Zusammenfassung

Vor genau 100 Jahren erschienen Friedrich Schurs „Grundlagen der Geometrie“. Darin setzte Schur an die Stelle der Hilbertschen Kongruenzaxiome Bewegungsaxiome und erarbeitete so unter Benutzung von Umlegungen als besonders einfachen und anschaulichen Bewegungen eine Gesamtdarstellung der Grundlehren der Geometrie auf der Grundlage der Begriffe Transformation und Gruppe. Damit lieferte Schur eine Alternativ-Lösung für das seit Euklid virulente Kongruenzproblem – d.h. die Frage, inwieweit der Begriff der Bewegung, insofern durch Bewegung Figuren zur Deckung gebracht werden können, für die Definition der Kongruenz notwendig ist oder ob nicht viel mehr dem Begriff der geometrischen Bewegung der Begriff der Kongruenz zugrunde liegt.
David Hilbert hatte in seinen äußerst einflussreichen „Grundlagen der Geometrie“ dieses Problem gelöst, indem er Bewegungen aus der euklidischen Geometrie verbannte und den Kongruenzbegriff axiomatisch fixierte. Damit befriedigte Hilbert ein lange gehegtes Verlangen, demzufolge Bewegungen als ein im Grunde empirisches oder mechanisches Element einen Fremdkörper in einer Geometrie im Sinne Euklids oder Platons darstellen. Bis weit ins 19. Jahrhundert hinein galt es als vordringliche Aufgabe, Bewegungen, die mittels Superpositionsmethode die zentrale Beweisstrategie der Sätze (I,4), (I,8) und (III,24) in den Elementen Euklids darstellten, aus dem Bereich der Geometrie zu eliminieren. Auf der anderen Seite zeigt das Beispiel von Schurs „Grundlagen der Geometrie“, dass Bewegungen für die Geometrie von fundamentaler Bedeutung sein können.
Das Ziel dieser Untersuchung war es nun, die Umstände dieses Bedeutungswandels näher zu beleuchten und zu ergründen. Welche Motive gab es, sich mit dem Abbildungsbegriff auseinander zu setzen, wo sind die Wurzeln einer solchen Entwicklung zu suchen sind und wer hatte an dieser Entwicklung entscheidenden Anteil?
Ab Ende des 18. Jahrhunderts stellte sich sowohl in der Mechanik als auch in der Kristallographie die Aufgabe der einfachst möglichen mathematischen Beschreibung der Lageänderung eines starren Körpers. Dabei richtete sich der Fokus im Bereich der Mechanik auf die Tatsache, dass sich jede Bewegung eines starren Körpers als Schraubung darstellen lässt, wobei hier in ganz natürlicher Weise die Frage nach der Hintereinanderausführung von Bewegungen aufgeworfen wurde. In der Kristallographie suchte man die Vielfalt der Kristall-

morphologie durch Aufsuchen aller möglichen Deckabbildungen einer Kristallform zu erfassen, was wiederum von Beginn an auch die Untersuchung uneigentlicher Bewegungen erforderte.
Als nun ab Mitte des 19. Jahrhunderts der Begriff der starren Abbildung so weit präzisiert war, dass die Vielfalt möglicher Raumformen hinsichtlich der freien Beweglichkeit starrer Körper untersucht werden konnte, war das Feld für die gruppentheoretische als auch die axiomatische Beschreibung von Bewegungen bereitet.
Sehr häufig offenbarten die in diesem Zuge veröffentlichten Arbeiten eine starke Verbindung von grundlagen-geometrischen mit didaktisch-pädagogischen Fragestellungen, so dass schließlich auch die Rolle des Bewegungsbegriffs für den gymnasialen Geometrieunterricht thematisiert wurde.

Abstract

Exactly one century ago Friedrich Schurs „Foundations of Geometry“ was published. In this book Schur replaced Hilbert’s axioms of congruence by axioms of motion and compiled a complete exposition of the foundations of geometry in terms of transformation and group using half-turns around an axis of revolution as simple and vivid motions. Thus Schur supplied an alternative solution for the congruence-problem virulent since Euclid. More specifically this refers to the question, to what extent the term “motion”, if by motion figures can be superposed, is necessary for the definition of “congruence” or whether not much more the notion of congruence is the basis for the term “motion”.

David Hilbert had solved this problem in his extremely influential „Foundations of Geometry“ by fixing the notion of congruence axiomatically while dispensing with motion completely. Thereby Hilbert satisfied a long preserved demand, for motions have been considered an empirical or mechanical element foreign to geometry in the sense of Euclid or Plato. Well into the 19th century it was regarded a major deal to eliminate motion from Euclidean geometry, which by means of the method of superposition represents the central strategy of the proofs of the theorems (I, 4), (I, 8) and (III, 24) in Euclid’s Elements. On the other hand the example of Schur’s „Foundations of geometry” reveals that motions can be of fundamental importance for geometry.

The goal of this investigation was to light up and fathom the circumstances of this change of significance. What motivated an active discussion on this notion, from which fields of science emanated this debate and who delivered crucial contributions to this discussion?

In late 18th century mechanics as well as in crystallography arose the task of the simplest mathematical characterisation of rigid body motions. The focus within the range of mechanics was directed toward the fact that each movement of a rigid body can be represented as a screw-motion, whereby in a very natural way the problem of the composition of motions emerged. In crystallography one sought to tackle the variety of the morphology of crystals by discussing the symmetry operations, which seem to leave an arrangement of atoms unmoved while changing the orientation. This implies the investigation of motions which do not preserve orientation.

From the middle of the 19th century on, the term rigid motion was sufficiently specified to analyse space forms regarding their possibility of free mobility of rigid bodies, the field was prepared for the group-theoretical and the axiomatic description of motion.

Very frequently the work published in this course revealed a strong connection between foundational tasks of geometry with didactical-educational questions, so that finally also the role of motions for the teaching of geometry at secondary schools was discussed.