Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus

Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik

Ein grundlegendes Problem des schulischen Mathematikunterrichts ist in der Abstraktheit der zu vermittelnden Mathematik begründet. Mathematik ist *die* Lehre von formalen, d.h. uninterpretierten Systemen. Lehrerinnen und Lehrer versuchen diesem Problem zu begegnen, indem sie mit Hilfe von Veranschaulichungsmitteln versuchen, die abstrakte Mathematik zu vermitteln. Mathematik-didaktische Studien haben zeigen können, dass Schülerinnen und Schüler dabei Theorien über diese Veranschaulichungsmittel erwerben und daher eine naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik entwickeln. *Mathematische Theorien aus Schülersicht sind empirische Theorien.*

Auch in der Geschichte der Mathematik hat sich mathematisches Wissen auf Grundlage von empirischen Theorien entwickelt. Die Forschungsfrage, die sich an diese Beobachtung anschließt – Wie werden mathematische Theorien, im Sinne von *empirischen Theorien,* (weiter-) entwickelt? – ist aus Sicht einer mathematikdidaktischen Grundlagenforschung eine sinnvolle und notwendige. Es ist eine Frage, der wir durch Diskussion der Arbeiten (historischer) mathematischer Experten nachgehen, für die wir auf ein außerordentlich gutes und systematisch angelegtes Quellenmaterial für die *empirische Theorieentwicklung* im Bereich der Mathematik zurückgreifen können.

Als ein besonders geeignetes Fallbeispiel besprechen wir die Entwicklung der *Differential- und Integralrechnung* von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und Leonhard Euler (1707-1783): Der *leibnizsche Calculus* ist eine wesentliche mathematische Theorie mit einem realen Gegenstands-bereich, die Objekte der Theorie sind konstruierte Kurven. Von besonderer Bedeutung für diese Theorie ist der Begriff der *infinitesimalen Größe* bzw. des *Differentials einer Größe* – und wie sich in der Analyse zeigt, ist er bestimmend für die Entwicklung des Calculus: *Der leibnizsche Differential-begriff* ist der zentrale Begriff der Theorie, der verschiedene Bereiche der Mathematik zusammen-bringt, aber gleichzeitig wegen seines komplizierten logischen Status schwierig zu begreifen ist:
In der Terminologie des wissenschaftstheoretischen Strukturalismus beschrieben, handelt es sich um einen so genannten *theoretischer Begriff* – ihm ist, im Gegensatz zu den *nicht-theoretischen Begriffen*, kein eindeutiges physikalisches Referenzobjekt zuordbar.

Wir können nun mit Hilfe einer *rationalen historischen Rekonstruktion* – d.h. wir rekonstruieren den Calculus als eine axiomatische Theorie und diskutieren ihn in einem Modell der modernen analytischen Geometrie – diskutieren, wie Mathematiker diesen *theoretischen Begriff* in immer wieder neuen Bedeutungszusammenhängen anwenden und dadurch eine substantielle mathematische Theorie weiterentwickeln.

Insgesamt, so legt unsere Analyse am Fallbeispiel nahe, sind es die durch *theoretische Begriffe* erzeugten Spannungsfelder auf der Repräsentations – , Definitions – und Begründungsebene, die eine profunde Entwicklung mathematischen Wissens, auf Grundlage einer Entwicklung *empirischer Theorien*, maßgeblich bestimmen. Die Analyse der Entwicklung des leibnizschen Calculus kann dabei belegen, dass es nicht nur aus methodischen, sondern auch aus inhaltlichen Gründen sinnvoll ist, Mathematik als eine *empirische Wissenschaft* zu vermitteln. Es zeigt sich dabei, dass *mathematische Begriffsbildung* eine typische mathematische Tätigkeit ist, die einen zentralen Platz in *Curricula* haben sollte. Insbesondere sollten *theoretische* und *nicht-theoretische* Begriffe in vielen verschiedenen Anwendungskontexten zusammengebracht werden.

The Development of the Leibnizian Calculus

A case study of the development of mathematical knowledge

The abstractness of mathematics is a fundamental problem in school-mathematics. Mathematics is *the* scholarship of formal, viz. uninterpreted systems. Teachers try to cope with this problem by illustrating abstract mathematics with the help of concrete material (physical objects). Didactical studies have shown that students thereby develop a conception of mathematics founded on these physical objects – converging to a rather physical-scientific conception of mathematics. In the terminology of the philosophy of sciences we can say: *Mathematical theories from the students' point of view are empirical theories*.

This statement motivates the following meaningful and necessary research question in mathematics education: How are mathematical theories, in the sense of *empirical theories*, developed?
It is a question we are striving to answer by analysing the mathematical practice of historical experts. This is reasonable as *in the history of mathematics, mathematical knowledge has also been developed on the basis of empirical theories*.

An adequate case study for our purposes is the development of the *calculus differentialis* and *calculus integralis* of Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) and Leonhard Euler (1707-1783): The *Leibnizian Calculus* is a prominent mathematical theory with a universe of discourse at hand. Of special importance in this theory is the term of the *infinitesimal quantity* respectively the *differential of a quantity*. We can show that it is decisive for the way the calculus develops: The *Leibnizian Differential* is the central term of the theory. It ties together different branches of mathematics, by the price of a complicated logical status: In the terminology of the philosophy of sciences' structuralism, it is a so-called *theoretical term* – which, in contrast to *non-theoretical terms* – has no physical object of reference.

By the help of a *rational (historical) reconstruction* – viz. reconstructing the Calculus as an axiomatic theory and discussing it in a model of analytical geometry – we analyse how mathematicians apply these *theoretical terms* in different contexts, thereby developing a substantial mathematical theory.

Overall we can conclude from our case study that it is the conflicting potential caused by the theoretical terms (in respect to representations, definitions and explanations) providing for a profound development of mathematical knowledge (in terms of an empirical theory). The analysis additionally proves that not only for methodological but for content reasons also, it is sensible to teach mathematics as an *empirical science*. We can show, that *forming mathematical terms* – in the meaning of bringing together *theoretical terms* and *non-theoretical terms* in as much different contexts as possible – is a typical mathematical practice, which should have an important place in *curricula*.