Singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Eva Nowak

aus Waldbröl

Hundt Druck GmbH, Köln

2008

Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Thorbergsson Prof. Dr. U. Semmelmann
Tag der mündlichen Prüfung:	24. Juni 2008

Abstract

The very broad concept of a singular Riemannian foliation is based on the well understood model of the orbit decomposition of an isometric group action on a Riemannian manifold. Although locally well understood, the global description of such a foliation in general seems to be unaccessible without additional assumptions on the structure of the manifold or the leaves.

This work develops in the first part the theory of properly embedded leaves, which leads to the existence of global tubular neighbourhoods and to the global description as a stratification by types of leaves. The second part deals with the further restriction to a foliation without horizontal conjugate points, which equals the variationally completeness concept within the model. Therefrom, we deduce a global geometric description – the focal points of the leaves are exactly the singular points – as well as a topological one: tautness of regular leaves.

Kurzzusammenfassung

Der weit gefasste Begriff einer singulären Riemannschen Blätterung ist eine Verallgemeinerung des bekannten Modells einer Orbitblätterung einer isometrischen Liegruppenwirkung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Obwohl die lokale Beschreibung einer solchen Blätterung detailliert möglich ist, scheint es unerreichbar, ohne zusätzliche Annahmen globale Aussagen über die Struktur der Mannigfaltigkeit oder der Blätter herzuleiten.

Zu Anfang dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Theorie eigentlich eingebetteter Blätter; wir leiten die Existenz einer globalen Tubenumgebung her, und wir erreichen eine globale Beschreibung der Mannigfaltigkeit als Stratifizierung nach Blatt-Typen. Dann wird die Zusatzvoraussetzung, dass die Blätterung keine horizontal konjugierten Punkte besitzt, untersucht. Diese entspricht im o.g. Modell der variationellen Vollständigkeit der Wirkung und ermöglicht eine globale geometrische Beschreibung der Blätterung: Fokalpunkte der Blätter sind genau die singulären Punkte. Als topologisches Resultat beweisen wir damit die Tautheit der Blätter.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

1 Präliminarien **1**
1.1 Singuläre Riemannsche Blätterungen; Notation 1
Lokale Beschreibung singulärer Riemannscher Blätterungen 1
Schieben entlang der Blätter 4
1.2 Fokal-, Schnittpunkte und der Schnittort eines Blattes 4

2 Eigentlich eingebettete Blätter **7**
2.1 Existenz einer globalen Tubenumgebung 7
2.2 (Blatt-)Holonomie und Ausnahmeblätter 10
2.3 Eine Stratifizierung von Σ_{aus} und von M 15

3 Die Eigenschaft „ohne horizontal konjugierte Punkte“ **19**
3.1 Tangentiale Jacobifelder; Homothetien 20
3.2 Singuläre Punkte und Fokalpunkte 23

4 Tautheit **29**
4.1 Taute Einbettungen 30
4.2 Die Topologie singulärer Riem. Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte 32

Anhang **39**
A Morse-Sturm-Systeme und das verallgemeinerte Index-Theorem 39

Literaturverzeichnis **41**

Einleitung

Die erste begriffliche Festlegung der heutzutage reichhaltigen und vielfältigen Theorie der Blätterungen wurde im Jahr 1944 von Ehresmann und Reeb, [ER44], im Zusammenhang mit der Untersuchung von Integralmannigfaltigkeiten von Distributionen vorgenommen. Eine *Blätterung* $\mathcal{F}$ der Kodimension q auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Partition dieser in immersierte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n-q$, die gewissen Regularitätsbedingungen genügt.

Schnell entwickelten sich insbesondere im Hinblick auf das Verständnis der globalen Topologie von Blätterungen verschiedenste Teilgebiete. Im Jahr 1959 führte Reinhart den Begriff der *Riemannschen Blätterung* ein. Dieses Konzept ist sehr natürlich (und findet vielerlei Anwendung als Modell in der Physik): Auf einer geblätterten Mannigfaltigkeit $(M,\mathcal{F})$ führt man eine Riemannsche Metrik g ein, unter der die Blätter lokal konstanten Abstand zueinander haben. Eine andere Charakterisierung dieser „transversalen“ Eigenschaft ist, dass eine Geodätische, die ein Blatt senkrecht schneidet, jedes von ihr getroffene Blatt senkrecht schneidet. Nun ist klassische Riemannsche Geometrie zur Untersuchung der Blätterung anwendbar.

In Analogie zu isometrischen Gruppenwirkungen ist es konsequent, nach einer Erweiterung der Theorie zu fragen, die Blätter unterschiedlicher Dimension zuläßt, denn die Orbiten der Wirkung sind immersierte Untermannigfaltigkeiten und haben lokal konstanten Abstand zueinander. Auf die gleiche Frage stößt man, wenn man $\bar{\mathcal{F}}$, die Partition von M in die Abschlüsse der Blätter, untersuchen möchte. Die Idee der singulären Riemannschen Blätterungen war geboren!

Begrifflich spezifiziert wurde diese Idee zuerst von Bolton 1972 unter dem Namen *transnormale Systeme,* [Bol73], als natürliche Erweiterung der o.g. Wirkungen. Schwerpunkt seiner Arbeit ist die orthogonale Struktur von Blätterungen, deren reguläre Blätter Kodimension eins haben. Fast zeitgleich näherten sich Stefan [Ste74] und Sussmann [Su73] jener Idee von anderer Seite: Sie führten den Begriff einer *singulären Blätterung* ein. Beide Begriffe implizieren einander nicht ([Mol88], S. 189)! Eine vereinheitlichte Theorie wurde daraus von Molino in den 70er und 80er Jahren des letzten Jahrhunderts entwickelt, siehe zusammenfassend [Mol88]. Da der Titelbegriff der vorliegenden Arbeit damit historisch eingebettet ist, ist es an der Zeit, ihn zu definieren.

Definition — Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine vollständige Unterteilung $\mathcal{F}$ von M in zusammenhängende, eingebettete Untermannigfaltigkeiten, die *Blätter,* heißt eine *singuläre Riemannsche Blätterung*, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I) Der Modul $\Xi_{\mathcal{F}}$ glatter Vektorfelder auf M, die tangential zu den Blättern sind, ist *transitiv* auf den Blättern, d.h. ist N_p das Blatt durch p, so gibt es zu jedem Vektor $v \in T_pN_p$ ein Vektorfeld $X \in \Xi_{\mathcal{F}}$ mit $X(p) = v$.

(II) Die Metrik g auf M ist an $\mathcal{F}$ *angepasst*: Jede Geodätische in M, die ein Blatt senkrecht schneidet, schneidet jedes getroffene Blatt senkrecht.

Eigenschaft (I) der Definition entspricht gerade einer singulären Blätterung nach [Ste74] und [Su73]; Bedingung (II) fordert, dass $\mathcal{F}$ ein transnormales System nach

[Bol73] ist. Das sechste Kapitel des Buches [Mol88] gibt einen guten Einblick in die lokalen Eigenschaften solcher Blätterungen; ihre globale Geometrie und Topologie ist jedoch im Allgemeinen nur schwer greifbar, wenn man nicht gerade Kompaktheit voraussetzen möchte (siehe z.B. Theorem 6.2 in [Mol88]). Dennoch ist es mit Zusatzannahmen durchaus möglich, bedeutungsvolle globale Aussagen herzuleiten, und hier setzt die vorliegende Arbeit an.

Im ersten Kapitel stellen wir bekannte Eigenschaften von und Ergebnisse über singuläre(n) Riemannsche(n) Blätterungen vor, die wir im Verlauf der Arbeit benötigen werden. Diese Darstellung hat Übersichts-Charakter und keinesfalls den Anspruch auf Vollständigkeit, für Details sei auf das eben genannte sechste Kapitel in [Mol88] verwiesen. Ferner stellen wir im ersten Kapitel die Begriffe *Fokal-, Schnittpunkte* und *Schnittort* eines Blattes bereit, wie sie in [To04] zu finden sind.

Der erste Versuch, globale Aussagen über singuläre Riemannsche Blätterungen im Allgemeinen herzuleiten, führt uns im zweiten Kapitel zu der Zusatzvoraussetzung, dass die Blätter eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeiten von M sein mögen, um allzu pathologische Fälle auszuschließen. In diesem Kontext können wir die sehr nützliche Existenz *globaler Tubenumgebungen* der Blätter zeigen:

Satz — *Es seien M vollständig und $(M, \mathcal{F}, g)$ eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern. Dann gibt es zu jedem Blatt $N \subset M$ ein $\varepsilon_N > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung vom Normalenbündel*

$$\exp_N^\perp : B_{\varepsilon_N}(N) \to \exp_N^\perp(B_{\varepsilon_N}(N)) =: \mathrm{Tub}_{\varepsilon_N}(N)$$

ein Diffeomorphismus ist.

Wie bei Gruppenwirkungen gibt es Ausnahmeblätter, also Blätter höchster Dimension, die in gewissem Sinne trotzdem „kleiner“ sind als die übrigen regulären. Diese lassen sich über den Begriff der Blatt-Holonomie charakterisieren. Dass sie nicht häufig auftreten und sich nicht allzu wild verhalten, zeigen wir mit Hilfe des Satzes über die Existenz der globalen Tubenumgebungen: Die im engeren Sinn regulären Blätter liegen offen, zusammenhängend und dicht in M, und die Zusammenhangskomponenten der Menge der Ausnahmeblätter sind Untermannigfaltigkeiten von M. Ferner zeigen wir, dass die kanonische Projektion einer globalen Tubenumgebung auf ihr Zentrumsblatt eine Überlagerungsabbildung der Blätter induziert. Mit diesen Ergebnissen läßt sich schließlich eine Stratifizierung der Mannigfaltigkeit M nach Blatt-Typen zeigen.

Zur Motivation der nächsten Kapitel betrachten wir zunächst noch einmal das Modell: die Orbitblätterung einer isometrischen Liegruppenwirkung. Hier sind uns die Begriffe *Polarität, Hyperpolarität* und *variationelle Vollständigkeit* vertraut, und es liegt nahe, diese, vor allem jedoch die daraus resultierende Strukturtheorie, auf singuläre Riemannsche Blätterungen verallgemeinern zu wollen.

Polarität, das heißt die Existenz globaler Schnitte, wurde von Alexandrino auf Blätterungen verallgemeinert ([A04], [A07] und [AT04]). Zum Beispiel wird damit eine äquivalente Formulierung des Scheibensatzes für Wirkungen möglich. Entsprechend lässt sich Hyperpolarität zur Forderung nach flachen Schnitten verallgemeinern. Fast äquivalent zur Existenz von Schnitten ist die in [To04] untersuchte Äquifokalität der Blätter, siehe dazu [AT07]. Eine breite Klasse von singulären Riemannschen Blätterungen mit Schnitten bilden die isoparametrischen Blätterungen von Raumformen; eine sehr gute Übersicht über den Stand der Forschung bis ins Jahr 2000 liefert dazu [Th00].

Die ab dem dritten Kapitel dieser Arbeit vorgenommene Einschränkung auf singuläre Riemannsche Blätterungen *ohne horizontal konjugierte Punkte* ist eine konsistente Verallgemeinerung des Begriffs der variationellen Vollständigkeit von isometrischen Wirkungen und wurde von Lytchak und Thorbergsson in [LTh05] wie folgt eingeführt:

Definition — Eine singuläre Riemannsche Blätterung hat die Eigenschaft *ohne horizontal konjugierte Punkte,* falls für alle Blätter N und alle Geodätischen γ senkrecht zu N gilt: Jedes N-Jacobifeld J entlang γ, das tangential zu einem anderen Blatt als N ist, ist zu jedem von γ getroffenen Blatt tangential.

In welcher Beziehung stehen singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte zu den oben genannten?

In [LTh05] wird gezeigt, dass eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte auf einer Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung (globale) flache Schnitte besitzt. Umgekehrt folgt sogar im Allgemeinen aus der Existenz von flachen Schnitten, dass die Blätterung keine horizontal konjugierten Punkte besitzt. Jedoch sieht man schon in der Theorie der Gruppenwirkungen, dass diese Charakterisierungen nicht äquivalent sind, denn nicht alle variationell vollständigen Wirkungen sind hyperpolar, nicht einmal polar. Es gibt zwar unter verschiedenen Zusatzannahmen über die Blätterung Implikationen von „mit (flachen) Schnitten“ zu „ohne horizontal konjugierte Punkte“ und umgekehrt, jedoch nicht im Allgemeinen.

Die Klasse singulärer Riemannscher Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte ermöglicht uns eine gute Beschreibung der Geometrie der Blätter als Untermannigfaltikeiten von M. So sind die Fokalpunkte eines Blattes N entlang einer dazu senkrechten Geodätischen genau die Punkte, die zu singulären Blättern gehören; deren Index entspricht gerade der Differenz der zugehörigen Blattdimensionen. Ferner können wir zeigen, dass es innerhalb jeder globalen Tubenumgebung eine Spiegelung sowie Streckungen bezüglich des Zentrumsblattes gibt, die die umliegenden Blätter diffeomorph aufeinander abbilden. Für die technisch anmutende, oben gegebene Definition beweisen wir schließlich eine äquivalente, sehr geometrische Charakterisierung:

Satz — *Eine singuläre Riemannsche Blätterung besitzt genau dann keine horizontal konjugierten Punkte, wenn die singulären Punkte genau die Fokalpunkte sind.*

Für den Beweis dieses Satzes wird ein wenig Theorie über Morse-Sturm-Differentialgleichungen und das verallgemeinerte Indextheorem benötigt, welche im Anhang A dargestellt wird.

Bemerkung — Unlängst wurden in [Bo07] äquidistante Blätterungen des $\mathbf{R}^n$ untersucht; diese entsprechen den singulären Riemannschen Blätterungen mit eigentlich eingebetteten Blättern auf dem $\mathbf{R}^n$. Ihre globale Struktur ist insofern besser zu verstehen und zu beschreiben, als dass die Blätterungen keine Ausnahmeblätter besitzen, der Quotientenraum $M/\mathcal{F}$ ist ein Alexandrov-Raum mit natürlicher Metrik, und die kanonische Projektion darauf ist eine Submetrie. Besonders hingewiesen sei auf neue Beispiele für Riemannsche Blätterungen auf dem $\mathbf{R}^n$ im fünften Kapitel jener Arbeit.

Im vierten Kapitel widmen wir uns der Verallgemeinerung einer aus topologischer Sicht sehr interessanten Eigenschaft von variationell vollständigen Wirkungen, der *Tautheit der Blätter,* welche von Bott und Samelson in [BS58] für diese Wirkungen bewiesen wurde. Um zu verstehen, was es damit auf sich hat, machen wir einen kleinen Ausflug in die Morse-Theorie (siehe hierzu [Mor34]).

Auf dem Raum $P(M, N \times p)$ der absolut stetigen Wege mit quadrat-integrabler Ableitung, die in einem Blatt N beginnen und in einem Punkt p, der nicht Fokalpunkt von N ist, enden, ist das Energie-Integral

$$E_p : P(M, N \times p) \to \mathbf{R};\ E_p(c) := \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2 dt$$

eine Morse-Funktion, für die der Indexsatz gilt: Der Index von E_p in einem kritischen Punkt c ist gleich der Summe der Fokalpunkte von N entlang $c|_{(0,1)}$ gezählt mit Vielfachheiten. Es bezeichne μ_k die Zahl kritischer Punkte vom Index k von E_p in $P(M, N \times p)$; die k-te Bettizahl von $P(M, N \times p)$ bezüglich $\mathbf{Z}_2$-Koeffizienten (d.h. die Dimension der k-ten Homologiegruppe als $\mathbf{Z}_2$-Vektorraum) sei b_k. Für alle k ist μ_k endlich, und es gelten die Morse-Ungleichungen

$$\mu_k \geq b_k \quad \text{für alle } k.$$

Eine Morse-Funktion heißt *perfekt,* wenn für alle k Gleichheit gilt: $\mu_k = b_k$.

Definition — Eine eigentliche Immersion $N \to M$ heißt *taut,* wenn das Energie-Integral $E_p : P(M, N \times p) \to \mathbf{R}$ perfekt ist für jeden Punkt p in M, der nicht Fokalpunkt von N ist.

Die Beweisstrategie von Bott und Samelson zum Nachweis der Tautheit variationell vollständiger Wirkungen lässt sich auf singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte gut, aber nicht problemlos übertragen. Also machen wir einen vorsichtigen ersten Schritt und zeigen

Satz — *Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte. Dann sind die regulären Blätter von $(M, \mathcal{F})$ 0-taut, d.h. es gilt $\mu_1 = b_1$.*

Die Probleme bei der Verallgemeinerung für jedes k tun sich gerade bei den Ausnahmeblättern auf. Aber mittels des vorigen Satzes können wir diese für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ausschließen.

Satz — *Ist M eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und ist $(M, \mathcal{F})$ singulär Riemannsch ohne horizontal konjugierte Punkte (mit eigentlich eingebetteten Blättern), so besitzt $(M, \mathcal{F})$ keine Ausnahmeblätter.*

Schließlich können wir den Nachweis der Tautheit allgemein angehen und zeigen

Theorem — *Es sei M einfach zusammenhängend. Die regulären Blätter einer singulären Riemannschen Blätterung $(M, \mathcal{F})$ ohne horizontal konjugierte Punkte sind taut.*

——— * ——— * ——— * ———

Danksagung

Mein größter Dank gilt meinem Betreuer Professor Gudlaugur Thorbergsson dafür, dass er mir dieses schöne Thema überlassen und diese Arbeit ermöglicht hat, vor allem aber für seine andauernde Unterstützung, Geduld und ständige Ermutigung, die zur Vollendung derselben nötig waren.

Weiterhin danke ich Dr. Sönke Rollenske und Dr. Oliver Goertsches für viele hilfreiche Diskussionen, Ideen, kritische Anmerkungen sowie seelische Unterstützung. Für Verständnis in jeder Schaffensphase danke ich insbesondere Bijan Sahamie.

Um auszudrücken, wozu es keine Worte gibt, sei diese Arbeit Tobias Lück gewidmet.

1 Präliminarien

1.1 Singuläre Riemannsche Blätterungen; Notation

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine vollständige Unterteilung $\mathcal{F}$ von M in zusammenhängende, eingebettete Untermannigfaltigkeiten, die *Blätter,* heißt eine *singuläre Riemannsche Blätterung*, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I) Der Modul $\Xi_{\mathcal{F}}$ glatter Vektorfelder auf M, die tangential zu den Blättern sind, ist *transitiv* auf den Blättern, d.h. ist N_p das Blatt durch p, so gibt es zu jedem Vektor $v \in T_pN_p$ ein Vektorfeld $X \in \Xi_{\mathcal{F}}$ mit $X(p) = v$.
(II) Die Metrik g auf M ist an $\mathcal{F}$ *angepasst*: Jede Geodätische in M, die ein Blatt senkrecht schneidet, schneidet jedes getroffene Blatt senkrecht.

Eine Geodätische wie in (II) beschrieben, die also senkrecht zu den Blättern steht, wird *horizontal* genannt. Im Folgenden sei $(M, \mathcal{F})$ immer eine singuläre Riemannsche Blätterung der Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit angepasster Metrik g.

Um zu verdeutlichen, dass ein Blatt N den Punkt p enthält, schreiben wir diesen als Index des Blattes: N_p. Ist $\gamma : [a, b] \to M$ eine zu den Blättern senkrechte Geodätische, so werden N_t und $N_{\gamma(t)}$ synonym verwendet.

Die höchste Dimension der Blätter sei k. Ein Blatt heißt *regulär*, wenn es Dimension k hat, sonst *singulär*. Genauso heißt ein Punkt p in M *regulär* (bzw. *singulär*), wenn N_p regulär (bzw. singulär) ist. Ist die Dimension aller Blätter gleich k, so spricht man von einer *(regulären) Riemannschen Blätterung.*

Eine Blätterung, die nur die Bedingung (I) erfüllt, ist eine *singuläre Blätterung* im Sinne von [Ste74] und [Su73]. Für eine solche gibt es die folgende lokale Beschreibung:

Es seien $p \in M$und N_p ein Blatt der Dimension l. Dann existieren eine Umgebung U von p sowie Ball-Umgebungen B^l und B^{n-l} des Ursprungs in $\mathbf{R}^l$ bzw. $\mathbf{R}^{n-l}$ und eine lokale Karte $\psi : U \to B^l \times B^{n-l}$ mit $\psi(p) = (0, 0)$; ist L ein weiteres Blatt von $\mathcal{F}$, so gilt:

$$L \cap \psi^{-1}(B^l \times B^{n-l}) = \psi^{-1}(B^l \times \hat{L}), \quad \text{wobei } \hat{L} = \{x \in B^{n-l} \mid \psi^{-1}(0, x) \in L\}.$$

Wir nennen ψ eine *Blätterungskarte.* Es folgt, dass die Blätter lokale Scheiben transversal schneiden. Es folgt außerdem sofort, dass die Dimension der Blätter auf M eine unterhalbstetige Funktion ist.

Die zweite Eigenschaft der Blätterung, nämlich Riemannsch zu sein, ermöglicht eine lokale Beschreibung von $(M, \mathcal{F})$. Es ist ebendiese Beschreibung, die das Fundament für die Ergebnisse in den folgenden Kapitel bildet:

Lokale Beschreibung singulärer Riemannscher Blätterungen

Es sei $N_p \subset M$ das Blatt durch p. Weiterhin sei νN_p das Normalenbündel von N_p in $TM|_{N_p}$, wobei wir N_p mit dem Nullschnitt darin identifizieren. Für eine relativ kompakte, offene, zusammenhängende Teilmenge $P \subset N_p$ bezeichne $B_\varepsilon(P)$ das Bündel

der offenen, normalen Bälle vom Radius ε um P in $N_p \subset \nu N_p$. Ist ε genügend klein, so definiert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(P)$ auf sein Bild in M, welches eine *(distinguierte) Tubenumgebung von P (bzw. um p) mit Radius ε* genannt wird:

$$\exp^\perp : \nu N_p \to M; \exp^\perp(B_\varepsilon(P)) =: \mathrm{Tub}_\varepsilon(P).$$

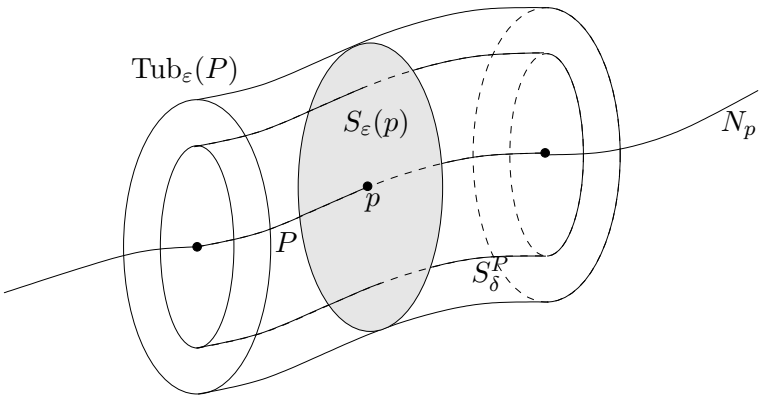
Eine *Tube* vom Radius $\delta < \varepsilon$ um P ist die Menge aller Punkte in $\mathrm{Tub}_\varepsilon(P)$, deren Abstand zu P gleich δ ist:

$$S_\delta^P := \{x \in \mathrm{Tub}_\varepsilon(P) \mid d(x, P) = \delta\}.$$

Es sei $\pi : \mathrm{Tub}_\varepsilon(P) \to P$ die Projektion entlang horizontaler Geodätischer. Den senkrechten Schnitt

$$S_\varepsilon(p) := \pi^{-1}(p)$$

im Punkt p durch die Tubenumgebung nennen wir eine *Scheibe.* Ist $y \in S_\varepsilon(p)$ und war ε genügend klein gewählt, so trifft das Blatt N_y die Scheibe transversal. Mit Lemma 1.1.1 gilt, dass die Zusammenhangskomponente von $N_y \cap \mathrm{Tub}_\varepsilon(P)$, die y enthält, in der Tube $S^P_{d(y,p)}$ enthalten ist. Eine solche Komponente $P_y \subset N_y$ nennen wir *Stück eines Blattes* (engl. *plaque*).



Eine ausführlichere Beschreibung dieser Grundlagen sowie die Beweise der folgenden Lemmata und Propositionen finden sich in [Mol88], Kapitel 6.

Lemma 1.1.1 — *(i) Die Projektion $\pi : P_y \to P$ ist eine surjektive Submersion, und die Faser $\pi^{-1}(x)$ trifft alle Blattstücke der Tubenumgebung für alle $x \in P$.*
(ii) Der Abstand zwischen benachbarten Blättern ist lokal konstant: $d(\tilde{y}, P) = d(y, P)$ für alle $\tilde{y}$ in P_y.

Die Vereinigungen von Blättern mit bestimmten gleichen Eigenschaften, betrachtet als Teilmengen von M, nennen wir *Strata.* Zum Beispiel lassen sich die Blätter nach ihrer Dimension sortieren:

$$\Sigma_q := \bigcup \{N \in \mathcal{F} \mid \dim(N) = q\}.$$

Das *reguläre Stratum* Σ_{reg} ist die Vereinigung aller Blätter der höchsten Dimension. Entsprechend bezeichnet Σ_{sing} das singuläre Stratum. Jedes Stratum Σ_q ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M; weiterhin gilt, dass $\bigcup_{q' \leq q} \Sigma_{q'}$ kompakt ist und

dass das reguläre Stratum offen, zusammenhängend und dicht in M ist. Molino zeigt in [Mol88], S. 194ff, dass die Unterteilung $M = \bigcup_q \Sigma_q$ nach Dimensionen der Blätter eine Stratifizierung (siehe hierzu Kapitel 2.3) ist.

Zu jedem Punkt in Σ_{reg} gibt es eine offene Umgebung U so, dass der Raum der Blattstücke $\bar{U}$ eine Mannigfaltigkeit ist und die Blätterung $\mathcal{F}$ eingeschränkt auf U eine Submersion $\pi_U : U \to \bar{U}$ definiert. Eine solche Umgebung U wird *einfach* genannt. Eine Untermannigfaltigkeit $T \subset M$ der Dimension $n-k$ heißt *Transversale,* wenn in jedem Punkt $p \in T$ der Tangentialraum von T zusammen mit dem Tangentialraum des Blattes L_p den Raum T_pM aufspannt. Die $(n-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\bar{U}$ kann kanonisch mit einer solchen lokalen Transversalen identifiziert werden. Weiterhin besitzt $\bar{U}$ eine Riemannsche Metrik $g_{\bar{U}}$, so dass der transversale Anteil der Metrik der Pullback von $g_{\bar{U}}$ durch π ist. Hierbei gilt:

Proposition 1.1.2 — *Ist γ eine Geodätische in U, so ist die Projektion $\pi_U(\gamma)$ eine Geodätische in $\bar{U}$.*

Für ein Blattstück P_N liefert die Verkettung der homothetischen Transformationen des Normalenbündels νN mit $\exp^\perp : B_\varepsilon(P_N) \to \text{Tub}_\varepsilon(P_N)$ für alle positiven $\lambda \in \mathbf{R}$ eine *homothetische Transformation* h_λ bezüglich P_N; diese ist definiert auf der Tubenumgebung $\text{Tub}_{\min(\varepsilon, \frac{1}{\lambda}\varepsilon)}(P_N)$, und es gilt:

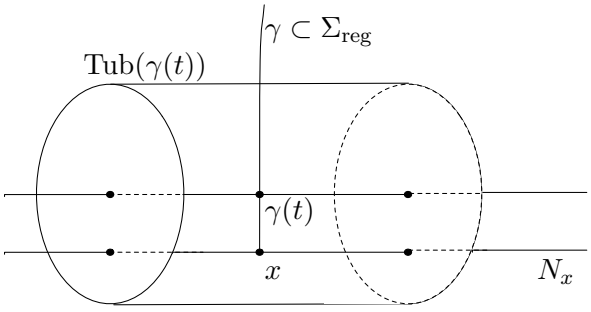
Lemma 1.1.3 — *Die homothetische Transformation h_λ bildet in ihrem Definitionsbereich Blattstücke auf Blattstücke ab, sie erhält die Blätterung $\mathcal{F}$.*

Ist γ eine zu den Blättern senkrechte Geodätische, so gilt wegen dieses Lemmas innerhalb einer Tubenumgebung von $\gamma(0)$

$$\dim(N_{\gamma(t)}) = \text{ konstant für alle } t > 0.$$

Eine im Folgenden hilfreiche Beobachtung sei hier noch gesondert aufgeführt:

Proposition 1.1.4 — *Ist x ein regulärer Punkt und ist $\gamma : [0, \rho] \to \Sigma_{\text{reg}}$ eine in x zum Blatt N_x senkrecht startende Geodätische, so existiert für genügend kleine t eine Tubenumgebung von $\gamma(t)$, die x enthält.*



Mit dieser Vorstellung von der lokalen Geometrie einer singulären Riemannschen Blätterung können wir die Frage nach globalen Beschreibungen stellen: Wie lässt sich die Lage von Blättern in M beschreiben? Wie lässt sich die Lage von Blättern zu benachbarten Blättern global beschreiben? Lassen sich Aussagen über die Lage von regulären bzw. singulären Blättern herleiten? Ein im Weiteren mehrfach benutztes Hilfsmittel für entsprechende „lokal-global-Schlüsse“ ist das folgende:

Schieben entlang der Blätter

Es seien $U \subset M$ eine einfache Menge wie oben beschrieben, L ein Blatt und $P_L \subset L \cap U$ ein Blattstück in U mit $x, x' \in P_L$. Eine lokale Tubenumgebung von P_L sei $\mathrm{Tub}_\varepsilon(P_L)$. Weiterhin seien T und T' zwei lokale Transversale in U durch x bzw. x'. Es sind $W = \mathrm{Tub}_\varepsilon(P_L) \cap T$ und $W' = \mathrm{Tub}_\varepsilon(P_L) \cap T'$ offene Umgebungen um x, bzw. x', so dass $\pi_U : W \to \pi_U(W)$ und $\pi_U : W' \to \pi_U(W')$ Diffeomorphismen sind. Es gilt wegen Lemma 1.1.1, dass $\pi_U(W) = \pi_U(W') \subset \bar{U}$. Die Zugehörigkeit der Punkte zu ihrem in U liegenden Blattstück bestimmt also eindeutig einen Diffeomorphismus von W nach W'. Diesen nennen wir *Schieben entlang der Blätter* von x nach x' (siehe [Mol88], Abschnitt 1.7).

Allgemeiner seien nun $x, x' \in L \subset \Sigma_{\mathrm{reg}}$ beliebig. Wir wählen einen stetigen Weg $c : [0,1] \to L$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = x'$ und überdecken diesen endlich mit einfachen Mengen $U_i, i = 1, \ldots, l$. In jedem Schnitt $U_i \cap U_{i+1}$ sei eine Transversale T_i gewählt, desgleichen seien T_x und $T_{x'}$ Transversale durch x bzw. x'. Dann gibt es wie oben offene Mengen $W_0 \subset T_x, W_i \subset T_i, W_{l+1} \subset T_{x'}$ und, nach Einschränkung dieser Mengen auf den kleinsten Radius $\varepsilon_{\min}$ der lokalen Tubenumgebungen, Diffeomorphismen $\Phi_j : W_j \to W_{j+1}, j = 0, \ldots, l+1$, deren Verkettung einen Diffeomorphismus Φ von einer Umgebung um x in T_x in eine Umgebung um x' in $T_{x'}$ liefert. Wir nennen Φ *Schieben entlang der Blätter von x nach x' entlang c*. Diese Abbildung ist also definiert für Punkte aus Blättern, deren Abstand zu L kleiner $\varepsilon_{\min}$ ist. Der Keim h_c von Φ hängt weder von der Wahl der Überdeckung noch von der Wahl der Transversalen und bezüglich c nur von der Homotopieklasse dieses Weges ab.

Da in jedem Punkt $c(t), t \in [0,1]$, die Scheibe $S_{\varepsilon_{\min}}(c(t))$ eine lokale Transversale ist, erhalten wir zu jedem $y \in S_{\varepsilon_{\min}}(x)$ einen eindeutigen, stetigen Weg $\tilde{c}_y : [0,1] \to L_y$ von y nach $\Phi(y) \in S_{\varepsilon_{\min}}(x')$ mit $d(\tilde{c}_y(t), c(t)) = d(y, x)$ für alle $t \in [0,1]$.

Noch allgemeiner sprechen wir im Folgenden vom *Verschieben eines Abstandes δ entlang der Blätter von y nach y'* in dieser Situation: Die Beschränkung auf das reguläre Stratum sei aufgehoben. Die Punkte y und y' aus einem beliebigen (auch singulären) Blatt L seien durch einen Weg $c \in L$ verbunden. Gibt es nun eine Tubenumgebung von L, die c enthält, so wissen wir aus Lemma 1.1.1: Wenn y den Abstand δ zu x in dieser Umgebung hat, so gibt es im Blatt L_x einen Punkt x' mit $d(y', x') = \delta$. Ferner gibt es auch hier einen stetigen Weg $\tilde{c}_x$ wie oben von x nach x' in L_x, dieser ist aber im Allgemeinen nicht eindeutig.

1.2 Fokal-, Schnittpunkte und der Schnittort eines Blattes

Die Begriffe „konjugierter Punkt“, „Schnittpunkt“ und „Schnittort eines Punktes“ wie zum Beispiel in [dC93] definiert, lassen sich auf Untermannigfaltigkeiten wie folgt übertragen (siehe hierzu [dC93], Kapitel 10 Abschnitt 4, sowie [To04]):

Es sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $TN \subset TM|_N$, Normalenbündel νN und zugehöriger normaler Exponentialabbildung $\exp^\perp : \nu N \to M$. Falls v ein kritischer Punkt von $\exp^\perp$ ist, so heißen v *Fokalvektor* und $\exp^\perp(v)$ *Fokalpunkt.*

Es sei γ eine Geodätische mit $\gamma(0) \in N, \dot{\gamma}(0) \perp N$. Ein *$N$-Jacobifeld längs γ* ist ein Jacobifeld J längs γ, d.h. J genügt der Differentialgleichung $J'' + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$, das zusätzlich

$$J(0) \in T_{\gamma(0)}N \quad \text{und} \quad J'(0) + A_{\dot{\gamma}(0)}(J(0)) \in \nu_{\gamma(0)}N$$

erfüllt; dabei ist $A_{\dot\gamma(0)} : T_{\gamma(0)}N \to T_{\gamma(0)}N;\ A_{\dot\gamma(0)}X = -(\nabla^M_X \dot\gamma(0))^T$ die Weingarten-Abbildung. J ist ein N-Jacobifeld genau dann, wenn es das Variationsvektorfeld einer Variation f_s von γ ist, in der alle Wege f_s Geodätische sind mit $f_s(0) \in N, \dot f_s(0) \perp N$.

Proposition 1.2.1 — *Es gilt für eine Geodätische γ senkrecht zu N in $\gamma(0)$:*

$\gamma(t)$ *ist Fokalpunkt von N längs γ* $\Leftrightarrow$ $t\dot\gamma(0)$ *ist kritischer Punkt von* $\exp^\perp$
$\Leftrightarrow$ *es existiert ein nicht-verschwindendes N-Jacobifeld J längs γ mit $J(t) = 0$.*

Die *Multiplizität von $\gamma(t)$* ist gleich der Dimension des Kerns von $d(\exp^\perp)_{t\dot\gamma(0)}$. Diese ist außerdem gleich der Dimension des Raumes der Jacobifelder längs γ, die in t verschwinden.

Es sei nun $N \subset M$ eine eigentlich immersierte Untermannigfaltigkeit, γ_v bezeichne die Geodätische mit Startvektor $v \in TM$. Ferner sei $\nu^1 N$ das Einheitsnormalenbündel von N. Die *Schnittortfunktion* ist definiert durch

$$\sigma : \nu^1 N \to [0, \infty]; \sigma(v) = \sup\{t \in \mathbf{R} \mid d(\gamma_v(t), N) = t\}.$$

Der *Schnittort von N* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{C}_N := \exp^\perp\{\sigma(v)v \mid \sigma(v) < \infty, v \in \nu^1 N\}.$$

Wir nennen $v \in \nu N$ *minimal*, falls $\|v\| \le \sigma(\frac{v}{\|v\|})$; die entsprechende Geodätische $\gamma_v|_{[0,1]}$ und jede ihrer Umparametrisierungen konstanter Geschwindigkeit heißen *minimale Geodätische.* Ein minimaler Vektor v wird *Schnittvektor* genannt, wenn es ein minimales $w \in \nu N$ ungleich v mit gleichem Endpunkt gibt; $\exp^\perp(v)$ ist dann ein *Schnittpunkt.* Es gilt hier $\|v\| = \|w\|$. Für den Schnittort gilt:

Proposition 1.2.2 ([To04]) — *(i) Jeder Punkt aus dem Schnittort $\mathcal{C}_N$ ist ein Schnittpunkt oder ein Fokalpunkt.*

(ii) Die Schnittortfunktion σ ist oberhalbstetig, und

(iii) wenn N eigentlich eingebettet ist, so ist σ stetig und $\mathcal{C}_N$ ist abgeschlossen in M.

2 Eigentlich eingebettete Blätter

Die Blätter einer singulären Riemannschen Blätterung sind per definitionem eingebettete Untermannigfaltigkeiten, müssen aber sonst im Allgemeinen keine weiteren Kriterien erfüllen, was die Untersuchung derselben erheblich erschwert. Erst unter Zusatzvoraussetzungen wie zum Beispiel Vollständigkeit, Kompaktheit der Blätter oder Eigentlichkeit der Einbettungen lassen sich globale Sätze über Blätter herleiten. Aus der Kompaktheit folgt wegen Endlichkeit jeder Überdeckung sofort die Existenz globaler Tubenumgebungen, siehe [Mol88], Seite 91ff. Im Folgenden setzen wir nur voraus, dass die Blätter eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind. Hieraus folgt insbesondere, dass Tubenumgebungen von jedem sie treffenden Blatt nur endlich viele Stücke enthalten, und Ergebnisse über kompakte Blätter lassen sich auf diesen Fall verallgemeinern. Ein Gegenbeispiel dazu ist die eindimensionale Torusblätterung mit irrationalem Winkel.

Sofern in den folgenden Kapiteln nichts anderes gesagt wird, habe die Blätterung $(M, \mathcal{F})$ ab jetzt immer eigentlich eingebettete Blätter!

2.1 Existenz einer globalen Tubenumgebung

Zunächst wollen wir zeigen, dass es im Fall einer Riemannschen Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern möglich ist, zu jedem Blatt eine globale Tubenumgebung zu finden.

Satz 2.1.1 — *Es seien M vollständig und $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern. Dann gibt es zu jedem Blatt $N \subset M$ ein $\varepsilon_N > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung vom Normalenbündel*

$$\exp_N^\perp : B_{\varepsilon_N}(N) \to \mathrm{Tub}_{\varepsilon_N}(N)$$

ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wir führen den Beweis in zwei Schritten und zeigen:

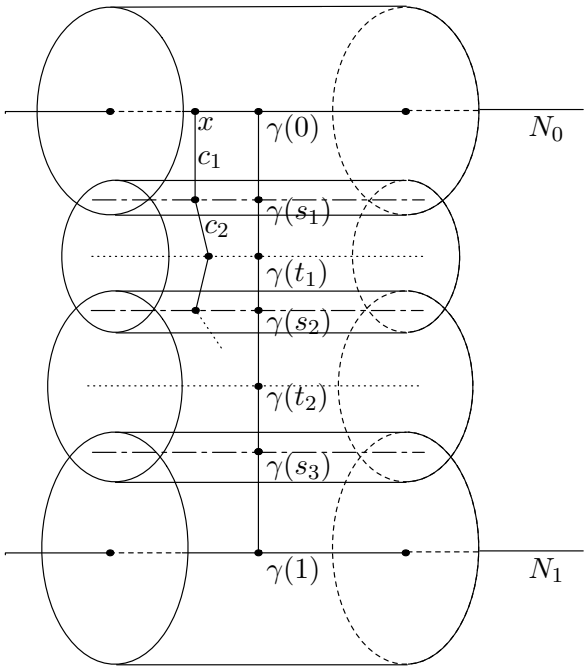
(i) Die Blätter haben global konstanten Abstand zueinander, genauer: Ist $\gamma : [0,1] \to M$ eine horizontale Geodätische, die lokal Kürzeste zwischen N_0 und N_1 ist, so gibt es zu jedem Punkt $x \in N_0$ eine horizontale Geodätische der Länge $L(\gamma)$ von x nach N_1, und diese ist auch lokal eine Kürzeste zwischen N_0 und N_1. Dabei nennen wir γ eine *lokale Kürzeste,* falls es eine Umgebung $P_0 \subset N_0$ um $\gamma(0)$ und eine Umgebung $P_1 \subset N_1$ um $\gamma(1)$ gibt, so dass $d(P_0, P_1) = L(\gamma)$.

(ii) Der Abstand eines Blattes N zu seinem Schnittort $\mathcal{C}_N$ ist von Null weg beschränkt. Für jede solche untere Schranke $r > 0$ ist nach Definition von $\mathcal{C}_N$ die Abbildung

$$\exp_N^\perp : B_r(N) \to \mathrm{Tub}_r(N)$$

ein Diffeomorphismus.

Zu (i): Die Abgeschlossenheit dieser Aussage bezüglich x ist klar. Zu zeigen ist Offenheit. Diese folgt nicht sofort aus der Existenz lokaler Tubenumgebungen, denn $\gamma(0)$ ist im Allgemeinen nicht in einer solchen Umgebung um ein Stück von N_1 enthalten, zum Beispiel kann $\gamma(0)$ singulär, aber N_1 regulär sein. Es sei also $\gamma : [0,1] \to M$ eine horizontale Geodätische, die lokale Kürzeste zwischen einem Blattstück $P_0 \subset N_0$ und einem Stück P_1 um $\gamma(1)$ ist. Zu zeigen: Es gibt eine Umgebung $U \subset P_0$ um $\gamma(0)$ so dass $d(x, P_1) = L(\gamma)$ für alle $x \in U$. Dazu überdecken wir die Geodätische γ mit Tubenumgebungen wie folgt:



Es seien um $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ die oben genannten Stücke $P_0 \subset N_0$ und $P_1 \subset N_1$ Zentren von zur Überdeckung gehörenden Umgebungen, und alle Zentrumsblätter der Tubenumgebungen schneiden γ. Weiterhin sei die Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$, wobei P_{t_i} für alle i Zentrum einer zur Überdeckung gehörenden Tubenumgebung ist, minimal gewählt, d.h. jeder Punkt von γ liegt entweder in genau einer oder aber im Schnitt von genau zwei aufeinander folgenden Tubenumgebungen. Die Punkte $\{s_i\}_{i=1}^{k+1} \subset [0,1]$ seien dann so gewählt, dass

$$0 = t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < \ldots < t_k < s_{k+1} < t_{k+1} = 1,$$

und $\gamma(s_i)$ liege jeweils im Schnitt zweier Umgebungen:

$$\gamma(s_i) \in \mathrm{Tub}(P_{t_{i-1}}) \cap \mathrm{Tub}(P_{t_i}).$$

Es sei nun $U \subset P_0$ eine genügend kleine Umgebung um $\gamma(0)$ und $x \in U$. Die Umgebung U muss so klein gewählt sein, dass die nachfolgende Konstruktion einer gebrochenen Geodätischen durch die Tubenumgebungen möglich ist; ein solches U existiert, da γ ganz in der endlichen, offenen Überdeckung enthalten ist.

Da wir uns innerhalb der Tubenumgebung $\mathrm{Tub}(P_0)$ befinden, gibt es eine Geodätische, sogar Kürzeste, $c_1 : [0,1] \to \mathrm{Tub}(P_0)$, so dass $c_1(0) = x$ und $c_1(1) \in N_{s_1}$, und die

Länge von c_1 ist gleich der Länge von γ eingeschränkt auf $[0, s_1]$. Genauso gibt es eine Kürzeste c_2 von $c_1(1) \subset N_{s_1}$ nach P_{t_1} mit Länge $L(\gamma|_{[s_1,t_1]})$. So fortfahrend erhalten wir eine gebrochene Geodätische $c = c_1 c_2 \dots c_{2k+2}$ der Länge $L(c) = L(\gamma) = d(\gamma(0), P_1)$, die in $x \in U$ beginnt und in P_1 endet. Es folgt, dass der Abstand von x zu P_1 kleiner oder gleich $L(c) = L(\gamma)$ ist.

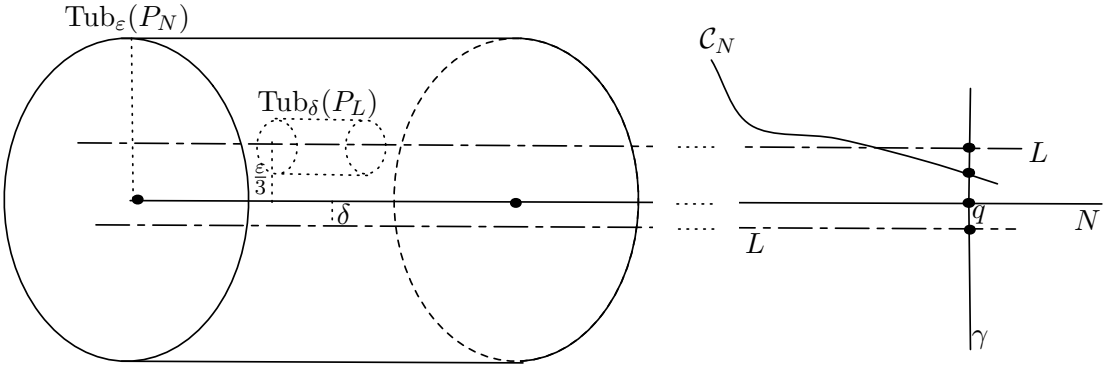
Es war aber γ eine lokale Kürzeste, so dass aus

$$L(\gamma) \leq d(x, P_1) \leq L(\gamma)$$

die Gleichheit folgt.

Zu (ii): Es sei N ein beliebiges Blatt in M. Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass es ein Stück $P_N \subset N$ gibt, für das $\mathrm{Tub}_\varepsilon(P_N)$ eine Tubenumgebung ist. Wir können zusätzlich annehmen, dass das Blatt N die Menge $\exp_N^\perp(B_\varepsilon(P_N))$ nur einmal, nämlich als Zentrum, trifft.

Nun sei angenommen, dass $\inf\{d(p, \mathcal{C}_N) \mid p \in N\} = 0$. Da die Blätter eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind, folgt nach Proposition 1.2.2, dass die Schnittortfunktion σ_N stetig ist. Also finden wir ein Blatt L mit $d(P_L, P_N) = \frac{\varepsilon}{3}$, wobei P_L eine Zusammenhangskomponente von $L \cap \mathrm{Tub}_\varepsilon(P_N)$ ist, einen Punkt $q \in N$ so, dass $d(q, \mathcal{C}_N) < \frac{\varepsilon}{3}$, und wegen (i) eine horizontale Geodätische γ, die den Abstand $d(q, \mathcal{C}_N)$ realisiert und bei der Länge $\frac{\varepsilon}{3}$ das Blatt L schneidet. Da der Schnittort von N auf γ vor L liegt, ist γ nicht die kürzeste Verbindung zwischen $q \in N$ und L. Es folgt, dass $\delta := d(q, L) < \frac{\varepsilon}{3}$. Verschieben wir nun diesen lokalen Abstand zwischen L und N nach P_N vermöge (i), so folgt, dass ein Stück von L auch in der Tubenumgebung $\mathrm{Tub}_\varepsilon(P_N)$ auf der δ-Abstandsphäre von N liegt. Aber $P_L \subset L$ liegt auf der $\frac{\varepsilon}{3}$-Sphäre um P_N. Nochmaliges Verschieben vom δ-Abstand nach P_L zeigt, dass ein weiteres Stück von N die Umgebung $\mathrm{Tub}_\varepsilon(P_N)$ treffen muss, ein Widerspruch zur Wahl von ε!



Also gilt $\inf\{d(p, \mathcal{C}_N) \mid p \in N\} > 0$, was zu zeigen war. □

Mit diesem Satz lassen sich Aussagen, die unter der Zusatzvoraussetzung kompakter Blätter bewiesen wurden, auf den Fall eigentlich eingebetteter Blätter übertragen, so zum Beispiel Ergebnisse aus Kapitel 3.5 bis 3.7. und Kapitel 6.2ff in [Mol88] (*Bemerkung:* Alexandrino und Töben benutzen in [AT07] einige dieser Aussagen im nichtkompakten Fall, ohne auf diese Problematik hinzuweisen).

Insbesondere gilt nicht nur für eine reguläre Riemannsche Blätterung mit kompakten Blättern, sondern allgemein für eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern Lemma 3.7. aus [Mol88] wie folgt:

Lemma 2.1.2 — *Es seien $N \in \mathcal{F}$ beliebig und $\mathrm{Tub}_{\varepsilon_N}(N)$ eine globale Tubenumgebung wie in Satz 2.1.1. Dann gilt:*

(i) Für jedes $x \in N$ ist die Scheibe $S_\varepsilon(x)$ transversal zur Blätterung. Zusätzlich gilt für $N \subset \Sigma_{\mathrm{reg}}$: Für alle $x \in N$ gibt es eine Umgebung $P_y \subset N$, so dass $S_{\varepsilon_N}(P_y)$ eine einfache, offene Umgebung ist.
(ii) $\mathrm{Tub}_{\varepsilon_N}(N)$ ist saturiert, d.h. sie ist eine Vereinigung von Blättern. Für jedes Blatt $L \subset \mathrm{Tub}_{\varepsilon_N}(N)$ ist $d(x, N)$ konstant für alle $x \in L$. □

2.2 (Blatt-)Holonomie und Ausnahmeblätter

In [Mol88] wir der Begriff der *(Blatt-)Holonomie* für Riemannsche Blätterungen mittels des hier im Abschnitt 1.1 beschriebenen Schiebens entlang der Blätter definiert. Also schränken wir uns im Folgenden auf das reguläre Stratum Σ_{reg} ein und definieren in der Notation jenes Abschnittes:

Ist c eine Schleife in x und wählt man die Transversalen $T = T'$, so ist h_c der Keim von einem lokalen Diffeomorphismus, der x fest lässt. Für die Komposition zweier Schleifen c_1 und c_2 in x gilt offensichtlich $h_{c_1 c_2} = h_{c_1} \circ h_{c_2}$. Damit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$h_x : \pi_1(L, x) \to \mathrm{Diff}_x(T),$$

dessen Bild die *Holonomiegruppe von L in x* ist. Vermöge der Identifikation einer lokalen Transversalen mit dem Quotienten $\bar{U}$ ist die Holonomiegruppe unabhängig von der Wahl von T.

Wir nennen ein reguläres Blatt *Ausnahmeblatt*, wenn es nichttriviale Holonomie hat. Weiterhin bezeichnen wir ein reguläres Blatt N als *regulär im engeren Sinn* (abgekürzt: i.e.S. regulär), falls es einen Punkt p aus N und eine lokale Tubenumgebung um p gibt, in der jedes Blatt, das diese Umgebung schneidet, genau ein Stück besitzt. Man beachte, dass Blätter mit trivialer Holonomie nur unter der Zusatzvoraussetzung eigentlich eingebetteter Blätter den im engeren Sinn regulären entsprechen, was wir im folgenden Lemma zeigen werden. Das Stratum dieser Blätter bezeichnen wir dementsprechend mit Σ_{triv}.

Lemma 2.2.1 — *Es sei $(M, \mathcal{F}, g)$ eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern. Dann gilt für jedes reguläre Blatt N:*
N hat nichttriviale Holonomie in x genau dann, wenn es zu jeder genügend kleinen Tubenumgebung um $x \in N$ (bzw. zu jeder Scheibe durch x) ein Blatt gibt, das diese mehrfach trifft.

Bevor wir dieses Lemma beweisen, noch ein paar Überlegungen zur Holonomie und zur Lage von Blattstücken um Ausnahmeblätter herum. Diese Aussagen gelten in jeder global definierten Tubenumgebung, lassen sich aber auch lokal beweisen, wenn die lokalen Umgebungen genügend klein gewählt werden.

Bemerkung — (i) Die Zahl, wie oft ein bestimmtes Blatt in der Nähe des regulären Blattes N eine Scheibe $S(x), x \in N$, trifft, ist unabhängig von $x \in N$, und

(ii) die Holonomie eines Blattes ist nichttrivial in jedem Punkt des Blattes, wenn sie es in einem Punkt ist.

(iii) Die Häufigkeit, wie oft ein im engeren Sinn reguläres Blatt eine Scheibe $S(x)$ trifft, ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\Sigma_{\text{triv}} \cap S(x)$.

(iv) Die Stücke eines Blattes B, das eine genügend kleine Tubenumgebung um $x \in N$ mehrfach trifft, liegen alle in *einer* Tube um N, d.h. sie haben alle den selben Abstand zu N.

Zu (i): Es sei $y \in N$ ein weiterer Punkt des Ausnahmeblattes. Nach Satz 2.1.1 gibt es eine Tubenumgebung um N, die x und y enthält. $S(x)$ sei die Scheibe durch x. Es sei B ein Blatt, so dass $B \cap S(x) = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Verschieben der Abstände von p_i zu x entlang N nach y ergibt, dass B auch die Scheibe $S(y)$ trifft, zu zeigen ist: in r Komponenten. Die Punkte p_i können auf dem Weg von x nach y aber nicht zusammenfallen, denn:
a) Falls zwei Punkte in unterschiedlichem Abstand zu x liegen, so auch zu y wegen lokal konstantem Abstand der Blätter.
b) Falls zwei Punkte p_i, p_j die gleiche Normalensphäre um x schneiden, folgt aus $p_i \neq p_j$, dass $d(p_i, p_j) = s > 0$. Es sei dann p_i' ein Punkt in $S(y)$, den man durch Schieben entlang der Blätter von x nach y aus p_i enthält, und $\tilde{c}$ sei ein stetiger Weg von p_i nach p_i'. Wir können eine lokale Tubenumgebung um $\tilde{c}$ wählen, deren Radius kleiner als s ist und die p_j nicht enthält. Damit folgt, dass auch p_j' nicht in dieser Umgebung enthalten ist. Vertauschen der Rollen von x und y ergibt die Behauptung.

Offensichtlich folgt (ii) aus (i).

Es sei B ein im engeren Sinn reguläres Blatt. Die Offenheit in Punkt (iii) folgt so: Es gibt ein $\delta > 0$ und zu jedem Punkt aus $B \cap S(x)$ eine Tubenumgebung mit Radius δ, die ganz in der Tubenumgebung um $x \in N$ enthalten ist, von B nur das Stück durch $B \cap S(x)$ enthält und auch von jedem Blatt, das diese Umgebung schneidet, genau ein Stück enthält. Dass diese Stücke aus jeder der Tubenumgebungen zu jeweils den gleichen Blättern gehören, folgt mittels Schieben entlang der Blätter. Da B beliebig war, ist diese Eigenschaft offen in $\Sigma_{\text{triv}} \cap S(x)$. Abgeschlossenheit folgt nun aus der Offenheit des Komplementes.

Zu (iv): Es sei ε der Radius einer Tubenumgebung um $x \in N$, die von N nur das Stück durch x enthält. Weiterhin seien P_1, P_2 zwei Stücke eines Blattes in dieser Umgebung, so dass $d(P_1, N) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $d(P_2, N) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Lokal gleicher Abstand der Blätter und Schieben entlang der Blätter von P_1 nach P_2 ergeben, dass es ein Stück von N geben muss, das in der $d(P_1, N)$-Tube um P_2 liegt. Da diese Tube aber in der ε-Tubenumgebung um $x \in N$ enthalten ist, kann jenes Stück von N nur das durch x sein, also folgt die Behauptung.

Beweis des Lemmas 2.2.1. „⇒“ Angenommen, es gibt eine Tubenumgebung und damit eine Scheibe $S(x)$ durch x, die von jedem Blatt genau einmal getroffen wird. Da jedes dieser Blätter die gleiche Dimension wie N hat, besteht dessen Schnitt mit der Scheibe nur aus einem Punkt, denn die Blätter innerhalb der Tubenumgebung treffen die Scheibe transversal. Also liefert Schieben entlang der Blätter nur die Identität auf $S(x)$.

„⇐“ Es sei c ein geschlossener Weg in N, der in x beginnt und endet. Wir wählen eine globale Tubenumgebung um N; deren Radius sei ε. Wir betrachten nun ein Blatt B, das die zu dieser Tubenumgebung gehörende Scheibe durch den Punkt x mindestens

zweimal, in b_1 und b_2, trifft. Verschieben entlang c des Abstandes $d(b_1, x)$ nach b_2 ist also nicht-trivial. Aus der Beliebigkeit von B folgt die Behauptung. □

Ziel dieses Abschnittes ist es nun, die Lage von Ausnahmeblättern in M genauer zu untersuchen. Wir werden zeigen, dass einerseits das Stratum der Blätter mit trivialer Holonomie, Σ_{triv}, offen, zusammenhängend und dicht in M liegt, und dass andererseits das Stratum der Ausnahmeblätter $\Sigma_{\text{aus}} = \Sigma_{\text{reg}} \setminus \Sigma_{\text{triv}}$ zumindest lokal die Struktur von totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten von M trägt.

Proposition 2.2.2 — *Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern. Dann liegt die Menge der Blätter mit trivialer Holonomie offen und dicht in M.*

Beweis. Da Σ_{reg} offen und dicht in M ist, genügt es zu zeigen, dass Σ_{triv} offen und dicht in Σ_{reg} liegt. Offenheit ist klar nach Lemma 2.2.1.

Es seien N ein Ausnahmeblatt, $x \in N$ und $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\text{Tub}_{\varepsilon_0}(N)$ eine globale Tubenumgebung von N ist. Es sei $\varepsilon < \varepsilon_0$ beliebig. Wenn jedes Blatt die $\frac{\varepsilon}{3}$-Scheibe durch $x \in N$ nur einmal träfe, wäre N kein Ausnahmeblatt; es sei also B ein Blatt, das diese b-mal trifft. Annahme: B ist nicht im engeren Sinn regulär. Dann können wir die vorangegangene Überlegung wie folgt iterieren:

Nach Bemerkung (iv) liegen die Punkte $\{B_1, \ldots, B_b\} = B \cap S_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ von B sogar in *einer* zu N normalen Abstandssphäre um x (dies ist sichergestellt durch das Dritteln des Radius). Nun wählen wir zu diesen Punkten von B lokale Tubenumgebungen $\{\text{Tub}_\delta(B_i)\}$ mit einem festen Radius δ so klein, dass diese sich nicht schneiden, in der $\frac{\varepsilon}{3}$-Umgebung um N liegen und je genau ein B_i enthalten; diese dritteln wir wieder. Da B ein Ausnahmeblatt sein soll, gibt es ein Blatt C, das jede dieser Tuben und damit $\text{Tub}_{\frac{\delta}{3}}(B_i) \cap S_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ mehrfach, sagen wir c-mal, trifft. Wir erhalten also bc unterschiedliche Punkte von C in der $\frac{\varepsilon}{3}$-Scheibe um x. Dabei gilt:

(i) Die Punkte $C_{i1}, \ldots, C_{ic}$ haben jeweils den gleichen Abstand von B_i, liegen also in einer Sphäre um B_i.

(ii) Alle bc Punkte $C_{11}, \ldots, C_{bc}$ von C liegen in einer Sphäre mit festem Radius um x.

Ist die Dimension der Mannigfaltigkeit M gleich n und die der regulären Blätter gleich k, so ist die Dimension einer normalen Abstandssphäre eines Punktes in Σ_{reg} gleich $(n-k)-1$. Der Raum, in dem die verschiedenen Punkte von $C \cap S_\varepsilon(x)$ liegen können, ist also nur noch $(n-k-2)$-dimensional (oder kleiner). Wenn auch C wieder ein Ausnahmeblatt ist, wiederholen wir diese Konstruktion und erhalten ein Blatt, das die Scheibe mehrmals in konstantem Abstand zu C, konstantem Abstand zu B und konstantem Abstand zu N schneidet, also liegen diese Schnittpunkte in einem $(n-k-3)$-dimensionalen Raum. Spätestens nach $n-k-1$ Schritten erreichen wir so ein Blatt, das regulär im engeren Sinn ist, denn die Annahme, dass in dessen Umgebung Blätter noch mehrfach vorbeikommen, führt dann zum Widerspruch.

Innerhalb jeder ε-Umgebung von x gibt es also ein im engeren Sinn reguläres Blatt bzw. Punkte, die zu einem solchen gehören. Aus der Beliebigkeit von N und x folgt die Behauptung. □

Für den Beweis, dass Σ_{triv} zusammenhängend ist, werden wir die Struktur des Ausnahmestratums benutzen, die wir wie folgt formulieren können:

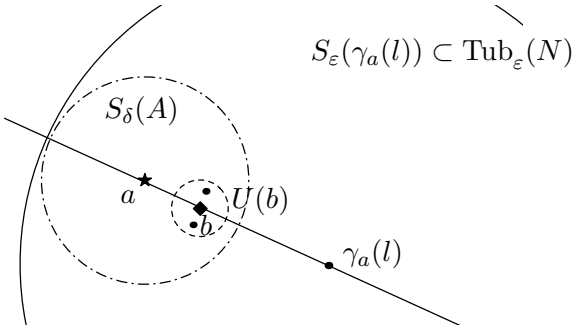
Lemma 2.2.3 — *Die Zusammenhangskomponenten von Σ_{aus} sind Untermannigfaltigkeiten von Σ_{reg}. Nämlich entweder isolierte Ausnahmeblätter oder aber lokal Urbild von totalgeodätischen, d.h. lokal konvexen Mengen der lokalen Quotientenräume.*

Bemerkung — Der folgende Beweis zeigt nicht, dass diese Zusammenhangskomponenten als Untermannigfaltigkeiten in Σ_{reg} bzw. in M keinen Rand haben. Dies wird jedoch in Lemma 2.3.3 gezeigt; für die zwischenzeitlichen Aussagen ist diese Behauptung ohne Bedeutung.

Beweis. Liegen alle Ausnahmeblätter voneinander isoliert, so stimmt die Behauptung trivialer Weise. Also sei angenommen, es gibt ein Blatt N, zu dem sich Ausnahmeblätter häufen. Es folgt sofort, dass N selbst ein Ausnahmeblatt oder singulär ist. Wir wählen ε so klein, dass $\text{Tub}_\varepsilon(N)$ als globale Tubenumgebung definiert ist. Nun sei A ein Ausnahmeblatt, das in dieser Umgebung liegt. Dann kann man A und N durch ihren Abstand realisierende, insbesondere horizontale Geodätische verbinden; ein Zusammenhangsargument und konstanter Abstand der Blätter liefern einen differenzierbaren Verbindungsstreifen zwischen den beiden Blättern aus solchen Kürzesten $\{\gamma_a\}_{a\in A}$, alle gleicher Länge l. Ein weiteres Blatt B, das eine dieser Geodätischen zum Zeitpunkt t trifft, also einmal zwischen N und A liegt, trifft alle Geodätischen zum Zeitpunkt t. Auch dies zeigt ein einfaches offen-abgeschlossen-Argument zusammen mit lokal konstantem Abstand der Blätter. Weiterhin liegt sogar jeder Punkt aus B auf einer solchen Geodätischen, was man wie folgt einsieht:

Wir nehmen den Abstand von einem Punkt $p \in B$ zu N und den Abstand von p zu A und betrachten die zugehörige, gebrochene Geodätische von $\pi_N(p) \in N$ nach $\pi_A(p) \in A$. Da sie stückweise die gleiche Länge hat wie die Verbindungsgeodätischen, ist sie entweder ungebrochen und schon in dieser Menge enthalten, oder der Abstand von $\pi_N(p) \in N$ nach $\pi_A(p) \in A$ ist echt kleiner als l, was unmöglich ist.

Wegen Lemma 1.1.3 folgt: Das Blatt B hat die gleiche Dimension wie A. Es sei nun $\text{Tub}_\delta(A)$ eine globale Tubenumgebung um A, und es sei B wie oben so nah an A gewählt, dass B in dieser Umgebung enthalten ist. Es seien $a \in A$ beliebig und $b \in B$ der Punkt, der auf der Kürzesten von a nach N liegt. Da wir innerhalb von $\text{Tub}_\varepsilon(N)$ arbeiten, ist diese eindeutig. In einer Scheibe durch a ist b dann der einzige Punkt aus B, weil sich die Abstandssphären $S_{d(a,b)}(a)$ und $S_{d(b,N)}(\gamma_a(l))$nur in b berühren. Da A ein Ausnahmeblatt ist, gibt es in einer beliebig gewählten Umgebung $U(b) \subset \text{Tub}_\delta(A)$ von b ein i.e.S. reguläres Blatt, das die Scheibe $S_\delta(a)$ mehrfach trifft. Wegen lokal konstantem Abstand der Blätter muss dieses Blatt $U(b) \cap S_\delta(a)$ mehrfach schneiden, denn sonst gäbe es weitere Punkte aus B in $S_\delta(a)$. Nach Definition ist also auch B ein Ausnahmeblatt.



Dies gilt für jedes $B \in \bigcup_{a\in A} \gamma_a \cap \text{Tub}_\delta(A)$. Innerhalb von Σ_{reg} ist Σ_{aus} abgeschlossen,

also ist auch das Blatt im Rand, $B \in \bigcup_{a\in A} \gamma_a \cap \overline{\mathrm{Tub}_\delta(A)}$, ein Ausnahmeblatt. Übernimmt dieses Randblatt B nun die Rolle von A und wiederholen wir den Beweis (ggf. mehrfach), so sehen wir, dass alle Blätter zwischen N und A, die $\bigcup_{a\in A} \gamma_a$ schneiden, Ausnahmeblätter sind.

Wir beobachten: Im lokalen Quotientenraum $\bar{U}$ liegen die Kürzesten zwischen beliebigen Punkten aus $\pi_U(\Sigma_{\mathrm{aus}} \cap U)$ ganz in $\pi_U(\Sigma_{\mathrm{aus}} \cap U)$; diese Menge ist also lokal konvex und damit (im Inneren) glatt, siehe [Wa81]. Als Urbild unter der Submersion π_U ist dann auch $\Sigma_{\mathrm{aus}} \cap U$ glatt. □

Proposition 2.2.4 — *Die Menge der Blätter mit trivialer Holonomie,* Σ_{triv}*, ist zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, $\Sigma_{\mathrm{reg}} \setminus \Sigma_{\mathrm{aus}}$ ist nicht zusammenhängend. Damit eine Komponente $\mathcal{Z} \subset \Sigma_{\mathrm{aus}}$ das Stratum der Blätter mit trivialer Holonomie trennt, muss sie mindestens $(n-1)$-dimensional und ohne Rand sein. Da aber Σ_{triv} dicht liegt, kann $\mathcal{Z}$ auch nur höchtens $(n-1)$-dimensional sein. Die Fasern des Normalenbündels von $\mathcal{Z}$ sind dann eindimensional; lokal kann man zwei Punkte, die in unterschiedlichen Zusammenhangskomponononenten von Σ_{triv} liegen sollen, durch Zuordung von unterschiedlichen Vorzeichen charakterisieren (man betrachte $\mathcal{Z}$ als Nullschnitt im Bündel). Wir wollen also zeigen, dass $\mathcal{Z}$ nicht orientierbar ist, falls $\dim(\mathcal{Z}) = n-1$.

Erster Fall: Ein einzelnes Ausnahmeblatt N (und damit alle regulären Blätter) hat Dimension $n-1$. Nach der Charakterisierung von Ausnahmeblättern, Lemma 2.2.1, gibt es in jeder genügend kleinen, lokalen Tube um $p \in N$ ein reguläres Blatt mit mehr als einem Stück in der Tube. Trennt N das im engeren Sinn reguläre Stratum, so trennt N auch die Tube. In transversaler Richtung, also im Raum der Blätter, besteht die Tube aber nur aus zwei Punkten, denn sie ist wie das Blatt $(n-1)$-dimensional; und diese beiden Punkte haben unterschiedliches Vorzeichen, liegen also, falls N trennt, in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. Sie gehören aber beide zum selben regulären Blatt, also kann N nicht Σ_{triv} trennen.

Zweiter Fall: Die Zusammenhangskomponente $\mathcal{Z}$ ist Vereinigung von Ausnahmeblättern. Es seien $p \in L_p \subset \mathcal{Z}$ und $\mathrm{Tub}_\varepsilon(L_p)$ eine globale Tubenumgebung von L_p. Nach Annahme wird $\mathrm{Tub}_\varepsilon(L_p) \cap \Sigma_{\mathrm{triv}}$ von $\mathcal{Z}$ getrennt. Weiterhin gibt es beliebig nahe an p ein Blatt $N \subset \Sigma_{\mathrm{triv}}$, das $S_\varepsilon(p)$ in mehreren Punkten schneidet. Es seien $x, y \in N \cap S_\varepsilon(p)$, und $c : [0,1] \to N$ sei ein Weg von $x = c(0)$ nach $y = c(1)$. In jedem Punkt $c(t), t \in [0,1]$, nehmen wir den Abstand $d(c(t), \mathcal{Z})$. Dieser ist konstant entlang c, denn alle Blätter haben jeweils konstanten Abstand zueinander. Also gilt $d(x, \mathcal{Z}) = d(y, \mathcal{Z})$, und weil $\mathcal{Z}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von Σ_{reg} ist, liegen x und y in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Tub}_\varepsilon(L_p) \cap \Sigma_{\mathrm{triv}}$, aber im gleichen Blatt N. Daher kann $\mathcal{Z}$ das Stratum der Blätter mit trivialer Holonomie nicht trennen. □

Aus Bemerkung (iii) zusammen mit den Propositionen 2.2.2 und 2.2.4 folgt:

Korollar 2.2.5 — *In einer globalen Tubenumgebung eines Ausnahmeblattes kommen alle i.e.S. regulären Blätter gleich häufig vorbei.*

Genauer: Es seien N ein Ausnahmeblatt, $x \in N$ und $\mathrm{Tub}_\varepsilon(N)$ eine globale Tubenumgebung des Blattes N. Dann ist die Zahl der Schnittpunkte eines Blattes mit der Scheibe $S_\varepsilon(x)$ auf der Menge der im engeren Sinn regulären Blätter in $\mathrm{Tub}_\varepsilon(N)$ konstant und größer als 1. □

2.3 Eine Stratifizierung von Σ_{aus} und von M

Die Überlegungen auf den letzten Seiten haben gezeigt, dass sich bei einer singulären Riemannschen Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern selbst die schwerer fassbaren Ausnahmeblätter nicht allzu wild verhalten. Diesen Gedanken wollen wir ein wenig weiter verfolgen.

In Anbetracht des Korollars 2.2.5 können wir den folgenden, wohldefinierten Begriff einführen:

Definition 2.3.1 — Der *Typ des Ausnahmeblattes* N_x ist die natürliche Zahl

$$a_N := \#\{S_\varepsilon(x) \cap L \mid L \subset \Sigma_{\text{triv}} \cap \text{Tub}_\varepsilon(N)\}.$$

Aus der lokalen Beschreibung einer singulären Riemannschen Blätterung kombiniert mit dem Tubensatz 2.1.1 und Korollar 2.2.5 folgt sofort:

Lemma 2.3.2 — *Es sei N ein Ausnahmeblatt vom Typ a_N (bzw. i.e.S. regulär) mit globaler Tubenumgebung $\text{Tub}_\varepsilon(N)$. Dann ist die orthogonale Projektion*

$$\pi : \text{Tub}_\varepsilon(N) \to N$$

eingeschränkt auf ein beliebiges Blatt $L \subset \text{Tub}_\varepsilon(N)$ eine $\frac{a_N}{a_L}$-fache Überlagerung (bzw. ein globaler Diffeomorphismus). □

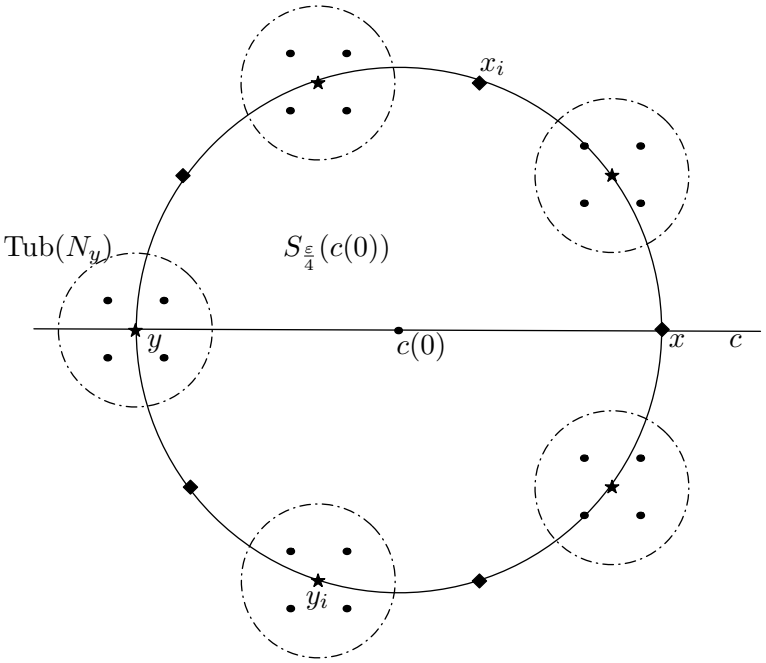
Ehe wir die Differenzierung von Σ_{aus} nach den Typen der Blätter genauer untersuchen, zunächst ein Lemma allgemeinerer Art. Im Kapitel 4 werden wir die Antwort der folgenden, in den hiesigen Kontext passenden Frage benötigen: Wenn $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine horizontale Geodätische ist, was können wir über die Lage von Ausnahmeblättern oder aber Blättern mit trivialer Holonomie, die c schneiden, sagen?

Lemma 2.3.3 — *Ist $c(0)$ sowohl Häufungspunkt von Ausnahmepunkten auf c als auch Häufungspunkt von i.e.S. regulären Punkten auf c, so ist $c(0)$ singulär.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei angenommen, dass $\varepsilon > 0$ so klein gewählt wurde, dass zum einen $\text{Tub}_\varepsilon(N_0)$ eine globale Tubenumgebung ist, und dass zum anderen auf $c|_{(-\varepsilon,0)}$ nur Ausnahmepunkte und auf $c|_{(0,\varepsilon)}$ nur i.e.S. reguläre Punkte liegen. Dass letzteres möglich ist, folgt aus Lemma 2.2.3: Liegt ein Ausnahmeblatt innerhalb einer globalen Tubenumgebung eines anderen Blattes, so sind alle Blätter, die eine horizontale Verbindungs-Geodätische dieser Blätter treffen, Ausnahmeblätter. Ferner sei angenommen, dass N_0 ein Ausnahmeblatt ist.

Nun sei $x \in \Sigma_{\text{triv}} \cap c$ mit $d(x, c(0)) = \frac{\varepsilon}{4}$. Das zugehörige Blatt N_x schneidet die Tube $\text{Tub}_\varepsilon(N_0)$ mehrfach, nämlich a_{N_0}-mal (für dies und alles Weitere siehe auch die nachfolgende Skizze). Alle diese Schnittpunkte $\{x_i\}$ mit einer Scheibe durch $c(0)$ liegen auf der Abstandssphäre $S^{c(0)}_{\frac{\varepsilon}{4}}$ (Bemerkung (iv) zu Lemma 2.2.1). Es gilt $y := c(-\frac{\varepsilon}{4}) \in \Sigma_{\text{aus}}$ und natürlich $d(x, y) = \frac{\varepsilon}{2}$. Wir verschieben diesen Abstand entlang des Blattes N_x zu den verschiedenen Punkten $\{x_i\}$. Es folgt, dass auch das Ausnahmeblatt N_y die Tube $\text{Tub}_\varepsilon(N_0)$ mehrfach trifft; wegen der Abstandsbedingung zu N_0 müssen auch die Schnittpunkte $\{y_i\}$ von N_y mit der Scheibe durch $c(0)$ auf der Abstandssphäre $S^{c(0)}_{\frac{\varepsilon}{4}}$ liegen. Aus $d(x, y) = \frac{\varepsilon}{2} = d(x_i, y_i)$ für alle i folgt weiterhin, dass y_i jeweils

der Antipodenpunkt zu x_i ist. Aber N_y ist ein Ausnahmeblatt, also treffen i.e.S. reguläre Blätter eine globale Tubenumgebung von N_y mehrfach. Diese Umgebung können wir nun so klein wählen, dass weder $c(0)$ noch einer der Punkte x_i darin enthalten ist. Ein i.e.S. reguläres Blatt, das eine solche Tube a_{N_y}-mal schneidet, schneidet die globale Tube $\mathrm{Tub}_\varepsilon(N_0)$ um N_0 dann also mindestens $a_{N_y} a_{N_0}$-mal, ein Widerspruch.



□

Zwar haben wir von Anfang an die Menge Σ_{aus} ein Stratum genannt, aber uns bisher noch nicht klar gemacht, dass diese intuitive Begriffswahl (modulo Zusammenhangskomponenten) im genauen Sinn der Definition auch angebracht ist. Es sei hier zunächst kurz wiederholt, was man unter einer Stratifizierung einer Mannigfaltigkeit versteht:

Eine lokal endliche Partition einer Mannigfaltigkeit M in lokal abgeschlossene, zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten M_i ($i \in I$) von M, die *Strata,* heißt eine *Stratifizierung,* falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes $i \in I$ gilt für den Abschluss $\overline{M}_i$ in M, dass

$$\overline{M}_i = M_i \cup \bigcup_{j \in I_i} M_j, \text{ wobei } I_i \subset I \setminus \{i\} \text{ und } \dim M_j < \dim M_i \text{ für alle } j \in I_i.$$

Man nennt diese Partition eine *Whitney-Stratifizierung,* falls zusätzliche Regularitätsbedingungen erfüllt sind:

a) Für jedes $i \in I, j \in I_i$ und jede Folge $\{x_n\} \subset M_i$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M_j$ und $\lim_{n\to\infty} T_{x_n} M_i = L$ im Grassmannbündel von TM gilt: $T_x M_j \subset L$.

b) Sind $\{x_n\}$ eine Folge wie in a) und $\{y_n\}$ eine Folge im Grenzstratum M_j so, dass $\lim y_n = x$ und $y_n \neq x_n$ für alle n, dann ist jede Grenzgerade der eindimensionalen Unterräume $\mathbf{R} \cdot \lambda(x_n, y_n)$ von $T_{x_n} M$ für $n \to \infty$ enthalten in L. Dabei ist λ ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung der Diagonalen in $M \times M$ auf eine offene Umgebung des Nullschnittes in TM. (Die Menge der Grenzgeraden hängt offensichtlich nicht von der Wahl von λ ab.)

Für den Spezialfall, dass eine singuläre Riemannsche Blätterung die Orbitblätterung einer eigentlichen Gruppenwirkung ist, ist bekannt, dass die Unterteilung in Orbittypen die Bedingungen an eine Whitney-Stratifizierung erfüllt. Wir vermuten, dass dies auch im Allgemeinen für eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern der Fall ist.

Hier zeigen wir, dass diese Unterteilung in Blatttypen zumindest eine Stratifizierung ist; die wichtigste Zutat dafür ist das folgende Lemma:

Lemma 2.3.4 — *Ist p Häufungspunkt von Ausnahmepunkten $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ und nicht singulär, so ist N_p ein Ausnahmeblatt, und es gilt für den Typ des Blattes:*

$$a_{N_p} \geq \limsup\{a_{N_i}\}, \text{ wobei } a_{N_i} := a_{N_{p_i}}.$$

Ferner ist die Funktion $x \mapsto a_{N_x}$ entlang jeder horizontalen Geodätischen $c \subset \Sigma_{\text{aus}}$ bis auf isolierte Punkte konstant, d.h. fast alle Blätter, die c schneiden, sind vom gleichen Typ, die übrigen sind von höherem Typ.

Beweis. Zu jeder Tubenumgebung von p gibt es ein $i_0 \in \mathbf{N}$, so dass die Ausnahmeblätter $\{N_{p_i}\}_{i \geq i_0}$ die Tubenumgebung schneiden. Damit gibt es für jedes $i \geq i_0$ reguläre Blätter, die diese Tubenumgebung mindestens a_{N_i}-mal schneiden, nämlich i.e.S. reguläre Blätter, die sehr nahe an N_{p_i} liegen und dessen Typ definieren. Da die Blätter eigentlich eingebettet sind, ist die Zahl a_{N_p} und damit auch die rechte Seite der Ungleichung endlich, und es folgt die erste Behauptung.

Beschränken wir uns auf eine zusammenhängende Teilmenge $U \subset \Sigma_{\text{aus}}$, so können wir darin die Menge der Ausnahmeblätter von minimalem Typ betrachten; es folgt aus dem eben bewiesenen, dass diese Menge offen in U ist. Mit den Methoden des Beweises zu Proposition 2.2.2 (Tubenumgebungen dritteln, Abstände verschieben, iterieren) sieht man leicht, dass diese Blätter aufgefasst werden können als *regulär in U,* d.h. in Tubenumgebungen von Ausnahmeblättern höheren Typs müssen diese mehrfach vorbei kommen. Häufen sich also entlang einer horizontalen Geodätischen in Σ_{aus} zwei verschiedene Typen von Ausnahmeblättern, so können wir den Beweis des Lemmas 2.3.3 auf diesen Fall übertragen und es folgt, dass der Häufungspunkt singulär sein muss, ein Widerspruch. □

Mit diesem Lemma folgt sofort

Proposition 2.3.5 — *Die Unterteilung von Σ_{aus} bezügliches des Typs der Blätter*

$$\Sigma_{\text{aus}} = \dot{\bigcup}_{a_N} \{N \text{ ist vom Typ } a_N\}$$

ist eine Stratifizierung. □

Wie in Kapitel 1 erwähnt, ist nach Molino die Unterteilung von $(M; \mathcal{F})$ bezüglich der Dimension der Blätter eine Stratifizierung. In Verbindung mit Lemma 2.3.4 und Proposition 2.3.5 folgt schließlich:

Satz 2.3.6 — *Die feinere Unterteilung von $(M, \mathcal{F})$ in die Menge der i.e.S. regulären Blätter, Typenstrata der Ausnahmeblätter und Dimensionsstrata der singulären Blätter ist eine Stratifizierung.* □

3 Die Eigenschaft „ohne horizontal konjugierte Punkte“

Nach den allgemeinen Aussagen über singuläre Riemannsche Blätterungen im zweiten Kapitel stellen wir von nun an die weitere Forderung an die Blätterung $(M, \mathcal{F})$, sie möge keine horizontal konjugierten Punkte haben. Diese Einschränkung erweist sich als dankbare Möglichkeit, Aussagen über die globale Geometrie der Blätter zu machen: Satz 3.2.3 gibt eine äquivalente, sehr geometrische Beschreibung dieser Bedingung, nämlich dass singuläre Punkte genau die Fokalpunkte sind. Damit können wir schließlich die im vierten Kapitel diskutierte Tautheit der regulären Blätter beweisen. Ein Beispiel für singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte ist die Orbitblätterung einer variationell vollständigen, isometrischen Wirkung.

Zeitgleich und unabhängig von der vorliegenden Arbeit untersuchten Lytchak in [Ly07a], [Ly07b], sowie der selbe in Zusammenarbeit mit Thorbergsson in [LTh07], aber auch Alexandrino und Töben in [AT07] singuläre Riemannsche Blätterungen teils unter den selben Zusatzvoraussetzungen mit teilweise gleichen und umfassenderen Ergebnissen wie in diesem dritten Kapitel.

Für Proposition 3.1.5 vereinfacht die Einschränkung auf Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte den Beweis wesentlich und macht ihn insbesondere geometrisch anschaulich. Korollar 3.1.6 wird in [AT07] nur für Blätter mit trivialer Holonomie gezeigt; die Verallgemeinerung auf alle Blätter beruht auf dem Trick, Homothetien nicht nur entlang von Normalenvektorfeldern sondern als global in einer Tube definiert zu betrachten. Dass bei singulären Riemannschen Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte die singulären Punkte genau die Fokalpunkte mit Indizes wie in Proposition 3.2.2 sind, wird mit anderen Methoden in [LTh07] gezeigt; einzig die Rückrichtung in Satz 3.2.3 ist in jener Arbeit nicht zu finden.

Ausgangspunkt dieses Teils der Arbeit ist der Artikel [LTh05], in dem der Begriff von horizontal konjugierten Punkten das erste Mal eingeführt wird. Es gibt zwei, nicht offensichtlich äquivalente Definitionen:

(Def. I) Eine singuläre Riemannsche Blätterung $(M, \mathcal{F})$ heißt *ohne horizontal konjugierte Punkte,* falls für alle horizontalen Geodätischen $\gamma \subset M$ und alle horizontalen Jacobifelder X entlang γ gilt: Gibt es zwei Punkte t_1, t_2 in denen X tangential zum entsprechenden Blatt ist, d.h. $X(t_1) \in T_{t_1}N_{t_1}$ und $X(t_2) \in T_{t_2}N_{t_2}$, so ist X immer tangential zu den von γ getroffenen Blättern. Dabei ist ein *horizontales Jacobifeld* ein Variationsvektorfeld von γ einer Variation durch horizontale Geodätische.

(Def. II) Eine singuläre Riemannsche Blätterung hat die Eigenschaft *ohne horizontal konjugierte Punkte,* falls für alle Blätter N und alle Geodätischen γ senkrecht zu N gilt: Jedes N-Jacobifeld J entlang γ, das tangential zu einem anderen Blatt als N ist, ist zu jedem von γ getroffenen Blatt tangential.

Es ist leicht zu sehen, dass die erste Definition die zweite enthält. Im Folgenden arbeiten wir durchgehend mit der scheinbar enger gefassten zweiten Definition. Die Äquivalenz

der beiden Definitionen wird in [LTh07] gezeigt.

Wir nennen einen Punkt $q \in M$ entsprechend der zweiten Definition *horizontal konjugiert zu* p falls es eine horizontale Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ und ein N_p-Jacobifeld J entlang γ gibt, so dass $J(0) \in T_pN_p, J(1) \in T_qN_q$, aber J ist nicht zu jedem von γ getroffenen Blatt tangential.

3.1 Tangentiale Jacobifelder; Homothetien

Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung. Ferner sei γ eine Geodätische, die orthogonal zu einem und damit zu allen von ihr getroffenen Blättern ist. Entsprechend der Notation in [LTh05] definieren wir:

$$\mathcal{J} := \bigcup_t \{J \mid J \text{ ist } N_t\text{-Jacobi-Feld zu } \gamma\} \quad \text{und} \quad \mathcal{K} := \bigcap_t \{J \mid J \text{ ist } N_t\text{-Jacobi-Feld zu } \gamma\},$$

wobei t den Definitionsbereich von γ durchläuft. Es gilt, dass $\mathcal{K}$ ein Vektorraum ist, $\mathcal{J}$ ist es im Allgemeinen jedoch nicht.

Ein Jacobifeld J entlang γ nennen wir *überall tangential,* wenn es für alle t tangential zum Blatt N_t ist:

$$J(t) \in T_{\gamma(t)}N_t \text{ für alle } t.$$

Insbesondere ist jedes Jacobifeld $J \in \mathcal{K}$ überall tangential. Es stellen sich die folgenden Fragen:

✦ Ist ein überall tangentiales N_0-Jacobifeld entlang γ schon in $\mathcal{K}$ enthalten, also ein N_t-Jacobifeld für jedes von γ getroffene Blatt N_t?

✦ Spannen die überall tangentialen Jacobifelder in jedem Punkt $\gamma(t)$ den Tangentialraum $T_{\gamma(t)}N_t$ auf?

Die zweite Frage wird in [LTh07], Abschnitt 4.5, für singuläre Riemannsche Blätterungen (ohne die Zusatzvoraussetzung „ohne horizontal konjugierte Punkte“!) wie folgt beantwortet:

Lemma 3.1.1 — *Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung, und es sei $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ eine horizontale Geodätische. Ferner sei W^γ der Raum von horizontalen Jacobifeldern entlang γ, die von Variationen stammen, in denen alle Geodätischen zum selben Zeitpunkt das selbe Blatt wie γ treffen. Dann spannt W^γ in jedem Punkt $t \in (-\infty, \infty)$ den Tangentialraum des Blattes N_t auf:*

$$\{J(t) \mid J \in W^\gamma\} = T_{\gamma(t)}N_t.$$

Insbesondere gilt $J(\tilde{t}) \in T_{\gamma(\tilde{t})}N_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t}$.

Die erste Frage ist zumindest für singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte positiv zu beantworten, siehe Lemma 3.1.3. Dieses Lemma vervollständigt den Beweis von Proposition 3.1.2 (Proposition 3.1 in [LTh05]).

Proposition 3.1.2 — *In der Notation wie oben gilt $T_{\gamma(t)}N_t = \{J(t) \mid J \in \mathcal{K}\}$.*

Im genannten Artikel wird Folgendes bewiesen: Zu jedem t_0 aus dem Definitionsbereich von γ und zu jedem $v \in T_{\gamma(t_0)}N_{t_0}$ existiert ein N_{t_0}-Jacobifeld J, das in jedem Punkt $\gamma(t)$ tangential zum entsprechenden Blatt ist. Dazu wird innerhalb einer Tubenumgebung von $\gamma(t_0)$ eine Kurve $\alpha \subset N_{t_0}$ mit $\dot{\alpha}(0) = v$ mit Hilfe der lokalen Riemannschen Submersion $\pi_{N_{t_0}}$ hochgehoben in ein nahes Blatt B. Die Verbindungsgeodätischen dieser beiden Kurven bilden eine horizontale Variation $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbf{R} \to M$ von γ. Das zugehörige Jacobifeld J entlang γ ist zweimal tangential, nämlich an N_{t_0} sowie an B, also nach Voraussetzung überall tangential.

Da die Kurve α ganz im Blatt N_{t_0} verläuft, erhalten wir sogar eine Familie von Jacobifeldern J_s (zu den Geodätischen $f_s(\cdot)$), die für alle t tangential zu den Blättern $N_{f_s(t)}$ sind. Mit dieser Notation gilt für singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte

Lemma 3.1.3 — *Falls J ein N_{t_0}-Jacobifeld ist, das zu jedem Blatt durch γ tangential ist, so ist J schon ein $N_{\tilde{t}}$-Jacobifeld für alle $\tilde{t} \in \mathbf{R}$, d.h. $J \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Es sei $\tilde{t}$ fest gewählt. Wir definieren $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ c(s) := f(s, \tilde{t})$, als den Weg durch die Variation f zum festen Zeitpunkt $\tilde{t}$. Dann gilt

$$\dot{c}(0) \in T_{\gamma(\tilde{t})}N_{\tilde{t}} \quad \text{und} \quad \dot{c}(s) \in T_{f_s(\tilde{t})}N_{f_s(\tilde{t})}.$$

Wir zeigen nun – gegebenenfalls nach Verkleinerung von ε –, dass für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Geodätische $f_s(\cdot)$ in der Variation f von γ das Blatt $N_{\tilde{t}}$ zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ trifft. Dazu sei $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein Punkt mit der Eigenschaft:

$$\dim(N_{c(s_0)}) = \max\{\dim(N_{c(s)}) \mid s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

O.B.d.A. liege s_0 im Intervall $(-\varepsilon, 0)$. Zu diesem Punkt s_0 gibt es eine Umgebung in M, die nur von Blättern gleicher oder höherer Dimension geschnitten wird. Wegen Maximalität der Blattdimension in $c(s_0)$ entlang c existiert also ein δ so, dass $c|_{(s_0-\delta,\, s_0+\delta)} \subset \Sigma_{\dim(N_{c(s_0)})}$. Die Einschränkung der singulären Riemannschen Blätterung $\mathcal{F}$ auf ein Stratum, hier also $\Sigma_{\dim(N_{c(s_0)})}$, ist eine reguläre Riemannsche Blätterung; für diese können wir folgern, dass ein zu den Blättern tangentialer Weg in einem festen Blatt verläuft:

Es existiert zu $c(s_0)$ eine in diesem Punkt zentrierte lokale Karte

$$\psi : U_{s_0} \to V \times W \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k},$$

so dass $\psi(U_{s_0} \cap N_{s_0}) \subset \mathbf{R}^k$, und für jedes Blatt N mit $N \cap U_{s_0} \neq \emptyset$ gilt:

$$\psi(N \cap U_{s_0}) \subset \mathbf{R}^k \times \{\text{isolierte Punkte}\}.$$

Wir schreiben die Verkettung der Abbildungen $\psi \circ c : (s_0 - \delta,\, s_0 + \delta) \to V \times W$ komponentenweise als (c_1, c_2). Da $\dot{c}(s) \in T_{f_s(s_0)}N_{f_s(s_0)}$, folgt $\dot{c}_2 \equiv 0$ und $c(s) \in N_{s_0}$ für alle $s \in (s_0 - \delta,\, s_0 + \delta)$.

Es sei nun $\tilde{\delta}$ maximal, so dass $c|_{(s_0-\delta,\, s_0+\tilde{\delta})}$ im Blatt $N_{c(s_0)}$ enthalten ist. Dieses Intervall muss offen sein wegen oben genannter Umgebungsdarstellung. Was passiert im Randpunkt $c(s_0 + \tilde{\delta})$? Auch hier betrachte man eine Tubenumgebung des entsprechenden Blattes. Die Stücke aller Blätter in dieser Umgebung liegen in Tuben um das Blatt $N_{c(s_0+\tilde{\delta})}$, insbesondere ist ihr Abstand lokal konstant. Da $c|_{[s_0,\, s_0+\tilde{\delta}]}$ kompakt ist, gibt

es nur endlich viele Stücke, in denen c in dieser Zeit verläuft. Damit existiert eine positive Zahl ρ so, dass der Abstand von $c(s_0 + \tilde{\delta})$ zu $c(s)$ für alle $s \in [s_0,\, s_0 + \tilde{\delta})$ größer oder gleich ρ ist, ein Widerspruch zur Stetigkeit von c. Es folgt, dass c auf dem ganzen Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ im Blatt $N_{c(s_0)} = N_{c(0)} = N_{\tilde{t}}$ verläuft.

Weil $f_s(\cdot)$ für jedes s orthogonal zu N_{t_0} ist, ist $f_s(\cdot)$ auch orthogonal zu $N_{\tilde{t}}$, denn die Blätterung ist Riemannsch. Damit ist f eine $N_{\tilde{t}}$ -Variation, und J also $N_{\tilde{t}}$ -Jacobifeld. □

Im Beweis haben wir, ohne die Einschränkung „ohne horizontal konjugierte Punkte“ zu benutzen, gezeigt:

Proposition 3.1.4 — *Für eine singuläre Riemannsche Blätterung $(M, \mathcal{F})$ gilt: Eine Kurve $c \subset M$, die überall tangential zu den Blättern verläuft, d.h. für alle s gilt $\dot{c}(s) \in T_{c(s)}N_{c(s)}$, liegt ganz in einem festen Blatt.* □

Mit Hilfe der Proposition 3.1.2 lässt sich nun folgern, dass singuläre Punkte auf einer zu den Blättern senkrechten Geodätischen, die ein reguläres Blatt trifft, isoliert liegen. Weiterhin existieren damit die in 1.1.3 definierten Homothetien auch für negative λ.

Proposition 3.1.5 — *Für eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte gilt:*

(i) Auf einer horizontalen Geodätischen gilt bis auf isolierte Punkte

$$\dim N_{\gamma(t)} = \max\{\dim N_{\gamma(s)} \mid s \in \mathbf{R}\}.$$

(ii) Die homothetischen Transformationen h_λ existieren auch für negative λ, und diese respektieren die Blätterung. Insbesondere erhält also die Spiegelung *an einem Blatt die Blätterung.*

Beweis. Zu (i): Es sei $\gamma(t_0)$ ein Punkt, in dem die Geodätische γ ein Blatt maximaler Dimension (entlang γ) senkrecht trifft, $\gamma(t_1)$ sei ein Punkt niedrigerer Dimension. Wegen der Maximalität der Blattdimension in $\gamma(t_0)$ kann t_1 zunächst so gewählt werden, dass $\gamma|_{[t_0,t_1)} \subset \Sigma_{\dim(N_{t_0})}$. Zu $\gamma(t_1)$ existiert eine Tubenumgebung des Blattes N_{t_1}, in der nur gleich- oder höherdimensionale Blätter liegen; deren Radius in Normalenrichtung sei ρ. Weiterhin betrachten wir das Stratum $\Sigma_{\dim(N_{t_1})}$. Nach [Mol88], S. 196, ist der Schnitt der Tubenumgebung mit dem Stratum eine Vereinigung von geodätischen Bögen der Länge 2ρ, die senkrecht auf N_{t_1} stehen. Auch γ trifft das Blatt N_{t_1} in $\gamma(t_1)$ senkrecht, also gilt

$$\gamma|_{(t_1-\rho,t_1+\rho)} \subset \Sigma_{\dim(N_{t_1})} \text{ oder } (\gamma|_{(t_1-\rho,t_1+\rho)} \setminus \{\gamma(t_1)\}) \cap \Sigma_{\dim(N_{t_1})} = \emptyset.$$

Ersteres führt zum Widerspruch, da $\gamma|_{[t_0,t_1)} \subset \Sigma_{\dim N_{t_0}}$. Mit der Existenz positiver Homothetien folgt, dass ein offenes Intervall mit Mindestlänge ρ „nach“ dem singulären Punkt $\gamma(t_1)$ ganz in einem Stratum liegt, in dem die Dimension der Blätter höher ist als $\dim(N_{t_1})$. Es bleibt also zu zeigen: Es existiert $\varepsilon < \rho$, so dass $\gamma(t_1 + \varepsilon) \in \Sigma_{\dim N_{t_0}}$.

Die entlang γ maximale Dimension der Blätter sei mit k bezeichnet, die des Blattes N_{t_1} mit l. Betrachten wir die Scheibe der Tubenumgebung des Blattes N_{t_1} durch den Punkt $\gamma(t_1)$. Der Schnitt dieser mit einem Blatt $N_{t_1-\varepsilon}$ (bzw. eine Zusammenhangskomponente davon) ist $(k-l)$-dimensional und liegt in einer $(\dim(M)-l)$-Sphäre um

$\gamma(t_1)$. Nehmen wir alle Geodätischen, die in $\gamma(t_1)$ beginnen und zur gleichen Zeit wie γ in $N_{t_1-\varepsilon}$ enden, so erhalten wir eine $(k-l)$-dimensionale Variation durch Geodätische, die senkrecht auf $N_{t_1-\varepsilon}$ und damit auf jedem getroffenen Blatt stehen. Da die Mannigfaltigkeit vollständig ist, sind die Geodätischen fortsetzbar; die negativen Startvektoren sind tangential zu den negativen Kurven und spannen insbesondere auch eine $(k-l)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $T_{\gamma(t_1)}M$ auf. Da wir uns innerhalb der Tubenumgebung befinden, ist die negative Variation bis $t_1+\varepsilon$ immer noch $(k-l)$-dimensional und wir können die Existenz eindeutiger Geodätischer zu beliebigen zwei Punkten voraussetzen. Damit ist das zum Zeitpunkt $t_1+\varepsilon$ getroffene Blatt mit obiger Aussage, dass Geodätische einer Variation zu einem festen Zeitpunkt in *einem* Blatt sind, mindestens und nach Voraussetzung höchstens k-dimensional, also maximal.

Zu (ii): Der unter (i) geführte Beweis zeigt die Existenz der homethetischen Transformation h_{-1}, also der Spiegelung (genügend nahe liegender Blätter) an N_{t_1}. Verkettung mit positiven Homothetien liefert die Behauptung. □

Korollar 3.1.6 — *Es sei N ein beliebiges Blatt in M mit globaler Tubenumgebung* $\mathrm{Tub}_\varepsilon(N)$. *Dann sind die homothetischen Transformationen*

$$h_\lambda : S^N_\delta \to S^N_{\lambda\delta}$$

(sofern $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und δ definiert sind) Diffeomorphismen zwischen Blättern, d.h. für ein beliebiges Blatt $L_1 \subset S^N_\delta$ ist $h_\lambda(L_1) =: L_2$ ein Blatt und $h_{\lambda^{-1}}(L_2) = L_1$.

Beweis. Aus Proposition 3.1.5 folgt, dass h_λ lokal offene Mengen von L_1 diffeomorph auf offene Mengen in anderen Blättern abbildet. Das Bild $h_\lambda(c)$ eines beliebigen Weges $c : [0,1] \to L_1$ verläuft tangential zu den Blättern, weil die entsprechende Variation durch horizontale Geodätische, entlang der $h_\lambda|_c$ definiert ist, in L_1 sowie in N tangential ist. Also bildet h_λ das Blatt L_1 in *ein* anderes Blatt L_2 ab. Ferner ist $h_\lambda : L_1 \to L_2$ injektiv, da innerhalb einer globalen Tubenumgebung definiert.

Angenommen, es gibt einen Punkt $x \in L_2$, der im Abschluss von $h_\lambda(L_1)$ enthalten ist, aber nicht im Bild von h_λ. Dann gibt es eine Variation durch horizontale Geodätische von L_1 durch N, deren Endpunkte in L_2 gegen x konvergieren. Die Grenzkurve dieser ist eine Geodätische γ, die in L_1 beginnt und wegen Stetigkeit horizontal ist und N trifft. Also ist $\gamma(0) \in L_1$ Urbild von x unter h_λ. Damit ist $h_\lambda(L_1)$ offen und abgeschlossen in L_2, also gleich L_2. □

Bemerkung — In [AT07] sowie in [LTh07] wird gezeigt, dass die Spiegelung in einer lokalen Tubenumgebung auch im Allgemeinen die Blätterung respektiert. Da offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden, kann die Verklebung solcher lokalen Abbildungen innerhalb einer globalen Tubenumgebung nicht die Blätter wechseln, also können wir mit Hilfe des Satzes 2.1.1 verallgemeinern: *Bei einer singulären Riemannschen Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern sind die innerhalb von globalen Tubenumgebungen definierten Homothetien Diffeomorphismen zwischen den Blättern.*

3.2 Singuläre Punkte und Fokalpunkte

Der vorige Abschnitt hat zwei wichtige Eigenschaften singulärer Riemannscher Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte gezeigt: Singuläre Punkte liegen entlang

zu den Blättern senkrechter Geodätischer isoliert, falls diese mindestens ein reguläres Blatt treffen, und die überall tangentialen Jacobifelder spannen in jedem Punkt den Tangentialraum zum entsprechenden Blatt auf. Damit lassen sich nun Fokalpunkte von Blättern genauestens charakerisieren.

Es sei im Folgenden $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte; es sei γ wieder eine Geodätische in M, die zum Zeitpunkt 0 das Blatt N_0 senkrecht trifft. Zusätzlich habe N_0 entlang γ maximale Dimension. Dann gilt:

Lemma 3.2.1 — *$\gamma(t)$ ist ein Fokalpunkt von N_0* $\iff$ $\dim N_t < \dim N_0$.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Dies folgt klar aus dem Beweis von Proposition 3.1.5: Zu einem Blatt $N_{t+\varepsilon}$ nahe bei $\gamma(t)$ finden wir eine $(k-l)$-dimensionale Variation durch Geodätische, die in $\gamma(t)$ starten und senkrecht auf den getroffenen Blättern stehen, so dass die Variation in $N_{t+\varepsilon}$ und damit überall tangential ist. Ein singulärer Punkt auf γ ist also Fokalpunkt zu jedem von γ getroffenen, höherdimensionalen Blatt.

„$\Rightarrow$“: $f(s, \tilde{t})$ bezeichne eine nichttriviale Variation durch Geodätische, die in N_0 senkrecht starten und und das Blatt N_t in $\gamma(t)$ (senkrecht) treffen. Das zugehörige Jacobifeld ist tangential in $\gamma(0)$ sowie in $\gamma(t)$, also überall. Damit ist $f(s, \tilde{t})$ eine $N_{\tilde{t}}$-Variation für jedes von γ zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ getroffene Blatt, mit Fokalpunkt $\gamma(t)$, falls $N_{\tilde{t}}$ höhere Dimension hat als N_t. Wir betrachten nun wieder eine Tubenumgebung des Blattes N_t um den Punkt $\gamma(t)$, in der zu je zwei Punkten eindeutige kürzeste Verbindungen existieren. Es sei ε so klein gewählt, dass $\gamma(t+\varepsilon)$ in dieser Umgebung liegt. Die Geodätischen der Variation $f(s, \tilde{t})$ treffen $N_{t+\varepsilon}$ immer zum gleichen Zeitpunkt $t+\varepsilon$, also liegt $f(s, t+\varepsilon)$ für alle s in $S_\varepsilon^{\gamma(t)}$, der Normalen-Sphäre mit Radius ε um $\gamma(t)$. Unter der Annahme, dass auch N_t maximale Dimension habe, hat das Blatt $N_{t+\varepsilon}$ die gleiche Dimension wie N_t, und es gilt:

$$N_{t+\varepsilon} \text{ trifft } S_\varepsilon^{\gamma(t)} \text{ in höchstens endlich vielen Punkten,}$$

ein Widerspruch dazu, dass die Variation nichttrivial ist und eindeutige Kürzeste existieren. Also folgt $\dim N_t < \dim N_0$. □

Es gilt für eine singuläre Riemannsche Blätterung immer, dass singuläre Punkte Fokalpunkte zu nahe liegenden Blättern sind: Zu einem singulären Punkt $x \in L_x$ wählen wir eine Tubenumgebung, auf der $\exp^\perp$ ein Diffeomorphismus ist. Innerhalb dieser gibt es ein Stück eines regulären Blattes L_y, das in einer Tube um L_x liegt. Aus Dimensionsgründen ist $L_y \cap S(x)$ nicht nulldimensional, dabei sei $S(x)$ die Scheibe von $\mathrm{Tub}(L_x)$ durch x. Die Menge der geodätischen Verbindungen von $p \in L_y \cap S(x)$ mit x (für alle solche p) liefert eine in x verschwindende, nichttriviale Variation $f(s,t)$ durch Geodätische, die auf L_y senkrecht stehen und dort beginnen; also ist x Fokalpunkt bezüglich jeder Geodätischen f_s zum Blatt L_y.

Bemerkung — Im Allgemeinen können Fokalpunkte in regulären Blättern liegen!

Beispiel — (i) „Das triviale Beispiel“: Die Sphäre S^2 mit Standard-Metrik, geblättert durch Punkte. Dann sind alle Blätter regulär, und jede Geodätische ist horizontal. Konjugierte Punkte sind offensichtlich horizontal konjugierte Punkte und gleichzeitig Fokalpunkte zueinander.

(ii) Polare Wirkungen kompakter Liegruppen auf kompakten symmetrischen Räumen vom Rang 1 besitzen im Allgemeinen globale Schnitte, in denen horizontal konjugierte Punkte liegen: Jede Geodätische ist geschlossen, Schnitte sind totalgeodätisch, und auf einer geschlossenen, horizontalen Geodätischen γ, die über $[0,1]$ parametrisiert ist, liegt der zu $\gamma(0)$ horizontal konjugierte Punkt bei $\frac{1}{2}$, fast immer erhält man also horizontal konjugierte Punkte in regulären Blättern (siehe hierzu auch [TTh95]).
(iii) Auch eine isoparametrische Blätterung der Sphäre S^n ist ein Beispiel für eine singuläre Riemannsche Blätterung mit horizontal konjugierten Punkten; auch hier liegen diese fast immer in regulären Blättern. Eine mögliche Definition ist nach [Te85] bzw. [PT89] und [HPT88] die folgende: $(S^n, \mathcal{F})$ ist eine *isoparametrische Blätterung*, wenn sie singulär und Riemannsch ist und globale Schnitte besitzt.

Nun aber wieder zurück zu unserer Situation einer singulären Riemannschen Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte. Betrachten wir den Beweis von Lemma 3.2.1 bzw. von Proposition 3.1.5 (i) genauer, so können wir folgern:

Proposition 3.2.2 — *Zu jedem singulären Punkt p in M und jedem regulären (genauer: höherdimensionalen) Blatt N gibt es eine Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) =: q \in N, \gamma(1) = p$, die senkrecht auf $N = N_q$ steht, so dass p Fokalpunkt von N_q längs γ ist mit konstanter Multiplizität*

$$\nu(p) = \dim(N_q) - \dim(N_p).$$

Insbesondere ist die Multiplizität von p unabhängig von der Wahl von γ.

Beweis. Wir fällen das Lot von p auf das beliebig gewählte reguläre Blatt N: Es sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische, die senkrecht auf $N = N_q$ in $q = \gamma(0)$ beginnt und im singulären Punkt p endet. Wie im Beweis von Lemma 3.2.1 kann man eine Variation von γ der maximalen Dimension $\nu(p)$ lokal um p konstruieren und global, also bis in das Blatt N_q fortsetzen. Wäre diese in N_q nicht auch $\nu(p)$-dimensional, so wäre q entlang γ selbst ein Fokalpunkt, nämlich zu dem Blatt $N_{t+\varepsilon}$ (in der Notation des obigen Beweises) – ein Widerspruch dazu, dass N_q regulär ist. □

Ist die Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte, so sind Fokalpunkte also singulär. Umgekehrt sind singuläre Punkte Fokalpunkte. Diese beiden Aussagen lassen sich kombinieren und verschärfen, so dass wir eine anschauliche Charakterisierung für singuläre Riemannsche Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte erhalten. Hierzu benötigen wir die in [LTh07] sowie in [AT07] bewiesene Gültigkeit der Proposition 3.1.5, Teil (i), für singuläre Riemannsche Blätterungen (ohne Zusatzbedinungen).

Satz 3.2.3 — *Eine singuläre Riemannsche Blätterung besitzt genau dann keine horizontal konjugierten Punkte, wenn die singulären Punkte genau die Fokalpunkte sind.*

Dem Beweis des Satzes voran stellen wir noch ein für die Rückrichtung benötigtes Lemma (siehe hierzu auch [Ly07]); es sei vorausgesetzt, dass die singulären Punkte genau die Fokalpunkte sind.

Lemma 3.2.4 — *Es sei $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ eine horizontale Geodätische. Gilt für $a < b$, dass $\gamma(b)$ entlang γ zu $\gamma(a)$ horizontal konjugiert ist, so gibt es für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $c \in (a + \delta, b + \varepsilon)$ so, dass $\gamma(c)$ horizontal konjugiert ist zu $\gamma(a + \delta)$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{T}$ die Menge der überall tangentialen Jacobifelder entlang γ:

$$\mathcal{T} := \{J \mid J \text{ ist Jacobifeld entlang } \gamma, J(\tilde{t}) \in T_{\gamma(\tilde{t})}N_{\tilde{t}}\ \forall_{\tilde{t}}\}$$

Analog zu [Wi06], siehe auch [LTh05], erhalten wir ein Bündel $\mathcal{V}_\gamma$ über $\mathbf{R}$, indem wir $\mathcal{T}$ wie folgt in den singulären Punkten erweitern:

$$\mathcal{V}_t = \{J(t) \mid J \in \mathcal{T}\} \oplus \{J'(t) \mid J \in \mathcal{T}, J(t) = 0\}.$$

Es gilt $\{J'(t) \mid J \in \mathcal{T}, J(t) = 0\} = 0$, wenn t regulär ist, da nach Voraussetzung Fokalpunkte nur in singulären Punkten liegen. Von diesen wissen wir, dass sie isoliert entlang γ liegen. Damit ist $\mathcal{V}_\gamma$ ein glattes Bündel, und für alle t gilt: $\dim(\mathcal{V}_t) = \dim(T_{\gamma(t_0)}N_{t_0})$, wobei $\gamma(t_0)$ ein regulärer Punkt ist (siehe Proposition 3.2 in [LTh05]). Wir definieren den Horizontalteil $\mathcal{H}_t$ als das orthogonale Komplement von $\mathcal{V}_t$ in $T_{\gamma(t)}N_t$ und nennen das entsprechende Bündel $\mathcal{H}_\gamma$.

Lytchak und Thorbergsson haben in [LTh05] gezeigt, dass man zu $\mathcal{H}_\gamma$ eine Morse-Sturm-Differentialgleichung (siehe hierzu Anhang A) in $\mathbf{R}^k$ assoziieren kann, so dass der Lösungsraum $\mathcal{L}$ derselben gerade die horizontalen Jacobifelder entlang γ bestimmt, die in a verschwinden. Nach dem verallgemeinerten Indexsatz von Morse gilt für die zugehörige Indexform

$$I_{a,b}(V, W) = \int_a^b \langle V', W' \rangle - \langle \mathcal{R}(t)V, W \rangle \, dt,$$

dass

$$\mathrm{Ker}(I_{a,b}) = \{J|_{[a,b]} \mid J \in \mathcal{L}, J(b) = 0\} \quad \text{und} \quad \mathrm{Ind}(I_{a,b}) = \sum_{t \in (a,b)} \nu(t),$$

d.h. der Index ist gleich der Summe der zu a horizontal konjugierten Punkte gezählt mit Multiplizitäten. Dabei sind V, W aus $H_0^1([a, b], \mathbf{R}^k)$, dem Raum der absolut stetigen, $\mathbf{R}^n$-wertigen Abbildungen auf $[a, b]$ mit quadrat-integrabler Ableitung und Randbedingung $V(a) = V(b) = 0$; $\mathcal{R}$ ist stetig und $\mathcal{R}(t)$ ist selbstadjungiert für alle t. (Für Details siehe [LTh05].)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nun $\gamma(b)$ der erste konjugierte Punkt zu $\gamma(a)$. Für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{U} \subset H_0^1([a, b + \varepsilon], \mathbf{R}^k)$ ein maximaler Unterraum, auf dem die Indexform negativ definit ist, also

$$I_{a,b+\varepsilon}(V, V) < 0 \ \text{ für alle } V \in \mathcal{U}.$$

Die Morse-Sturm-Differentialgleichung und daher auch die zugehörige Indexform sind stetig abhängig von den Randbedingungen. Ferner existiert um $N_{\gamma(a)}$ eine Umgebung, in der nur gleich- oder höherdimensionale Blätter liegen, und es folgt mit dem Indexsatz für alle genügend kleinen $\delta > 0$, dass

$$I_{a+\delta,b+\varepsilon}(\tilde{V}, \tilde{V}) < 0 \ \text{ für alle } \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}},$$

wobei $\tilde{\mathcal{U}} \subset H_0^1([a+\delta, b+\varepsilon], \mathbf{R}^k)$ mit Randbedingung $V(a+\delta) = V(b+\varepsilon) = 0$ ein Unterraum der Dimension $\dim(U)$ ist. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und des Indexsatzes können wir nun folgern:

$$\exists_{c \in (a+\delta, b+\varepsilon)} : \gamma(c) \text{ ist horizontal konjugiert zu } \gamma(a+\delta). \qquad (*)$$

□

Bemerkung — In der Aussage $(*)$ gilt genauer: Für den zu $\gamma(a+\delta)$ horizontal konjugierten Punkt $\gamma(c)$ folgt $c \in [b, b+\varepsilon)$.

Nach Annahme liegt zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ kein horizontal konjugierter Punkt, also gilt für alle $\tilde{\varepsilon} > 0$ und alle $W \in H_0^1([a, b-\tilde{\varepsilon}], \mathbf{R}^k)$, dass $I_{a,b-\tilde{\varepsilon}}(W,W) > 0$. War δ in $(*)$ genügend klein gewählt, so gilt wegen Stetigkeit auch $I_{a+\delta,b-\tilde{\varepsilon}}(W,W) > 0$. Also hat $\gamma(a+\delta)$ auf $\gamma|_{[a+\delta,b)}$ keinen horizontal konjugierten Punkt.

Beweis des Satzes 3.2.3. Mit Blick auf Lemma 3.2.1 bleibt nur noch zu zeigen: Sind die Fokalpunkte singulär, so folgt, dass die Blätterung keine horizontal konjugierten Punkte besitzt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Es sei angenommen, dass horizontal konjugierte Punkte existieren, das heißt: Es gibt eine horizontale Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$, zwei Punkte $t_0, t_1 \in [0,1]$ und ein N_0-Jacobifeld J entlang γ mit $J(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}N_{t_0}$, aber $J(t_1) \notin T_{\gamma(t_1)}N_{t_1}$. Nach Lemma 3.1.1 existiert ein überall zu den Blättern tangentiales N_0-Jacobifeld $\tilde{J}$ entlang γ mit $\tilde{J}(t_0) = J(t_0)$. Die Differenz $J - \tilde{J}$ ist ein N_0-Jacobifeld, das in t_0, aber nicht identisch verschwindet. Also ist $\gamma(t_0)$ ein Fokalpunkt von N_0.

Aus [Wi06] (Anfang Abschnitt 3) können wir folgern, dass für das N_0-Jacobifeld $J-\tilde{J}$ in t_0 gilt: $(J-\tilde{J})'(t_0) \in \nu_{\gamma(t_0)}N_{t_0}$, d.h. $J - \tilde{J}$ ist auch ein N_{t_0}-Jacobifeld. Nun wenden wir noch einmal das Lemma 3.1.1 an: Es gibt ein $\hat{J}$ so, dass $J - \tilde{J} - \hat{J}$ ein nicht-triviales N_{t_0}-Jacobifeld ist, das in 0 verschwindet. Also ist $\gamma(0)$ ein Fokalpunkt von N_0 und nach Voraussetzung singulär.

Lemma 3.2.4 besagt, dass man an horizontal konjugierten Punkten - anschaulich gesprochen - wackeln kann, d.h. horizontal konjugierte Punkte liegen nicht isoliert. Jedoch haben wir soeben gezeigt, dass (in der Notation des Lemmas 3.2.4 bleibend) sowohl $\gamma(0)$ als auch $\gamma(0+\delta)$ für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ in singulären Blättern liegen müssen. Die singulären Punkte entlang γ liegen aber isoliert, ein Widerspruch! Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Korollar 3.2.5 — *Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung, so dass die regulären Blätter Kodimension eins haben. Dann ist die Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte.*

Beweis des Korollars. Es sei N ein beliebiges Blatt von $\mathcal{F}$. In [Bol73] wird gezeigt, dass die kritischen Punkte der normalen Exponentialfunktion $\exp_N^\perp$ genau die singulären Punkte sind, falls die Blätterung ein Blatt mit Kodimension eins besitzt. □

Korollar 3.2.6 — *Eine reguläre Riemannsche Blätterung hat genau dann keine horizontal konjugierten Punkte, wenn kein Blatt Fokalpunkte besitzt.* □

4 Tautheit

Weiterhin betrachten wir singuläre Riemannsche Blätterungen (mit eigentlich eingebetteten Blättern) ohne horizontal konjugierte Punkte. In diesem Kapitel wollen wir nun die Topologie regulärer Blätter genauer untersuchen. Die dazu passende Brücke zwischen Differentialgeometrie und algebraischer Topologie, die wir begehen werden, schlägt die Morse-Theorie.

Zunächst sei an einige im Folgenden benötigte Begriffe erinnert: Es seien (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \to M$ eine eigentliche Immersion. Für eine *Randbedingung* $B \subset M \times M$ sei $P(M, B)$ die Menge aller H^1-Wege (d.h. absolut stetige Wege mit quadrat-integrabler Ableitung) c in M mit $(c(0), c(1)) \in B$. Entsprechend ist

$$P(M, N \times p) = \{c : [0,1] \to M \text{ in } H^1 \;\mid\; (c(0), c(1)) \in (N, p)\}.$$

Versehen mit der Metrik

$$\langle V, W\rangle = \int_0^1 \langle V(t), W(t)\rangle \, dt + \int_0^1 \left\langle \frac{\nabla}{dt} V, \frac{\nabla}{dt} W \right\rangle dt$$

ist $P(M, N \times p)$ eine vollständige Riemannsche Hilbert-Mannigfaltigkeit.

Von zentralem Interesse ist nun das *Energie-Integral*

$$E_p : P(M, N \times p) \to \mathbf{R};\; E_p(c) := \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2 dt.$$

Während nämlich die in der Morse-Theorie auf $\mathbf{R}^n$ oder S^n typischer Weise untersuchte Quadrat-Abstands-Funktion $f_p : N \to \mathbf{R}, f(x) = \|x - p\|^2$ auf beliebigen Mannigfaltigkeiten nicht einmal mehr differenzierbar ist, sobald der Schnittort von p nicht leer ist, ist das Energie-Integral E_p eine Morse-Funktion auf dem Hilbert-Raum $P(M, N \times p)$ genau dann, wenn p kein Fokalpunkt von N ist, also fast immer. Dabei wird nicht verlangt, dass die Niveaus der kritischen Punkte einer Morse-Funktion unterschiedlich sind, sondern nur, dass alle kritischen Punkte nicht-ausgeartet sind. E_p ist insbesondere nach unten beschränkt und erfüllt die Palais-Smale-Bedingung. Ferner ist von E_p bekannt, dass $c \in P(M, N \times p)$ genau dann ein kritischer Punkt ist, wenn c eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, die in $c(0)$ senkrecht zu N startet. Das Index-Theorem von Morse besagt:

Der Index von E_p in einem kritischen Punkt c ist gleich der Summe der Fokalpunkte von N entlang $c|_{(0,1)}$ gezählt mit Vielfachheiten.

Im Raum $P(M, N \times p)$ definieren wir für alle $r \in \mathbf{R}$ die folgende Teilmenge von Wegen mit beschränkter Energie: $\mathcal{N}_p^r := \{c \in P(M, N \times p) \mid E_p(c) \leq r\}$. Die Zahl μ_k^r kritischer Punkte vom Index k von E_p in N_p^r ist dann endlich. Bezeichnen wir die k-te Bettizahl von N_p^r bezüglich $\mathbf{Z}_2$-Koeffizienten mit b_k^r, so gelten für jedes r die Morse-Ungleichungen

$$\mu_k^r \geq b_k^r \quad \text{für alle } k.$$

Eine Morse-Funktion heißt *perfekt,* wenn für alle r und alle k Gleichheit gilt: $\mu_k^r = b_k^r$. Dann also bestimmen die Fokalpunkte von N entlang einer senkrechten Geodätischen vollständig die Topologie des Wegeraumes $P(M, N \times p)$. Zum Beispiel vermöge der Homotopiesequenz für Faserungen lassen sich Rückschlüsse auf die Topologie der Untermannigfaltigkeit N ziehen.

4.1 Taute Einbettungen

Der Begriff der Tautheit wurde für immersierte Untermannigfaltigkeiten in $\mathbf{R}^n$ und S^n vermöge der oben genannten Abstandsfunktion eingeführt: $N \subset \mathbf{R}^n$ (S^n) heißt *taut,* wenn die Morse-Funktion $f_p : N \to \mathbf{R}$ perfekt ist für generisches p. Terng und Thorbergsson haben in [TTh97] gezeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Energie-Integral für generisches p eine perfekte Morse-Funktion ist. Deswegen verallgemeinern sie für eine beliebige, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M:

Definition 4.1.1 — Eine eigentliche Immersion $N \to M$ heißt *taut,* wenn das Energie-Integral $E_p : P(M, N \times p) \to \mathbf{R}$ perfekt ist für jeden Punkt p in M, der nicht Fokalpunkt von N ist. Insbesondere ist ein Punkt $q \in M$ ein *tauter Punkt*, wenn $\{q\}$ als Untermannigfaltigkeit taut in M ist.

In Anbetracht der Resultate aus dem dritten Kapitel scheint es für eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte Erfolg versprechend, die Tautheit regulärer Blätter zu untersuchen, um die Topologie derselben beschreiben zu können: Wir kennen nicht nur die Fokalpunkte eines regulären Blattes N entlang senkrechter Geodätischer, nämlich genau die Punkte aus singulären Blättern (Satz 3.2.3), sondern auch deren Multiplizitäten, nämlich die Differenz der Dimensionen von N und des entsprechenden singulären Blattes (Proposition 3.2.2).

Wie aber lässt sich Tautheit nachweisen? Wir müssen für ein Blatt N zeigen, dass das Energie-Integral E_p mit $p \in \Sigma_{\text{reg}}$ perfekt ist, dass also die Morse-Ungleichungen für den Wegeraum $P(M, N \times p)$ Gleichungen sind. Deswegen ist es eine mögliche Strategie, für jedes k und für jede zu N senkrecht startende Geodätische vom Index k zu zeigen, dass es eine „zugehörige“ nicht-triviale Klasse der k-ten Homologiegruppe von $P(M, N \times p)$ gibt. Ein Zykel, der eine solche Klasse repräsentiert, lässt sich in der Tat häufig explizit aus den in M gegebenen Daten (Fokalpunkte und deren Multiplizitäten) konstruieren und wird seiner Funktion entsprechend *ergänzender Zykel,* „linking cycle“, genannt. Die Idee dieser Konstruktion geht zurück auf Morse selbst, siehe [Mor34], S. 244ff, und wurde vielfach erfolgreich zum Nachweis von Tautheit angewandt:

⇨ In [STh71], S. 59ff, werden so ergänzende Zykel auf Sphären konstruiert;

⇨ Bott und Samelson zeigen damit in [BS58] die Tautheit variationell vollständiger Wirkungen;

⇨ Gorodski und Thorbergsson konstruieren explizite Zykel für bestimmte taute, nicht variationell vollständige Darstellungen in [GTh02].

⇨ Eine Anwendung findet sich in [Th83] für Dupinsche Hyperflächen,

⇨ in [Ew98] eine für äquifokale Untermannigfaltigkeiten.

Eine sehr gute Referenz für dieses Thema ist das Buch von Palais und Terng, [PT89], insbesondere Kapitel 8 für Tautheit, Kapitel 9 als Einführung in die Morse-Theorie, Kapitel 10 zur Konstruktion der ergänzenden Zykel.

Auch wir werden im nächsten Abschnitt ergänzende Zykel bezüglich $\mathbf{Z}_2$-Homologie von $P(M, N \times p)$, N ein reguläres Blatt von $(M, \mathcal{F})$, explizit konstruieren. Der Morse-theoretische Ansatz dazu ist der gleiche wie in [BS58] und [Th83]:

Wie eben sei

$$\mathcal{N}_p^r = \{c \in P(M, N \times p) \mid E_p(c) \leq r\}$$

sowie

$$\mathcal{N}_p^{r-} = \{c \in P(M, N \times p) \mid E_p(c) < r\}.$$

Es ist bekannt, dass $\mathcal{N}_p^r$ homotopieäquivalent zu $\mathcal{N}_p^{r-}$ ist, wenn r kein kritischer Wert ist. Ist letzteres der Fall, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$H_k(\mathcal{N}_p^r, \mathcal{N}_p^{r-\varepsilon}) = \mathbf{Z}_2^i,$$

wobei i die Zahl der kritischen Punkte von E_p mit Index k und Wert r ist. Aus der langen exakten Homologie-Sequenz für Raumpaare folgt, dass E_p genau dann perfekt ist, wenn

$$H_k(\mathcal{N}_p^r) \to H_k(\mathcal{N}_p^r, \mathcal{N}_p^{r-\varepsilon}) \qquad (*)$$

surjektiv für alle k ist.

Es sei γ ein kritischer Punkt von E_p mit Wert r, und es seien

$$1 > t_1 > \ldots > t_k > t_{k+1} = 0$$

so, dass $\{\gamma(t_i)\}_{i=1}^k$ genau die Fokalpunkte von N entlang γ sind. Dann gilt

$$\mathrm{ind}(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \nu(\gamma(t_i)).$$

Um die Surjektivität von $(*)$ zu zeigen, genügt es nach den oben genannten Artikeln, für jedes solche γ eine kompakte, $\mathrm{ind}(\gamma)$-dimensionale Mannigfaltigkeit K mit einer glatten Abbildung

$$\lambda : K \to P(M; N \times p)$$

zu konstruieren, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\lambda(x_0) = \gamma$ für genau ein $x_0 \in K$, und es gibt eine Umgebung U von γ so, dass $\lambda|_{\lambda^{-1}(U)}$ injektiv ist,

(ii) γ ist der einzige kritische Punkt von E_p im Bild von λ, und

(iii) $E_p(\lambda(x)) \leq E_p(\gamma) = r$ für alle $x \in K$.

Denn: Das Bild $\lambda(K)$ lässt sich dann entlang des negativen Gradientenflusses von E_p in einen glatten Zykel Z_γ in $P(M, N \times p)$ deformieren, der eine nicht-triviale Klasse in $H_{\mathrm{ind}(\gamma)}(\mathcal{N}_p^r)$ repräsentiert. Wegen der Bedingungen (i) und (ii) ist auch deren Bild unter $(*)$ nicht-trivial (dies ist mit der „Zugehörigkeit“ oben gemeint). Für jeden kritischen Punkt γ ist also Z_γ ein ergänzender Zykel, $H_k(\mathcal{N}_p^r) \to H_k(\mathcal{N}_p^r, \mathcal{N}_p^{r-\varepsilon})$ ist dann für jedes k surjektiv, und aus der Beliebigkeit von p, r und γ folgt die Tautheit von N.

4.2 Die Topologie singulärer Riemannscher Blätterungen ohne horizontal konjugierte Punkte

Nun sind genügend Werkzeuge zusammengestellt, um ebendiese Blätterungen auf Tautheit hin zu untersuchen. Zu Beginn beschränken wir uns auf den „einfachsten“ Fall, nämlich kritische Punkte γ des Energie-Integrals E_p vom Index eins. Daran kann man den Weg für die allgemeinere Konstruktion – und auch die Schwierigkeiten – schon erkennen. Existieren zu einem Blatt N für alle regulären Punkte $p \in M$ ergänzende Zykel für jeden kritischen Punkt vom Index eins in $P(M, N \times p)$ so nennt man das Blatt 0-*taut*. Wir zeigen:

Satz 4.2.1 — *Es sei $(M, \mathcal{F})$ eine singuläre Riemannsche Blätterung ohne horizontal konjugierte Punkte auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Dann sind die regulären Blätter von $(M, \mathcal{F})$ 0-taut.*

Bemerkung — Die im nachfolgenden Beweis ausgeführte Konstruktion des Zykels geht genauso für jedes reguläre Blatt N und jede horizontale Geodätische mit nur einem kritischen Punkt, welcher aber beliebigen Index haben kann.

Beweis. Es seien N ein reguläres Blatt und $\gamma : [0,1] \to M$ ein kritischer Punkt von E_p wie oben. Also ist γ eine horizontale Geodätische, und sie besitzt genau einen Fokalpunkt $\gamma(t_0)$ der Multiplizität eins. Wir müssen dazu einen 1-Zykel in $\mathcal{N}_p^{E(\gamma)}$ konstruieren.

Der Punkt $\gamma(t_0)$ ist nach Satz 3.2.3 singulär. Deshalb folgt in Verbindung mit Lemma 2.3.3 und Lemma 2.3.4, dass bis auf isolierte Punkte alle Punkte entlang $\gamma|_{[0,t_0]}$ gleichen Typs sind. Ferner sind jene Ausnahmepunkte von höheren Typen als die übrigen.

Es sei $\mathrm{Tub}_\varepsilon(N_{t_0})$ eine globale Tubenumgebung. Wir wählen $\delta < \varepsilon$ so, dass $\gamma(t_0 - \delta)$ ein i.e.S. regulärer Punkt bzw. ein Punkt minimalen Typs entlang γ ist. Dann ist $N_{\gamma(t_0-\delta)} \cap S_\varepsilon(\gamma(t_0))$ eine kompakte, eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension $\nu(\gamma(t_0)) = 1$ von $N_{\gamma(t_0-\delta)}$. Ist diese nicht zusammenhängend, so wählen wir die Zusammenhangskomponente – topologisch eine S^1 –, die $\gamma(t_0 - \delta)$ enthält, und nennen diese K. Es sei

$$f : K \times [0, t_0] \to M, \text{ so dass } \begin{cases} f(s, t_0) = \gamma(t_0) \text{ für alle } s \in K \\ \text{und } K = \{f(s, t_0 - \delta) \mid s \in K\}, \end{cases}$$

die eindimensionale, glatte Variation durch horizontale Geodätische gleicher Länge wie $\gamma|_{[0,t_0]}$. Diese Variation ist eindeutig, denn die Geodätischen-Stücke $f_s|_{[t_0-\delta,t_0]}$ sind für alle s Kürzeste in M von K nach $\gamma(t_0)$.

Der Weg durch die Variation zum Zeitpunkt $t_0 - \delta$ ist zum Blatt $N_{\gamma(t_0-\delta)}$ tangential, trivialer Weise ist auch $\frac{\partial}{\partial s} f(s, t_0)$ für alle s tangential zum Blatt N_{t_0}. Also folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} f(s,t) \in T_{f_s(t)} N_{\gamma(t)} \text{ für alle } s \text{ und alle } t;$$

und mit Proposition 3.1.4 gilt $f(s, 0) \in N$ für alle s. Ferner ist die Menge

$$\{f(s, 0) \mid s \in K\} \subset N$$

eine kompakte Untermannigfaltigkeit (i.A. nicht mehr eigentlich eingebettet) von N als stetiges Bild von K wie folgt:

Wir überdecken $\gamma|_{[0,t_0-\delta]}$ mit globalen Tubenumgebungen ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1.1. Dazu wählen wir als Zentren der globalen Tubenumgebungen zum einen das Blatt N sowie genau die Blätter, die höheren Typ als $N_{\gamma(t_0-\delta)}$ haben und falls nötig noch ein paar i.e.S. reguläre Blätter (bzw. Blätter vom gleichen Typ wie $N_{\gamma(t_0-\delta)}$), so dass jeder Punkt von $\gamma|_{[0,t_0-\delta]}$ in genau einer oder im Schnitt von genau zwei dieser Tubenumgebungen liegt. Gleiches gilt dann für alle Punkte $f(s,t)|_{[0,t_0-\delta]}$. Die Zentrumsblätter seien $N = N_0, N_1, \ldots, N_r \neq N_{\gamma(t_0-\delta)}$, aber $N_{\gamma(t_0-\delta)} \subset \mathrm{Tub}(N_r)$. Innerhalb globaler Tubenumgebungen definierte Homothetien sind nach Korollar 3.1.6 Diffeomorphismen, und mit Hilfe dieser Homothetien entlang der Geodätischen $f_s(t)$ bilden wir K sukzessive von $N_{\gamma(t_0-\delta)}$ in ein Blatt (gleichen Typs) im Schnitt $\mathrm{Tub}(N_r) \cap \mathrm{Tub}(N_{r-1})$, dann in ein gleiches Blatt in $\mathrm{Tub}(N_{r-1}) \cap \mathrm{Tub}(N_{r-2})$, usw. bis schließlich in ein Blatt L im Schnitt $\mathrm{Tub}(N_1) \cap \mathrm{Tub}(N_0)$ ab. Das Bild von K im Blatt L, d.h. genau die Menge $\{f(s,\tilde{t}) \mid s \in K, \gamma(\tilde{t}) \in L\}$, müssen wir im letzten Schritt vermöge der orthogonalen Projektion $\pi_N|_L : L \to N$ nach $\{f(s,0) \mid s \in K\}$ abbilden, weshalb im Allgemeinen die Einbettungs-Eigenschaft verloren geht.

Nun definieren wir eine injektive, glatte Abbildung $\lambda : K \to P(M, N \times p)$ vermöge

$$\lambda(s)(t) = \begin{cases} f_s(t), & t \in [0,t_0], \\ \gamma(t), & t \in [t_0,1]. \end{cases}$$

Das kompakte Bild $\lambda(K)$ ist ein injektiver Zykel der Dimension $\nu(\gamma(t_0))$ in $\mathcal{N}_p^{E(\gamma)}$ bestehend aus gebrochenen Geodätischen immer gleicher Länge und damit gleicher Energie. Die einzige nicht-gebrochene Geodätische ist offensichtlich γ selbst. Dass die Untermannigfaltigkeit $\lambda(K) \subset P(M, N \times p)$ glatt ist, folgt aus dem Beweis der analogen Aussage für $P(M, q \times p)$, der zum Beispiel in [Mi63], S. 88ff, geführt wird. Damit sind die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt, und wir haben Ergänzbarkeit von γ gezeigt. □

Töben hat in [To04] gezeigt, dass eine singuläre Riemannsche Blätterung mit eigentlich eingebetteten Blättern und mit Schnitten in einem einfach zusammenhängenden symmetrischen Raum keine Ausnahmeblätter besitzt. Mit Hilfe des soeben Bewiesenen lässt sich diese Aussage wie folgt verallgemeinern:

Satz 4.2.2 — *Ist M eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und ist $(M, \mathcal{F})$ singulär Riemannsch ohne horizontal konjugierte Punkte (mit eigentlich eingebetteten Blättern), so besitzt $(M, \mathcal{F})$ keine Ausnahmeblätter.*

Beweis. Es sei N ein Blatt, also zusammenängend, $p \in M$ beliebig. Wir betrachten folgende Faserung:

$$P(M, N \times p) \to N; c \mapsto c(0),$$

wobei $c : [0,1] \to M$ ein Weg ist mit $c(0) \in N, c(1) = p$. Die Faser $\Omega_{x_0 p}(M)$ über einem Punkt $x_0 \in N$, nämlich der Raum der Wege von x_0 nach p, ist homotopieäquivalent zum Schleifenraum $\Omega_{x_0}(M)$, und dieser ist zusammenhängend, da M einfach zusammenhängend ist. Aus der Homotopiesequenz für Faserungen folgt, dass $P(M, N \times p)$ zusammenhängend ist:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(N) \longrightarrow \underset{\|}{\pi_0(\Omega_{x_0}(M))} \longrightarrow \pi_0(P(M, N \times p)) \longrightarrow \underset{\|}{\pi_0(N)} \longrightarrow 0\,.$$
$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

Angenommen, es gibt ein Ausnahmeblatt $A \subset M$. Dann sei B ein Blatt mit trivialer Holonomie, das eine Tubenumgebung von $x \in A$ mehrfach trifft. Das Energieintegral

unter der Randbedingung $B \times x$ hat dann mindestens zwei lokale Minima. Da der Wegeraum $P(M, B \times x)$ zusammenhängend ist, ist das minimax-Prinzip anwendbar:

Es existiert ein kritischer Punkt vom Index 1, also eine Geodätische c von B nach x, die genau einen Fokalpunkt von B mit Multiplizität 1 besitzt. Und genau dieser kritische Punkt verbindet die beiden Zusammenhangskomponenten der zwei lokalen Minima im Wegeraum $\mathcal{B}_x^{E(c)^-}$. Nach Satz 4.2.1 gibt es nun einen ergänzenden 1-Zykel Z in $P(M, B \times x)$ (der topologisch einem Kreis entspricht), mit

$$E(z) \leq E(c) \text{ für alle } z \in Z$$

und mit Gleichheit genau dann, wenn $z = c$. Dies ist ein Widerspruch, denn $Z \setminus \{c\}$ ist zusammenhängend und als nicht-trivialer Repräsentant von $H_{\mathrm{ind}(\gamma)}(\mathcal{B}_x^{E(c)})$ ein Weg durch beide Komponenten. □

Theorem 4.2.3 — *Es sei M einfach zusammenhängend. Die regulären Blätter einer singulären Riemannschen Blätterung $(M, \mathcal{F})$ ohne horizontal konjugierte Punkte sind taut.*

Bemerkung — Es genügt im Theorem 4.2.3 anstelle einfachen Zusammenhangs von M auch schon die technische Voraussetzung, dass Punkte aus Ausnahmeblättern entlang horizontaler Geodätischer, die ein Blatt mit trivialer Holonomie treffen, isoliert liegen. Wegen Lemma 2.3.4 gilt das Theorem dann für alle Blätter in Σ_{reg}. Der nachfolgend geführte Beweis deckt diese Abschwächung ab.

Beweis. Es sei N ein reguläres Blatt. Für jeden Fokalpunkt x von N entlang einer Geodätischen γ_x können wir wie im Beweis zu Satz 4.2.1 in einem nahen Blatt eine zugehörige Mannigfaltigkeit K_x der Dimension $\nu(x)$ sowie eine globale Variation $f_x(s,t), s \in K_x$ durch Geodätische mit $f_x(s,0) \in N, f_x(s,1) = x$ für alle $s \in K_x$ konstruieren, denn es gilt Proposition 3.2.2. Die Überlegung zur Kompaktheit des Bildes von K_x in N ist analog gültig, sofern auch alle singulären Blätter entlang γ_x als Zentren von Tubenumgebungen der Überdeckung gewählt werden. Liegen auf einer Geodätischen nun mehrere Fokalpunkte, müssen wir diese Methode „irgendwie“ iterieren; wie in [BS58] bietet sich eine Faserbündelkonstruktion an.

Es seien also p ein regulärer Punkt, E_p das Energie-Integral auf $P(M, N \times p)$ und γ ein kritischer Punkt von E_p. Die Fokalpunkte auf γ seien

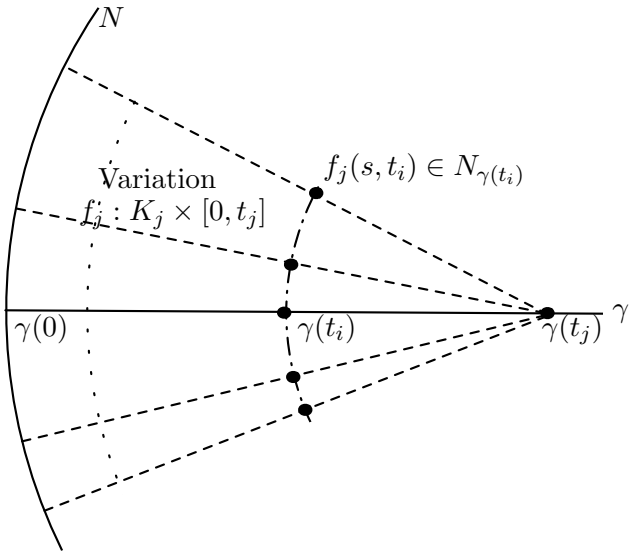
$$\{\gamma(t_j)\}_{j=1}^k, 1 = t_0 > t_1 > \ldots > t_k > t_{k+1} = 0, \text{ mit } \mathrm{ind}(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma(t_j)).$$

Für jedes $j = 1, \ldots, k$ sei $f_j(s, \cdot) : [0, t_j] \to M$ die globale $\nu(\gamma(t_j))$-dimensionale Variation durch Geodätische von N nach $\gamma(t_j)$, parametrisiert über K_j wie im Beweis zur Nulltautheit. Die Variation enthält alle Kürzesten von K_j nach $\gamma(t_j)$ fortgesetzt bis zur Länge $L(\gamma|_{[0,t_j]})$. Dann gilt

Lemma 4.2.4 — *Ist $\gamma(t_i)$ auf γ Fokalpunkt zu N, so ist $f_j(s, t_i)$ für $j = 1, \ldots, i-1$ und für alle $s \in K_j$ auf $f_j(s, \cdot)$ Fokalpunkt zu N mit gleicher Multiplizität. Ferner gilt*

$$N_{f_j(s,t)} = N_{\gamma(t)} \text{ für alle } j = 1, \ldots, k+1 \text{ und } s \in K_j, t \in [0, t_j].$$

Skizze zum Lemma.



Beweis. Dies folgt aus der Variationsformel oder direkt aus Lemma 3.1.3 und Proposition 3.2.2. □

Bemerkung — Mit diesem Lemma ist das in [To04] bemerkte Problem bei der allgemeinen Zykelkonstruktion durch Iteration, dass sich nämlich Fokalpunkte unterschiedlicher Multiplizitäten in der Variation kreuzen könnten, für unseren Fall ausgeschlossen. Dann nämlich kann man nicht garantieren, dass das iterierte Bündel eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\mathrm{ind}(\gamma)$ ergibt.

Wir wissen nun: Auf allen Geodätischen der Variationen f_j liegen an gleicher Stelle Fokalpunkte gleicher Multiplizität wie auf γ. Damit definieren wir

$$K := \{(s_1, \ldots, s_k) \mid s_1 \in K_1(\gamma(1)), s_2 \in K_2(s_1), \ldots, s_k \in K_k(s_{k-1})\},$$

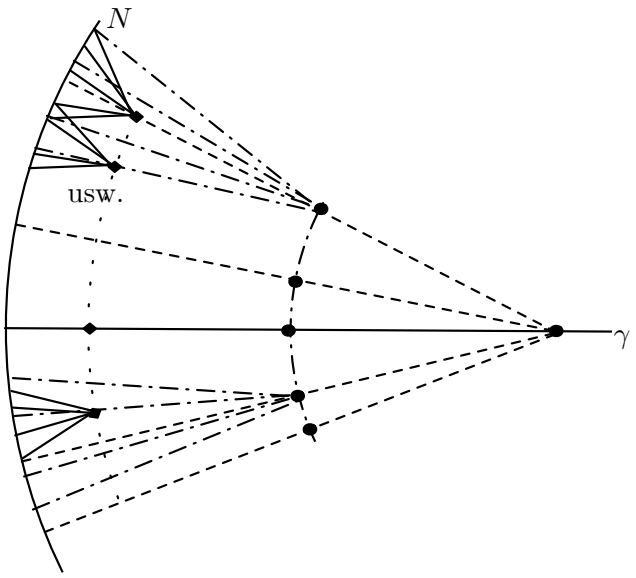
wobei $K_i(s_{i-1})$ für jedes i die Fokalmannigfaltigkeit der Dimension $\nu(\gamma(t_i))$ zum Fokalpunkt in t_i entlang der Geodätischen $f_{s_{i-1}}(t), t \in [0, t_{i-1}]$, sei. Es folgt aus dem Lemma, dass K eine kompakte Mannigfaltigkeit, ein Faserbündel, der Dimension $\mathrm{ind}(\gamma)$ ist.

Die Abbildung $\lambda : K \to P(M, N \times p)$ in den Wegeraum sei nun folgender Maßen definiert:

$$\lambda(s_1, \ldots, s_k)(t) = \begin{cases} f_{s_i}(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], i = 1, \ldots, k \\ \gamma|_{[t_1,1]}(t), & t \in [t_1, 1]. \end{cases}$$

Der Zykel $\lambda(K)$ besteht aus gebrochenen Geodätischen immer gleicher Länge, die einzige nicht-gebrochene Geodätische und damit kritischer Punkt von E_p ist γ selbst.

Skizze zur Konstruktion von $\lambda(K)$ in M.



Ferner ist $\lambda(K)$ von Dimension $\mathrm{ind}(\gamma)$ sowie injektiv im Wegeraum, denn schon jeder einzelne Iterationsschritt liefert nur unterschiedliche gebrochene Geodätische. Also sind alle Voraussetzungen erfüllt, um einen ergänzenden Zykel zu erhalten. Es folgt, N ist taut, was zu beweisen war. □

Beispiel — Das betrachtete reguläre Blatt N sei ein 2-Torus; der zu ergänzende kritische Punkt im Wegeraum $P(M, N \times p)$ sei eine horizontale Geodätische γ wie in Abb. 1). Der Index von γ ist gleich zwei, denn es liegen zwei Fokalpunkte, p_1 und p_2, jeweils mit Multiplizität eins auf der Geodätischen.

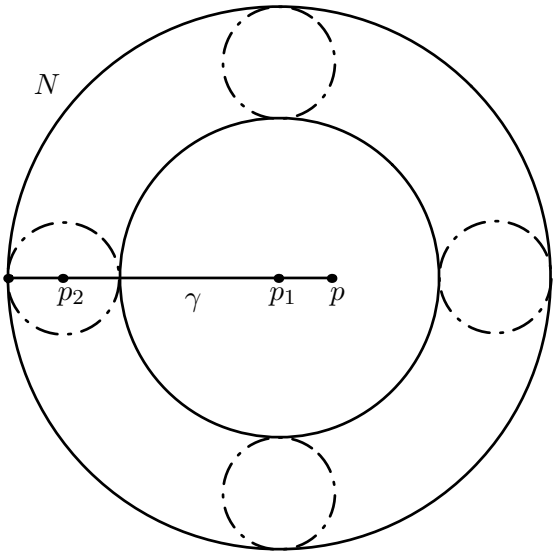


Abb. 1)

Die Fokalmannigfaltigkeit K_1 können wir als äußeren Breitenkreis des Torus identifizieren. Im ersten Schritt erhalten wir also eine eindimensionale Variation $f_s(t), s \in K_1$, durch Geodätische, die in $s \in K_1 \subset N$ senkrecht starten und im Fokalpunkt p_1 enden, siehe Abb. 2). Jede dieser Geodätischen hat genau einen Fokalpunkt wie p_2 auf γ.

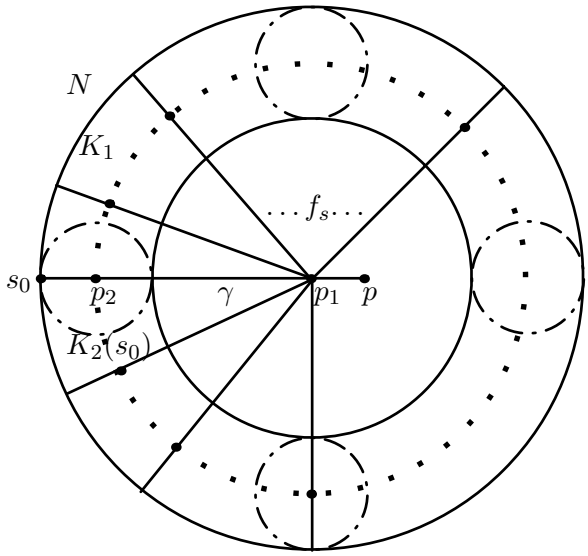


Abb. 2)

Es bezeichne $K_2(s)$ für alle $s \in K$ die zugehörige, eindimensionale Fokalmannigfaltigkeit, die wir jeweils als Längenkreis (durch s) des Torus identifizieren können.

Der ergänzende, zweidimensionale Zykel im Wegraum $P(M, N \times p)$ entspricht somit topologisch dem Torus und besteht aus gebrochenen Geodätischen wie in der dritten Abbildung.

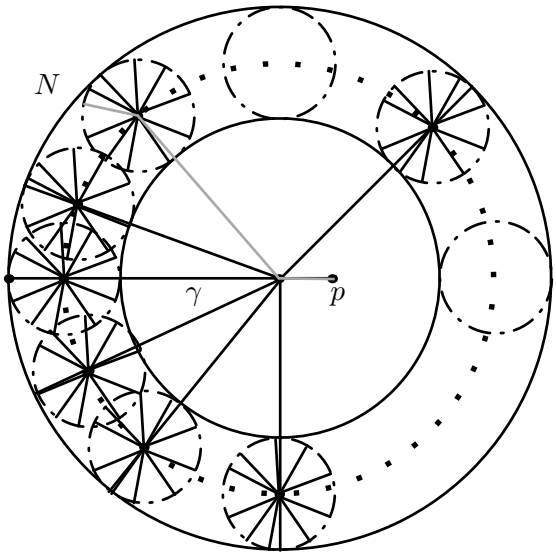


Abb. 3)

Anhang

A Morse-Sturm-Systeme und das verallgemeinerte Index-Theorem

Dem Abschnitt 3 des Artikels [GMPT] folgend, wird hier die in 3.2 benötigte Theorie von Morse-Sturm-Differentialgleichungen und zugehörigem Indextheorem kurz vorgestellt. Es handelt sich hierbei um eine sehr allgemeine Fassung der Differentialgleichung für N-Jacobifelder, dem dazu gehörigen Energie-Integral als Indexform, und des entsprechenden Indexsatzes von Morse. Detaillierte Überlegungen zu Stetigkeit, Differenzierbarkeit, kurz: der gesamte analytische Rahmen, werden sehr übersichtlich im eben genannten Artikel diskutiert. Die Entwicklung der Morse-Sturm-Theorie ist aber deutlich älter; sie geht auf Bott und Ambrose zurück. Ein sehr ausführlicher Artikel über Morse-Sturm-Systeme samt Indexsatz ist der von Edwards, [Ed64].

Man betrachte in $(\mathbf{R}^n, g)$, g eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform, das folgende System von Differentialgleichungen

$$J''(t) = R(t)[J(t)],\ t \in [0,1],$$

mit Anfangsbedingungen

$$J(0) \in P \quad \text{und} \quad J'(0) + S[J(0)] \in P^{\perp},$$

wobei gelte:

(i) $R : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ ist eine stetige Abbildung von *g-symmetrischen*, linearen Abbildungen auf $\mathbf{R}^n$, d.h. $g(R(t)[x], y) = g(x, R(t)[y])$ für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$,
(ii) P ist ein Unterraum von $\mathbf{R}^n$, auf dem g nicht-ausgeartet ist, und $P^{\perp}$ bezeichnet das orthogonale Komplement von P bezüglich g,
(iii) $S : P \to P$ ist eine g-symmetrische, lineare Abbildung.

Ein solches System nennen wir *Morse-Sturm-Problem.* Eine Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen wie oben erfüllt, heißt (P,S)-*Lösung.* Es bezeichne $\mathbf{J}$ die Menge solcher Lösungen; $\mathbf{J}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum. Für alle $t \in [0,1]$ setzen wir

$$\mathbf{J}[t] := \{J(t) \mid J \in \mathbf{J}\}.$$

Ein Punkt $t_0 \in (0,1]$, so dass $\mathbf{J}[t_0] \neq \mathbf{R}^n$, d.h. es existiert ein nicht-triviales $J \in \mathbf{J}$ mit $J(t_0) = 0$, wird (P,S)-*Fokalpunkt* genannt. Seine *Multiplizität* $\nu(t_0)$ ist die Kodimension von $\mathbf{J}[t_0]$ in $\mathbf{R}^n$, also die Dimension von $\mathbf{J}[t_0]^{\perp}$. Es gilt:

$$\mathbf{J}[t]^{\perp} = \{J'(t) \mid J \in \mathbf{J}, J(t) = 0\}.$$

Proposition A.1 — *Ist t_0 ein (P,S)-Fokalpunkt und ist g nicht-ausgeartet auf $\mathbf{J}[t_0]$, so gibt es eine Umgebung von t_0, in der keine weiteren (P,S)-Fokalpunkte liegen. Ausserdem gibt es keine (P,S)-Fokalpunkte in einer Umgebung von 0.*

Auf dem Sobolev-Raum $H^1([0,t],\mathbf{R}^k)$ der absolut stetigen, $\mathbf{R}^n$-wertigen Abbildungen auf $[0,t]$ mit quadrat-integrabler Ableitung betrachten wir den Unterraum

$$\mathcal{H}_t := \{V \in H^1([0,t],\mathbf{R}^k) \mid V(0) \in P, V(t) = 0\}.$$

Dann können wir für jedes $t \in (0,1]$ die *Index-Form* I_t auf $\mathcal{H}_t$ definieren als die symmetrische Bilinearform

$$I_t(V,W) = \int_0^t [g(V'(s),W'(s)) + g(R(s)[V(s)],W(s))]ds - g(S[V(0)],W(0)).$$

Vermöge partieller Integration folgt

$$\ker(I_t) = \{J|_{[0,t]} \mid J \in \mathbf{J}, J(t) = 0\}.$$

Für genügend kleines $t > 0$ ist I_t nicht ausgeartet auf $\mathcal{H}_t$. Ferner ist I_t dann positiv definit, falls g positiv definit in $\mathbf{R}^n$ ist.

Wir erinnern: Für eine symmetrische Bilinearform B auf einem reellen Vektorraum V ist der *Index von* B definiert als

$$\mathrm{ind}(B) = \sup\{\dim(W) \mid W \text{ ist Unterraum von } V, \text{ auf dem } B \text{ negativ definit ist}\}.$$

Dass unter diesen sehr allgemeinen Voraussetzungen sinngemäß der Indexsatz von Morse gilt, wird in [GMPT] gezeigt. Der Index des Integrals I_1 ist endlich und gleich der Summe der (P,S)-Fokalpunkte auf $(0,1]$ gezählt mit Vielfachheiten. Diese Aussage wird *Morse-Sturm-Oscillation-Theorem* genannt:

Theorem A.2 — *Ist R eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und ist g positiv definit auf $\mathbf{R}^n$, so gilt:*

$$\mathrm{ind}(I_1) = \sum_{t\in(0,1]} \nu(t).$$

Literaturverzeichnis

[A04] M. Alexandrino, Generalizations of Isoparametric Foliations, arXiv: 0411103 [math.DG], 4 Nov 2004

[A07] M. Alexandrino, Singular Holonomy of Singular Riemannian Foliations with Sections, arXiv: 0703814 [math.DG], 27 Mar 2007

[AT04] M. Alexandrino and D. Töben, Singular Riemannian Foliations on Simply Connected Spaces, arXiv: 0411415 [math.DG], 18 Nov 2007

[AT07] M. Alexandrino and D. Töben, Equifocality of a Singular Riemannian Foliation, arXiv: 0704.3251 [math.DG], 24 Apr 2007

[Bo07] C. Boltner On the Structure of Equidistant Foliations of Euclidian Space, arXiv: 0712.0245 [math.DG], 03 Dec 2007

[Bol73] J. Bolton, Transnormal Systems, *Quart. J. Math. Oxford,* 24 (1973), 385–395.

[BS58] R. Bott and H. Samelson, Applications of the Theory of Morse to Symmetric Spaces, *Amer. Jour. of Math.,* 80 (1958), 964–1029.

[CR78] T. E. Cecil and P. J. Ryan, Focal Sets of Submanifolds, *Pacific J. of Mathematics,* 78. No. 1 (1978), 27–39.

[dC93] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry, Mathematics: Theory and Applications,* Birkhäuser (1993).

[Ed64] H. M. Edwards, A Generalized Sturm Theorem, *Annals of Mathematics,* 2nd Ser. Vol 80, No. 1 (1964), 22–57.

[ER44] C. Ehresmann and G. Reeb, Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuement différentiable, *C. R. Acad. Sci. Paris* 218, (1944), 955–957.

[Ew98] H. Ewert, Equifocal Submanifolds in Riemannian Symmetric Spaces, *Doktorarbeit,* Universität zu Köln, 1998.

[GMPT] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione and D. V. Tausk, A Generalized Index Theorem for Morse-Sturm Systems and Applications to Semi-Riemannian Geometry, *Asian J. Math.,* Vol. 5, No. 3 (2001), 441–472.

[GTh02] C. Gorodski and G. Thorbergsson, Cycles of Bott-Samelson Type for Taut Representations, *Annals of Global Analysis and Geometry,* 21 (2002), 287–302.

[HPT88] W.-Y. Hsiang, R. S. Palais and C.-L. Terng, The Topology of Isoparametric Submanifolds, *J. Differential Geometry,* 27 (1988), 423–460.

[Ly07] A. Lytchak, Notes on the Jacobi Equation, *preprint* (2007) arXiv: 0708.2651 [math.DG].

[Ly07a] A. Lytchak, Geometric Resolution of Singular Riemannian Foliations, *preprint* (2007)

[Ly07b] A. Lytchak, Singular Riemannian Foliations on Spaces without Conjugate Points, *preprint* (2007)

[LTh05] A. Lytchak and G. Thorbergsson, Variationally Complete Actions on Nonnegatively Curved Manifolds, *preprint* (2005).

[LTh07] A. Lytchak and G. Thorbergsson, Curvature Explosion in Quotients and Applications, *preprint* (2007).

[Mi63] J. Milnor, *Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, No. 51,* Princeton University Press (1963).

[Mol88] P. Molino, *Riemannian Foliations,* volume 73 of *Progress in Mathematics,* Birkhäuser (1988).

[Mor34] M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large,* volume 18 of *AMS Colloquium Publications,* AMS (1934).

[ONe66] B. O'Neill, The Fundamental Equations of a Submersion, *Michigan Math. J.,* 13 (1966), 459–469.

[PT89] R. S. Palais and C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry,* volume 1353 of *Lecture Notes in Mathematics,* Springer Verlag (1989).

[STh71] H. Seifert und W. Threlfall, *Variationsrechnung im Grossen,* Chelsea, New York (1971).

[Ste74] P. Stefan, Accessible Sets, Orbits, and Foliations with Singularities, *Proc. London Math. Soc.,* 29 (1974), 699–713.

[Su73] J. Sussmann, Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, *Transactions of the AMS,* 180 (1973), 171-188.

[Te85] C.-L. Terng, Isoparametric Submanifolds and Their Coxeter Groups, *J. Differential Geometry,* 21 (1985), 79–107.

[TTh95] C.-L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold Geometry in Symmetric Spaces, *J. Differential Geometry,* 42. No. 3 (1995), 665-718.

[TTh97] C.-L. Terng and G. Thorbergsson, Taut Immersions into Complete Riemannian Manifolds, *Tight and Taut Submanifolds (Berkeley, CA, 1994),* 181-228, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.,* 32 *Cambridge Univ. Press* (1997).

[Th83] G. Thorbergsson, Dupin Hypersurfaces, *Bull. London Math. Soc.,* 15 (1983), 493–498.

[Th00] G. Thorbergsson, A Survey on Isoparametric Hypersurfaces an Their Generalizations, *Handbook of Differential Geometry,* 963–995, *Elsevier Science B.V.* (2000).

[To04] D. Töben, Submanifolds with Parallel Focal Structure, *Doktorarbeit,* Universität zu Köln, 2004.

[Wa81] R. Walter, Konvexität in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, *Jahresbericht DMV,* Band 83, Teubner Verlag (1981), 1–31.

[Wi06] B. Wilking, A Duality Theorem for Riemannian Foliations in Nonnegative Sectional Curvature, *preprint* (2006) arXiv: 0606190 [math.DG].

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde.

Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. Gudlaugur Thorbergsson betreut worden.

Teilpublikationen: keine

Lebenslauf

Name	Eva Nowak
Geburtsdatum	12.01.1980
Geburtsort	Waldbröl
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulbildung

1986 - 1990	Gemeinschaftsgrundschule Much
1990 - 1999	Anno Gymnasium Siegburg, Abschluss mit Abitur

Studium

Apr 2002 - Dez 2005	Studium der Mathematik (Diplom) mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Universität zu Köln
Nov 2003	Vordiplom
Dez 2005	Diplom Thema der Diplomarbeit: Äquivariante Morse-Theorie
seit Jan 2006	Promotionsstudium der Mathematik an der Universität zu Köln

Berufstätigkeit

Aug 1999 - Jan 2002	Ausbildung zur Steuerfachangestellten bei: Arthur Andersen Steuerberatungsgesellschaft mbH, Köln
Jan 2002 - Okt 2002	Nebentätigkeit als Steuerfachangestellte (ab April als Werkstudentin) bei: Ernst & Young AG (ehem. A. Andersen), Köln
Okt 2003 - Dez 2005	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
seit Dez 2005	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Institut der Universität zu Köln