgt $\epsilon_r^{\sigma_\beta} = \epsilon_r$. Dabei ist zu beachten, daß ϵ_r Potenz einer N-ten Einheitswurzel und somit $\epsilon_r^{\sigma_\beta}$ wohldefiniert ist (beachte $4 \mid N$). Unter Verwendung von (6.9) und (8.1) läßt sich die linke Seite der zu zeigenden Gleichung schreiben

$$\begin{aligned}f \cdot (J_\beta, 1) \cdot L(\alpha, r) &= \kappa(r) f \cdot (J_\beta, 1) \cdot (D_r, 1)^{-1}\\ &= \kappa(r) f \cdot (J_\beta, 1)(D_r^{-1}, (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r^{-1}-1}{2}})\\ &= \kappa(r) f \cdot (D_r^{-1}, (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r^{-1}-1}{2}})(J_\beta, 1).\end{aligned} \tag{8.7}$$

Die letzte Gleichung folgt, da $(J_\beta, 1)$ und $(D_r^{-1}, (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r^{-1}-1}{2}})$ in $\tilde{G}(N)$ kommutieren. Dies sieht man mit Lemma 8.0.21 und der Tatsache, daß J_β und D_r^{-1} in $S(N)$ kommutieren.

Da $\epsilon_r^{\sigma_\beta} = \epsilon_r$ gilt, läßt sich die letzte Zeile von (8.7) in der Form

$$(f \cdot L(\alpha, r))^{\sigma_\beta}$$

schreiben. □

Bemerkung 8.0.23. *Falls $k \in \mathbb{Z}$ ist, so gilt sogar*

$$f^{\sigma_\beta} \cdot L(\alpha, r) = (f \cdot L(\alpha, r))^{\sigma_\beta}$$

für alle $\beta \in U(N)$.

Die Multiplikativität der Operatoren $L(\alpha, r)$ ist eine weitere wesentliche Eigenschaft, die später benötigt wird. Diese Eigenschaft hat es nötig gemacht, den Faktor ϵ_r einzuführen.

Satz 8.0.24. *Es seien $\alpha, \beta \in U(N)$ quadratische Reste modulo N, $r, r' \in U(N)$ mit $\alpha \equiv r^2 \pmod N$ und $\beta \equiv r'^2 \pmod N$ und $f \in M_k(\Gamma(N))$. Dann gilt*

$$f \cdot L(\alpha, r) \cdot L(\beta, r') = f \cdot L(\alpha\beta, rr').$$

Außerdem gilt

$$L(1,1) = \mathrm{id}_{M_k(\Gamma(N))},$$

so daß $L(\alpha, r)$ invertierbar ist mit

$$L(\alpha, r)^{-1} = L(\alpha^{-1}, r^{-1}).$$

Beweis. Unter Verwendung von (8.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} f \cdot L(\alpha, r) \cdot L(\beta, r') =& \kappa(r)\kappa(r') f \cdot ((D_{r'}, 1)(D_r, 1))^{-1} \\ =& \kappa(r)\kappa(r') f \cdot (D_r D_{r'}, (-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r'-1}{2}})^{-1} \\ =& \kappa(r)\kappa(r')(-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r'-1}{2}} f \cdot (D_{rr'}, 1)^{-1} \\ =& f \cdot L(\alpha\beta, rr'). \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition 8.0.14. Man muß lediglich berücksichtigen, daß $r \equiv 1 \pmod N$ und damit wegen Lemma 8.0.16 $\left(\frac{N}{r}\right) = 1$ gilt. □

8.1 Eine Familie von Operatoren

Zum Abschluß dieses Kapitels führen wir zu einem festen $N \in \mathbb{N}$, und feste $\alpha, r \in U(N)$ eine Familie von Operatoren $L(\alpha_D, r_D), D \in \mathbb{N}$ mit $(N, D) = 1$ ein. Die $L(\alpha_D, r_D)$ sind im Falle ganzen Gewichts die Fortsetzungen des Operators $L(\alpha, r)$ auf die Räume $M_k(\Gamma(ND))$. Diese Familie von Operatoren wird später benötigt.

Definition 8.1.1. *Es seien $N, D \in \mathbb{N}$ mit $(D, N) = 1$, $\alpha, r \in U(N)$ mit $\alpha \equiv r^2 \pmod N$. Weiter sei $\alpha_D = \psi_D(\alpha, 1)$ und $r_D = \psi_D(r, 1)$, definiert wie in (2.15). Dann definieren wir $L(\alpha_D, r_D)$ analog zu Definition 8.0.14 durch*

$$L(\alpha_D, r_D) : M_k(\Gamma(ND)) \longrightarrow M_k(\Gamma(ND)), \quad f \mapsto f \cdot L(\alpha_D, r_D) = \kappa(r_D) f \cdot (D_{r_D}, 1)^{-1}. \tag{8.8}$$

Lemma 8.1.2. *Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N) \cap M_2(\mathbb{Z})$ mit $D = \det(A)$, $\alpha \in U(N)$ und $r \in U(N)$ eine Wurzel von α modulo N. Weiterhin sei $\beta \in \mathbb{Z}$ ein beliebiger Vertreter aus der Restklasse $\alpha_D^{-1} \in U(ND)$. Schließlich sei $D_{r_D}^{-1} \in S(ND)$ und $\gamma \in \Gamma(1)$ mit $\pi_{ND}(\gamma) = D_{r_D^{-1}}$. Dann gilt*

$$\pi_N(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \gamma \left(\begin{smallmatrix} a & \beta b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}) = D_r^{-1}.$$

Beweis. Es sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ s & t \end{smallmatrix}\right)$. Man berechnet nun

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b\beta/ad \\ 0 & 1/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{sb}{a} + p & \frac{b}{d}(t - p\beta) + \frac{qa}{d} - \frac{sb^2\beta}{ad} \\ \frac{ds}{a} & \frac{-sb\beta}{a} + t \end{pmatrix} := M(D_r, a, b, d). \tag{8.9}$$

Da nach Voraussetzung $D = ad$ und $s \equiv 0 \pmod{ND}$ bzw. $q \equiv 0 \pmod{ND}$ gilt, folgt sofort, daß alle Einträge der rechten Matrix in (8.9) bis auf den oben rechts ganzzahlig sind. Mit dem gleichen Argument folgt, daß $\frac{qa}{d} - \frac{sb^2\beta}{ad}$ ganzzahlig ist. Für $\frac{b}{d}(t - p\beta)$ bemerke man, daß $p\beta \equiv r^{-1} \equiv t \pmod{ND}$ ist, also $t - p\beta \equiv 0 \pmod{ND}$. Daher ist auch $\frac{b}{d}(t - p\beta)$ in $\mathbb{Z}$.

Man sieht leicht, daß alle in dieser Matrix auftauchenden Brüche nicht nur aus $\mathbb{Z}$ sind, sondern auch kongruent 0 modulo N sind, so daß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b\beta/ad \\ 0 & 1/d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \pmod{N} \tag{8.10}$$

gilt. □

Für die Aussage des folgenden Satzes wird der Charakter $\left(\frac{N}{r}\right)$ in der Definition des Operators $L(\alpha, r)$ benötigt.

Satz 8.1.3. *Es sei $N \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar, $\xi(a,b,d) = \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{d}\right) \in \tilde{\mathcal{G}}(N)$ und $u \in \mathbb{Z}$, so daß $u\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{Z})$. Weiter sei $D = \det(u\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right))$, $\alpha \in U(N)$ ein quadratischer Rest, $r \in U(N)$ eine Wurzel von α und $\beta \in \alpha_D^{-1}$. Dann gilt für alle $f \in M_k(\Gamma(N))$*

$$f \cdot L(\alpha, r) \mid_k \xi(a, b\beta, d) = f \mid_k \xi(a,b,d) \cdot L(\alpha_D, r_D). \tag{8.11}$$

Beweis. Zunächst kann angenommen werden, daß die Matrix $\xi(a,b,d)$ ganzzahlige Einträge hat und d sogar positiv ist, so daß $D = ad$ gilt. Es sei $s(D_{r_D^{-1}}) = \left(\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ s & t \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{s}{t}\right)\sqrt{s\tau + d}\right) \Gamma(ND)^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\xi(a,b,d)\left(\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}, \left(\frac{s}{t}\right)\sqrt{s\tau + d}\right)\xi(a, b\beta, d)^{-1} \\ &= \left(M(D_r, a, b, d), \left(\frac{s}{t}\right)\sqrt{\frac{ds}{a}\tau - \frac{b\beta\nu}{a} + t}\right). \end{aligned} \tag{8.12}$$

Gemäß Lemma 8.1.2 ist die Matrix in der zweiten Zeile von (8.12) kongruent zu $D_{r^{-1}}$ modulo N. Damit folgt

$$\begin{aligned} &f \mid_k \xi(a,b,d) \cdot L(\alpha_D, r_D) \mid_k \xi(a, b\beta, d)^{-1} \\ &= \epsilon_{r_D}(-1)^{\frac{r_D - 1}{2}\frac{r_D^{-1}-1}{2}} \left(\frac{N}{r_D}\right) f \mid_k \left(M(D_r, a, b, d), \left(\frac{sD}{t}\right)\sqrt{\frac{ds}{a}\tau - \frac{b\beta\nu}{a} + t}\right) \\ &= \epsilon_r(-1)^{\frac{r-1}{2}\frac{r^{-1}-1}{2}} \left(\frac{N}{r}\right) f \mid_k \left(M(D_r, a, b, d), \left(\frac{ds/a}{-b\beta s/a + t}\right)\sqrt{\frac{ds}{a}\tau - \frac{b\beta\nu}{a} + t}\right) \\ &= f \cdot L(\alpha, r). \end{aligned}$$

Für den Schritt von der zweiten zur dritten Zeile muß man einsehen, daß

$$\left(\frac{sad}{t}\right) = \left(\frac{ds/a}{-b\beta s/a + t}\right)$$

gilt. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds/a}{-b\beta s/a+t}\right) &= \left(\frac{d^2 s/ad}{-b\beta s/a+t}\right)\\
&= \left(\frac{s/ad}{-b\beta s/a+t}\right)\\
&\overset{\text{Lemma 8.0.16}}{=} \left(\frac{s/ad}{t}\right).
\end{aligned}$$

□

Kapitel 9

Ein induktiver Limes von Modulformen beliebiger Stufe

Es sind im Verlauf der bisherigen Arbeit verschiedene Abbildungen auf den Raum $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ definiert worden, siehe (2.16), (6.2), (6.4) and (8.1). Alle diese Abbildungen hängen von der Stufe N der Modulformen ab. Daher erhält man zu der Familie $\left\{M_k^{R_N}(\Gamma(N));\quad N \in \mathbb{N}\right\}$ jeweils eine zugehörige Familie der obigen Abbildungen. In diesem Kapitel betrachten wir zu einem festen $N \in \mathbb{N}$ die Familie

$$\left\{M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND));\ D \in \mathbb{N},\ (D, N) = 1\right\} \tag{9.1}$$

Man kann diese Familie als ein gerichtetes System über der gerichteten Menge

$$\mathbb{N}(N) = \{D \in \mathbb{N}; (D, N) = 1\}\,. \tag{9.2}$$

sehen und den zugehörigen induktiven Limes betrachten. In diesem Kontext sind einige der oben genannten Abbildungen Morphismen auf diesem Limes, wovon wir uns in diesem Kapitel überzeugen wollen.

Proposition 9.0.4. *Die Familie* (9.1) *ist ein gerichtetes System über der Menge* $\mathbb{N}(N)$.

Beweis. Die Menge $\mathbb{N}(N)$ ist bezügliche der Teilerrelation eine gerichtete Menge. Weiterhin gilt $R_{D_1} \subset R_{D_2}$, falls $D_1 \mid D_2$ gilt, so daß

$$M_k^{R_{D_1}}(\Gamma(D_1)) \subset M_k^{R_{D_2}}(\Gamma(D_2))$$

gilt. Die Familie (9.1) wird durch die Inklusionsabbildungen

$$i_{D_1}^{D_2} : M_k(\Gamma(D_1)) \longrightarrow M_k(\Gamma(D_2)), \quad D_1 \mid D_2$$

zu einem gerichteten System. $\square$

Es existiert nun also der zu diesem System zugehörige induktive Limes (siehe [Ku], S. 99)

$$\mathfrak{m}(N) := \varinjlim_{\substack{D \in \mathbb{N} \\ (D,N)=1}} M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)), \tag{9.3}$$

wobei die Abbildungen

$$i^D : M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \longrightarrow \mathfrak{m}(N)$$

ebenfalls durch Einbettungen gegeben sind, da

$$\mathfrak{m}(N) = \bigcup_{\substack{D\in\mathbb{N}\\(D,N)=1}} M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)),$$

(siehe [Bo], S. 152).

Es gibt nach Definition des induktiven Limes für $D_1 \mid D_2$ die folgenden Verträglichkeitsrelation zwischen i^{D_1}, i^{D_2} und $i^{D_1}_{D_2}$

$$i^{D_1} = i^{D_2} \circ i^{D_1}_{D_2}. \tag{9.4}$$

Es wird später eine Operation auf dem induktiven Limes (9.3) auftauchen. Insofern sind Morphismen zwischen gerichteten Systemen von Moduln und damit von induktiven Limiten von Moduln für uns von Interesse. Als Grundlage dafür sollen diese nun definiert werden.

Definition 9.0.5. *Es sei I eine partiell geordnete Menge und (M_i, f_i^j) und (N_i, g_i^j) zwei bezüglich I gerichtete Systeme von R_i-Moduln. Dann ist ein Morphismus von gerichteten Systemen*

$$F : (M_i, f_i^j) \longrightarrow (N_i, g_i^j)$$

eine Familie von R_i-Modulmorphismen $(F_i : M_i \to N_i)_{i\in I}$, so daß für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{F_i} & N_i \\ \downarrow{\scriptstyle f_i^j} & & \downarrow{\scriptstyle g_i^j} \\ M_j & \xrightarrow{F_j} & N_j \end{array} \tag{9.5}$$

kommutieren.

Bemerkung 9.0.6. *Ein Morphismus F zwischen gerichteten Systemen (M_i, f_i^j) und (N_i, g_i^j) von R_i-Moduln induziert einen eindeutig bestimmten R-Modulmorphismus $\tilde{F}$ zwischen den induktiven Limiten M und N der beiden gerichteten Systeme.*

Beweis. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft des induktiven Limes. In diesem Fall gibt es einerseits die per Definition existierenden Modulmorphismen $f_i : M_i \to M$. Dazu kann man die Modulmorphismen

$$\tilde{f}_i : M_i \longrightarrow N, \quad \tilde{f}_i = g_i \circ F_i$$

betrachten, die aufgrund der Kommutativität von (9.5) die Eigenschaft

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}_j \circ f_i^j$$

für $i \geq j$ erfüllen. Gemäß der universellen Eigenschaft von M existiert ein eindeutiger Morphismus $\tilde{F} : M \to N$ mit

$$\tilde{f}_i = g_i \circ F_i = \tilde{F} \circ f_i. \tag{9.6}$$

□

Bemerkung 9.0.7. *Es sei L ein Morphismus von* (9.1) *auf sich, gegeben durch*

$$(L_{ND} : M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \longrightarrow M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)))_{D\in\mathbb{N}(N)},$$

dann gilt für den induzierten Morphismus $\tilde{L}$ auf $\mathfrak{m}(N)$ für $f \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$

$$\tilde{L}(f) = L_{ND}(f).$$

Beweis. Der Morphismus $\tilde{L}$ erfüllt die Gleichung

$$\tilde{L} \circ i^D = i^D \circ L_{ND} \tag{9.7}$$

für alle $D \in \mathbb{N}(N)$ (siehe Gleichung (9.6)). Da die Abbildungen $i^D : M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \to \mathfrak{m}(N)$ in diesem konkreten Fall einfach Einbettungen sind, ist (9.7) eine definierende Gleichung für $\tilde{L}$, und es ergibt sich die Behauptung. □

Proposition 9.0.8. *i) Für $D_1, D_2 \in \mathbb{N}(N)$ mit $D_1 \mid D_2$ seien α_{D_1} und α_{D_2} definiert durch* (2.15)*. Es gilt*

$$\alpha_{D_2} = \alpha_{D_1} \quad \textit{modulo } ND_1. \tag{9.8}$$

ii) Für alle $\alpha \in U(N)$ sei $\sigma_{\alpha_D} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{ND})/\mathbb{Q})$ für alle $D \in \mathbb{N}(N)$, α_D wieder definiert durch (9.8)*. Dann ist die Familie*

$$(\sigma_{\alpha_D} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{ND})/\mathbb{Q}))_{D\in\mathbb{N}(N)} \tag{9.9}$$

ein Morphismus des gerichteten System (9.1)*.*

iii) Für alle $\gamma \in \Gamma(1), \alpha \in U(N)$ gilt: $(\rho_D(\pi_{ND}(\gamma), \eta(\gamma)))_{D\in\mathbb{N}(N)}$ und $(\rho_{\alpha_D}(\pi_{ND}(\gamma), \eta(\gamma)))_{D\in\mathbb{N}(N)}$ sind Morphismen des gerichteten Systems (9.1)*. Hierbei ist $\rho_D : \tilde{S}(ND) \to GL(M_k(\Gamma(ND)))$ mit $\rho_D(A,t)(f) = f \cdot (A,t)$ und η der Korand aus* (3.15)*. Entsprechend ist ρ_{α_D} zu verstehen.*

Beweis. **zu i)** Diese Aussage sieht man zum Beispiel mittels des chinesischen Restsatzes.

zu ii) Unter Verwendung von (9.8) sieht man, daß das folgende Diagramm für $M_1 = ND_1, M_2 = ND_2 \in \mathbb{N}(N)$ mit $M_1 \mid M_2$ kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} M_k^{R_{M_1}}(\Gamma(M_1)) & \xrightarrow{\sigma_{\alpha_{D_1}}} & M_k^{R_{M_1}}(\Gamma(M_1)) \\ \big\downarrow i_{M_2}^{M_1} & & \big\downarrow i_{M_2}^{M_1} \\ M_k^{R_{M_2}}(\Gamma(M_2)) & \xrightarrow{\sigma_{\alpha_{D_2}}} & M_k^{R_{M_2}}(\Gamma(M_2)) \end{array} \tag{9.10}$$

zu iii) Für M_1 und M_2 wie in *ii)* muß man lediglich sehen, daß $s(\pi_{M_2}(\gamma)) \in \widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(M_2)^*$ und $s(\pi_{M_1}(\gamma)) \in \widetilde{\Gamma}(1)/\Gamma(M_1)^*$ sich um ein Element aus $\Gamma(M_1)^*$ unterscheiden. □

Bemerkung 9.0.9. *Die Familie $(L(\alpha_D, r_D))_{D\in\mathbb{N}(N)}$ aus Definition 8.1.1 definiert einen Morphismus des gerichteten Systems* (9.1) *nur dann, wenn das Gewicht der Räume $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ ganzzahlig ist.*

Beweis. Es seien M_1, M_2 wie in der vorherigen Proposition. Wegen (9.8) gilt $(\pi_{M_1} \circ p)(s(D_{r_{D_2}})) = (\pi_{M_1} \circ p)(s(D_{r_{D_1}}))$, so daß für ein $f \in M_k^{R_{M_1}}(\Gamma(M_1))$ gilt $f\,|_k\, s(D_{r_{D_2}}) = f\,|_k\, s(D_{r_{D_1}})$.

Im allgemeinen gilt jedoch nicht $\left(\frac{ND_1}{r_{D_1}}\right) = \left(\frac{ND_2}{r_{D_2}}\right)$, so daß die Konstanten $\kappa(r_{D_1})$ und $\kappa(r_{D_2})$ im allgemeinen nicht gleich sind. □

Notation 9.0.10. *1. Es bezeichne σ_α im folgenden den zu* (9.9) *zugehörigen Morphismus auf $\mathfrak{m}(N)$.*

2. Falls das Gewicht der Räume $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ aus $\mathbb{Z}$ ist, bezeichne $L(\alpha, r)$ den zur Familie $(L(\alpha_D, r_D))_{D \in \mathbb{N}(N)}$ zugehörigen Morphismus auf $\mathfrak{m}(N)$.

Falls $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, sei $L(\alpha, r)$ eine Abbildung auf $\mathfrak{m}(N)$, definiert durch

$$f \cdot L(\alpha, r) = f \cdot L(\alpha_D, r_D) \tag{9.11}$$

für $f \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$. Man beachte, daß $L(\alpha, r)$ im Fall ganzen Gewichts genauso definiert ist.

Kapitel 10

Vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung

Diese Arbeit befaßt sich damit, einen Hecke-Operator auf vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung zu definieren. In diesem Abschnitt werden derartige Modulformen definiert und einige für den weiteren Verlauf notwendige Eigenschaften dargestellt. Diese sind bekannt und finden sich etwa in [Br1] oder [McG]. Die nun folgende Darstellung richtet sich nach diesen Arbeiten.

In diesem Kapitel sei L ein gerades Gitter der Stufe N und $A = L'/L$ die Diskriminantengruppe. Es sei weiter

$$V(\mathbb{H})_L = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[A]\} \tag{10.1}$$

der Raum der Abbildungen von $\mathbb{H}$ in den Gruppenring $\mathbb{C}[A]$. Eine solche vektorwertige Funktion $f \in V(\mathbb{H})_L$ läßt sich bezüglich der Standardbasis $(\mathfrak{e}_\lambda)_{\lambda\in A}$ in der Form $f(\tau) = \sum_{\lambda\in A} f_\lambda(\tau)\mathfrak{e}_\lambda$ schreiben.

Definition 10.0.11. *Es sei ϱ_L die Weildarstellung auf $\mathbb{C}[A]$. Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $(\gamma, \phi) \in \widetilde{\Gamma}(1)$ und $f \in V(\mathbb{H})_L$ sei der Slash-Operator definiert durch*

$$f \mid_{k,L} (\gamma, \phi)(\tau) = \sum_{\lambda\in A} \varrho_L^{-1}(\gamma, \phi)(f_\lambda \mid_k (\gamma, \phi)(\tau)\mathfrak{e}_\lambda). \tag{10.2}$$

Proposition 10.0.12. *Es sei*

$$\Xi : V(\mathbb{H})_L \longrightarrow V(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C}[A], \quad \sum_{\lambda\in A} f_\lambda\mathfrak{e}_\lambda \mapsto \sum_{\lambda\in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda \tag{10.3}$$

und $|_k \otimes\varrho_L^{-1}$ die Rechtsoperation von $\widetilde{\Gamma}(1)$ auf $V(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C}[A]$, gegeben durch

$$(f \otimes \mathfrak{e}_\lambda)(|_k \otimes\varrho_L^{-1})(\tilde{\gamma}) = (f \mid_k \tilde{\gamma}) \otimes \varrho_L^{-1}(\tilde{\gamma})(\mathfrak{e}_\lambda).$$

Dann gilt für alle $f \in V(\mathbb{H})_L$ und alle $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(1)$

$$\Xi(f \mid_{k,L} \tilde{\gamma}) = \Xi(f)(|_k \otimes\varrho_L^{-1})(\tilde{\gamma}). \tag{10.4}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\Xi(f\mid_{k,L}\tilde\gamma) =& \Xi\left(\sum_{\lambda\in A}(f_\lambda\mid_k\tilde\gamma)\varrho_L^{-1}(\tilde\gamma)(\mathfrak{e}_\lambda)\right)\\ =& \sum_{\lambda\in A} f_\lambda\mid_k\tilde\gamma\otimes\varrho_L^{-1}(\tilde\gamma)(\mathfrak{e}_\lambda).\end{aligned}$$

Der entscheidende Punkt ist, daß $\widetilde{\Gamma}(1)$ durch die Weildarstellung $\mathbb{C}$-linear auf $\mathbb{C}[A]$ operiert, so daß der erste Schritt in der obigen Rechnung möglich ist. □

Bemerkung 10.0.13. *1. Die Abbildung Ξ definiert einen Isomorphismus der Räume $V(\mathbb{H})_L$ und $V(\mathbb{H})\otimes\mathbb{C}[A]$.*

2. Es sei $f\in V(\mathbb{H})_L$ holomorph, und es gelte $f\mid_{k,L}\tilde\gamma = f$ für alle $\tilde\gamma\in\widetilde{\Gamma}(1)$. Dann besitzen die Komponentenfunktionen f_λ von f eine Fourierentwicklung der Form

$$f_\lambda(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} a(\lambda,n)e(n\tau). \tag{10.5}$$

Definition 10.0.14. *Es sei $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Eine Funktion $f\in V(\mathbb{H})_L$ heißt holomorphe Modulform vom Gewicht k zur Weildarstellung ϱ_L und zur Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)$, falls gilt:*

i) f ist holomorph,

ii) $f\mid_{k,L}\tilde\gamma = f$ für alle $\tilde\gamma\in\widetilde{\Gamma}(1)$,

iii) die Komponentenfunktionen f_λ von f besitzen eine Fourierentwicklung der Form (10.5)*, wobei $a(\lambda,n)=0$, falls $n<0$.*

Der Raum der Modulformen vom Gewicht k zur Weildarstellung sei mit $M_{k,L}$ bezeichnet. Falls in der Bedingung iii) sogar $a(\lambda,n)=0$ für alle $n\le 0$ gilt, so heißt f Spitzenform. Der Raum aller Spitzenformen wird mit $S_{k,L}$ bezeichnet.

Bemerkung 10.0.15. *Aus dem Transformationsverhalten einer Modulform $f\in M_{k,L}$ unter der Matrix Z^2 folgt für die Komponentenfunktionen f_λ von f die Gleichung*

$$f_\lambda = (-1)^{-2k+\operatorname{sig}(L)}f_\lambda.$$

Damit ist $M_{k,L}=\{0\}$, falls $\operatorname{sig}(L)\not\equiv 2k \pmod 2$. Falls also $\operatorname{sig}(L)$ gerade ist, gibt es nur nichttriviale Modulformen ganzen Gewichts, andernfalls nur nichttriviale Modulformen halbganzen Gewichts.

Bemerkung 10.0.16. *Es sei $f=\sum_{\lambda\in A}f_\lambda\mathfrak{e}_\lambda\in M_{k,L}$. Dann sind die Komponentenfunktionen f_λ Modulformen vom Gewicht k zu $\Gamma(N)$, falls $k\in\mathbb{Z}$ bzw. zu $\Gamma(N)^*$, falls $k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$.*

Beweis. Es ist im wesentlichen $f_\lambda\mid_k\gamma_N = f$ für $\gamma_N\in\Gamma(N)$ zu zeigen. Das folgt aber aus der entsprechenden Eigenschaft für f und Satz 4.1.4. □

Proposition 10.0.17. *Es sei $(M_k(\Gamma(N))\otimes\mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ der Raum aller Elemente aus $M_k(\Gamma(N))\otimes\mathbb{C}[A]$, die unter der Operation von $\widetilde{\Gamma}(1)$ durch $\mid_k\otimes\varrho_L^{-1}$ invariant sind. Dann gilt*

$$M_{k,L}\cong\left(M_k(\Gamma(N))\otimes\mathbb{C}[A]\right)^{\widetilde{\Gamma}(1)}. \tag{10.6}$$

Beweis. Schränkt man die Abbildung Ξ aus (10.3) auf $M_{k,L}$ ein, so erhält man wegen Proposition 10.0.16 eine injektive lineare Abbildung $\Xi : M_{k,L} \to M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A]$. Aus der Gleichung (10.4) folgt sogar, daß $\Xi(M_{k,L}) \subset (M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$.

Es bleibt zu zeigen, daß für alle $\sum_{\lambda \in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in (M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ und alle $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(1)$

$$\Xi^{-1}(\sum_{\lambda \in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda) \mid_{k,L} \tilde{\gamma} = \Xi^{-1}(\sum_{\lambda \in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda)$$

gilt. Dies folgt jedoch aus der Gleichung (10.4) und der Injektivität von Ξ. $\square$

Der folgende Satz macht eine Aussage über arithmetische Eigenschaften von Fourierkoeffizienten von vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung.

Satz 10.0.18 ([McG], Theorem 5.6). *Der Raum $M_{k,L}$ besitzt eine Basis von Modulformen, deren Fourierkoeffizienten alle rational sind.*

Aus diesem Satz zusammen mit Proposition 10.0.17 folgt, daß $(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ eine Basis von Tensoren besitzt, deren Komponenten-Modulformen eine Fourierentwicklung mit rationalen Koeffizienten besitzen. Insbesondere gilt das

Lemma 10.0.19. *Es gilt*

$$(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)} \cong (M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)} \otimes \mathbb{C}. \tag{10.7}$$

Beweis. Sei $f \otimes z \in (M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)} \otimes \mathbb{C}$. Dann ist der Isomorphismus gegeben durch

$$f \otimes z \mapsto zf.$$

Beachte, daß zf in der Tat in $(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ liegt. In der umgekehrten Richtung ist der Isomorphismus nicht kanonisch. Es sei $\{f_1, \dots f_r\}$ eine Basis von $(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$, wobei alle Komponenten-Modulformen eine Fourierentwicklung mit Fourierkoeffizienten in R_N besitzen, und $f = \sum_{i=1}^r c_i f_i \in (M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$. Dann ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^r c_i f_i \mapsto \sum_{i=1}^r f_i \otimes c_i.$$

$\square$

Definition 10.0.20. *Es sei $\Gamma' \subset \widetilde{\Gamma}(1)$ eine Untergruppe von endlichem Index. Eine holomorphe Funktion $f \in V(\mathbb{H})_L$ heißt Modulform vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ bezüglich der Weildarstellung zur Gruppe Γ', falls gilt:*

i) $f \mid_{k,L} (\gamma, \phi) = f$ für alle $(\gamma, \phi) \in \Gamma'$
ii) f ist holomorph in allen Spitzen von Γ'.

Dieser Raum von Modulformen sei mit $M_{k,L}(\Gamma')$ bezeichnet. Falls in Bedingung ii) zusätzlich noch gilt, daß f in allen Spitzen sogar verschwindet, so heißt f Spitzenform. Dieser Raum wird entsprechend mit $S_{k,L}(\Gamma')$ bezeichnet.

Bemerkung 10.0.21. *Die Bedingung ii) aus Definition 10.0.20 ist dabei zu verstehen wie im Falle skalarwertiger Modulformen zu Kongruenzuntergruppen. Man beachte, daß die Komponentenfunktionen f_λ einer Modulform $f \in M_{k,L}(\Gamma')$ skalarwertige Modulformen aus $M_k(\Gamma(N) \cap \Gamma')$ sind.*

Definition 10.0.22. *Es seien $f, g \in M_{k,L}(\Gamma')$. Dann definiert man das Petersson-Skalarprodukt auf dem Raum $M_{k,L}(\Gamma')$ durch*

$$(f,g)_{\Gamma'} = \frac{1}{[\widetilde{\Gamma}(1) : \Gamma']} \int_{\Gamma' \backslash \mathbb{H}} \langle f(\tau), g(\tau) \rangle y^k \frac{dx\, dy}{y^2}, \tag{10.8}$$

wobei x der Realteil, y der Imaginärteil von τ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[A]$ ist. Wie im Fall skalarwertiger Modulformen sieht man, daß das Integral konvergiert, falls f oder g eine Spitzenform ist.

Bemerkung 10.0.23. *Das Integral in* (10.8) *ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereichs. Es sei $\Gamma'' \subset \Gamma'$. Dann gilt*

$$(f,g)_{\Gamma'} = (f,g)_{\Gamma''}.$$

Beweis. Der Beweis funktioniert wie im Fall skalarwertiger Modulformen. Zusätzlich muß man benutzen, daß die Weildarstellung unitär ist bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}[A]$. $\square$

Kapitel 11

Erweiterung des Slash-Operators

In Kapitel 4 wurde eine Erweiterung der Weildarstellung auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$ bzw. $\mathcal{H}(N)$ definiert, je nachdem, ob die Signatur des zugehörigen Gitters L gerade oder ungerade ist. In diesem Kapitel soll der Slash-Operator (10.2) passend zur erweiterten Weildarstellung fortgesetzt werden auf die Gruppe $\mathcal{G}(N)$ bzw. auf eine geeignete erweiterte Gruppe von $\mathcal{G}(N)$, falls die Signatur von L ungerade ist. Hier ist N die Stufe des Gitters L, was für das gesamte Kapitel der Fall ist.

Wie bei der Weildarstellung werden wir die Fälle gerader und ungerader Signatur getrennt betrachten. Da im folgenden ein Slash-Operator auf einem Raum definiert wird, der den Raum $M_{k,L}$ umfaßt, werden wir nur die Situation betrachten, daß die Signatur gerade und $k \in \mathbb{Z}$ oder daß die Signatur ungerade und $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ist.

In diesem Kapitel kommt die Variable α in zwei verschiedenen Bedeutungen vor. Zum einen um ein Element $J_\alpha \in \mathcal{J}(N)$ zu definieren, zum anderen als definierende Variable des Operators $L(\alpha, r)$ oder eines Galoisautomorphismus σ_α wie in Notation 9.0.10. Im ersten Fall ist α eine rationale Zahl, im zweiten Fall ein Element aus $U(N)$. Da α in diesem Kapitel ausschließlich in diesen Kontexten verwendet wird, besteht keine Gefahr der Verwechslung.

11.1 Der Fall gerader Signatur

Die Fortsetzung der Slash-Operation (10.2) verläuft mit denselben Methoden wie bei der Erweiterung der Weildarstellung. Man definiert zum einen eine Fortsetzung für die Gruppe $\mathcal{S}(N)$ auf ganz $V(\mathbb{H})_L$, zum anderen eine Fortsetzung für $\mathcal{J}(N)$ auf einem geeigneten Unterraum von $V(\mathbb{H})_L$. Schließlich setzt man beide Operationen mit Hilfe von Lemma 4.2.5 fort zu einer Operation von ganz $\mathcal{G}(N)$. Wir geben hier zunächst die Definition einer Operation von $\mathcal{S}(N)$ auf $V(\mathbb{H})_L$.

Definition 11.1.1. *Es sei $f = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in V(\mathbb{H})_L$ und $M \in \mathcal{S}(N)$, dann setzen wir*

$$f \mid_{k,L} M := \sum_{\lambda \in A} \varrho_L^{-1}(M)(f_\lambda \mid_k M \mathfrak{e}_\lambda), \tag{11.1}$$

wobei $\varrho_L(M)$ durch (4.23) gegeben ist.

Bemerkung 11.1.2. *1. Aus der Definition der Weildarstellung für Matrizen aus $\mathcal{S}(N)$ folgt mit den gleichen Argumenten wie für den Slash-Operator (10.2) für $\Gamma(1)$, daß (11.1) eine Operation von $\mathcal{S}(N)$ auf $V(\mathbb{H})_L$ definiert.*

2. *Aus Bemerkung 4.3.2 folgt, daß* (11.1) *den Slash-Operator* (10.2) *fortsetzt auf die Gruppe* $\mathcal{S}(N)$.

3. *Es sei* $J_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S}(N) \cap \mathcal{J}(N)$ *und* $f \in V(\mathbb{H})_L$, *dann gilt gemäß Definition 11.1.1*

$$f \mid_{k,L} J_\alpha = \sum_{\lambda \in A} \varrho_L^{-1}(J_\alpha)(f_\lambda \mid_k J_\alpha \mathfrak{e}_\lambda). \tag{11.2}$$

11.1.1 Fortsetzung auf die Gruppe $\mathcal{J}(N)$

Es ist noch eine Ausdehnung von (10.2) auf die Gruppe $\mathcal{J}(N)$ anzugeben. Jede solche Ausdehnung muß auf dem Schnitt $\mathcal{S}(N) \cap \mathcal{J}(N)$ notwendig mit (11.2) übereinstimmen. Daher ist der Ansatz

$$f \mid_{k,L} J_\alpha = \sum_{\lambda \in A} \varrho_L^{-1}(J_\alpha)(f_\lambda \mid_k J_\alpha \mathfrak{e}_\lambda)$$

für alle $J_\alpha \in \mathcal{J}(N)$ plausibel.

Gemäß (4.23) muß also eine sinnvolle Galoisaktion von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ auf den Komponentenfunktionen von f erklärt werden. Da letztendlich ein Hecke-Operator auf dem Raum $M_{k,L}$ definiert werden soll, ist es wegen Bemerkung 10.0.16 und Satz 10.0.18 keine Einschränkung, direkt anzunehmen, daß die Komponentenfunktionen von f in $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ liegen. Dann liefert Definition 2.2.5 zusammen mit Korollar 2.2.7 eine Operation der erweiterten Weildarstellung auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$.

Damit liest sich für ein $f \in V(\mathbb{H})_L$ mit Komponentenfunktionen $f_\lambda \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ der obige Ansatz wie folgt

$$f \mid_{k,L} J_\alpha = \sum_{\lambda \in A} (f_\lambda \mid_k J_\alpha)^{\sigma_\alpha} \mathfrak{e}_\lambda. \tag{11.3}$$

Aufgrund der obigen Annahme ist es naheliegend, zum Tensorprodukt $M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A]$ überzugehen, und anstatt (11.1) den dazu äquivalenten Slash-Operator $|_k \otimes \varrho_L^{-1}$, gegeben durch

$$f \mid_{k,L} M = \sum_{\lambda \in A} (f_\lambda \mid_k M) \otimes \varrho_L^{-1}(M)(\mathfrak{e}_\lambda), \tag{11.4}$$

zu betrachten.

Entsprechend liefert die Anwendung von Ξ (siehe (10.3)) auf (11.3)

$$f \mid_{k,L} J_\alpha = \sum_{\lambda \in A} (f_\lambda \mid_k J_\alpha)^{\sigma_\alpha} \otimes \varrho_L^{-1}(J_\alpha)(\mathfrak{e}_\lambda). \tag{11.5}$$

Proposition 11.1.3. 1. *Es sei* $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A]$ *und* $J_\alpha, J_\beta \in \mathcal{J}(N)$. *Dann gilt* $f \mid_{k,L} J_{\alpha\beta} = f \mid_{k,L} J_\alpha \mid_{k,L} J_\beta$.

2. *Es sei* $M \in \mathcal{S}(N)$ *mit* $D = \det(rM)$, *wobei* $r \in \mathbb{Z}$, *so daß* $rM \in M_2(\mathbb{Z})$. *Dann gilt* $f \mid_{k,L} M \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \otimes R_N[A]$ *für alle* $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A]$. *Eine entsprechende Aussage gilt für* (11.5).

Beweis. **1.** Es genügt für ein $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ zu zeigen, daß

$$((f \mid_k J_\alpha)^{\sigma_\alpha} \mid_k J_\beta)^{\sigma_\beta} = (f \mid_k J_{\alpha\beta})^{\sigma_{\alpha\beta}}$$

gilt. Diese Gleichung folgt aber sofort mit Korollar 2.2.13.

2. Dies folgt mit Proposition 2.2.9 und Korollar 2.2.7. □

Aufgrund von Proposition 11.1.3, 2., wählen wir den induktiven Limes

$$\mathfrak{M}(N) := \varinjlim_{\substack{D\in\mathbb{N}\\(D,N)=1}} M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \otimes_{R_N} R_N[A] \tag{11.6}$$

als Untermodul von $V(\mathbb{H})\otimes\mathbb{C}[A]$, auf dem $\mathcal{S}(N)$ durch (11.4) und $\mathcal{J}(N)$ durch (11.5) operiert.

Da induktive Limiten mit Tensorprodukten kommutieren, gilt

$$\mathfrak{M}(N) \cong \mathfrak{m}(N) \otimes_{R_N} R_N[A], \tag{11.7}$$

wobei $\mathfrak{m}(N)$ gegeben ist durch (9.3).

Lemma 11.1.4. *Die Operation von $\mathcal{J}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$, gegeben durch* (11.5)*, zusammen mit der Operation von $\mathcal{S}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$, gegeben durch* (11.4)*, lassen sich durch*

$$f \mid_{k,L} MJ_\alpha := f \mid_{k,L} M \mid_{k,L} J_\alpha$$

nicht fortsetzen zu einer Operation von $\mathcal{G}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$.

Beweis. Angenommen, die obige Vorschrift definiert eine Operation von $\mathcal{G}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$. Dann muß gemäß Lemma 4.2.5 die Verträglichkeitsrelation (4.15) erfüllt sein.

Es muß also für alle $M \in \mathcal{S}(N)$, $J_\alpha \in \mathcal{J}(N)$ und alle $f \in \mathfrak{M}(N)$

$$f|_{k,L}J_\alpha|_{k,L}M|_{k,L}J_{\alpha^{-1}} = f|_{k,L}J_\alpha M J_{\alpha^{-1}}$$

gelten, wobei $J_\alpha M J_{\alpha^{-1}} \in \mathcal{S}(N)$. Da durch (4.23) eine Operation von $\mathcal{G}(N)$ auf $R_N[A]$ gegeben ist, genügt es, die Gültigkeit dieser Identität auf der ersten Komponente von f nachzuprüfen.

Es muß also für jedes $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$, alle $J_\alpha \in \mathcal{J}(N)$ und insbesondere für alle $\gamma \in \Gamma(1)$

$$((f \mid_k J_\alpha)^{\sigma_\alpha} \mid_k \gamma \mid_k J_{\alpha^{-1}})^{\sigma_{\alpha^{-1}}} = f \mid_k J_\alpha \gamma J_{\alpha^{-1}} \tag{11.8}$$

gelten. Es ist $f \mid_k J_\alpha \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ mit geeignetem $D \in \mathbb{N}$. Daher ist mit Korollar 2.2.13, (6.9) und Proposition 6.1.3 die linke Seite von (11.8) gleich

$$\begin{aligned}((f \mid_k J_\alpha) \cdot J_{\alpha_D} \cdot \pi_{ND}(\gamma) \cdot J_{\alpha_D}^{-1})) \mid_k J_\alpha^{-1} =& ((f \mid_k J_\alpha) \cdot J_{\alpha_D} \pi_{ND}(\gamma) J_{\alpha_D}^{-1})) \mid_k J_\alpha^{-1}\\ =& f \mid_k J_\alpha \mid_k (p\circ s)(J_{\alpha_D}\pi_{ND}(\gamma)J_{\alpha_D}^{-1})) \mid_k J_\alpha^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei ist α_D definiert wie in (2.15) und J_{α_D} in diesem Fall zu verstehen als Matrix in $J(ND)$. Die erste obige Gleichung folgt wegen Satz 6.2.6. Es müßte also

$$f \mid_k J_\alpha \mid_k (p\circ s)(J_{\alpha_D}\pi_{ND}(\gamma)J_{\alpha_D}^{-1})) \mid_k J_{\alpha^{-1}} = f \mid_k J_\alpha \gamma J_{\alpha^{-1}} \tag{11.9}$$

gelten. Diese Gleichung ist aber schon für $\gamma = T$ für kein $f \in M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ erfüllt, wie man etwa durch Berechnung der Fourierentwicklung auf beiden Seiten bestätigt.

Daher erhält man mit dem Ansatz (11.5) keine Operation der gesamten Gruppe $\mathcal{G}(N)$. $\square$

Man kann jedoch anhand der Gleichung (11.9) den "Fehler" ablesen, der bei Verwendung von (11.5) gemacht wird. Dieser besteht darin, daß auf der linken Seite von (11.9) der Operator $|_k\ (p\circ s)(\pi_{ND}(J_\alpha\gamma J_\alpha^{-1}))$ anstatt des normalen Slash-Operators $|_k\ \gamma$ auftaucht. Im folgenden soll nun $f \mid_{k,L} J_\alpha$ definiert werden, indem (11.5) um einen "Korrekturoperator" auf den Komponentenfunktionen erweitert wird, der den obigen Fehler kompensiert.

Die Idee ist, die Slash-Operatoren $|_k \gamma$ bzw. $|_k (p \circ s)(\pi_N(J_\alpha \gamma J_\alpha^{-1}))$ als Darstellungen der Gruppe $S(N)$ auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$ aufzufassen (siehe (6.2) bzw. (6.4)). In diesem Fall könnte man den obigen Korrekturoperator als äquivarianten Operator $L(\alpha_N)$ dieser beiden Darstellungen wählen. Ein solcher Operator erfüllt die Gleichung

$$(f \cdot L(\alpha_N) |_k (p \circ s)(\pi_N(J_\alpha \gamma J_\alpha^{-1})) \cdot L(\alpha_N)^{-1} = f |_k \gamma,$$

sofern er invertierbar ist. Unter der Voraussetzung, daß α ein quadratischer Rest in $U(N)$ ist, ist ein solcher äquivarianter Operator in Definition 8.0.14 angegeben worden. Allgemeiner liefert Definition 8.1.1 eine entsprechende Familie äquivarianter Operatoren $L(\alpha_D, r_D)$ auf den Räumen $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ mit der gleichen Voraussetzung an die α_D. Die $L(\alpha_D, r_D)$ hängen nun offensichtlich von der Wahl einer Wurzel r_D von α_D ab. Da $L(\alpha_D, r_D)$ Teil einer Operationsvorschrift der Gruppe $\mathcal{J}(N)$ sein soll, ist es sinnvoll, anstatt $\mathcal{J}(N)$ direkt die Gruppenerweiterung

$$\mathcal{J}_1(N) := \mathcal{J}(N) \times U(N) \tag{11.10}$$

operieren zu lassen. Die Gruppenmultiplikation ist komponentenweise definiert.

Diese Gruppe fassen wir auf als Untergruppe der Gruppe

$$\mathcal{G}_1(N) := \mathcal{G}(N) \times U(N). \tag{11.11}$$

Entsprechend hat man die Untergruppe

$$\mathcal{Q}_1(N) = \left\{(M, r) \in \mathcal{G}_1(N); \quad \det(M) \equiv r^2 \pmod{N}\right\}. \tag{11.12}$$

Man beachte, daß $\Gamma(1)$ und $\mathcal{S}(N)$ durch $\gamma \mapsto (\gamma, 1)$ in $\mathcal{Q}_1(N)$ eingebettet werden können

Es wird sich im Kapitel 12 zeigen, daß die folgende Definition Anlaß gibt zu einer Operation der Gruppe $\mathcal{Q}_1(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$.

Definition 11.1.5. *Es sei $(J_\alpha, r) \in \mathcal{Q}_1(N)$. Es bezeichne außerdem α die zugehörige Restklasse in $U(N)$ und $r \in U(N)$ eine Wurzel von α. Wir definieren für $f \in \mathfrak{M}(N)$*

$$f |_{k,L} (J_\alpha, r) := \sum_{\lambda \in A} [f_\lambda |_k J_\alpha \cdot L(\alpha, r)]^{\sigma_\alpha} \otimes \varrho_L^{-1}(J_\alpha)(\mathfrak{e}_\lambda) \tag{11.13}$$

mit $L(\alpha, r)$ und σ_α wie in Notation 9.0.10.

11.2 Der Fall ungerader Signatur

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt, nehmen wir direkt an, daß das Gewicht k in $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ist. Aus Abschnitt 4.3.2 geht hervor, daß eine erweiterte Gruppe $\mathcal{H}(N) = \mathcal{G}(N) \times \{\pm 1\}$ durch die Weildarstellung auf $R_N[A]$ operiert. Andererseits operiert die zweifache Überlagerung $\tilde{\mathcal{G}}(N)$ von $\mathcal{G}(N)$, definiert durch $j(\cdot, \tau)$, durch den Slash-Operator auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$. Will man also eine Fortsetzung von (10.2), etwa auf die Gruppe $\mathcal{S}(N)$, analog zu (11.4) definieren, so stellt sich die Frage, ob die Gruppenerweiterungen $\mathcal{H}(N)$ und $\tilde{\mathcal{G}}(N)$ äquivalent sind. Gleichwertig dazu ist die Frage, ob die Kozykeln ω (siehe (3.3)) und $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ (siehe (4.24)) kohomolog sind. Diese Frage wird im nächsten Abschnitt beantwortet.

11.2.1 Zwei Kozykeln

In der Tat sind diese beiden Kozykeln nicht kohomolog, wie aus Satz 11.2.3 hervorgehen wird. Allerdings folgt aus Proposition 4.3.3,1., und Lemma 3.0.17, daß ω und $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ auf $\Gamma(1)$ kohomolog sind.

Es gilt zunächst das folgende

Lemma 11.2.1. *Es seien m, n positive ganze Zahlen koprim zu N mit $mn \equiv r^2 \pmod{N}$ und $\delta = \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$. Weiter sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(m) \cap \Gamma^0(n) \cap \Gamma_0^0(N)$. Dann gilt*

$$\varrho_L(\delta\gamma\delta^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) = \varrho_L(\delta)\varrho_L(\gamma)\varrho_L^{-1}(\delta)(\mathfrak{e}_\lambda), \tag{11.14}$$

wobei die Weildarstellung definiert ist wie in (4.23).

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen beider Seiten unter Verwendung von Lemma 4.1.7. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & nr^{-2} \end{smallmatrix}\right) \varrho_L \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right) (\mathfrak{e}_\lambda) \\ =& \varrho_L(s(D_{nr^{-2}}))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =& \chi_L(s(D_{nr^{-2}}))\mathfrak{e}_{nr^{-2}\lambda}, \end{aligned} \tag{11.15}$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & nr^{-2} \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $D_{nr^{-2}}$ (siehe (1.13)) und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right)$ als Elemente aus $G(N)$ zu verstehen sein sollen und $\chi_L(s(D_{n^{-1}r^2}))$ in Lemma 4.1.7 definiert ist. Entsprechend ist

$$\varrho_L^{-1}(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) = \chi_L(s(D_{nr^{-2}}))^{-1}\mathfrak{e}_{n^{-1}r^2\lambda}. \tag{11.16}$$

Gemäß (4.12) ist $\varrho_L(\gamma) = \varrho_L(s(\pi_N(\gamma)))$. Nach Definition von s ist

$$s(\pi_N(\gamma)) = \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{c}{d}\right) j(\gamma, \tau)\right) \Gamma(N)^*$$

bzw.

$$s(\pi_N(\delta\gamma\delta^{-1})) = \left(\begin{pmatrix} a & mb/n \\ nc/m & d \end{pmatrix}, \left(\frac{mnc}{d}\right) j(\delta\gamma\delta^{-1}, \tau)\right) \Gamma(N)^*.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varrho_L(\delta)\varrho_L(\gamma)\varrho_L^{-1}(\delta)(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L(\delta)\varrho_L(\gamma)(\chi_L(s(D_{nr^{-2}}))^{-1}\mathfrak{e}_{n^{-1}r^2\lambda}) \\ =& \chi_L(s(D_{nr^{-2}})) \left[\chi_L(s(\pi_N(\gamma)))\chi_L(s(D_{nr^{-2}}))^{-1}\right]^{\sigma_{r^2}^{-1}} \mathfrak{e}_{d\lambda} \\ =& \chi_L(s(\pi_N(\gamma)))\mathfrak{e}_{d\lambda} \\ =& \epsilon_d^{\mathrm{sig}(L) + \left(\frac{-1}{|A|}\right) - 1} \left(\frac{d}{|A| 2^{\mathrm{sig}(L)}}\right) \mathfrak{e}_{d\lambda}. \end{aligned}$$

Es ist von der zweiten zur dritten Zeile zu beachten, daß mn als ein quadratischer Rest modulo N insbesondere kongruent 1 modulo 4 ist. Damit ist $\chi_L^{\sigma_{r^2}} = \chi_L$.

Andererseits sieht man leicht

$$\delta\gamma\delta^{-1} = \begin{pmatrix} a & mb/n \\ nc/m & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(N),$$

da nach Voraussetzung $\gamma \in \Gamma_0(m) \cap \Gamma^0(n) \cap \Gamma_0^0(N)$ gilt. Daher ergibt sich erneut mit Lemma 4.1.7

$$\begin{aligned}\varrho_L(\delta\gamma\delta^{-1})(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L(s(\pi_N(\delta\gamma\delta^{-1})))(\mathfrak{e}_\lambda)\\ =& \chi_L(s(\pi_N(\delta\gamma\delta^{-1})))\mathfrak{e}_{d\lambda}\\ =& \epsilon_d^{\operatorname{sig}(L)+\left(\frac{-1}{|A|}\right)-1}\left(\frac{d}{|A|2^{\operatorname{sig}(L)}}\right)\mathfrak{e}_{d\lambda}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Lemma 11.2.2. *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\delta = \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$, weiter sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt*

$$\omega(\delta, \gamma\delta^{-1}) = \omega(\gamma, \delta^{-1}) = \omega(\delta, \delta^{-1}) = 1.$$

Beweis. Man bestätigt die Aussage leicht, indem man

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), \sqrt{n}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau + d}\right)\left(\begin{pmatrix} m^{-1} & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}, \sqrt{n}^{-1}\right)$$

in $\widetilde{\mathcal{G}}(N)$ berechnet. □

Satz 11.2.3. *Der Kozykel ω von $\widetilde{\mathcal{G}}(N)$, definiert durch j, ist nicht kohomolog zum Kozykel $\omega_{\mathcal{G}(N)}$, definiert durch die Weildarstellung.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. wir nehmen an, es gibt eine Funktion

$$\eta : \mathcal{G}(N) \longrightarrow \{\pm 1\},$$

so daß

$$\varepsilon(A, B) = \eta(A)\eta(B)\eta(AB)^{-1} \tag{11.17}$$

für

$$\varepsilon(A, B) := \omega(A, B)\omega_{\mathcal{G}(N)}(A, B)^{-1}$$

gilt.

Es seien $\delta \in \mathcal{G}(N)$ und $\gamma \in \Gamma_0(m) \cap \Gamma^0(n) \cap \Gamma_0^0(N)$ wie in Lemma 11.2.1. Dann gilt zunächst gemäß (4.25)

$$\varrho_L(\delta)\varrho_L(\gamma)\varrho_L(\delta^{-1}) = \omega_{\mathcal{G}(N)}(\delta, \gamma\delta^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(\gamma, \delta^{-1})\varrho_L(\delta\gamma\delta^{-1})$$

und damit

$$\varrho_L(\delta)\varrho_L(\gamma)\varrho_L(\delta)^{-1} = \omega_{\mathcal{G}(N)}(\delta, \delta^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(\delta, \gamma\delta^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(\gamma, \delta^{-1})\varrho_L(\delta\gamma\delta^{-1}).$$

Wegen Lemma 11.2.2 und Lemma 11.2.1 folgt

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{G}(N)}(\delta, \delta^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(\delta, \gamma\delta^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(\gamma, \delta^{-1}) =& \varepsilon(\delta, \delta^{-1})\varepsilon(\delta, \gamma\delta^{-1})\varepsilon(\gamma, \delta^{-1}).\\ =& 1.\end{aligned}$$

Verwendet man nun, daß ε ein Korand ist, so läßt sich die letzte Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}\eta(\delta)\eta(\delta^{-1})\eta(\delta)\eta(\gamma\delta^{-1})\eta(\delta\gamma\delta^{-1})^{-1}\eta(\gamma)\eta(\delta^{-1})\eta(\gamma\delta^{-1})^{-1} =&\eta(\gamma)\eta(\delta\gamma\delta^{-1})^{-1}\\ =&1\end{aligned}$$

schreiben. Wegen (3.15) bedeutet dies nichts anderes als

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{mn}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right),$$

da $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\delta\gamma\delta^{-1} = \begin{pmatrix} a & mb/n \\ nc/m & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ für alle $\delta = \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$ und für alle $\gamma \in \Gamma_0(m) \cap \Gamma^0(n) \cap \Gamma_0^0(N)$. In diesem Fall muss also η notwendig mit (3.15) übereinstimmen.

Aus der obigen Gleichung folgt $\left(\frac{mn}{d}\right) = 1$, was aber im allgemeinen nicht erfüllt ist. □

11.2.2 Eine zweifache Gruppenerweiterung von $\mathcal{G}(N)$

Aus dem Abschnitt 11.2.1 geht hervor, daß die Kozykeln ω und $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ nicht in der gleichen Kohomologieklasse liegen, die Gruppen $\mathcal{H}(N)$ und $\tilde{\mathcal{G}}(N)$ sind daher nicht isomorph. Um also im Falle ungerader Signatur eine sinnvolle Ausdehnung der Slash-Operation (10.2) zu erhalten, muß man die Gruppe $\mathcal{G}(N)$ zweimal mit $\{\pm 1\}$ erweitern, wobei der eine Kozykel durch $j(\cdot,\tau)$, der andere Kozykel durch die Weildarstellung (4.23) gegeben ist. Vor dem Hintergrund von Definition 11.1.5 wird man jedoch direkt die Gruppe $\mathcal{G}_1(N)$ auf diese Weise erweitern. Diese Gruppe wollen wir mit $\mathcal{G}_2(N)$ bezeichnen. Man hat also

$$\mathcal{G}_2(N) = \left\{(M, tj(M,\tau), r, t'); \quad M \in \mathcal{G}(N), t, t' \in \{\pm 1\} \text{ und } r \in U(N)\right\}.$$

Es seien $g_1 := (M_1, t_1 j(M_1,\tau))$ und $g_2 := (M_2, t_2 j(M_2,\tau)) \in \tilde{\mathcal{G}}(N)$. Das Produkt der Elemente (g_1, r_1, t_1'), (g_2, r_2, t_2') aus $\mathcal{G}_2(N)$ ist dann von der Form

$$(g_1, r_1, t_1')(g_2, r_2, t_2') = (g_1 g_2, r_1 r_2, t_1' t_2' \omega_{\mathcal{G}(N)}(M_1, M_2)).$$

Es gibt zwei Projektionsabbildungen

$$P_1 : \mathcal{G}_2(N) \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(N), \quad (M, tj(M,\tau), r, t') \mapsto (M, tj(M,\tau)), \tag{11.18}$$

$$P_2 : \mathcal{G}_2(N) \longrightarrow \mathcal{H}(N), \quad (M, tj(M,\tau), r, t') \mapsto (M, t'). \tag{11.19}$$

Die Einbettung L aus (4.27) kann man durch

$$L : \widetilde{\Gamma}(1) \longrightarrow \mathcal{G}_2(N), \quad (M, tj(M,\tau)) \mapsto (M, tj(M,\tau), 1, t\eta(M)) \tag{11.20}$$

fortsetzen zu einer Einbettung nach $\mathcal{G}_2(N)$.

Bemerkung 11.2.4. *Die Gruppe $\widetilde{\Gamma}(1)$ ist isomorph zu ihrem Bild*

$$\Delta = L(\widetilde{\Gamma}(1)). \tag{11.21}$$

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem von Proposition 4.3.3. □

Im restlichen Abschnitt wird eine Ausdehnung des Operators (10.2) auf die Gruppe $\mathcal{G}_2(N)$ definiert. Dies läuft völlig analog wie im Falle gerader Signatur des Gitters und ganzzahligen Gewichts. Demzufolge definieren wir zunächst eine Erweiterung auf die Untergruppe

$$\mathcal{S}_2(N) = \left\{(M, tj(M,\tau), 1, t') \in \mathcal{G}_2(N); \quad M \in \mathcal{S}(N)\right\},$$

um dann analog zu (11.13) eine Fortsetzung für Elemente $(J_\alpha, tj(J_\alpha,\tau), r, t')$ aus der Gruppe

$$\mathcal{Q}_2(N) = \big\{(M, tj(M,\tau), r, t') \in \mathcal{G}_2(N); \quad (M,r) \in \mathcal{Q}_1(N)\big\}$$

anzugeben.

Definition 11.2.5. *Sei $(M,\phi,1,t) \in \mathcal{S}_2(N)$ und $f \in \mathfrak{M}(N)$. Dann definieren wir*

$$f\,|_{k,L}\,(M,\phi,1,t) = \sum_{\lambda\in A} (f_\lambda\,|_k\,(M,\phi)) \otimes \varrho_L^{-1}(M,t)(\mathfrak{e}_\lambda). \tag{11.22}$$

Bemerkung 11.2.6. *1. Es folgt mit* (4.26) *und Proposition 2.2.9, daß durch* (11.22) *eine Operation von $\mathcal{S}_2(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$ gegeben ist.*

2. Aus Proposition 4.3.3, 3., folgt für $\tilde\gamma \in \widetilde{\Gamma}(1)$

$$f\,|_{k,L}\,L(\tilde\gamma) = f\,|_{k,L}\,\tilde\gamma,$$

so daß der Ansatz (11.22) *den Operator* (10.2) *fortsetzt.*

Völlig analog zu Definition 11.1.5 hat man

Definition 11.2.7. *Es sei $(J_\alpha,\phi,r,t) \in \mathcal{Q}_2(N)$. Weiterhin bezeichne α auch die zugehörige Restklasse in $U(N)$ und $r \in U(N)$ eine Wurzel von α. Für $f \in \mathfrak{M}(N)$ definieren wir*

$$f\,|_{k,L}\,(J_\alpha,\phi,r,t) := \sum_{\lambda\in A} [f_\lambda\,|_k\,(J_\alpha,\phi)\cdot L(\alpha,r)]^{\sigma_\alpha} \otimes \varrho_L^{-1}(J_\alpha,t)(\mathfrak{e}_\lambda), \tag{11.23}$$

wobei $L(\alpha,r)$ und σ_α wie in Notation 9.0.10 zu verstehen sind.

In dem nun folgenden Kapitel soll gezeigt werden, daß (11.22) und (11.23) zu einer Fortsetzung von (10.2) auf die Gruppe $\mathcal{G}_2(N)$ Anlaß geben.

Kapitel 12

Ein Fortsetzungssatz

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Ansätze (11.4) und (11.13) im Falle gerader Signatur bzw. (11.22) und (11.23) im Falle ungerader Signatur sich fortsetzen lassen zu einem Slash-Operator auf der Gruppe $\mathcal{Q}_1(N)$ bzw. $\mathcal{Q}_2(N)$. Die folgenden Sätze 12.0.9 und 12.0.10 zeigen in gewisser Hinsicht mehr. Sie setzen die Existenz einer Familie von äquivarianten Operatoren $(L(\alpha_D) : M_k(\Gamma(ND)) \to M_k(\Gamma(ND)))_{D\in\mathbb{N}(N)}$ der Darstellungen ρ_D und ρ_{α_D} mit zusätzlichen Eigenschaften voraus und erhalten so mit den obigen Ansätzen einen Slash-Operatoren für die gesamte Gruppe $\mathcal{G}(N)$ bzw. $\mathcal{G}_2(N)$.

Es sei L ein gerades Gitter der Stufe N und $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Wie zuvor werden nur die Fälle $\operatorname{sig}(L)$ gerade und $k \in \mathbb{Z}$ bzw. $\operatorname{sig}(L)$ ungerade und $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ betrachtet. Die folgenden Aussagen sollen unabhängig von dem vorliegenden Fall formuliert werden. Daher werden verschiedene Symbole mit doppelter Bedeutung eingeführt. Dies hat den Vorteil, Resultate simultan für beide Fälle zeigen zu können, was die Lesbarkeit verbessern sollte.

Es sei

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma(1), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ gerade ist,} \\ L(\widetilde{\Gamma}(1)), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

und

$$\mathscr{G}(N) = \begin{cases} \mathcal{G}(N), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ gerade ist,} \\ \mathcal{G}_2(N), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ ungerade ist.} \end{cases} \tag{12.1}$$

Entsprechend sind die Gruppen $\mathscr{S}(N)$, $\mathscr{Q}(N)$ und $\mathscr{J}(N)$ zu verstehen. Es sei $\xi(m,n)$ entweder gleich $\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}(N)$, falls $\operatorname{sig}(L)$ gerade und $k \in \mathbb{Z}$ oder gleich $(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), t\sqrt{n}) \in \tilde{\mathcal{G}}(N)$, falls $\operatorname{sig}(L)$ ungerade und $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Im ersten Fall setzen wir $J(m,n) = \xi(m,n)$, im zweiten Fall $J(m,n) = (\xi(m,n), r, t') \in \mathcal{G}_2(N)$. Weiterhin sei im gesamten Kapitel M ein Element aus $\mathscr{S}(N)$ und $J_\alpha = J(1,\alpha)$ aus der Gruppe $\mathscr{J}(N)$. Wie schon im vorherigen Kapitel sei α zum einen eine rationale Zahl, wenn es eine Matrix $J_\alpha \in \mathscr{J}(N)$ beschreibt, zum anderen ein Element aus $U(N)$, wenn es einen Galoisautomorphismus σ_α oder die Abbildung $L(\alpha)$ definiert.

Schließlich sei $\pi_N(\gamma)$ als Matrix in $S(N)$ zu verstehen, falls $\gamma \in \Gamma(1)$. Falls $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(1)$ setzen wir der Übersichtlichkeit halber $\pi_N(\gamma) = (\pi_N(\gamma), \eta(\gamma)) \in \tilde{S}(N)$. Entsprechend soll J_{α_D} sowohl für diese Matrix in $J(ND)$ als auch für $(J_{\alpha_D}, 1) \in \tilde{J}(ND)$ stehen, je nachdem, ob die Signatur gerade oder ungerade ist.

Definition 12.0.8. *Es sei $\alpha \in U(N)$. Durch*

$$(L(\alpha_D) : M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \longrightarrow M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)))_{D\in\mathbb{N}(N)}, \quad f \mapsto f \cdot L(\alpha_D) \quad (= L(\alpha_D)(f))$$

sei eine Familie von R_{ND}-linearen Abbildungen gegeben und

$$L(\alpha) : \mathfrak{m}(N) \longrightarrow \mathfrak{m}(N)$$

eine Abbildung auf $\mathfrak{m}(N)$, definiert durch

$$f \cdot L(\alpha) := f \cdot L(\alpha_D)$$

für $f \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$. Die Abbildung $L(\alpha)$ soll zusätzlich die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $L(\alpha) \mid_{M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))}$ *ist ein äquivarianter Operator der Darstellungen ρ_D und ρ_{α_D} auf dem Raum $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ für alle $D \in \mathbb{N}(N)$.*
2. *Für alle $\alpha, \beta \in U(N)$ und für alle $f \in \mathfrak{m}(N)$ gilt*

$$f \cdot [L(\alpha) \circ L(\beta)] = f \cdot L(\alpha\beta).$$

3. $L(1) = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}(N)}$.
4. *Für alle $\xi(m,n)$, alle $\beta \in U(N)$ und alle $f \in \mathfrak{m}(N)$ gilt*

$$(f \mid_k \xi(m,n)) \cdot L(\beta) = (f \cdot L(\beta)) \mid_k \xi(m,n). \tag{12.2}$$

5. *Es gilt für alle $f \in \mathfrak{m}(N)$ und $\alpha, \beta \in U(N)$*

$$f^{\sigma_\alpha} \cdot L(\beta) = [f \cdot L(\beta)]^{\sigma_\alpha}, \tag{12.3}$$

wobei σ_α durch Notation 9.0.10 definiert ist.

Satz 12.0.9. *Es sei $J_\alpha \in \mathscr{J}(N)$ mit $P_2(J_\alpha) = J_\alpha$, falls die Signatur von L gerade und $k \in \mathbb{Z}$ ist, ansonsten wie in* (11.18). *Weiter sei $F = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in \mathfrak{M}(N)$, dann definiert*

$$F|_{k,L} J_\alpha := \sum_{\lambda \in A} [f_\lambda|_k \xi(1,\alpha) \cdot L(\alpha)]^{\sigma_\alpha} \otimes \varrho_L^{-1}(P_2(J_\alpha))(\mathfrak{e}_\lambda) \tag{12.4}$$

eine Operation der Gruppe $\mathscr{J}(N)$, die auf dem Schnitt $\mathscr{S}(N) \cap \mathscr{J}(N)$ mit dem Slash-Operator (11.4) *übereinstimmt.*

Beweis. Mit Proposition 2.2.9 folgt sofort $F \mid_{k,L} J_\alpha \in \mathfrak{M}(N)$. Falls $J_\alpha \in \mathscr{S}(N) \cap \mathscr{J}(N)$, gilt $\alpha \equiv 1 \pmod N$, woraus $\sigma_\alpha = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}(N)}$ und $L(\alpha) = L(1)$ folgt, so daß (12.4) den Slash-Operator (11.4) auf die Gruppe $\mathscr{J}(N)$ fortsetzt.

Für die letzte Aussage genügt es zu zeigen, daß durch

$$(\xi(1,\alpha), f) \mapsto \varphi(\xi(1,\alpha))(f) := [(f \mid_k \xi(1,\alpha)) \cdot L(\alpha)]^{\sigma_\alpha}$$

eine Operation auf $\mathfrak{m}(N)$ gegeben ist. Für die zweite Komponente von (12.4) wurde dies bereits in Abschnitt 4.3 bewiesen.

Zum Beweis seien folgende Abkürzungen eingeführt:

$$g := f \mid_k \xi(1,\alpha) \tag{12.5}$$

und

$$h := (f \mid_k \xi(1,\alpha)) \cdot L(\alpha) = g \cdot L(\alpha). \tag{12.6}$$

Damit läßt sich $[\varphi(\xi(1,\beta)) \circ \varphi(\xi(1,\alpha))](f)$ schreiben in der Form

$$\begin{aligned}
[(h^{\sigma_\alpha} \mid_k \xi(1,\beta)) \cdot L(\beta)]^{\sigma_\beta} &\overset{(2.19),12.0.8,5.}{=} [(h \mid_k \xi(1,\beta)) \cdot L(\beta)]^{\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta} \\
&\overset{12.0.8,4.}{=} [(g \mid_k \xi(1,\beta)) \cdot L(\alpha) \circ L(\beta)]^{\sigma_{\alpha\beta}} \\
&\overset{12.0.8,2.}{=} [(f \mid_k \xi(1,\alpha\beta)) \cdot L(\alpha\beta)]^{\sigma_{\alpha\beta}} .
\end{aligned}$$

□

Satz 12.0.10. *Es sei $M \in \mathscr{S}(N)$, $J_\alpha \in \mathscr{J}(N)$ und $F \in \mathfrak{M}(N)$. Für die zugehörige Restklasse $\alpha \in U(N)$ sei*

$$L(\alpha) : \mathfrak{m}(N) \longrightarrow \mathfrak{m}(N)$$

gegeben wie in Definition 12.0.8. Für $A = MJ_\alpha \in \mathscr{G}(N)$ setze

$$F \mid_{k,L} A := F \mid_{k,L} M \mid_{k,L} J_\alpha, \tag{12.7}$$

wobei $F \mid_{k,L} M$ durch (11.4) *bzw.* (11.22) *und $F \mid_{k,L} J_\alpha$ durch* (12.4) *definiert ist.*

Dann wird durch (12.7) *eine Fortsetzung des Slash-Operators* (11.22) *(bzw.* (11.4)*) auf die Gruppe $\mathscr{G}(N)$ auf der Menge $\mathfrak{M}(N)$ definiert.*

Beweis. Zum Beweis wird Lemma 4.2.5 verwendet. Man bestätigt leicht, daß $\mathscr{S}(N)$ ein Normalteiler von $\mathscr{G}(N)$ ist (als Kern des Homomorphismus $\det \circ Pr_1 \pmod N$, wobei Pr_1 die Projektion auf die erste Komponente sein soll) und daß $\mathscr{G}(N) = \mathscr{S}(N) \cdot \mathscr{J}(N)$ gilt. Weiterhin folgt mit Bemerkung 11.2.6, daß durch (11.22) eine Operation von $\mathscr{S}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$ definiert wird. Mit Theorem 12.0.9 folgt die entsprechende Aussage für die Gruppe $\mathscr{J}(N)$.

Demzufolge bleibt noch die Gleichung (4.15) zu zeigen, d. h. für alle $M \in \mathscr{S}(N)$, für alle $J_\alpha \in \mathscr{J}(N)$ und für alle $F \in \mathfrak{M}(N)$ die Gleichung

$$F \mid_{k,L} J_\alpha \mid_{k,L} M \mid_{k,L} J_\alpha^{-1} = F \mid_{k,L} J_\alpha M J_\alpha^{-1}. \tag{12.8}$$

Nach dem Elementarteilersatz läßt sich jedes M in der Form $\gamma J(m,n)\gamma'$ schreiben, wobei $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Daher genügt es, die obige Gleichung für solche Elemente zu zeigen.

1. Zeige (12.8) für $\gamma \in \Gamma$.

Es genügt wieder, dies auf der ersten Komponente zu überprüfen. Sei $f \in \mathfrak{m}(N)$, d.h. f liegt in einem Raum $M_k^{R_m}(\Gamma(m))$ mit $N \mid m$. Es sei $r \in \mathbb{Z}$, so daß $r\xi(1,\alpha) \in M_2(\mathbb{Z})$ und $D = \frac{m}{N} \det(r\xi(1,\alpha))$. Dann gilt $f \mid_k \xi(1,\alpha) \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$. Für die folgenden Umformungen verwenden wir wieder die Abkürzungen (12.5) und (12.6). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left[(h^{\sigma_\alpha} \mid_k \gamma \mid_k \xi(1,\alpha^{-1})) \cdot L(\alpha^{-1})\right]^{\sigma_{\alpha^{-1}}} &\overset{12.0.8,5.,(2.19)}{=} \left[(h^{\sigma_\alpha} \mid_k \gamma)^{\sigma_{\alpha^{-1}}} \mid_k \xi(1,\alpha^{-1})\right] \cdot L(\alpha^{-1}) \\
&= [(h \cdot J_{\alpha_D} \cdot \pi_{ND}(\gamma) \cdot J_{\alpha_D}^{-1}) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1})] \cdot L(\alpha^{-1}) \\
&\overset{12.0.8,4.}{=} [g \cdot L(\alpha) \cdot J_{\alpha_D} \pi_{ND}(\gamma) J_{\alpha_D}^{-1}] \cdot L(\alpha^{-1}) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1}),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung wie in Lemma 11.1.4 zu sehen ist.

Da $L(\alpha) \mid_{M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))}$ ein äquivarianter Operator der Darstellung ρ_D und ρ_{α_D} auf dem Raum $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ ist, gilt

$$g \cdot L(\alpha) \cdot J_{\alpha_D} \pi_{ND}(\gamma) J_{\alpha_D}^{-1} = g \cdot \pi_{ND}(\gamma) \cdot L(\alpha).$$

Dies eingesetzt in den letzten Ausdruck der obigen Gleichungskette ergibt

$$(g \cdot \pi_{ND}(\gamma) \cdot L(\alpha) \cdot L(\alpha^{-1})) \mid_k \xi(1, \alpha^{-1}) \overset{12.0.8,2.\text{ und }3.}{=} f \mid_k \xi(1, \alpha) \mid_k \gamma \mid_k \xi(1, \alpha^{-1}).$$

2. Der Beweis von (12.8) für $J(m, n)$ verläuft prinzipiell sehr ähnlich zu dem des ersten Falls. Es genügt wieder, die Behauptung für die erste Komponente von F zu zeigen. Dazu seien f, g und h wie in 1.. Es gilt damit

$$\begin{aligned}\left[h^{\sigma_\alpha} \mid_k \xi(m,n) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1}) \cdot L(\alpha^{-1})\right]^{\sigma_{\alpha^{-1}}} =& h \mid_k \xi(m,n) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1}) \cdot L(\alpha^{-1}) \\ =& g \cdot L(\alpha) \mid_k \xi(m,n) \cdot L(\alpha^{-1}) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1}) \\ =& f \mid_k \xi(1,\alpha) \mid_k \xi(m,n) \mid_k \xi(1,\alpha^{-1}).\end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt mit Korollar 2.2.13 und Eigenschaft 5 von $L(\alpha)$, die zweite und dritte mit der Eigenschaft 4 aus Definition 12.0.8. □

Korollar 12.0.11. *Die Signatur von L sei gerade und das Gewicht k der Räume in $\mathfrak{M}(N)$ ganzzahlig. Dann definieren die Operationen* (11.4) *und* (11.13) *durch die Fortsetzung* (12.7) *eine Operation der Gruppe $\mathcal{Q}_1(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$.*

Beweis. Wegen der Sätze 12.0.9 und 12.0.10 genügt es zu zeigen, daß es einen Operator $L(\alpha)$ auf $\mathfrak{m}(N)$ mit den Eigenschaften **1.-5.** aus Definition 12.0.8 gibt. Ein solcher Operator ist gegeben durch (8.8). Die Eigenschaften **1.-5.** werden durch die Sätze 8.0.19, 8.0.22, 8.0.24 und 8.1.3 bereitgestellt.

Man beachte, daß α bei der Definition in (8.8) ein quadratischer Rest sein muß. Außerdem ist nach Voraussetzung das Gewicht ganzzahlig. In diesem Fall faktorisieren die Darstellungen ρ_D und ρ_{α_D} über die Gruppe $S(ND)$ (siehe die Propositionen 6.1.3 und 6.1.6). Entsprechend erhält man durch Satz 6.2.6 eine echte Operation der Gruppe $G(ND)$ auf $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$. Jeder der Operatoren $L(\alpha_D, r_D)$ ist von der Form (8.2), und alle der obigen Eigenschaften sind insbesondere für ganzzahliges k erfüllt. □

Korollar 12.0.12. *Die Signatur von L sei ungerade und das Gewicht k der Räume in $\mathfrak{M}(N)$ aus $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Dann definieren die Operationen* (11.22) *und* (11.23) *durch die Fortsetzung* (12.7) *eine Operation der Gruppe $\mathcal{Q}_2(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$.*

Beweis. Der Beweis ist der gleiche wie der des vorherigen Korollars. Da alle Ergebnisse des Kapitels 8 für $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ausgeführt sind, kann man diese direkt anwenden. □

12.1 Eine notwendige Bedingung für $L(\alpha)$

Im ersten Teil dieses Kapitels ist mit Satz 12.0.10 eine Aussage vorgestellt worden, die unter gewissen Voraussetzungen eine Fortsetzung der Slash-Operation der Gruppe Γ auf $M_{k,L}$ auf die Gruppe $\mathscr{G}(N)$ liefert.

Der folgende Satz geht umgekehrt davon aus, daß durch (11.4) (bzw. (11.22)), (12.4) und (12.7) eine Operation der Gruppe $\mathscr{G}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$ gegeben ist, und trifft dann Aussagen über die Operatoren $L(\alpha_D)$ aus (12.4). Es stellt sich heraus, daß $L(\alpha_D)$ für jedes $D \in \mathbb{N}(N)$ notwendig ein invertierbarer äquivarianter Operator der Darstellungen ρ_D und ρ_{α_D} auf dem Raum $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ ist.

In diesem Satz sollen für $L(\alpha)$ ausdrücklich **keine der Eigenschaften 1.-5.** aus Definition 12.0.8 gefordert werden .

Es gelten unverändert die Notationen und Vereinbarungen, die am Anfang dieses Kapitels getroffen wurden.

Satz 12.1.1. *Es sei $M \in \mathscr{S}(N)$, $J_\alpha \in \mathscr{J}(N)$ und $F \in \mathfrak{M}(N)$. Für die zugehörige Restklasse $\alpha \in U(N)$ sei durch*

$$(L(\alpha_D) : M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \longrightarrow M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)))_{D\in\mathbb{N}(N)}, \quad f \mapsto f \cdot L(\alpha_D) \quad (= L(\alpha_D)(f))$$

eine Familie von R_{ND}-linearen Abbildungen gegeben und

$$L(\alpha) : \mathfrak{m}(N) \longrightarrow \mathfrak{m}(N)$$

eine Abbildung auf $\mathfrak{m}(N)$, definiert durch

$$f \cdot L(\alpha) := f \cdot L(\alpha_D)$$

für $f \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$.

Es sei eine Operation von $\mathscr{G}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$ wie folgt gegeben:

$$(F, M) \mapsto F\,|_{k,L}\, M,\ M \in \mathscr{S}(N),\ \textit{gegeben durch } (11.4)\ \textit{(bzw. } (11.22)\textit{) und}$$
$$(F, J_\alpha) \mapsto F\,|_{k,L}\, J_\alpha,\ J_\alpha \in \mathscr{J}(N),\ \textit{gegeben durch } (12.4),$$

wobei für den Operator $L(\alpha)$ in $F\,|_{k,L}\, J_\alpha$ lediglich die obigen Voraussetzungen gelten sollen (und keine der zusätzlichen Bedingungen aus Definition 12.0.8). Schließlich sei

$$(F, MJ_\alpha) \mapsto F\,|_{k,L}\, MJ_\alpha,\ \textit{gegeben durch } (12.7).$$

Dann läßt sich $L(\alpha_D)$ für alle $\alpha \in U(N)$ und für alle $D \in \mathbb{N}(N)$ zu einem invertierbaren äquivarianten Operator $L(\alpha_D)$ der Darstellungen ρ_{α_D} und ρ_D auf dem Raum $M_k(\Gamma(ND))$ fortsetzen.

Beweis. **1.** Für beliebiges $D \in \mathbb{N}(N)$ ist $L(\alpha_D)$ ein bijektiver Operator auf $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$:

Sei $F = f \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in M_k^{R_m}(\Gamma(m)) \otimes R_N[A] \subset \mathfrak{M}(N)$, $N \mid m$ und $r \in \mathbb{Z}$, so daß $r\xi(1, \alpha) \in M_2(\mathbb{Z})$ und $D' = \frac{m}{N}\det(r\xi(1, \alpha))$.

Da nach Voraussetzung $\mathscr{J}(N)$ auf $\mathfrak{M}(N)$ operiert, gilt

$$F\,|_{k,L}\, J_\alpha|_{k,L} J_{\alpha^{-1}} = F. \tag{12.9}$$

Für die folgenden Betrachtungen sei

$$H(\alpha) : M_k^{R_m}(\Gamma(m)) \longrightarrow M_k^{R_{ND'}}(\Gamma(ND')), \quad f \cdot H(\alpha) := [(f\,|_k\, \xi(1, \alpha) \cdot L(\alpha)]^{\sigma_\alpha}. \tag{12.10}$$

Weiterhin seien

$$J(\alpha) : M_k^{R_m}(\Gamma(m)) \longrightarrow M_k^{R_{ND'}}(\Gamma(ND')), \quad f \cdot J(\alpha) := f\,|_k\, \xi(1, \alpha) \text{ und}$$
$$S(\alpha) : M_k^{R_{ND'}}(\Gamma(ND')) \longrightarrow M_k^{R_{ND'}}(\Gamma(ND')), \quad f \cdot S(\alpha) = f^{\sigma_\alpha}.$$

Aus (12.9) gewinnt man eine Gleichung für die erste Komponente beider Seiten, die sich mit Hilfe von (12.10) in der Form

$$f \cdot H(\alpha) \circ H(\alpha^{-1}) = f \tag{12.11}$$

schreiben läßt. Da die Gleichung (12.9) für jedes Element der Form $f \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in M_k^{R_m}(\Gamma(m)) \otimes R_N[A]$ gilt, folgt, daß (12.11) für alle $f \in M_k^{R_m}(\Gamma(m))$ gültig ist. Daher ist $H(\alpha)$ injektiv. Daraus folgt, daß

$$f \cdot L(\alpha) = f \cdot J(\alpha^{-1}) \cdot H(\alpha) \cdot S(\alpha^{-1})$$

als Komposition injektiver Abbildungen injektiv ist. Daher ist $L(\alpha_{m/N})$ ein invertierbarer R_m-linearer Operator auf $M_k^{R_m}(\Gamma(m))$.

2. $L(\alpha_D)$ ist ein äquivarianter Operator der Darstellungen ρ_D und ρ_{α_D} auf dem Raum $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND))$ für alle $D \in \mathbb{N}(N)$:

Im folgenden sei $F = f \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in M_k^{R_m}(\Gamma(m)) \otimes R_N[A] \subset \mathfrak{M}(N)$ und m und D' wie im ersten Teil. Unter Verwendung der Bijektivität von $L(\alpha)$ läßt sich die Gleichung (12.11) auch in der Form

$$[(f\,|_k\, \xi(1,\alpha)) \cdot L(\alpha)]^{\sigma_\alpha} = \left(f^{\sigma_\alpha} \cdot L(\alpha^{-1})^{-1}\right) |_k\, \xi(1,\alpha) \tag{12.12}$$

schreiben. Nun gilt für alle $\gamma \in \Gamma$ und für alle $F \in \mathfrak{M}(N)$

$$F\,|_{k,L}\, J_\alpha\,|_{k,L}\, \gamma\,|_{k,L}\, J_{\alpha^{-1}} = F\,|_{k,L}\, J_\alpha \gamma J_{\alpha^{-1}}. \tag{12.13}$$

Unter Verwendung von (12.5) bzw. (12.6) ergibt sich daraus für die erste Komponente beider Seiten

$$\begin{aligned} \left[(h^{\sigma_\alpha}\,|_k\, \gamma\,|_k\, \xi(1,\alpha^{-1})) \cdot L(\alpha^{-1})\right]^{\sigma_{\alpha^{-1}}} &= f\,|_k\, \xi(1,\alpha)\gamma\xi(1,\alpha^{-1}) \\ \overset{(12.12)}{\Longleftrightarrow} \left[(h^{\sigma_\alpha}\,|_k\, \gamma)^{\sigma_{\alpha^{-1}}} \cdot L(\alpha)^{-1}\right] |_k\, \xi(1,\alpha^{-1}) &= f\,|_k\, \xi(1,\alpha)\gamma\xi(1,\alpha^{-1}) \\ \Longleftrightarrow (h^{\sigma_\alpha}\,|_k\, \gamma)^{\sigma_{\alpha^{-1}}} \cdot L(\alpha)^{-1} &= f\,|_k\, \xi(1,\alpha)\gamma. \end{aligned} \tag{12.14}$$

Da $h \in M_k^{R_{ND'}}(\Gamma(ND'))$, ergibt sich wie im Beweis von Satz 12.0.10 für die letzte Gleichung in (12.14)

$$\begin{aligned} (h \cdot J_{\alpha_{D'}} \cdot \pi_{ND'}(\gamma) \cdot J_{\alpha_{D'}}^{-1}) \cdot L(\alpha)^{-1} &= f\,|_k\, \xi(1,\alpha)\gamma \\ \overset{L(\alpha)\text{ invert.}}{\Longleftrightarrow} [(f\,|_k\, \xi(1,\alpha) \cdot L(\alpha)] \cdot J_{\alpha_{D'}} \pi_{ND'}(\gamma) J_{\alpha_{D'}}^{-1} &= (f\,|_k\, \xi(1,\alpha)\,|_k\, \gamma) \cdot L(\alpha). \end{aligned} \tag{12.15}$$

Dabei war f vorausgesetzt als eine beliebige Modulform aus $M_k^{R_m}(\Gamma(m))$ für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Daher ist die letzte Gleichung von (12.15) immer noch gültig, wenn man $f = g\,|_k\, \xi(1,\alpha^{-1})$ wählt, wobei $g \in M_k^{R_m}(\Gamma(m))$ beliebig sei. Mit dieser Wahl von f geht die letzte Gleichung von (12.15) über in

$$\begin{aligned} (g \cdot L(\alpha)) \cdot J_{\alpha_D} \pi_{ND}(\gamma) J_{\alpha_D^{-1}} &= (g\,|_k\, \gamma) \cdot L(\alpha) \\ &= g \cdot \pi_{ND}(\gamma) \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

3. Für die Fortsetzung von $L(\alpha_D)$ auf den Raum $M_k(\Gamma(ND))$ nutzt man aus, daß $M_k(\Gamma(ND))$ isomorph zu $M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \otimes \mathbb{C}$ ist. $\square$

Kapitel 13

Hecke-Operatoren auf vektorwertigen Modulformen

In diesem Kapitel soll ein Hecke-Operator für den Raum $M_{k,L}$ definiert werden und dessen Aktion auf den Fourierkoeffizienten einer Modulform bestimmt werden. Streng genommen wird im folgenden ein "Hecke-Operator" auf $(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ definiert, der über den Isomorphismus Ξ aus (10.3) den Hecke-Operator auf $M_{k,L}$ induziert. Im Kapitel 11 ist zu diesem Zweck eine Erweiterung des Slash-Operators

$$f\mid_{k,L} \tilde{\gamma} = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \mid_k \tilde{\gamma} \otimes \varrho_L^{-1}(\tilde{\gamma})(\mathfrak{e}_\lambda), \quad \tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(1),$$

auf die Gruppe $\mathcal{Q}_2(N)$ (bzw. für $\gamma \in \Gamma(1)$ auf die Gruppe $\mathcal{Q}_1(N)$) definiert worden, die auf der Menge $\mathfrak{M}(N)$ $\mathbb{Q}$-linear operiert. Daher ist a priori, wenn man den Hecke-Operator wie im Falle skalarwertiger Modulformen definieren will, dies nur möglich auf $(M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$. Im folgenden wird der Hecke-Operator in Termen von Doppelnebenklassen der Hecke-Algebra $H(\mathcal{Q}_1(N), \Gamma(1))$ (bzw. $H(\mathcal{Q}_2(N), \Delta)$) auf dem Raum $(M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ definiert. Mit Hilfe von Satz 10.0.18 ist es jedoch möglich, eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung auf $(M_k(\Gamma(N))^{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)} \otimes \mathbb{C}$ zu erhalten.

Im folgenden betrachten wir wieder die beiden Fälle gerader und ungerader Signatur des Gitters L getrennt.

13.1 Der Fall gerader Signatur

Die Definition des Hecke-Operators geschieht wie bei den skalarwertigen elliptischen Modulformen durch die Aktion der Hecke-Algebra zu einem Paar von Gruppen G und H, wobei H eine diskrete Untergruppe von G ist. In unserem Fall ist die Gruppe G gegeben durch $\mathcal{Q}_1(N)$ und H durch $\Gamma(1)$.

Definition 13.1.1. *Es sei $(g, r) \in \mathcal{Q}_1(N)$ mit der zugehörigen Doppelnebenklasse $\Gamma(1)(g, r)\Gamma(1)$ und*

$$\Gamma(1)(g, r)\Gamma(1) = \bigcup_{h \in \Gamma(1) \backslash \Gamma(1)(g,r)\Gamma(1)} \Gamma(1)(h, r)$$

ihre Zerlegung in endliche viele disjunkte Linksnebenklassen.

Es sei weiterhin $f \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^{\Gamma(1)}$. *Dann wird der zu* (g,r) *gehörige Hecke-Operator* $T_{(g,r)}$ *definiert durch*

$$f\mid_{k,L} T_{(g,r)} = \det(g)^{k-1} \sum_{h\in\Gamma(1)\backslash\Gamma(1)(g,r)\Gamma(1)} f\mid_{k,L} (h,r). \tag{13.1}$$

Proposition 13.1.2. *Es gilt*

$$f\mid_{k,L} T_{(g,r)} \in (M_k^{R_{ND}}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\Gamma(1)}.$$

Beweis. Nach Definition von $f\mid_{k,L} (h,r)$ gilt $f\mid_{k,L} T_{(g,r)} \in M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \otimes R_N[A]$ für geeignetes $D \in \mathbb{N}(N)$.

Mit den gleichen Argumenten wie im Fall von Hecke-Operatoren auf skalarwertigen elliptischen Modulformen sieht man, daß $f\mid_{k,L} T_{(g,r)}$ wieder in $(M_k^{R_{ND}}(\Gamma(ND)) \otimes R_N[A])^{\Gamma(1)}$ liegt.

Die Invarianz von $|_k \otimes \varrho_L^{-1}$ unter $\Gamma(1)$ liefert analog zu Bemerkung 10.0.16, daß sogar

$$f\mid_{k,L} T_{(g,r)} \in (M_k^{R_{ND}}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\Gamma(1)}$$

gilt. □

Definition 13.1.3. *Man definiert eine* $\mathbb{C}$*-lineare Fortsetzung von* $T_{(g,r)}$ *auf* $(M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^{\Gamma(1)} \otimes \mathbb{C}$ *durch* $T_{(g,r)} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. *Diese Fortsetzung bezeichnen wir auch mit* $T_{(g,r)}$.

Es sei p eine Primzahl, die quadratischer Rest modulo N ist, und r eine Wurzel von p modulo N. In diesem Fall liegt $(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), r)$ in $\mathcal{Q}_1(N)$. Im folgenden soll die Fourierentwicklung von $f\mid_{k,L} T_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),r}$ berechnet werden, wobei f in $(M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\Gamma(1)}$ liegt und rationale Fourierkoeffizienten besitzen soll.

Satz 13.1.4. *Sei* p *eine Primzahl, die quadratischer Rest modulo* N *ist und* $r \in U(N)$ *mit* $p \equiv r^2 \pmod N$. *Weiter sei* $f \in (M_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^{\Gamma(1)}$ *mit rationalen Fourierkoeffizienten. Die Fourierentwicklung von* f *sei gegeben durch*

$$f(\tau) = \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(\lambda,n) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda.$$

Dann gilt

$$f\mid_{k,L} T_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),r} = \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} b(\lambda,n) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda,$$

wobei

$$b(\lambda,n) = \frac{g(L)}{g_r(L)} \left(c(r\lambda, pn) + p^{k-1} c(\lambda/r, n/p) \right). \tag{13.2}$$

Dabei soll $c(\lambda/r, n/p) = 0$ *gelten, falls* $\mathrm{ord}_p(n) = 0$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem von Satz 13.2.11, allerdings weniger kompliziert. □

Bemerkung 13.1.5. *Es seien $l \neq p$ ungerade Primzahlen und $A = L'/L$ von der Ordnung l. Dann gilt $A \cong \mathbb{F}_l$ und die quadratische Form, aufgefaßt als Form auf $\mathbb{F}_l$, ist gegeben durch $x \mapsto x^2/2 = \alpha x^2/l$, wobei $\alpha \in \mathbb{F}_l^*$.*

Für den Raum der vektorwertigen Modulformen bzgl. ϱ_L gilt $M_{k,L} \cong M_k^\epsilon(\Gamma_0(l), \chi_l)$ ([BB], Theorem 5), wobei $\chi_l = \left(\frac{\cdot}{l}\right)$, $\epsilon = \chi_l(\alpha)$ und $M_k^\epsilon(\Gamma_0(l), \chi_l)$ der Unterraum aller Modulformen von $M_k(\Gamma_0(l), \chi_l)$ ist, deren n-ter Fourierkoeffizient gleich Null ist, falls $\chi_l(n) = -\epsilon$.

Dann gilt für alle $F \in M_{k,L}$

$$I(F \mid_{k,L} T_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), r}) = \frac{g(L)}{g_r(L)} \left(T(p) \mid_k I(F)\right), \tag{13.3}$$

wobei $T(p)$ den Hecke-Operator auf $M_k(\Gamma_0(l), \chi_l)$ und I den obigen Isomorphismus bezeichne.

Beweis. Man berechnet die Fourierentwicklung beider Seiten. Dabei ist I gegeben durch

$$F = \sum_{\lambda \in A} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ n \equiv \alpha\lambda^2 \pmod{l}}} c(\lambda, n/l) e(n/l\tau) \mapsto f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e(n\tau),$$

wobei

$$a(n) = \sum_{\substack{\lambda \in A \\ \alpha\lambda^2 \equiv n \pmod{l}}} c(\lambda, n/l).$$

Damit ist der n-te Fourierkoeffizient der linken Seite von (13.3) gleich

$$\frac{g(L)}{g_r(L)} \left(\sum_{\substack{\lambda \in A \\ \alpha\lambda^2 \equiv n \pmod{l}}} c(r\lambda, np/l) + \sum_{\substack{\lambda \in A \\ \alpha\lambda^2 \equiv n \pmod{l}}} c(\lambda/r, (n/p)/l) \right).$$

Zur Berechnung der rechten Seite verwenden wir [Mi], Lemma 4.5.14. Es ergibt sich

$$\sum_{\substack{\lambda \in A \\ \alpha\lambda^2 \equiv pn \pmod{l}}} c(\lambda, np/l) + \sum_{\substack{\lambda \in A \\ \alpha\lambda^2 \equiv n/p \pmod{l}}} c(\lambda, n/p),$$

was bis auf die Konstante $\frac{g(L)}{g_r(L)}$ mit dem obigen Ausdruck übereinstimmt, da $r^2 \equiv p \pmod{l}$ gilt. $\square$

13.2 Der Fall ungerader Signatur

In diesem Fall ist $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ wegen Bemerkung 10.0.15, und die Hecke-Algebra ist definiert durch die Gruppen $\mathcal{Q}_2(N)$ und $\Delta = L(\widetilde{\Gamma}(1))$ (siehe (11.21)).

Definition 13.2.1. *Es sei $\alpha = (M, \phi) \in \tilde{\mathcal{Q}}(N)$, $\xi = (\alpha, r, t') \in \mathcal{Q}_2(N)$ und*

$$\Delta\xi\Delta = \bigcup_i \Delta\xi_i$$

eine Zerlegung der Doppelnebenklasse $\Delta\xi\Delta$ in Linksnebenklassen. Dann wird der zu ξ zugehörige Hecke-Operator T_ξ für $f \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ definiert durch

$$f \mid_{k,L} T_\xi = \det(\alpha)^{k-1} \sum_i f \mid_{k,L} \xi_i.$$

Bemerkung 13.2.2. *Analog zu Proposition 13.1.2 sieht man, daß* $f\,|_{k,L}\,T_\xi \in (M_k^{R_{ND}}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ *gilt.*

In der nun folgenden Diskussion soll geklärt werden, wie man eine Zerlegung von $\Delta\xi\Delta$ in Linksnebenklassen aus einer solchen Zerlegung der Doppelnebenklasse $\widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1)$ erhält. Wir richten uns dabei nach [Sh2], S. 443 – 448. Zunächst sei hier das folgende bekannte Lemma zitiert ([Ko], S. 165).

Lemma 13.2.3. *Mit den obigen Notationen gilt:*

$$\Delta = \bigcup_i (\Delta \cap \xi^{-1}\Delta\xi)\cdot\gamma_i$$

ist genau dann eine disjunkte Zerlegung von Δ *in Linksnebenklassen, wenn*

$$\Delta\xi\Delta = \bigcup \Delta\cdot\xi\gamma_i$$

eine disjunkte Zerlegung in Linksnebenklassen ist.

Eine entsprechende Aussage gilt natürlich auch für $\widetilde{\Gamma}(1)$ und $\alpha = P_1(\xi)$. Daher ist es plausibel, die Gruppen $L(\widetilde{\Gamma}(1)\cap\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha)$ und $\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$ zu vergleichen. Zu diesem Zweck sei $\tilde\gamma = (\gamma, j(\gamma,\tau)) \in \widetilde{\Gamma}(1)\cap\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha$. Dann gilt

$$L(\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1}) = \xi L(\tilde\gamma)\xi^{-1}\cdot(1,1,t(\tilde\gamma)), \tag{13.4}$$

wobei $t(\tilde\gamma)\in\{\pm1\}$ durch den Kozykel $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ bestimmt ist. Genauer gilt

$$\xi L(\tilde\gamma)\xi^{-1} = (\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1}, 1, \omega_{\mathcal{G}(N)}(M,\gamma)\omega_{\mathcal{G}(N)}(M\gamma, M^{-1})\omega_{\mathcal{G}(N)}(M, M^{-1})\eta(\gamma))$$

bzw.

$$L(\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1}) = (\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1}, 1, t''\eta(M\gamma M^{-1})).$$

Da der Kozykel $\omega_{\mathcal{G}(N)}$ durch die Weildarstellung definiert ist, ist $t(\tilde\gamma)$ gegeben durch die Gleichung

$$\varrho_L(L(\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1})) = t(\tilde\gamma)\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(\tilde\gamma))\varrho_L(\xi)^{-1}. \tag{13.5}$$

Bemerkung 13.2.4. *Aus der definierenden Gleichung* (13.5) *von* $t(\tilde\gamma)$ *folgt, daß*

$$t : \widetilde{\Gamma}(1)\cap\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha \longrightarrow \{\pm1\} \tag{13.6}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Es ist lediglich zu beachten, daß L auf $\widetilde{\Gamma}(1)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Im folgenden soll der Kern von t bestimmt werden. Dieser gibt darüber Auskunft, in welchem Verhältnis die Gruppen $L(\widetilde{\Gamma}(1)\cap\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha)$ und $\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$ zueinander stehen.

Lemma 13.2.5.
1. *Es gilt* $L(\ker t) = \Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$.
2. *Es sei der Index* $[\widetilde{\Gamma}(1) : \ker t]$ *endlich. Falls dann* t *nichttrivial ist, so gilt* $f\,|_{k,L}\,T_\xi = 0$.

Beweis. Für den ersten Teil kann man einen Beweis in [Ko], S. 205, an die vorliegende Situation anpassen.

Der zweite Teil läßt sich analog zu dem Beweis von [Sh2], Proposition 1.0, zeigen. □

Lemma 13.2.6. *Mit der Notation, wie in diesem Abschnitt eingeführt, gilt:*

Der Homomorphismus t ist genau dann trivial, falls P_1 eine bijektive Abbildung von $\Delta\xi\Delta$ nach $\widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1)$ liefert.

In diesem Fall gilt: Es ist $\Delta\xi\Delta = \bigcup_i \Delta\xi_i$ eine disjunkte Vereinigung genau dann, wenn $\widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1) = \bigcup_i \widetilde{\Gamma}(1)P_1(\xi_i)$ dies ist.

Beweis. Der Beweis ist gruppentheoretisch und wird völlig analog geführt wie der von Proposition 1.1 aus [Sh2]. Man beachte, daß, falls P_1 eine solche Bijektion darstellt, so ist die Umkehrabbildung durch L gegeben, wobei $L(\alpha) = \xi$ gesetzt wird. □

Lemma 13.2.7. *Es sei $\Gamma' = \Gamma_0(m) \cap \Gamma^0(n)$, dann wird $\tilde{\Gamma}'$ erzeugt von T^n, U^m und $\tilde{\Gamma}' \cap \tilde{\Gamma}_0^0(N)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\Gamma' \subset \langle U^m, T^n, \Gamma' \cap \Gamma_0^0(N)\rangle$. Es sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma'$.

1. Falls ein Eintrag von γ Null ist, so muß dies schon b oder c sein, andernfalls ist $\gamma \notin \Gamma'$. In diesem gilt also

$$\gamma \in \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^m \rangle.$$

2. Falls alle Einträge von γ ungleich Null sind, genügt es zu zeigen, daß es $r, s \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{rm} \gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{sn} \in \Gamma' \cap \Gamma_0^0(N).$$

Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß der Eintrag a teilerfremd zu N ist. Andernfalls ersetzt man γ durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\gamma$, wobei $t \in \mathbb{Z}$ derart gewählt ist, daß $a + tc$ eine zu N koprime Primzahl ist. Man beachte, daß es ein solches t wegen des Dirichletschen Primzahlsatzes gibt. Man bestätigt sofort

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ rm & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & sn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & asn + b \\ arm + c & (arm + c)sn + rm + d \end{pmatrix}.$$

Da $c \equiv 0 \pmod{m}$ und $b \equiv 0 \pmod{n}$, gilt $arm + c = m(ar + c_1)$ und $asn + b = n(as + b_1)$, wobei $c_1 = c/m$ und $b_1 = b/n$. Es ist also zu zeigen, daß es $r, s \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ar \equiv -c_1 \pmod{N}$ und $as \equiv -b_1 \pmod{N}$. Dies ist klar, wenn $(a, N) = 1$ gilt. □

Lemma 13.2.8. *Es seien m und n zwei natürliche Zahlen, die beide koprim zu N sind. Es sei $\alpha = (\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), \sqrt{n}) \in \tilde{\mathcal{Q}}(N)$ und $\xi = (\alpha, r, t') \in \mathcal{Q}_2(N)$. Dann gilt*

$$t\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau + d}\right) = \left(\frac{mn}{d}\right)$$

für alle $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau + d}\right) \in \widetilde{\Gamma}(1) \cap \alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha$, wobei t durch (13.5) *bzw.* (13.6) *gegeben ist.*

Beweis. Man bestätigt leicht, daß $\tilde{\Gamma}' = \widetilde{\Gamma}(1) \cap \alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}(1)\alpha$ gilt, wobei $\tilde{\Gamma}'$ in Lemma 13.2.7 definiert worden ist. Da t ein Homomorphismus ist, genügt es, die Aussage für eine Menge von Erzeugern von $\tilde{\Gamma}'$ zu zeigen. Nach Lemma 13.2.7 sind dies T^n, U^m und $\tilde{\Gamma}' \cap \tilde{\Gamma}_0^0(N)$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(T^n))\varrho_L^{-1}(\xi)(\mathfrak{e}_\lambda) &= \varrho_L(P_2(\xi))\varrho_L(T^n)\varrho_L^{-1}(P_2(\xi))(\mathfrak{e}_\lambda) \\
&= \varrho_L(P_2(\xi))(t'\chi_L^{-1}(s(D_{nr^{-2}}))e(n(n^{-1}r^2\lambda)^2/2)\mathfrak{e}_{n^{-1}r^2\lambda}) \\
&= e(n(n^{-1}r^2\lambda)^2/2)^{\sigma_{r^2}^{-1}}\mathfrak{e}_\lambda.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt $e(nr^{-2}(n^{-1}r^2\lambda)^2/2) = e(m\lambda^2/2)$, so daß

$$\begin{aligned}\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(T^n))\varrho_L^{-1}(\xi) =&\varrho_L(T^m)\\ =&\varrho_L(L(\alpha T^n\alpha^{-1})).\end{aligned}$$

Daraus folgt $t(T^n) = \left(\frac{mn}{1}\right)$.

Für U^m erhält man

$$\begin{aligned}\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(U^m))\varrho_L^{-1}(\xi)(\mathfrak{e}_\lambda) =&\varrho_L(P_2(\xi))\varrho_L(U^m)(t'\chi_L(s(D_{nr^{-2}}))^{-1}\mathfrak{e}_{n^{-1}r^2\lambda})\\ =&\frac{1}{|A|}\sum_{\mu,\nu\in A} e(-mr^{-2}\mu^2/2 + (\mu r^{-2}, n^{-1}r^2\lambda - \nu))\mathfrak{e}_{nr^{-2}\nu}\\ =&\frac{1}{|A|}\sum_{\mu,\nu\in A} e(-n^{-1}\mu^2/2 + n^{-1}(\mu, \lambda - \nu))\mathfrak{e}_\nu\\ =&\frac{1}{|A|}\sum_{\mu,\nu\in A} e(-n\mu^2/2 + (\mu, \lambda - \nu))\mathfrak{e}_\nu.\end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$\begin{aligned}\varrho_L(L(\alpha U^m\alpha^{-1}))(\mathfrak{e}_\lambda) =&\varrho_L(U^n)(\mathfrak{e}_\lambda)\\ =&\frac{1}{|A|}\sum_{\mu,\nu\in L'/L} e(-n\mu^2/2 + (\mu, \lambda - \nu))\mathfrak{e}_\nu,\end{aligned}$$

so daß $t(U^m) = \left(\frac{mn}{1}\right)$ gilt.

Schließlich sei $\tilde\gamma = \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau + d}\right) \in \tilde\Gamma' \cap \tilde\Gamma_0^0(N)$. Dann berechnet man analog zu den Rechnungen in Lemma 11.2.1

$$\begin{aligned}\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(\tilde\gamma))\varrho_L^{-1}(\xi)(\mathfrak{e}_\lambda) =&\varrho_L(P_2(\xi))\varrho_L(\tilde\gamma)\varrho_L^{-1}(P_2(\xi))(\mathfrak{e}_\lambda)\\ =&\chi_L(\tilde\gamma)\mathfrak{e}_{d\lambda}\\ =&\left[\epsilon_d\left(\frac{c}{d}\right)\right]^{1-\left(\frac{-1}{|A|}\right)-\mathrm{sig}(L)}\left(\frac{d}{|A|2^{\mathrm{sig}(L)}}\right)\mathfrak{e}_{d\lambda}.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\varrho_L(L(\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1}))(\mathfrak{e}_\lambda) =&\varrho_L\left(\left(\begin{pmatrix} a & mb/n\\ nc/m & d\end{pmatrix}, j(\alpha\gamma\alpha^{-1}, \tau)\right)(\mathfrak{e}_\lambda)\\ =&\chi_L(\alpha\tilde\gamma\alpha^{-1})\mathfrak{e}_{d\lambda}\\ =&\left[\epsilon_d\left(\frac{mnc}{d}\right)\right]^{1-\left(\frac{-1}{|A|}\right)-\mathrm{sig}(L)}\left(\frac{d}{|A|2^{\mathrm{sig}(L)}}\right)\mathfrak{e}_{d\lambda}.\end{aligned}$$

Dies gibt die Behauptung auch in diesem Fall . □

Proposition 13.2.9. *Es sei* $\alpha = \left(\left(\begin{smallmatrix} m & 0\\ 0 & n\end{smallmatrix}\right), \sqrt{n}\right) \in \tilde{\mathcal{Q}}(N)$ *und* $\xi = (\alpha, r, t) \in \mathcal{Q}_2(N)$. *Dann gilt: Falls* $\det(\alpha)$ *kein Quadrat in* $\mathbb{Q}$ *ist, so verschwindet der Hecke-Operator* T_ξ *auf ganz* $M_{k,L}$.

Beweis. Dies folgt mit Lemma 13.2.6 und Lemma 13.2.8. □

Lemma 13.2.10. *Es sei p eine Primzahl mit $(p,N)=1$, $\alpha = \left(\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1\right)$ und $\xi = (\alpha, p, t) \in \mathcal{Q}_2(N)$. Es seien $r, s \in \mathbb{Z}$, so daß $pr - N^2hs = 1$ und*

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} p & hN \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{p}\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} r & Nh \\ Ns & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{Ns\tau + p}\right) \alpha \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -Nps & 1 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-Nps\tau + 1}\right). \tag{13.7}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} p & hN \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{p}, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) \\ &= \varrho_L(L(\left(\begin{smallmatrix} r & Nh \\ Ns & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{Ns\tau + p}))\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -Nps & 1 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-Nps\tau + 1})). \end{aligned} \tag{13.8}$$

Es seien $d, t \in \mathbb{Z}$, so daß $p^2d + N^2t = 1$ und

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau + p^2}\right) \alpha \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -Nt \\ N & p^2d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{N\tau + p^2d}\right) T^b. \tag{13.9}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p, p, 1) \\ &= \varrho_L(L(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau + p^2}))\varrho_L(\xi)\varrho_L(L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -Nt \\ N & p^2d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{N\tau + p^2d}))\varrho_L(L(T^b)). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Beweis. **1.** Es ist

$$\begin{aligned} \varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} p & hN \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{p}, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} p & hN \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \varrho_L(s(D_{p^{-1}}))\varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))\mathfrak{e}_{p^{-1}\lambda}. \end{aligned}$$

Andererseits ist die rechte Seite von (13.8) gleich

$$\begin{aligned} &\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} r & Nh \\ Ns & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{Ns\tau + p})\varrho_L(\pi_N(\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)))\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -Nps & 1 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-Nps\tau + 1})(\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} r & Nh \\ Ns & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{Ns\tau + p})\varrho_L(s(D_{p^{-2}}))\varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \chi_L(\left(\begin{smallmatrix} r & Nh \\ Ns & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{Ns\tau + p})\chi_L(s(D_{p^{-2}}))\mathfrak{e}_{p^{-1}\lambda} \\ &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))\mathfrak{e}_{p^{-1}\lambda}. \end{aligned}$$

2. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p, p, 1)(\mathfrak{e}_\lambda) =&\varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =&\varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))\varrho_L(\pi_N \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =&e(bp^{-2}\lambda^2/2)\mathfrak{e}_\lambda. \end{aligned}$$

Hierbei ist p^{-2} als ein Element aus $U(N)$ zu verstehen. Für die rechte Seite der Gleichung von (13.10) ist zunächst zu beobachten, daß

$$\begin{aligned}\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau+p^2}))\mathfrak{e}_\lambda =&\chi_L(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau+p^2}))\mathfrak{e}_{p^2\lambda} \\ =&\mathfrak{e}_{p^2\lambda}\end{aligned}$$

gilt, sowie

$$\begin{aligned}\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -Nt \\ N & p^2 d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{N\tau+p^2 d})(\mathfrak{e}_\lambda) =&\chi_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -Nt \\ N & p^2 d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{N\tau+p^2 d})(\mathfrak{e}_{p^2 d\lambda}) \\ =&\mathfrak{e}_\lambda.\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung wegen $p^2d+N^2t=1$. Denn daraus folgt $p^2d \equiv 1 \pmod{N^2}$, also $p^2d\equiv 1 \pmod N$ und $p^2d \equiv 1 \pmod 8$, so daß $\epsilon_{p^2d}=1$, $\left(\frac{N}{p^2d}\right)=1$ wegen Lemma 8.0.16 und $\left(\frac{p^2d}{2}\right)=1$. Da $|A|$ und N dieselben Primfaktoren besitzen, gilt $\left(\frac{p^2d}{|A|}\right)=\left(\frac{p^2d}{N}\right)=1$.

Damit ist die rechte Seite von (13.10) gleich

$$\begin{aligned}&\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau+p^2})\varrho_L(s(D_{p^{-2}}))\varrho_L(\pi_N\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right))(e(b\lambda^2/2)\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} d & Nt \\ -N & p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{-N\tau+p^2})(e(bp^{-2}\lambda^2/2)\mathfrak{e}_{p^{-2}\lambda}) \\ &= e(bp^{-2}\lambda^2/2)\mathfrak{e}_\lambda.\end{aligned}$$

□

Satz 13.2.11. *Es sei p eine Primzahl, koprim zu N, $\alpha = (\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1) \in \tilde{\mathcal{Q}}(N)$ und $\xi = (\alpha, p, 1) \in \mathcal{Q}_2(N)$. Weiter sei*

$$\varsigma(p) = \epsilon_p(-1)^{(p-1)^2/4}\left(\frac{N}{p}\right)\chi_L(s(D_{p^{-1}})),$$

wobei der Charakter χ_L in Lemma 4.1.7 definiert ist. Schließlich sei $f \in (M_k(\Gamma(N))\otimes \mathbb{C}[A])^{\widetilde{\Gamma}(1)}$ mit rationalen Fourierkoeffizienten. Die Fourierentwicklung von f sei gegeben durch

$$f(\tau) = \sum_{\lambda\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(\lambda,n)e(n\tau)\otimes\mathfrak{e}_\lambda.$$

Dann gilt

$$f\mid_{k,L} T_\xi = \sum_{\lambda\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} b(\lambda,n)e(n\tau)\otimes\mathfrak{e}_\lambda,$$

wobei

$$b(\lambda,n) = \varsigma(p)\left(c(p\lambda,p^2n)+\epsilon_p^{\mathrm{sig}(A)+\left(\frac{-1}{|A|}\right)}\left(\frac{p}{|A|2^{\mathrm{sig}(A)}}\right)p^{k-3/2}\left(\frac{-n}{p}\right)c(\lambda,n)+p^{2k-2}c(\lambda/p,n/p^2)\right). \tag{13.11}$$

Dabei soll $c(\lambda/p,n/p^2)=0$ sein, falls $\mathrm{ord}_{p^2}(n)=0$ gilt.

Beweis. Es seien $\beta_h = \left(\left(\begin{smallmatrix} p & hN \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{p}\right), \gamma_b = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p\right) \in \tilde{\mathcal{Q}}(N)$. Durch

$$\widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1) = \widetilde{\Gamma}(1)\alpha \cup \bigcup_{b\in(p)^*} \widetilde{\Gamma}(1)\beta_h \cup \bigcup_{b\in(p^2)} \widetilde{\Gamma}(1)\gamma_b \tag{13.12}$$

ist eine Zerlegung der Doppelnebenklasse $\widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1)$ in Linksnebenklassen gegeben. Mit Lemma 13.2.8 und Lemma 13.2.6 folgt aus (13.12)

$$\Delta\xi\Delta = \Delta\xi \cup \bigcup_{h\in(p)*} \Delta L(\beta_h) \cup \bigcup_{b\in(p^2)} \Delta L(\gamma_b). \tag{13.13}$$

Man setzt $L(\delta) := L(\gamma)\xi L(\gamma')$ für $\delta = \gamma\alpha\gamma' \in \widetilde{\Gamma}(1)\alpha\widetilde{\Gamma}(1)$. Damit folgt aus Lemma 13.2.10

$$\begin{aligned} &L(\beta_h) = \left(\beta_h, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)\right) \quad \text{und} \\ &L(\gamma_b) = (\gamma_b, p, 1). \end{aligned}$$

Aus (13.13) folgt also

$$f\mid_{k,L} T_\xi = p^{2k-2} f\mid_{k,L} \xi + p^{2k-2} \sum_{h\in(p)^*} f\mid_{k,L} (\beta_h, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) + p^{2k-2} \sum_{b\in(p^2)} f\mid_{k,L} (\gamma_b, p, 1).$$

Wir berechnen nun die Fourierentwicklungen der einzelnen Summanden aus der obigen Summe. Es ist

$$\begin{aligned} &f\mid_{k,L} (\beta_h, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) \\ &= f\mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p}, 1, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) \mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p, p, 1) \\ &= \left(\sum_{\lambda\in A} f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p}) \otimes \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{-Nh}{p}\right))(\mathfrak{e}_\lambda)\right) \mid_{k,L} (\xi(1,p^2), p, 1) \\ &= \sum_{\lambda\in A} [f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p}) \mid_k \xi(1,p^2) \cdot L(p^2,p)]^{\sigma_{p^2}} \\ &\otimes \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1)\varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{-Nh}{p}\right))(\mathfrak{e}_\lambda). \end{aligned}$$

Mittels Lemma 4.1.7 erhält man für die Weildarstellung

$$\begin{aligned} \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{-Nh}{p}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p & hNp^{-2} \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) \\ &= \left(\frac{-Nh}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{-1}\mathfrak{e}_{p\lambda}. \end{aligned}$$

Dabei ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} p & hNp^{-2} \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right) = D_{p^{-1}}$ als Element aus $S(N)$ zu verstehen. Da $p^2 \equiv 1 \pmod 4$, gilt $\chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{\sigma_{p^2}} = \chi_L(s(D_{p^{-1}}))$, so daß

$$\varrho_L(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1)\varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \left(\frac{-Nh}{p}\right))(\mathfrak{e}_\lambda) = \left(\frac{-Nh}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{-1}\mathfrak{e}_{p\lambda}$$

gilt.

Mit Lemma 2.2.12, Satz 8.0.22 und Satz 8.1.3 folgt für die erste Komponente

$$\begin{aligned}
&[f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} p & hN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p}) \mid_k \xi(1,p^2) \cdot L(p^2,p)]^{\sigma_{p^2}} \\
&= [f_\lambda \cdot L(p^2,p) \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} p & qhN/p^2 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p}) \mid_k \xi(1,p^2)]^{\sigma_{p^2}} \\
&= f_\lambda^{\sigma_{p^2}} \cdot L(p^2,p) \mid_k \beta_h.
\end{aligned}$$

Hier ist das q, das im rechten oberen Eintrag der obigen Matrix auftaucht, eine ganze Zahl aus der Restklasse $\psi_{p^2}(p^{-2}) \in U(Np^2)$, wobei ψ_{p^2} durch (2.15) gegeben ist. Für $f \in M_{k,L}$ gilt

$$f \mid_{k,L} s(D_{p^{-1}}) = f$$

für $s(D_{p^{-1}}) \in \widetilde{\Gamma}(1)$, so daß wegen Lemma 4.1.7

$$f_\lambda \cdot L(p^2,p) = \epsilon_p (-1)^{(p-1)^2/4} \left(\frac{N}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}})) f_{p\lambda}$$

gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}
&p^{2k-2} \sum_{h \in (p)^*} f \mid_{k,L} (\beta_h, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) \\
&= \varsigma(p) p^{2k-2} \sum_{\lambda \in A} \sum_{h \in (p)^*} f_{p\lambda} \mid_k \beta_h \otimes \left(\frac{-Nh}{p}\right) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{-1} \mathfrak{e}_{p\lambda} \\
&= \varsigma(p) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{-1} p^{k-2} \sum_{\lambda \in A} \sum_{h \in (p)^*} \left(\frac{-Nh}{p}\right) f_\lambda(\tau + hN/p) \otimes \mathfrak{e}_\lambda.
\end{aligned}$$

Setzt man die Fourierentwicklung von f_λ in den letzten Ausdruck ein und verwendet die Formel $\sum_{h \in (p)^*} \left(\frac{h}{p}\right) e(hk/p) = \left(\frac{k}{p}\right) \epsilon_p \sqrt{p}$ (siehe [BE]), so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
&p^{2k-2} \sum_{h \in (p)^*} f \mid_{k,L} (\beta_h, p, \left(\frac{-Nh}{p}\right)) \\
&= \varsigma(p) \chi_L(s(D_{p^{-1}}))^{-1} \epsilon_p p^{k-3/2} \sum_{\lambda \in A} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda^2/2} \left(\frac{-n}{p}\right) c(\lambda,n) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda.
\end{aligned}$$

Für den dritten Summanden erhält man völlig analog

$$\begin{aligned}
&f \mid_{k,L} (\gamma_b, p, 1) \\
&= f \mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1, 1, 1) \mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p, p, 1) \\
&= \sum_{\lambda \in A} [f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1) \mid_k \xi(1,p^2) \cdot L(p^2,p)]^{\sigma_{p^2}} \otimes \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1) \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1)(\mathfrak{e}_\lambda).
\end{aligned}$$

Man bestätigt durch direktes Nachrechnen, daß

$$\varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1) \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1)(\mathfrak{e}_\lambda) = e(-b\lambda^2/2) \mathfrak{e}_\lambda$$

gilt. Völlig analog zu den Umformungen im ersten Fall erhält man

$$\begin{aligned}[f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/p^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1) \mid_k \xi(1,p^2) \cdot L(p^2,p)]^{\sigma_{p^2}} =& f_\lambda \cdot L(p^2,p) \mid_k \gamma_b \\ =& \varsigma(p) f_{p\lambda} \mid_k \gamma_b.\end{aligned}$$

Dies zusammengenommen ergibt

$$\begin{aligned}&p^{2k-2} \sum_{b\in(p^2)} f \mid_{k,L} (\gamma_b, p, 1) \\ &= \varsigma(p) \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in\mathbb{Z}+(p\lambda)^2/2} c(p\lambda, n) \left(\sum_{b\in(p^2)} e(nb/p^2) e(-b\lambda^2/2) \right) e(n\tau/p^2) \otimes \mathfrak{e}_\lambda \\ &= \varsigma(p) \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(p\lambda, p^2 n) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda,\end{aligned}$$

wobei die innere Summe wie üblich ausgewertet wird,

$$\sum_{b\in(p^2)} e(nb/p^2) e(-b\lambda^2/2) = \begin{cases} p^2, & \text{falls } n - p^2\lambda^2/2 \in p^2\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich gilt für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}&f \mid_{k,L} (\alpha, p, 1) \\ &= f \mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1/p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p^2}, 1, 1) \mid_{k,L} (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p, p, 1).\end{aligned}$$

Für die Weildarstellung erhält man wieder mit Lemma 4.1.7

$$\begin{aligned}\varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1) \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1/p^2 \end{smallmatrix}\right), 1)(\mathfrak{e}_\lambda) =& \varrho_L^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), 1)(\chi_L(s(D_{p^{-2}}))^{-1} \mathfrak{e}_{p^2\lambda}) \\ =& \mathfrak{e}_{p^2\lambda}.\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung ist zu berücksichtigen, daß $\chi_L(s(D_{p^{-2}})) = \chi_L(s(D_{p^2})) = 1$ gilt. Weiterhin ist

$$[f_\lambda \mid_k (\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1/p^2 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{1/p^2}) \mid_k \xi(1,p^2) \cdot L(p^2,p)]^{\sigma_{p^2}} = \varsigma(p) f_{p\lambda} \mid_k \alpha,$$

so daß

$$\begin{aligned}p^{2k-2} f \mid_{k,L} (\alpha, p, 1) =& \varsigma(p) p^{2k-2} \sum_{\lambda\in A} f_{p\lambda} \mid_k \alpha \otimes \mathfrak{e}_{p^2\lambda} \\ =& \varsigma(p) p^{2k-2} \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in\mathbb{Z}+(p^{-1}\lambda)^2/2} c(p^{-1}\lambda, n) e(p^2 n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda \\ =& \varsigma(p) p^{2k-2} \sum_{\lambda\in A} \sum_{n\in p^2\mathbb{Z}+p^2(p^{-1}\lambda)^2/2} c(p^{-1}\lambda, n/p^2) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda \\ =& \varsigma(p) p^{2k-2} \sum_{\lambda\in A} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2 \\ \operatorname{ord}_{p^2}(n)\geq 1}} c(p^{-1}\lambda, n/p^2) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda.\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt ist zu beachten, daß $pp^{-1} = 1 + lN$ und damit $p^2(p^{-1}\lambda)^2/2 = \lambda^2/2 + (\lambda, lN\lambda) + (lN\lambda)^2/2$ gilt. Damit läßt sich $n = p^2m + p^2(p^{-1}\lambda)^2/2$ in der Form $p^2m + (\lambda, lN\lambda) + (lN\lambda)^2/2 + \lambda^2/2 \in \mathbb{Z} + \lambda^2/2$ schreiben mit $\mathrm{ord}_{p^2}(n) \geq 1$. Andersherum gilt $n = m - (\lambda, lN\lambda) - (lN\lambda)^2/2 + p^2(p^{-1}\lambda)^2/2$ für jedes $n = m + \lambda^2/2$ mit $\mathrm{ord}_{p^2}(n) \geq 1$. Wegen der Bedingung $\mathrm{ord}_p^2(n) \geq 1$ gilt $p^2 \mid (m - (\lambda, lN\lambda) - (lN\lambda)^2/2)$. □

Analog zu den Hecke-Operatoren $T(\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p)$ bzw. $T(\left(\begin{smallmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1, p, 1)$ kann man für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $(m, N) = 1$ einen Hecke-Operator $T(m^2)^*$ durch die Operation der entsprechenden Doppelnebenklasse definieren.

Definition 13.2.12. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu N. Dann definiert man den Hecke-Operator $T(m^2)^* : (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma \to (M_k^{R_N}(\Gamma(N)) \otimes R_N[A])^\Gamma$ durch*

$$f \mapsto f \mid_{k,L} T(m^2)^* = \begin{cases} f|_{k,L}\, T\big(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), m\big), & \textit{falls } \mathrm{sig}(L) \textit{ gerade,} \\ f|_{k,L}\, T\big(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1, m, 1\big), & \textit{falls } \mathrm{sig}(L) \textit{ ungerade.} \end{cases} \tag{13.14}$$

Bemerkung 13.2.13. *Man beachte, daß der Operator $T(m^2)^*$ im Falle gerader Signatur nicht mit dem üblichen Hecke-Operator übereinstimmt. Bei diesem operieren neben $\Gamma(1)(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), m)\Gamma(1)$ noch die Doppelnebenklassen $\Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$, wobei α über alle Matrizen aus $M_2(\mathbb{Z})$ mit $\det(\alpha) = m^2$ läuft.*

Satz 13.2.14. *Die Familie $(T(m^2)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}})_{m \in \mathbb{N}(N)}$ erzeugt eine kommutative Unteralgebra von $\mathrm{End}(M_{k,L})$. Die Operatoren $T(m^2)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ bilden den Unterraum der Spitzenformen auf sich ab.*

Beweis. Auf dem Unterraum $(M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$ folgt dies unmittelbar aus den abstrakten Eigenschaften der Hecke-Algebra $H(\mathcal{Q}_1(N), \Gamma(1))$ bzw. $H(\mathcal{Q}_2(N), \Delta)$. In beiden Fällen ist der Antiautomorphismus durch Transposition auf der ersten Komponente gegeben. Die Aussage für die Familie $(T(m^2)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}})_{m \in \mathbb{N}(N)}$ folgt mit dem ersten Teil sofort.

Eine ganz ähnliche Rechnung wie in Bemerkung 14.2.4 liefert für ein $f \in (S_k(\Gamma(N))^{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$ und Element $M \in \mathscr{G}(N)$ die Fourierentwicklung von $f \mid_{k,L} M$ und zeigt $f \mid_{k,L} M \in (S_k(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{C}[A])^\Gamma$ für alle $M \in \mathscr{G}(N)$. □

Kapitel 14

Der Hecke-Operator $T(m^2)^*$ für beliebiges m

Wie üblich sei L ein gerades Gitter der Stufe N, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $M_{k,L}$ der Raum der vektorwertigen Modulformen vom Gewicht k zur Weildarstellung. Wie schon zuvor betrachten wir nur die Fälle, daß $k \in \mathbb{Z}$, falls $\operatorname{sig}(L)$ gerade, und $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, falls $\operatorname{sig}(L)$ ungerade. Die folgenden Definitionen und Aussagen sollen unabhängig von dem jeweils vorliegenden Fall formuliert werden. Wir verwenden daher die Notation aus Kapitel 12 und setzen zudem

$$\alpha = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2^+(\mathbb{Q}), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ gerade}, \\ \left(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1\right) \in \widetilde{G}L_2^+(\mathbb{Q}), & \text{falls } \operatorname{sig}(L) \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{14.1}$$

Im letzten Kapitel ist ein Hecke-Operator zur Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ auf dem Raum $M_{k,L}$ definiert worden. Wesentliche Voraussetzung an das m ist die Teilerfremdheit zur Stufe N des Gitters L gewesen. In diesem Kapitel soll ein Hecke-Operator zur Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$ definiert werden. Die Voraussetzung $(m, N) = 1$ wird also fallengelassen. In diesem Fall liefert die Reduktion modulo N von Matrizen $M \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ mit $\det M = m^2$ kein Element aus $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mehr. Die Erweiterungskonstruktionen aus den vorherigen Kapiteln sind daher nicht mehr anwendbar. Es ist nicht offensichtlich, wie man analoge Konstruktionen im nicht koprimen Fall ansetzt. Es ist jedoch möglich, den Slash-Operator

$$f \mid_{k,L} \alpha \tag{14.2}$$

kompatibel zu allen vorherigen Definitionen für alle $m \in \mathbb{N}$ fortzusetzen. Davon ausgehend kann man den Slash-Operator auf der Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ definieren, was die Definition eines Hecke-Operators $T(m^2)^*$ ermöglicht.

14.1 Über die Fortsetzbarkeit der Weildarstellung

Um einen Hecke-Operator $T(m^2)^*$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zu definieren, ist es naheliegend, wie im Falle $(m, N) = 1$ vorzugehen. Zunächst könnte man also versuchen, die Weildarstellung fortzusetzen. Auf die Schwierigkeiten dabei wurde bereits in der Einleitung hingewiesen. Daher wird man zunächst versuchen, die Weildarstellung für die Matrix α zu definieren. Falls $(m, N) = 1$ ist, so gilt

$$w \mid_L \alpha := \varrho_L^{-1}(\alpha)(w) = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda^{\sigma_{m^2}} \mathfrak{e}_{m^2\lambda} \tag{14.3}$$

für $w = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in R_N[A]$. Es ist naheliegend, für $(m, N) \neq 1$ denselben Ansatz wie in (14.3) zu wählen. Dazu muß man zunächst eine sinnvolle Fortsetzung der Galoisaktion σ_{m^2} erklären.

Definition 14.1.1. *Es $m, N \in \mathbb{Z}$ positive Zahlen. Es sei ζ_N eine primitive N-te Einheitswurzel. Wir definieren die folgende Abbildung σ_m auf $\mathbb{Q}[\zeta_N]$.*

$$\sigma_m(\zeta_N) = \zeta_N^m,$$
$$\sigma_m(\sum_{i=1}^n a_i \zeta_N^i) = \sum_{i=1}^n a_i (\zeta_N^i)^m.$$

Bemerkung 14.1.2. *Man beachte, daß σ_m im allgemeinen kein Körperautomorphismus auf dem Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ ist. Gilt jedoch $(m, N) = 1$, so liegt σ_m sogar in der Galoisgruppe* $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$.

Es wird sich zeigen, daß sich der Ansatz (14.3) für $(m, N) \neq 1$ durch

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \delta = \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma \mid_L \alpha \mid_L \gamma' \tag{14.4}$$

für $\delta = \gamma\alpha\gamma'$ nicht auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ fortsetzen läßt. Es gilt nämlich

Lemma 14.1.3. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ ungerade und $(m, N) \neq 1$. Es ist $U\alpha = \alpha U^{m^2}$, aber es gilt*

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L U \mid_L \alpha = |A_{m^2}| \left(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha \mid_L U^{m^2} \right). \tag{14.5}$$

Daher ist für diese Wahl von $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha$ der Ansatz (14.4) nicht unabhängig von der Wahl der Vertreter, und damit nicht wohldefiniert.

Beweis. Für die linke Seite von (14.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L U \mid_L \alpha =& \frac{1}{|A|} \sum_{\mu,\nu \in A} e(\mu^2/2 + (\mu, \lambda - \nu)) \mathfrak{e}_\nu \mid_L \alpha \\ =& \frac{1}{|A|} \sum_{\mu,\nu \in A} e(m^2\mu^2/2 + (\mu, m^2\lambda - m^2\nu)) \mathfrak{e}_{m^2\nu}. \end{aligned}$$

Man kann die Variable $\nu \in A$ in der Form $\nu = \nu'/m^2 + \nu''$ schreiben, wobei $\nu' \in A^{m^2}$ und $\nu'' \in A_{m^2}$. Damit ergibt sich für den letzten Ausdruck

$$\frac{|A_{m^2}|}{|A|} \sum_{\mu \in A} \sum_{\nu' \in A^{m^2}} e(m^2\mu^2/2 + (\mu, m^2\lambda - \nu')) \mathfrak{e}_{\nu'}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha \mid_L U^{m^2} =& \mathfrak{e}_{m^2\lambda} \mid_L U^{m^2} \\ =& \frac{1}{|A|} \sum_{\mu,\nu \in A} e(m^2\mu^2/2 + (\mu, m^2\lambda - \nu)) \mathfrak{e}_\nu \\ =& \frac{1}{|A||A_{m^2}|} \sum_{\mu,\nu \in A} \sum_{\mu' \in A_{m^2}} e(m^2(\mu + \mu')^2/2 + (\mu + \mu', m^2\lambda - \nu)) \mathfrak{e}_\nu \\ =& \frac{1}{|A||A_{m^2}|} \sum_{\mu,\nu \in A} e(m^2\mu^2/2 + (\mu, m^2\lambda - \nu)) \sum_{\mu' \in A_{m^2}} e(m^2\mu'^2/2 + (\mu', m^2\lambda - \nu)) \mathfrak{e}_\nu. \end{aligned}$$

Es ist $\mu' \mapsto e(m^2\mu'^2/2 + (\mu', m^2\lambda - \nu))$ ein Charakter von A_{m^2}, so daß die Summe

$$\sum_{\mu' \in A_{m^2}} e(m^2\mu'^2/2 + (\mu', m^2\lambda - \nu))$$

gleich Null ist, sofern nicht der Charakter trivial ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m^2\mu'^2/2 + (\mu', m^2\lambda - \nu) = 0 \pmod 1$ ist, also genau dann, wenn $m^2\lambda - \nu \in A^{m^2*}$ gilt. Gemäß Lemma 1.0.1 ist $A^{m^2*} = A^{m^2}$. Daher ist die obige Summe genau dann ungleich Null, wenn $\nu \in A^{m^2}$ gilt. In diesem Fall ist ihr Wert $|A_{m^2}|$. $\square$

Es stellt sich also die Frage, wie man $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha$ ansetzen muß, um nicht nur eine Fortsetzung von (14.3) zu erhalten, sondern auch eine sinnvolle Fortsetzung auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ durch (14.4) zu erhalten. Die folgenden Lemmata zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen $w \mid_L \alpha$ schon teilweise festgelegt ist.

Lemma 14.1.4. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, $\phi_m : R_N \to R_N$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung, abhängig von m. Es sei weiter*

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha := \sum_{\nu \in A} b_{\nu\lambda}\mathfrak{e}_\nu \in R_N[A]$$

und

$$w \mid_L \alpha := \sum_{\lambda \in A} \phi_m(a_\lambda)(\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha) \tag{14.6}$$

für $w = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda \in R_N[A]$ eine Fortsetzung von (14.3) für beliebige m. Wenn sich dieser Ansatz unabhängig von der Wahl der Vertreter auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ durch (14.4) fortsetzen läßt, so gibt es eine Abbildung $\mu_m : A \to A$, so daß

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha = b_{\mu_m(\lambda)}\mathfrak{e}_{\mu_m(\lambda)} \tag{14.7}$$

und

$$\phi_m(e(-m^2\lambda^2/2)) = e(-(\mu_m(\lambda))^2/2) \tag{14.8}$$

für alle $\lambda \in A$ gilt.

Beweis. Es sei $\gamma = T^{m^2}$ und $\gamma' \in \Gamma$, so daß $\gamma\alpha = \alpha\gamma'$. Dann ist $\gamma' = T$, und es muß

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L T^{m^2} \mid_L \alpha = \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha \mid_L T$$

gelten. Für die linke Seite ergibt sich gemäß der obigen Definition

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L T^{m^2} \mid_L \alpha &= \left(e(-m^2\lambda^2/2)\mathfrak{e}_\lambda\right) \mid_L \alpha \\ &= \phi_{m^2}(e(-m^2\lambda^2/2)) \sum_{\nu \in A} b_{\nu\lambda}\mathfrak{e}_\nu. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha \mid_L T = \sum_{\nu \in A} b_{\nu\lambda} e(-\nu^2/2)\mathfrak{e}_\nu,$$

so daß

$$b_{\nu\lambda}\phi_m(e(-m^2\lambda^2/2)) = b_{\nu\lambda}e(-\nu^2/2) \tag{14.9}$$

für alle $\nu \in A$ gelten muß. Da $\lambda \in A$ beliebig, aber fest, gewählt war, müssen schon alle $b_{\nu\lambda}$ bis auf ein $b_{\mu_m(\lambda)}$ gleich Null sein. $\square$

Bemerkung 14.1.5. *Falls $(m,N)=1$ gilt, so ist $b_{\mu_m(\lambda)}=1$, $\mu_m(\lambda)=m^2\lambda$ und $\phi_m(a_\lambda)=a_\lambda^{\sigma_m^2}$ für $\lambda\in A$ und $a_\lambda\in R_N$.*

Lemma 14.1.6. *Es seien die Abbildungen ϕ_m, μ_m und $w\,|_L\,\alpha$ definiert wie in Lemma 14.1.4. Dann gilt*

$$\mu_m(d\lambda)=d\mu_m(\lambda) \tag{14.10}$$

für alle $d\in\mathbb{Z}$ mit $(N,d)=1$.

Beweis. Wie in Lemma 14.1.4 soll der Ansatz (14.6) unabhängig von der Wahl der Vertreter durch (14.4) fortsetzbar sein auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$.

Es sei $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma^0(m^2)\cap\Gamma_0^0(N)$, $\gamma'\in\Gamma$ mit $\gamma\alpha=\alpha\gamma'$ und

$$\mathfrak{e}_\lambda\,|_L\,\gamma\,|_L\,\alpha=\mathfrak{e}_\lambda\,|_L\,\alpha\,|_L\,\gamma'. \tag{14.11}$$

Dann ist $\gamma'=\begin{pmatrix}a&b/m^2\\cm^2&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(m^2)\cap\Gamma_0^0(N)$, und unter Verwendung von (14.7) und Lemma 4.1.7 liefert die Gleichung (14.11)

$$\phi_m(\chi_L(\gamma))b_{\mu_m(d\lambda)}\mathfrak{e}_{\mu_m(d\lambda)}=b_{\mu_m(\lambda)}\chi_L(\gamma)\mathfrak{e}_{d\mu_m(\lambda)}.$$

Da für alle $d\in\mathbb{Z}$ mit $(d,N)=1$ eine Matrix $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma^0(m^2)\cap\Gamma_0^0(N)$ existiert, muß also

$$\mu_m(d\lambda)=d\mu_m(\lambda)$$

für alle zu N teilerfremden ganzen Zahlen und für alle $\lambda\in A$ gelten. □

Proposition 14.1.7. *Die Diskriminantengruppe A sei zyklisch und die Abbildungen ϕ_m, μ_m und $w\,|_L\,\alpha$ definiert wie im Lemma 14.1.4. Gilt zusätzlich $\phi_m(\zeta_N^a\zeta_N^b)=\phi_m(\zeta_N^a)\phi_m(\zeta_N^b)$ für alle $a,b\in\mathbb{Z}$, und ist weiterhin μ_m ein Homomorphismus, so gilt schon*

1. *$\mu_m(\lambda)=m^2\lambda$ für alle $\lambda\in A$ und*
2. *$\phi_m(e(\lambda^2/2))=e(m^2\lambda^2/2)$ für alle $\lambda\in A$.*

Beweis. **1.** Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, daß jeder Endomorphismus zyklischer Gruppen von der Form $x\mapsto nx$ ist, wobei $n\in\mathbb{Z}$. Da $\mu_m(x)=m^2x$, falls $(m,N)=1$ gilt, muß dies schon für alle $m\in\mathbb{N}$ gelten.

2. Aus Lemma 14.1.4 und der Multiplikativität von ϕ_m folgt

$$\phi_m(e(-\lambda^2/2))^{m^2}=e(-m^2\lambda^2/2)^{m^2},$$

so daß

$$\phi_m(e(-\lambda^2/2))=\zeta_{m^2}e(-m^2\lambda^2/2).$$

Hierbei ist ζ_{m^2} eine m^2-te Einheitswurzel. Da $\phi_m(e(-\lambda^2/2))=e(-m^2\lambda^2/2)$ gilt, wenn $(m,N)=1$ ist, muß ζ_{m^2} jedoch schon gleich 1 sein. □

Korollar 14.1.8. *Es sei $m\in\mathbb{N}$ mit $(m,N)\neq 1$. Ansonsten seien die Voraussetzungen der Proposition 14.1.7 gegeben. Dann läßt sich die Weildarstellung durch den Ansatz* (14.3) *nicht kompatibel auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ fortsetzen.*

Beweis. Wegen Proposition 14.1.7 ist $\left(\sum_{\lambda\in A}a_\lambda\mathfrak{e}_\lambda\right)|_L\,\alpha$ bereits festgelegt. Aus Lemma 14.1.3 folgt sofort die Behauptung. □

Bemerkung 14.1.9. *Falls die Ordnung der Diskriminantengruppe A eine Primzahl ist, folgt schon aus der Bedingung 14.10, daß die Abbildung μ_m von der Form $x\mapsto m^2x$ ist. In diesem Fall braucht man nicht zu fordern, daß μ_m ein Homomorphismus ist.*

14.2 Zum Hecke-Operator

Wie in der Einleitung dieses Kapitels angekündigt, wird vor dem Hintergrund des letzten Abschnitts im folgenden eine Fortsetzung des Slash-Operators $f\ |_{k,L}\ \alpha$ angegeben für alle $m \in \mathbb{N}$.

Definition 14.2.1. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und α wie in (14.1) gegeben. Dann sei für $f = \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$*

$$f\ |_{k,L}\ \alpha := \sum_{\lambda \in A} f_\lambda\ |_k\ \alpha \otimes \mathfrak{e}_\lambda\ |_L\ \alpha, \tag{14.12}$$

wobei

$$\mathfrak{e}_\lambda\ |_L\ \alpha := \mathfrak{e}_{m\lambda} \tag{14.13}$$

sei.

Bemerkung 14.2.2. *1. Es sei m teilerfremd zu N und $(D_m, 1) \in \tilde{S}(N)$. Dann werden durch*

$$\chi(D_m, t) = t\chi_L(s(D_m))$$

und

$$\varsigma(D_m, t) = \begin{cases} t\epsilon_m(-1)^{(m-1)^2/4} \left(\frac{N}{m}\right) \chi(D_m, t), & \textit{falls } \operatorname{sig}(L) \textit{ ungerade,} \\ \chi(D_m, t), & \textit{falls } \operatorname{sig}(L) \textit{ gerade} \end{cases}$$

zwei Charaktere auf der Untergruppe $\{(D_m, t);\ m \in U(N)\}$ von $\tilde{S}(N)$ definiert, wobei χ_L gegeben sein soll durch Theorem 5.4 in [Bo1].

2. Falls $(m, N) = 1$ ist, so stimmt (14.12) bis auf Multiplikation mit dem Charakter $\varsigma(m) = \varsigma(D_m, 1)$ überein mit $f\ |_{k,L}\ J(m^2, 1)$.

Beweis. **1.** Für χ folgt das aus den Eigenschaften von χ_L und Proposition 8.0.20. Für ς folgt dies durch Nachrechnen unter Verwendung von Proposition 8.0.20.

2. Um dies zu sehen, identifiziert man α mit $(\xi(m^2, 1), m, 1)$ (bzw. mit $(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), m)$). Mit analogen Umformungen wie im Beweis von Satz 13.2.11 erhält man

$$\begin{aligned} f\ |_{k,L}\ J(m^2, 1) =& \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \cdot L(m^2, m)\ |_k\ \xi(m^2, 1) \otimes \mathfrak{e}_{m^2\lambda} \\ =& \varsigma(m) \sum_{\lambda \in A} f_{m\lambda}\ |_k\ \xi(m^2, 1) \otimes \mathfrak{e}_{m^2\lambda}. \end{aligned}$$

Da m teilerfremd zu N ist, läßt sich der letzte Ausdruck in der Form

$$\varsigma(m) \sum_{\lambda \in A} f_\lambda\ |_k\ \xi(m^2, 1) \otimes \mathfrak{e}_{m\lambda}$$

schreiben. □

Man beachte, daß die obige Definition von $\varsigma(m)$ für gerade m keinen Sinn macht. Daher wird $\varsigma(m)$ der Definition 14.2.1 nicht hinzugefügt.

Es ist nun möglich, (14.12) auf die folgende Weise auf die Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ fortzusetzen.

Definition 14.2.3. *Es $m \in \mathbb{N}$ und α gegeben durch* (14.1). *Weiter sei $\delta = \gamma\alpha\gamma' \in \Gamma\alpha\Gamma$. Dann definieren wir für $f \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$*

$$f \mid_{k,L} \delta := \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \mid_k \delta \otimes \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma \mid_L \alpha \mid_L \gamma', \tag{14.14}$$

wobei analog zu (4.22) $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma = \varrho_L^{-1}(\gamma)(\mathfrak{e}_\lambda)$ *ist.*

Bemerkung 14.2.4. *Falls $(m, N) = 1$ gilt, so stimmt* (14.14) *bis auf Multiplikation mit dem Charakter ς überein mit dem entsprechenden Slash-Operator aus den Kapiteln 11 und 12.*

Beweis. Es sei $\delta = \gamma\alpha\gamma' \in \Gamma\alpha\Gamma$. Dann ist $\delta\xi(1, m^{-2}) \in \mathscr{S}(N)$ und darstellbar in der Form $\gamma''\xi(a, b, d)$, wobei $\gamma'' \in \Gamma$ und $\xi(a, b, d) \in \mathscr{S}(N)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so daß

$$f \mid_{k,L} \delta = \sum_{\lambda \in A} (f_\lambda \mid_k \gamma''\xi(a, b, d) \mid_k \xi(1, m^2) \cdot L(m^2, m))^{\sigma_{m^2}} \otimes \varrho_L^{-1}(\delta)(\mathfrak{e}_\lambda).$$

Mit den Sätzen 8.0.19 und 8.1.3 läßt sich die erste Komponente des obigen Ausdrucks in der Form

$$[(f_\lambda \cdot L(m^2, m) \cdot J_{m^2}\pi_N(\gamma'')J_{m^2}^{-1}) \mid_k \xi(a, bm^{-2}, d)\xi(1, m^2))^{\sigma_{m^2}}$$

schreiben. Aus Lemma 2.2.12, Satz 6.2.6 und Satz 8.0.22 ergibt sich daraus

$$f_\lambda \cdot L(m^2, m) \mid_k \delta,$$

so daß

$$\begin{aligned} f \mid_{k,L} \delta =& \varsigma(m) \sum_{\lambda \in A} f_{m\lambda} \mid_k \delta \otimes \varrho_L^{-1}(\gamma')\varrho_L^{-1}(\alpha)\varrho_L^{-1}(\gamma)(\mathfrak{e}_\lambda) \\ =& \varsigma(m) \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \mid_k \delta \otimes \varrho_L^{-1}(\gamma')\varrho_L^{-1}(\alpha)\varrho_L^{-1}(\gamma)(\mathfrak{e}_{m^{-1}\lambda}). \end{aligned}$$

Im Unterschied zu $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha$ in (14.14) ist

$$\varrho_L^{-1}(\alpha)(\sum_{\lambda \in A} a_\lambda \mathfrak{e}_\lambda) = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda^{\sigma_{m^2}} \mathfrak{e}_{m^2\lambda},$$

und man hat sich davon zu überzeugen, daß

$$\varrho_L^{-1}(\alpha)\varrho_L^{-1}(\gamma)(\mathfrak{e}_{m^{-1}\lambda}) = \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \gamma \mid_L \alpha$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Es genügt, dies für S und T zu sehen. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L S \mid_L \alpha =& g(L)^{-1} \sum_{\mu \in A} e(-(\mu, \lambda))\mathfrak{e}_{m\mu} \\ =& g(L)^{-1} \sum_{\mu \in A} e(-(m\mu, \lambda))\mathfrak{e}_{m^2\mu} \\ =& \varrho_L^{-1}(\alpha)\varrho_L^{-1}(S)(\mathfrak{e}_{m^{-1}\lambda}). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L T \mid_L \alpha =& e(-\lambda^2/2)\mathfrak{e}_{m\lambda} \\ =& \varrho_L^{-1}(\alpha)\varrho_L^{-1}(T)(\mathfrak{e}_{m^{-1}\lambda}). \end{aligned}$$

∎

Proposition 14.2.5. *Es seien $\gamma, \gamma_1, \gamma', \gamma_1' \in \Gamma$ und $\delta = \gamma\alpha\gamma' = \gamma_1\alpha\gamma_1' \in \Gamma\alpha\Gamma$. Dann gilt*

$$f \mid_{k,L} \gamma\alpha\gamma' = f \mid_{k,L} \gamma_1\alpha\gamma_1'. \tag{14.15}$$

Beweis. Für die erste Komponente von (14.14) ist nichts zu zeigen. Für die zweite Komponente folgt dies aus [BS], Proposition 5.1. □

Definition 14.2.6. *Es sei m eine natürliche Zahl, α definiert wie in* (14.1) *und*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_i \Gamma\delta_i$$

eine Zerlegung von $\Gamma\alpha\Gamma$ in Linksnebenklassen in der Hecke-Algebra $H(GL_2^+(\mathbb{Q}), \Gamma)$.

Dann definiert man den Hecke-Operator $T(m^2)^*$ für $f \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$ durch

$$f \mid_{k,L} T(m^2)^* = m^{2k-2} \sum_i f \mid_{k,L} \delta_i. \tag{14.16}$$

Durch $T(m^2)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ erhält man die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung auf $(M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma \otimes \mathbb{C}$.

Wegen Bemerkung 14.2.4 stimmt der Hecke-Operator $T(m^2)^*$ im Falle $(m, N) = 1$ bis auf Multiplikation mit dem Charakter $\varsigma(m)$ mit den zuvor definierten Hecke-Operatoren überein.

Bemerkung 14.2.7. *1. Es sei $\delta \in \Gamma\alpha\Gamma$ und $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Dann gilt*

$$f \mid_{k,L} \gamma\delta\gamma' = f \mid_{k,L} \gamma \mid_{k,L} \delta \mid_{k,L} \gamma'.$$

2. Der Hecke-Operator $T(m^2)^*$ ist unabhängig von der Wahl der Vertreter δ_i. Außerdem bildet $T(m^2)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ den Raum $M_{k,L}$ auf sich ab.

Beweis. **1.** Diese Aussage folgt aus der Definition 14.2.3 und [BS], Lemma 5.2.

2. Dies folgt mit denselben Überlegungen wie in Proposition 13.1.2 unter Verwendung der ersten Aussage. □

Im folgenden soll die Fourierentwicklung des Hecke-Operators $T(p^2)^*$ für eine Primzahl p berechnet werden. Das folgende Lemma wird für diese Berechnungen benötigt. Es vereinfacht eine bestimmte Gauss-Summe, die einem Gitter L zugeordnet ist.

Lemma 14.2.8. *Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $h \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p. Es sei L ein nicht ausgeartetes gerades Gitter. Es bezeichne D die Dimension von L und R den Rang der Grammatrix von L/pL über $\mathbb{F}_p$. Dann gilt*

$$\sum_{u \in L/pL} e(\frac{h}{p}u^2/2) = \left(\frac{h}{p}\right)^R \sum_{u \in L/pL} e(\frac{1}{p}u^2/2). \tag{14.17}$$

Beweis. Zum Beweis folgen wir Shimura, [Sh2], S. 455-456. Die Werte der quadratischen Form auf L/pL liegen im Körper $\mathbb{F}_p$. Ein Vertretersystem von L/pL ist gegeben durch

$$\{x_1 b_1 + \cdots + x_D b_D;\;\; x_i \in \mathbb{F}_p\},$$

wobei $\{b_1, \dots b_D\}$ eine Basis von L ist. Daher kann man L/pL als quadratischen Raum über $\mathbb{F}_p$ sehen. Es sei $\{e_1, \dots e_D\}$ eine Orthogonalbasis von L/pL bezüglich der Bilinearform $(\cdot, \cdot)$. Wir setzen im folgenden $q_i := (e_i, e_i)$, so daß sich die quadratische Form in dieser Basis durch

$$(\sum_i x_i e_i)^2/2 = \sum_i x_i^2 q_i/2$$

beschreiben läßt. Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen erhält man für die Gauss-Summe aus (14.17)

$$\begin{aligned}\sum_{(x_i)\in\mathbb{F}_p^D} e\left(\frac{h}{p}(\sum_{i=1}^D x_i e_i)^2/2)\right) &= \sum_{(x_i)\in\mathbb{F}_p^D} e(\frac{h}{p}(\sum_{i=1}^D (q_i/2)x_i^2)) \\ &= \prod_{i=1}^D \left(\sum_{x_i\in\mathbb{F}_p} e(\frac{h}{p}(q_i/2)x_i^2)\right).\end{aligned} \tag{14.18}$$

Da der Rang der Grammatrix von L/pL über $\mathbb{F}_p$ gleich R ist, gibt es $D-R$ Elemente e_i der Basis, für die q_i durch p teilbar ist. Für diese Elemente hat die Gauss-Summe $\sum_{x_i\in\mathbb{F}_p} e(\frac{h}{p}(q_i/2)x_i^2)$ den Wert p und ist insbesondere unabhängig von h. Für die restlichen Basiselemente kann man die Formel

$$\sum_{n=0}^{k-1} e(mn^2/k) = \left(\frac{m}{k}\right)\sum_{n=0}^{k-1} e(n^2/k), \quad (m,k)=1,$$

verwenden (siehe [BE], Theorem 1.52), um das h von der Gauss-Summe zu trennen. Damit kann man den letzten Ausdruck von (14.18) in der Form

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{D-R}\left(\sum_{x_i\in\mathbb{F}_p} e((q_i/2)x_i^2/p)\right)\prod_{i=1}^{R}\left(\left(\frac{h}{p}\right)\sum_{x_i\in\mathbb{F}_p} e((q_i/2)x_i^2/p)\right) \\ &= \left(\frac{h}{p}\right)^R \sum_{(x_i)\in\mathbb{F}_p^D} e\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^D (q_i/2)x_i^2\right)\end{aligned}$$

schreiben, was die Behauptung liefert. □

Satz 14.2.9. *Es sei p eine Primzahl und L, D und R seien wie in Lemma 14.2.8 definiert. Es bezeichne $G(L)$ die Gauss-Summe*

$$\sum_{u\in L/pL} e(\frac{1}{p}(u^2/2 + (u,\lambda))),$$

und es sei $f \in M_{k,L}$ mit der Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{\lambda\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(\lambda,n)e(n\tau)\otimes\mathfrak{e}_\lambda.$$

Dann ist

$$f\mid_{k,L} T(p^2)^* = \sum_{\lambda\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2} b(\lambda,n)e(n\tau)\otimes\mathfrak{e}_\lambda,$$

wobei

$$\begin{aligned}
&b(\lambda, n)\\
&= c(p\lambda, p^2 n) + \delta_p(n-\lambda^2/2, R)p^{k-\frac{D}{2}-2}G(L)c(\lambda, n)\\
&+ p^{2k-2} \sum_{\substack{\lambda' \in A_p \\ n-p^2(\lambda/p+\lambda')^2/2 \in p^2\mathbb{Z}}} c(\lambda/p+\lambda', \frac{n-p(\lambda,\lambda')-p^2\lambda'^2/2}{p^2} + (\lambda/p, \lambda') + \lambda'^2/2)
\end{aligned} \tag{14.19}$$

mit

$$\delta_p(n-\lambda^2/2, R) = \begin{cases} \left(\frac{-(n-\lambda^2/2)}{p}\right)\sqrt{p}\epsilon_p, & \textit{falls } R \textit{ und } p \textit{ ungerade sind,} \\ \delta_p(n-\lambda^2/2)-1, & \textit{falls } R \textit{ gerade oder } 0 \textit{ und } p \textit{ ungerade ist,} \\ \delta_p(n-\lambda^2/2)-1, & \textit{falls } p=2 \textit{ ist} \end{cases}$$

und

$$\delta_p(n) = \begin{cases} p, & \textit{falls } \mathrm{ord}_p(n) > 0, \\ 0, & \textit{falls } \mathrm{ord}_p(n) = 0. \end{cases}$$

Dabei soll die Summe über A_p gleich Null sein, falls $\lambda \notin A^p$. Man beachte, daß gleichermaßen $G(L)$ gleich Null ist, falls $\lambda \notin A^p$, wie aus dem Beweis hervorgehen wird.

Beweis. Es genügt, die Aussage für ein $f \in (M_k^{\mathbb{Q}}(\Gamma(N)) \otimes \mathbb{Q}[A])^\Gamma$ zu zeigen.

Es sei $\alpha = (\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)$ oder $\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta_h = (\begin{pmatrix} p & h \\ 0 & p \end{pmatrix}, \sqrt{p})$ oder $\begin{pmatrix} p & h \\ 0 & p \end{pmatrix}$ und $\gamma_b = (\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p)$ oder $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$ je nachdem, ob die Signatur von L ungerade oder gerade ist. Eine Zerlegung der Doppelnebenklasse $\Gamma\alpha\Gamma$ in Linksnebenklassen ist bekanntlich

$$\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\alpha \cup \bigcup_{h \in (p)^*} \Gamma\beta_h \cup \bigcup_{b \in (p^2)} \Gamma\gamma_b,$$

so daß

$$f \mid_{k,L} T(p^2)^* = p^{2k-2} f \mid_{k,L} \alpha + p^{2k-2} \sum_{h \in (p)^*} f \mid_{k,L} \beta_h + p^{2k-2} \sum_{b \in (p^2)} f \mid_{k,L} \gamma_b. \tag{14.20}$$

Für den ersten Summanden ergibt sich mit Definition 14.2.1

$$p^{2k-2} f \mid_{k,L} \alpha = p^{2k-2} \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(p^2\tau) \otimes \mathfrak{e}_{p\lambda}.$$

Wegen der exakten Sequenz (1.4) läßt sich jedes Element $\lambda \in A$ durch $\lambda = \nu/p + \nu'$ darstellen, wobei $\nu \in A^p$ und $\nu' \in A_p$. Damit ergibt sich für die obige Summe

$$\begin{aligned}
&p^{2k-2} \sum_{\nu \in A^p} \sum_{\nu' \in A_p} f_{\nu/p+\nu'}(p^2\tau) \otimes \mathfrak{e}_\nu \\
&= p^{2k-2} \sum_{\nu \in A^p} \sum_{\nu' \in A_p} \sum_{n \in \mathbb{Z}+(\nu/p+\nu')^2/2} c(\nu/p+\nu', n) e(np^2\tau) \otimes \mathfrak{e}_\nu \\
&= p^{2k-2} \sum_{\nu \in A^p} \sum_{\nu' \in A_p} \sum_{n \in p^2\mathbb{Z}+p^2(\nu/p+\nu')^2/2} c(\nu/p+\nu', n/p^2) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\nu.
\end{aligned} \tag{14.21}$$

Es kann $n = m + p^2(\nu/p + \nu')^2/2 \in p^2\mathbb{Z} + p^2(\nu/p + \nu')^2/2$ auch verstanden werden als ein Element aus $\mathbb{Z} + \nu^2/2$, wobei der ganzzahlige Anteil $m + p(\nu, \nu') + p^2\nu'^2/2$ ist. Summiert man also über $\mathbb{Z} + \nu^2/2$, so ergibt sich für die letzte Summe in (14.21)

$$p^{2k-2} \sum_{\nu \in A^p} \sum_{\nu' \in A_p} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+\nu^2/2 \\ n - p^2(\nu/p+\nu')^2/2 \in p^2\mathbb{Z}}} c(\nu/p + \nu', \frac{n - p(\nu, \nu') - p^2\nu'^2/2}{p^2} + (\nu/p, \nu') + \nu'^2/2) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\nu.$$

Setzt man also $p^{2k-2} \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(p^2\tau) \otimes \mathfrak{e}_{p\lambda} = \sum_{\lambda \in A} g_\lambda \otimes \mathfrak{e}_\lambda$ mit $g_\lambda(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\lambda^2/2} b(\lambda, n) e(n\tau)$, so erhält man für den n-ten Fourierkoeffizienten

$$b(\lambda, n) = \tag{14.22}$$

$$\begin{cases} p^{2k-2} \sum_{\substack{\lambda' \in A_p \\ n - p^2(\lambda/p+\lambda')^2/2 \in p^2\mathbb{Z}}} c(\lambda/p + \lambda', \frac{n - p(\lambda, \lambda') - p^2\lambda'^2/2}{p^2} + (\lambda/p, \lambda') + \lambda'^2/2), & \text{falls } \lambda \in A^p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{14.23}$$

Wir berechnen nun den dritten Summanden von (14.20). Man sieht leicht, daß

$$\gamma_b = S\alpha S^{-1}T^b$$

gilt, so daß sich mit Definition 14.2.3

$$p^{2k-2} f \mid_{k,L} \gamma_b = p^{2k-2} \sum_{\lambda \in A} f_\lambda \mid_k \gamma_b \otimes \mathfrak{e}_\lambda \mid_L S \mid_L \alpha \mid_L S^{-1}T^b. \tag{14.24}$$

ergibt. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_\lambda \mid_L S \mid_L \alpha S^{-1} =& \frac{1}{|A|} \sum_{\mu \in A} e((\lambda, \mu)) \sum_{\nu \in A} e(-(p\mu, \nu)) \mathfrak{e}_\nu \\ =& \frac{1}{|A|} \sum_{\nu \in A} \sum_{\mu \in A} e((\lambda - p\nu, \mu)) \mathfrak{e}_\nu \\ =& \sum_{\substack{\nu \in A \\ \lambda = p\nu}} \mathfrak{e}_\nu, \end{aligned}$$

so daß

$$\mathfrak{e}_\lambda \mid_L S \mid_L \alpha \mid_L S^{-1}T^b = \sum_{\substack{\nu \in A \\ p\nu = \lambda}} e(-b\nu^2/2) \mathfrak{e}_\nu$$

gilt. Dies eingesetzt in (14.24), ergibt

$$\begin{aligned} & p^{-2} \sum_{b \in (p^2)} \sum_{\lambda \in A} f_\lambda((\tau + b)/p^2) \otimes (\sum_{\substack{\nu \in A \\ p\nu = \lambda}} e(-b\nu^2/2) \mathfrak{e}_\nu) \\ & = p^{-2} \sum_{\lambda \in A} \sum_{\substack{\nu \in A \\ p\nu = \lambda}} \sum_{n \in \mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(\lambda, n) \left(\sum_{h \in (p^2)} e(nb/p^2) e(-b\nu^2/2) \right) e(n\tau/p^2) \otimes \mathfrak{e}_\nu. \end{aligned}$$

Die innere Summe des obigen Ausdrucks kann wie üblich ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}\sum_{b\in(p^2)} e(nb/p^2)e(-b\nu^2/2) &= \sum_{b\in(p^2)} e(\frac{b(n-(p\nu)^2/2)}{p^2})\\ &= \sum_{b\in(p^2)} e(\frac{b(n-\lambda^2/2)}{p^2})\\ &= \begin{cases} p^2, & \text{falls } n-\lambda^2/2\in p^2\mathbb{Z},\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Die Gleichung $p\nu=\lambda$ besitzt Lösungen genau dann, wenn $\lambda\in A^p$ ist. In diesem Fall sind die Lösungen von der Form $\nu=\lambda/p+\lambda'$, wobei $\lambda'\in A_p$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in A}\sum_{\substack{\nu\in A\\ p\nu=\lambda}}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2\\ n-\lambda^2/2\in p^2\mathbb{Z}}} c(\lambda,n)e(n\tau/p^2)\otimes\mathfrak{e}_\nu\\ &=\sum_{\lambda\in A^p}\sum_{\lambda'\in A_p}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+\lambda^2/2\\ n-\lambda^2/2\in p^2\mathbb{Z}}} c(\lambda,n)e(n\tau/p^2)\otimes\mathfrak{e}_{\lambda/p+\lambda'}\\ &=\sum_{\mu\in A}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+(p\mu)^2/2\\ n-(p\mu)^2/2\in p^2\mathbb{Z}}} c(p\mu,n)e(n\tau/p^2)\otimes\mathfrak{e}_\mu,\end{aligned}\tag{14.25}$$

wobei wir für die letzte Gleichung Gleichung $\mu=\lambda/p+\lambda'$ gesetzt haben. Setzt man schließlich $n=p^2l$ in (14.25) mit $l\in\mathbb{Z}+\mu^2/2$, so erhält man

$$\sum_{\mu\in A}\sum_{l\in\mathbb{Z}+\mu^2/2} c(p\mu,p^2l)e(l\tau)\otimes\mathfrak{e}_\mu.$$

Für den zweiten Summanden muß man zunächst

$$\beta_h=\left(\left(\begin{smallmatrix} r & h\\ s & p\end{smallmatrix}\right),\sqrt{s\tau+p}\right)\alpha U^{-ps}$$

berücksichtigen, wobei $r,s\in\mathbb{Z}$ mit $rp-hs=1$, so daß

$$p^{2k-2}f\mid_{k,L}\beta_h=\sum_{\lambda\in A} f_\lambda\mid_k\beta_h\otimes\left(\mathfrak{e}_\lambda\mid_L\left(\left(\begin{smallmatrix} r & h\\ s & p\end{smallmatrix}\right),\sqrt{s\tau+p}\right)\mid_L\alpha\mid_L U^{-ps}\right).\tag{14.26}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{e}_\lambda\mid_L\left(\left(\begin{smallmatrix} r & h\\ s & p\end{smallmatrix}\right),\sqrt{s\tau+p}\right)$ verwenden wir Shintanis Formeln [Shin], Proposition 1.6. Es sei dazu o. E. $s>0$ angenommen.

$$\begin{aligned}&\mathfrak{e}_\lambda\mid_L\left(\left(\begin{smallmatrix} r & h\\ s & p\end{smallmatrix}\right),\sqrt{s\tau+p}\right)\\ &=\frac{e(-\operatorname{sig}(A)/8)^{\operatorname{sign}(-s)}}{|s|^{M/2}\sqrt{|A|}}\sum_{\mu\in A}\sum_{t\in L/sL} e\left(\frac{-p(\mu+t)^2+2(\mu+t,\lambda)-r\lambda^2}{2s}\right)\mathfrak{e}_\mu.\end{aligned}\tag{14.27}$$

Wie man leicht unter Verwendung von $rp=1+hs$ nachrechnet, kann die Summe über t durch

$$\sum_{t\in L/sL} e\left(\frac{-p(\mu+t)^2+2(\mu+t,\lambda)-r\lambda^2}{2s}\right)=e(-h(\mu,\lambda)+hr\lambda^2/2)\sum_{t\in L/sL} e\left(\frac{-p(\mu-r\lambda+t)^2}{2s}\right)\tag{14.28}$$

vereinfacht werden. Es ist nun möglich, die rechte Summe von (14.28) zu schreiben als Summe über L'/L. Es gilt (siehe [Ba], Abschnitt 5.2)

$$\sum_{r\in L/cL} e\left(-\frac{(\alpha+r)^2}{2c}\right) = e(-\operatorname{sig}(L)/8)\frac{c^{\dim(L)/2}}{\sqrt{|L'/L|}}\sum_{\mu\in L'/L} e(c\mu^2/2+(\alpha,\mu)), \tag{14.29}$$

wobei $\alpha \in L'$ und c eine positive ganze Zahl ist. Um diese Formel auf (14.28) anwenden zu können, muß man das skalierte Gitter $L(p)$ verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in L/sL} e\left(\frac{-p(\mu+t)^2+(\mu+t,\lambda)-r\lambda^2}{2s}\right)\\ =&e(-\operatorname{sig}(L(p))/8)\frac{s^{\dim(L(p))/2}}{\sqrt{|L(p)'/L(p)|}}e(-h(\mu,\lambda)+hr\lambda^2/2)\sum_{\delta\in L(p)'/L(p)} e(ps\delta^2/2+p(\mu-r\lambda,\delta)).\end{aligned} \tag{14.30}$$

Für den Ausdruck $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \left(\left(\begin{smallmatrix} r & h\\ s & p\end{smallmatrix}\right), \sqrt{s\tau+p}\right) \mid_L \alpha \mid_L U^{-ps}$ ergibt sich unter Verwendung von Lemma 4.1.8 nach Sammeln aller Terme in μ

$$\begin{aligned}&\frac{s^{D/2}}{|s|^{D/2}\sqrt{|A|}|A|\sqrt{|L(p)'/L(p)|}}e(hr\lambda^2/2)\\ &\times\sum_{\varrho\in A}\sum_{\nu\in A} e(-ps\nu^2/2+(\nu,-\varrho))\sum_{\delta\in L(p)'/L(p)} e(ps\delta^2/2+(p\delta,-r\lambda))\sum_{\mu\in A} e((\mu,-h\lambda+p\delta+p\nu))\mathfrak{e}_\varrho.\end{aligned} \tag{14.31}$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt

$$\sum_{\mu\in A} e((\mu,-h\lambda+p\delta+p\nu)) = \begin{cases}|A|, & \text{falls } -h\lambda+p\delta+p\nu=0 \pmod{L},\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Damit ist (14.31) gleich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{|A|}\sqrt{|L(p)'/L(p)|}}e(hr\lambda^2/2)\\ &\times\sum_{\varrho\in A}\sum_{\nu\in A} e(-ps\nu^2/2+(\nu,-\varrho))\sum_{\substack{\delta\in p^{-1}L'/L\\ p\delta=h\lambda-p\nu \pmod{L}}} e(ps\delta^2/2+(p\delta,-r\lambda))\mathfrak{e}_\varrho\\ =&\frac{1}{\sqrt{|A|}\sqrt{|L(p)'/L(p)|}}e(hr\lambda^2/2)\\ &\times\sum_{\varrho\in A}\sum_{\nu\in A} e(-ps\nu^2/2+(\nu,-\varrho))\sum_{\substack{\varepsilon\in L'/pL\\ \varepsilon=h\lambda-p\nu \pmod{L}}} e(ps(\frac{1}{p}\varepsilon)^2/2+(\varepsilon,-r\lambda))\mathfrak{e}_\varrho.\end{aligned} \tag{14.32}$$

Aufgrund der Isomorphie $(L'/pL)/(L/pL) \cong L'/L$ hat die Gleichung $\varepsilon = h\lambda - p\nu \pmod{L}$ die Lösung $h\lambda - p\nu + L/pL$, so daß sich die Summe über ε in (14.32) in der Form

$$\begin{aligned}&\sum_{u\in L/pL} e(ps(\frac{1}{p}(u+h\lambda-p\nu))^2/2+(u+h\lambda-p\nu,-r\lambda))\\ &= e(ps\nu^2/2)e((\nu,-hs\lambda)+(\nu,pr\lambda)-rh(\lambda,\lambda))\sum_{u\in L/pL} e(\frac{s}{p}(u+h\lambda)^2/2)\end{aligned}$$

schreiben läßt. Durch die Substitution $u \mapsto hu$ geht die obige Gauss-Summe in

$$\sum_{u \in L/pL} e(\frac{sh^2}{p}(u+\lambda)^2/2) \tag{14.33}$$

über. Aus [Ba], Theorem 5.2.2, und [Sc], Proposition 3.8, folgt, daß diese Gauss-Summe genau dann ungleich Null ist, wenn $\lambda \in A^{p*}$ ist. Wegen Bemerkung 14.2.10 ist es sinnvoll, die Fälle $p = 2$ und p ungerade getrennt zu betrachten.

Falls $p = 2$ ist, ist $h = r = s = 1$, und die Summe in (14.33) gleich

$$e(\frac{1}{2}\lambda^2/2) \sum_{u \in L/pL} e(\frac{1}{2}(u^2/2 + (u,\lambda))).$$

Falls p ungerade ist, so ist die Summe in (14.33) ungleich Null genau dann, wenn $\lambda \in A^p$. Unter Verwendung von Lemma 14.2.8 erhält man daher für (14.33)

$$e(\frac{sh^2}{p}\lambda^2/2)\left(\frac{s}{p}\right)^R \sum_{u \in L/pL} e(\frac{1}{p}u^2/2) = e(\frac{sh^2}{p}\lambda^2/2)\left(\frac{s}{p}\right)^R \sum_{u \in L/pL} e(\frac{1}{p}(u^2/2 + (u,\lambda))).$$

Ersetzt man entsprechend die obige Summe über L'/pL, so erhält man insgesamt für $\mathfrak{e}_\lambda \mid_L \beta_h$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{|A|}\sqrt{|L(p)'/L(p)|}} e(-hr\lambda^2/2) e(\frac{sh^2}{p}\lambda^2/2)\left(\frac{-h}{p}\right)^R G(L) \sum_{\varrho,\nu \in A} e((\nu, \lambda - \varrho))\mathfrak{e}_\varrho \\ &= \frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|L(p)'/L(p)|}} e(-\frac{h}{p}\lambda^2/2)\left(\frac{-h}{p}\right)^R G(L)\mathfrak{e}_\lambda. \end{aligned} \tag{14.34}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &p^{2k-2} \sum_{h \in (p)^*} f \mid_{k,L} \beta_h \\ &= p^{k-2} \sum_{h \in (p)^*} \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(\tau + \frac{h}{p}) \otimes \left(p^{-D/2} e(-\frac{h}{p}\lambda^2/2)\left(\frac{-h}{p}\right)^R G(L)\mathfrak{e}_\lambda\right) \\ &= p^{k-\frac{D}{2}-2} G(L) \sum_{\lambda \in A} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}+\lambda^2/2} c(\lambda,n) \left(\sum_{h \in (p)^*} \left(\frac{-h}{p}\right)^R e(nh/p) e(-\frac{h}{p}\lambda^2/2) \right) e(n\tau) \right) \otimes \mathfrak{e}_\lambda. \end{aligned}$$

Man bestätigt für die Summe über h leicht die folgende Identität:

$$\sum_{h \in (p)*} \left(\frac{-h}{p}\right)^R e(nh/p) e(-h/p\lambda^2) = \delta_p(n - \lambda^2/2, R),$$

wobei $\delta_p(n - \lambda^2/2, R)$ zu Beginn des Satzes definiert worden ist. Man erhält also für den n-ten Fourierkoeffizienten

$$b(\lambda, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda \notin A^{p^*}, \\ p^{k-\frac{D}{2}-2}\delta_p(n - \lambda^2/2, R) G(L) c(\lambda, n), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{14.35}$$

□

Bemerkung 14.2.10. *Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine ungerade Primzahl. Dann gilt $A^{p*} = A^p$.*

Beweis. Zunächst gilt $(p\nu)^2/2 \in p\mathbb{Z}$ für alle $\nu \in A_p$. Denn es ist $(\nu, p\nu) \in \mathbb{Z}$ und $m := p(\nu, p\nu)/2 \in \mathbb{Z}$ für $\nu \in A_p$. Daher gilt $p(\nu, p\nu) \in 2\mathbb{Z}$, und p teilt $p(\nu, p\nu) = 2m$. Da p ungerade ist, teilt p schon $p(\nu, p\nu)/2$.

Andererseits ergibt sich aus den obigen Betrachtungen, daß $2 \mid p(\nu, p\nu)$. Da $(\nu, p\nu) \in \mathbb{Z}$ und p ungerade ist, bedeutet dies $2 \mid (\nu, p\nu)$. Damit gilt
$A^{p*} = \left\{\alpha \in A; \quad (\alpha, \lambda) \equiv p\lambda^2/2 \pmod 1 \text{ für alle } \lambda \in A_p\right\} = A^p$.

Für $p = 2$ gilt die entsprechende Aussage nicht, wie man am Beispiel von Jacobi-Formen sieht. □

Bemerkung 14.2.11. *Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, $\lambda \in A^p, \lambda' \in A_p$ und $n \in \mathbb{Z} + \lambda^2/2$. Gilt $A^{p*} = A^p$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) $n - p^2((\lambda/p + \lambda')^2/2) \in p^2\mathbb{Z}$

ii) $n - p^2(\lambda/p)^2/2 \in p\mathbb{Z}$ *und* $\dfrac{n - p^2(\lambda/p)^2/2 - p^2((\lambda/p, \lambda') + \lambda'^2/2)}{p} \in p\mathbb{Z}.$

Beweis. Da $A^{p*} = A^p$, folgt $p\lambda'^2/2 \in \mathbb{Z}$, so daß $p^2\left[(\lambda/p, \lambda') + \lambda'^2/2\right] \in p\mathbb{Z}$. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 14.2.12. *Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $L = \mathbb{Z}$ mit der quadratischen Form $x \mapsto x^2/2 = -mx^2$. Es ist $L' = \frac{1}{2m}\mathbb{Z}$, und der Raum $M_{k-\frac{1}{2},L}$ ist isomorph zu $J_{k,m}$, dem Raum der Jacobi-Formen vom Gewicht k und Index m (siehe [EZ], Theorem 5.1). Dann gilt für alle ungeraden Primzahlen p und alle $f \in M_{k-\frac{1}{2},L}$*

$$I(f \mid_{k-1/2,L} T(p^2)^*) = (I(f) \mid T_p)\,, \tag{14.36}$$

wobei T_p den Hecke-Operator auf $J_{k,m}$ und I den obigen Isomorphismus bezeichne. Die entsprechende Formel für $I(f) \mid T_p$ findet sich in [EZ], Theorem 4.5 oder in [Sko], S. 72, falls $(m, p) = 1$ gilt, andernfalls in [EZ], (24) auf Seite 56. Für $p = 2$ gilt die Formel (14.36) *nur, falls 2 den Index m teilt.*

Beweis. Es ist $A = L'/L = \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ und $\lambda^2/2 = -r^2/4m$ bzw. $(\lambda, \lambda') = -rr'/2m$ für $\lambda = r/2m, \lambda' = r'/2m \in A$. Ein Vertretersystem von A ist durch $\{i/2m; \quad 1 \le i \le 2m\}$ gegeben. Die Dimension des Gitters ist 1.

Es sei $f \in M_{k-1/2,L}$. Mit Hilfe der Variablensubstitution $N = 4mn$ für $n \in \mathbb{Z} - \lambda^2/2$ erhält man für die Fourierentwicklung von f:

$$\sum_{\lambda \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} - \lambda^2/2 \\ n \ge 0}} c(\lambda, n) e(n\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda = \sum_{\lambda \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N \ge 0 \\ N \equiv -4m\lambda^2/2 \pmod{4m}}} c(\lambda, N/4m) e(N/4m\tau) \otimes \mathfrak{e}_\lambda.$$

Bekanntlich läßt sich jede Jacobi-Form $\phi = \sum_{\substack{l, r \in \mathbb{Z} \\ 4ml - r^2 \ge 0}} c(l, r) e(l\tau) e(rz) \in J_{k,m}$ in Termen von Theta-Reihen $\vartheta_{m,\lambda}(\tau, z) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \lambda \pmod{2m}}} e(r^2/4m\tau) e(rz)$ schreiben. Genauer gilt

$$\phi(\tau, z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N \ge 0 \\ N \equiv -r^2 \pmod{4m}}} c((N + r^2)/4m, r) e(N/4m\tau) \cdot \vartheta_{m,r}(\tau, z).$$

Der Isomorphismus I ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\tau) = \sum_{r/2m \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N \geq 0 \\ N \equiv -r^2 \pmod{4m}}} c(r/2m, N/4m) e(N/4m\tau) \otimes \mathfrak{e}_{r/2m} \mapsto \\ \phi(\tau, z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N \geq 0 \\ N \equiv -r^2 \pmod{4m}}} c((N+r^2)/4m, r) e(N/4m\tau) \cdot \vartheta_{m,r}(\tau, z). \end{aligned} \tag{14.37}$$

Der $N/4m$-te Fourierkoeffizient $c(r/2m, N/4m)$ der vektorwertigen Modulform entspricht also dem $(N+r^2)/4m$-ten Fourierkoeffizienten $c((N+r^2)/4m, r)$ der Jacobi-Form,

$$c(r/2m, N/4m) \longleftrightarrow c((N+r^2)/4m, r). \tag{14.38}$$

1. $p \mid m$: In diesem Fall ist A^p durch $A^p = \{pr/2m; \quad 1 \leq r \leq q\}$
und A_p durch $A_p = \{qr/2m; \quad 1 \leq r \leq p\}$ explizit gegeben, wobei $q = 2m/p$ sei. Außerdem ist $R = 0$, und es gilt $A^{p*} = A^p$ für *alle* Primzahlen p (siehe Bemerkung 14.2.10). Für $p = 2$ ist $A_2 = \{1, 1/2\}$ und $2(1/2)^2/2 = -2m/4 \in \mathbb{Z}$, da 2 den Index m teilt.

Verwendet man die zu Beginn des Beweises eingeführte Notation zusammen mit Bemerkung 14.2.11, so ist
$f \mid_{k-1/2,L} T(p^2)^* = \sum_{r \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N \geq 0 \\ N \equiv -r^2 \pmod{4m}}} b(r/2m, N/4m) e(N/4m\tau) \otimes \mathfrak{e}_{r/2m}$ mit

$$\begin{aligned} & b(r/2m, N/4m) \\ & = c(pr/2m, p^2N/4m) + \delta_p((N+r^2)/4m, R) p^{k-3} G(L) c(r/2m, N/4m) \\ & + p^{2k-4} \delta_p((N+r^2)/4m) \\ & \times \sum_{\substack{qr'/2m \in A_p \\ \frac{(N+r^2)/4m + rr' + mr'^2}{p} \in p\mathbb{Z}}} c\left((r/2m)/p + qr'/2m, \frac{N/4m + rr' + mr'^2}{p^2} - \frac{(r/p)qr'}{2m} - \frac{q^2r'^2}{4m} \right). \end{aligned}$$

Ordnet man jedem Fourierkoeffizienten via der Zuordnung (14.38) den entsprechenden Fourierkoeffizienten der Jacobi-Form zu, so erhält man

$$\begin{aligned} & b((N+r^2)/4m, r) \\ & = c(p^2(N+r^2)/4m, pr) + \delta_p((N+r^2)/4m, R) p^{k-2} c((N+r^2)/4m, r) \\ & + p^{2k-4} \delta_p((N+r^2)/4m) \\ & \times \sum_{\substack{qr'/2m \in A_p \\ \frac{(N+r^2)/4m + rr' + mr'^2}{p} \in p\mathbb{Z}}} c\left(\frac{(N+r^2)/4m + rr' + mr'^2}{p^2}, (r+2mr')/p \right), \end{aligned}$$

wobei für die Gauss-Summe

$$\begin{aligned} G(L) = & \sum_{u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{p}(-mu^2 - ur)\right) \\ = & p \end{aligned}$$

gilt, da p den Index m und r teilt. Letzteres gilt, da $r/2m \in A^p$. Ein Vergleich mit [EZ], (24) auf Seite 56, liefert die Behauptung. Man beachte bei diesem Vergleich, daß n in (24) dem $(N+r^2)/4m$ in obiger Formel entspricht (siehe dazu auch [EZ], § 5).

2. $(4m,p)=1$: In diesem Fall ist $R=1$ und

$$f\mid_{k-1/2,L} T(p^2)^* = \sum_{r\in\frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \sum_{\substack{N\geq 0\\ N\equiv -r^2 \pmod{4m}}} b(r/2m,N/4m)e(N/4m\tau)\otimes \mathfrak{e}_{r/2m}$$

mit

$$\begin{aligned} &b(r/2m,N/4m)\\ &= c(p(r/2m),p^2(N/4m)) + \epsilon_p^{\operatorname{sig}(A)+\left(\frac{-1}{|A|}\right)}\left(\frac{p}{|A|2^{\operatorname{sig}(A)}}\right)p^{k-2}\left(\frac{-N/4m}{p}\right)c(r/2m,N/4m)\\ &+ p^{2k-3}c((r/2m)/p,(N/4m)/p^2), \end{aligned}$$

wobei $c((r/2m)/p,(N/4m)/p^2)=0$, falls $\operatorname{ord}_{p^2}(N/4m)=0$ gilt. Mit (14.38) erhält man für den entsprechenden Fourierkoeffizienten der Jacobi-Form

$$\begin{aligned} &b((N+r^2)/4m,r)\\ &= c(p^2(N+r^2)/4m,pr) + \epsilon_p^{\operatorname{sig}(A)+\left(\frac{-1}{|A|}\right)}\left(\frac{p}{|A|2^{\operatorname{sig}(A)}}\right)p^{k-2}\left(\frac{-N/4m}{p}\right)c((N+r^2)/4m,r)\\ &+ p^{2k-3}c(((N+r^2)/p^2)/4m,r/p), \end{aligned}$$

wobei $c((N+r^2)/p^2)/4m,r/p)=0$, falls $\operatorname{ord}_{p^2}((N+r^2)/4m)=0$ gilt (man beachte $\operatorname{ord}_{p^2}(N/4m)=0 \Longleftrightarrow \operatorname{ord}_{p^2}((N+r^2)/4m)=0$).

Vergleicht man dies mit [Sko], (30), so bleibt zu zeigen, daß

$$\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{p}{m}\right)\epsilon_p^{-1+\left(\frac{-1}{2m}\right)} = 1$$

gilt. Hiervon überzeugt man sich leicht mittels des Reziprozitätsgesetzes. □

Proposition 14.2.13. *Es sei* $\beta = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&m^2\end{smallmatrix}\right),m\right)\in \widetilde{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ *(bzw.* $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&m^2\end{smallmatrix}\right)\in GL_2^+(\mathbb{Q})$*) und* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *das Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}[A]$*. Dann gilt*

$$\langle \mathfrak{e}_\lambda \mid_L \alpha, \mathfrak{e}_\mu\rangle = \langle \mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\mu \mid_L \beta\rangle. \tag{14.39}$$

Beweis. Mit (14.13) erhält man

$$\langle \mathfrak{e}_{m\lambda},\mathfrak{e}_\mu\rangle = \delta_{m\lambda,\mu},$$

wobei $\delta_{m\lambda,\mu}$ das Kronecker-Symbol meint. Andererseits folgt mit [BS], Proposition 5.3,

$$\langle \mathfrak{e}_\lambda, \sum_{\substack{\nu\in A\\ m\nu=\mu}} \mathfrak{e}_\nu\rangle = 1 \Longleftrightarrow m\lambda=\mu,$$

so daß die Behauptung folgt. □

Proposition 14.2.14. *Es sei* $M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ *der Raum aller vektorwertigen Modulformen bzgl.* ϱ_L*, die rationale Fourierkoeffizienten besitzen. Weiter seien* $f,g\in M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$*, wobei* f *oder* g *eine Spitzenform sei,* β *definiert wie in Proposition 14.2.13. Weiter sei* $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap\Gamma(N)^*$ *und* $(\cdot,\cdot)_{\Gamma'}$ *das Petersson-Skalarprodukt. Dann gilt*

$$(f\mid_{k,L}\alpha, g)_{\Gamma'} = (f, g\mid_{k,L}\beta)_{\Gamma'}. \tag{14.40}$$

Außerdem hängen $(f\mid_{k,L}\alpha,g)_{\Gamma'}$ *und* $(f,g\mid_{k,L}\beta)_{\Gamma'}$ *nur von der Doppelnebenklasse von* α *bzw.* β *ab.*

Beweis. Es ist $f\,|_{k,L}\,\alpha \in M_{k,L}(\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap\Gamma)$ (oder eine Spitzenform zu $\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap\Gamma$) und damit

$$\begin{aligned}(f\,|_{k,L}\,\alpha, g)_{\Gamma'} =&\frac{1}{[\widetilde{\Gamma}(1):\Gamma']}\int_{\Gamma'\backslash\mathbb{H}}\langle f\,|_{k,L}\,\alpha, g\rangle y^k\frac{dx\,dy}{y^2}\\ =&\frac{1}{[\widetilde{\Gamma}(1):\Gamma']}\sum_{\lambda,\mu\in A}\left(\int_{\Gamma'\backslash\mathbb{H}}(f_\lambda\,|_k\,\alpha)(\tau)\overline{g_\mu(\tau)}y^k\frac{dx\,dy}{y^2}\right)\langle\mathfrak{e}_{m\lambda},\mathfrak{e}_\mu\rangle.\end{aligned}$$

Da die Komponentenfunktionen $f_\lambda\,|_k\,\alpha$ und g_μ aus $M_k(\Gamma')$ bzw. $S_k(\Gamma')$ sind, ist das Integral in der Klammer zusammen mit dem Faktor vor der Summe gleich dem Petersson-Skalarprodukt auf $M_k(\Gamma')$. Daher folgt zusammen mit Proposition 14.2.13 für den letzten obigen Ausdruck

$$\frac{1}{[\widetilde{\Gamma}(1):\Gamma']}\sum_{\lambda,\mu\in A}\left(\int_{\Gamma'\backslash\mathbb{H}}(f_\lambda)(\tau)\overline{(g_\mu\,|_k\,\beta)(\tau)}y^k\frac{dx\,dy}{y^2}\right)\langle\mathfrak{e}_\lambda,\mathfrak{e}_\mu\,|_L\,\beta\rangle = (f, g\,|_{k,L}\,\beta)_{\Gamma'}.$$

Der Beweis für die zweite Aussage verläuft wie im klassischen Fall. Die wesentliche Idee ist die Anwendung der Variablentransformation $\tau\mapsto\gamma^{-1}\tau$, wobei $\gamma\in\Gamma(1)$ ist. Dabei ist zu beachten, daß die Weildarstellung unitär ist bzgl. des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Satz 14.2.15. *Für jede positive Zahl $m\in\mathbb{Z}$ ist der Hecke-Operator $T(m^2)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ eine lineare Abbildung von $M_{k,L}$ auf sich, die selbstadjungiert ist bezüglich des Petersson-Skalarproduktes.*

Beweis. Es ist nur die letzte Aussage zu zeigen. Aufgrund der $\mathbb{C}$-Linearität (bzw. Antilinearität) des Skalarproduktes genügt es, dies für Modulformen $f,g\in M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ und die Operatoren $T(m^2)^*$ zu zeigen. Der Beweis dafür verläuft analog zu dem im Fall skalarwertiger Modulformen. Verwendet man Proposition 14.2.14, so lassen sich alle Schritte Wort für Wort übertragen. □

Satz 14.2.16. *Es seien $m,n\in\mathbb{Z}$ zwei positive Zahlen mit $(m,n)=1$. Dann gilt*

$$(T(m^2)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}})(T(n^2)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = (T(m^2n^2)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}}).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für die Operatoren $T(m^2)^*$ auf $M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ zu zeigen. Falls m und n beide koprim sind zur Stufe N, so folgt dies aus der Definition des Hecke-Operators und den Eigenschaften der Hecke-Algebra des Paares $(\mathcal{Q}_1(N),\Gamma(1))$ bzw. $(\mathcal{Q}_2(N),\Delta)$.

Falls m und n nicht koprim zu N sind, so hat man keine Hecke-Algebra. In diesem Fall zeigt man die Aussage direkt durch Rückgang auf die Definition 14.2.6. Unter Verwendung von Proposition 5.4 aus [BS] verläuft der Beweis dann wie im Falle skalarwertiger elliptischer Modulformen. □

Satz 14.2.17. *Die Familie $\{T(m^2)^*\otimes\mathrm{id}_C;\quad (m,N)=1\}$ bildet eine kommutative Unteralgebra von $\mathrm{End}(M_{k,L})$. Die Operatoren $T(m^2)^*\otimes\mathrm{id}_C$ sind alle selbstadjungiert bzgl. des Petersson-Skalarproduktes auf dem Raum $S_{k,L}$.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 13.2.14 und 14.2.15. □

Korollar 14.2.18. *Der Raum der Spitzenformen $S_{k,L}$ besitzt eine Basis aus simultanen Eigenformen bzgl. der Familie $\{T(m^2)^*\otimes\mathrm{id}_C;\quad (m,N)=1\}$.* □

Literaturverzeichnis

[Ba] A. Barnard, *The Singular Theta Correspondence, Lorentzian Lattices and Borcherds-Kac-Moody Algebras*, Ph.D. Dissertation, U.C. Berkeley,(2003).

[BE] B. Berndt, R. Evans and K. Williams, *Gauss and Jacobi sums*, Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts, 21, Wiley, (1998).

[Boe] S. Böcherer, *Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe*, J. Reine Angew. Math. 362 (1985), 146–168.

[Bo1] R. Borcherds, *Reflection groups of Lorentzian lattices*, Duke Math. J. **104** (2000), 319–366.

[Bo2] R. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[Bo] S. Bosch, *Algebra*, 2. Auflage, Springer-Verlag.

[Br1] J. H. Bruinier, *Borcherds products on O(2,l) and Chern classes of Heegner divisors*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1780, Springer-Verlag (2002).

[BB] J. H. Bruinier and M. Bundschuh, *On Borcherds products associated with lattices of prime discriminant*, Ramanujan J. **7** (2003), 49–61.

[BS] J. H. Bruinier and O. Stein, *The Weil representation and Hecke operators on vector valued modular forms*, preprint (2007).

[DN] K. Doi and H. Naganuma, *On the functional equation of certain Dirichlet series*, Invent. Math. **9**, (1969/1970), 1–14.

[Do] L. Dornhoff, *Group Rerpresentation Theory (in 2 parts)*, Part A, Pure and Applied Mathematics, Dekker Verlag (1971).

[Eb] W. Ebeling, *Lattices and codes.* A course partially based on lectures by F. Hirzebruch. Second revised edition. Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig (2002).

[EZ] M. Eichler and D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. **55**, Birkhäuser (1985).

[Fe] H. Feldmann, *Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8**, (1931), 323 – 341.

[He1] E. Hecke, *Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6**, (1928), 235 – 257.

[He2] E. Hecke, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit elliptischer Produktentwicklung II*, Math. Ann. **114**, (1937), 315 – 351.

[Ka] N. Katz, *p-adic Properties of Modular Forms*, in Modular Functions of One Variable *III*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **350** (1973), 69–190.

[La] S. Lang, *Elliptic functions*, Springer Verlag (1973).

[Ko] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, 2nd Edition, Springer-Verlag, (1993).

[Ku] E. Kunz, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Vieweg Verlag, (1997).

[McG] W. J. McGraw, *The rationality of vector valued modular forms associated with the Weil representation*, Math. Ann. **326** (2003), 105–122.

[McG1] W. J. McGraw, *Arithmetic properties of modular forms and the Weil representation*, PhD-Thesis University of Maryland, 2001.

[MH] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **73**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1973).

[Mi] T. Miyake, *Modular forms*, Springer-Verlag, (1989).

[No] A. Nobs, *Die irreduziblen Darstellungen von $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, insbesondere $GL_2(\mathbb{Z}_2)$*, Math. Ann. **229**, (1977), 113–133.

[NW] A. Nobs and J. Wolfart, *Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$*, insbesondere* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$. II. Teil, Comment Math. Helvetici **51** (1976), 491–526.

[Ri] Paolo Ribbenboim, *Classical Theory of Algebraic Numbers*, Universitext, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (2001)

[Sc] N. R. Scheithauer, *The Weil representation of $SL_2(\mathbb{Z})$ and some applications*, preprint (2006).

[Sc1] N. R. Scheithauer, *On the classification of automorphic products and generalized Kac-Moody algebras*, Invent. Math **164**, (2006), 641–678.

[Su] I. Schur, *Untersuchung über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **132**, (1907), 85–137.

[Sh1] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, Princeton (1971).

[Sh2] G. Shimura,*On modular forms of half integral weight*, Ann. Math. **97**, (1973), 440–481.

[Shin] T. Shintani, *On the construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83–126.

[Sko] N.-P. Skoruppa, *Über den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts*, Dissertation, Universität Bonn.

[Sp] H. Spies, *Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod q^n durch die ganzen Modulformen gerader Dimension*, Math. Ann. **111**, 327 – 354.

[SS] J.-P. Serre and H. Stark, Modularforms of Weight $\frac{1}{2}$, in *Modular Functions of One Variable VI*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **627** (1977), 27–67.

[Te] A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications*, London Mathematical Society Student Texts 43, Cambridge University Press, 1999.

[Wei] A. Weil, *Sur certains groupes d'operateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964), 134-211.

Symbolverzeichnis

$(\cdot,\cdot)$ das Bilinearprodukt auf L

$(\cdot,\cdot)_{\Gamma'}$ Petersson-Skalarprodukt auf dem Raum $S_{k,L}(\Gamma')$

α_D ein Element in $U(ND)$, Seite 24

$\mathbb{C}[L'/L]$ der Gruppenring der Gruppe L'/L, Seite 31

$\mathcal{G}(N)$ eine Untergruppe von $GL_2^+(\mathbb{Q})$, Seite 17

$\mathcal{G}_1(N)$ eine Gruppenerweiterung von $\mathcal{G}(N)$ durch $U(N)$

$\mathcal{G}_2(N)$ eine Gruppenerweiterung von $\mathcal{G}_1(N)$, Seite 77

$\mathcal{H}(N)$ eine Gruppenerweiterung der Gruppe $\mathcal{G}(N)$ durch $\{\pm 1\}$, Seite 38

$\mathcal{J}(N)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(N)$, Seite 17

$\mathcal{J}_1(N)$ eine Gruppenerweiterung von $\mathcal{J}(N)$ durch $U(N)$,, Seite 74

$\mathcal{Q}(N)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(N)$, Seite 17

$\mathcal{Q}_1(N)$ eine Gruppenerweiterung von $\mathcal{Q}(N)$ durch $U(N)$

$\mathcal{Q}_2(N)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}_2(N)$, Seite 78

$\mathcal{S}(N)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(N)$, Seite 17

$\mathcal{S}_2(N)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}_2(N)$, Seite 78

$\chi_L(g)$ ein Charakter von $\widetilde{\Gamma}_0(N)$, Seite 33

Δ $= L(\widetilde{\Gamma}(1))$, Seite 77

ϵ_d eine vierte Einheitswurzel, Seite 20

η ein Korand, Seite 29

$\mathfrak{e}_\lambda$ ein Element der Standardbasis von $\mathbb{C}[L'/L]$

$\mathrm{Gal}(L/K)$ Galois Gruppe der Körpererweiterung L/K

Γ $= \Gamma(1)$ oder $L(\widetilde{\Gamma}(1))$, Seite 79

$\Gamma(1)$ $= SL_2(\mathbb{Z})$

$\Gamma(N)$ Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N

$\Gamma(N)^*$ ein Normalteiler von $\widetilde{\Gamma}(1)$

$\mathbb{H}$ die komplexe obere Halbebene

$\kappa(r)$ eine Konstante, Seite 55

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[A]$

$\left(\frac{a}{b}\right)$ das Kronecker-Symbol der ganzen Zahlen a und b

$\mathfrak{M}(N)$ ein induktiver Limes, Seite 73

$\mathfrak{m}(N)$ ein induktiver Limes , Seite 63

$\mathscr{G}(N)$ $= \mathcal{G}(N)$ oder $\mathcal{G}_2(N)$, Seite 79

$\mathscr{J}(N)$ $= \mathcal{J}(N)$ oder $\mathcal{J}_2(N)$, Seite 79

$\mathscr{Q}(N)$ $= \mathcal{Q}(N)$ oder $\mathcal{Q}_2(N)$, Seite 79

$\mathscr{S}(N)$ $= \mathcal{S}(N)$ oder $\mathcal{S}_2(N)$, Seite 79

$|_k$ der gewöhnliche Slash-Operator, Seite 20

$|_k \otimes \varrho_L^{-1}$ eine Operation auf $V(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C}[A]$, Seite 67

$|_L$ $= \varrho_L^{-1}$

$|_{k,L}$ Slash-Operator vom Gewicht k zur Weildarstellung, Seite 67

$\mathbb{N}(N)$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, Seite 63

ω Kozykel bestimmt durch die Wurzel von j , Seite 27

$\omega_{\mathcal{G}(N)}$ ein Kozykel der Gruppe $\mathcal{G}(N)$, Seite 38

$\omega_{G(N)}$ ein Kozykel von $G(N)$, Seite 35

$\omega_{S(N)}$ ein Kozykel definiert durch den Schnitt s, Seite 28

π_N komponentenweise Reduktion modulo N , Seite 17

ψ_D , Seite 24

ρ eine Darstellung der Gruppe $\tilde{S}(N)$, Seite 46

ρ_α eine zu ρ konjugierte Darstellung von $\tilde{S}(N)$, Seite 46

ρ_L die Weildarstellung, Seite 31

σ_α ein Element aus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$

$\tilde{G}(N)$ eine Gruppenerweiterung der Gruppe $G(N)$ durch $\{\pm 1\}$, Seite 36

$\varsigma(p)$ eine Konstante, Seite 92

$\widetilde{S}(N)$ eine Gruppenerweiterung von $S(N)$ durch $\{\pm 1\}$, Seite 29

$\xi(m,n)$ $= \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right)$ oder $(\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right), t\sqrt{n})$, Seite 79

ζ_N eine primitive N-te Einheitswurzel, Seite 15

A^n eine Untergruppe von $A = L'/L$, Seite 15

A^{n*} eine Nebenklasse von A^n in $A = L'/L$, Seite 16

A_n eine Untergruppe von $A = L'/L$, Seite 15

D_r eine Matrix in $S(N)$, Seite 17

$f \cdot (A,t)$ $= \rho(A)(f)$, Seite 46

$f \cdot (J_\alpha, 1)$ Operation von $\tilde{J}(N)$ auf $M_k^{R_N}(\Gamma(N))$, Seite 47

$f \cdot A$ $= f\mid_k (p \circ s)(A)$, Seite 46

$G(N)$ $= GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, Seite 16

$g_d(L)$ eine Gauss-Summe, Seite 32

i eine Einbettung, Seite 28

$J(\gamma,\tau)$ Automorphiefaktor für $\Gamma_0(4)$, Seite 20

$j(M,\tau)$ $= \sqrt{c\tau + d}$, Seite 19

$J(m,n)$ $= \xi(m,n)$ oder $(\xi(m,n), r, t')$, Seite 79

$J(N)$ Untergruppe von $G(N)$, Seite 17

J_α $= J(\alpha, 1)$, Seite 79

J_r eine Matrix in $J(N)$, Seite 17

k eine ganze oder halbganze Zahl

L ein nicht ausgeartetes gerades Gitter

L eine Einbettung von $\widetilde{\Gamma}(1)$, Seite 38

L' das zu L duale Gitter

$L(\alpha, r)$ ein Operator auf dem Raum $M_k(\Gamma(N))$, Seite 55

$M_k(\Gamma(N))$ Raum der Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe

$M_k^R(\Gamma(N))$ Unterraum von $M_k(\Gamma(N))$, Seite 21

$M_{k,L}$ Raum der Modulformen vom Gewicht k zur $\widetilde{\Gamma}(1)$ und ϱ_L

$M_{k,L}(\Gamma')$ Raum der Modulformen vom Gewicht k zu Γ' und ϱ_L

$M_{k,L}^{\mathbb{Q}}$ Modulformen aus $M_{k,L}$ mit rationalen Fourierkoeffizienten, Seite 112

N	eine natürliche Zahl, häufig die Stufe des Gitters L
p	eine Projektion, Seite 28
P_1	eine Projektionsabbildung, Seite 77
P_2	eine Projektionsabbildung , Seite 77
R_d	$= ST^dS^{-1}T^aST^d \in \Gamma(1)$, Seite 32
R_N	$= \mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]$, Seite 15
s	ein Schnitt, Seite 28
$S(N)$	$= SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, Seite 17
S_r	eine Matrix in $G(N)$, Seite 17
$S_{k,L}$	Unterraum der Spitzenformen von $M_{k,L}$
$S_{k,L}(\Gamma')$	Unterraum der Spitzenformen von $M_{k,L}(\Gamma')$
$T(m^2)^*$	$= T(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), m)$ oder $T(\left(\begin{smallmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1, m, 1)$, Seite 96
T_ξ	Hecke-Operator zur Doppelnebenklasse $\Delta\xi\Delta$, Seite 88
$T_{(g,r)}$	Hecke-Operator zur Doppelnebenklasse $\Gamma(1)(g,r)\Gamma(1)$, Seite 86
$U(N)$	$= (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$
$V(\mathbb{H})$	komplexwertige Funktionen auf der oberen Halbebene , Seite 15
$V(\mathbb{H})_L$	Abbildungen von der oberen Halbebene nach $\mathbb{C}[A]$
$x^2/2$	$= \frac{1}{2}(x,x)$, die quadratische Form auf L

Erklärung

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschlielich Tabellen, Karten und Abbildungen-, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; da diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie - abgesehen von den unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht ist sowie, da ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde.

Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. J. H. Bruinier betreut worden.