

Schranken für den minimalen orientierten Durchmesser

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Martin Lätsch
aus Karl-Marx-Stadt (heute Chemnitz)

Köln 2008

Berichterstatter: Prof. Dr. R. Schrader
PD Dr. B. Randerath

Tag der mündlichen Prüfung: 17.10.2008

Kurzzusammenfassung

Wir betrachten in dieser Arbeit das Problem, die Kanten eines Graphen so zu orientieren, dass der Durchmesser des gerichteten Graphen minimal ist. Wir geben eine Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser $diam_{min}(G)$ in Abhängigkeit der Kardinalität $\gamma(G)$ einer kleinsten dominierenden Menge an, welche ein Resultat von Fomin et al. [15] verbessert. Wir zeigen: $diam_{min}(G) \leq 4\gamma(G)$. Weiter zeigen wir, wie bei gegebener dominierender Menge $D \subseteq V(G)$ eine Orientierung H eines Graphen G konstruiert werden kann, für die gilt $diam(H) \leq 4|D|$.

Für die Klasse der $\{C_3, C_4\}$ -freien Graphen zeigen wir $diam(G) \leq 3\gamma(G) + 1$. Wir geben eine Graphenfamilie an, welche diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt.

In einem weiteren Kapitel betrachten wir bigerichtete Graphen. Wir charakterisieren die Klasse der bigerichteten Graphen, für die eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung existiert. Weiter zeigen wir, dass für diese Graphen eine bigerichtete Orientierung \vec{H} existiert, so dass gilt $diam(\vec{H}) \leq 10\gamma(\vec{H}) - 5$.

Abstract

In this thesis, we consider the problem of finding an orientation of an undirected graph with minimal diameter. We show a relation between the minimum oriented diameter $diam_{min}(G)$ of an undirected graph and the size $\gamma(G)$ of a minimal dominating set, which improves an upper bound discovered by Fomin et al. [15]. We show if G is a strongly connected graph, then: $diam_{min}(G) \leq 4\gamma(G)$. Furthermore, if we have a graph G and a dominating set D , not necessarily a minimal dominating set of G , we show how to construct an orientation H of G in polynomial time fulfilling $diam(H) \leq 4|D|$.

Furthermore, we determine the exact upper bound for $\{C_3, C_4\}$ -free graphs. If G is a strongly connected $\{C_3, C_4\}$ -free graph, then the following holds: $diam_{min}(G) \leq 3\gamma(G) + 1$.

We consider bidirected graphs and characterize undirected graphs that allow a strongly connected bidirection. We show, that for those graphs a bidirected orientation \bar{H} exist with $diam(\bar{H}) \leq 10\gamma(\bar{H}) - 5$.

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Faigle und Herrn Prof. Dr. Schrader danken, dass ich in ihrer Arbeitsgruppe am Zentrum für Angewandte Informatik Köln (ZAIK) arbeiten durfte. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Schrader, der diese Arbeit betreute. Für die Übernahme des Zweitgutachtens bin ich Herrn PD Dr. Randerath sehr dankbar.

Ich danke Frau Dr. Britta Peis für die anregenden Diskussionen zum Thema bige-richtete Graphen. Herrn Dr. Sascha Kurz danke ich für die intensive Zusammenarbeit. Durch seine konstruktive Kritik und wertvollen Ideen gab er mir immer wieder die nötige Motivation und Anschub den Hauptbeweis dieser Arbeit zu vollenden. Er hat damit wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ich bedanke mich bei meinen ehemaligen und aktuellen Kollegen Kirsten Albrecht, Kamel Ben-Khalifa, Dr. Thomas Chevalier, Dr. Petra Fakler und Stefan Neuhaus aus der Bauspargruppe. Es war mir eine Freude mit euch zusammenzuarbeiten.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen ehemaligen und aktuellen Kollegen am ZAIK für die schöne Zeit und das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern Anne und Joachim Lätsch, die mich immer in jeder Hinsicht unterstützten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Graphentheoretische Grundlagen	3
3	Der minimale orientierte Durchmesser	7
3.1	Definitionen	7
3.2	Komplexitätsresultate	8
3.3	Der minimale orientierte Durchmesser spezieller Graphenklassen . . .	9
3.4	Der Durchmesser und der minimale orientierte Durchmesser	10
3.5	Die Dominanzzahl des Komplementärgraphen und der minimale orientierte Durchmesser	12
4	Eine Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser	15
4.1	Einleitung	15
4.2	Schnittknoten	16
4.2.1	Erste Standardform	17
4.2.2	Echte Schnittknoten	18
4.2.3	Echte Schnittknoten sind vom Typ A	21
4.2.4	Zweite Standardform	28
4.3	Diametraler Pfad	29
4.3.1	Dominierende Knoten vom Typ 1	29
4.3.2	Dominierende Knoten vom Typ 2	30
4.3.3	Dominierende Knoten auf dem diametralen Pfad	34
4.3.4	Dritte Standardform	35
4.3.5	Dominierende Knoten vom Typ 3	38
4.3.6	Hauptbeweis	43
4.4	Dominierender Teilgraph	47
4.4.1	Zulässiger Teilgraph	47
4.4.2	Vierte Standardform	48
4.4.3	Graphen mit kleiner Dominanzzahl	50
4.4.4	Strukturen in zulässigen Teilgraphen	52
4.4.5	Hauptbeweis	59
4.4.6	Konstruktion einer Orientierung	65

5	Der minimale orientierte Durchmesser $\{C_3, C_4\}$-freier Graphen	67
5.1	Einleitung	67
5.2	Schnittknoten	68
5.2.1	Erste Standardform	68
5.2.2	Dominierende Schnittknoten	69
5.2.3	Nicht dominierende Schnittknoten	70
5.2.4	Zweite Standardform	80
5.3	Diametraler Pfad	81
5.3.1	Standardpfade	81
5.3.2	Dominierende Knoten vom Typ 2	82
5.3.3	Dritte Standardform	83
5.3.4	Dominierende Knoten vom Typ 3	84
5.3.5	Hauptbeweis	88
6	Bigerichtete Graphen	95
6.1	Konstruktion einer stark zusammenhängenden bigerichteten Orientierung	95
6.2	Die Dominanzzahl und der minimale bigerichtete Durchmesser	100
7	Ausblick	107

Kapitel 1

Einleitung

Wir betrachten in dieser Arbeit das Problem, die Kanten eines Graphen so zu orientieren, dass der Abstand der weitest voneinander entfernten Knoten möglichst klein wird. Wir bezeichnen diesen Abstand als minimalen orientierten Durchmesser. Bang-Jensen und Gutin schrieben in ihrem Standardwerk *Digraphs – Theory, Algorithms and Applications* [2]:

Notice that while both the problem of finding an orientation of minimum diameter and the problem of finding an orientation of maximum diameter are \mathcal{NP} -hard, the former is much more complicated from a graph theoretical point of view than the latter.

Es überrascht nicht, dass es als komplizierter angesehen wird Aussagen über den minimalen orientierten Durchmesser eines Graphen zu treffen, als Aussagen über den maximalen orientierten Durchmesser. Gutin [21] zeigte, dass der maximale orientierte Durchmesser in einem stark zusammenhängenden Graphen der Länge eines längsten Pfades im ungerichteten Graphen entspricht. Das Problem, den maximalen orientierten Durchmesser zu bestimmen, gehört somit zu der Klasse der gut untersuchten Hamiltonprobleme.

Da die Bestimmung des minimalen orientierten Durchmessers \mathcal{NP} -schwer ist, ist es gerechtfertigt, Schranken für diesen Graphenparameter anzugeben. Fomin et al. [15] entdeckten eine Beziehung des minimalen orientierten Durchmessers zur Dominanzzahl. Wir verbessern diese obere Schranke und geben an, wie eine Orientierung eines Graphen gefunden werden kann, bei gegebener (nicht notwendigerweise minimaler) dominierender Menge. Weiter geben wir eine Schranke für Graphen an, die weder einen Kreis der Länge drei noch einen Kreis der Länge vier enthalten, und betrachten bigerichtete Graphen.

Diese Arbeit ist folgendermaßen strukturiert:

Im zweiten Kapitel führen wir grundlegende Begriffe der Graphentheorie auf. Dieser Abschnitt dient der Einführung der Notation und der Festlegung grundlegender Begriffe. Jeder, über die Grundbegriffe der Graphentheorie hinaus gehende, benötigte Begriff wird an geeigneter Stelle definiert.

Im dritten Kapitel werden bekannte Komplexitätsresultate und Approximationsaussagen für den minimalen orientierten Durchmesser zusammengestellt. Des Weiteren werden Beispiele für Graphen angegeben, für die der minimale orientierte Durchmesser bekannt ist. Schließlich führen wir Resultate auf, die den minimalen orientierten Durchmesser mit dem Durchmesser des ungerichteten Graphen in Verbindung setzen. Der letzte Abschnitt des dritten Kapitels enthält eine Beziehung zwischen dem minimalen orientierten Durchmesser und der Dominanzzahl des Komplementärgraphen.

Das vierte Kapitel enthält ein Hauptresultat dieser Arbeit. Es werden zwei unterschiedliche Beweise einer Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser in Bezug zur Dominanzzahl angegeben. Beide Beweise bauen dabei auf die weitgehende Schnittknotenfreiheit eines kleinsten Gegenbeispiels auf. Der erste Beweis untersucht die Struktur eines längsten Pfades in einem kleinsten Gegenbeispiel. Im zweiten Beweis wird der minimale orientierte Durchmesser über die Knotenanzahl eines weiter reduzierten Graphen abgeschätzt. Der zweite Beweis führt direkt auf eine Konstruktionsvorschrift, wie bei gegebener dominierender Menge eine Orientierung eines Graphen gefunden werden kann.

Das fünfte Kapitel enthält ein weiteres Hauptresultat dieser Arbeit. Es werden Graphen betrachtet, die weder einen Kreis der Länge drei noch einen Kreis der Länge vier enthalten. Für diese Graphen wird der minimale orientierte Durchmesser in Bezug zur Dominanzzahl gesetzt. Im Gegensatz zum vierten Kapitel, werden Graphen angegeben, welche die bewiesene Schranke scharf erfüllen. Die Struktur des Beweises ist ähnlich dem ersten Beweis für allgemeine Graphen im vierten Kapitel. Es wird zuerst gezeigt, dass ein kleinstes Gegenbeispiel weitgehend schnittknotenfrei ist. Im zweiten Schritt wird die Struktur eines diametralen Pfades in einem kleinsten Gegenbeispiel untersucht. Mit den strukturellen Aussagen kann die Länge eines diametralen Pfades abgeschätzt werden.

Im sechsten Kapitel werden bigerichtete Graphen untersucht. Bigerichtete Graphen stellen eine Verallgemeinerung gerichteter Graphen dar. Es wird angegeben, für welche bigerichteten Graphen eine stark zusammenhängende Biorientierung existiert. Weiterhin wird der minimale orientierte Durchmesser durch die Dominanzzahl abgeschätzt.

Im letzten Kapitel geben wir einen kurzen Ausblick.

Kapitel 2

Graphentheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir kurz die in der vorliegenden Arbeit benötigten Grundbegriffe vor. Wir orientieren uns dabei an den Graphentheoretischen Präliminarien von Dankelmann [9]. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf das Buch von Diestel [13].

Für die Grundlagen der Komplexitätstheorie kann das Buch von Garey und Johnson [20] herangezogen werden.

Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer **Knotenmenge** $V = V(G)$ und einer **Kantenmenge** $E = E(G) \subseteq V \times V$. Sind $v, w \in V$ zwei Knoten mit $(v, w) \in E$, so nennen wir v und w **adjazent** im Graphen G . Eine Kante $e = (v, w) \in E$ heißt **inzident** zu den Knoten v und w . Die beiden Knoten v und w nennen wir **Endknoten** der Kante $e = (v, w)$. In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich **schlichte Graphen**, das heißt wir schließen doppelte Kanten aus und setzen voraus, dass die Endknoten jeder Kante $e \in E$ unterschiedlich sind.

Mit $N(v)$ bezeichnen wir die Menge der **Nachbarknoten** von v , das heißt die Menge der zu v adjazenten Knoten. Wir bezeichnen mit $N[v]$ die Vereinigung der Menge der Nachbarknoten von v mit dem Knoten v , also $N[v] = N(v) \cup v$.

Der **Knotengrad** $deg(v)$ eines Knotens v gibt die Mächtigkeit der Menge $N(v)$ an. Mit $\delta(G)$ bezeichnen wir den **kleinsten Knotengrad** eines Knotens $v \in V(G)$ und mit $\Delta(G)$ den **größten Knotengrad** eines Knotens $v \in V(G)$.

Sind $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen mit $V_1 \subseteq V_2$ und $E_1 \subseteq E_2$, so heißt G_1 **Teilgraph** von G_2 . Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V_1 \subseteq V$, so heißt derjenige Graph mit der Knotenmenge V_1 und allen Kanten, deren beide Endknoten in der Menge V_1 liegen, **induzierter Teilgraph** von G . Wir bezeichnen den von V_1 induzierten Teilgraphen von G mit $G[V_1]$.

Ist $V_1 \subseteq V(G)$, dann bezeichnen wir mit $G \setminus V_1$ den Graphen $G[V \setminus V_1]$. Ist $E_1 \subseteq E$, dann bezeichnen wir mit $G \setminus E_1$ den Graphen $(V, E \setminus E_1)$. Für $G \setminus \{v\}$ schreiben wir auch $G \setminus v$.

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive und in beiden Richtungen adjazenz erhaltende Abbildung von V_1 auf V_2 gibt. Wir werden im folgenden isomorphe Graphen G_1 und G_2 als gleich betrachten und auch $G_1 = G_2$ schreiben.

Sei K ein Graph. Ein Graph G heißt **K -frei**, wenn G keinen induzierten Teilgraphen enthält, der isomorph zum Graph K ist.

Wir bezeichnen mit \bar{G} den **Komplementärgraphen** von $G = (V, E)$. Der Graph \bar{G} besteht aus der Knotenmenge $V(G)$. Zwei Knoten $u, v \in V$ sind genau dann adjazent im Graphen \bar{G} , wenn sie nicht adjazent im Graphen G sind.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Menge $D \subseteq V$ heißt **dominierende Menge** für G , wenn jeder Knoten $v \in V$ in der Menge D liegt oder zu einem Knoten der Menge D adjazent ist. Die Kardinalität einer kleinsten dominierenden Menge eines Graphen G nennen wir **Dominanzzahl** von G und bezeichnen diese mit $\gamma(G)$.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann heißt eine Teilmenge $W \subseteq V$ **unabhängige Menge**, wenn der von W induzierte Graph keine Kanten enthält. Die Mächtigkeit der größten unabhängigen Menge eines Graphen heißt **Unabhängigkeitszahl**, und wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet.

Spezielle Graphenklassen

Im **vollständigen Graphen** K_n ist jeder der n Knoten zu jedem anderen adjazent. Ein **Pfad** P_n besteht aus n paarweise unterschiedlichen Knoten v_1, v_2, \dots, v_n und den Kanten $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$. Für einen Pfad P von v_1 nach v_n schreiben wir auch $P(v_1, v_n)$. Mit $P(v_i, v_j)$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ bezeichnen wir den **Teilpfad** von $P(v_1, v_n)$ vom Knoten v_i zum Knoten v_j . Unter der **Länge** $|P|$ des Pfades P verstehen wir die Anzahl der Kanten des Pfades P .

Der **Kreis** C_n besteht aus n paarweise unterschiedlichen Knoten v_1, v_2, \dots, v_n und den Kanten $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Ein Teilgraph $C = (V, E)$ von G heißt **sehnenfrei** im Graphen G , wenn der Graph $G[V(C)]$ ein Kreis ist.

Ein **Baum** T ist ein Graph, der keinen Kreis als Teilgraphen enthält. Ein Knoten v eines Baumes T nennen wir **Blatt** von T , wenn $\deg(v) = 1$.

Ein Graph G heißt **chordal**, wenn jeder Kreis C mit $|C| \geq 4$ im Graphen G eine Sehne enthält. **Splitgraphen** sind eine Teilklasse der chordalen Graphen. Sie sind dadurch charakterisiert, dass sich die Knotenmenge $V(G)$ in zwei Mengen V_1 und V_2 partitionieren lässt, so dass $G[V_1]$ ein vollständiger Graph ist und $G[V_2]$ keine Kanten enthält.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, wenn sich die Knotenmenge $V(G)$ in zwei Mengen V_1 und V_2 partitionieren lässt, so dass die von V_1 und von V_2 induzierten Teilgraphen keine Kanten enthalten. Ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ heißt **vollständig bipartit**, wenn gilt $(v, w) \in E$ für alle $v \in V_1$ und für alle $w \in V_2$. Ein **vollständig bipartiter** Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ mit $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ wird mit $K_{n,m}$

bezeichnet. In einem **multipartiten Graph** $G = (V, E)$ lässt sich die Knotenmenge V in Mengen V_1, \dots, V_k partitionieren, so dass die Graphen $G[V_i]$ für $i = 1, \dots, k$ keine Kanten enthalten.

Ein **sternartiges Tripel** (AT) ist eine Menge von drei Knoten in einem Graph, so dass ein Pfad P zwischen je zwei Knoten existiert und kein Knoten auf P adjazent zu dem dritten Knoten ist. Ein Graph G heißt **AT -freier Graph**, wenn G kein sternartiges Tripel enthält.

Ein Graph G mit $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ heißt **Intervallgraph**, wenn eine Menge von reellen Intervallen $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ existiert, so dass die Knoten v_i und v_j genau dann adjazent in G sind, wenn $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ gilt.

Abstände und Zusammenhang

Der **Abstand** $d_G(v, w)$ zweier Knoten v und w im Graphen G gibt die Länge eines kürzesten Pfades von v nach w im Graphen G an. Falls kein Pfad von v nach w im Graphen G existiert, dann definieren wir $d_G(v, w) = \infty$. Für $v = w$ vereinbaren wir $d_G(v, w) = 0$. Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn für je zwei Knoten v und w ein Pfad in G von v nach w existiert. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen G heißen **Zusammenhangskomponenten** von G .

Einen Knoten $v \in V(G)$ nennen wir **Schnittknoten** im Graphen G , wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G \setminus v$ größer ist als die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G . Analog dazu heißt eine Kante $e \in E(G)$ **Brücke** im Graphen G , wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G \setminus e$ größer ist als die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G . Einen zusammenhängenden brückenfreien Graphen G nennen wir **stark zusammenhängend**. Ein zusammenhängender Graph G heißt **k -zusammenhängend**, wenn jeder Graph, der durch das Entfernen von weniger als k Knoten aus G entsteht, zusammenhängend ist.

Digraphen

Ein **Digraph** beziehungsweise **gerichteter Graph** $D = (V, A)$ besteht aus einer **Knotenmenge** V und einer **Kantenmenge** $A \subseteq V \times V$. Eine gerichtete Kante wird mit dem Tupel $a = (v, w)$ beschrieben. Wir nennen v den **Anfangsknoten** und w den **Endknoten** der Kante a . In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich Digraphen für die höchstens eine der beiden Kanten (v, w) oder (w, v) in der Kantenmenge A liegt. Ein **gerichteter Pfad** P in einem Digraphen D besteht aus paarweise unterschiedlichen Knoten v_1, v_2, \dots, v_n und den gerichteten Kanten $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$.

Mit dem D **zugrunde liegenden ungerichteten Graphen** bezeichnen wir den Graphen, der entsteht, wenn in der Kantenmenge die Orientierung aufgehoben wird. Den umgekehrten Vorgang nennen wir **Orientierung**. Ein Digraph, der durch eine Ori-

entierung der Kanten aus einem Graphen G entsteht, nennen wir **Orientierung** von G .

Ein Digraph D heißt **zusammenhängend**, wenn der zugrunde liegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist. Ein Digraph D heißt **stark zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten u und v ein gerichteter Pfad von u nach v und ein gerichteter Pfad von v nach u existiert.

Kapitel 3

Der minimale orientierte Durchmesser

In diesem Kapitel definieren wir den wichtigsten Begriff dieser Arbeit, den minimalen orientierten Durchmesser. Wir geben bekannte Komplexitätsresultate an und führen Graphenklassen auf, für die der minimale orientierte Durchmesser bekannt ist. Weiterhin fassen wir aus der Literatur bekannte Zusammenhänge zwischen dem minimalen orientierten Durchmesser und dem Durchmesser des ungerichteten Graphen zusammen. Im Abschnitt 3.5 zeigen wir eine Beziehung zwischen dem minimalen orientierten Durchmesser und der Dominanzzahl des Komplementärgraphen.

3.1 Definitionen

Definition 3.1 (Durchmesser). Der **Durchmesser eines ungerichteten Graphen** $G = (V, E)$ ist definiert als

$$\text{diam}(G) = \begin{cases} \max_{u,v \in V} d_G(u, v), & \text{falls } G \text{ zusammenhängend ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog dazu ist der **Durchmesser eines gerichteten Graphen** $D = (V, A)$ definiert als

$$\text{diam}(D) = \begin{cases} \max_{u,v \in V} d_D(u, v), & \text{falls } D \text{ stark zusammenhängend ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der minimale orientierte Durchmesser wird folgendermaßen definiert:

Definition 3.2 (minimaler orientierter Durchmesser). Sei G ein stark zusammenhängender ungerichteter Graph, dann bezeichnen wir mit $\text{diam}_{\min}(G)$ den kleinsten Durchmesser aller Orientierungen von G :

$$\text{diam}_{\min}(G) = \min\{ \text{diam}(D) : D \text{ ist eine Orientierung von } G \}.$$

Das Problem, Orientierungen für ungerichtete Graphen zu finden, untersuchte schon Robbins [33] im Jahr 1939. Er zeigte, dass für einen zusammenhängenden Graphen genau dann eine stark zusammenhängende Orientierung existiert, wenn der Graph keine Brücke enthält.

3.2 Komplexitätsresultate

Vom algorithmischen Standpunkt ist Folgendes bekannt.

Theorem 3.3. [7] *Das Problem: Ist $diam_{min}(G) \leq 2$, ist \mathcal{NP} -vollständig.*

Der Beweis beruht auf einer Transformation zum Problem: Ist ein Hypergraph vom Rang drei 2-färbbar.

Im Jahr 2004 zeigten Fomin et al. [17], dass das Problem, zu entscheiden ob eine Orientierung H eines Graphen G existiert mit $diam(H) \leq k$ bereits für chordale Graphen \mathcal{NP} -vollständig ist.

Als **Orientierungsproblem** bezeichnen wir im Folgenden das Problem, zu entscheiden, ob eine Orientierung eines Graphen existiert mit einem Durchmesser kleiner gleich k . Fomin et al. [17] zeigten, dass das Orientierungsproblem sogar für Splitgraphen für $k = 2$ \mathcal{NP} -vollständig ist.

Positive Approximationsresultate

Wir sprechen von einem (α, k) -**approximativen Algorithmus** für das Orientierungsproblem, wenn der Algorithmus für jeden Graphen G in polynomieller Zeit eine Orientierung H von G liefert mit:

$$diam(H) \leq \alpha diam_{min}(G) + k.$$

Fomin et al. [17] zeigten, dass für jeden stark zusammenhängenden chordalen Graphen G eine Orientierung H existiert, so dass für jedes Paar von Knoten u, v gilt:

$$\max\{d_H(u, v), d_H(v, u)\} \leq 2d_G(u, v) + 1.$$

Sie zeigten weiterhin, dass diese Orientierung in linearer Zeit konstruiert werden kann. Diese Schranke ist bestmöglich. Fomin et al. [17] konstruierten eine Familie von chordalen Graphen G_n mit Durchmesser n , so dass der Durchmesser jeder stark zusammenhängenden Orientierung H_n von G_n den Wert $2n + 1$ annimmt.

Aus der obigen Ungleichung folgt, dass für die Klasse der chordalen Graphen ein linearer $(2, 1)$ -approximativer Algorithmus für das Orientierungsproblem existiert [17].

Negative Approximationsresultate

Fomin et al. gaben in ihrem Artikel [17] nicht nur positive Approximationsresultate an. Sie zeigten: Für $\alpha < \frac{3}{2}$ und falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein $(\alpha, 0)$ -approximativer Algorithmus für das Orientierungsproblem für die Klasse der Splitgraphen. Weiter zeigten sie [17]: Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein $(0, k)$ -approximativer Algorithmus für das Orientierungsproblem auf chordalen Graphen.

Unbekannt ist, ob ein polynomieller (α, k) -approximativer Algorithmus für das Orientierungsproblem existiert mit $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Offen ist auch, ob ein $(2, 0)$ -approximativer Algorithmus für das Orientierungsproblem auf chordalen Graphen existiert.

3.3 Der minimale orientierte Durchmesser spezieller Graphenklassen

Zahlreiche Autoren [3, 4, 8, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 34] beschäftigten sich mit der Bestimmung des minimalen orientierten Durchmessers bestimmter Graphenklassen. Wir führen hier nur die Ergebnisse für vollständige Graphen und einige ausgewählte Gittergraphen auf.

Vollständige Graphen

Für jeden vollständigen Graphen K_n mit $n \geq 5$ existiert eine Orientierung mit Durchmesser zwei [21]. Für den vollständigen Graphen mit vier Knoten beträgt der minimale orientierte Durchmesser drei [21].

Für vollständig bipartite Graphen gilt [21]:

$$\text{diam}_{\min}(K_{n,m}) = \begin{cases} 3, & \text{für } n \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \\ 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter untersuchte Gutin [21] den minimalen orientierten Durchmesser vollständiger multipartiter Graphen $K(m_1, m_2, \dots, m_k)$. Für $k \geq 3$ gilt:

$$\text{diam}_{\min}(K(m_1, m_2, \dots, m_k)) \leq 3.$$

Für $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$, $k \neq 4$ und $m > 1$ gilt [21]:

$$\text{diam}_{\min}(K(m_1, m_2, \dots, m_k)) = 2.$$

Gittergraphen

Ein **Gittergraph** entsteht durch das kartesische Produkt mehrerer Graphen. Das **kartesische Produkt** $G_1 \times G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ hat als

Knotenmenge die Tupel (u, v) mit $u \in V_1, v \in V_2$. Zwei Knoten (u_1, v_1) und (u_2, v_2) sind genau dann adjazent in $G_1 \times G_2$, wenn $u_1 = u_2$ und v_1 adjazent zu v_2 im Graphen G_2 ist oder wenn $v_1 = v_2$ und u_1 adjazent zu u_2 im Graphen G_1 ist.

Ein einfacher Gittergraph ist der **Würfel** Q_n . Er entsteht durch das kartesische Produkt von n Kanten. Für den Würfel Q_n mit $n \geq 4$ gilt [18]:

$$\text{diam}_{\min}(Q_n) = \text{diam}(Q_n) = n.$$

Roberts und Xu [34] betrachteten Graphen $G_{n_1 \times n_2}$, die aus dem kartesischen Produkt zweier Pfade P_1, P_2 mit $|P_1| = n_1$ und $|P_2| = n_2$ hervorgehen. Der Durchmesser des Graphen $G_{n_1 \times n_2}$ beträgt $n_1 + n_2$. Für $n_1 \geq 4, n_2 \geq 6$ und n_1, n_2 gerade, für $n_1 \geq 4, n_2 \geq 5$ und n_1 gerade, n_2 ungerade und für $n_1 \geq 5, n_2 \geq 7$ und n_1, n_2 ungerade gilt [34]:

$$\text{diam}_{\min}(G_{n_1 \times n_2}) = n_1 + n_2.$$

Koh und Tay [25] untersuchten die Graphen, die aus dem Produkt mehrerer Pfade entstehen. Seien P_1, \dots, P_n Pfade mit $|P_1| \geq 3, |P_2| \geq 6$ und $(|P_1|, |P_2|) \neq (3, 6)$. Dann gilt [25]:

$$\text{diam}_{\min}\left(\prod_{i=1}^n P_i\right) = \sum_{i=1}^n |P_i| = \text{diam}\left(\prod_{i=1}^n P_i\right).$$

König et al. [24] beschäftigten sich mit dem kartesischen Produkt von Kreisen. Der Durchmesser von $C_n \times C_m$ beträgt [24] $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Für $n, m \geq 5$ und n, m ungerade gilt [24]:

$$\text{diam}_{\min}(C_n \times C_m) = \text{diam}(C_n \times C_m) + 1.$$

Für m gerade und $n, m \geq 5$ gilt [24]:

$$\text{diam}_{\min}(C_n \times C_m) = \text{diam}(C_n \times C_m).$$

Bemerkenswert ist, dass für $n = 5, m \geq 5$ und m ungerade der minimale orientierte Durchmesser von $C_n \times C_m$ noch nicht bekannt ist. Vermutet wird, dass für $m \geq 5$ und m ungerade gilt [24]:

$$\text{diam}_{\min}(C_5 \times C_m) = \text{diam}(C_5 \times C_m) + 2.$$

Weiterhin bestimmten Koh und Tay [25, 26] den minimalen orientierten Durchmesser von Graphen, die durch das kartesische Produkt von Pfaden und Kreisen und durch das kartesische Produkt von einem Kreis und einem vollständigen Graphen entstehen.

3.4 Der Durchmesser und der minimale orientierte Durchmesser

Eine Reihe von Autoren [1, 7, 15, 19, 23, 28] untersuchte die Abhängigkeit des minimalen orientierten Durchmessers vom Durchmesser des Graphen. Offenbar bildet der

Durchmesser eine untere Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser. Ein Graph G , für den der Durchmesser gleich dem minimalen orientierten Durchmesser ist, nennen wir **straff orientierbar**. Einige der Gittergraphen (siehe Abschnitt 3.3) sind straff orientierbar.

Sei $f(d)$ die kleinste Zahl, so dass jeder stark zusammenhängende Graph G mit Durchmesser $diam(G) = d$ eine Orientierung mit Durchmesser höchstens $f(d)$ besitzt. Die beste bekannte Schranke für den Parameter $f(d)$ wurde von Chvatál und Thomassen [7] gefunden. Sei G ein stark zusammenhängender Graph, dann gilt:

$$\frac{1}{2}diam(G)^2 + diam(G) \leq f(d) \leq 2diam(G)^2 + 2diam(G).$$

In [7] wurde ebenfalls $f(2) = 6$ gezeigt. Der Petersen-Graph und der Graph, der durch die Ersetzung von drei Kanten $(u, v_1), (u, v_2), (u, v_3)$ durch Pfade der Länge zwei aus dem Graphen K_4 entsteht, erfüllen diese Gleichung. Siehe dazu auch Abbildung 3.1.

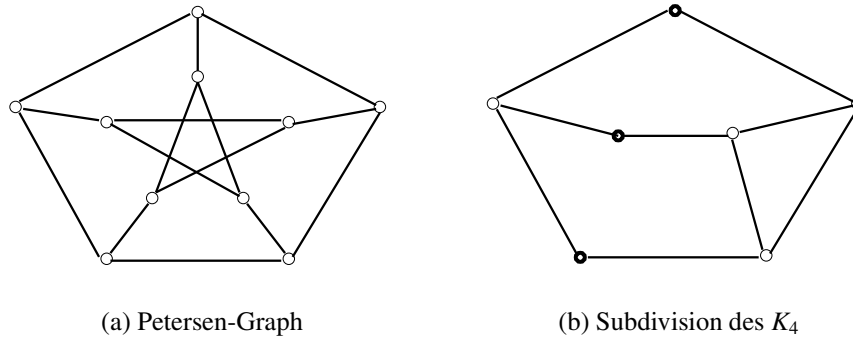


Abbildung 3.1: Zwei Graphen mit Durchmesser zwei, für die der minimale orientierte Durchmesser sechs beträgt.

Im Jahr 2007 zeigte Kwok [28]: $9 \leq f(3) \leq 11$. Für Graphen mit größerem Durchmesser als drei sind noch keine anderen Resultate als die obige allgemeine Schranke von Chvatál und Thomassen [7] bekannt.

Fomin et al. [15] untersuchten für bestimmte Graphenklassen die Abhängigkeit des minimalen orientierten Durchmessers vom Durchmesser. Sei G ein stark zusammenhängender AT-freier Graph. Dann gilt [15]:

- $diam_{min}(G) \leq 2diam(G) + 11$;
- wenn G zusätzlich chordal ist, gilt: $diam_{min}(G) \leq \frac{3}{2}diam(G) + 11$;
- wenn G zusätzlich $K_{1,3}$ -frei ist, gilt: $diam_{min}(G) \leq \frac{3}{2}diam(G) + 12$;
- wenn G zusätzlich $K_{1,3}$ -frei und 2-zusammenhängend ist, gilt:
 $diam_{min}(G) \leq \frac{5}{4}diam(G) + \frac{15}{2}$.

Ein Graph G ist genau dann ein Intervallgraph, wenn der Graph AT-frei und chordal ist [29]. Mit obigen Resultat erhalten wir für einen stark zusammenhängenden Intervallgraphen G die Abschätzung [15]: $diam_{min}(G) \leq \frac{3}{2}diam(G) + 11$.

Fomin et al. [15] zeigten weiterhin, dass die obigen Abschätzungen bis auf eine additive Konstante scharf sind.

3.5 Die Dominanzzahl des Komplementärgraphen und der minimale orientierte Durchmesser

Es gilt folgende Beziehung zwischen der Dominanzzahl des Komplementärgraphen \bar{G} und dem minimalen orientierten Durchmesser eines Graphen G .

Satz 3.4. *Sei $G = (V, E)$ ein stark zusammenhängender Graph mit $\gamma(\bar{G}) \geq 4$. Dann gilt:*

$$diam_{min}(G) \leq 5.$$

Beweis. Sei v ein Knoten mit minimalen Knotengrad δ in G . Die Menge $N_G[v] = N_G(v) \cup v = \bar{D}$ bildet eine dominierende Menge für den Komplementärgraphen \bar{G} , da jeder Knoten $z \in V(\bar{G})$ entweder in der Menge \bar{D} liegt oder im Graphen \bar{G} adjazent zum Knoten v ist. Also gilt:

$$\gamma(\bar{G}) \leq |N_G[v]| = |N_G(v)| + 1 = \delta + 1.$$

Also gilt $\delta \geq \gamma(\bar{G}) - 1$. Da $\gamma(\bar{G}) \geq 4$ gilt, besitzt der Knoten v mindestens drei adjazente Knoten im Graphen G . Seien die Knoten $N_G(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_\delta\}$ Nachbarknoten von v im Graphen G . Sei weiterhin W die Menge $W = V \setminus N_G[v]$. Falls die Menge W leer ist, dann ist G ein vollständiger Graph, da der Knoten v minimalen Grad besitzt. Für einen vollständigen Graphen gilt obige Behauptung, siehe Abschnitt 3.3.

Sei die Menge W nicht leer und $w \in W$ ein Knoten. Die Menge $\{u_1, v, w\}$ ist keine dominierende Menge für \bar{G} , da nach Voraussetzung gilt $\gamma(\bar{G}) \geq 4$. Das heißt, mindestens ein Knoten z wird nicht durch die Menge $\{u_1, v, w\}$ im Graphen \bar{G} dominiert. Das bedeutet, im Graphen G ist der Knoten z adjazent zu allen drei Knoten u_1, v und w . Sei $f_1(w) \in N_G(v)$ der Knoten $u_k \in N_G(v)$ mit dem kleinsten Index k , so dass:

$$\{(f_1(w), u_1), (f_1(w), v), (f_1(w), w)\} \subset E(G).$$

Wir betrachten weiter die Menge $\{f_1(w), v, w\}$. Analog zu oben bilden diese drei Knoten keine dominierende Menge für den Graphen \bar{G} . Sei $f_2(w) \in N_G(v)$ der Knoten $u_k \in N_G(v)$ mit dem kleinsten Index k , so dass:

$$\{(f_2(w), f_1(w)), (f_2(w), v), (f_2(w), w)\} \subset E(G).$$

Jeder Knoten $w \in W$ ist somit zu mindestens zwei Knoten $f_1(w), f_2(w) \in N_G(v)$ adjazent.

Wir definieren die Menge $Z \subseteq N_G(v)$:

$$Z = \{u_i \in N_G(v) : u_i \neq f_1(w) \text{ und } u_i \neq f_2(w) \quad \forall w \in W\}.$$

Da für jeden Knoten $z \in Z, z \neq u_1$ die Menge $\{z, u_1, v\}$ keine dominierende Menge für den Graphen \bar{G} bildet, besitzt jeder Knoten $z \in Z$ mindestens einen Nachbarknoten aus $N_G(v)$. Weiter definieren wir $\bar{Z} = N_G(v) \setminus Z$, $Z_1 = \{z \in Z : N_G(z) \cap \bar{Z} \neq \emptyset\}$ und $Z_2 = \{z \in Z : N_G(z) \cap \bar{Z} = \emptyset\}$. Wir orientieren die Kanten im Graphen G folgendermaßen:

- von w nach $f_1(w) \quad \forall w \in W$,
- von $f_2(w)$ nach $w \quad \forall w \in W$,
- von $f_2(w)$ nach $f_1(w) \quad \forall w \in W$,
- von u_i zum Knoten $u_1 \quad \forall u_i \in N_G(v)$,
- von u_1 nach v ,
- von v nach $u_i \quad \forall u_i \in \bar{Z} \setminus u_1$,
- von u_i nach $u_j \quad \forall (u_i, u_j) \in E(G)$ mit $u_i \in \bar{Z} \setminus u_1$ und $u_j \in Z_1$,
- von u_i nach $v \quad \forall u_i \in Z_1$.

Die verbliebenen Kanten des Graphen $G[Z_2 \cup v]$ werden so orientiert, dass gilt $d_H(v, u_i) \leq 2$ und $d_H(u_i, v) \leq 2$ für alle Knoten $u_i \in Z_2$. Alle anderen Kanten können beliebig orientiert werden. Siehe dafür auch Abbildung 3.2.

Wir betrachten den Abstand zweier Knoten x und y in der Orientierung H . Es gilt:

$$d_H(x, v) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } x \in Z_1 \text{ oder } x = u_1, \\ 2 & \text{für } x \in Z_2, \\ 3 & \text{für } x \in W \text{ oder } x \in \bar{Z}, \end{cases}$$

und

$$d_H(v, y) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \bar{Z} \setminus u_1, \\ 2 & \text{für } y \in Z_2, y \in Z_1 \text{ oder } y = u_1, \\ 2 & \text{für } y \in W. \end{cases}$$

Mit $d_H(x, y) \leq d_H(x, v) + d_H(v, y) \leq 5$ folgt der Satz. □

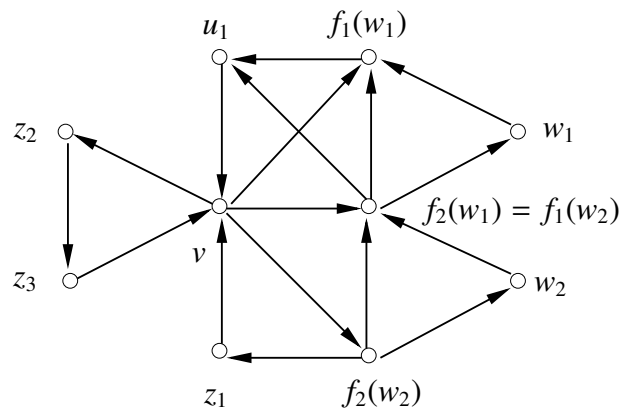


Abbildung 3.2: Die Orientierung aus dem Beweis des Satzes 3.4. Die Knoten z_1, u_1 bilden die Menge Z_1 . Die Knoten z_2, z_3 liegen in der Menge Z_2 . Die restlichen drei Nachbarknoten von v sind in der Menge \bar{Z} enthalten. Die beiden Knoten w_1, w_2 bilden die Menge W .

Kapitel 4

Eine Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser

4.1 Einleitung

Das erste uns bekannte Resultat, welches die Dominanzzahl $\gamma(G)$ eines stark zusammenhängenden Graphen G in Beziehung zum minimalen orientierten Durchmesser setzt, stammt von Fomin et al. [16]. Sie zeigten:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 9\gamma(G) - 5.$$

Wenig später verbesserten sie die obige Abschätzung durch [15]:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 5\gamma(G) - 1.$$

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist das folgende Theorem.

Theorem 4.1. *Sei G ein stark zusammenhängender Graph. Dann gilt:*

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 4\gamma(G).$$

Wir geben in diesem Kapitel zwei unterschiedliche Beweise dieses Theorems an. Beide Beweise beruhen auf strukturellen Aussagen über ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. Wir zeigen im Abschnitt 4.2, dass wir uns zum Beweis des Theorems 4.1 auf Graphen beschränken können, die höchstens zwei, genau charakterisierte Schnittknoten, besitzen. Der Abschnitt 4.2 bildet die Grundlage beider Beweise.

Im Abschnitt 4.3 wird die Struktur eines diametralen Pfades in einer optimalen Orientierung untersucht. Es wird gezeigt, dass jeder dominierende Knoten, der nicht auf dem diametralen Pfad liegt, höchstens einen Nachbarknoten auf dem diametralen Pfad besitzt. Mit diesen Strukturaussagen kann die Länge eines solchen Pfades abgeschätzt werden.

Im Abschnitt 4.4 verfolgen wir einen anderen Weg. Aufbauend auf die weitgehende Schnittknotenfreiheit eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 4.1 konstruieren wir einen stark zusammenhängenden Teilgraphen, der die dominierenden Knoten

enthält. Durch Abschätzung der Knotenanzahl eines kleinsten dominierenden Teilgraphen erhalten wir den Beweis des Theorems 4.1. Weiterhin liefert dieser zweite Beweis einen Algorithmus zur Konstruktion einer Orientierung H eines Graphen G bei gegebener dominierender Menge D mit $diam(H) \leq 4|D|$.

Wir können nicht zeigen, dass Graphen existieren, welche die Ungleichung im Theorem 4.1 mit Gleichheit erfüllen, vielmehr vermuten wir:

Vermutung 4.2. Sei G ein stark zusammenhängender Graph. Dann gilt:

$$diam_{min}(G) \leq \left\lceil \frac{7\gamma(G) + 1}{2} \right\rceil.$$

Die Vermutung gründet sich auf folgende Beobachtungen. Zum einen existiert für jede Anzahl dominierender Knoten ein Graph, der die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt. Siehe Abbildung 4.1 für den Fall $\gamma(G) = 3$. Durch Anfügen weiterer Kreise der Länge vier und Kreise der Länge drei, erhält man Graphen mit größerer Dominanzzahl, welche die Ungleichung in Vermutung 4.2 mit Gleichheit erfüllen.

Zum anderen werden in keinem wesentlichen Schritt des Beweises Kanten orientiert. Es wird nie das Argument benutzt, dass eine gewisse Orientierung der Kanten keine optimale Orientierung ist und somit ausgeschlossen werden kann. Besonders deutlich wird dies im Abschnitt 4.4. In diesem Abschnitt wird die allgemeine Beziehung $diam(H) \leq |V(H)| - 1$ herangezogen, um den Durchmesser abzuschätzen. Diese Beziehung gilt jedoch nicht nur für die optimale Orientierung, sondern für jede stark zusammenhängende Orientierung H eines Graphen G .

Die Schwierigkeit eines möglichen Beweises der Vermutung 4.2 kann anhand Abbildung 4.21 abgeschätzt werden. Schon für drei dominierende Knoten existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Strukturen.

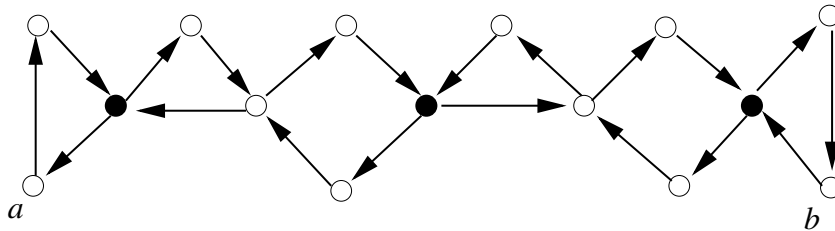


Abbildung 4.1: Digraph mit Dominanzzahl 3 und Durchmesser $11 = \left\lceil \frac{7 \cdot 3 + 1}{2} \right\rceil$.

4.2 Schnittknoten

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 weitgehend schnittknotenfrei ist. Wir benötigen folgende Begriffe.

Definition 4.3 (diametrales Paar, optimale Orientierung). Sei H ein Digraph, dann bilden zwei Knoten u und v ein **diametrales Paar** (u, v) , wenn $diam(H) = d_H(u, v)$ gilt. Einen kürzesten Pfad zwischen den zwei Knoten u, v eines diametralen Paares in einem Digraphen nennen wir **diametralen Pfad**.

Eine Orientierung H eines Graphen G heißt **optimale Orientierung**, wenn gilt: $diam_{min}(G) = diam(H)$.

4.2.1 Erste Standardform

Definition 4.4 (erste Standardform). Sei $G = (V, E)$ ein Graph und D eine dominierende Menge für G . Das Paar (G, D) ist in **erster Standardform**, wenn Folgendes gilt:

- Der Graph $G = (V, E)$ ist stark zusammenhängend.
- Die Knotenmenge D ist eine minimale dominierende Menge für G .
- Seien $u, v \in D$, dann ist die Kante $(u, v) \notin E$.
- Für jeden Knoten $u \in V \setminus D$ existiert genau ein Knoten $v \in D$ mit $(u, v) \in E$.
- Der Graph G ist kantenminimal, das heißt, es kann keine Kante $e \in E$ entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang, oder die Eigenschaft von D als dominierende Menge zu zerstören.

Wir führen folgende Schreibweise ein. Für jeden Knoten $v \in V$ bezeichnen wir mit $f_{(G,D)}(v)$ den Knoten aus D , der v dominiert. Falls der Knoten v selbst in der dominierenden Menge D liegt, definieren wir $f_{(G,D)}(v) = v$. Die Funktion $f_{(G,D)}(v)$ ist wohldefiniert für Paare (G, D) in erster Standardform. Wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, verzichten wir auf den Index (G, D) , oder geben nur den Graphen an.

Lemma 4.5. Für jeden stark zusammenhängenden Graphen G' und zugehöriger minimaler dominierender Menge D' existiert ein Tupel (G, D) in erster Standardform mit

$$\gamma(G) = |D| \leq \gamma(G') = |D'|$$

und

$$\infty > diam_{min}(G) \geq diam_{min}(G').$$

Beweis. Wir starten mit dem Paar $(G, D) := (G', D')$ und führen bestimmte Graphentransformationen durch, um ein Paar (G, D) in erster Standardform zu erhalten.

Wenn eine Kante (u, v) mit $u \in D$ und $v \in D$ im Graphen G' existiert, ersetzen wir die Kante (u, v) durch einen Pfad $P = (u, u', v', v)$ der Länge drei.

Wenn ein Knoten u im Graphen G mit mindestens zwei Nachbarknoten $v_1, v_2, \dots, v_k \in D$ existiert, ersetzen wir alle Kanten (u, v_i) mit $i > 1$ durch Pfade $P = (u, v'_i, v_i)$ der Länge zwei.

Schließlich entfernen wir solche Kanten $e \in E(G)$, deren Entfernung weder den starken Zusammenhang noch die Eigenschaft von D als dominierende Menge zerstört. Das so konstruierte Paar (G, D) ist in erster Standardform.

Offensichtlich gilt $\gamma(G) = |D| \leq \gamma(G') \leq |D'|$. Durch obige Operationen kann der minimale orientierte Durchmesser nicht kleiner werden. Daher gilt: $\infty > \text{diam}_{\min}(G) \geq \text{diam}_{\min}(G')$. \square

Bemerkung 4.6. Wenn G ein Graph in erster Standardform (G, D) ist und (u, v) eine Kante in $E(G)$ mit $u, v \notin D$, dann folgt aus der Kantenminimalität von G , dass die Kante (u, v) keine Sehne im Graphen G ist. Diese Eigenschaft werden wir im Weiteren mehrmals benötigen.

4.2.2 Echte Schnittpunkte

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Schnittpunkte, welche die Menge der dominierenden Knoten in echte Teilmengen partitioniert. Solche Schnittpunkte nennen wir echte Schnittpunkte.

Definition 4.7 (echter Schnittpunkt). Sei $G = (V, E)$ ein Graph und D eine dominierende Menge für G . Ein Knoten $v \in V$ heißt **echter Schnittpunkt** von (G, D) , wenn $G \setminus v$ in Zusammenhangskomponenten G_1, \dots, G_m zerfällt, und wenn Zusammenhangskomponenten G_i und G_j ($i \neq j$) existieren mit $|V(G_i) \cap D| \geq 1$ und $|V(G_j) \cap D| \geq 1$.

Definition 4.8 (Schnittpunkt vom Typ A). Ein Schnittpunkt v eines Graphen G in erster Standardform (G, D) ist vom **Typ A**, wenn

- $v \notin D$ und
- für die Zusammenhangskomponente G_1 von $G \setminus v$ die den Knoten $f(v) \in D$ enthält, gilt:

$$|V(G_1) \cap D| = 1.$$

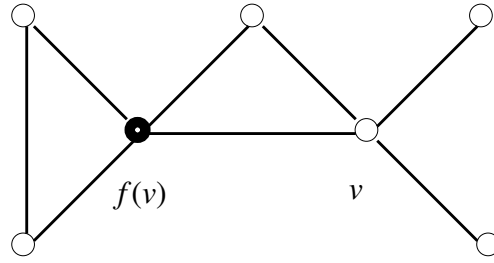
Siehe dazu auch Abbildung 4.2.

Insbesondere ist jeder Schnittpunkt vom Typ A ein echter Schnittpunkt.

Zum Beweis des Theorems 4.1 zeigen wir strukturelle Eigenschaften eines kleinsten Gegenbeispiels. Dabei ist ein Graph G ein **kleinster Graph**, wenn kein Graph G' existiert mit weniger Kanten.

Wir zeigen: Wenn G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und v ein Schnittpunkt in G ist, dann zerfällt $G \setminus v$ in höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.

Lemma 4.9. Sei $G = (V, E)$ ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in erster Standardform (G, D) und $v \in V$ ein echter Schnittpunkt. Dann zerfällt $G \setminus v$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Abbildung 4.2: Der Knoten v ist ein Schnittknoten vom Typ A.

Beweis. Angenommen, $G \setminus v$ zerfällt in die Zusammenhangskomponenten G_1, \dots, G_k mit $k \geq 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Sei $v \in D$.

Falls ein Index i existiert mit $|V(G_i) \cap D| = 0$, kann die Komponente G_i entfernt werden, ohne dass sich der minimale orientierte Durchmesser des Graphen G verringert. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität. Wir können also annehmen, dass $|V(G_i) \cap D| \geq 1$ für $i \leq k$ gilt.

Seien H_i die Graphen $G[V(G_i) \cup v]$. Da $k \geq 3$, gilt:

$$\gamma(G) \geq \gamma(H_i) + \gamma(H_j) \quad i \neq j.$$

Sei G' eine Orientierung von G , die sich aus optimalen Orientierungen H'_i der Graphen H_i , $i \leq k$ zusammensetzt. Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in der Orientierung G' . Falls die Knoten x und y im gleichen Teilgraphen H_i liegen, gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) = \text{diam}_{\min}(H_i).$$

Da G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und H_i ein Teilgraph von G ist, gilt: $\text{diam}_{\min}(H_i) \leq 4\gamma(H_i)$. Damit ist für diesen Fall ein Widerspruch gezeigt.

Sei nun o.B.d.A. $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq \text{diam}(H'_1) + \text{diam}(H'_2) \\ &= \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) \\ &\leq 4\gamma(H_1) + 4\gamma(H_2) \\ &\leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Da G ein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 ist, erhalten wir einen Widerspruch zu $\text{diam}_{\min}(G) > 4\gamma(G)$.

Fall 2: Sei $v \notin D$.

Da $v \notin D$, gilt $|V(G_i) \cap D| \geq 1$ für $1 \leq i \leq k$. Seien H_i die Graphen $G[V(G_i) \cup v]$. Wir konstruieren eine Orientierung G' von G aus optimalen Orientierungen H'_i der Graphen H_i . Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in der Orientierung G' .

Falls die Knoten x und y in der Komponente H_i liegen, gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) = \text{diam}_{\min}(H_i).$$

Es gilt: $\gamma(H_i) \leq |V(H_i) \cap D| + 1$, da $(V(H_i) \cap D) \cup v$ jeden Knoten von H_i dominiert. Da G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und H_i ein echter Teilgraph von G ist, gilt:

$$\text{diam}_{\min}(H_i) \leq 4\gamma(H_i) \leq 4\gamma(G).$$

Damit ist für diesen Fall ein Widerspruch gezeigt.

Sei o.B.d.A. $f_G(v) \in V(G_1)$ und sei $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_i)$, $i > 1$. Dann gilt $\gamma(H_1) \leq |V(H_1) \cap D|$ und $\gamma(H_i) \leq |V(H_i) \cap D| + 1$. Daher gilt: $\gamma(G) \geq \gamma(H_1) + \gamma(H_i)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &\leq d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &\leq d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_i}(v, y) \\ &\leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_i) \\ &\leq 4\gamma(H_1) + 4\gamma(H_i) \\ &\leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\text{diam}_{\min}(G) > 4\gamma(G)$.

Der Fall $y \in V(G_1)$ lässt sich analog zeigen.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass $x \in V(H_i)$ und $y \in V(H_j)$ mit $1 < i$, $1 < j$ und $i \neq j$. Falls die Ungleichung $\gamma(G) \geq \gamma(H_i) + \gamma(H_j)$ gilt, können wir den minimalen orientierten Durchmesser von G analog zum obigen Fall abschätzen.

Sei nun $\gamma(G) < \gamma(H_i) + \gamma(H_j)$. Dann besteht $G \setminus v$ aus genau drei Zusammenhangskomponenten und $\gamma(H_1) = 1$.

Falls die Komponente H_1 ein Kreis der Länge drei ist, dann ist auch $D' = (D \setminus f(v)) \cup v$ eine dominierende Menge für G . Die Knoten der Komponente G_1 können entfernt werden, ohne dass sich der minimale orientierte Durchmesser von G verringert.

Bestehe die Komponente G_1 aus mindestens drei Knoten. Dann ist jedoch der Graph H , der aus dem Graphen G durch Ersetzung des Knotens v mit einem Kreis der Länge drei und Entfernung der Komponente G_1 entsteht ein kleineres Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. Für die Konstruktion siehe auch Abbildung 4.3.

Damit ist der Fall $v \notin D$ gezeigt.

□

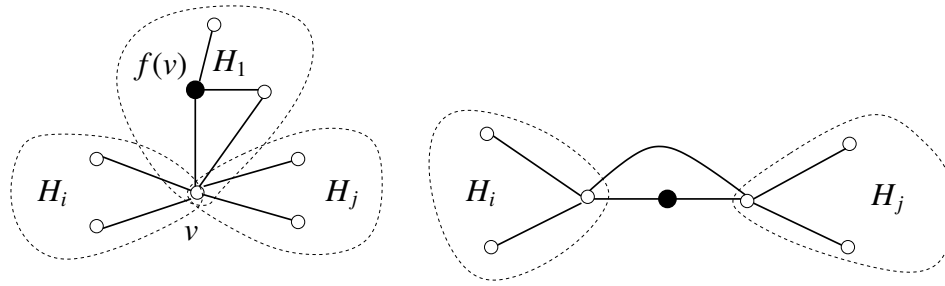


Abbildung 4.3: Der rechts abgebildete Graph besteht aus weniger Knoten als der Graph auf der linken Seite. Jedoch ist der minimale orientierte Durchmesser im rechten Graphen nicht kleiner als im Linken. Siehe dazu Lemma 4.9.

4.2.3 Echte Schnittknoten sind vom Typ A

In diesem Abschnitt zeigen wir zum einen, dass jeder echte Schnittknoten in einem kleinsten Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 vom Typ A ist. Weiter zeigen wir, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 höchstens zwei Schnittknoten vom Typ A enthält.

Definition 4.10 (isoliertes Dreieck). Zwei Knoten $u, v \in V(G)$ bilden ein **isoliertes Dreieck** im Graphen G , wenn $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 2$, $(u, v) \in E(G)$ und ein Knoten $x \in V(G)$ existiert mit $(x, u), (x, v) \in E(G)$.

Definition 4.11 (Exzentrizität). Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} ecc_G^-(u) &= \max_{x \in V} d_G(x, u), \\ ecc_G^+(u) &= \max_{x \in V} d_G(u, x) \text{ und} \\ ecc_G(u) &= \max\{ecc_G^-(u), ecc_G^+(u)\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.12. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in erster Standardform (G, D) . Dann ist jeder echte Schnittknoten von G vom Typ A.

Beweis. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in erster Standardform (G, D) . Wir nehmen an, dass v ein echter Schnittknoten in G ist. Aus Lemma 4.9 folgt, dass $G \setminus v$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 besteht. Wir unterscheiden die Fälle $v \in D$ und $v \notin D$:

Fall 1: Sei $v \in D$.

Da v in der dominierenden Menge D liegt, ist der Knoten v kein Schnittknoten vom Typ A. Wir betrachten die Graphen $H_1 = (V_1, E_1)$ und $H_2 = (V_2, E_2)$ mit:

$V_i = V(G_i) \cup \{v, w_i, z_i\}$ und $E_i = E(G[V(G_i) \cup v]) \cup \{(v, w_i), (w_i, z_i), (z_i, v)\}$, $i \in \{1, 2\}$. Siehe dazu Abbildung 4.4 auf Seite 26. Für die Graphen H_1 und H_2 gilt:

$$\gamma(H_1) + \gamma(H_2) = \gamma(G) + 1.$$

Wir zeigen zuerst, dass sich der minimale orientierte Durchmesser von G folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, geben wir eine Orientierung für den Graphen G an. Seien H'_1 und H'_2 optimale Orientierungen der Graphen H_1 und H_2 . Wir orientieren alle Kanten von G entsprechend der Orientierungen H'_1 beziehungsweise H'_2 . Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung G' von G . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1.1: Liege o.B.d.A. der Pfad $P(x, y)$ komplett im Teilgraphen $G[V(G_1) \cup v]$.

Dann ist $d_{G'}(x, y) \leq \text{diam}_{\min}(H_1)$. Da v ein echter Schnittknoten ist, gilt: $\gamma(H_2) \geq 2$. Der Graph H_2 ist in erster Standardform und besitzt mindestens zwei dominierende Knoten. Offensichtlich gilt deshalb $\text{diam}_{\min}(H_2) \geq 4$. Damit gilt in diesem Fall die Ungleichung:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.$$

Fall 1.2: Sei o.B.d.A. $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$. Durch das Hinzufügen der isolierten Dreiecke am Knoten v der Graphen H_1 und H_2 gelten die Ungleichungen:

$$\text{ecc}_{H'_i}^+(v) \leq \text{diam}(H'_i) - 2 \quad i \in \{1, 2\}$$

und

$$\text{ecc}_{H'_i}^-(v) \leq \text{diam}(H'_i) - 2 \quad i \in \{1, 2\}.$$

Dann gilt folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq \text{ecc}_{H'_1}^-(v) + \text{ecc}_{H'_2}^+(v) \\ &\leq \text{diam}(H'_1) - 2 + \text{diam}(H'_2) - 2 \\ &= \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4. \end{aligned}$$

Wir können folgende Abschätzung aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4 \\ &\leq 4\gamma(H_1) + 4\gamma(H_2) - 4 \\ &= 4(\gamma(G) + 1) - 4 = 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Damit ist der Widerspruch konstruiert.

Fall 2: Sei $v \notin D$.

Wir nehmen o.B.d.A. an: $f(v) \in V(G_1)$. Angenommen, der Knoten v ist kein Schnittknoten vom Typ A. Wir betrachten die Graphen H_1 und H_2 mit: $H_1 = G[V(G_1) \cup v]$. Falls kein isoliertes Dreieck am Knoten $f(v)$ im Graphen G existiert, fügen wir am Knoten $f(v)$ ein isoliertes Dreieck an.

Der Graph H_2 besteht aus der Komponente G_2 und zusätzlich zwei Kreisen der Länge drei, angeordnet wie in Abbildung 4.5 auf Seite 26. Der Knoten v im Graphen H_2 ist ein Knoten vom Typ A.

Für die Graphen H_1 und H_2 gilt:

$$\gamma(H_1) + \gamma(H_2) = \gamma(G) + 1.$$

Wir zeigen zuerst, dass sich der minimale orientierte Durchmesser von G folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, geben wir eine Orientierung für den Graphen G an. Seien H'_1 und H'_2 optimale Orientierungen der Graphen H_1 und H_2 mit

$$\text{ecc}_{H'_1}^+(v) \leq \text{ecc}_{H'_1}^-(v)$$

und

$$\text{ecc}_{H'_2}^+(v) \leq \text{ecc}_{H'_2}^-(v).$$

Solche Orientierungen der Graphen H_1 und H_2 existieren, da sich der Durchmesser einer Orientierung nicht ändert, wenn alle Kanten entgegengesetzt orientiert werden.

Wir orientieren alle Kanten von G entsprechend der Orientierungen H'_1 beziehungsweise H'_2 . Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung G' von G . Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 2.1: Liege der Pfad $P(x, y)$ vollständig im Teilgraphen $G[V(G_1) \cup v]$.

Dann ist $d_{G'}(x, y) \leq \text{diam}_{\min}(H_1)$. Nach Konstruktion des Graphen H_2 gilt $\text{diam}_{\min}(H_2) \geq 4$. Damit ist die Ungleichung gezeigt.

Fall 2.2: Liege der Pfad $P(x, y)$ vollständig im Teilgraphen $G[V(G_2) \cup v]$.

Dann ist $d_{G'}(x, y) \leq \text{diam}_{\min}(H_2)$. Da der Knoten v kein Knoten vom Typ A ist, gilt $\gamma(H_1) \geq 2$. Damit ist $\text{diam}_{\min}(H_1) \geq 4$ und es gilt die Ungleichung

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.$$

Fall 2.3: Sei $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$.

Falls kein diametraler Pfad $P(x_2, y_2)$ in H'_2 existiert mit $f_{H_2}(v) \in V(P(x_2, y_2))$, dann gilt:

$$2 + \text{ecc}_{H'_2}^-(f_{H_2}(v)) < \text{diam}(H'_2).$$

Daraus folgt:

$$3 + ecc_{H_2}^-(f_{H_2}(v)) \leq diam(H'_2).$$

Da der Abstand von v zu $f_{H_2}(v)$ im Digraphen H'_2 mindestens eins beträgt, ist:

$$4 + ecc_{H_2}^-(v) \leq diam(H'_2).$$

Analog gilt für $ecc_{H_2}^+(v)$:

$$4 + ecc_{H_2}^+(v) \leq diam(H'_2).$$

Andererseits, falls $P(x_2, y_2)$ ein diametraler Pfad im Digraphen H'_2 ist, mit $f_{H_2}(v) \in V(P(x_2, y_2))$, dann gilt:

$$diam(H'_2) = \min\{ \max\{ ecc_{H_2}^+(v) + 4, ecc_{H_2}^-(v) + 3 \}, \max\{ ecc_{H_2}^+(v) + 3, ecc_{H_2}^-(v) + 4 \} \}.$$

Der Digraph H'_2 wurde so gewählt, dass

$$ecc_{H_2}^+(v) \leq ecc_{H_2}^-(v).$$

Das bedeutet:

$$diam(H'_2) = \begin{cases} ecc_{H_2}^-(v) + 3 & \text{für } ecc_{H_2}^+(v) < ecc_{H_2}^-(v) \\ ecc_{H_2}^-(v) + 4 & \text{für } ecc_{H_2}^+(v) = ecc_{H_2}^-(v). \end{cases}$$

Damit können wir folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$\begin{aligned} diam_{min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq diam(H'_1) + ecc_{H_2}^+(v) \\ &\leq diam(H'_1) + diam(H'_2) - 4 \\ &= diam_{min}(H_1) + diam_{min}(H_2) - 4. \end{aligned}$$

Es bleibt folgender Fall zu untersuchen.

Fall 2.4: Sei $x \in V(G_2)$ und $y \in V(G_1)$.

Die Orientierung H'_1 wurde so gewählt, dass

$$ecc_{H_1}^+(v) \leq ecc_{H_1}^-(v).$$

Wir betrachten zuerst den Fall: $ecc_{H_1}^+(v) < ecc_{H_1}^-(v)$. Dann gilt

$$ecc_{H_1}^+(v) + 1 \leq ecc_{H_1}^-(v) \leq diam(H'_1).$$

In diesem Fall lässt sich die Ungleichungskette aufstellen:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\
 &= d_{H'_2}(x, v) + d_{H'_1}(v, y) \\
 &\leq \text{ecc}_{H'_2}^-(v) + \text{ecc}_{H'_1}^+(v) \\
 &\leq \text{diam}(H'_2) - 3 + \text{diam}(H'_1) - 1 \\
 &= \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.
 \end{aligned}$$

Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass gilt:

$$\text{ecc}_{H'_1}^+(v) = \text{ecc}_{H'_1}^-(v).$$

Falls die Ungleichung $\text{ecc}_{H'_1}^+(v) \leq \text{diam}(H'_1) - 1$ gilt, können wir analog zu oben den minimalen orientierten Durchmesser von G abschätzen:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\
 &= d_{H'_2}(x, v) + d_{H'_1}(v, y) \\
 &\leq \text{ecc}_{H'_2}^-(v) + \text{ecc}_{H'_1}^+(v) \\
 &\leq \text{diam}(H'_2) - 3 + \text{diam}(H'_1) - 1 \\
 &= \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.
 \end{aligned}$$

Gelte nun also $\text{ecc}_{H'_1}^+(v) = \text{ecc}_{H'_1}^-(v) = \text{diam}(H'_1)$. Der Graph H_1 besitzt am Knoten $f_{H_1}(v)$ ein isoliertes Dreieck. Daher gilt:

$$2 + \text{ecc}_{H'_1}^-(f(v)) \leq \text{diam}(H'_1)$$

und

$$2 + \text{ecc}_{H'_1}^+(f(v)) \leq \text{diam}(H'_1).$$

Falls die Kante $(f(v), v)$ im Digraphen H'_1 von v zu $f(v)$ gerichtet ist, dann erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$\text{diam}(H'_1) = d_{H'_1}(v, y) \leq 1 + \text{ecc}_{H'_1}^+(f_{H_1}(v)) \leq \text{diam}(H'_1) - 1.$$

Ein analoger Widerspruch lässt sich konstruieren, wenn die Kante $(f(v), v)$ im Digraphen H'_1 vom Knoten $f(v)$ zum Knoten v gerichtet ist.

Somit ist auch dieser Fall gezeigt.

Es gilt also die Ungleichung:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4.$$

Wir können folgende Abschätzung aufstellen:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 4 \\
 &\leq 4\gamma(H_1) + 4\gamma(H_2) - 4 \\
 &= 4(\gamma(G) + 1) - 4 = 4\gamma(G).
 \end{aligned}$$

Damit ist G kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1.

□

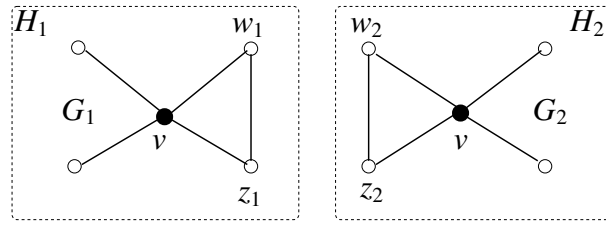


Abbildung 4.4: Konstruktion der Graphen H_1 und H_2 zum Fall $v \in D$ im Beweis des Lemmas 4.12.

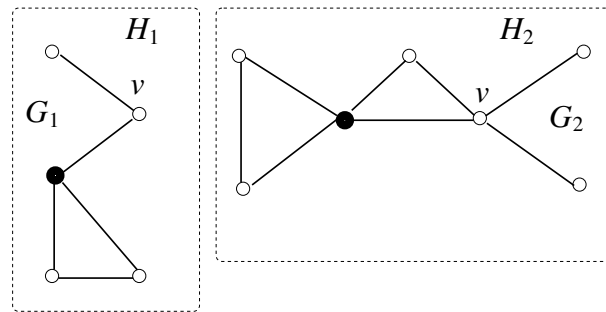


Abbildung 4.5: Konstruktion der Graphen H_1 und H_2 zum Fall $v \notin D$ im Beweis des Lemmas 4.12.

Im folgenden Lemma zeigen wir, dass wir uns bei der Suche nach einem Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 auf die Graphen beschränken können mit höchstens zwei Schnittknoten vom Typ A. Weiterhin gilt für diese Graphen, dass falls ein Schnittknoten v vom Typ A existiert, dann existiert ein diametraler Pfad P in einer optimalen Orientierung, so dass gilt: $V(P) \cap (N[f(v)] \setminus v) \neq \emptyset$.

Lemma 4.13. *Für jeden Graphen G in erster Standardform (G, D) existiert ein Graph H in erster Standardform (H, D_H) mit $\gamma(H) \leq \gamma(G)$, $\text{diam}_{\min}(H) \geq \text{diam}_{\min}(G)$ und der Eigenschaft, dass ein diametraler Pfad $P(x, y)$ in einer optimalen Orientierung von H existiert, so dass für jeden Schnittknoten v vom Typ A in H gilt:*

$$(N[f(v)] \setminus v) \cap V(P(x, y)) \neq \emptyset.$$

Beweis. Sei der Graph G in erster Standardform (G, D) und besitze Schnittknoten v_1, v_2, \dots, v_k vom Typ A. Falls im Graphen G keine Schnittknoten vom Typ A existieren, erfüllt der Graph G selbst die Bedingungen des Lemmas.

Wir wählen einen Index i , so dass der Knoten v_i den folgenden Ausdruck minimiert:

$$\min\{ecc_{G'}(v_i) : G' \text{ ist eine optimale Orientierung von } G\}.$$

Falls jeder Knoten v_i , $1 \leq i \leq k$ den obigen Ausdruck minimiert, wählen wir einen Index i , so dass eine optimale Orientierung G' von G und ein diametraler Pfad Q in dieser Orientierung existiert mit $V(Q) \cap (N[f(v_i)] \setminus v_i) = \emptyset$.

Falls dies nicht möglich ist, dann besitzt G höchstens zwei Schnittknoten v_1 und v_2 vom Typ A und der Graph G erfüllt die Bedingungen des Lemmas. Sei o.B.d.A. v_1 dieser Knoten. Wir konstruieren einen Graphen H aus dem Graphen G durch Entfernen der Komponente vom Typ A am Knoten v_1 und Ersetzung der Kanten (v_1, w) durch Pfade der Länge zwei. Zusätzlich wird am Knoten v_1 ein isoliertes Dreieck durch zusätzliche Knoten z_1, z_2 angefügt. Siehe für diese Konstruktion auch Abbildung 4.6.

Für den so konstruierten Graphen H gilt: $\gamma(G) = \gamma(H)$. Zu zeigen bleibt, dass für den minimalen orientierten Durchmesser von G gilt: $diam_{min}(G) \leq diam_{min}(H)$.

Sei H' eine optimale Orientierung von H . Wir können annehmen, dass gilt $d_{H'}(z_1, v_1) = 2$. Sei weiterhin G'' die stark zusammenhängende Orientierung von G in der alle Kanten wie im Digraphen H' orientiert sind. Die Kanten der Komponente vom Typ A am Knoten v_1 werden so orientiert, dass gilt:

$$d_{G''}(v_1, z) \leq 4 \text{ und } d_{G''}(z, v_1) \leq 4 \quad \forall z \in N[f(v_1)].$$

Falls ein diametraler Pfad $P(x, y)$ in G'' existiert mit $x \notin N[f(v_1)] \setminus v_1$ und $y \notin N[f(v_1)] \setminus v_1$, dann ist:

$$diam_{min}(G) \leq d_{G''}(x, y) \leq d_{H'}(x, y) \leq diam_{min}(H).$$

Ansonsten gilt: Für jeden diametralen Pfad $P(x, y)$ von G'' ist $x \in N[f(v_1)] \setminus v_1$ oder $y \in N[f(v_1)] \setminus v_1$.

Falls G'' keine optimale Orientierung von G ist. Dann gilt:

$$diam_{min}(G) \leq diam(G'') - 1 = d_{G''}(x, y) - 1.$$

Für $x \in N[f(v_1)] \setminus v_1$ können wir folgende Abschätzung aufstellen.

$$\begin{aligned} diam_{min}(G) &\leq d_{G''}(x, y) - 1 \\ &= d_{G''}(x, v_1) + d_{G''}(v_1, y) - 1 \\ &\leq 4 + d_{G''}(v_1, y) - 1 \\ &\leq 3 + d_{H'}(v_1, y) - 1 \\ &\leq d_{H'}(z_1, y) \leq diam_{min}(H). \end{aligned}$$

Für $y \in N[f(v_1)] \setminus v_1$ gilt die Abschätzung analog.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass G'' eine optimale Orientierung von G ist. Dann gilt jedoch

$$ecc_{G''}(v_1) \geq ecc_{G''}(v_i) \quad \text{für } i \geq 2.$$

Der Knoten v_1 wurde jedoch so gewählt, dass gilt:

$$ecc_{G''}(v_1) \leq ecc_{G''}(v_i) \quad \text{für } i \geq 2.$$

Es gilt damit $ecc_{G''}(v_1) = ecc_{G''}(v_i)$ für $i \geq 2$. Dann ist entweder $k \leq 2$ und die Behauptung ist gezeigt, oder es existiert ein diametraler Pfad Q in G'' mit $V(Q) \cap (N[f(v_1)] \setminus v_1) = \emptyset$. Damit erhalten wir einen Widerspruch zu: Für jeden diametralen Pfad $P(x, y)$ von G'' ist $x \in N[f(v_1)] \setminus v_1$ oder $y \in N[f(v_1)] \setminus v_1$.

Somit gilt: $diam_{min}(G) \leq diam_{min}(H)$. \square

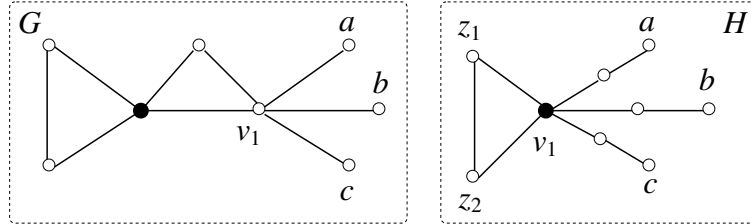


Abbildung 4.6: Konstruktion des Graphen H im Beweis des Lemmas 4.13.

4.2.4 Zweite Standardform

Definition 4.14 (zweite Standardform). Das Paar (G, D) ist in **zweiter Standardform**, wenn das Paar (G, D) in erster Standardform ist und wenn ein diametraler Pfad P in einer optimalen Orientierung von G existiert, so dass für jeden Schnittpunkt v vom Typ A gilt: $V(P) \cap (N[f(v)] \setminus v) \neq \emptyset$.

Insbesondere bedeutet dies, dass ein Graph in zweiter Standardform höchstens zwei Schnittpunkte vom Typ A besitzt.

Lemma 4.15. Für jeden Graphen in erster Standardform (G', D') existiert ein Tupel (G, D) in zweiter Standardform mit

$$\gamma(G) = |D| \leq \gamma(G') = |D'|$$

und

$$\infty > diam_{min}(G) \geq diam_{min}(G').$$

Beweis. Das Lemma folgt direkt aus Lemma 4.13. \square

Das Lemma 4.15 gewährleistet, dass wir, um das Theorem 4.1 zu beweisen, uns auf Paare (G, D) in zweiter Standardform beschränken können.

4.3 Diametraler Pfad

Im Folgenden betrachten wir die Struktur diametraler Pfade genauer. Wir werden die Länge eines diametralen Pfades in einem kleinsten Gegenbeispiel abschätzen, indem wir zeigen, wie viele Knoten des diametralen Pfades jeder dominierende Knoten dominiert. Dazu benötigen wir folgende Definitionen.

Definition 4.16. Sei G ein Graph in erster Standardform (G, D) . Sei weiterhin $P(x, y)$ ein Pfad in G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$.

Ein Knoten $z \in D$ heißt Knoten vom **Typ 1 bezüglich $P(x, y)$** , wenn zwei auf dem Pfad $P(x, y)$ benachbarte Knoten $u, v \in N(z)$ existieren mit $u, v \in V(P(x, y))$ und $z \neq f(x), z \neq f(y)$.

Ein Knoten $z \in D$ heißt Knoten vom **Typ 2 bezüglich $P(x, y)$** , wenn $z \neq f(x), z \neq f(y)$ nicht vom Typ 1 ist, und wenn zwei Knoten $u, v \in N(z)$ existieren mit $u, v \in V(P(x, y))$.

Ein Knoten $z \in D$ heißt Knoten vom **Typ 3 bezüglich $P(x, y)$** , wenn der Knoten $z \neq f(x), z \neq f(y)$ weder vom Typ 1 noch vom Typ 2 ist, und ein Knoten $u \in N(z)$ existiert mit $u \in V(P(x, y))$. Siehe dazu auch Abbildung 4.7.

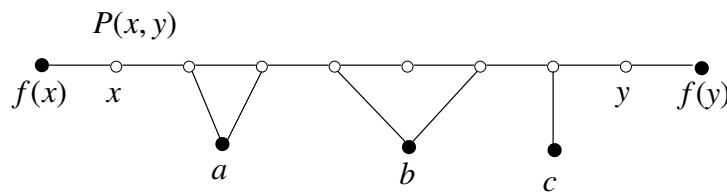


Abbildung 4.7: Der Knoten a ist vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$, der Knoten b ist vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$ und der Knoten c ist vom Typ 3 bezüglich $P(x, y)$. Die schwarzen Knoten markieren jeweils Knoten der dominierenden Menge.

4.3.1 Dominierende Knoten vom Typ 1

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 keinen Knoten vom Typ 1 enthält.

Lemma 4.17. Sei (G, D) ein Paar in zweiter Standardform. Sei weiterhin G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und $P(x, y)$ ein Pfad in G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$. Dann enthält der Graph G keine Knoten vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$.

Beweis. Sei $P(x, y)$ ein Pfad in G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$, und sei z ein Knoten vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$. Seien z_1, z_2 die Nachbarknoten von z auf $P(x, y)$ mit $(z_1, z_2) \in E(P(x, y))$. Siehe dazu Abbildung 4.8. Da G in erster Standardform ist, sind

die Knoten z_1 und z_2 keine dominierenden Knoten. Da der Graph G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 ist, kann die Kante (z_1, z_2) nicht entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang zu zerstören. Dann ist aber mindestens einer der Knoten z_1 oder z_2 ein echter Schnittpunkt in G . Weder der Knoten z_1 noch der Knoten z_2 sind jedoch Schnittpunkte vom Typ A, da $f(z_1) = f(z_2) = z$ gilt. Damit erhalten wir einen Widerspruch, zu (G, D) ist in zweiter Standardform. \square

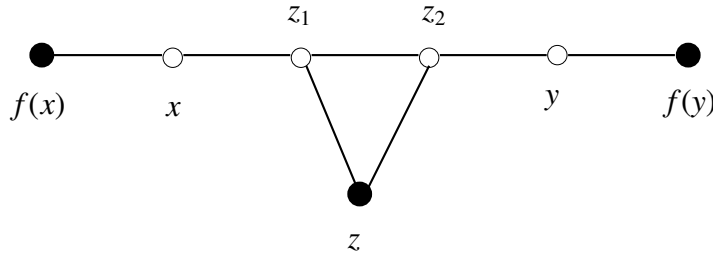


Abbildung 4.8: Der Knoten z ist vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$. Dann ist mindestens einer der Knoten z_1 oder z_2 ein echter Schnittpunkt. Siehe dazu Lemma 4.17.

4.3.2 Dominierende Knoten vom Typ 2

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass eine optimale Orientierung eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 4.1 keinen Knoten vom Typ 2 enthält.

Lemma 4.18. *Sei G in zweiter Standardform (G, D) . Sei weiterhin G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und $P(x, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades einer optimalen Orientierung von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$. Dann existiert kein Knoten vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$.*

Beweis. Angenommen, z ist ein Knoten vom Typ 2 bezüglich eines Teilpfades $P(x, y)$ eines diametralen Pfades einer optimalen Orientierung von G . Wenn der Graph mehrere Knoten vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$ enthält, wählen wir den Knoten z so, dass zwei Knoten v und w aus $N(z) \cap V(P(x, y))$ existieren mit kleinstem Abstand auf $P(x, y)$. Seien $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ die Knoten auf $P(x, y)$ zwischen v und w . Aus Lemma 4.17 folgt, dass keiner dieser Knoten durch einen Knoten vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$ dominiert wird. Weiter gilt, da (G, D) in zweiter Standardform ist, dass kein Knoten aus $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein echter Schnittpunkt von G ist. Wir unterscheiden fünf Fälle.

Fall 1: Es existieren zwei Knoten v_i und v_{i+1} , $i < k$ im Graphen G , so dass der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ einen Pfad $Q(v_i, v_{i+1})$ vom Knoten v_i zum Knoten v_{i+1} enthält. Dann existiert jedoch ein Kreis

$$C = (z, v, v_1, v_2, \dots, v_i, Q(v_i, v_{i+1}), v_{i+2}, \dots, v_k, w, z)$$

im Graphen G mit einer Sehne (v_i, v_{i+1}) . Die Kante (v_i, v_{i+1}) kann entfernt werden, ohne dass der starke Zusammenhang von G verloren geht. Da die beiden Knoten v_i und v_{i+1} nicht in der Menge D liegen, bleibt D eine dominierende Menge für den Graphen G , wenn die Kante (v_i, v_{i+1}) entfernt wird. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von G . Siehe dazu auch Abbildung 4.9.

Fall 2: Es existieren zwei Knoten v_i und v_j , $i + 1 < j \leq k$, so dass der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ einen Pfad $Q(v_i, v_j)$ vom Knoten v_i zum Knoten v_j enthält. Siehe Abbildung 4.10. Falls mehrere solcher Knoten existieren, wählen wir die Knoten v_i und v_j so, dass $|i - j|$ minimal ist.

Wir betrachten den Knoten v_{i+1} . Falls der Graph $G \setminus \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2})\}$ einen Pfad $Q_1(v_i, v_{i+1})$ vom Knoten v_i zum Knoten v_{i+1} enthält, dann kann die Kante (v_i, v_{i+1}) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören. Das widerspricht jedoch der Minimalität von G . Da $|i - j|$ minimal gewählt wurde, existiert kein Pfad $Q_2(v_{i+1}, v_t)$ vom Knoten v_{i+1} zu einem Knoten v_t mit $t \leq j$.

Da der Knoten v_{i+1} von einem Knoten aus D dominiert wird, ist der Knoten v_{i+1} ein echter Schnittpunkt von G . Da der Graph G in zweiter Standardform ist, kann der Knoten v_{i+1} kein echter Schnittpunkt sein. Damit ist ein Widerspruch konstruiert.

Fall 3: Der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ enthält einen Pfad $Q(v_1, v)$ vom Knoten v_1 zum Knoten v . Dann ist jedoch die Kante (v, v_1) eine Sehne im Kreis

$$C = (z, w, v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, Q(v_1, v), z)$$

und kann entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu verlieren. Insbesondere wird durch diesen Fall auch ausgeschlossen, dass der Knoten v_1 durch den Knoten $f(x)$ dominiert wird.

Fall 4: Der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ enthält einen Pfad $Q(v_1, z)$ vom Knoten v_1 zum Knoten z . Falls der Graph $G \setminus (v, v_1)$ nicht stark zusammenhängend ist, dann ist die Kante (v, z) eine Brücke im Graphen $G \setminus (v, v_1)$. Das heißt jedoch, dass der Knoten v im Graphen G ein echter Schnittpunkt ist. Da der Knoten z den Knoten v dominiert, ist v kein Schnittpunkt vom Typ A. Damit ist ein Widerspruch zur Schnittpunktfreiheit beziehungsweise zur Minimalität von G gezeigt.

Fall 5: Der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ enthält einen Pfad $Q_1(v_1, w)$ vom Knoten v_1 zum Knoten w . Wir können annehmen, dass $k > 1$ ist, ansonsten wären wir in der Situation von Fall 3. Wir betrachten weiterhin den Knoten v_k . Die Fälle 1 bis 4 sind für den Knoten v_k ausgeschlossen, also enthält der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(z, v), (z, w)\})$ einen Pfad $Q_2(v, v_k)$ vom Knoten v zum Knoten

v_k mit $V(Q_1(v_1, w)) \cap V(Q_2(v, v_k)) = \emptyset$. Nun existiert jedoch im Graphen G ein Kreis

$$C = (z, v, Q_2(v, v_k), v_{k-1}, \dots, v_1, Q_1(v_1, w), z)$$

mit einer Sehne (v, v_1) . Das bedeutet, der Graph $G \setminus (v, v_1)$ ist stark zusammenhängend. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Für die Fälle 3 bis 5, siehe auch Abbildung 4.11. Jeder der Fälle 1 bis 5 führt auf einen Widerspruch zur Minimalität von G , beziehungsweise auf einen Widerspruch zu, (G, D) ist in zweiter Standardform. Daraus folgt, dass der Graph G keinen Knoten z vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$ enthält. \square

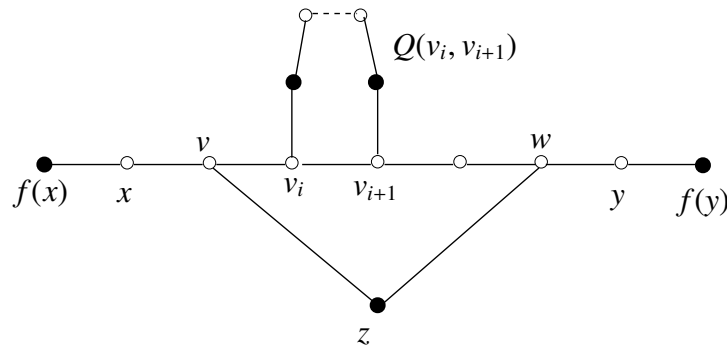


Abbildung 4.9: Der Knoten z ist vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$. Die Kante (v_i, v_{i+1}) kann entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang des Graphen zu zerstören. Siehe dazu Lemma 4.18 Fall 1.

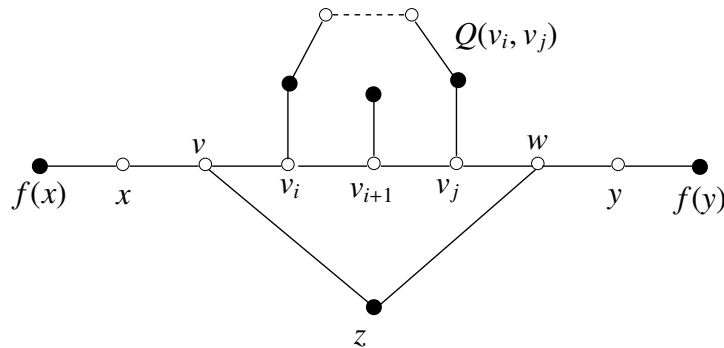
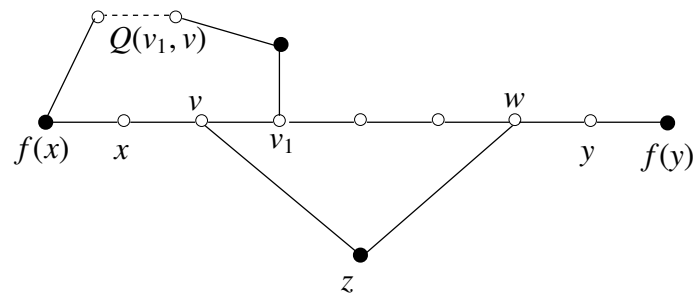
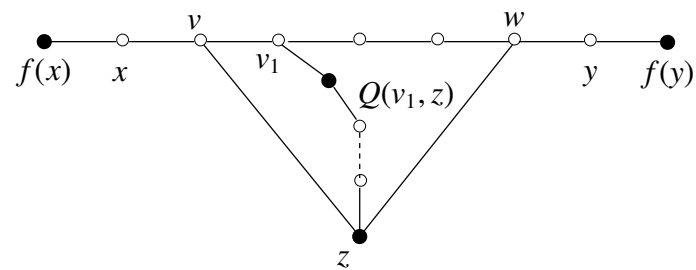


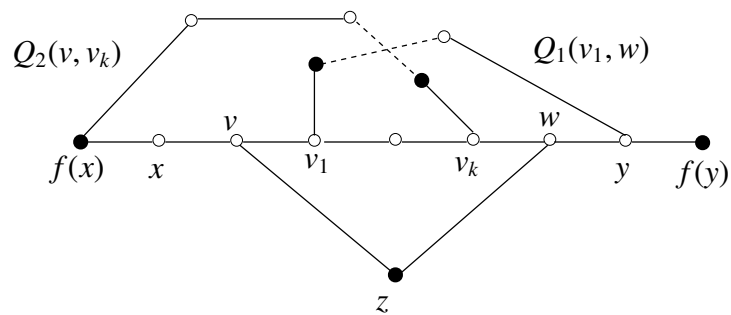
Abbildung 4.10: Der Knoten z ist vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$. Entweder kann die Kante (v_i, v_{i+1}) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang des Graphen zu zerstören, oder der Knoten v_{i+1} ist ein echter Schnittknoten des Graphen. Siehe dazu Lemma 4.18 Fall 2.



(a) Fall 3.



(b) Fall 4.



(c) Fall 5.

Abbildung 4.11: Die Graphen verdeutlichen die Fälle drei bis fünf im Beweis zum Lemma 4.18.

4.3.3 Dominierende Knoten auf dem diametralen Pfad

Bis jetzt haben wir Folgendes gezeigt. Wenn $P(x, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades einer optimalen Orientierung eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 4.1 ist, mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$, dann wird jeder Knoten des Pfades $P(x, y)$ von $f(x)$, $f(y)$ und von Knoten vom Typ 3 bezüglich $P(x, y)$ dominiert.

Nun zeigen wir, dass in einem kleinsten Gegenbeispiel nicht beliebige Knoten des Pfades $P(x, y)$ von $f(x)$ beziehungsweise von $f(y)$ dominiert werden.

Lemma 4.19. *Sei (G, D) in zweiter Standardform und G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. Sei weiterhin $P(x, y) = (x = v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades einer optimalen Orientierung von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$. Dann ist $f(v_i) \neq f(x)$ für $i \geq 3$ und $f(v_i) \neq f(y)$ für $i \leq k - 2$.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein Index $i \geq 3$ mit $f(v_i) = f(x)$. Da der Graph G das kleinste Gegenbeispiel ist, kann die Kante (v_{i-1}, v_i) nicht entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören. Der Graph $G \setminus E(P(f(x), v_i))$ enthält somit weder einen Pfad vom Knoten v_{i-1} zum Knoten v_i noch ein Pfad vom Knoten v_{i-1} zum Knoten $f(x)$. Der Knoten v_{i-1} wird jedoch von einem Knoten dominiert. Da (G, D) in zweiter Standardform ist, ist der Knoten v_{i-1} kein echter Schnittknoten. Das heißt, der Graph $G \setminus E(P(f(x), v_i))$ enthält einen Pfad $Q(v_{i-1}, v_j)$ von v_{i-1} zu v_j mit $j < i - 1$. Im Fall von $j = i - 2$, ist die Kante (v_{i-2}, v_{i-1}) eine Sehne im Kreis

$$C = (v_i, v_{i-1}, Q(v_{i-1}, v_{i-2}), v_{i-3}, \dots, v_2, x, f(x), v_i)$$

und kann entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören.

Sei nun $j < i - 2$. Dann können wir jedoch wie Fall 2 vom Lemma 4.18 argumentieren, und erhalten einen Widerspruch zur Minimalität von G beziehungsweise zu (G, D) in zweiter Standardform.

Für den Knoten y gilt die Behauptung des Lemmas analog. Siehe auch Abbildung 4.12. □

Lemma 4.20. *Sei G ein Graph in zweiter Standardform (G, D) mit einem Kreis $C_3 = (x, y, z)$, $x \in D$, $y, z \notin D$, $\deg_G(y) = 2$ und $G \setminus y$ stark zusammenhängend. Des Weiteren gebe es ein diametrales Paar (u, v) in einer optimalen Orientierung von G mit $y \neq u$ und $y \neq v$.*

Dann existiert ein Graph H mit weniger Knoten als G ,

$$\gamma(H) \leq \gamma(G)$$

und

$$\infty > \text{diam}_{\min}(H) \geq \text{diam}_{\min}(G).$$

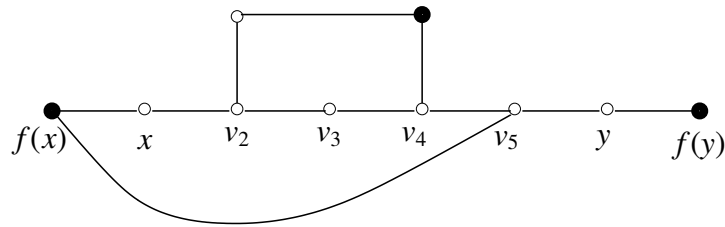


Abbildung 4.12: Der Knoten $f(x)$ dominiert den Knoten v_5 . Dann kann entweder die Kante (v_4, v_5) oder die Kante (v_3, v_4) entfernt werden ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören, oder der Knoten v_3 ist ein echter Schnittknoten von G . Dies liefert Widersprüche zur Minimalität von G beziehungsweise zu (G, D) in zweiter Standardform. Siehe Lemma 4.19.

Beweis. Der Graph H entsteht aus dem Graphen G durch Entfernen des Knotens y und der Kanten (x, y) und (y, z) . Siehe dazu auch Abbildung 4.13.

Offenbar hat H weniger Knoten als G . Laut Voraussetzung ist der Graph H stark zusammenhängend. Da die Menge D auch für den Graphen H eine dominierende Menge bildet, gilt: $\gamma(H) \leq \gamma(G)$.

Zu zeigen bleibt, dass der minimale orientierte Durchmesser von H nicht kleiner ist als der minimale orientierte Durchmesser von G . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Sei in einer optimalen Orientierung H' von H die Kante (x, z) von x nach z gerichtet. Wir betrachten die Orientierung G' von G in der alle Kanten so gerichtet sind wie in H' , die Kante (x, y) von y nach x und die Kante (y, z) von z nach y . Dann gilt für jedes Paar Knoten u, v aus $V(G) \setminus y$

$$d_{G'}(u, v) \leq d_{H'}(u, v).$$

Laut Voraussetzung existiert in einer optimalen Orientierung von G ein diametrales Paar (u, v) mit $u, v \in V(G) \setminus y$. Damit ist dieser Fall gezeigt.

Fall 2: Sei in einer optimalen Orientierung H' von H die Kante (x, z) von z nach x gerichtet. Dieser Fall kann analog zum Fall 1 gezeigt werden.

Damit gilt: $\text{diam}_{\min}(H) \geq \text{diam}_{\min}(G)$. □

4.3.4 Dritte Standardform

Um das Lemma 4.24 beweisen zu können, definieren wir eine dritte Standardform des Tupels (G, D) .

Definition 4.21 (dritte Standardform). Das Tupel (G, D) ist in **dritter Standardform**, wenn gilt:

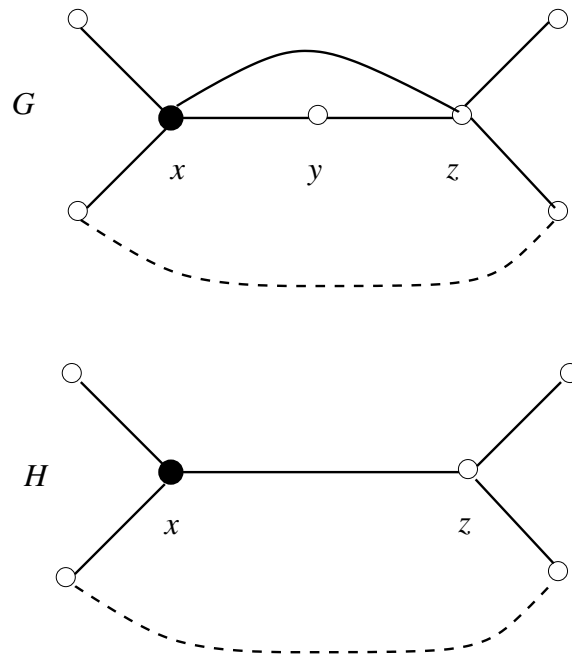


Abbildung 4.13: Die Graphen G und H aus Lemma 4.20. Wenn der Knoten y nicht zu einem diametralen Paar in einer optimalen Orientierung von G gehört, ist der minimale orientierte Durchmesser von H größer oder gleich dem minimalen orientierten Durchmesser von G .

- (G, D) ist in zweiter Standardform und
- im Graphen G existiert kein induzierter Pfad $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$, so dass der Graph $G \setminus \{v_2, v_3\}$ stark zusammenhängend ist.

Lemma 4.22. Für jeden Graphen G in zweiter Standardform (G, D) existiert ein Graph G' in dritter Standardform (G', D') mit

$$\gamma(G') \leq \gamma(G)$$

und

$$\text{diam}_{\min}(G') \geq \text{diam}_{\min}(G).$$

Beweis. Sei das Tupel (G, D) in zweiter Standardform. Falls kein induzierter Pfad $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$ in G existiert, so dass der Graph $G \setminus \{v_2, v_3\}$ stark zusammenhängend ist, dann ist das Tupel (G, D) schon in dritter Standardform.

Sei nun $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ein Pfad in G mit $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$, so dass der Graph $G \setminus \{v_2, v_3\}$ stark zusammenhängend ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Die Knoten v_2 und v_3 liegen nicht in der dominierenden Menge D . Da der Knotengrad der Knoten v_2 und v_3 zwei beträgt, ist $f(v_2) = v_1$ und $f(v_3) = v_4$. Der

Graph G' wird aus dem Graphen G konstruiert durch Entfernen der Knoten v_2 und v_3 und Hinzufügen von isolierten Dreiecken an die Knoten v_1 und v_4 . Siehe dazu auch Abbildung 4.14 (a).

Der Graph G' ist stark zusammenhängend und D bildet eine dominierende Menge für G . Somit ist das Tupel (G', D) in zweiter Standardform und $\gamma(G') \leq \gamma(G)$.

Zu zeigen bleibt, dass der minimale orientierte Durchmesser von G' nicht kleiner ist als der minimale orientierte Durchmesser von G . Sei H' eine optimale Orientierung von G' . Sei H die Orientierung von G in der alle Kanten von H entsprechend der Orientierung im Digraphen H' gerichtet sind. Die Kanten des Pfades Q seien von v_i nach v_{i+1} , $1 \leq i < 4$ gerichtet. Dann gilt für alle Knoten $x, y \in V(G) \setminus \{v_2, v_3\}$

$$d_H(x, y) \leq d_{H'}(x, y).$$

Durch das Hinzufügen der isolierten Dreiecke an die Knoten v_1 und v_4 existiert für jedes Knotenpaar x, y mit $x \in \{v_2, v_3\}$ und/oder $y \in \{v_2, v_3\}$ ein Knotenpaar x', y' mit

$$d_H(x, y) \leq d_{H'}(x', y').$$

Daraus folgt: $diam_{min}(G) \leq diam_{min}(G')$. Zu zeigen bleibt der Fall 2.

Fall 2: Einer der Knoten v_2 oder v_3 liegt in der dominierenden Menge D . Sei o.B.d.A. $v_3 \in D$. Der Graph G' wird aus dem Graphen G konstruiert durch Entfernen der Knoten v_2 und v_3 und Ersetzung aller Kanten (v_4, z) $z \in N(v_4) \setminus v_3$ durch Pfade (v_4, z', z) der Länge zwei. Zusätzlich wird am Knoten v_4 ein isoliertes Dreieck hinzugefügt. Siehe dazu auch Abbildung 4.14 (b).

Der so konstruierte Graph G' ist stark zusammenhängend. Die Menge $D' = (D \cup v_4) \setminus v_3$ bildet eine dominierende Menge für G' . Also gilt: $\gamma(G') \leq \gamma(G)$. Somit ist das Tupel (G', D') in zweiter Standardform.

Zu zeigen bleibt, dass der minimale orientierte Durchmesser von G' nicht kleiner ist als der minimale orientierte Durchmesser von G . Sei H' eine optimale Orientierung von G' . Sei weiterhin H die Orientierung von G in der alle Kanten von H entsprechend der Orientierung im Digraphen H' gerichtet sind. Die Kanten des Pfades Q seien von v_i nach v_{i+1} , $1 \leq i < 4$ gerichtet. Dann gilt für alle Knoten $x, y \in V(G) \setminus \{v_2, v_3\}$

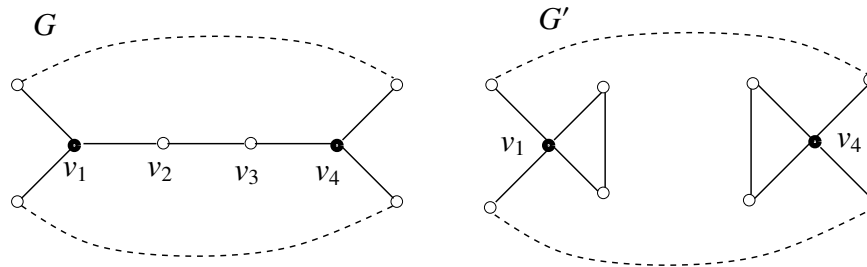
$$d_H(x, y) \leq d_{H'}(x, y).$$

Wie im Fall 1, findet sich auch für den Fall, dass im Digraphen H ein diametrales Knotenpaar (x, y) existiert mit Endknoten in $\{v_2, v_3\}$, ein Knotenpaar (x', y') mit $x', y' \in V(G')$ mit

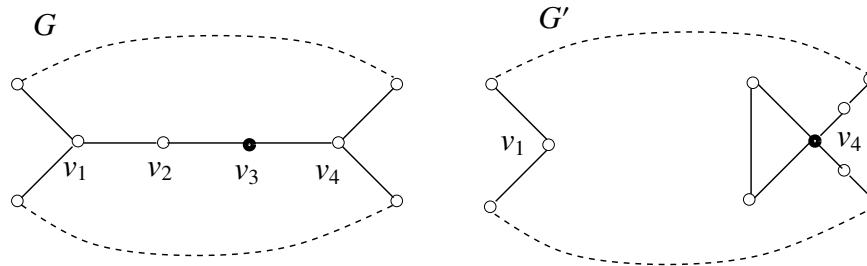
$$d_H(x, y) \leq d_{H'}(x', y').$$

Daraus folgt: $diam_{min}(G) \leq diam_{min}(G')$.

Damit ist das Lemma bewiesen. □



(a) Fall 1.



(b) Fall 2.

Abbildung 4.14: Die Grafiken zeigen die Konstruktion der Graphen G' in dritter Standardform. Siehe dazu Lemma 4.22.

4.3.5 Dominierende Knoten vom Typ 3

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Knoten vom Typ 3. Wir zeigen, dass jeder Knoten vom Typ 3 bezüglich eines diametralen Pfades P , der nicht auf dem Pfad liegt, höchstens einen Nachbarknoten auf dem Pfad P besitzt. Im Beweis dieses Resultates werden wir größte stark zusammenhängende Teilgraphen schrumpfen. Dafür definieren wir:

Definition 4.23 ($S(G, v)$). Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Dann bezeichnen wir mit $S(G, v)$ den größten stark zusammenhängenden Teilgraphen von G , der den Knoten v enthält. Falls der Knoten v ein isolierter Knoten ist, oder nur adjazent zu Brücken ist, dann ist $S(G, v) = v$.

Die Definition 4.23 liefert eine Äquivalenzrelation der Knoten $V(G)$ auf dem Graphen G . Zwei Knoten u, v heißen äquivalent im Graphen G , wenn u und v im gleichen größten stark zusammenhängenden Teilgraphen von G liegen, das heißt wenn gilt $S(G, u) = S(G, v)$.

Lemma 4.24. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in dritter Standardform (G, D) . Sei $P(x, y) = (x, x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades

Q in einer optimalen Orientierung von G . Dann existiert im Graphen G kein Knoten z_1 vom Typ 3 bezüglich $P(x_{i_1}, x_{i_2})$ und bezüglich $P(x_{j_1}, x_{j_2})$ mit $i_1 < i_2 < j_1 < j_2$ und $V(P(x_{i_1}, x_{i_2})) \cap D = \emptyset$, $V(P(x_{j_1}, x_{j_2})) \cap D = \emptyset$ und $z_1 \neq f(x_{i_1})$, $z_1 \neq f(x_{i_2})$, $z_1 \neq f(x_{j_1})$, $z_1 \neq f(x_{j_2})$.

Weiterhin existiert im Graphen G kein Knoten $z_2 \in V(P(x, y))$ vom Typ 3 bezüglich $P(x_{i_1}, x_{i_2})$ mit $V(P(x_{i_1}, x_{i_2})) \cap D = \emptyset$ und $z_2 \neq f(x_{i_1})$, $z_2 \neq f(x_{i_2})$.

Beweis. Angenommen, im Graphen G existiert ein Knoten z der die Bedingungen des Knotens z_1 oder die Bedingungen des Knotens z_2 erfüllt. Falls es mehrere solcher Knoten gibt, wählen wir den Knoten z so, dass Nachbarknoten v und w von z auf $P(x, y)$ existieren mit kleinstem Abstand auf dem Pfad $P(x, y)$.

Wir bezeichnen mit $v = v_0, v_1, \dots, v_m = w$ die Knoten des Teilpfades von $P(x, y)$ vom Knoten v zum Knoten w . Da G in erster Standardform ist, liegt der Knoten v_1 nicht in der dominierenden Menge D .

Weiter gilt, dass der Graph $G \setminus (E(P(v, w)) \cup \{(v, z), (w, z)\})$ keine Pfade von v_1 nach v , von v_1 nach w sowie von v_1 zu z enthält. Ansonsten könnte die Kante (v, v_1) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören. Siehe dazu auch die Fälle 3 bis 5 im Beweis zum Lemma 4.18.

Der Knoten v_1 wird jedoch von einem Knoten $f(v_1)$ dominiert. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $f(v_1) \neq v_2$.

Sei t der größte Index, so dass der Knoten v_t im Graphen $H = S(G \setminus (v, v_1), v_1)$ liegt. Das heißt, t ist der größte Index, so dass der Knoten v_t in einer starken Zusammenhangskomponente H von $G \setminus (v, v_1)$ mit $v_1 \in V(H)$ liegt. Es gilt $t \neq 1$, da ansonsten der Knoten v_1 ein echter Schnittpunkt von G wäre. Da die Kante (v, v_1) nicht entfernt werden kann, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören und der Knoten v kein echter Schnittpunkt ist, liegt der Knoten w nicht in der starken Zusammenhangskomponente H . Aus dem gleichen Grund existieren im Graphen $G \setminus \{(v, v_1), (v_t, v_{t+1})\}$ keine Pfade von H zu v, w oder z . Siehe dazu auch Abbildung 4.15.

Wir betrachten den Teilpfad $P(v_1, v_t)$. Aus den bisher gezeigten Lemma 4.17 und Lemma 4.18 folgt, dass für jeden Knoten u aus $P(v_1, v_t)$ einer der folgenden Punkte gilt:

- a) $u \in D$
- b) $f(u) \in V(P(x, y))$
- c) $f(u)$ ist ein Knoten vom Typ 3 bezüglich eines Teilpfades von $P(x, y)$.

Da der Knoten z so gewählt wurde, dass der Abstand $d_{P(x, y)}(v, w)$ minimal ist, existiert kein Knoten vom Typ 3, der mehr als einen Knoten aus v_1, v_2, \dots, v_t dominiert.

Betrachten wir des weiteren die Knoten v_i mit $f(v_i) \in V(P(v_1, v_{t+1}))$. Aus Lemma 4.19 folgt, dass der Abstand von v_i zu $f(v_i)$ auf dem Pfad $P(v_1, v_{t+1})$ höchstens 2 beträgt.

Wir zeigen nun mit Hilfe des Lemmas 4.20, dass v_i und $f(v_i)$ Nachbarknoten auf dem Pfad $P(v_1, v_{t+1})$ sind.

Angenommen, die Knoten v_i und $f(v_i)$ sind keine Nachbarknoten auf dem Pfad $P(v_1, v_{t+1})$. Sei o.B.d.A. $f(v_i) = v_{i+2}$. Falls für den Knotengrad $\deg(v_{i+1}) = 2$ gilt, dann sind die Voraussetzungen des Lemmas 4.20 erfüllt und der Graph G kann kein kleinstes Gegenbeispiel sein. Falls $\deg(v_{i+1}) > 2$, dann ist entweder v_{i+1} ein echter Schnittknoten, was ein Widerspruch zum Lemma 4.12 beziehungsweise zum Lemma 4.13 liefert, oder es existiert ein Pfad $Q(v_{i+1}, v_s)$ in $G \setminus \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2})\}$ von v_{i+1} zu v_s mit $s \neq i + 1, 1 \leq s \leq t$. Wenn $s < i$ gilt, dann ist die Kante (v_i, v_{i+1}) eine Sehne im Kreis

$$C = (Q(v_{i+1}, v_s), v_{s+1}, \dots, v_i, v_{i+2}, v_{i+1}).$$

Da die Knoten v_i und v_{i+1} nicht in der dominierenden Menge D liegen, kann die Kante (v_i, v_{i+1}) entfernt werden. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Falls $s > i$ gilt, dann ist die Kante (v_i, v_{i+1}) eine Sehne im Kreis

$$C = (Q(v_{i+1}, v_s), v_{s+1}, \dots, w, z, v, v_1, \dots, v_i, v_{i+2}, v_{i+1}).$$

Damit kann die Kante (v_i, v_{i+1}) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G . Siehe dazu auch Abbildung 4.16.

Somit haben wir gezeigt, dass für jeden Knoten u auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$ gilt:

- a) $u \in D$ oder
- b) $d_{P(x,y)}(u, f(u)) = 1$ oder
- c) $f(u)$ ist ein Knoten vom Typ 3 bezüglich eines Teilpfades von $P(x, y)$, und $f(u) \neq f(u')$ für $u \neq u'$.

Damit können wir die Länge des Pfades $P(v_1, v_t)$ abschätzen. Jeder Knoten der dominierenden Menge D auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$ dominiert höchstens zwei weitere Knoten. Jeder andere Knoten der dominierenden Menge im Teilgraphen H hat höchstens einen Nachbarn auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$. Insbesondere dominiert der Knoten $f(v_1)$ nur den Knoten v_1 auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$. Damit gilt:

$$t - 1 \leq 3|V(H) \cap D| - 2.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1.1: Sei $v_t \in D$. Da $f(v_1) \neq v_t$, ist $|V(H) \cap D| \geq 2$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G durch Schrumpfen des Teilgraphen H zu einer Kante (v_1, v_t) entsteht. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G) + 1.$$

Wir können folgende Ungleichungskette aufstellen.

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 2 \\ &\leq 4\gamma(G') + 3|V(H) \cap D| - 3 \\ &\leq 4\gamma(G') + 4|V(H) \cap D| - 2 - 3 \\ &\leq 4(\gamma(G) + 1) - 5 = 4\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Damit ist ein Widerspruch konstruiert. Der Graph G ist nicht das kleinste Gegenbeispiel zum Theorem 4.1.

Fall 1.2: Sei $v_t \notin D$ und $f(v_t) \in V(H)$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G , durch Entfernen des Teilgraphen H und Einfügen einer Kante (v, v_{t+1}) entsteht. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G).$$

Es gilt die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 1 \\ &\leq 4\gamma(G') + 3|V(H) \cap D| - 2 \\ &\leq 4(\gamma(G') + |V(H) \cap D|) \leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch.

Fall 1.3: Sei $v_t \notin D$ und $f(v_t) \notin V(H)$. Da t so gewählt wurde, dass H ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph ist, gilt $f(v_t) = v_{t+1}$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G , durch Entfernen des Teilgraphen $H \setminus v_1$ und Einfügen einer Kante (v_1, v_{t+1}) entsteht. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G).$$

Es gilt die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 2 \\ &\leq 4\gamma(G') + 3|V(H) \cap D| - 3 \\ &\leq 4(\gamma(G') + |V(H) \cap D|) \leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Wir erhalten auch in diesem Fall einen Widerspruch.

Damit führt der Fall 1: $f(v_1) \neq v_2$ auf einen Widerspruch zur Minimalität von G . Zu zeigen bleibt, dass der Fall 2 ebenso auf einen Widerspruch führt.

Fall 2: $f(v_1) = v_2$.

Falls $\deg(v_1) > 2$ gilt, dann existiert mindestens ein Knoten $u \in D$ mit $u \notin \{v_2, v_3, \dots, v_{m-1}\}$. Ansonsten ist G kein kleinstes Gegenbeispiel. Dann können wir jedoch analog zum Fall 1 argumentieren.

Angenommen, der Graph $G' = G \setminus v_1$ ist stark zusammenhängend. Es gilt jedoch $\gamma(G') \leq \gamma(G)$. Da ein diametrales Paar (a, b) in G existiert mit $v_1 \neq a$ und $v_1 \neq b$, ist der minimale orientierte Durchmesser von G' nicht kleiner als der minimale orientierte Durchmesser von G . Das ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Das heißt, der Graph $G \setminus v_1$ ist nicht stark zusammenhängend. Sei t der kleinste Index, so dass die Kante (v_t, v_{t+1}) eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.1: Sei $t \geq 3$. Das heißt, die Kante (v_2, v_3) ist keine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Sei $H = S(G \setminus v_1, v_2)$ der größte stark zusammenhängende Teilgraph von $G \setminus v_1$, der den Knoten v_2 enthält. Da der Knoten v_1 nicht entfernt werden kann, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören, existiert im Graphen $G \setminus \{(v, v_1), (v_t, v_{t+1})\}$ kein Pfad von einem Knoten aus H zum Knoten z . Analog zum Fall 1 kann dann jedoch durch Schrumpfung des Teilgraphen H ein kleineres Gegenbeispiel konstruiert werden. Das ist ein Widerspruch zu Minimalität von G .

Fall 2.2: Sei $t = 2$. Das heißt, die Kante (v_2, v_3) ist eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Falls der Knotengrad des Knotens v_2 größer als zwei ist, dann ist der Knoten v_2 ein Schnittpunkt von G . Wenn der Knoten v_2 ein echter Schnittpunkt ist, widerspricht dies dem Lemma 4.12. Ansonsten widerspricht dies der Minimalität von G . Das heißt, $\deg(v_2) = 2$.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.2.1: Die Kante (v_3, v_4) ist eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Da der Graph G am Knoten v_3 keinen Schnittpunkt vom Typ A besitzt und keine anderen echten Schnittpunkte enthält, ist $\deg(v_3) = 2$. Dann können wir jedoch durch Schrumpfen des Pfades $Q = (v, v_1, v_2, v_3, v_4)$ zu einer Kante (v, v_4) ein kleineres Gegenbeispiel konstruieren. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Fall 2.2.2: Die Kante (v_3, v_4) ist keine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.2.2.1: Der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ enthält keine Brücken. Das heißt, der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ ist stark zusammenhängend. Oben wurde schon gezeigt,

dass $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$. Damit ist $Q = (v, v_1, v_2, v_3)$ ein Pfad in G , der einen Widerspruch zu (G, D) in dritter Standardform liefert.

Fall 2.2.2.2: Der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ enthält Brücken. Sei $H = S(G \setminus v_1, v_3)$. Da der Knoten v_3 kein echter Schnittknoten von G ist, enthält der Graph H die Kante (v_3, v_4) . Sei k der größte Index, so dass der Knoten v_k im Graphen H liegt. Da der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ Brücken enthält, existieren keine Pfade in $G \setminus \{(v, v_1), (v_k, v_{k+1})\}$ von einem Knoten aus H zum Knoten z . Durch Schrumpfung des Teilgraphen H entsteht ein kleineres Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Damit ist das Lemma bewiesen. □

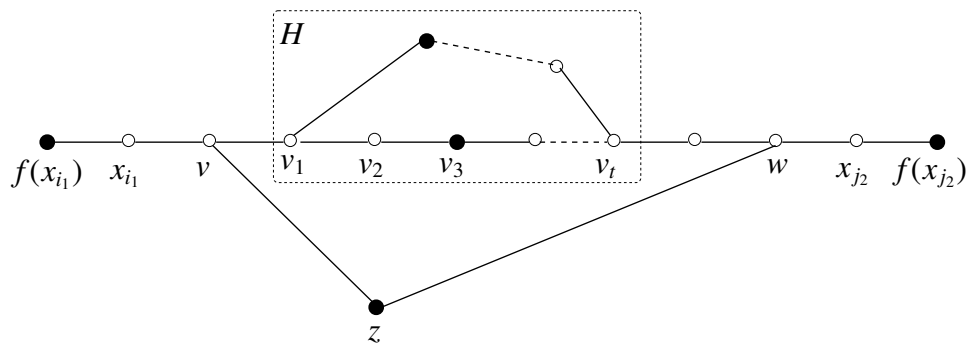


Abbildung 4.15: Eine Abbildung zum Fall 1: $f(v_1) \neq v_2$ im Beweis zum Lemma 4.24

4.3.6 Hauptbeweis

Mit Hilfe der obigen Lemmata haben wir Folgendes gezeigt. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel in dritter Standardform (G, D) und $P(x, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades Q in einer optimalen Orientierung von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$, dann existiert

- kein Knoten vom Typ 1 bezüglich $P(x, y)$,
- kein Knoten vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$,
- kein Knoten z vom Typ 3 bezüglich $P(x, y)$ mit $|N(z) \cap V(Q)| \geq 2$.

Damit können wir den Abstand zwischen zwei, auf einem diametralen Pfad aufeinander folgenden, Knoten der dominierenden Menge abschätzen.

Lemma 4.25. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in dritter Standardform (G, D) und $P(x, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades Q in einer optimalen*

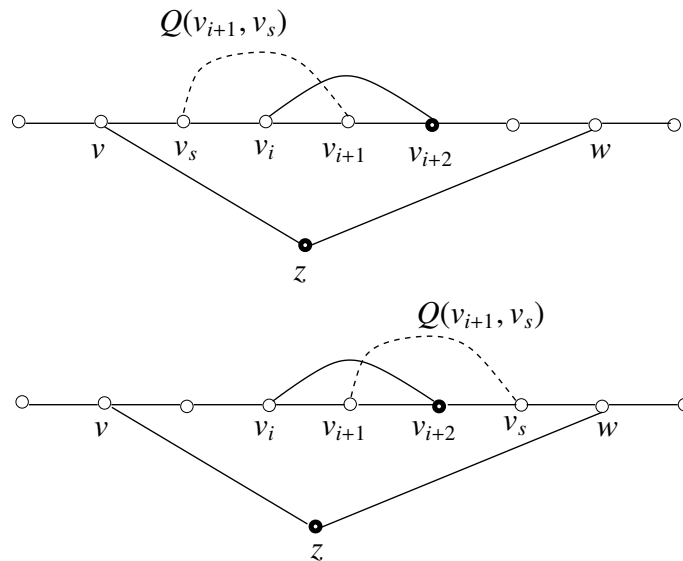


Abbildung 4.16: Die Kante (v_i, v_{i+1}) ist in beiden Graphen eine Sehne und liefert somit einen Widerspruch zur Minimalität des Graphen G . Siehe dazu auch den Beweis von Lemma 4.24.

Orientierung H von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \{x, y\}$. Sei M die Menge der Knoten vom Typ 3 bezüglich $P(x, y)$. Dann ist

$$d_H(x, y) \leq \begin{cases} 4 & \text{für } |M| = 0, \\ 5 + |M| & \text{für } |M| \geq 1. \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $|M| \geq 1$. Da G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in dritter Standardform (G, D) ist, wird jeder Knoten des Pfades $P(x, y)$ von x , y oder von einem Knoten aus M dominiert. Jeder Knoten der Menge M dominiert genau einen Knoten des Pfades $P(x, y) = (x, v_1, v_2, \dots, v_t, y)$. Aus Lemma 4.19 folgt, dass der Knoten x höchstens zwei Knoten des Pfades $P(x, y)$ dominiert, und zwar die Knoten v_1 und v_2 . Analog dominiert der Knoten y höchstens die beiden Knoten v_t und v_{t-1} . Siehe dazu auch Abbildung 4.17. Damit besteht der Pfad $P(x, y)$ aus höchstens $6 + |M|$ Knoten. Das heißt:

$$d_H(x, y) \leq 5 + |M|.$$

Sei nun $|M| = 0$. Falls der Knoten x ausschließlich den Knoten v_1 aus $V(P(x, y))$ dominiert, dann besteht der Pfad $P(x, y)$ aus höchstens fünf Knoten und die Behauptung gilt. Analoges gilt für den Knoten y .

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass der Knoten x die Knoten v_1 und v_2 dominiert und der Knoten y die Knoten v_3 und v_4 . Siehe dazu Abbildung 4.18.

Angenommen, es gilt: $\deg_G(v_1) > 2$ und sei der Knoten v_2 kein Schnittpunkt vom Typ A. Da G ein kleinstes Gegenbeispiel ist, ist der Knoten v_1 kein echter Schnittpunkt im Graphen G . Es existiert kein Pfad $Q(v_1, v_2)$ in $G \setminus \{(x, v_1), (v_1, v_2), (x, v_2)\}$ von v_1 zum Knoten v_2 , da ansonsten die Kante (v_1, v_2) eine Sehne im Kreis $C = (Q(v_1, v_2), x, v_1)$ wäre. Das bedeutet aber, dass der Knoten v_2 ein echter Schnittpunkt in G ist. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Schnittpunktfreiheit (Lemma 4.12) von G . Für den Fall, dass v_2 kein Schnittpunkt vom Typ A ist, gilt somit:

$$\deg_G(v_1) = 2.$$

Aus Lemma 4.20 folgt, dass der Graph $G \setminus v_1$ nicht stark zusammenhängend ist. Das heißt insbesondere, der Graph $G \setminus \{(x, v_1), (x, v_2), (v_1, v_2)\}$ enthält keinen Pfad vom Knoten x zum Knoten v_3 . Damit ist der Knoten v_2 ein echter Schnittpunkt von G . Aus der Schnittpunktfreiheit von G folgt der Widerspruch. Ein analoger Widerspruch entsteht, unter der Annahme, dass der Knoten v_3 kein Schnittpunkt vom Typ A ist.

Seien nun v_2 und v_3 Schnittpunkte vom Typ A. Da $P(x, y)$ ein Teilpfad eines diametralen Pfades ist, gilt: $\text{diam}_{\min}(G) \leq 2 + 5 + 2 = 9$.

Im Graphen $G \setminus (v_2, v_3)$ existiert ein Pfad vom Knoten v_2 zum Knoten v_3 . Daraus folgt, dass die dominierende Menge für G aus mindestens drei Knoten besteht. Dann ist jedoch G kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 9 < 12 \leq 4\gamma(G).$$

Damit haben wir gezeigt, dass für den Fall $|M| = 0$ gilt: $d_H(x, y) \leq 4$. □

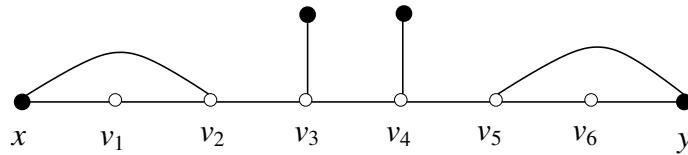


Abbildung 4.17: Ein Teilpfad eines diametralen Pfades. Siehe dazu Lemma 4.25.

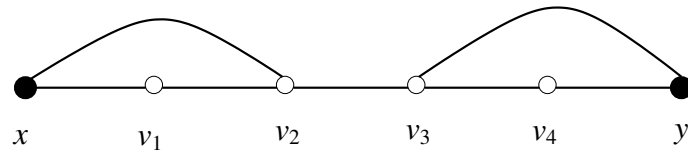


Abbildung 4.18: Ein Teilpfad eines diametralen Pfades ohne Knoten vom Typ 3. Siehe dazu Lemma 4.25.

Theorem (4.1). Für jeden stark zusammenhängenden Graphen G gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 4\gamma(G).$$

Beweis. Angenommen, das Theorem gilt nicht, dann existiert ein kleinstes Gegenbeispiel G in dritter Standardform (G, D) . Sei $P(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ein diametraler Pfad in einer optimalen Orientierung H von G .

Sei $D_1 = V(P(x, y)) \cap D$ und $D_2 = D \setminus D_1$. Für jeden Knoten $v \in D_2$ gilt einer der folgenden vier Punkte:

- $N(v) \cap V(P(x, y)) = \emptyset$,
- $|N(v) \cap V(P(x, y))| = 1$,
- $x_1, x_2 \in N(v)$,
- $x_{m-1}, x_m \in N(v)$.

Mit Hilfe des Lemmas 4.25 können wir die Länge des diametralen Pfades $P(x, y)$ abschätzen:

$$d_H(x, y) \leq 2 + 4(|D_1| - 1) + 2|D_2| + 2 \leq 4|D| = 4\gamma(G).$$

Dann ist G jedoch kein Gegenbeispiel. Damit ist das Theorem bewiesen. □

4.4 Dominierender Teilgraph

In diesem Abschnitt geben wir einen zweiten Beweis für das Theorem 4.1 an. Ausgehend von der zweiten Standardform (G, D) eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 4.1 konstruieren wir einen Hilfsgraphen \dot{G} mit zugehöriger dominierender Menge \dot{D} und schätzen die Knotenanzahl von \dot{G} ab durch: $|V(\dot{G})| \leq 4|\dot{D}| - 3$.

Wir zeigen weiterhin, dass jede stark zusammenhängende Orientierung \dot{H} von \dot{G} zu einer Orientierung H von G erweitert werden kann, mit

$$\text{diam}(H) \leq 4|D|.$$

Der in diesem Abschnitt aufgezeigte Beweis des Theorems 4.1 setzt voraus, dass die minimale dominierende Menge mindestens vier Knoten enthält. Um den Beweis zu vervollständigen, zeigen wir für Graphen mit Dominanzzahl eins, zwei und drei die Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser explizit.

Wir beginnen mit einer Definition.

Definition 4.26 ($\text{diam}_i(H, D)$). Sei G ein stark zusammenhängender Graph, D eine dominierende Menge für G und H eine stark zusammenhängende Orientierung für G . Wir definieren:

$$\text{diam}_i(H, D) = \max\{d_H(u, v) : |\{u, v\} \cap (V(H) \setminus D)| = i\}.$$

Offensichtlich gilt $\text{diam}(H) = \max\{\text{diam}_0(H, D), \text{diam}_1(H, D), \text{diam}_2(H, D)\}$.

4.4.1 Zulässiger Teilgraph

Anstatt den minimalen orientierten Durchmesser des Gesamtgraphen abzuschätzen, beschränken wir uns auf dominierende Teilgraphen und verwenden ein Lemma von Fomin et al. [15], um aus einer Orientierung eines dominierenden Teilgraphen eine Orientierung des Ausgangsgraphen zu konstruieren.

Definition 4.27 (zulässiger Teilgraph). Sei G ein Graph in erster Standardform (G, D) . Wir nennen einen Graphen G_D einen **zulässigen Teilgraphen** von G , wenn Folgendes gilt:

- G_D ist ein Teilgraph von G mit $D \subset V(G_D)$,
- G_D ist stark zusammenhängend,
- für jeden Knoten $v \in V(G_D) \setminus D$ gilt $(v, f_G(v)) \in E(G_D)$ und
- G_D ist knoten- und kantenminimal.

Mit obigen Definitionen schreibt sich ein Lemma von Fomin et al. [15] folgendermaßen. Da dieses Lemma im Folgenden eine wichtige Rolle spielt, geben wir den Beweis an.

Lemma 4.28. [15] Sei G ein stark zusammenhängender Graph in erster Standardform (G, D) , D eine dominierende Menge für G und G_D ein zulässiger Teilgraph von G . Dann existiert für jede stark zusammenhängende Orientierung H_D von G_D eine stark zusammenhängende Orientierung H von G mit:

$$\text{diam}(H) \leq \max\{ \text{diam}_0(H_D, D) + 4, \text{diam}_1(H_D, D) + 2, \text{diam}_2(H_D, D) \}.$$

Beweis. Sei H_D eine stark zusammenhängende Orientierung von G_D . Wir konstruieren eine Orientierung H von G . Dazu orientieren wir die Kanten von $G[V(G_D)]$ entsprechend der Orientierung H_D . Die Kanten in $E(G) \setminus E(G_D)$ orientieren wir wie folgt. Sei Q eine Zusammenhangskomponente von $G \setminus V(G_D)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei Q eine Zusammenhangskomponente von $G \setminus V(G_D)$, die aus genau einem Knoten x besteht. Da der Graph G brückenfrei ist, ist der Knoten x adjazent zu einem Knoten $f(x) \in D$ und zu mindestens einem weiteren Knoten $v \in V(G_D) \setminus D$. Falls die Kante $(v, f(v))$ von $f(v)$ nach v gerichtet ist, dann orientieren wir die Kanten $(f(x), x)$ in der Orientierung H_D von x nach $f(x)$ und die Kante (x, v) von v nach x . Im anderen Fall orientieren wir die Kanten $(f(x), x)$ und (x, v) umgekehrt. Alle anderen zu x inzidenten Kanten können beliebig orientiert werden. Siehe dafür auch Abbildung 4.19 (a).
- Sei Q eine Zusammenhangskomponente von $G \setminus V(G_D)$ mit $|V(Q)| \geq 2$. Jeder Knoten $x \in Q$ ist zum Knoten $f(x) \in V(G_D)$ adjazent. Wir wählen einen aufspannenden Baum T in Q und einen Wurzelknoten $v \in V(T)$. Die Kanten des Baumes T werden folgendermaßen orientiert. Für die Knoten $x \in V(T)$, für die der Abstand vom Knoten v zum Knoten x im Baum T ungerade ist, orientieren wir die Kante $(x, f(x))$ von x nach $f(x)$ und alle anderen zu x inzidenten Kanten (x, u) von u nach x . Ist der Abstand von v zu x gerade im Baum T , dann orientieren wir die Kante $(x, f(x))$ von $f(x)$ nach x und alle anderen zu x inzidenten Kanten (x, u) von x nach u . Siehe dafür auch Abbildung 4.19 (b).

Somit existieren in beiden Fällen für jeden Knoten $x \in V(Q)$ Knoten $z_1, z_2 \in D$ mit $d(x, z_1) \leq 2$ und $d(z_2, x) \leq 2$. Für $a, b \in V(G)$ gilt:

$$d_H(a, b) \leq \max\{ \text{diam}_0(H_D, D) + 4, \text{diam}_1(H_D, D) + 2, \text{diam}_2(H_D, D) \}.$$

□

4.4.2 Vierte Standardform

Die weiteren Betrachtungen lassen sich einfacher schreiben, wenn wir voraussetzen, dass jeder Knoten der dominierenden Menge mit einem isolierten Dreieck verbunden ist. Dazu definieren wir eine vierte Standardform.

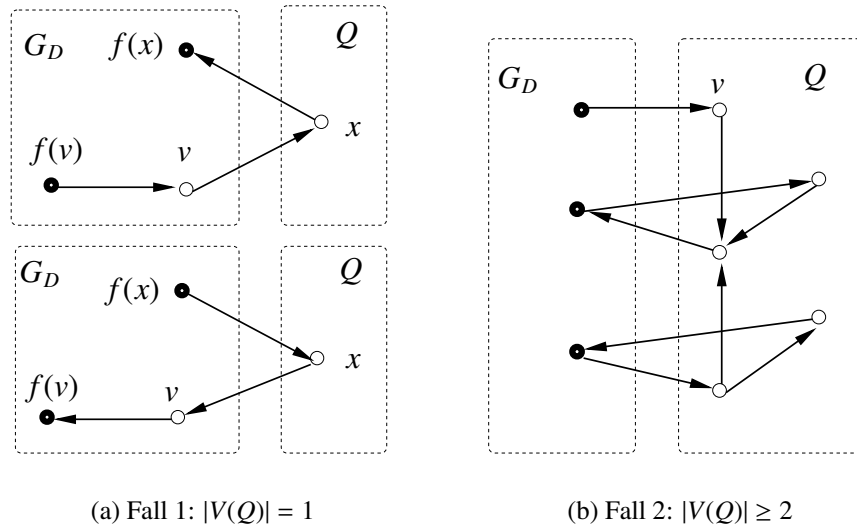


Abbildung 4.19: Orientierungen der Zusammenhangskomponenten Q von $G \setminus G_D$. Siehe Lemma 4.28.

Definition 4.29 (vierte Standardform). Das Tupel (G, D) ist in **vierter Standardform**, wenn (G, D) in zweiter Standardform ist und jeder Knoten der dominierenden Menge D mit einem isolierten Dreieck verbunden ist.

Offenbar existiert für jeden Graphen G in zweiter Standardform (G, D) ein Graph G' in vierter Standardform (G', D') mit $\gamma(G) = \gamma(G')$ und $\infty > \text{diam}_{\min}(G') \geq \text{diam}_{\min}(G)$.

Durch das Hinzufügen der isolierten Dreiecke erhalten wir folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.30. Sei (G, D) in vierter Standardform, dann existiert eine Orientierung H von G mit

$$\text{diam}_{\min}(G) = \text{diam}(H) = \max\{\text{diam}_0(H, D) + 4, \text{diam}_1(H, D) + 2, \text{diam}_2(H, D)\}.$$

In diesem Abschnitt betrachten wir nicht kantenminimale Gegenbeispiele zum Theorem 4.1, sondern Gegenbeispiele mit kleinster Anzahl dominierender Knoten. Wir definieren deshalb:

Definition 4.31. Ein Graph G ist ein **γ -kleinstes Gegenbeispiel** zum Theorem 4.1, wenn

- (a) G ein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 ist,
- (b) kein Gegenbeispiel G_1 zum Theorem 4.1 existiert mit $\gamma(G_1) < \gamma(G)$ und
- (c) kein Gegenbeispiel G_2 zum Theorem 4.1 existiert mit $\gamma(G_2) = \gamma(G)$ und $|E(G_2)| < |E(G)|$.

4.4.3 Graphen mit kleiner Dominanzzahl

Lemma 4.32. *Es existiert kein Gegenbeispiel G zum Theorem 4.1 mit $\gamma(G) < 3$. Insbesondere gilt:*

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \begin{cases} 4 & \text{für } \gamma(G) = 1, \\ 8 & \text{für } \gamma(G) = 2. \end{cases}$$

Beweis. Für $\gamma(G) = 1$ besteht der zulässige Teilgraph G_D von G genau aus dem dominierenden Knoten. Mit Lemma 4.28 folgt die Behauptung.

Für $\gamma(G) = 2$ sind die beiden unterschiedlichen zulässigen Teilgraphen von G in vierter Standardform in Abbildung 4.20 gezeigt. Für jede stark zusammenhängende Orientierung H der beiden Graphen gilt:

$$\text{diam}_0(H, D) \leq 4, \quad \text{diam}_1(H, D) \leq 5 \quad \text{und} \quad \text{diam}_2(H, D) \leq 5.$$

Mit Lemma 4.28 folgt die Aussage. □

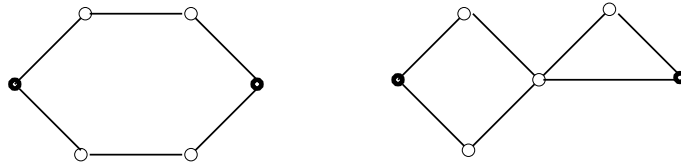


Abbildung 4.20: Die zwei möglichen zulässigen Teilgraphen G_D für Graphen G in vierter Standardform mit $\gamma(G) = 2$.

Lemma 4.33. *Es existiert kein Gegenbeispiel G zum Theorem 4.1 mit $\gamma(G) = 3$. Insbesondere gilt für jeden Graphen G mit $\gamma(G) = 3$:*

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 11.$$

Beweis. In Abbildung 4.21 sind alle paarweise nicht isomorphen zulässigen Teilgraphen G_D von Graphen G in vierter Standardform (G, D) mit $|D| = 3$ abgebildet. Die Graphen bestehen aus höchstens zehn Knoten, damit gilt für jede Orientierung H_D von G_D :

$$\text{diam}_2(H_D, D) \leq 9 \quad \text{und}$$

$$\text{diam}_1(H_D, D) \leq 9.$$

Eine Analyse der Abstände zwischen je zwei dominierenden Knoten ergibt: $\text{diam}_0(H_D, D) \leq 7$. Mit Lemma 4.28 folgt:

$$\text{diam}(H) \leq \max\{9, 9 + 2, 7 + 4\} = 11.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

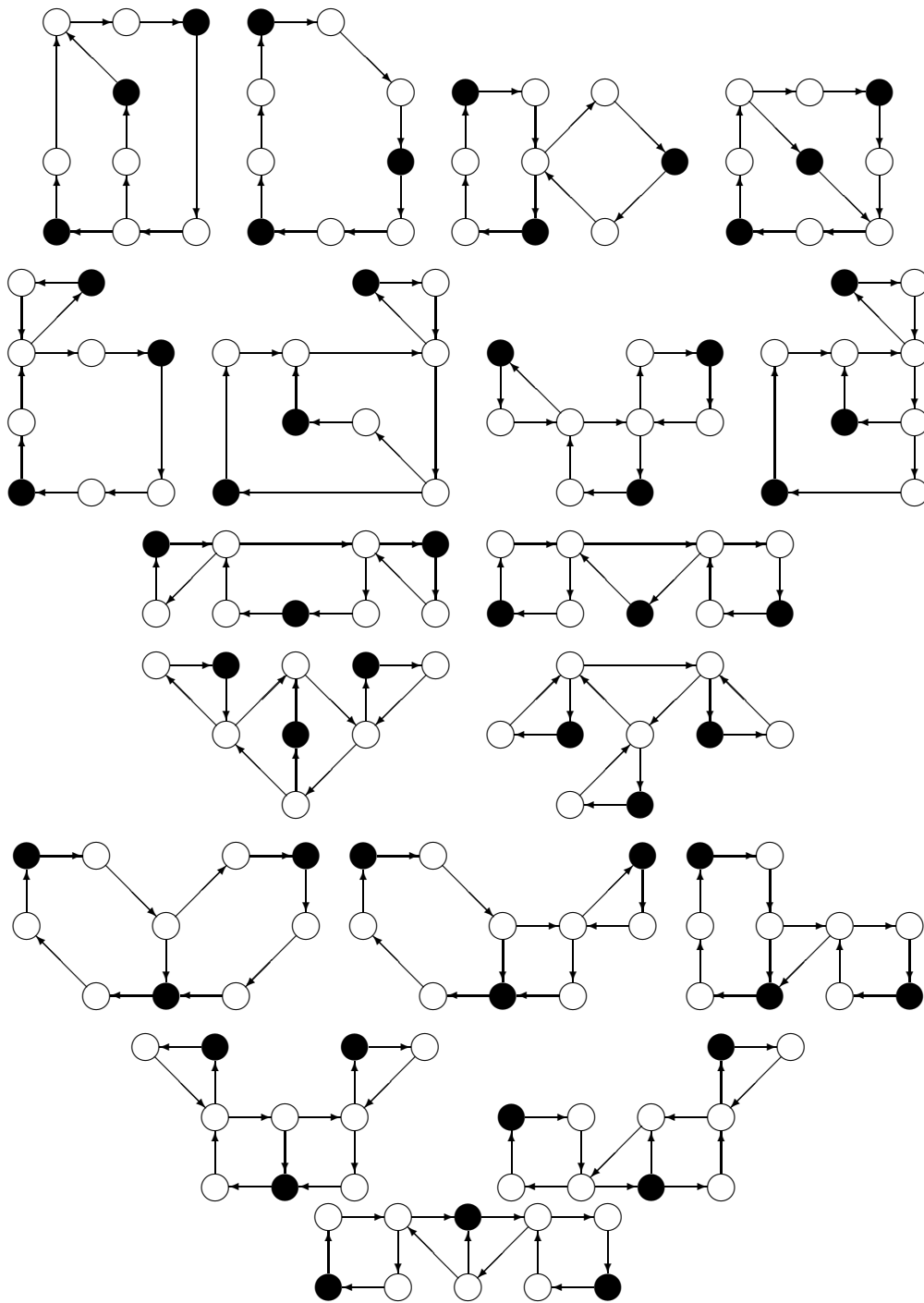


Abbildung 4.21: Orientierungen zulässiger Teilgraphen der Graphen G mit $\gamma(G) = 3$.
 Siehe Lemma 4.33.

4.4.4 Strukturen in zulässigen Teilgraphen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Struktur zulässiger Teilgraphen γ -kleinster Gegenbeispiele zum Theorem 4.1. Insbesondere zeigen wir, dass bestimmte Kreise keine Teilgraphen zulässiger Teilgraphen sind.

Lemma 4.34. *Sei G ein γ -kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in vierter Standardform (G, D) und v ein Schnittnode vom Typ A. Seien weiterhin G_1 und G_2 die Zusammenhangskomponenten von $G \setminus v$ mit $f(v) \in V(G_1)$. Dann existieren keine Knoten $u_1, u_2 \in V(G_2) \setminus D$ mit $f(u_1) = f(u_2) = z$ und $(v, u_1), (v, u_2) \in E(G)$.*

Siehe Abbildung 4.22.

Beweis. Angenommen, es existiert solch ein Graph G . Sei H_2 der von $V(G_2) \cup v$ induzierte Teilgraph von G mit zusätzlicher Kante (v, z) . Sei H'_2 eine optimale Orientierung von H_2 in der die Kante (z, u_1) von z nach u_1 gerichtet ist. Wir konstruieren aus H'_2 eine Orientierung H' für den Graphen G . Die Kanten des von $V(G_1) \cup v$ induzierten Teilgraphen von G werden so orientiert, dass gilt:

$$d_{H'}(v, x) \leq 4 \quad \text{und} \quad d_{H'}(x, v) \leq 3 \quad \forall x \in V(G_1).$$

Die Kanten des von $V(G_2) \cup v$ induzierten Teilgraphen von G werden entsprechend der Orientierung H'_2 orientiert. Um den starken Zusammenhang der Orientierung G' zu gewährleisten, werden die Kanten des Kreises $C = (v, u_1, z, u_2, v)$ von v nach u_1 , von u_1 nach z , von z nach u_2 und von u_2 nach v orientiert.

Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung G' . Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Sei $x, y \in V(G_2) \cup v$.

Falls der Pfad $P(x, y)$ keine Kante des Kreises C enthält, dann ist entweder $P(x, y)$ auch ein kürzester Pfad in der Orientierung H'_2 , oder der kürzeste Pfad von x nach y enthält die Kante (v, z) in H'_2 . Im ersten Fall gilt:

$$d_{H'}(x, y) = d_{H'_2}(x, y) \leq 4\gamma(H_2) \leq 4(\gamma(G) - 1).$$

Im zweiten Fall kann die Kante (v, z) durch einen Pfad der Länge zwei von v nach z beziehungsweise von z nach v ersetzt werden. Somit gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'_2}(x, y) + 1 \\ &\leq 4\gamma(H_2) + 1 \leq 4\gamma(G) - 3. \end{aligned}$$

Enthalte nun der kürzeste Pfad von x nach y in der Orientierung H'_2 Kanten des Kreises C . In diesen Fall kann ein entsprechender Abschnitt des Pfades durch ein Segment des Kreises C der Länge höchstens drei ersetzt werden. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'_2}(x, y) + 3 \\ &\leq 4\gamma(H_2) + 3 \leq 4\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$.

Wir betrachten einen kürzesten Pfad P' im Graphen H'_2 von z nach y . Da $z \in D$ gilt: $d_{H'_2}(z, v) \leq 4\gamma(H_2) - 2$. Sei w der Knoten der Menge $\{v, u_1, z, u_2\}$ mit dem größtem Abstand zum Knoten z auf dem Pfad P' . Im Fall von $w = v$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq 3 + d_{H'_2}(z, y) - 1 \\ &\leq 4\gamma(H_2) \leq 4\gamma(G) - 4. \end{aligned}$$

Im Fall von $w = u_1$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'}(x, u_1) + d_{H'_2}(u_1, y) \\ &\leq 4 + d_{H'_2}(z, y) - 1 \\ &\leq 4\gamma(H_2) + 1 \leq 4\gamma(G) - 3. \end{aligned}$$

Im Fall von $w = z$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'}(x, z) + d_{H'_2}(z, y) \\ &\leq 5 + d_{H'_2}(z, y) \\ &\leq 4\gamma(H_2) + 3 \leq 4\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Im Fall von $w = u_2$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'}(x, z) + d_{H'_2}(z, y) \\ &\leq 5 + d_{H'_2}(z, y) \\ &\leq 4\gamma(H_2) + 3 \leq 4\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Es bleibt der Fall 3 zu untersuchen.

Fall 3: Sei $y \in V(G_1)$ und $x \in V(G_2)$.

Wir betrachten einen kürzesten Pfad P' von x nach z in der Orientierung H'_2 . Da die Kante (z, u_1) in der Orientierung H'_2 von z nach u_1 gerichtet ist, enthält der Pfad P' nicht die Kante (z, u_1) . Damit gilt, entweder der Pfad P' existiert auch in der Orientierung H' , oder der Pfad P' enthält mindestens einen der Knoten v oder u_2 . Im ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'_2}(x, z) + d_{H'}(z, y) \\ &\leq 4\gamma(H_2) - 2 + 6 \leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

Im zweiten Fall, sei w der Knoten aus $\{v, u_2\}$ mit größtem Abstand auf dem Pfad P' zum Knoten z . Dann ist:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'_2}(x, w) + d_{H'}(w, y) \\ &\leq d_{H'_2}(x, z) + d_{H'}(z, y) \leq 4\gamma(G). \end{aligned}$$

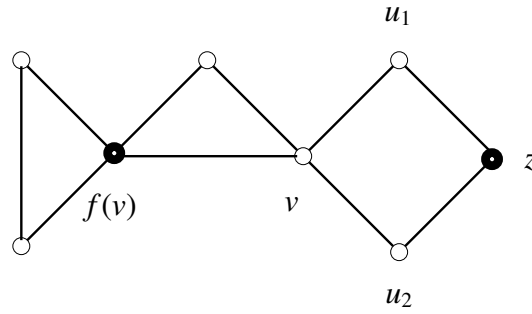


Abbildung 4.22: Wenn v ein Schnittknoten vom Typ A ist, dann ist dieser Graph kein Teilgraph eines kleinsten Gegenbeispiels. Siehe Lemma 4.34.

Damit ist der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. \square

Das folgende Lemma ist eine Umformulierung des Lemmas 4.17.

Lemma 4.35. *Sei G ein γ -kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in vierter Standardform (G, D) und G_D ein zulässiger Teilgraph von G . Falls zwei Knoten $z_1, z_2 \in V(G_D) \setminus D$ existieren mit $f(z_1) = f(z_2)$ und $(z_1, z_2) \in E(G_D)$, dann ist mindestens einer der beiden Knoten z_1 oder z_2 ein Schnittknoten im Graphen G_D .*

Um das Theorem 4.1 beweisen zu können, benötigen wir ein weiteres Lemma.

Lemma 4.36. *Sei G ein γ -kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in vierter Standardform (G, D) und G_D ein zulässiger Teilgraph von G . Seien weiterhin $x, y_1, y_2 \in V(G_D) \setminus D$ und $(x, y_1), (x, y_2) \in E(G_D)$ mit $f(y_1) \neq f(x)$ und $f(y_2) \neq f(x)$. Dann ist entweder einer der Knoten x, y_1 oder y_2 ein Schnittknoten im Graphen G_D , oder es gilt $f(y_1) \neq f(y_2)$.*

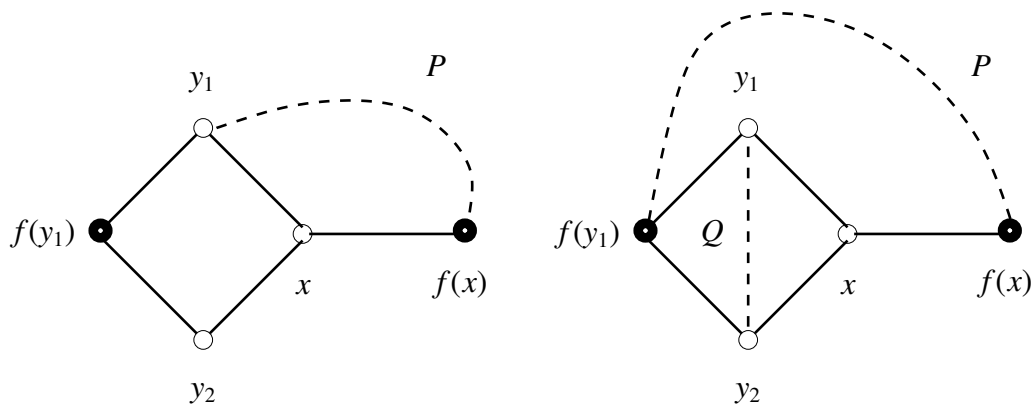
Siehe Abbildung 4.23.

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Sei also keiner der Knoten x, y_1 und y_2 ein Schnittknoten im Graphen G_D und sei weiterhin $f(y_1) = f(y_2)$. Da x kein Schnittknoten ist, ist der Graph $G_D \setminus x$ zusammenhängend. Falls im Graphen $G_D \setminus \{x, (y_1, f(y_1))\}$ ein Pfad P von y_1 zum Knoten $f(x)$ existiert, dann ist die Kante (y_1, x) eine Sehne im Kreis $C = (y_1, P, f(x), x, y_2, f(y_1), y_1)$. Analog gilt dies für den Knoten y_2 .

Da der Knoten x kein Schnittknoten ist, existiert ein Pfad P im Graphen $G_D \setminus x$ von $f(y_1)$ nach $f(x)$. Falls ein Pfad Q von y_1 zum Knoten y_2 existiert, dann gilt für die Pfade P und Q : $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$. Ansonsten wären wir im obigen Fall. Dann ist jedoch die Kante (y_2, x) eine Sehne im Kreis:

$$C = (f(y_1), P, f(x), x, y_1, Q, y_2, f(y_1)).$$

Da weder y_1 noch y_2 Schnittknoten sind gilt $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 2$. Damit ist auch der Graph $G_D \setminus y_1$ stark zusammenhängend. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G_D . \square



(a) Die Kante (y_1, x) kann entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang zu zerstören.

(b) Falls der Pfad Q existiert, ist (y_1, x) eine Sehne. Ansonsten kann der Knoten y_1 entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang zu zerstören.

Abbildung 4.23: Da der Knoten x kein Schnittknoten ist, existiert entweder ein Pfad von y_1 zu $f(x)$ oder von $f(y_1)$ zu $f(x)$. In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch zur Minimalität. Siehe dafür das Lemma 4.36.

Lemma 4.37. Sei G ein γ -kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 in vierter Standardform (G, D) mit $|D| \geq 4$ und sei weiterhin G_D ein zulässiger Teilgraph von G . Dann existiert kein Kreis $C = (v_0, v_1, \dots, v_t = v_0)$ im Graphen G_D mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $v_0 \in D$,
- (2) $k = |V(C) \cap D| \geq 2$,
- (3) $t \geq 6$ und
- (4) $f(v_j) \in \{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}\}$ für $0 < j < t$ oder der Knoten v_j ist ein Schnittpunkt vom Typ A im Graphen G_D .

Siehe dafür auch Abbildung 4.24 (a) auf Seite 60.

Beweis. Angenommen, es existiert so ein Kreis C . Wir bezeichnen mit y die Anzahl der Schnittpunkte des Kreises C und mit Y die entsprechende Menge. Da der Graph G in vierter Standardform ist, enthält die Menge Y ausschließlich Schnittpunkte vom Typ A und $y \leq 2$.

Wir zeigen, dass der Kreis C sehnfrei ist. Angenommen, die Kante (u_1, u_2) ist eine Sehne von C . Da G_D minimal gewählt wurde und G in vierter Standardform ist, gilt $|\{u_1, u_2\} \cap D| = 1$. Dann ist jedoch $f(u_1) = u_2$ beziehungsweise $f(u_2) = u_1$ und die Knoten u_1 und u_2 sind keine Schnittpunkte vom Typ A. Mit der Eigenschaft (4) folgt der Widerspruch.

Für jeden Schnittpunkt v_j vom Typ A setzen wir $z_j = f(v_j)$. Da der Graph G_D minimal gewählt wurde, ist $\deg_{G_D}(z_j) = 2$. Wir bezeichnen mit $w_j \in V(G) \setminus (V(C) \cup D)$ den Knoten, der adjazent zu v_j und zu z_j ist. Für den Knoten w_j gilt ebenso $\deg_{G_D}(w_j) = 2$. Die Länge des Kreises C ist gegeben durch $|C| = 3k + y \geq 6$.

Wir konstruieren aus dem Graphen G_D einen Graphen G'_D durch folgende Operationen:

- (a) Entfernen der Kanten des Kreises C ,
- (b) Entfernen der Knoten z_j und w_j für jeden Schnittpunkt v_j vom Typ A,
- (c) Entfernen der Knoten $(V(C) \cap D) \setminus v_0$,
- (d) Hinzufügen von Knoten u_j und Kanten (v_0, v_j) , (v_0, u_j) und (u_j, v_j) für $0 < j < t$ mit $v_j \notin D$ und
- (e) Ersetzen aller Kanten (v_j, x) in G_D mit $v_j \in D$, $x \notin V(C)$ durch Kanten (v_0, x) in G'_D .

Siehe dafür auch Abbildung 4.24 auf Seite 60. Da (G, D) in vierter Standardform ist, entstehen durch die Operation (e) keine doppelten Kanten. Die Menge $D' = D \setminus \{v_1, \dots, v_{t-1}, z_1, \dots, z_{t-1}\}$ ist eine dominierende Menge für G'_D mit $|D'| = |D| - k - y + 1$. Sei H' eine optimale Orientierung von G'_D . Sei H die Orientierung von G_D in der alle Kanten entsprechend der Orientierung H' orientiert sind. Die Kanten des Kreises C orientieren wir von v_j zu v_{j+1} und die Kanten zwischen den Knoten v_j, z_j und w_j werden von v_j nach z_j , von z_j nach w_j und von w_j nach v_j orientiert. Wir setzen $A = V(C) \cup \{w_j, z_j : 0 < j < t\}$.

Nun untersuchen wir die Abstände der Knoten in der Orientierung H . Es gilt:

$$d_H(a, b) \leq \begin{cases} 3k - 1 & \text{für } a, b \in A \text{ und } y = 0 \\ 3k + 2 = 3k + 3y - 1 & \text{für } a, b \in A \text{ und } y = 1 \\ 3k + 5 = 3k + 3y - 1 & \text{für } a, b \in A \text{ und } y = 2 \\ 3k + y - 1 & \text{für } a, b \in V(C) \\ 3k + y - 3 & \text{für } a, b \in V(C) \cap D \end{cases}$$

Da der im Lemma beschriebene Graph kein Gegenbeispiel ist, gilt $|D| > k + y$. Seien $a, b \in V(G)$. Wir unterscheiden sechs Fälle.

(1) Falls $a, b \in A$ und $y = 0$, dann gilt:

$$d_H(a, b) \leq 3k - 1 < 3|D| - 1 \leq 4|D| - 4.$$

(2) Falls $a, b \in A$ und $y = 1$, dann gilt:

$$d_H(a, b) \leq 3k + 2 = 3(k + y) - 1 < 3|D| - 1 \leq 4|D| - 4.$$

(3) Falls $a, b \in A$ und $y = 2$, dann gilt:

$$d_H(a, b) \leq 3k + 5 = 3(k + y) - 1 < 3|D| - 1 \leq 4|D| - 4.$$

(4) Falls $a, b \notin A$, dann betrachten wir einen kürzesten Pfad P' von a nach b in H' .

(5) Falls $a \in A$ und $b \notin A$, dann betrachten wir einen kürzesten Pfad P' von v_0 nach b in H' . Es gilt:

$$d_H(a, v_0) \leq \begin{cases} 3k - 1 & \text{für } y = 0 \\ 3(k - 1) + y + 3 = 3k + y & \text{für } y \geq 1. \end{cases}$$

(6) Falls $a \notin A$ und $b \in A$, dann betrachten wir einen kürzesten Pfad P' von a nach v_0 in H' . Für den Abstand $d_H(v_0, b)$ gilt die gleiche Abschätzung wie im Punkt (5).

Sei P' ein kürzester Pfad von a nach b in der Orientierung H' . Falls der Pfad P' auch in der Orientierung H existiert, dann ist

$$d_H(a, b) = d_{H'}(a, b) \leq 4|D'| \leq 4|D| - 4.$$

Wir erhalten die gleiche Abschätzung, falls durch Ersetzung des Knotens v_0 in P' mit einem Knoten $v_j \in (V(C) \cap D)$ der Pfad P' im Graphen H existiert.

Andererseits, falls der Pfad P' nicht im Graphen H existiert, dann gilt einer der folgenden Aussagen:

- (i) Der Pfad P' enthält Kanten der Menge (v_0, v_j) , (v_0, u_j) oder (u_j, v_j) mit $v_j \notin D$ oder
- (ii) der Pfad P' enthält den Knoten v_0 und Kanten (x_1, v_0) und (v_0, x_2) , so dass $f_H(x_1), f_H(x_2) \in (V(C) \cap D) \setminus v_0$ und $f_H(x_1) \neq f_H(x_2)$.

Wir konstruieren aus dem Pfad P' einen Pfad P , der die Knoten a und b im Graphen H verbindet. Betrachten wir zuerst den Fall (i). Durch das Entfernen der Kanten (v_0, v_j) , (v_0, u_j) oder (u_j, v_j) zerfällt der Pfad P' in mindestens zwei Teilpfade P'_1, \dots, P'_m mit $|P'_1| + |P'_m| \leq |P'| - 1$. Durch Einfügen eines passenden Segmentes C' des Kreises C erhalten wir einen Pfad $P = P'_1 \cup C' \cup P'_m$ im Graphen H . Es gilt:

$$\begin{aligned} |P| &\leq |P'_1| + |P'_m| + |C'| \\ &\leq |P'| - 1 + 3k + y - 1 \\ &= |P'| + 3k + y - 2. \end{aligned}$$

Im Fall (ii) erweitern wir den Pfad P' durch Einfügen eines Kreissegmentes C' von C zwischen den Knoten $f_H(x_1)$ und $f_H(x_2)$. Wir erhalten einen Pfad P von a nach b mit:

$$|P| \leq |P'| + 3k + y - 3.$$

Sei G' der Graph, der aus G'_D durch Hinzufügen von isolierten Dreiecken an die Menge D' konstruiert wird. Dann ist (G', D') in vierter Standardform kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 und G'_D ein dominierender Teilgraph von G' . Somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{diam}_2(H', D') &\leq 4|D'| = 4|D| - 4k - 4y + 4, \\ \text{diam}_1(H', D') &\leq 4|D'| - 2 = 4|D| - 4k - 4y + 2 \quad \text{und} \\ \text{diam}_0(H', D') &\leq 4|D'| - 4 = 4|D| - 4k - 4y. \end{aligned}$$

Mit $|D| \geq k + y + 1$ können wir die Abstände in der Orientierung H abschätzen. Wir unterscheiden die Fälle $y = 0$ und $y > 0$.

Im Fall von $y = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
diam_2(H, D) &\leq \max\{ diam_2(H', D') + 3k - 2, diam_1(H', D') + 3k - 1, 3k - 1 \} \\
&\leq 4|D| - 4k + 4 + 3k - 2 \\
&= 4|D| - k + 2 \leq 4|D|, \\
diam_1(H, D) &\leq \max\{ diam_1(H', D') + 3k - 2, diam_0(H', D') + 3k - 1, 3k - 1 \} \\
&\leq 4|D| - 4k + 2 + 3k - 2 \\
&= 4|D| - k \leq 4|D| - 2, \\
diam_0(H, D) &\leq \max\{ diam_0(H', D') + 3k - 2, 3k - 3 \} \\
&\leq 4|D| - 4k + 3k - 2 \\
&= 4|D| - k - 2 = 4|D| - 4.
\end{aligned}$$

Im Fall von $y \geq 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
diam_2(H, D) &\leq \max\{ diam_2(H', D') + 3k + y - 2, diam_1(H', D') + 3k + y, \\
&\quad 3k + 3y - 1 \} \\
&\leq 4|D| - 4k - 4y + 4 + 3k + y - 2 \\
&= 4|D| - k - 3y + 2 \leq 4|D|, \\
diam_1(H, D) &\leq \max\{ diam_1(H', D') + 3k + y, diam_0(H', D') + 3k + y, 3k + 3y - 1 \} \\
&\leq 4|D| - 4k - 4y + 2 + 3k + y \\
&= 4|D| - k - 3y + 2 \leq 4|D| - 2, \\
diam_0(H, D) &\leq \max\{ diam_0(H', D') + 3k + y, 3k + 3y - 1 \} \\
&\leq 4|D| - 4k - 4y + 3k + y \\
&= 4|D| - k - 3y \leq 4|D| - 4.
\end{aligned}$$

Damit folgt mit Lemma 4.28, dass G kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1 ist. \square

4.4.5 Hauptbeweis

Nach den obigen Vorbetrachtungen können wir einen zweiten Beweis für das Theorem 4.1 angeben. Die Struktur des Beweises ähnelt dem Beweis der bisher besten Schranke von Fomin et al. [15]. In einem ersten Schritt wird ein Baum konstruiert, der die dominierenden Knoten enthält. Im zweiten Schritt wird der konstruierte Baum zu einem stark zusammenhängenden Teilgraphen des Ausgangsgraphen vervollständigt. Der minimale orientierte Durchmesser wird über die Knotenanzahl des konstruierten Teilgraphen abgeschätzt. Das Lemma 4.28 liefert schließlich eine Abschätzung des minimalen orientierten Durchmessers des Ausgangsgraphen.

Im Beweis nutzen wir folgenden Abstandsbegriff auf Knotenmengen.

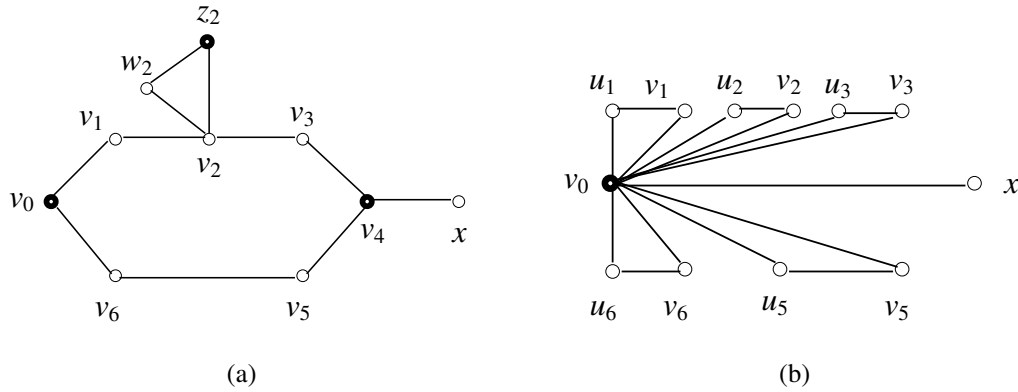


Abbildung 4.24: Der Graph in Abbildung (a) ist kein Teilgraph eines zulässigen Teilgraphen G_D eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 4.1. Er kann durch den Graphen in Abbildung (b) ersetzt werden. Siehe Lemma 4.37.

Definition 4.38. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und V_1, V_2 Teilmengen von V . Als **Abstand der Knotenmengen** V_1 und V_2 im Graphen G definieren wir:

$$d_G(V_1, V_2) = \min\{d_G(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

Theorem (4.1). Für jeden stark zusammenhängenden Graphen G gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 4\gamma(G).$$

Beweis. Angenommen, G ist ein γ -kleinstes Gegenbeispiel in vierter Standardform (G, D) und G_D ein zulässiger Teilgraph von G . Aus den Lemmata 4.32 und 4.33 folgt $|D| \geq 4$. Wir werden zeigen, dass die Knotenanzahl von G_D beschränkt ist durch:

$$|V(G_D)| \leq 4(|D| - 1) + 1.$$

Für den Graphen G_D gilt:

- (1) Jeder Schnittknoten des Graphen G_D ist vom Typ A.
- (2) Aus den Lemmata 4.34 und 4.36 folgt, dass kein Kreis C der Länge vier im Graphen G_D existiert, mit $|V(C) \cap D| = 1$.
- (3) Der Graph G_D enthält keinen Kreis mit den Merkmalen aus Lemma 4.37.

Um eine Schranke für die Anzahl der Knoten von G_D zu erhalten, zählen wir die Anzahl der Knoten eines aus dem Graphen G_D konstruierten Graphen \tilde{G}_D . Seien v_1, v_2 die Schnittknoten vom Typ A. Wir setzen $\tilde{D} = (D \cup \{v_1, v_2\}) \setminus \{f(v_1), f(v_2)\}$. Da der Graph

G_D minimal ist, besteht die Zusammenhangskomponente im Graphen $G \setminus v_i$, die den Knoten $f(v_i)$ enthält, genau aus zwei Knoten $f(v_i)$ und w_i für $i \in \{1, 2\}$.

Der Graph \tilde{G}_D entsteht aus dem Graphen G_D durch Entfernen der Knoten $f(v_i)$ und w_i , $i \in \{1, 2\}$ und durch Ersetzung aller Kanten (v_i, z) durch Pfade (v_i, z', z) der Länge zwei. Offenbar gilt $|\tilde{D}| = |D|$ und $|V(\tilde{G}_D)| \geq |V(G_D)|$. Die Menge \tilde{D} ist eine dominierende Menge für \tilde{G}_D und der Graph \tilde{G}_D ist ein zulässiger Graph bezüglich eines geeignet gewählten Paares (\tilde{G}, \tilde{D}) in vierter Standardform. Für den Graphen \tilde{G}_D gelten folgende strukturellen Aussagen.

- (a) Da der Graph \tilde{G}_D keine Schnittknoten enthält, folgt mit Lemma 4.35, dass keine Knoten $u, v \in V(\tilde{G}_D) \setminus \tilde{D}$ mit $(u, v) \in E(\tilde{G}_D)$ und $f(u) = f(v)$ existieren.
- (b) Der Graph \tilde{G}_D enthält keinen Kreis C der Länge vier mit $|V(C) \cap \tilde{D}| = 1$.
- (c) Der Graph \tilde{G}_D enthält keinen Kreis mit den Merkmalen aus Lemma 4.37.

Wir konstruieren iterativ Bäume $T_1, \dots, T_{|\tilde{D}|}$, so dass für den Baum $T = T_{|\tilde{D}|}$ gilt:

- (i) $\tilde{D} \subseteq V(T)$ und
- (ii) Für jeden Knoten $v \in V(T) \setminus \tilde{D}$ gilt $(v, f(v)) \in E(T)$.

Der Baum T_1 besteht aus einem Knoten $x_1 \in \tilde{D}$. Dieser Baum erfüllt die Bedingung (ii). Um den Baum T_{k+1} aus dem Baum T_k zu konstruieren, suchen wir einen Knoten $x_{k+1} \in \tilde{D} \setminus V(T_k)$ mit kleinstem Abstand zum bisher konstruierten Baum T_k . Der Baum T_{k+1} besteht aus der Vereinigung des Baumes T_k und eines kürzesten Pfades P_{k+1} von T_k zum Knoten x_{k+1} . Da \tilde{D} eine dominierende Menge ist, gilt $|P_{k+1}| \leq 3$. Da die Eigenschaft (ii) für den Baum T_k gilt und jeweils ein Knoten $x \in \tilde{D}$ mit kleinstem Abstand zum bisher konstruierten Baum hinzugefügt wird, ist $|P_{k+1}| \geq 2$.

Wir betrachten zuerst den Fall $|P_{k+1}| = 2$. Sei also $P_{k+1} = (x_{k+1}, v_1, v_2)$. Es gilt $f(v_1) = x_{k+1}$ und $v_2 \in V(T_k)$. Da die Bedingung (ii) für den Baum T_k erfüllt ist, gilt sie auch für den Baum T_{k+1} .

Sei nun $P_{k+1} = (x_{k+1}, v_1, v_2, v_3)$. Es gilt $v_1, v_2 \notin V(T_k) \cup \tilde{D}$ und $v_3 \in V(T_k)$. Falls $f(v_2) \notin V(T_k)$, dann wäre $(f(v_2), v_2, v_3)$ ein kürzerer Pfad von T_k zu einem Knoten der dominierenden Menge \tilde{D} . Somit gilt $f(v_2) \in T_k$. Um die Bedingung (ii) zu gewährleisten, wählen wir den Pfad P_{k+1} folgendermaßen $P_{k+1} = (x_{k+1}, v_1, v_2, f(v_2))$.

Wir erhalten schließlich einen Baum $T_{|\tilde{D}|} = T$, der die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt mit:

$$|V(T)| \leq |\tilde{D}| + 2(|\tilde{D}| - 1) = 3|\tilde{D}| - 2.$$

Die verbliebenen Freiheiten bei der Konstruktion der Bäume T_k nutzen wir, um einen Baum T zu konstruieren mit einer maximalen Anzahl von Knoten. Sei nun T ein Baum, der wie oben konstruiert wird, die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt mit maximaler Knotenanzahl.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass für jede Kante (a, b) im Graphen \tilde{G}_D gilt:

$$|V(T) \cap \{a, b\}| \geq 1.$$

Sei $v \in \tilde{D}$ und sei $u \in V(\tilde{G}_D) \setminus V(T)$ ein Nachbarknoten von v im Graphen \tilde{G}_D . Wir zeigen, wenn u' ein Nachbarknoten von u im Graphen \tilde{G}_D ist, dann gilt $u' \in V(T)$. Da $f(u) = v$, gilt $u' \notin \tilde{D}$. Aus der Eigenschaft (a) folgt $f(u') \neq v$. Angenommen, es gilt $u' \notin V(T)$. Sei $P(v, f(u'))$ der Pfad in T vom Knoten v zum Knoten $f(u')$. Dann ist $C = (u, P(v, f(u')), u', u) = (v_0, v_1, \dots, v_t)$ ein Kreis im Graphen \tilde{G}_D mit $t \geq 6$. Mit Lemma 4.37 und da der Graph \tilde{G}_D keine Schnittknoten vom Typ A enthält, existiert ein Knoten $v_j \in V(C) \setminus \tilde{D}$ mit $f(v_j) \notin \{v_{j-1}, v_{j+1}\}$ für $0 < j < t$. Sei j der kleinste Index, für den obiges gilt, das heißt $v_{j-2} \in \tilde{D}$. Aus der Eigenschaft (ii) des Baumes T folgt, dass die Kanten $(v_i, f(v_i))$ für $j-1 \leq i \leq j+1$ im Baum T enthalten sind.

Falls $\deg_T(v_{j-1}) = 2$ gilt, dann erfüllt der Baum T' mit:

$$\begin{aligned} V(T') &= (V(T) \cup \{u, u'\}) \setminus v_{j-1} \quad \text{und} \\ E(T') &= (E(T) \cup \{(v, u), (u, u'), (u', f(u'))\}) \setminus \{(v_{j-2}, v_{j-1}), (v_{j-1}, v_j)\} \end{aligned}$$

die Bedingungen (i) und (ii) und es gilt $V(T') > V(T)$. Da der Baum T knotenmaximal gewählt wurde, existiert in diesem Fall kein solcher Knoten u' .

Betrachten wir nun den Fall $\deg_T(v_{j-1}) \geq 3$. In diesem Fall erfüllt der Baum T' mit:

$$\begin{aligned} V(T') &= V(T) \cup \{u, u'\} \quad \text{und} \\ E(T') &= (E(T) \cup \{(v, u), (u, u'), (u', f(u'))\}) \setminus (v_{j-1}, v_j) \end{aligned}$$

die Bedingungen (i) und (ii) und es gilt $V(T') > V(T)$.

Im Fall, dass der Knoten v nicht in der dominierenden Menge \tilde{D} liegt, betrachten wir anstatt v den Knoten $f(u)$ und können analog argumentieren. Wir haben gezeigt, dass für jede Kante (a, b) in \tilde{G}_D mindestens einer der Knoten a oder b im Baum T liegt.

Wir bezeichnen mit $F(T)$ die Knoten des Baumes T mit $v \in \tilde{D}$ oder $\deg_T(v) \geq 3$. Wir zeigen durch Induktion über k :

$$|V(T_k)| + |F(T_k)| \leq 4k - 2 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq |\tilde{D}|.$$

Offenbar gilt $|V(T_1)| + |F(T_1)| = 2 = 4 - 2$. Der Baum T_{k+1} entsteht aus dem Baum T_k durch Hinzufügen eines Pfades P_{k+1} der Länge zwei oder drei. Falls $|P_{k+1}| = 3$, dann gilt:

$$\begin{aligned} F(T_{k+1}) &= F(T_k) \cup x_{k+1} \quad \text{und} \\ |V(T_{k+1})| &= |V(T_k)| + 3 \end{aligned}$$

Falls $|P_{k+1}| = 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |F(T_{k+1})| &\leq |F(T_k)| + 2 \quad \text{und} \\ |V(T_{k+1})| &= |V(T_k)| + 2 \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt $|V(T_{k+1})| + |F(T_{k+1})| \leq |V(T_k)| + |F(T_k)| + 4$.

Es gilt somit:

$$|V(T)| + |F(T)| \leq 4|\tilde{D}| - 2.$$

Für einen Graphen K , der den Baum T enthält, definieren wir:

$$N(K) = |\{S(K, v) : v \in F(T)\}|.$$

Das heißt, $N(K)$ gibt die Anzahl der größten stark zusammenhängenden Teilgraphen $K_1, \dots, K_{N(K)}$ von K an, mit $F(T) \cap V(K_i) \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq N(K)$. Da T ein Baum ist, gilt $N(T) = |F(T)|$.

Wir konstruieren rekursiv Graphen $G_{|F(T)|}, \dots, G_2, G_1$, für welche die Ungleichungen (\star) gelten.

$$(\star) \quad \begin{cases} |V(G_i)| + N(G_i) \leq 4|\tilde{D}| - 2, \\ N(G_i) \leq i \quad \text{und} \\ T \subseteq G_i \subseteq \tilde{G}_D \end{cases}$$

Für den Graphen G_1 gilt dann mit der zweiten Ungleichung $N(G_1) = 1$, das heißt der Graph G_1 ist stark zusammenhängend. Die dritte Ungleichung der Bedingung (\star) stellt sicher, dass G_1 jeden Knoten der dominierenden Menge enthält. Aus der ersten Ungleichung folgt, dass die Knotenanzahl von G_1 beschränkt wird durch $|V(G_1)| \leq 4|\tilde{D}| - 3$. Das heißt, G_1 ist ein zulässiger Teilgraph von \tilde{G}_D . Da \tilde{G}_D minimal gewählt wurde, gilt:

$$|V(\tilde{G}_D)| \leq |V(G_1)| \leq 4|\tilde{D}| - 3.$$

Es gilt folgende Beobachtung. Sei $v \in V(T)$ beziehungsweise $e \in E(T)$, so dass durch das Entfernen des Knotens v oder der Kante e der Baum T in zwei Teilbäume T^1 und T^2 zerfällt. Da der Graph \tilde{G}_D keine Schnittknoten enthält, existiert ein kürzester Pfad M im Graphen \tilde{G}_D , der weder den Knoten v noch die Kante e enthält und der die beiden Teilbäume T^1 und T^2 verbindet. Oben wurde gezeigt, dass von den beiden Knoten jeder Kante im Graphen \tilde{G}_D mindestens einer im Baum T liegt. Damit beträgt die Länge des Pfades M höchstens zwei.

Wir setzen $G_{|F(T)|} = T$. Es gilt $N(G_{|F(T)|}) = N(T) = |F(T)|$. Damit gilt die Bedingung (\star) für den Graphen $G_{|F(T)|}$. Sei nun G_i ein Graph für den die Bedingung (\star) erfüllt ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Sei u ein Knoten in $V(\tilde{G}_D) \setminus V(G_i)$, so dass Nachbarknoten x, y von u im Graphen \tilde{G}_D existieren mit $S(G_i, x) \neq S(G_i, y)$, dann konstruieren wir den Graphen G_{i-1} aus dem Graphen G_i durch:

$$\begin{aligned} V(G_{i-1}) &= V(G_i) \cup u \quad \text{und} \\ E(G_{i-1}) &= E(G_i) \cup \{(u, z) : (u, z) \in E(\tilde{G}_D)\}. \end{aligned}$$

Für den Knoten x gilt entweder $\deg_{\tilde{G}_D}(x) \geq 3$, oder der Knoten x ist ein Blatt des Baumes T . Durch die Konstruktion von T ist jedes Blatt von T ein Knoten der Menge \tilde{D} . Somit gilt $x \in F(T)$. Analog gilt $y \in F(T)$. Damit ist $N(G_{i-1}) = N(G_i) - 1$. Für den Graphen G_{i-1} gilt: $|V(G_{i-1})| = |V(G_i)| + 1$. Damit gilt die Bedingung (\star) .

Fall 2: Es existieren keine Knoten u, x und y mit den Eigenschaften aus Fall 1.

Seien f_1, f_2 Knoten der Menge $F(T)$ mit $S(G_i, f_1) \neq S(G_i, f_2)$ und minimalem Abstand $d_{G_i}(V(S(G_i, f_1)), V(S(G_i, f_2)))$. Offenbar gilt:

$$1 \leq d_{G_i}(V(S(G_i, f_1)), V(S(G_i, f_2))) \leq 3.$$

Wir bezeichnen mit P_{f_1, f_2} einen kürzesten Pfad zwischen den Graphen $S(G_i, f_1)$ und $S(G_i, f_2)$. Wir unterscheiden nach der Länge des Pfades P_{f_1, f_2} .

Fall 2.1: Sei $P_{f_1, f_2} = (v_0, v_1)$.

Falls die Kante (v_0, v_1) keine Kante des Baumes T ist, dann fügen wir die Kante (v_0, v_1) zum Graphen G_i hinzu, um den Graphen G_{i-1} zu erhalten. Offenbar gilt für den Graphen G_{i-1} die Bedingung (\star) .

Sei nun $(v_0, v_1) \in E(T)$. Durch das Entfernen der Kante (v_0, v_1) aus dem Baum T entstehen zwei Teilbäume T^1 und T^2 . Sei o.B.d.A. $f_1 \in V(T^1)$ und $f_2 \in V(T^2)$. Oben wurde gezeigt, dass ein Pfad M existiert im Graphen $\tilde{G}_D \setminus (v_0, v_1)$ der die beiden Teilbäume T^1 und T^2 verbindet mit $|M| \leq 2$. Wir wählen $G_{i-1} = G_i \cup M$. Dann liegen f_1 und f_2 in der gleichen starken Zusammenhangskomponente im Graphen G_{i-1} . Es gilt somit $|V(G_{i-1})| = |V(G_i)| + 1$ und $N(G_{i-1}) \leq N(G_i) - 1$. Damit ist die Bedingung (\star) erfüllt.

Fall 2.2: Sei $P_{f_1, f_2} = (v_0, v_1, v_2)$.

Falls der Knoten v_1 nicht im Baum T liegt, dann wählen wir $G_{i-1} = G_i \cup P_{f_1, f_2}$. Wir können analog zum Fall 2.1 argumentieren, dass der Graph G_{i-1} die Bedingung (\star) erfüllt.

Sei nun $v_1 \in T$. Falls die Kante (v_0, v_1) oder die Kante (v_1, v_2) nicht in $E(T)$ enthalten ist, dann fügen wir diese Kante zum Graphen G_i hinzu und sind mit $|P_{f_1, f_2}| = 1$ im Fall 2.1. Sei nun $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \in E(T)$. Es gilt $S(G_i, v_0) \neq S(G_i, v_1) \neq S(G_i, v_2)$. Da P_{f_1, f_2} minimal gewählt wurde, ist $v_1 \notin F(T)$. Damit gilt $\deg_T(v_1) = 2$ und der Graph $T \setminus v_1$ besteht aus zwei Teilbäumen T^1 und T^2 . Sei o.B.d.A. $f_1 \in T^1$ und $f_2 \in T^2$. Analog zum Fall 2.1 gilt $d_{\tilde{G}_D \setminus v_1}(T^1, T^2) \leq 2$. Durch Hinzufügen eines Knotens und entsprechender Kanten zum Graphen G_i erhalten wir einen Graphen G_{i-1} mit $S(G_{i-1}, f_1) = S(G_{i-1}, f_2)$, der die Bedingung (\star) erfüllt.

Fall 2.3: Sei $P_{f_1, f_2} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$.

Da der Pfad P_{f_1, f_2} minimal gewählt wurde, ist $f(v_1) \in V(S(G_i, f_1))$ und $f(v_2) \in V(S(G_i, f_2))$. Wir können also annehmen, dass $v_0, v_3 \in \tilde{D}$ gilt. Es

gilt $|\{v_1, v_2\} \cap V(T)| \geq 1$, da ansonsten (v_1, v_2) eine Kante im Graphen \tilde{G}_D wäre, deren beide Knoten nicht im Baum T lägen. Sei nun o.B.d.A. $v_1 \in T$ und $v_2 \notin T$, dann erhalten wir den Graphen G_{i-1} durch Hinzufügen des Knotens v_2 und der Kanten (v_1, v_2) und (v_2, v_3) . Analog zu oben, erfüllt in diesem Fall der Graph G_{i-1} die Ungleichungen (\star) .

Sei nun $v_1, v_2 \in V(T)$. Falls die Kante (v_1, v_2) nicht im Baum T liegt, dann existiert ein Knoten $v_4 \neq v_0$ mit $(v_1, v_4) \in E(T)$. Da $S(G_i, v_0) \neq S(G_i, v_1)$ gilt auch $S(G_i, v_0) \neq S(G_i, f(v_4))$. Dann können wir jedoch $f_1 = v_0$ und $f_2 = f(v_4)$ wählen.

Sei nun $(v_1, v_2) \in E(T)$. Da der Pfad P_{f_1, f_2} minimal gewählt wurde, ist $\deg_T(v_1) = \deg_T(v_2) = 2$. Der Graph $T \setminus v_1$ zerfällt in zwei Teilbäume T^1 und T^2 . Sei o.B.d.A. $v_0 \in T^1$ und $v_2 \in T^2$. Mit der obigen Bemerkung gilt $d_{\tilde{G}_D \setminus v_1}(T^1, T^2) \leq 2$. Sei $M_1 = (r_1, r_2, r_3)$ der kürzeste Pfad zwischen den beiden Teilbäumen T^1 und T^2 im Graphen $\tilde{G}_D \setminus v_1$. Falls $r_1 \neq v_2$ und falls $r_3 \neq v_2$, dann erfüllt der Graph $G_{i-1} = G_i \cup M_1$ die Bedingung (\star) .

Analog gilt dies für die beiden Teilbäume T^3 und T^4 , die durch das Entfernen des Knotens v_2 entstehen. Sei $M_2 = (r_4, r_5, r_6)$ der kürzeste Pfad zwischen den beiden Teilbäumen T^3 und T^4 im Graphen $\tilde{G}_D \setminus v_2$. Sei nun o.B.d.A. $r_3 = v_2$ und $r_6 = v_1$. Dann ist jedoch die Kante (v_1, v_2) eine Sehne im Graphen \tilde{G}_D . Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von \tilde{G}_D .

Jeder der drei Fälle führt auf einen Widerspruch, beziehungsweise auf eine Konstruktion eines Graphen G_{i-1} , der die Ungleichungen (\star) erfüllt. Damit ist $|V(G_1)| \leq 4|\tilde{D}| - 3$.

Die Knotenanzahl von G_D ist beschränkt durch:

$$|V(G_D)| \leq |V(\tilde{G}_D)| \leq 4|D| - 3.$$

Für jede stark zusammenhängende Orientierung H_D von G_D gilt:

$$\text{diam}(H_D) \leq |V(G_D)| - 1 \leq 4|D| - 4.$$

Mit Lemma 4.28 folgt $\text{diam}_{\min}(G) \leq 4|D| = 4\gamma(G)$ und somit ist der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 4.1. \square

4.4.6 Konstruktion einer Orientierung

Der obige Beweis des Theorems 4.1 führt direkt zu einer Konstruktion einer Orientierung H eines stark zusammenhängenden Graphen G bei gegebener dominierender Menge D mit

$$\text{diam}(H) \leq 4|D|.$$

Es wird dabei nicht vorausgesetzt, dass die Menge D eine minimale dominierende Menge für den Graphen G ist.

Satz 4.39. Sei G ein stark zusammenhängender Graph und $|D| \geq 4$ eine dominierende Menge für G . Dann existiert ein polynomieller Algorithmus, der eine Orientierung H von G konstruiert mit

$$\text{diam}(H) \leq 4|D|.$$

Beweis. Im ersten Schritt konstruieren wir durch Hinzufügen von isolierten Dreiecken an die Knoten der Menge D und durch die Konstruktion im Beweis von Lemma 4.5 aus G einen Graphen \dot{G} in erster Standardform (\dot{G}, D) . Durch das Hinzufügen der isolierten Dreiecke ist D eine minimale dominierende Menge für \dot{G} .

Wir betrachten die maximalen schnittknotenfreien starken Zusammenhangskomponenten G_i von G . Für jede schnittknotenfreie Zusammenhangskomponente G_i von \dot{G} , die einen Knoten $v \notin D$ enthält mit $f(v) \notin G_i$, fügen wir an den Knoten v eine Komponente vom Typ A an. Siehe Abbildung 4.2. Falls einer dieser schnittknotenfreien Zusammenhangskomponenten G_i mehr als zwei solcher Knoten v besitzt, wenden wir die Konstruktion aus Lemma 4.13 an.

Die durch diese Konstruktion entstandenen Graphen $\dot{G}_1, \dots, \dot{G}_t$ sind in vierter Standardform. Wir können jeden dieser Graphen \dot{G}_i separat orientieren. Falls der Graph \dot{G}_i einen Schnittknoten vom Typ A enthält, mit den Eigenschaften von Lemma 4.34, dann wenden wir die Konstruktion aus dem zugehörigen Beweis an und erhalten zwei Graphen \dot{G}_{i_1} und \dot{G}_{i_2} in vierter Standardform.

Für jeden der Graphen \dot{G}_i in vierter Standardform konstruieren wir, wie im Beweis des Theorems angegeben, einen zulässigen stark zusammenhängenden Graphen \tilde{G}_i mit $(D \cap V(\dot{G}_i)) \subseteq V(\tilde{G}_i)$. Falls der Graph \tilde{G}_i einen Kreis mit den Eigenschaften aus Lemma 4.37 enthält, schrumpfen wir den Kreis durch die Konstruktion im zugehörigen Beweis. Wir erhalten einen zulässigen Graphen \tilde{G}_i mit $|V(\tilde{G}_i)| \leq 4|D \cap V(\dot{G}_i)| - 3$. Für jede stark zusammenhängende Orientierung \tilde{H}_i von \tilde{G}_i gilt $\text{diam}(\tilde{H}_i) \leq 4|D \cap V(\tilde{G}_i)| - 4$. Nun können die obigen Reduktionen rückgängig gemacht werden. Wir erhalten die gewünschte Orientierung von G durch Zusammensetzung der Orientierungen der einzelnen schnittknotenfreien starken Zusammenhangskomponenten und durch Erweiterung der Orientierung auf dem Ausgangsgraphen durch Orientierung der verbliebenen Kanten mit Hilfe von Lemma 4.28.

Jeder der einzelnen Schritte kann in polynomieller Zeit durchgeführt werden. Damit kann die Orientierung in polynomieller Zeit gefunden werden. \square

Kapitel 5

Der minimale orientierte Durchmesser $\{C_3, C_4\}$ -freier Graphen

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel betrachten wir Graphen, die weder einen Kreis der Länge drei noch einen Kreis der Länge vier enthalten. Das Ziel des Kapitels ist es, das Theorem 5.1 zu beweisen. Die Struktur des Beweises gleicht dem Beweis der allgemeinen Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser in den Abschnitten 4.2 und 4.3. Im Abschnitt 5.2 wird gezeigt, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 weitgehend schnittknotenfrei ist. Im darauf folgenden Abschnitt 5.3 untersuchen wir analog zum Abschnitt 4.3 die Struktur eines diametralen Pfades. Wir zeigen, dass jeder Knoten der dominierenden Menge, der nicht auf dem diametralen Pfad liegt, höchstens einen Nachbarknoten auf dem diametralen Pfad besitzt. Mit diesen Erkenntnissen kann die Länge eines solchen Pfades abgeschätzt werden.

Theorem 5.1. *Sei G ein brückenfreier zusammenhängender Graph, der weder einen C_3 noch einen C_4 enthält. Dann gilt:*

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Das Theorem wird scharf erfüllt von einer Kette von Kreisen der Länge sechs. Siehe den Graphen in Abbildung 5.1.

Das Problem, den minimalen orientierten Durchmesser $\{C_3, C_4\}$ -freier Graphen zu bestimmen ist \mathcal{NP} -schwer. Sei G ein stark zusammenhängender Graph und G^2 der Graph, der aus G entsteht durch Ersetzung aller Kanten (u, v) durch Pfade (u, z_{uv}, v) der Länge zwei. Sei A die Menge aller hinzugefügten Knoten. Der Graph G^2 enthält weder einen Kreis der Länge drei noch einen Kreis der Länge vier. Sei H^2 eine beliebige stark zusammenhängende Orientierung von G^2 und H die Orientierung von G , in der die Kanten (u, v) von u nach v gerichtet sind, wenn der Pfad (u, z_{uv}, v) in G^2 von u nach v gerichtet ist. Für alle Knoten $x, y \notin A$ gilt $2d_H(x, y) = d_{H^2}(x, y)$. Für $a \in A$ und $y \notin A$,

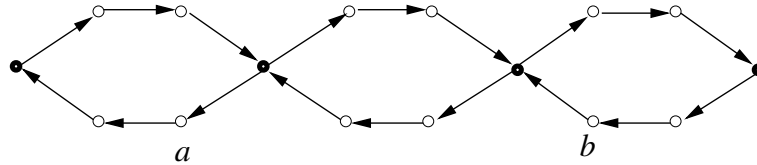


Abbildung 5.1: Dieser Graph erfüllt die Ungleichung im Theorem 5.1 mit Gleichheit. Der Abstand vom Knoten a zum Knoten b beträgt $13 = 3 \cdot 4 + 1$.

existiert ein Knoten $x \notin A$ mit $2d_H(x, y) = d_{H^2}(a, y) - 1$. Für $a, b \in A$ existieren Knoten $x, y \notin A$ mit $2d_H(x, y) = d_{H^2}(a, b) - 2$. Der minimale orientierte Durchmesser von G ergibt sich somit aus dem Maximum der drei Größen.

5.2 Schnittknoten

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 weitgehend schnittknotenfrei ist. Wie im Kapitel 4 definieren wir zuerst eine Standardform.

5.2.1 Erste Standardform

Definition 5.2 (erste $\{C_3, C_4\}$ -Standardform). Sei G ein Graph und D eine dominierende Menge für G . Das Paar (G, D) ist in **erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform**, wenn (G, D) in erster Standardform (siehe Definition 4.4 auf Seite 17) ist und der Graph G weder einen C_3 noch einen C_4 enthält.

Lemma 5.3. Für jeden stark zusammenhängenden $\{C_3, C_4\}$ -freien Graphen G' und zugehöriger minimaler dominierender Menge D' existiert ein Tupel (G, D) in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform mit

$$\gamma(G) = |D| \leq \gamma(G') = |D'|$$

und

$$\infty > \text{diam}_{\min}(G) \geq \text{diam}_{\min}(G').$$

Beweis. Der Beweis kann direkt vom Lemma 4.5 übernommen werden. Durch die Konstruktion des Graphen G im Beweis des Lemmas 4.5 wird an keiner Stelle ein Kreis der Länge drei oder vier erzeugt. Wenn der Graph G' weder einen C_3 noch einen C_4 enthält, ist der konstruierte Graph G ebenso $\{C_3, C_4\}$ -frei. \square

Lemma 5.4. Sei $G = (V, E)$ ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform und $v \in V$ ein Schnittknoten. Dann zerfällt $G \setminus v$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des Lemmas 4.9. Einzig der Fall $\gamma(G) < \gamma(H_i) + \gamma(H_j)$ muss nicht betrachtet werden. Wenn der Schnittknoten v nicht in der dominierenden Menge liegt, besitzt jede Zusammenhangskomponente von $G \setminus v$ mindestens zwei Knoten der dominierenden Menge. Damit gilt: $\gamma(G) \geq \gamma(H_i) + \gamma(H_j)$. \square

5.2.2 Dominierende Schnittknoten

In diesem Abschnitt betrachten wir Schnittknoten, die in der dominierenden Menge liegen.

Definition 5.5 (Schnittknoten vom Typ B_i). Ein Schnittknoten v eines Graphen G in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) ist vom **Typ B_i** , wenn

- $v \in D$ und
- für die Zusammenhangskomponenten G_1, G_2, \dots, G_k von $G \setminus v$ gilt:

$$\min_{1 \leq j \leq k} |V(G_j) \cap D| = i.$$

Das folgende Lemma 5.6 ist dem Lemma 4.12 ähnlich. Da in diesem Kapitel jedoch $\{C_3, C_4\}$ -freie Graphen betrachtet werden, können keine Kreise der Länge drei an den Schnittknoten hinzugefügt werden. Stattdessen werden im Beweis Kreise der Länge sechs an den Schnittknoten gehängt. Dadurch ergibt sich eine etwas andere Abschätzung.

Lemma 5.6. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Sei $v \in D$ ein Schnittknoten. Dann ist v ein Schnittknoten vom Typ B_1 .*

Beweis. Angenommen, G ist ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) und v kein Schnittknoten vom Typ B_1 . Da der Graph G keinen Kreis der Länge drei enthält, besitzt G keinen Schnittknoten vom Typ B_0 .

Aus Lemma 5.4 folgt, dass $G \setminus v$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 zerfällt. Wir betrachten die Graphen H_1 und H_2 , die jeweils aus den von $V(G_i) \cup v$ induzierten Graphen bestehen und zusätzlich einen Kreis der Länge sechs am Knoten v besitzen. Für die Graphen H_1 und H_2 gilt $\gamma(H_i) \leq \gamma(G)$, $i \in \{1, 2\}$ und

$$\gamma(H_1) + \gamma(H_2) = \gamma(G) + 3.$$

Seien H'_1 und H'_2 optimale Orientierungen der Graphen H_1 beziehungsweise H_2 . Wir orientieren alle Kanten von G entsprechend der Orientierungen H'_1 und H'_2 . Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung G' von G . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Liege o.B.d.A. der Pfad $P(x, y)$ komplett im Teilgraphen $G[V(G_1) \cup v]$.

Dann ist

$$d_{G'}(x, y) \leq \text{diam}_{\min}(H_1) \leq 3\gamma(H_1) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Fall 2: Sei o.B.d.A. $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$. Durch das Hinzufügen der Kreise der Länge sechs am Knoten v der Graphen H_1 und H_2 gelten die Ungleichungen:

$$ecc_{H'_i}^+(v) \leq \text{diam}(H'_i) - 5 \quad i \in \{1, 2\}$$

und

$$ecc_{H'_i}^-(v) \leq \text{diam}(H'_i) - 5 \quad i \in \{1, 2\}.$$

Dann gilt folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq ecc_{H'_1}^-(v) + ecc_{H'_2}^+(v) \\ &\leq \text{diam}(H'_1) - 5 + \text{diam}(H'_2) - 5 \\ &= \text{diam}_{\min}(H_1) + \text{diam}_{\min}(H_2) - 10 \\ &\leq 3\gamma(H_1) + 1 + 3\gamma(H_2) + 1 - 10 \\ &\leq 3(\gamma(G) + 3) - 8 = 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Damit ist der Widerspruch konstruiert. □

5.2.3 Nicht dominierende Schnittknoten

Nachdem im obigen Abschnitt dominierende Schnittknoten untersucht wurden, betrachten wir in diesem Abschnitt Schnittknoten, die nicht in der dominierenden Menge liegen.

Definition 5.7 (Schnittknoten vom Typ A_i). Ein Schnittknoten v eines Graphen G in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) ist vom **Typ A_i** , wenn

- $v \notin D$ und
- für die Zusammenhangskomponenten G_1, G_2, \dots, G_k von $G \setminus v$ gilt:

$$\min_{1 \leq j \leq k} |V(G_j) \cap D| = i.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 höchstens einen Schnittknoten vom Typ A_i besitzt und, dass dieser Schnittknoten ein Knoten vom Typ A_3 ist.

Bemerkung 5.8. *Offensichtlich gilt, wenn G ein $\{C_3, C_4\}$ -freier Graph ist, dann ist kein Knoten von G ein Schnittknoten vom Typ A_1 .*

Lemma 5.9. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Dann ist kein Knoten von G ein Schnittknoten vom Typ A_2 .*

Beweis. Angenommen, v ist ein Schnittknoten vom Typ A_2 in einem kleinsten Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Aus Lemma 5.4 folgt, dass $G \setminus v$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 zerfällt. Sei o.B.d.A. $f(v) \in G_1$. Sei weiterhin H_i der von $V(G_i) \cup v$ induzierte Teilgraph von G für $i \in \{1, 2\}$. Seien H'_i optimale Orientierungen von H_i , $i \in \{1, 2\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Sei $|V(G_2) \cap D| = 2$.

Durch Analyse der wenigen Möglichkeiten für H_2 erhält man $\text{ecc}_{H'_2}(v) \leq 6$. Siehe Abbildung 5.2 (a). Wir orientieren die Kanten von G entsprechend der Orientierungen H'_1 und H'_2 und erhalten eine Orientierung G' . Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung.

Falls der Pfad vollständig im Teilgraphen $G[V(G_i) \cup v]$ liegt, dann ist mit:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, y) \\ &\leq d_{H_i}(x, y) \\ &\leq 3\gamma(H_i) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1 \end{aligned}$$

der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Sei nun o.B.d.A. $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$. Dann ist mit:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq 3\gamma(H_1) + 1 + 6 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 2) + 7 = 3\gamma(G) + 1 \end{aligned}$$

der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Fall 2: Sei $|V(G_1) \cap D| = 2$.

Durch Analyse der wenigen Möglichkeiten für H_1 , erhält man $\text{ecc}_{H'_1}(v) \leq 5$. Siehe Abbildung 5.2 (b). Wir betrachten den Graphen H_3 , der aus dem Graphen H_2 entsteht durch Ersetzung der Kanten (v, z) durch Pfade (v, z', z) der Länge zwei. Es gilt $\gamma(H_3) \leq \gamma(G) - 1$. Sei H'_3 eine optimale Orientierung von H_3 und H'_2 die Orientierung von H_2 in der die Kanten entsprechend der Orientierung H'_3 orientiert sind. Durch das Einfügen der zusätzlichen Knoten im Graphen H_3 gilt $\text{ecc}_{H'_2}(v) \leq \text{diam}(H'_3) - 2$. Sei nun G' die Orientierung von G in der die Kanten entsprechend der Orientierungen H'_1 und H'_2 orientiert sind. Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung. Falls der Pfad vollständig im Teilgraphen H_2 liegt, dann ist mit:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, y) \\ &\leq d_{H'_3}(x, y) \\ &\leq 3\gamma(H_3) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1 \end{aligned}$$

der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Analog gilt dies, falls $P(x, y)$ vollständig im Teilgraphen H_1 liegt. Sei nun o.B.d.A. $x \in V(G_2)$ und $y \in V(G_1)$. Mit:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &\leq d_{H'_2}(x, v) + 5 \\
 &\leq \text{ecc}_{H'_2}(v) + 5 \\
 &\leq \text{diam}(H'_3) - 2 + 5 \\
 &\leq 3\gamma(H_3) + 1 + 3 \\
 &\leq 3(\gamma(G) - 1) + 4 = 3\gamma(G) + 1
 \end{aligned}$$

führt auch der Fall 2 auf einen Widerspruch.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

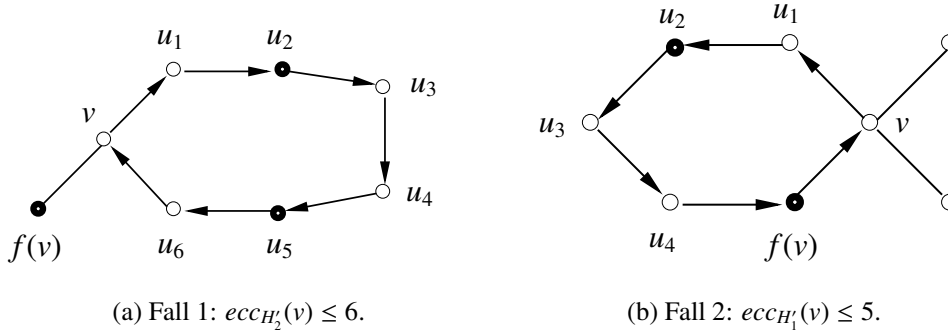


Abbildung 5.2: Die beiden Abbildungen verdeutlichen die Fälle 1 und 2 im Beweis des Lemmas 5.9. Falls die Teilgraphen H_2 beziehungsweise H_1 weitere Knoten enthalten, werden die zugehörigen Pfade jeweils vom kleinerem zum größerem Index orientiert.

Lemma 5.10. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Dann existiert kein Schnittknoten v vom Typ A_i mit $i \geq 4$.*

Beweis. Angenommen, v ist ein Schnittknoten vom Typ A_i mit $i \geq 4$ in einem kleinsten Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Aus Lemma 5.4 folgt, dass $G \setminus v$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 zerfällt. Sei o.B.d.A. $f(v) \in G_1$. Sei weiterhin H_i der von $V(G_i) \cup v$ induzierte Teilgraph von G . Wir zeigen zuerst, dass eine Orientierung H'_1 des Graphen H_1 existiert, welche die Eigenschaften (a) und (b) erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \text{ecc}_{H'_1}^-(v) < \text{ecc}_{H_1}^+(v) &\leq 3\gamma(H_1) + 1 \text{ oder} \\
 \text{ecc}_{H'_1}^-(v) &\leq \text{ecc}_{H_1}^+(v) < 3\gamma(H_1) + 1
 \end{aligned}$$

(b) $diam(H'_1) \leq 3\gamma(G) + 1$.

Wir betrachten dafür den Graphen H_3 , der aus dem Graphen H_1 durch Hinzufügen einer Komponente, bestehend aus einem Kreis der Länge sieben und einem Kreis der Länge sechs, am Knoten v entsteht. Siehe Abbildung 5.3. Da der Knoten v im Graphen G ein Knoten vom Typ A_i mit $i \geq 4$ ist, besitzt der Graph H_3 weniger Kanten als G und ist somit kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Zur Abkürzung bezeichnen wir mit $V(H_1)$ die Menge der Knoten $V(H_3[V(H_1)])$. Sei H'_3 eine optimale Orientierung von H_3 mit:

$$\max_{z \in V(H_1)} d_{H'_3}(z, v) \leq \max_{z \in V(H_1)} d_{H'_3}(v, z).$$

Dann ist $diam(H'_3) \leq 3\gamma(H_3) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1$. Für jeden Knoten $z \in V(H_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'_3}(z, v) &\leq diam(H'_3) - 10 \\ &\leq 3\gamma(H_3) + 1 - 10 \\ &\leq 3(\gamma(H_1) + 3) - 9 = 3\gamma(H_1). \end{aligned}$$

Damit erfüllt die Orientierung des von $V(H_1)$ induzierten Teilgraphen von H'_3 die Eigenschaften (a) und (b).

Ebenso zeigen wir, dass eine Orientierung H'_2 von H_2 existiert, welche die Eigenschaften (c) und (d) erfüllt.

(c) $ecc_{H'_2}^-(v) < ecc_{H'_2}^+(v) \leq 3|V(H_2) \cap D| + 1$ oder
 $ecc_{H'_2}^-(v) \leq ecc_{H'_2}^+(v) < 3|V(H_2) \cap D| + 1$

(d) $diam(H'_2) \leq 3\gamma(G) + 1$.

Wir betrachten dafür den Graphen H_4 , der aus dem Graphen H_2 durch Hinzufügen einer Komponente, bestehend aus zwei Kreisen der Länge sechs, am Knoten v entsteht. Siehe Abbildung 5.3. Da der Knoten v im Graphen G ein Knoten vom Typ A_i ist mit $i \geq 4$ besitzt der Graph H_4 weniger Kanten als G und ist somit kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Zur Abkürzung bezeichnen wir mit $V(H_2)$ die Menge der Knoten $V(H_4[V(H_2)])$. Sei H'_4 eine optimale Orientierung von H_4 mit

$$\max_{z \in V(H_2)} d_{H'_4}(z, v) \leq \max_{z \in V(H_2)} d_{H'_4}(v, z).$$

Die Eigenschaft (d) gilt, da: $diam(H'_4) \leq 3\gamma(H_4) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1$.

Für jeden Knoten $z \in V(H_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'_4}(z, v) &\leq diam(H'_4) - 10 \\ &\leq 3\gamma(H_4) + 1 - 10 \\ &\leq 3(|V(H_2) \cap D| + 3) - 9 = 3|V(H_2) \cap D|. \end{aligned}$$

Damit erfüllt die Orientierung des von $V(H_2)$ induzierten Teilgraphen von H'_4 die Eigenschaften (c) und (d).

Wir wählen eine Orientierung H'_1 , die den Eigenschaften (a) und (b) genügt. Weiterhin wählen wir eine Orientierung H'_2 von H_2 , welche die Bedingungen (c) und (d) erfüllt. Sei weiterhin G' die Orientierung von G , in der alle Kanten entsprechend der Orientierungen H'_1 und H'_2 orientiert sind. Wir betrachten einen diametralen Pfad $P(x, y)$ in G' und unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Sei $x, y \in V(H_i) \cup v$, $i \in \{1, 2\}$.

Dann folgt aus den Eigenschaften (b) und (d), dass der Graph G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 ist.

Fall 2: Sei $x \in V(H_1)$ und $y \in V(H_2)$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_1}(x, v) + d_{H'_2}(v, y) \\ &\leq 3\gamma(H'_1) + 3|V(H_2) \cap D| + 1 \\ &\leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Fall 3: Sei $x \in V(H_2)$ und $y \in V(H_1)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v) + d_{G'}(v, y) \\ &= d_{H'_2}(x, v) + d_{H'_1}(v, y) \\ &\leq 3|V(H_2) \cap D| + 3\gamma(H_1) + 1 \\ &\leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Somit ist G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. □

Lemma 5.11. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Dann besitzt G höchstens einen Schnittknoten v vom Typ A_3 .*

Beweis. Angenommen, G ist ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) mit mindestens zwei Schnittknoten vom Typ A_3 . Für einen Schnittknoten v vom Typ A_3 bezeichnet A_v eine Komponente von $G \setminus v$ mit $|V(A_v) \cap D| = 3$. Wir unterscheiden zwei Arten von Schnittknoten vom Typ A_3 . Sei V_1 die Menge der Schnittknoten vom Typ A_3 von G , so dass für die Komponente G_1 von $G \setminus v$, die den Knoten $f(v)$ enthält, gilt:

$$|V(G_1) \cap D| > 3.$$

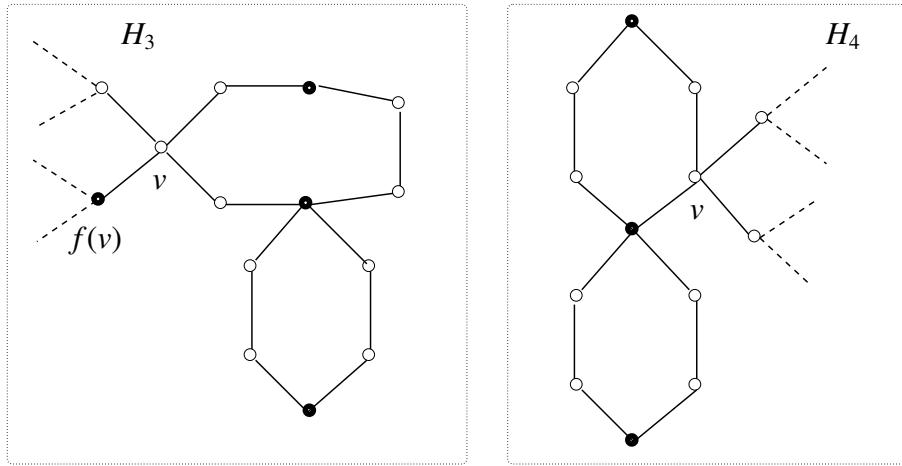


Abbildung 5.3: Die Konstruktion der Graphen H_3 und H_4 im Beweis zum Lemma 5.10.

Mit V_2 bezeichnen wir die Menge der Schnittknoten vom Typ A_3 , die nicht in der Menge V_1 liegen. Betrachten wir zuerst einen Knoten v aus der Menge V_1 . Sei G'_A eine optimale Orientierung von $G[V(A_v) \cup v]$. Durch Analyse der optimalen Orientierungen der unterschiedlichen Teilgraphen in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform mit drei dominierenden Knoten erhält man, dass einer der beiden Punkte (a) oder (b) gilt.

- (a) $d_{G'_A}(v, x) \leq 10, d_{G'_A}(y, v) \leq 7 \quad \forall x, y \in V(A_v)$ oder
 $d_{G'_A}(v, x) \leq 7, d_{G'_A}(y, v) \leq 10 \quad \forall x, y \in V(A_v)$
- (b) $d_{G'_A}(v, x) \leq 9, d_{G'_A}(y, v) \leq 9 \quad \forall x, y \in V(A_v)$.

Für Graphen, welche die Punkte (a) beziehungsweise (b) mit Gleichheit erfüllen, siehe Abbildung 5.4 auf Seite 79.

Wir zeigen: Wenn G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 ist und $v \in V_1$ ein Schnittknoten vom Typ A_3 , dann gilt nicht (b). Angenommen, es gelte der Punkt (b). Sei G' eine Orientierung von G die sich aus einer optimalen Orientierung G'_1 von $G \setminus A_v$ und einer optimalen Orientierung G'_A von $G[V(A_v) \cup v]$ zusammensetzt. Sei $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung. Falls $x, y \in V(G'_1)$, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, y) \\ &\leq 3\gamma(G') + 1 \leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Falls $x, y \in V(A_v)$, dann erhält man mit $\gamma(G) \geq 6$:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'_A}(x, y) \\ &\leq d_{G'_A}(x, v) + d_{G'_A}(v, y) \\ &\leq 18 \leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Falls o.B.d.A. $x \in V(G'_1)$ und $y \in V(A_v)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'_1}(x, v) + d_{G'_A}(v, y) \\ &\leq 3\gamma(G'_1) + 1 + 9 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 3) + 10 = 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Somit ist G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Wir haben gezeigt, dass der Punkt (a) gilt.

Für Knoten $v \in V_2$ gehen wir ähnlich vor. Sei G'_A eine optimale Orientierung von $G[V(A_v) \cup v]$. Durch Analyse der optimalen Orientierungen der unterschiedlichen Teilgraphen in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform mit drei dominierenden Knoten erhält man, dass einer der drei Punkte (c), (d) oder (e) gilt.

$$(c) \quad \begin{aligned} d_{G'_A}(v, x) \leq 10, d_{G'_A}(y, v) \leq 6 \quad \forall x, y \in V(A_v) \quad \text{oder} \\ d_{G'_A}(v, x) \leq 6, d_{G'_A}(y, v) \leq 10 \quad \forall x, y \in V(A_v) \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} d_{G'_A}(v, x) \leq 9, d_{G'_A}(y, v) \leq 7 \quad \forall x, y \in V(A_v) \quad \text{oder} \\ d_{G'_A}(v, x) \leq 7, d_{G'_A}(y, v) \leq 9 \quad \forall x, y \in V(A_v) \end{aligned}$$

$$(e) \quad d_{G'_A}(v, x) \leq 8, d_{G'_A}(y, v) \leq 8 \quad \forall x, y \in V(A_v).$$

Für Graphen, welche die Punkte (c), (d) beziehungsweise (e) mit Gleichheit erfüllen, siehe Abbildung 5.5 auf Seite 80.

Wir zeigen: Wenn G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 ist, und $v \in V_2$ ein Schnittknoten vom Typ A_3 , dann gelten weder (d) noch (e). Angenommen, es gelte einer der Punkte (d) oder (e). Sei H der von $V(G) \setminus V(A_v)$ induzierte Graph, mit zusätzlichem Kreis der Länge sechs am Knoten v . Weiterhin ersetzen wir in H die Kanten (v, z) durch Pfade (v, z', z) der Länge zwei. Sei H' eine optimale Orientierung von H . Sei G' eine Orientierung von G in der die Kanten entsprechend der Orientierung H' orientiert sind und entsprechend einer Orientierung G'_A von $G[V(A_v) \cup v]$ die (d) oder (e) erfüllt. Sei weiterhin $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in dieser Orientierung. Falls $x, y \in V(G) \setminus V(A_v)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, y) \\ &\leq d_{H'}(x, y) \\ &\leq 3\gamma(H) + 1 \leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Falls $x, y \in V(A_v)$, dann erhält man mit $\gamma(G) \geq 6$:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'_A}(x, y) \\ &\leq d_{G'_A}(x, v) + d_{G'_A}(v, y) \\ &\leq 16 \leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Falls o.B.d.A. $x \in V(G) \setminus V(A_v)$ und $y \in V(A_v)$, dann ist:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) &\leq d_{G'}(x, v) + 9 \\
 &\leq d_{H'}(x, v) - 1 + 9 \\
 &\leq \text{diam}(H') - 5 + 8 \\
 &\leq 3\gamma(H) + 1 + 3 \\
 &\leq 3(\gamma(G) - 1) + 4 = 3\gamma(G) + 1.
 \end{aligned}$$

Somit ist G kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Wir haben gezeigt, dass der Punkt (c) gilt.

Im Folgenden zeigen wir, dass der Graph G höchstens einen Schnittknoten vom Typ A_3 enthält. Angenommen, im Graphen G existieren zwei Knoten v_1, v_2 mit $v_1 \neq v_2$ vom Typ A_3 . Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Seien $v_1, v_2 \in V_1$.

Sei H der von $V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ induzierte Teilgraph von G . Seien weiterhin H', A'_{v_1}, A'_{v_2} optimale Orientierungen von $H, G[V(A_{v_1}) \cup v]$ beziehungsweise $G[V(A_{v_2}) \cup v]$ mit:

$$\begin{aligned}
 d_{A'_{v_1}}(v, x) \leq 10, \quad d_{A'_{v_1}}(y, v) \leq 7 \quad \forall x, y \in V(A_{v_1}) \quad \text{und} \\
 d_{A'_{v_2}}(v, x) \leq 10, \quad d_{A'_{v_2}}(y, v) \leq 7 \quad \forall x, y \in V(A_{v_2}).
 \end{aligned}$$

Sei G' die Orientierung von G in der die Kanten entsprechend der Orientierungen H', A'_{v_1} und A'_{v_2} orientiert sind. Wir betrachten einen diametralen Pfad $P(x, y)$ in dieser Orientierung. Für $x \in V(H)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 d_{G'}(x, y) &\leq \text{diam}(H') + 10 \\
 &\leq 3\gamma(H') + 1 + 10 \\
 &\leq 3(\gamma(G) - 6) + 11 \leq 3\gamma(G) + 1.
 \end{aligned}$$

Analog gilt diese Abschätzung für $y \in V(H)$. Sei nun o.B.d.A. $x \in V(A_{v_1})$ und $y \in V(A_{v_2})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &= d_{G'}(x, v_1) + d_{G'}(v_1, v_2) + d_{G'}(v_2, y) \\
 &\leq 7 + d_{H'}(v_1, v_2) + 10 \\
 &\leq 3\gamma(H) + 1 + 17 \\
 &\leq 3(\gamma(G) - 6) + 18 = 3\gamma(G).
 \end{aligned}$$

Dann ist G jedoch kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Damit ist $|V_1| \leq 1$.

Fall 2: Seien $v_1, v_2 \in V_2$.

Sei H der von $V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ induzierte Teilgraph von G bei dem

zusätzlich an den Knoten v_1 und v_2 ein Kreis der Länge sechs angehängt wird, und die Kanten (v_i, z) , $i \in \{1, 2\}$ durch Pfade (v_i, z', z) , $i \in \{1, 2\}$ der Länge zwei ersetzt werden. Seien weiterhin H', A'_{v_1}, A'_{v_2} optimale Orientierungen von $H, G[V(A_{v_1}) \cup v]$ beziehungsweise $G[V(A_{v_2}) \cup v]$ mit:

$$\begin{aligned} d_{A'_{v_1}}(v, x) &\leq 10, & d_{A'_{v_1}}(y, v) &\leq 6 & \forall x, y \in V(A_{v_1}) & \text{ und} \\ d_{A'_{v_2}}(v, x) &\leq 10, & d_{A'_{v_2}}(y, v) &\leq 6 & \forall x, y \in V(A_{v_2}). \end{aligned}$$

Sei G' die Orientierung von G in der die Kanten entsprechend der Orientierungen H', A'_{v_1} und A'_{v_2} orientiert sind. Wir betrachten einen diametralen Pfad $P(x, y)$ in dieser Orientierung. Für $x, y \in V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{G'}(x, y) &\leq \text{diam}(H') \\ &\leq 3\gamma(H') + 1 \leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Für $x \in V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ und $y \in V(A_{v_1})$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &\leq d_{G'}(x, v_1) + d_{G'}(v_1, y) \\ &\leq d_{H'}(x, v_1) - 1 + 10 \\ &\leq \text{diam}(H') - 5 + 9 \\ &\leq 3\gamma(H) + 1 + 4 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 2) + 5 = 3\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung gilt, falls $y \in V(A_{v_2})$, oder falls $y \in V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ und $x \in V(A_{v_i})$, $i \in \{1, 2\}$ ist. Es bleibt der Fall zu betrachten, dass o.B.d.A. $x \in V(A_{v_1})$ und $y \in V(A_{v_2})$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &\leq d_{G'}(x, v_1) + d_{G'}(v_1, v_2) + d_{G'}(v_2, y) \\ &\leq 6 + d_{H'}(v_1, v_2) - 2 + 10 \\ &\leq \text{diam}(H') - 10 + 14 \\ &\leq 3\gamma(H) + 1 + 4 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 2) + 5 = 3\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Dann ist G jedoch kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Damit ist $|V_2| \leq 1$.

Fall 3: Sei o.B.d.A. $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.

Sei H der von $V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ induzierte Teilgraph von G , an dem zusätzlich an v_2 ein Kreis der Länge sechs angehängt wird, und die Kanten (v_2, z) durch Pfade (v_2, z', z) der Länge zwei ersetzt werden. Seien weiterhin H', A'_{v_1}, A'_{v_2} optimale Orientierungen von $H, G[V(A_{v_1}) \cup v]$ beziehungsweise $G[V(A_{v_2}) \cup v]$ mit:

$$\begin{aligned} d_{A'_{v_1}}(v, x) &\leq 10, & d_{A'_{v_1}}(y, v) &\leq 7 & \forall x, y \in V(A_{v_1}) & \text{ und} \\ d_{A'_{v_2}}(v, x) &\leq 10, & d_{A'_{v_2}}(y, v) &\leq 6 & \forall x, y \in V(A_{v_2}). \end{aligned}$$

Sei G' die Orientierung von G in der die Kanten entsprechend der Orientierungen H' , A'_{v_1} und A'_{v_2} orientiert sind. Wir betrachten einen diametralen Pfad $P(x, y)$ in dieser Orientierung. Für $x \in V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ gilt:

$$\begin{aligned} d_{G'}(x, y) &\leq \text{diam}(H') + 10 \\ &\leq 3\gamma(H) + 1 + 10 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 4) + 11 = 3\gamma(G) - 1. \end{aligned}$$

Für $y \in V(G) \setminus \{V(A_{v_1}) \cup V(A_{v_2})\}$ gilt die Abschätzung analog. Sei nun $x \in V(A_{v_1})$ und $y \in V(A_{v_2})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) \leq d_{G'}(x, y) &\leq d_{G'}(x, v_1) + d_{G'}(v_1, v_2) + d_{G'}(v_2, y) \\ &\leq 7 + d_{H'}(v_1, v_2) - 1 + 10 \\ &\leq \text{diam}(H') - 5 + 16 \\ &\leq 3\gamma(H) + 1 + 11 \\ &\leq 3(\gamma(G) - 4) + 12 = 3\gamma(G). \end{aligned}$$

Für $y \in V(A_{v_1})$ und $x \in V(A_{v_2})$ kann der minimale orientierte Durchmesser von G analog abgeschätzt werden. Dann ist G jedoch kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Damit ist $|V_1| = 0$ oder $|V_2| = 0$.

Mit den obigen drei Fällen haben wir gezeigt, dass $|V_1| + |V_2| \leq 1$ gilt. Im Graphen G existiert höchstens ein Schnittknoten vom Typ A_3 . \square

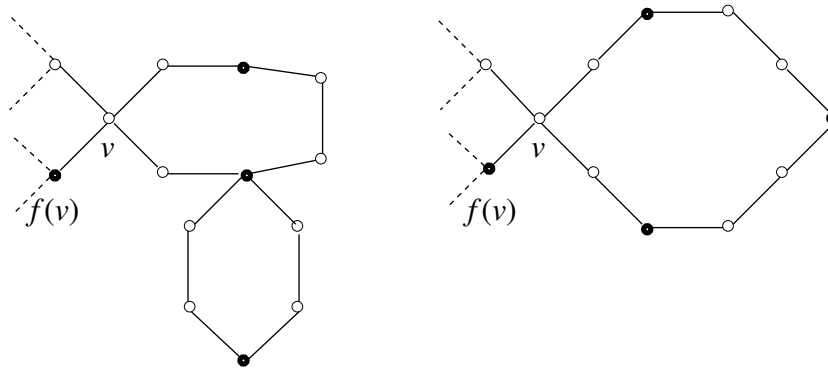


Abbildung 5.4: Der Knoten v ist ein Knoten vom Typ A_3 . Abgebildet sind zwei Graphen, welche die Punkte (a) beziehungsweise (b) im Beweis zum Lemma 5.11 erfüllen.

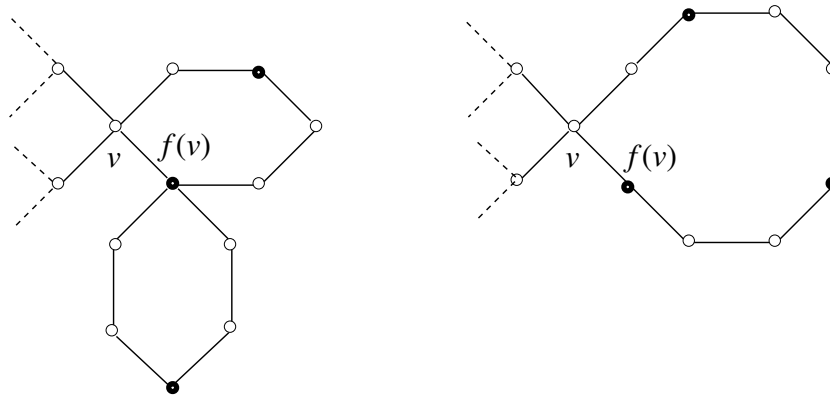


Abbildung 5.5: Der Knoten v ist ein Knoten vom Typ A_3 . Abgebildet sind zwei Graphen, welche die Punkte (c) beziehungsweise (e) im Beweis zum Lemma 5.11 erfüllen. Wird im links abgebildeten Graphen ein Kreis der Länge sechs am anderen dominierenden Knoten hinzugefügt, erhält man einen Graphen, der den Punkt (d) erfüllt.

5.2.4 Zweite Standardform

Definition 5.12 (zweite $\{C_3, C_4\}$ -Standardform). Das Paar (G, D) ist in **zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform**, wenn das Paar in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform ist, der Graph höchstens einen Schnittknoten vom Typ A_3 besitzt und alle anderen Schnittknoten vom Typ B_1 sind.

Lemma 5.13. Für jeden Graphen in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G', D') existiert ein Tupel (G, D) in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform mit:

$$\gamma(G) = |D| \leq \gamma(G') = |D'|$$

und

$$\infty > \text{diam}_{\min}(G) \geq \text{diam}_{\min}(G').$$

Beweis. Das Lemma folgt direkt aus den Lemmata 5.6, 5.9, 5.10 und 5.11. \square

5.3 Diametraler Pfad

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Struktur eines diametralen Pfades in einem kleinsten Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Ähnlich wie im Abschnitt 4.3 zeigen wir, dass jeder dominierende Knoten, der nicht auf einem diametralen Pfad P liegt, höchstens einen Nachbarknoten auf dem Pfad P besitzt.

5.3.1 Standardpfade

Definition 5.14 (Standardpfad, Standardteilpfad). Einen diametralen Pfad $P(x, y)$ einer optimalen Orientierung eines Graphen in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) mit einem Schnittknoten v vom Typ A_3 und Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2 von $G \setminus v$ mit $|V(G_2) \cap D| = 3$ nennen wir **Standardpfad**, wenn:

$$V(P(x, y)) \cap V(G_1) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad V(P(x, y)) \cap V(G_2) \neq \emptyset.$$

Einen Teilpfad $Q(a, b)$ eines Standardpfades nennen wir **Standardteilpfad**, wenn:

$$V(Q(a, b)) \cap \{V(G_2) \cup v\} = \emptyset.$$

Für einen Graphen ohne Schnittknoten vom Typ A_3 heißt jeder diametrale Pfad $P(x, y)$ Standardpfad und jeder Teilpfad Q eines diametralen Pfades Standardteilpfad.

Lemma 5.15. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) und v ein Schnittknoten vom Typ A_3 . Dann existiert in jeder optimalen Orientierung G' von G ein Standardpfad $P(x, y)$.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Sei v ein Schnittknoten vom Typ A_3 in einem kleinsten Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Seien G_1 und G_2 die Zusammenhangskomponenten von $G \setminus v$ mit $|V(G_2) \cap D| = 3$. Sei G' eine optimale Orientierung von G , so dass für jeden diametralen Pfad $P(x, y)$ gilt:

$$V(P(x, y)) \cap V(G_2) = \emptyset.$$

Wir betrachten zuerst:

Fall 1: $f(v) \in V(G_1)$.

Sei H'_1 eine optimale Orientierung von $G[V(G_1) \cup v]$ mit $ecc_{H'_1}^-(v) \leq ecc_{H'_1}^+(v)$. Sei H' die Orientierung von G , die sich aus der Orientierung H'_1 und Orientierungen der Kanten von G_2 zusammensetzt. So eine Orientierung existiert, siehe den Beweis von Lemma 5.11. Im Fall von $ecc_{H'_1}^-(v) < 3\gamma(G_1) + 1$, ist $diam(H') < diam(G')$. Somit ist G' keine optimale Orientierung von G .

Es bleibt der Fall $ecc_{H_1}^-(v) = 3\gamma(G_1) + 1$ zu betrachten. Sei $P(x, y)$ ein diametrales Paar in dieser Orientierung. Für $x, y \in V(G_1)$ erhalten wir $d_{H'}(x, y) \leq 3\gamma(G_1) + 1 < 3\gamma(G) + 1$. Sei nun $x \in V(G_1)$ und $y \in V(G_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_{H'}(x, y) &\leq d_{H'}(x, v) + 10 \\ &\leq 3\gamma(G_1) + 1 + 10 = 3\gamma(G) + 2. \end{aligned}$$

Falls $d_{H'}(x, y) \leq 3\gamma(G) + 1$, dann ist G kein Gegenbeispiel. Im anderen Fall $d_{H'}(x, y) = 3\gamma(G) + 2$ ist H' eine optimale Orientierung mit einem diametralen Pfad $P(x, y)$ mit $V(P(x, y)) \cap V(G_2) \neq \emptyset$. Dieses ist ein Widerspruch zur Annahme.

Fall 2: $f(v) \in V(G_2)$.

Dieser Fall kann analog zum Fall 1 gezeigt werden. Anstelle einer optimalen Orientierung des Graphen $G[V(G_1) \cup v]$, betrachtet man jedoch den Graphen H_1 , welcher aus dem Graphen $G[V(G_1) \cup v]$ durch Hinzufügen eines Kreises der Länge sechs am Knoten v und Ersetzung der Kanten (v, z) durch Pfade (v, z', z) der Länge zwei konstruiert wird.

□

5.3.2 Dominierende Knoten vom Typ 2

Ähnlich wie im Kapitel 4 betrachten wir die Struktur diametraler Pfade genauer. Das Lemma 5.15 erlaubt es, ausschließlich Standardpfade zu betrachten. Wir verwenden die Definition der Typ 1, Typ 2 und Typ 3 Knoten analog zur Definition 4.16 auf Seite 29.

Da in diesem Kapitel $\{C_3, C_4\}$ -freie Graphen untersucht werden, existieren keine Knoten vom Typ 1.

Lemma 5.16. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Sei $P(x, y)$ ein Teilpfad eines Standardteilpfades einer optimalen Orientierung von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$. Dann existiert kein Knoten vom Typ 2 bezüglich $P(x, y)$.*

Beweis. Der Beweis kann analog zum Beweis des Lemmas 4.18 geführt werden. □

Lemma 5.17. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Sei weiterhin $P(x, y) = (x = v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = y)$ ein Teilpfad eines Standardteilpfades einer optimalen Orientierung von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \emptyset$. Dann ist $f(v_i) \neq f(x)$ für $i \geq 2$ und $f(v_i) \neq f(y)$ für $i \leq k - 1$.*

Beweis. Da G weder einen C_3 noch einen C_4 enthält, gilt $f(v_i) \neq f(x)$ für $2 \leq i \leq 3$ und $f(v_i) \neq f(y)$ für $k - 2 \leq i \leq k - 1$. Die anderen Fälle können analog zum Lemma 4.19 bewiesen werden. □

5.3.3 Dritte Standardform

Um das Lemma 5.20 zu beweisen, benötigen wir eine dritte Standardform.

Definition 5.18 (dritte $\{C_3, C_4\}$ -Standardform). Das Tupel (G, D) ist in **dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform**, wenn gilt:

- (G, D) ist in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform und
- im Graphen G existiert kein induzierter Pfad $Q = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ mit $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ und $v_2 \in D$, so dass der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ stark zusammenhängend ist.

Lemma 5.19. Für jeden Graphen in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) existiert ein Graph G' in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G', D') mit

$$\gamma(G') \leq \gamma(G)$$

und

$$\text{diam}_{\min}(G') \geq \text{diam}_{\min}(G).$$

Beweis. Sei das Tupel (G, D) in zweiter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform und angenommen, es existiert ein Pfad $Q = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ in G mit $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ und $v_2 \in D$, so dass der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ stark zusammenhängend ist.

Wir konstruieren einen Graphen G' aus dem Graphen G durch Entfernen der Knoten v_1 und v_2 und Ersetzung aller Kanten (v_3, z) mit $z \in N(v_3) \setminus v_2$ durch Pfade (v_3, z', z) der Länge zwei. Der so konstruierte Graph G' ist stark zusammenhängend. Die Menge $D' = (D \cup v_3) \setminus v_2$ bildet eine dominierende Menge für G' . Es gilt $\gamma(G') \leq \gamma(G)$. Zu zeigen bleibt, dass der minimale orientierte Durchmesser von G' nicht kleiner als der minimale orientierte Durchmesser von G ist. Sei H' eine optimale Orientierung von G' . Sei weiterhin H die Orientierung von G in der alle Kanten entsprechend der Orientierung H' gerichtet sind. Die Kanten des Pfades Q seien von v_i nach v_{i+1} , $0 \leq i \leq 2$ gerichtet. Dann gilt für alle Knoten $x, y \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$

$$d_H(x, y) \leq d_{H'}(x, y).$$

Sei nun $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in H mit $x = v_1$.

Sei $P(x, y) = (v_1, v_2, v_3, z_1, u_1, \dots, y)$. Da der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ stark zusammenhängend ist, gilt $\deg(v_3) \geq 3$. Somit existiert im Graphen G' ein Knoten $z'_2 \in N(v_3) \setminus v_2$ mit $\deg(z'_2) = 2$, so dass die Kante (z'_2, v_3) vom Knoten z'_2 zum Knoten v_3 gerichtet ist. Dann ist aber $d_{H'}(z'_2, y) = 3 + d_{H'}(z_1, y) = |P(x, y)|$.

Wenn $P(x, y)$ ein diametraler Pfad in H ist mit $x = v_2$ und $y = v_1$, kann analog argumentiert werden. Somit gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(G').$$

□

5.3.4 Dominierende Knoten vom Typ 3

In diesem Abschnitt betrachten wir dominierende Knoten vom Typ 3 und zeigen ein zum Lemma 4.24 analoges Lemma.

Lemma 5.20. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Sei $P(x, y) = (x, x_1, x_2, \dots, x_k, y)$ ein Teilpfad eines Standardteilpfades einer optimalen Orientierung von G .*

Dann existiert im Graphen G kein Knoten z_1 vom Typ 3 bezüglich $P(x_{i_1}, x_{i_2})$ und bezüglich $P(x_{j_1}, x_{j_2})$ mit $i_1 < i_2 < j_1 < j_2$ und $V(P(x_{i_1}, x_{i_2})) \cap D = \emptyset$, $V(P(x_{j_1}, x_{j_2})) \cap D = \emptyset$ und $z_1 \neq f(x_{i_1})$, $z_1 \neq f(x_{i_2})$, $z_1 \neq f(x_{j_1})$, $z_1 \neq f(x_{j_2})$.

Weiterhin existiert im Graphen G kein Knoten $z_2 \in V(P(x, y))$ vom Typ 3 bezüglich $P(x_{i_1}, x_{i_2})$ mit $V(P(x_{i_1}, x_{i_2})) \cap D = \emptyset$ und $z_2 \neq f(x_{i_1})$, $z_2 \neq f(x_{i_2})$.

Beweis. Da der Beweis sich an einigen Stellen vom Beweis des Lemmas 4.24 unterscheidet, wird er an dieser Stelle vollständig geführt. Der wesentliche Unterschied zum Beweis des Lemmas 4.24 besteht darin, dass ausgeschlossen werden muss, dass durch die Kontraktion von Teilgraphen ein Kreis der Länge drei oder vier entsteht.

Angenommen, im Graphen G existiert ein Knoten z der die Bedingungen des Knotens z_1 oder die Bedingungen des Knotens z_2 erfüllt. Falls mehrere solcher Knoten existieren, wählen wir den Knoten z so, dass Nachbarknoten v und w von z auf $P(x, y)$ mit kleinstem Abstand auf dem Pfad $P(x, y)$ existieren.

Wir bezeichnen mit $v = v_0, v_1, \dots, v_m = w$ die Knoten des Teilpfades von $P(x, y)$ vom Knoten v zum Knoten w . Da der Graph G in erster $\{C_3, C_4\}$ -Standardform ist, liegt der Knoten v_1 nicht in der dominierenden Menge D . Weiter gilt: Im Graphen $G \setminus \{E(P(v, w)) \cup \{(v, z), (w, z)\}\}$ existieren keine Pfade von v_1 nach v , von v_1 nach w oder von v_1 zu z . Ansonsten könnte die Kante (v, v_1) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören. Siehe dazu auch die Fälle 3 bis 5 im Beweis zum Lemma 4.18 auf Seite 30.

Der Knoten v_1 wird jedoch von einem Knoten $f(v_1)$ dominiert. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $f(v_1) \neq v_2$.

Sei t der größte Index, so dass der Knoten v_t im Graphen $H = S(G \setminus (v, v_1), v_1)$ liegt. Es gilt $t \neq 1$, da der Knoten v_1 kein Schnittknoten des Graphen G ist. Da die Kante (v, v_1) nicht entfernt werden kann, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören und der Knoten v kein Schnittknoten von G ist, liegt der Knoten w nicht in der starken Zusammenhangskomponente H . Aus dem gleichen Grund existieren im Graphen $G \setminus \{(v, v_1), (v_t, v_{t+1})\}$ keine Pfade von H zu v, w oder z .

Wir betrachten den Teilpfad $P(v, v_t)$ von $P(x, y)$. Da der Knoten z so gewählt wurde, dass der Abstand $d_{P(x, y)}(v, w)$ minimal ist, existiert kein Knoten, welcher nicht auf dem Pfad $P(x, y)$ liegt, der mehr als einen Knoten aus v_1, v_2, \dots, v_t

dominiert. Aus den bisher gezeigten Lemmata 5.16 und 5.17 folgt, dass für jeden Knoten $u \in V(P(v_1, v_t))$ einer der folgenden Punkte gilt:

- a) $u \in D$,
- b) $f(u) \in V(P(x, y))$ und $d_{P(x, y)}(u, f(u)) = 1$,
- c) $f(u) \notin V(P(x, y))$ ist ein Knoten vom Typ 3 bezüglich eines Teilpfades von $P(x, y)$, und $f(u) \neq f(u')$ für $u \neq u'$, $u' \in \{v_1, \dots, v_t\}$.

Damit können wir die Länge des Pfades $P(v_1, v_t)$ abschätzen. Jeder Knoten der dominierenden Menge D auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$ dominiert höchstens zwei weitere Knoten auf dem Pfad. Jeder andere Knoten der dominierenden Menge im Teilgraphen H besitzt höchstens einen Nachbarn auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$. Insbesondere dominiert der Knoten $f(v_1)$ nur den Knoten v_1 auf dem Pfad $P(v_1, v_t)$. Damit gilt:

$$t - 1 \leq 1 + 3(|V(H) \cap D| - 1) = 3|V(H) \cap D| - 2.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1.1: Sei $v_t \in D$. Da $f(v_1) \neq v_t$, ist $|V(H) \cap D| \geq 2$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G durch Schrumpfen des Teilgraphen H zu einer Kante (v_1, v_t) entsteht. Durch diese Operation entsteht weder ein Kreis der Länge drei noch ein Kreis der Länge vier. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G) + 1.$$

Wir können folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 2 \\ &\leq 3\gamma(G') + 1 + 3|V(H) \cap D| - 3 \\ &\leq 3(\gamma(G) + 1) - 2 \\ &= 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Damit ist ein Widerspruch konstruiert.

Fall 1.2: Sei $v_t \notin D$ und $f(v_t) \in V(H)$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G durch Entfernen des Teilgraphen H und Einfügen eines Pfades $(v, u_1, u_2, u_3, v_{t+1})$ der Länge vier entsteht. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G) + 1.$$

Es gilt die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 3 \\ &\leq 3\gamma(G') + 1 + 3|V(H) \cap D| - 4 \\ &\leq 3(\gamma(G') + |V(H) \cap D|) - 3 \\ &\leq 3(\gamma(G) + 1) - 3 = 3\gamma(G). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch.

Fall 1.3: Sei $v_t \notin D$ und $f(v_t) \notin V(H)$. Da t so gewählt wurde, dass H ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph ist, gilt $f(v_t) = v_{t+1}$. Wir betrachten den Graphen G' , der aus dem Graphen G durch Entfernen des Teilgraphen $H \setminus v_1$ und Einfügen einer Kante (v_1, v_{t+1}) entsteht. Durch diese Konstruktion entsteht kein Kreis der Länge drei oder vier. Für den Graphen G' gilt:

$$\gamma(G') + |V(H) \cap D| \leq \gamma(G).$$

Es gilt die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\min}(G) &\leq \text{diam}_{\min}(G') + t - 2 \\ &\leq 3\gamma(G') + 1 + 3|V(H) \cap D| - 3 \\ &\leq 3\gamma(G) - 2. \end{aligned}$$

Wir erhalten auch in diesen Fall einen Widerspruch. Zu zeigen bleibt der Fall 2.

Fall 2: $f(v_1) = v_2$.

Wir betrachten zuerst den Fall $\deg(v_1) > 2$. Da der Graph G in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform ist, kann der Knoten v_1 kein Schnittknoten in G sein. Sei t der größte Index, so dass der Knoten v_t im Graphen $H = S(G \setminus (v, v_1), v_1)$ liegt. Falls ein Knoten $z' \in V(H) \cap D$ existiert, der nicht auf dem Pfad $P(x, y)$ liegt, dann dominiert z' höchstens einen Knoten des Pfades $P(x, y)$. Damit gilt:

$$t - 1 \leq 1 + 3(|V(H) \cap D| - 1) = 3|V(H) \cap D| - 2.$$

In diesem Fall können wir analog zum Fall 1 argumentieren. Angenommen, es liegt jeder dominierende Knoten der Menge $V(H) \cap D$ auf dem Pfad $P(x, y)$. Offenbar ist dann der Graph G' , der aus dem Graphen G durch Entfernung der Knoten $V(H) \setminus V(P(x, y))$ entsteht, ein kleineres Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Im Folgenden können wir annehmen, dass der Knotengrad vom Knoten v_1 zwei beträgt. Angenommen, der Graph $G' = G \setminus v_1$ ist stark zusammenhängend. Da ein diametrales Paar (a, b) in G existiert mit $v_1 \neq a$ und $v_1 \neq b$, ist der minimale orientierte Durchmesser von G' nicht kleiner als der minimale orientierte Durchmesser von G . Das ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von G . Somit ist der Graph $G \setminus v_1$ nicht stark zusammenhängend. Sei t der kleinste Index, so dass die Kante (v_t, v_{t+1}) eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.1: Sei $t \geq 3$. Das heißt, die Kante (v_2, v_3) ist keine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Sei $H = S(G \setminus v_1, v_2)$. Da der Knoten v_1 nicht entfernt werden kann, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören, existiert im Graphen $G \setminus \{(v, v_1), (v_t, v_{t+1})\}$ kein Pfad von einem Knoten aus H zum Knoten z . Analog zum Fall 1 kann dann jedoch durch Schrumpfung des Teilgraphen H ein Widerspruch konstruiert werden.

Fall 2.2: Sei $t = 2$. Das heißt, die Kante (v_2, v_3) ist eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Falls $\deg(v_2) > 2$, dann ist der Knoten v_2 ein Schnittpunkt vom Typ B_1 . Das führt auf einen Widerspruch zur Minimalität von G , deshalb ist $\deg(v_2) = 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.2.1: Sei die Kante (v_3, v_4) eine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Da der Knoten v_3 kein Schnittpunkt ist, gilt: $\deg(v_3) = 2$. Die Knoten v und w sind keine Schnittpunkte in G , deshalb ist im Fall von $w = v_4$ der Graph $G_1 = G \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ stark zusammenhängend und es gilt: $\text{diam}_{\min}(G) \leq \text{diam}_{\min}(G_1) + 3$. Mit $\gamma(G') \leq \gamma(G) - 1$ erhalten wir einen Widerspruch zur Minimalität von G .

Im Fall von $w = v_5$, existiert ein Pfad in $G \setminus (v_4, v_5)$ von $f(v_4)$ zum Knoten v_5 . Dann kann jedoch die Kante (v_4, v_5) entfernt werden, ohne den starken Zusammenhang von G zu zerstören.

Sei nun $w = v_t$ mit $t \geq 6$. Dann können wir jedoch durch Schrumpfen des Pfades $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ zu einer Kante (v, v_4) ein kleineres Gegenbeispiel konstruieren. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von G .

Fall 2.2.2: Sei die Kante (v_3, v_4) keine Brücke im Graphen $G \setminus v_1$. Falls der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ stark zusammenhängend ist, dann liefert der Pfad $Q = (v, v_1, v_2, v_3)$ in G einen Widerspruch zu G in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform.

Angenommen, der Graph $G \setminus \{v_1, v_2\}$ enthält Brücken. Sei $H = S(G \setminus v_1, v_3)$. Da der Knoten v_3 kein Schnittpunkt von G ist, liegt die Kante (v_3, v_4) im Graphen H . Sei s der größte Index, so dass der Knoten v_s im Graphen H liegt. Im Graphen $G \setminus \{(v, v_1), (v_s, v_{s+1})\}$ existieren keine Pfade von einem Knoten in H zum Knoten z . Analog zum Fall 1 entsteht durch Schrumpfung des Teilgraphen H ein kleineres Gegenbeispiel zum Theorem 5.1.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 5.21. *Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) und $P(x, y)$ ein Teilpfad eines Standardteilpfades in einer optimalen Orientierung H von G mit $V(P(x, y)) \cap D = \{x, y\}$. Sei M die Menge der Knoten vom Typ 3 bezüglich des maximalen Teilpfades Q von $P(x, y)$ mit $V(Q) \cap D = \emptyset$. Dann ist $d_H(x, y) = 3 + |M|$.*

Beweis. Dieses Lemma ist eine direkte Folgerung der Lemmata 5.16, 5.17 und 5.20. □

5.3.5 Hauptbeweis

Lemma 5.22. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) und v ein Schnittknoten vom Typ A_3 . Wir bezeichnen mit G_1 und G_2 die Zusammenhangskomponenten von $G \setminus v$, so dass o.B.d.A. $|V(G_2) \cap D| = 3$. Wenn $f(v) \in V(G_2)$ ist, dann existiert eine Orientierung H von G mit:

$$\begin{aligned} \min\{ \max_{z \in V(G_1)} d_H(z, v), \max_{z \in V(G_1)} d_H(v, z) \} &\leq 3(|D| - 3) \quad \text{und} \\ \max_{x, y \in V(G_1) \cup v} d_H(x, y) &\leq 3(|D| - 3) + 4. \end{aligned}$$

Beweis. Angenommen, es existiert keine solche Orientierung. Da der Graph G das kleinste Gegenbeispiel ist, ist der Graph G'_1 , der aus dem Graphen G_1 durch Hinzufügen eines Kreises der Länge sechs am Knoten v entsteht kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1. Für den Graphen G'_1 existiert eine optimale Orientierung H'_1 mit:

$$\begin{aligned} ecc_{H'_1}^-(v) &\leq \text{diam}(H'_1) - 5 \\ &\leq 3\gamma(G'_1) + 1 - 5 \\ &\leq 3(|V(G_1) \cap D| + 2) - 4 \\ &= 3|V(G_1) \cap D| + 2 \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation erhalten wir $ecc_{H'_1}^+(v) \leq 3|V(G_1) \cap D| + 2$.

Sei H eine optimale Orientierung von G mit $ecc_H^-(v) \leq 3|V(G_1) \cap D| + 2$ und $ecc_H^+(v) \leq 3|V(G_1) \cap D| + 2$. Seien $Q^-(z_1, v)$ und $Q^+(v, z_2)$ Pfade in G mit:

$$|Q^-(z_1, v)| = ecc_H^-(v) \quad \text{und} \quad |Q^+(v, z_2)| = ecc_H^+(v).$$

Sei $P(x, y)$ ein diametraler Standardpfad in der Orientierung H . Sei weiterhin $D_1 = V(P(x, y)) \cap V(G_1) \cap D$ und $D_2 = D \setminus \{D_1 \cup V(G_2)\}$.

Falls $|D_2| \geq 1$ und o.B.d.A. $x \in V(G_1)$, $y \in V(G_2)$ dann können wir die Länge des Pfades $P(x, y)$ abschätzen durch:

$$\begin{aligned} d_H(x, y) &= d_H(x, v) + d_H(v, y) \\ &\leq 2 + 3(|D_1| - 1) + |D_2| + 3 + 10 \\ &\leq 3|D_1| + |D_2| + 12 \\ &\leq 3\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Je nach Orientierung der Kanten in der Komponente G_2 können beide Pfade $Q^-(z_1, v)$ und $Q^+(v, z_2)$ Teil eines diametralen Pfades sein. Sei nun $|D_2| = 0$, dann liegt jeder Knoten der Menge D_1 auf dem Pfad $Q^-(z_1, v)$ und auf dem Pfad $Q^+(v, z_2)$. Seien $z_1 = q_1, q_2, \dots, q_s = v$ die Knoten des Pfades $Q^-(z_1, v)$ und $v = p_1, p_2, \dots, p_t = z_2$ die Knoten des Pfades $Q^+(v, z_2)$. Weiterhin bezeichnen wir mit $q_1^D, \dots, q_{|D_1|}^D$ und $p_1^D, \dots, p_{|D_1|}^D$ die dominierenden Knoten auf den Pfaden $Q^-(z_1, v)$ und $Q^+(v, z_2)$.

Bei der Betrachtung der verschiedenen Fälle benutzen wir folgende allgemeine Eigenschaft. Sei $Q(v, z)$ ein kürzester Pfad von v zu einem Knoten z in einer Orientierung H eines kleinsten Gegenbeispiels zum Theorem 5.1 in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform (G, D) . Wenn die Bedingung

$$(\star) \quad |d_H(v, x^D) - d_H(v, y^D)| \geq 3 \quad \forall x^D, y^D \in D, x^D \neq y^D$$

verletzt ist, dann enthält $Q(v, z)$ nicht jeden Knoten der dominierenden Menge D .

Wir unterscheiden folgende Fälle.

Fall 1: Sei $|Q^-(z_1, v)| = |Q^+(v, z_2)| = 3|D_1| + 1$.

Fall 1.1 Sei $z_2 \in Q^-(z_1, v)$ und $p_1^D = q_1^D$.

In diesem Fall ist $p_i^D = q_i^D$, $i = 1, \dots, |D_1|$ und $z_2 = q_{|D_1|}$. Damit ist jedoch $|Q^+(v, z_2)| = 2 + 3(|D_1| - 1) + 1 = 3|D_1|$ ein Widerspruch zu $|Q^+(v, z_2)| = 3|D_1| + 1$.

Fall 1.2 Sei $z_2 \in Q^-(z_1, v)$ und $p_1^D \neq q_1^D$.

In diesem Fall ist $d_H(z_2, v) > d_H(p_1^D, v)$. Wir betrachten die Orientierung H' die aus der Orientierung H entsteht durch umorientieren der Kanten (v, p_2) , (p_2, p_3) und $E(Q^-(p_1^D, v))$. Siehe für diesen Fall Abbildung 5.6 (a).

Der Graph H' ist stark zusammenhängend. Sei $P'(a, b)$ ein diametraler Pfad in der Orientierung H' . Falls $a, b \in V(G_1) \cup v$, dann ist $d_{H'}(a, b) \leq 2 + 3(|D_1| - 2) + 4 + 2 = 3|D_1| + 2$.

Sei p_k^D der dominierende Knoten auf dem Pfad $Q^+(v, z_2)$, so dass gilt $d_H(q_{|D_1|}^D, p_k) = 3$. Dann ist mit

$$d_{H'}(v, q_{|D_1|-1}^D) = d_{H'}(v, p_k^D) = 5$$

die Bedingung (\star) verletzt. Das heißt, jeder Pfad im Graphen H' von v zu einem Knoten $z \in V(G_1)$ enthält höchstens einen der beiden Knoten p_k^D oder $q_{|D_1|-1}^D$. Dann ist jedoch $\text{ecc}_{H'}^+(v) \leq 2 + 3(|D_1| - 2) + 2 = 3|D_1| - 2$ und H' erfüllt die Bedingungen des Lemmas.

Fall 1.3 Sei $z_2 \notin Q^-(z_1, v)$ und $p_1^D = q_1^D$.

Dann ist $q_i^D = p_i^D$, $i = 1, \dots, |D_1|$. Wir konstruieren eine Orientierung H' aus der Orientierung H durch umorientieren der Kanten $(q_{|D_1|}^D, p_{s-1})$ und (p_{s-1}, p_s) . Zusätzlich wird die Kante $(p_s, f(p_s))$ vom Knoten $f(p_s)$ zum Knoten p_s gerichtet. Falls noch weitere Knoten z existieren mit $d_{H'}(q_{|D_1|}^D, z) = 2$ und $d_{H'}(v, z) = 3|D_1| + 1$, werden die entsprechenden Kanten analog umorientiert. Der Graph H' ist stark zusammenhängend. Die dominierenden Knoten liegen auf einem Kreis der Länge $3|D_1| + 1$. Für $a, b \in V(G_1)$ gilt:

$$d_{H'}(a, b) \leq 2 + 3|D_1| + 2 = 3|D_1| + 4.$$

Weiterhin gilt durch die Konstruktion von H' :

$$ecc_{H'}^+(v) \leq 2 + 3(|D_1| - 1) + 1 = 3|D_1|.$$

Fall 1.4 Sei $z_2 \notin Q^-(z_1, v)$ und $p_1^D \neq q_1^D$.

Analog zum Fall 1.3 konstruieren wir eine Orientierung H' aus der Orientierung H durch umorientieren der Kanten (p_{s-2}, p_{s-1}) und (p_{s-1}, p_s) . Zusätzlich wird die Kante $(p_s, f(p_s))$ vom Knoten $f(p_s)$ zum Knoten p_s gerichtet. Siehe für diesen Fall Abbildung 5.6 (b).

Falls weitere Knoten z existieren mit $d_{H'}(p_{s-2}, z)=2$ und $d_{H'}(v, z) = 3|D_1| + 1$, werden die entsprechenden Kanten analog umorientiert. Der Graph H' ist stark zusammenhängend. Für $a, b \in V(G_1)$ gilt:

$$d_{H'}(a, b) \leq 2 + 3|D_1| + 2 = 3|D_1| + 4.$$

Weiterhin gilt für jeden Knoten $z \notin Q^-(z_1, v)$, entweder (p_{s-2}, z) ist eine Kante in H' , oder kein kürzester Pfad von v zum Knoten z enthält den Knoten p_{s-2} . Damit gilt:

$$d_{H'}(v, z) \leq 2 + 3(|D_1| - 1) + 1 = 3|D_1|.$$

Fall 2: Sei $|Q^-(z_1, v)| = 3|D_1| + 1$ und $|Q^+(v, z_2)| = 3|D_1| + 2$.

Da der Pfad $Q^+(v, z_2)$ jeden Knoten der dominierenden Menge enthält, ist die Kante $(f(p_2), p_2)$ im Graphen H von $f(p_2)$ nach p_2 gerichtet. Sei H' die Orientierung, in der alle Kanten wie in H orientiert sind und die Kante $(f(p_2), p_2)$ von p_2 nach $f(p_2)$ gerichtet ist. Siehe für diesen Fall Abbildung 5.6 (c).

Für Knoten a, b , für die ein kürzester Pfad in H existiert, der die Kante $(f(p_2), p_2)$ nicht enthält, gilt $d_{H'}(a, b) = d_H(a, b) \leq 3|D_1| + 1$.

Betrachten wir Knoten a, b , für die jeder kürzeste Pfad $Q(a, b)$ von a nach b im Graphen H die Kante $(f(p_2), p_2)$ enthält. Sei k der größte Index, so dass der Pfad $Q(a, b)$ den Knoten q_k^D enthält. Dann ist $d_H(a, b) \leq 3|D_1| + 1 - 3(|D_1| - k)$. Weiter gilt:

$$d_{H'}(a, q_k^D) + 1 + d_{H'}(p_2, b) \leq d_H(a, b).$$

Damit können wir den Abstand von a nach b im Graphen H' abschätzen:

$$\begin{aligned} d_{H'}(a, b) &\leq d_{H'}(a, q_k^D) + d_{H'}(q_k^D, v) + 1 + d_{H'}(p_2, b) \\ &\leq d_H(a, b) + 3(|D_1| - k) + 2 \\ &\leq 3|D_1| + 1 - 3(|D_1| - k) + 3(|D_1| - k) + 2 \\ &= 3|D_1| + 3. \end{aligned}$$

In der Orientierung H' gilt:

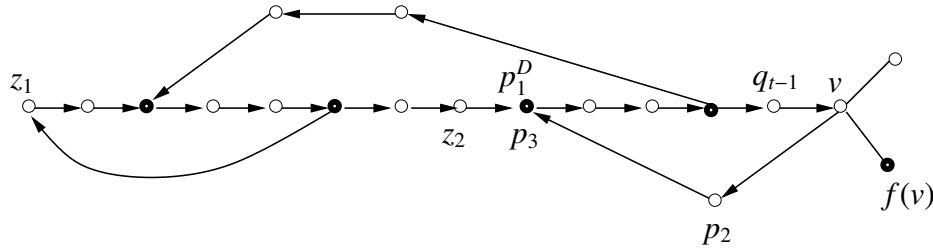
$$d_{H'}(v, f(p_2)) = 2 \quad \text{und} \quad d_{H'}(v, p_1^D) = 3.$$

Damit ist die Bedingung (\star) verletzt. Es gilt $ecc_{H'}^+(v) \leq 3|D_1|$.

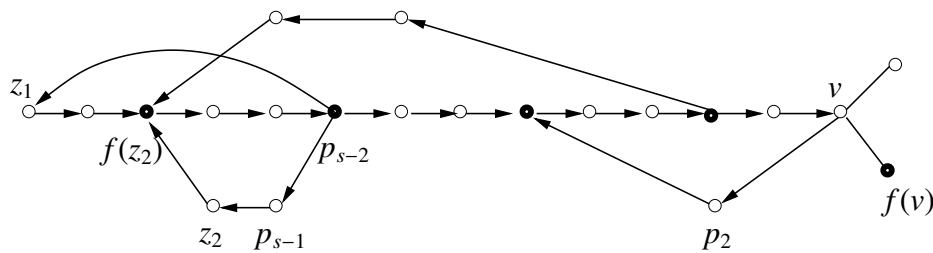
Fall 3: Sei $|Q^-(z_1, v)| = |Q^+(v, z_2)| = 3|D_1| + 2$.

Dieser Fall kann analog zum obigen Fall 2 gezeigt werden. Durch Orientieren der Kante $(p_2, f(p_2))$ vom Knoten p_2 zum Knoten $f(p_2)$ erhalten wir eine Orientierung H' , für die gilt $ecc_{H'}^+(v) \leq 3|D_1|$.

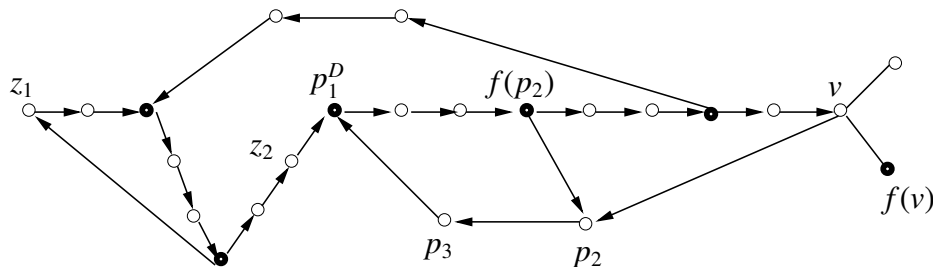
Damit ist das Lemma bewiesen. □



(a) Der Fall 1.2 im Lemma 5.22: $z_2 \in Q^-(z_1, v)$.



(b) Der Fall 1.4 im Lemma 5.22: $z_2 \notin Q^-(z_1, v)$.



(c) Der Fall 2 im Lemma 5.22: $|Q^-(z_1, v)| = 3|D_1| + 1$ und $|Q^+(v, z_2)| = 3|D_1| + 2$.

Abbildung 5.6: Die Graphen verdeutlichen die Fälle 1.2, 1.4 und den Fall 2 im Beweis des Lemmas 5.22.

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun das Theorem 5.1 beweisen.

Theorem (5.1). *Sei G ein brückenfreier zusammenhängender Graph, der weder einen C_3 noch einen C_4 enthält. Dann gilt:*

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Beweis. Angenommen, das Theorem gilt nicht. Dann existiert ein kleinstes Gegenbeispiel G in dritter $\{C_3, C_4\}$ -Standardform. Sei $P(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ein diametraler Pfad in einer optimalen Orientierung H von G . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Enthalte $P(x, y)$ keinen Schnittknoten vom Typ A_3 . Sei $D_1 = V(P(x, y)) \cap D$ und $D_2 = D \setminus D_1$. Für jeden Knoten $v \in D_2$ gilt entweder $N(v) \cap V(P(x, y)) = \emptyset$ oder $|N(v) \cap V(P(x, y))| = 1$. Damit können wir die Länge des Pfades $P(x, y)$ abschätzen:

$$|P(x, y)| \leq 2 + 3(|D_1| - 1) + |D_2| + 2 \leq 3|D| + 1 = 3\gamma(G) + 1.$$

Fall 2: Sei $v = x_k$ ein Schnittknoten vom Typ A_3 . Seien G_1 und G_2 die Zusammenhangskomponenten von $G \setminus v$ mit $|V(G_2) \cap D| = 3$. Wir können annehmen, dass für eine optimale Orientierung H von G gilt:

$$\text{ecc}^-(v) := \max_{z \in V(G_1)} d_H(z, v) \leq \max_{z \in V(G_1)} d_H(v, z) =: \text{ecc}^+(v).$$

Der Durchmesser von H lässt sich abschätzen durch:

$$\text{diam}(H) \leq \max\{\text{ecc}^-(v) + 10, \text{ecc}^+(v) + 7\}.$$

Sei $D_1 = V(P(x, y)) \cap V(G_1) \cap D$ und $D_2 = D \setminus \{D_1 \cup V(G_2)\}$. Falls $|D_2| \geq 1$, dann können wir die Länge des Pfades $P(x, y)$ abschätzen durch:

$$|P(x, y)| \leq 2 + 3(|D_1| - 1) + |D_2| + 3 + 10 = 3|D_1| + |D_2| + 12 \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Sei nun $|D_2| = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 2.1: Sei $f(v) \in V(G_1)$.

Da $G[V(G_1) \cup v]$ kein Gegenbeispiel zum Theorem 5.1 ist, können wir annehmen, dass H eine Orientierung von G ist für die gilt:

$$\text{ecc}^-(v) \leq \text{ecc}^+(v) \leq 3|D_1| + 1.$$

Im Fall von $\text{ecc}^-(v) < \text{ecc}^+(v)$ lässt sich der Durchmesser von H abschätzen durch

$$\text{diam}(H) \leq \max\{\text{ecc}^-(v) + 10, \text{ecc}^+(v) + 7\} \leq 3|D_1| + 10 \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Sei nun $\text{ecc}^-(v) = \text{ecc}^+(v) = 3|D_1| + 1$. Seien $Q^-(z_1, v)$ und $Q^+(v, z_2)$ die zugehörigen Pfade im Graphen G_1 . Da $|D_2| = 0$ ist, liegt jeder Knoten der

dominierenden Menge auf den Pfaden $Q^-(z_1, v)$ und $Q^+(v, z_2)$. Da $f(v) \in V(G_1)$ gilt, liegt die Kante $(v, f(v))$ in einem der beiden Pfade $Q^-(z_1, v)$ oder $Q^+(v, z_2)$. Sei o.B.d.A. $(v, f(v)) \in E(Q^+(v, z_2))$. Dann ist jedoch

$$|Q^+(v, z_2)| \leq 1 + 3(|D_1| - 1) + 2 \leq 3|D_1|.$$

Das ist ein Widerspruch zu $ecc^+(v) = 3|D_1| + 1$.

Fall 2.2: Sei $f(v) \in V(G_2)$.

Dann können wir Lemma 5.22 anwenden. Somit gilt:

$$diam_{min}(G) \leq 3(\gamma(G) - 3) + 10 = 3\gamma(G) + 1.$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Kapitel 6

Bigerichtete Graphen

Als eine Verallgemeinerung gerichteter und ungerichteter Graphen definierten Edmonds und Johnson [14] bigerichtete Graphen. Edmonds und Johnson nutzten bigerichtete Graphen um ein verallgemeinertes Matchingproblem zu veranschaulichen. **Bigerichtete Graphen** \bar{G} enthalten drei Arten von Kanten, Kanten mit zwei positiven Endknoten, zwei negativen Endknoten und Kanten mit einem positiven und einem negativen Endknoten. Bigerichtete Graphen sind eng verwandt mit Vorzeichengraphen, die von Zaslavsky [35, 36] untersucht wurden. Dabei stellen die bigerichteten Graphen eine Art gerichtete Variante der Vorzeichengraphen dar.

In diesem Kapitel erweitern wir die Begriffe gerichteter Pfad, Distanz und starker Zusammenhang für bigerichtete Graphen. Weiterhin charakterisieren wir die Graphen, für die stark zusammenhängende bigerichtete Orientierungen existieren.

Des weiteren betrachten wir das Problem, eine bigerichtete Orientierung mit minimalem Durchmesser eines ungerichteten Graphen zu finden. Wir zeigen eine obere Schranke für den minimalen bigerichteten Durchmesser, welche von der Kardinalität einer minimalen dominierenden Menge abhängt.

6.1 Konstruktion einer stark zusammenhängenden bigerichteten Orientierung

In diesem Abschnitt werden wir zum einen die Begriffe gerichteter Pfad, Abstand, starker Zusammenhang auf bigerichtete Graphen übertragen und zum anderen zeigen, für welche Graphen eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung existiert.

Wie in gerichteten Graphen, bezeichnen wir mit $G = (V, E)$ den zugrunde liegenden ungerichteten Graphen eines bigerichteten Graphen $\bar{G} = (V, A)$. Um bigerichtete Kanten von ungerichteten Kanten zu unterscheiden, verwenden wir für bigerichtete Kanten den Buchstaben a und für die Kantenmenge den Buchstaben A .

Eine Kante a heißt **positiv (negativ) inzident** zu einem Knoten u , wenn die Kante a einen positiven (negativen) Endknoten besitzt. Ist eine Kante a positiv inzident zu

einem Knoten u und eine andere Kante a' negativ inzident zu u , dann sind a und a' **entgegengesetzt inzidente** Kanten von u . Der **Knotengrad** $\deg(v)$ eines Knotens gibt die Anzahl der zu diesem Knoten inzidenten Kanten an.

Anstelle von bigerichteter Orientierung schreiben wir auch **Biorientierung**.

Definition 6.1 (bigerichteter Pfad). Ein **bigerichteter Pfad** in einem bigerichteten Graphen $\bar{G} = (V, A)$ ist eine alternierende Sequenz $\bar{P} = (v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_k, v_k)$ von Knoten v_i ($i = 0, \dots, k$) und Kanten a_i ($i = 1, \dots, k$) mit $k \geq 1$, so dass a_1 positiv inzident zu v_0 , a_k negativ inzident zu v_k ist und die Kanten a_i und a_{i+1} jeweils entgegengesetzt inzident zu v_i für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$ sind. Die **Länge** eines bigerichteten Pfades \bar{P} definieren wir als Anzahl der Kanten in dem Pfad, also $|\bar{P}| = k$.

Ein **Teilpfad** eines bigerichteten Pfades $\bar{P} = (v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_k, v_k)$ ist eine Teilsequenz $\bar{P}' = (v_i, a_{i+1}, v_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j, v_j)$ mit $i < j \leq k$.

Entgegen der üblichen Definition eines gerichteten Pfades in einem Digraphen kann ein bigerichteter Pfad Kanten mehrfach enthalten. Ein Teilpfad eines bigerichteten Pfades muss kein bigerichteter Pfad sein, da nicht gefordert wird, dass die Kante a_{i+1} positiv inzident zum Knoten v_i und die Kante a_j negativ inzident zum Knoten v_j ist.

Definition 6.2 (Abstand, Durchmesser). Der **Abstand** $d_{\bar{G}}(u, v)$ zwischen zwei Knoten eines bigerichteten Graphen ist die Länge eines kürzesten bigerichteten Pfades in \bar{G} von u nach v . Falls kein solcher Pfad existiert, definieren wir $d_{\bar{G}}(u, v) = \infty$. Für $u = v$ vereinbaren wir $d_{\bar{G}}(u, u) = 0$.

Der **Durchmesser** $\text{diam}(\bar{G})$ gibt den größten Abstand zwischen zwei Knoten in \bar{G} an.

Definition 6.3 (stark zusammenhängend). Ein bigerichteter Graph \bar{G} heißt **stark zusammenhängend**, wenn der Durchmesser des Graphen endlich ist.

Jede stark zusammenhängende Orientierung eines Graphen ist auch eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung. Umgekehrt gilt dies nicht. Siehe zum Beispiel den Graphen in Abbildung 6.1.

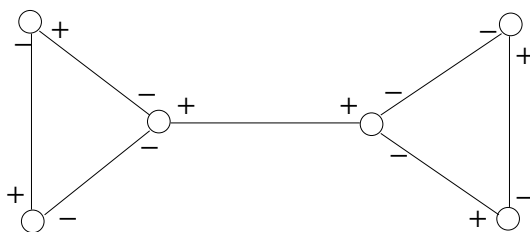


Abbildung 6.1: Stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung eines Graphen mit Brücke.

Definition 6.4 ((echte, triviale, innere, Blatt-) Komponenten). Sei G ein Graph, dann bezeichnen wir die brückenfreien Komponenten, die aus mehr als einem Knoten bestehen als **echte Komponenten** von G . Einen Knoten $v \in V(G)$, der ausschließlich mit Brückenkanten inzident ist, nennen wir **triviale Komponente**. Ein Knoten u einer echten Komponente, der inzident mit mindestens einer Brücke ist, heißt **Brückenknoten**. Starke Zusammenhangskomponenten von G , die genau einen Brückenknoten enthalten bezeichnen wir als **Blattkomponenten**. Starke Zusammenhangskomponenten, die mehr als einen Brückenknoten enthalten, nennen wir **innere Komponenten** von G .

Graphen, für die eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung existiert, können folgendermaßen charakterisiert werden.

Satz 6.5. *Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ existiert genau dann eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung \vec{G} , wenn jeder Knoten von G mindestens Grad zwei besitzt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass aus der Existenz einer stark zusammenhängenden bigerichteten Orientierung eines Graphen G folgt, dass jeder Knoten mindestens Grad zwei besitzt. Sei $\vec{G} = (V, A)$ eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$. Nach der Definition des starken Zusammenhangs existieren zwischen je zwei Knoten u, v bigerichtete Pfade von u nach v und von v nach u . Ein Pfad beginnt immer mit einer Kante mit positivem Endknoten und endet mit einer Kante mit negativem Endknoten. Deshalb beträgt der Grad jedes Knotens mindestens zwei.

Um die Rückrichtung des Satzes zu beweisen, konstruieren wir eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung. Sei G ein zusammenhängender Graph mit $|V| \geq 2$ und $\deg(v) \geq 2 \quad \forall v \in V$. Wir schrumpfen die echten Komponenten dieses Graphen zu Knoten und erhalten dadurch einen Baum T . Die Kanten dieses Baumes entsprechen den Brücken im Graphen G . Die Knoten entsprechen den geschrumpften brückenfreien Teilgraphen beziehungsweise den trivialen Komponenten. Da der Knotengrad jedes Knotens mindestens zwei beträgt, sind alle Blätter des Baumes geschrumpfte echte Komponenten.

Die bigerichtete Orientierung wird in zwei Schritten durchgeführt. Zuerst suchen wir eine stark zusammenhängende Orientierung für die echten Komponenten. Diese Orientierung kann in linearer Zeit gefunden werden [6]. In einem zweiten Schritt verändern wir die Orientierung innerhalb der echten Komponenten so, dass jeder Brückenknoten nur mit negativen Endknoten innerhalb der echten Komponente inzident ist. Die Brücken werden so bigerichtet, dass die Kanten an den Brückenknoten positiv inzident sind. Die Kanten der Knoten die ausschließlich mit Brücken inzident sind, werden jeweils mit entgegengesetzten Vorzeichen bigerichtet. Zur Veranschaulichung

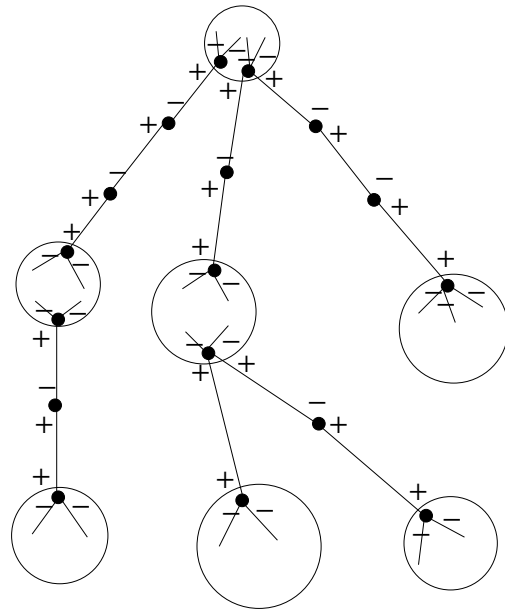


Abbildung 6.2: Stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung.

dient Abbildung 6.2. Im Folgenden zeigen wir, dass für je zwei Knoten $u, v \in V(\bar{G})$ ein endlicher bigerichteter Pfad \bar{P} von u nach v existiert.

Fall 1: Seien u und v zwei Knoten der gleichen echten Komponente Q von G und u kein Brückenknoten. Wir betrachten die Orientierung der echten Komponente Q wie sie im ersten Teil des Beweises gefunden wurde. In dieser Orientierung existiert ein gerichteter Pfad \vec{P} von u nach v . Falls der Pfad \vec{P} keinen Brückenknoten enthält, ist der Pfad \vec{P} auch ein bigerichteter Pfad \bar{P} von u nach v .

Betrachten wir nun den Fall, dass der Pfad \vec{P} einen Brückenknoten $b \neq v$ enthält. Dann existiert ein geschlossener bigerichteter Teilpfad \bar{P}_b außerhalb der Komponente Q dessen Start- und Endkante positiv inzident mit dem Knoten b ist. Für jeden Brückenknoten $b \neq v$ auf dem gerichteten Pfad \vec{P} fügen wir einen geschlossenen bigerichteten Pfad \bar{P}_b ein. Der bigerichtete Pfad \bar{P}_b besteht aus einem bigerichteten Teilpfad, der doppelt durchlaufen wird und einem geschlossenen Teilpfad in einer inneren Komponente oder einer Blattkomponente.

Fall 2: Seien u und v zwei Knoten verschiedener echter Komponenten Q_u und Q_v . Seien $b_u \in V(Q_u)$ und $b_v \in V(Q_v)$ die Brückenknoten auf dem Pfad von Q_u nach Q_v im Baum T . Es existiert ein gerichteter Pfad \vec{P}_u von u nach b_u und ein gerichteter Pfad \vec{P}_v von b_v nach v in der Orientierung aus dem ersten Schritt des Beweises. Wie im Fall 1 besteht der bigerichtete Pfad \bar{P} aus den Teilpfaden \vec{P}_u , \vec{P}_v und für jeden Brückenknoten auf diesen Pfaden wird ein geschlossener bigerichteter Teilpfad eingefügt.

- Fall 3: Der Knoten u ist ein Brückenknoten und der Pfad von u nach v im Baum T startet mit einer Kante, die negativ inzident zum Knoten u ist. Dann existiert ein geschlossener bigerichteter Teilpfad dessen Start- und Endkante positiv inzident zum Knoten u ist. Dieser bigerichtete Teilpfad kann dann analog zu den obigen Fällen bis zum Knoten v verlängert werden.
- Fall 4: Der Knoten v ist ein Brückenknoten und der Pfad von u nach v im Baum T endet mit einer positiv inzidenten Kante. Wir erhalten einen bigerichteten Pfad von u nach v , indem wir den Pfad von u nach v durch einen geschlossenen bigerichteten Teilpfad verlängern, dessen Start- und Endkante negativ inzident zum Knoten v ist.
- Fall 5: Falls u ein Knoten einer trivialen Komponente von G ist, dann existiert ein bigerichteter Teilpfad von u zu einem Brückenknoten b_u . Der Pfad vom Knoten b_u zum Knoten v kann, wie im Fall 3 beschrieben, gefunden werden.

Analog finden wir einen bigerichteten Pfad von u zu v , falls v ein Knoten einer trivialen Komponente von G ist.

□

Wir nennen einen Graphen G **zulässig**, falls er aus nur einem Knoten besteht, oder falls G zusammenhängend ist und der Knotengrad jedes Knotens mindestens zwei beträgt.

Für stark zusammenhängende gerichtete Graphen $\vec{G} = (V, E)$ gilt die folgende obere Schranke:

$$\text{diam}(\vec{G}) \leq |V| - 1.$$

Wie im Beweis des Satzes 6.5 gesehen, kann ein kürzester Pfad in einem bigerichteten Graphen Kanten doppelt enthalten. Daraus ergibt sich folgende obere Schranke für den Durchmesser zulässiger bigerichteter Graphen.

Satz 6.6. *Sei G ein zulässiger Graph und \vec{G} eine stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung konstruiert wie im Beweis zum Satz 6.5, dann gilt:*

$$\text{diam}(\vec{G}) \leq \max\{2|V(G)| - 5, |V(G)| - 1\}.$$

Beweis. Für brückenfreie Graphen gilt die Aussage offensichtlich. Sei also G ein zulässiger Graph der Brücken enthält, dann ist $|V(G)| \geq 6$. Aus der Konstruktion der bigerichteten Orientierung \vec{G} im Beweis zum Satz 6.5 folgt, dass der größte Abstand zwischen zwei Knoten $u, v \in V(\vec{G})$ von zwei Knoten angenommen wird, die in der gleichen Blattkomponente liegen. Nur in diesem Fall kann ein kürzester bigerichteter Pfad von u nach v alle Brückenkanten doppelt enthalten. Seien G_1, \dots, G_k die echten Komponenten von G und sei u, v ein diametrales Paar mit $u, v \in V(G_1)$, also $\text{diam}(\vec{G}) = d_{\vec{G}}(u, v)$. Ein kürzester bigerichteter Pfad von u nach v verläuft zuerst

zu dem eindeutigen Brückenknoten b_1 von G_1 . Dort schließt sich ein bigerichteter Teilpfad \bar{P}_{b_1, b_k} an, der durch innere Komponenten G_2, \dots, G_{k-1} bis zu einer Blattkomponente G_k mit eindeutigem Brückenknoten b_k verläuft. An b_k schließt sich ein geschlossener bigerichteter Teilpfad \bar{P}_k durch die Blattkomponente G_k an. Der Teilpfad \bar{P}_{b_k, b_1} von b_k zurück nach b_1 verläuft durch die inneren Komponenten in umgedrehter Reihenfolge. Von b_1 zu v existiert ein bigerichteter Teilpfad $\bar{P}_{b_1, v}$ innerhalb von G_1 .

Die Komponenten G_1 und G_k bestehen aus mindestens drei Knoten. Daher enthält der bigerichtete Teilpfad \bar{P}_k mindestens drei Kanten. Die Länge des bigerichteten Pfades $\bar{P}_{u, v}$ von u nach v lässt sich abschätzen durch:

$$\begin{aligned} |\bar{P}_{u, v}| &\leq |\bar{P}_{u, b_1}| + |\bar{P}_{b_1, b_k}| + |\bar{P}_k| + |\bar{P}_{b_k, b_1}| + |\bar{P}_{b_1, v}| \\ &\leq |V(G_1)| - 1 + 2(|V(G)| - |V(G_1)| - |V(G_k)| + 1) + |V(G_k)| \\ &= 2|V(G)| - |V(G_1)| - |V(G_k)| + 1 \\ &\leq 2|V(G)| - 5. \end{aligned}$$

□

Es stellt sich die Frage, ob brückenfreie zusammenhängende Graphen konstruiert werden können, für die eine bigerichtete Orientierung mit kleinerem Durchmesser als der minimale Durchmesser einer Orientierung existiert. Entgegen der Vermutung in [30] existieren solche Graphen. In Abbildung 6.3 ist ein Vertreter einer solchen Graphenfamilie dargestellt.

6.2 Die Dominanzzahl und der minimale bigerichtete Durchmesser

In diesem Abschnitt geben wir eine Schranke für den minimalen bigerichteten Durchmesser in Abhängigkeit der Dominanzzahl an. Dafür definieren wir:

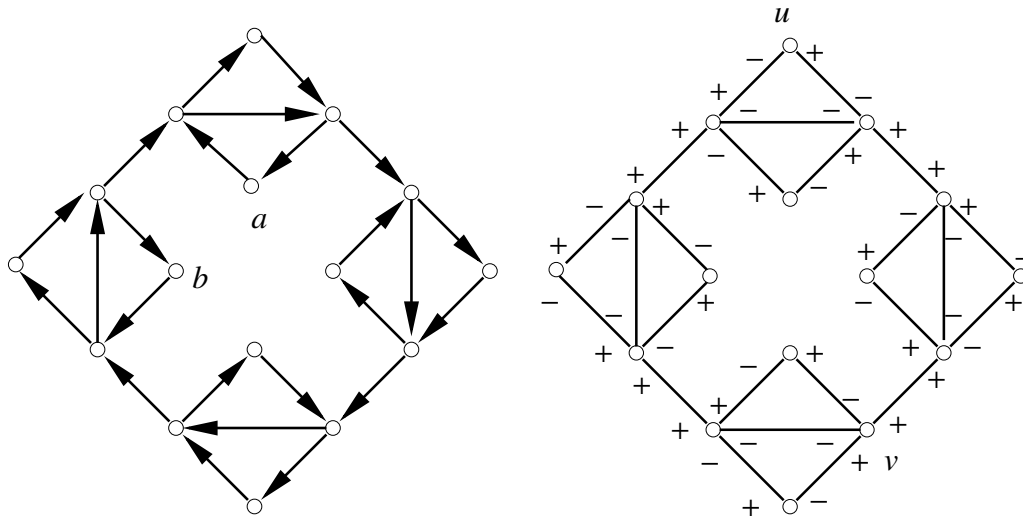
Definition 6.7 (minimaler bigerichteter Durchmesser). Sei G ein zulässiger ungerichteter Graph. Dann bezeichnen wir mit $diam_{bimin}(G)$ den kleinsten Durchmesser aller Biorientierungen von G .

$$diam_{bimin}(G) = \min\{diam(\bar{G}) : \text{mit } \bar{G} \text{ ist eine Biorientierung von } G\}.$$

Definition 6.8 (dominierender Teilgraph). Sei G ein Graph und G_D ein Teilgraph von G , so dass $V(G_D)$ eine dominierende Menge für den Graphen G bildet. Dann nennen wir G_D einen **dominierenden Teilgraphen** für G .

Da jede Orientierung auch als Biorientierung interpretiert werden kann, gilt für zusammenhängende brückenfreie Graphen G mit Theorem 4.1:

$$diam_{bimin}(G) \leq 4\gamma(G).$$



(a) Minimale Orientierung mit Durchmesser $diam(\vec{G}) = d_G(a, b) = 9$.

(b) Bigerichtete Orientierung mit Durchmesser $diam(\vec{G}) = d_G(u, v) = 7$.

Abbildung 6.3: Ein Graph, für den eine bigerichtete Orientierung existiert mit kleinerem Durchmesser als der Durchmesser einer Orientierung mit minimalem Durchmesser. Der Durchmesser in der bigerichteten Orientierung ist kleiner, da die Kanten mit zwei positiven Endknoten in beiden Richtungen durchlaufen werden können.

Für zusammenhängende brückenfreie $\{C_3, C_4\}$ -freie Graphen G folgt aus Theorem 5.1:

$$diam_{bimin}(G) \leq 3\gamma(G) + 1.$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass für jeden zulässigen Graphen G eine Biorientierung \vec{G} existiert mit $diam(\vec{G}) \leq 10\gamma(G) - 5$. Die Beweisidee ist ähnlich dem Beweis im Abschnitt 4.4. Es wird zuerst ein Baum konstruiert, der die Knoten einer dominierenden Menge enthält. In einem zweiten Schritt wird der Baum zu einem zulässigen Graphen ergänzt und die Anzahl der Knoten abgeschätzt.

Das folgende Lemma 6.9 ist das bigerichtete Analogon zum Lemma 4.28. Das Lemma 6.9 ermöglicht es, aus einer Biorientierung eines zulässigen dominierenden Teilgraphen eine Biorientierung für den Gesamtgraphen zu konstruieren. Der Durchmesser vergrößert sich dabei höchstens um vier.

Lemma 6.9. Sei G ein zulässiger Graph und G_D ein zulässiger dominierender Teilgraph von G . Dann existiert für jede stark zusammenhängende bigerichtete Orientierung

zung \bar{G}_D von G_D eine bigerichtete Orientierung \bar{G} von G , so dass gilt:

$$\text{diam}(\bar{G}) \leq \text{diam}(\bar{G}_D) + 4.$$

Beweis. Der Beweis entspricht weitgehend dem Beweis von Lemma 4.28. Wir geben im Folgenden an, wie die zusammenhängenden Teilgraphen Q von $G \setminus V(G_D)$ zu orientieren sind.

Fall 1: Der Teilgraph Q besteht aus genau einem Knoten q . Da G zulässig ist, ist $\text{deg}_G(q) \geq 2$. Seien $u, v \in V(G_D)$ adjazente Knoten von q . Wir orientieren die Kante (q, u) so, dass (q, u) positiv inzident zu q und negativ inzident zu u ist. Die Kante (q, v) wird so orientiert, dass sie negativ inzident zu q und positiv inzident zu v ist. Alle anderen zu q inzidenten Kanten werden beliebig orientiert. Durch diese Orientierung ist sichergestellt, dass Knoten $u, v \in V(G_D)$ existieren, mit $d_{\bar{G}}(q, u) = 1$ und $d_{\bar{G}}(v, q) = 1$.

Fall 2: Der Teilgraph Q besteht aus mindestens zwei Knoten. Sei T ein aufspannender Baum in Q mit Wurzelknoten r . Für jeden Knoten $x \in Q$ sei (x, \tilde{x}) die Kante in T , welche auf dem Pfad von x zu r liegt. Da der Graph G_D ein dominierender Teilgraph für G ist, existiert für jeden Knoten $x \in Q$ mindestens ein adjazenter Knoten $x' \in V(G_D)$. Wir orientieren die Kanten (x, \tilde{x}) und (x, x') mit $x, \tilde{x} \in Q$ und $x' \in V(G_D)$ folgendermaßen:

- Falls die Länge des Pfades von x nach r in T ungerade ist, orientieren wir die Kante (x, \tilde{x}) so, dass sie negativ inzident zu x und positiv inzident zu \tilde{x} ist. Die Kante (x, x') wird positiv zu x und negativ zu x' orientiert.
- Falls die Länge des Pfades von x nach r in T gerade ist, orientieren wir die Kante (x, \tilde{x}) so, dass sie positiv inzident zu x und negativ inzident zu \tilde{x} ist. Die Kante (x, x') wird positiv zu x' und negativ zu x orientiert.

Alle anderen Kanten in Q können beliebig orientiert werden. Eine solche Orientierung ist in Abbildung 6.4 gezeigt.

Sei \bar{G} eine so konstruierte Biorientierung. Dann existieren für jeden Knoten $x \in Q$ zwei Knoten $u, v \in V(G_D)$, so dass $d_{\bar{G}}(x, v) \leq 2$ und $d_{\bar{G}}(u, x) \leq 2$. Diese bigerichteten Pfade von Q nach G_D sind negativ inzident mit den Knoten aus $V(G_D)$ und die Pfade von G_D nach Q sind positiv inzident mit den Knoten aus $V(G_D)$.

Daraus folgt, für alle Knoten $x, y \in V(G)$ ist $d_{\bar{G}}(x, y) \leq \text{diam}(\bar{G}_D) + 4$. □

In der Erweiterung der Biorientierung von G_D auf den Gesamtgraphen G werden nur Kanten mit unterschiedlichen Vorzeichen verwendet. Daher gilt, falls \bar{G}_D eine stark zusammenhängende Orientierung ist, ist auch die konstruierte Biorientierung eine stark zusammenhängende Orientierung.

Im nächsten Lemma schätzen wir die Anzahl der Knoten eines dominierenden Baumes eines zulässigen Graphen ab.

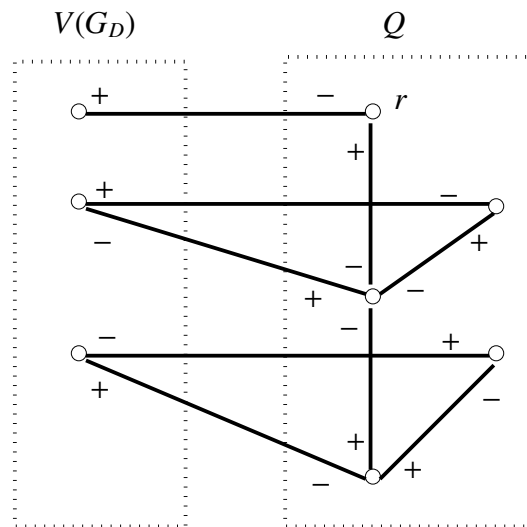


Abbildung 6.4: Bigerichtete Orientierung zur Veranschaulichung des Lemmas 6.9.

Lemma 6.10. Sei $G = (V, E)$ ein zulässiger Graph und $D \subseteq V$ eine minimale dominierende Menge für G . Dann existiert ein Baum $T \subset G$ mit $D \subseteq V(T)$, so dass die Anzahl der Knoten des Baumes folgendermaßen beschränkt ist:

$$|V(T)| \leq 3\gamma(G) - 2.$$

Beweis. Für $\gamma(G) = 1$ und $T = D$ gilt die Aussage offensichtlich.

Sei $\gamma(G) \geq 2$ und D eine dominierende Menge mit $|D| = \gamma(G)$. Es werden iterativ Bäume T_k konstruiert, so dass der Baum $T_{|D|}$ die Knoten der dominierenden Menge D enthält. Wir setzen $T_1 = x_1$ mit $x_1 \in D$ beliebig. Aus dem Baum T_k konstruieren wir einen Baum T_{k+1} . Dabei wird zuerst ein Knoten $x_{k+1} \in D \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ mit minimalem ungerichteten Abstand zu T_k gewählt. Sei P_k ein kürzester Pfad zwischen x_{k+1} und T_k . Der Baum T_{k+1} ergibt sich aus: $T_{k+1} = T_k \cup P_k$.

Da D eine dominierende Menge ist, beträgt die Länge der Pfade P_k höchstens drei. Nach Hinzufügen des letzten Knotens der dominierenden Menge zum Baum, erhalten wir einen Baum $T_{|D|} = T$ mit $D \subseteq T$ und

$$|V(T)| \leq 2(|D| - 1) + |D| = 3|D| - 2.$$

□

Theorem 6.11. Sei G ein zulässiger Graph, dann gilt:

$$\text{diam}_{\text{bimin}}(G) \leq 10\gamma(G) - 5.$$

Beweis. Für brückenfreie Graphen folgt die Aussage direkt aus Theorem 4.1.

Sei G ein zulässiger Graph mit Brücken. Da G eine Brücke enthält ist $\gamma(G) \geq 2$. Sei D eine dominierende Menge für G mit $|D| = \gamma(G)$. Wie in Lemma 6.10 beschrieben, konstruieren wir einen Baum T mit $D \subseteq V(T)$. Mit $L(T)$ bezeichnen wir die Blätter des Baumes.

Jedes Blatt von T ist ein dominierender Knoten. Da der Graph G zulässig ist, beträgt der Grad jedes Knotens von T mindestens zwei im Graphen G . Weiter gilt, da D eine dominierende Menge für G ist, existiert für jeden Blattknoten von T ein Pfad Q mit $E(Q) \subseteq E(G) \setminus E(T)$, der den Blattknoten mit einem Knoten von T verbindet. Die Länge eines kürzesten Pfades Q beträgt höchstens drei. Wenn wir für jeden Blattknoten von T einen solchen Pfad einfügen, erhalten wir einen zulässigen Graphen G_D mit:

$$|V(G_D)| \leq |V(T)| + 2|L(T)|.$$

Damit können wir den Durchmesser einer bigerichteten Orientierung abschätzen:

$$\begin{aligned} \text{diam}(\vec{G}) &\stackrel{\text{Lemma 6.9}}{\leq} \text{diam}(\vec{G}_D) + 4 \\ &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} 2|V(G_D)| - 1 \\ &\leq 2|V(T)| + 4|L(T)| - 1 \\ &\stackrel{\text{Lemma 6.10}}{\leq} 6\gamma(G) - 4 + 4|L(T)| - 1 \\ &\leq 10\gamma(G) - 5. \end{aligned}$$

□

Wir vermuten, dass die Abschätzung im Theorem 6.11 nicht bestmöglich ist. Vielmehr vermuten wir, dass für jeden zulässigen Graphen G eine Biorientierung \vec{G} existiert mit $\text{diam}(\vec{G}) \leq 6\gamma(G) + 1$. In Abbildung 6.5 ist ein Vertreter einer Graphenfamilie dargestellt, der die Ungleichung der Vermutung mit Gleichheit erfüllt. Bei einer Brückenlänge von $3(\gamma(G) - 1)$ ergibt sich der Abstand der Knoten a und b aus:

$$d_{\vec{G}}(a, b) = 2 + 3(\gamma(G) - 1) + 3 + 3(\gamma(G) - 1) + 2 = 6\gamma(G) + 1.$$

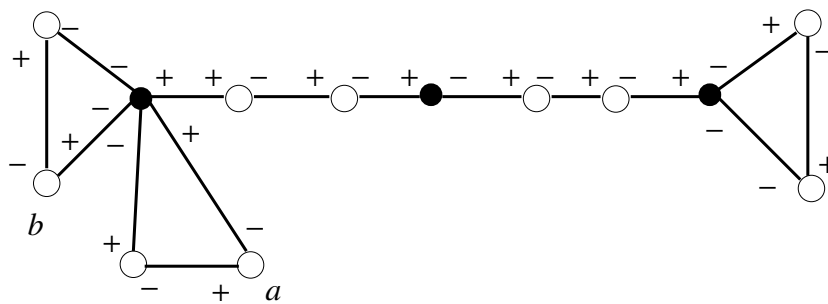


Abbildung 6.5: Ein Biorientierung \vec{G} mit $d_{\vec{G}}(a, b) = 19 = 6\gamma(\vec{G}) + 1$.

Kapitel 7

Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Zusammenhang zwischen dem minimalen orientierten Durchmesser und der Dominanzzahl untersucht. Es wurden zwei Herangehensweisen vorgestellt. Zum einen wurde eine Schranke für den minimalen orientierten Durchmesser bestimmt, indem die Anzahl der Knoten, die ein dominierender Knoten auf einem diametralen Pfad dominiert, abgeschätzt wurde. Zum anderen wurde der minimale orientierte Durchmesser über die Knotenanzahl eines dominierenden Teilgraphen abgeschätzt. Beide Vorgehensweisen beruhen auf geeignet gewählter Standardformen kleinster Gegenbeispiele.

Durch diese Arbeit wird eine Reihe von Problemstellungen aufgeworfen. Wir werden einige dieser offenen Fragestellungen anreißen.

Das größte aufgeworfene ungelöste Problem dieser Arbeit ist sicherlich ein Beweis der Vermutung 4.2. Die Schnittknotenfreiheit eines kleinsten Gegenbeispiels zur Vermutung 4.2 lässt sich nahezu analog zum Abschnitt 4.2 zeigen. Weiterhin können die Lemmata 4.34 und 4.37 als Bausteine zum Beweis der Vermutung 4.2 dienen.

In dieser Arbeit wurden neben allgemeinen Graphen die $\{C_3, C_4\}$ -freien Graphen betrachtet. Für viele Graphenklassen ist die Beziehung zwischen dem minimalen orientierten Durchmesser und der Dominanzzahl noch unbekannt. Wir vermuten:

Vermutung 7.1. *Sei G ein stark zusammenhängender C_3 -freier Graph, dann gilt:*

$$diam_{min}(G) \leq 3\gamma(G) + 2.$$

Die Ungleichung in der Vermutung 7.1 wird vom Graphen in Abbildung 7.1 mit Gleichheit erfüllt. Da ein bipartiter Graph keinen Kreis der Länge drei enthält, gilt die Vermutung 7.1 insbesondere für bipartite Graphen.

Für perfekte oder chordale Graphen ist keine bessere Schranke, als in Vermutung 4.2 angegeben zu erwarten, da der Beispielgraph in Abbildung 4.1 perfekt ist, beziehungsweise durch Einfügen von Sehnen in den Kreisen der Länge vier zu einem chordalen Graphen erweiterbar ist. Offen ist bisher, welche Schranke für k -zusammenhängende Graphen gilt.

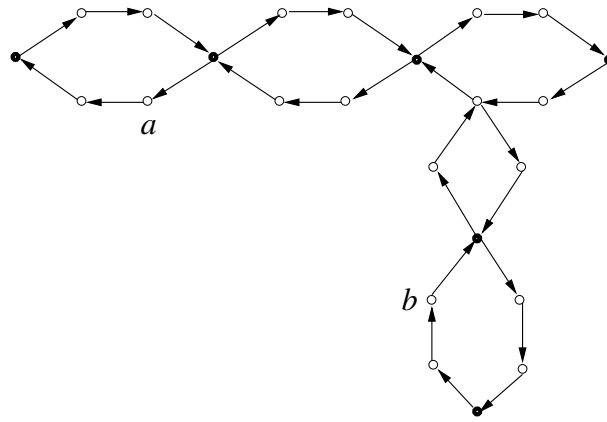


Abbildung 7.1: Dieser Graph erfüllt die Ungleichung in Vermutung 7.1 mit Gleichheit. Der Abstand vom Knoten a zum Knoten b beträgt $20 = 3 \cdot 6 + 2$. Jeder der Kreise der Länge 6 kann durch einen Kreis der Länge $3k$, $k \geq 2$ ersetzt werden. Dadurch erhält man eine Familie von C_3 -freien Graphen, welche die Ungleichung in Vermutung 7.1 mit Gleichheit erfüllen.

Neben der Dominanzzahl existiert noch eine Reihe anderer Graphenparameter, die mit dem minimalen orientierten Durchmesser in Beziehung stehen könnten. Wir vermuten, dass für stark zusammenhängende Graphen G mit Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ gilt:

$$\text{diam}_{\min}(G) \leq \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha(G) = 1, \\ 2\alpha(G) + c & \text{für } \alpha(G) \geq 2. \end{cases}$$

Für $\alpha(G) = 1$ ist die obige Vermutung wahr. Die Unabhängigkeitszahl eines Graphen beträgt genau dann eins, wenn der Graph ein vollständiger Graph ist. Für den vollständigen Graphen mit vier Knoten gilt: $\text{diam}_{\min}(K_4) = 3$.

Aus graphentheoretischer Sicht sind Ungleichungen vom Nordhaus-Gaddum-Typ interessant. Das heißt Abschätzungen für die Summe $\text{diam}_{\min}(G) + \text{diam}_{\min}(\bar{G})$, oder für das Produkt $\text{diam}_{\min}(G) * \text{diam}_{\min}(\bar{G})$. Erste Schritte in diese Richtung liefern der Satz 3.4 zusammen mit der Erkenntnis von Bondy und Murty [5], dass falls G ein Graph mit Durchmesser $\text{diam}(G) \geq 4$ ist, so gilt $\text{diam}(\bar{G}) \leq 2$.

Dankelmann et al. [12] untersuchten den minimalen orientierten starken Durchmesser. Der **starke Durchmesser** eines gerichteten Graphen entspricht dem maximalen starken Abstand eines Knotenpaares. Dabei wird der **starke Abstand** zwischen zwei Knoten u und v als die Größe eines kleinsten stark zusammenhängenden Teilgraphen definiert, der einen gerichteten Pfad von u nach v und einen gerichteten Pfad von v nach u enthält. Dankelmann et al. [12] zeigten Schranken für den minimalen orientierten starken Durchmesser in Bezug zur Knotenanzahl des Graphen, zur Länge des

kleinsten Kreises in G und für k -zusammenhängende Graphen. Unbekannt ist noch, wie der minimale orientierte starke Durchmesser mit Hilfe der Dominanzzahl abgeschätzt werden kann.

Anstatt Orientierungen mit minimalem Durchmesser zu untersuchen, können auch Orientierungen mit minimalem durchschnittlichen Abstand betrachtet werden. Plesník [32] zeigte, dass die Bestimmung des minimalen orientierten durchschnittlichen Abstandes \mathcal{NP} -schwer ist. Dankelmann et al. [11] untersuchten Beziehungen dieses Parameters zur Knotenanzahl, zur Länge des kleinsten Kreises und zum durchschnittlichen Abstand. Bisher noch nicht untersucht wurde, ob der minimale durchschnittliche orientierte Abstand in Bezug zur Dominanzzahl steht. Als Ausgangspunkt zur Beantwortung dieser Frage kann der Artikel [10] herangezogen werden. Darin wird eine Schranke für den durchschnittlichen Abstand in Bezug zur Knotenanzahl und Dominanzzahl angegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] BABAI, L.: *On the diameter of eulerian orientations of graphs*. In: *SODA 06: Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 822–831, 2006.
- [2] BANG-JENSEN, J. und G. GUTIN: *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Monographs in Mathematics (SMM). Springer, London, 2007.
- [3] BERMOND, J.-C., J. BOND, C. MARTIN, A. PEKEČ und F. S. ROBERTS: *Optimal orientations of annular networks*. *Journal of Interconnection Networks*, 1(1):21–46, 2000.
- [4] BOESCH, F. T. und J. WANG: *Reliable circulant networks with minimum transmission delay*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 32(12):1287–1291, 1985.
- [5] BONDY, J. A. und U. S. R. MURTY: *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press Ltd., London, Basingstoke, 1976.
- [6] CHUNG, F. R. K., M. R. GAREY und E. TARJAN: *Strongly connected orientations of mixed multigraphs*. *Networks*, 15:477–484, 1985.
- [7] CHVATÁL, V. und C. THOMASSEN: *Distances in orientations of graphs*. *Journal of Combinatorial Theory*, 24:61–75, 1978.
- [8] CORNEIL, D. G., F. F. DRAGAN, M. HABIB und C. PAUL: *Diameter determination on restricted graph families*. *Discrete Applied Mathematics*, 113:143–166, 2001.
- [9] DANKELMANN, P.: *Mittlere Entfernung in Graphen*. Doktorarbeit, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1993.
- [10] DANKELMANN, P.: *Average distance and domination number*. *Discrete Applied Mathematics*, 80(1):21–35, 1997.
- [11] DANKELMANN, P., O. R. OELLERMANN und J.-L. WU: *Minimum average distance of strong orientations of graphs*. *Discrete applied mathematics*, 143(1-3):204–212, 2004.

- [12] DANKELMANN, P., H. C. SWART und D. DAY: *On strong distances in oriented graphs*. Discrete Mathematics, 266:195–201, 2003.
- [13] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*. Springer, Berlin, 1996.
- [14] EDMONDS, J. und E. L. JOHNSON: *Matching: A well-solved class of linear programs*. In: GUY, R., H. HANANI, N. SAUER und J. SCHÖNHEIM (Herausgeber): *Combinatorial Structures and their Applications*, Seiten 88–92. Gordon and Breach, New York, 1970.
- [15] FOMIN, F. V., M. MATAMALA, E. PRISNER und I. RAPAPORT: *Bilateral orientations in graphs: domination and AT-free classes*. In: *Proceedings of the Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics (GRACO 2001)*, Band 7 der Reihe *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. Elsevier Science Publishers, 2001.
- [16] FOMIN, F. V., M. MATAMALA, E. PRISNER und I. RAPAPORT: *AT-free graphs: linear bounds for the oriented diameter*. Discrete Applied Mathematics, 141:135–148, 2004.
- [17] FOMIN, F. V., I. RAPAPORT und M. MATAMALA: *The complexity of approximating the oriented diameter of chordal graphs*. Journal of Graph Theory, 45(4):255–269, 2004.
- [18] FRAIGNIAUD, P., J.-C. KÖNIG und E. LAZARD: *Oriented hypercubes*. Technischer Bericht, LRI, Universite Paris-Sud, 2000.
- [19] FÜREDI, Z., P. HORAK, C. M. PAREEK und X. ZHU: *Minimal oriented graphs of diameter 2*. Graphs and Combinatorics, 14(4):345–350, 1998.
- [20] GAREY, M. R. und D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- [21] GUTIN, G.: *Minimizing and maximizing the diameter in orientations of graphs*. Graphs and Combinatorics, 10:225–230, 1994.
- [22] GUTIN, G., K. M. KOH, E. G. TAY und A. YEO: *Almost minimum diameter orientations of semicomplete multipartite and extended digraphs*. Graphs and Combinatorics, 17:473–477, 2001.
- [23] GUTIN, G. und A. YEO: *Orientations of digraphs almost preserving diameter*. Discrete Applied Mathematics, 121:129–138, 2002.
- [24] KÖNIG, J.-C., D. W. KRUMME und E. LAZARD: *Diameter-preserving orientations of the torus*. Networks, 32:1–11, 1998.

- [25] KOH, K. M. und E. G. TAY: *Optimal orientations of products of paths and cycles*. Discrete Applied Mathematics, 78(1-3):163–174, 1997.
- [26] KOH, K. M. und E. G. TAY: *On optimal orientations of cartesian products of graphs (ii): complete graphs and even cycles*. Discrete Applied Mathematics, 211(1-3):75–102, 2000.
- [27] KURZ, S. und M. LÄTSCH: *Bounds for the minimum oriented diameter*. Eingereicht bei Journal of Graph Theory.
- [28] KWOK, P. K.: *Oriented diameter of graphs with diameter 3*. preprint.
- [29] LEKKERKERKER, C. G. und D. BOLAND: *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*. Fundamenta Mathematicae, 51:45–64, 1962.
- [30] LÄTSCH, M. und B. PEIS: *On a relation between the domination number and a strongly connected bidirection of an undirected graph*. Wird erscheinen in Discrete Applied Mathematics, 2008.
- [31] NG, K. L. und K. M. KOH: *On optimal orientation of cycle vertex multiplications*. Discrete Applied Mathematics, 297(1-3):104–118, 2005.
- [32] PLESNÍK, J.: *On the sum of all distances in a graph or digraph*. Journal of Graph Theory, 8:1–21, 1984.
- [33] ROBBINS, H. E.: *A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control*. The American Mathematical Monthly, 46(5):281–283, 1939.
- [34] ROBERTS, F. S. und Y. XU: *On the optimal strongly connected orientations of city street graphs, I: Large grids*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1(2):199–222, 1988.
- [35] ZASLAVSKY, T.: *Signed graphs*. Discrete Applied Mathematics, 4:47–74, 1982. Erratum, **5**, 1983, p. 248.
- [36] ZASLAVSKY, T.: *Orientation of signed graphs*. European Journal of Combinatorics, 12(4):361–375, 1991.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe, dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat, dass sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. R. Schrader betreut worden.

Teilpublikationen:

- [1] Läscht, M. und B. Peis, *On a relation between the domination number and a strongly connected bidirection of an undirected graph*. Wird erscheinen in *Discrete Applied Mathematics*.
- [2] Kurz, S. und M. Läscht, *Bounds for the minimum oriented diameter*. Eingereicht bei *Journal of Graph Theory*.