

Mathematische Modellierung thalamo-kortikaler Regelkreise mittels Systemen phasengekoppelter Oszillatoren

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Ann-Katrin Becher

aus Hamburg

2010

Berichterstatter: Prof. Dr. Dr. hc. Tassilo Küpper
Prof. Dr. Rüdiger Seydel

Tag der mündlichen Prüfung: 27.01.2010

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein System von 3 phasengekoppelten Oszillatoren zur mathematischen Modellierung thalamo-kortikaler Regelkreise eingeführt. Bei diesem Ansatz werden 3 Neuronenpopulationen des Thalamus, des Cortex sowie des Nucleus reticularis thalami durch jeweils einen Phasenoszillator mit zugehöriger Eigenfrequenz repräsentiert. Die mathematische Beschreibung der gegenseitigen Interaktionen dieser Areale führt dann zu einem Differentialgleichungssystem der 3 Phasenfunktionen. Das hergeleitete System weist Ähnlichkeiten zum klassischen Kuramoto-Modell für 3 phasengekoppelte Oszillatoren auf, besitzt jedoch zahlreiche Modifikationen. So wird hier unter anderem die Kopplungsstärke nicht durch eine globale Kopplungskonstante K bestimmt, sondern individuell für jede Oszillatorenpaarung festgelegt. Auf diese Weise erhalten wir bis zu 6 voneinander unabhängige Kopplungsparameter, welche die Dynamik des Systems regulieren.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Konfigurationen von thalamo-kortikalen Regelkreisen untersucht. Im ersten Fall wird die Dynamik eines thalamischen und zweier kortikaler Areale modelliert, welche untereinander jeweils exzitatorisch gekoppelt sind. Im zweiten Fall betrachten wir eine Konfiguration bestehend aus einem thalamischen, einem kortikalen und einem retikulären Areal. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass der Nucleus reticularis inhibitorisch auf den Thalamus projiziert, so dass wir ein gemischt inhibitorisch-exzitatorisches System erhalten.

Die resultierenden Systeme von phasengekoppelten Oszillatoren werden in dieser Arbeit ausführlich untersucht. Der Schwerpunkt der Analyse liegt dabei jeweils im Nachweis und der Darstellung von möglichen Synchronisationszuständen in Abhängigkeit von den Systemparametern. Mittels ausführlicher Bifurkationsanalysen werden die Unterschiede und Gemeinsamkeiten des hier eingeführten Systems zu klassischen Phasenmodellen wie dem Kuramoto-System klar herausgearbeitet.

Abstract

In this thesis a mathematical model of 3 phase coupled oscillators is introduced describing the interactions within a thalamo-cortical loop. The approach relies on the assumption that each of the relevant thalamic, cortical and reticular brain areas is represented by a phase oscillator operating on a certain frequency. The mathematical modeling of the thalamo-cortical interactions leads to a system in form of differential equations of the phases. As a result we obtain a Kuramoto-like system

but with some modifications. In our model the coupling strengths are not given by a global constant K , but they are defined by individual parameters. Therefore we deal with up to 6 independent coupling parameters which control the system's dynamics.

Furthermore in this thesis we consider two different configurations of thalamo-cortical loops. First we model the dynamics of a circuit consisting of one thalamic and two cortical areas which are excitatory coupled among each other. In the second case we analyse a configuration consisting of one thalamic, one cortical and one reticular area. The reticular nucleus is completely build up of inhibitory neurons. Hence we end up in a system with both excitatory and inhibitory connections.

In this thesis we investigate both systems of phase coupled oscillators in detail. In particular we focus on the existence of synchronized states. The characteristics of our phase systems in comparison to the Kuramoto model will be gained out by an extensive bifurcation analysis.

Einleitung

In der hier vorliegenden Arbeit betrachten wir *Systeme von phasengekoppelten Oszillatoren* zur Modellierung sogenannter *thalamo-kortikaler Regelkreise*. *Thalamus* und *Cortex* sind dabei umschriebene Areale von Neuronenpopulationen im menschlichen Großhirn, welche über *exzitatorische (=erregende)* Nervenbahnen miteinander in Verbindung stehen. Eine neuronale Projektion zwischen diesen beiden Arealen erfolgt dabei in der Regel *reziprok*, d.h. jede Erregung eines kortikalen Neurons durch ein thalamisches führt stets zu einer reziproken Erregung des jeweiligen thalamischen Neurons durch die kortikale Nervenzelle. Zusätzlich können unterschiedliche kortikale Areale über ebenso wechselseitige exzitatorische Projektionen miteinander interagieren. Die beschriebenen exzitatorischen thalamo-kortikalen Schleifen werden außerdem durch die Aktivität einer weiteren Hirnstruktur moduliert und reguliert; den sogenannten *Nucleus reticularis*. Im Gegensatz zu Thalamus und Cortex besteht dieses Areal vollständig aus *inhibitorischen (=hemmenden)* Neuronen. Der Nucleus reticularis empfängt einerseits ebenso exzitatorische Projektionen von Thalamus und Cortex, kann nun aber andererseits durch *inhibitorische Feedback-Projektionen* zum Thalamus die Aktivität einer bestehenden thalamo-kortikalen Schleife dämpfen.

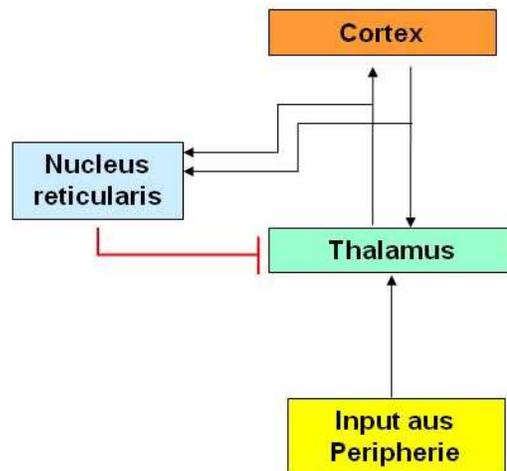


Abbildung 0.1.: Schematische Darstellung der exzitatorischen (schwarz) und inhibitorischen (rot) Projektionen zwischen thalamischen, kortikalen und retikulären Arealen.

In dieser Arbeit liefern wir ein mathematisches Modell zur Beschreibung eines solchen inhibitorisch-exzitatorischen physiologischen Netzwerks und analysieren dessen Dynamik. Der Grundansatz der mathematischen Modellierung eines thalamo-kortikalen Regelkreises ist hierbei die Repräsentation jedes relevanten Hirnareals durch jeweils einen *Oszillator*. Die exzitatorischen bzw. inhibitorischen Interaktionen der beteiligten Areale untereinander können dann mathematisch durch Kopplungsfunktionen in den Evolutionsgleichungen der Oszillatoren beschrieben werden. Hierbei lässt sich zeigen, dass in diesem Fall die Beschreibung der Dynamik der gekoppelten Oszillatoren auf die Charakterisierung der *Phasendynamik* zurückgeführt werden kann. Dementsprechend können wir hier ein korrespondierendes *Differentialgleichungssystem von phasengekoppelten Oszillatoren* ableiten.

Ausgehend von der Arbeit von *Hodgkin* und *Huxley* (1952) sind zahlreiche mathematische Modelle zur Darstellung gekoppelter Neuronen beschrieben worden (siehe z.B. [15],[35]). In den meisten Fällen wird dabei jeweils genau ein Neuron durch eine Systemvariable repräsentiert. Aus diesem Grund eignen sich Ansätze wie etwa das Hodgkin-Huxley-Modell eher weniger zur Modellierung größerer Zellpopulationen.

Das Neuartige des hier verwendeten Ansatzes zur mathematischen Modellierung eines neuronalen Regelkreises besteht gerade darin, dass durch die Systemvariablen nicht die Aktivität *einzelner Neuronen* modelliert wird, sondern hier durch jeden Phasenoszillator eine gesamte *Neuronenpopulation* gegeben ist. Diese Herangehensweise ist physiologisch gerechtfertigt; so reicht die Erregung eines einzelnen Neurons in einem der oben genannten Hirnareale für sich allein genommen nicht aus, um eine messbare Veränderung des Aktivitätszustandes des gesamten Hirnareals hervorzurufen. Erst durch die Erregung einer größeren Neuronenpopulation wird der gewünschte Effekt erzielt.

In dieser Arbeit werden wir zwei Modelle von jeweils 3 phasengekoppelten Oszillatoren analysieren, welche sich nicht in ihren Modellgleichungen aber in ihrer Parameterkonfiguration unterscheiden. Im ersten Fall betrachten wir zunächst ein System mit *rein exzitatorischen Kopplungen*; der Hintergrund ist hierbei die Darstellung eines thalamo-kortikalen Regelkreises, in welchen *ein thalamisches und zwei kortikale Areale* involviert sind, der Einfluss des Nucleus reticularis wird hierbei vernachlässigt. Im zweiten Fall setzen wir hingegen eine Konfiguration bestehend aus *einem thalamischen, einem kortikalen und einem retikulären Areal* voraus; aus diesem Grund existieren bei dem zweiten Modell sowohl *inhibitorische* als auch *exzitatorische* Kopplungen. Die Integration inhibitorischer Kopplungen in das Phasenmodell führt dabei zu deutlichen Veränderungen in der Dynamik:

Während bei rein exzitatorisch gekoppelten Systemen die Phasenoszillatoren unter

geeigneten Voraussetzungen zu einer sogenannten *Inphasen-Synchronisation* tendieren, führt bei inhibitorisch-exzitatorischen Systemen eine schwache Inhibition ebenso zu einer Inphasen-Synchronisation, eine hinreichend starke Inhibition hingegen zu einer *Antiphasen-Synchronisation*. Daneben lassen sich für mittelstarke Inhibitionen zahlreiche unterschiedliche Übergangszustände zwischen beiden Extremen feststellen. Auf diese Weise lässt sich darstellen, wie thalamo-kortikale Regelkreise durch unterschiedlich starke Aktivitätszustände des Nucleus reticularis reguliert werden können.

In Kapitel 1 stellen wir zunächst einige physiologische Grundlagen von thalamo-kortikalen Regelkreisen vor, deren Kenntnis für die anschließende mathematische Modellierung ausschlaggebend ist (Abschnitt 1.1). Anschließend erläutern wir die grundlegenden Ansätze der mathematischen Modellierung von solchen neuronalen Netzwerken durch Oszillatorensysteme und präsentieren die Konfigurationen von Hirnarealen, deren Dynamik in dieser Arbeit mathematisch repräsentiert werden soll (Abschnitt 1.2). Wie oben erwähnt betrachten wir in diesem Zusammenhang zwei unterschiedliche Settings von thalamo-kortikalen Regelkreisen, welche sich zwar nicht in ihren Modellgleichungen aber in der Konfiguration ihrer Systemparameter voneinander unterscheiden. Als nächsten Schritt führen wir dann eine Herleitung der korrespondierenden Systeme phasengekoppelter Oszillatoren durch und geben eine Einführung in die mathematische Analyse von Phasensystemen (Abschnitt 1.3).

Im Kapitel 2 erfolgt eine mathematische Analyse des *exzitatorischen Systems*. Hauptziel unserer Untersuchung ist hierbei die Herleitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten von *Synchronisation* an die Systemparameter. Des Weiteren leiten wir in diesem Kontext eine approximative Darstellung der Phasendifferenzen und Frequenzen der Oszillatoren im synchronen Zustand her, welche über Anwendung des *Zentrumsmanigfaltigkeit-Theorems* erhalten wird.

Kapitel 3 widmet sich einer ausführlichen Untersuchung des *inhibitorisch-exzitatorischen Systems*. Hierbei richten wir unser Augenmerk auf den inhibitorischen Kopplungsparameter und seinen Einfluss auf das Synchronisationsverhalten des Systems. Da die Unterschiede in der Dynamik, welche dieses System im Vergleich zu dem vorherigen mit rein exzitatorischer Kopplungskonfiguration aufweist, gerade durch die Stärke der Inhibition bestimmt werden, liegt der Ansatz nahe, diese inhibitorische Kopplungsgröße als *Bifurkationsparameter* aufzufassen. Der Übergang von einer schwachen zu einer starken Inhibition stellt sich dabei als Wechsel von sogenannter *Inphasen-* zu *Antiphasen-Synchronisation* dar. Je nach Konfiguration der übrigen exzitatorischen Kopplungsparameter sind dabei für den Mechanismus dieses Inphasen-Antiphasen-Übergangs zahlreiche unterschiedliche Bifurkationsszenarien möglich. Diese werden im Kapitel 3 ausführlich dargelegt. Variieren wir zusätzlich

eine der exzitatorischen Kopplungsgrößen, so lassen sich die auftretenden Änderungen in der Dynamik als *Bifurkationen mit Kodimension >1* charakterisieren.

Abschließend erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit sowie ein Ausblick auf mögliche zukünftige Erweiterungen der beschriebenen Modelle.

Im Anhang werden einige Rechnungen und Beweise nachgetragen, welche auf Inhalte des 2. und 3. Kapitels verweisen und diese ergänzen, aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in die Hauptkapitel aufgenommen wurden (A-B). Außerdem werden in diesem Zusammenhang die Methoden einiger numerische Analysen, deren Ergebnisse in Kapitel 2 und 3 präsentiert werden, näher erläutert.

Zur numerischen Simulation der Phasenmodelle und zur Erstellung der Bifurkationsdiagramme wurden zum einen die vorgegebenen Programmpakete *XPPAUT* (bzw. *AUTO*, siehe [7]) und *MATLAB* benutzt und zum anderen eigens erstellte *C++*-Programme verwendet.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1. Grundlagen der mathematischen Modellierung	1
1.1. Physiologische Grundlagen	1
1.1.1. Gliederung und Funktionsprinzip des Nervensystems	1
1.1.2. Aufbau eines Neurons	1
1.1.3. Synapse	2
1.1.4. Zentrales Nervensystem	3
1.1.5. Cortex	3
1.1.6. Thalamus	5
1.1.7. Der Nucleus reticularis im thalamo-kortikalen Regelkreis	5
1.2. Mathematische Modellierung thalamo-kortikaler Regelkreise	7
1.2.1. Repräsentation von Neuronenpopulationen durch Oszillatoren	7
1.2.2. Konfigurationen thalamo-kortikaler Regelkreise	8
1.3. Herleitung des mathematischen Modells	9
1.3.1. Phasendynamik eines einzelnen Oszillators	10
1.3.2. Herleitung des Phasenmodells	12
1.3.3. Grundlagen der Synchronisation	15
1.3.4. Exzitatorische vs. inhibitorische Kopplung	20
2. Exzitatorisches System	25
2.1. Einführung und erste Analyse	27
2.2. Berechnung von Schranken für das Synchronisationsregime	35
2.3. Desynchronisation via Sattel-Knoten-Verzweigung	48
2.4. Approximative Berechnung von Frequenz und Phasenshifts	62
2.5. Partielle Synchronisation	70
3. Inhibitorisch-exzitatorisches System	81
3.1. Einführung und erste Analyse	82
3.2. Übergang via superkritischer Pitchfork-Verzweigung	91
3.3. Konfiguration $K_{21} > K_{31}$	98
3.4. Subkritische Pitchfork-Verzweigungen	104
3.5. “Sprung“ von Inphasen- zu Antiphasen-Synchronisation	106
3.6. Tristabilität: Koexistenz von 3 Synchronisationszuständen	108

3.7. Existenz unendlich vieler Equilibria	112
3.8. Stabilitätswechsel via Hopf-Bifurkation	118
3.9. Desynchronisation	122
3.10. Grenzfall $K_{23} + K_{32} = K_{31}$	126
3.11. Verzweigungsanalyse in der 2-Parameter-Ebene	132
3.11.1. Darstellung in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene	133
3.11.2. Darstellung in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene	135
4. Diskussion und Ausblick	139
4.1. Modellierung	139
4.2. Resultate der mathematischen Analyse	140
4.3. Zukünftige Untersuchungen	142
A. Ergänzungen zum Exzitatorischen System	145
A.1. Nichtexistenz von Hopf-Verzweigungen	145
A.2. Berechnung der Kurven γ_L^i und γ_R^j	146
A.3. Berechnung der Kurven $\tau_{i,j}^{Lk}$ und $\tau_{i,j}^{Rk}$	147
B. Ergänzungen zum inhibitorisch-exzitatorischen System	149
C. Numerische Simulation	151
C.1. Numerische Berechnung der Phasen ϕ_j	151
C.2. Numerische Berechnung der durchschnittlichen Frequenzen	152
Literaturverzeichnis	153
Danksagung	157
Erklärung	159

1. Grundlagen der mathematischen Modellierung neuronaler Regelkreise durch Phasenoszillatoren

1.1. Physiologische Grundlagen

In diesem Abschnitt erläutern wir einige Basisbegriffe der Neurophysiologie, welche später für das Verständnis der Herleitung des mathematischen Modells zur Darstellung neuronaler Schaltkreise im Gehirn von Vorteil sind. Hierbei werden wir eine Beschreibung der elementaren funktionellen Grundeinheit des Nervensystem, des *Neurons (=Nervenzelle)*, liefern und die physiologischen Grundlagen der Verschaltung von Neuronen über chemische *Synapsen* erklären. Anschließend werden wir ausgewählte wichtige Strukturen des Gehirns vorstellen: *Großhirncortex*, *Thalamus* und *Nucleus reticularis*, da ja gerade diese Areale und ihre Interaktionen in dieser Arbeit durch ein mathematisches Modell repräsentiert werden sollen.

1.1.1. Gliederung und Funktionsprinzip des Nervensystems

Das Nervensystem besteht aus zwei Anteilen mit unterschiedlicher Lokalisation und Funktion. Hierbei wird das *zentrale Nervensystem (ZNS)* von dem *peripheren Nervensystem (PNS)* unterschieden. Strukturell umfasst das ZNS Rückenmark und Gehirn. Das Zentralnervensystem stellt das *nervöse Steuerzentrum* dar, in welchem Informationen aus dem Körper und der Außenwelt verarbeitet werden. Demgegenüber stellt das PNS das *Rezeptions- und Ausführungsorgan des ZNS* dar und ist durch die Nerven in der Körperperipherie repräsentiert, welche eine Verkabelung zwischen ZNS und peripheren Organen herstellen. Über das PNS erfolgt die Weitergabe von Informationen (Reizen) aus der Peripherie zum ZNS und umgekehrt auch der Weiterleitung von Steuerbefehlen aus dem ZNS in periphere Organe.

1.1.2. Aufbau eines Neurons

Das Neuron (=Nervenzelle) bildet den zellulären und funktionellen Grundbaustein des Nervensystems. Insgesamt enthält das menschliche Nervensystem ca. 10^{12} Neurone, die sich je nach Lokalisation und Funktion unterscheiden, jedoch alle den gleichen Grundaufbau besitzen. So besteht generell jede Nervenzelle aus einem *Zellkörper*

(*Soma* oder *Perikaryon*), welcher den Zellkern enthält, und aus einem oder mehreren *Fortsätzen*. Bei den Fortsätzen werden des Weiteren *Dendriten*, deren Funktion im *Empfang* von Erregungen besteht, und *Axone*, welche der *Weitergabe* von erregenden Impulsen dienen, unterschieden (siehe Abbildung 1.1a). In der Regel verfügt ein Neuron über nur ein Axon, die Anzahl der Dendriten ist hingegen variabel. Je nach Anzahl der Fortsätze können so verschiedene Neuronentypen unterschieden werden (Abbildung 1.1b).

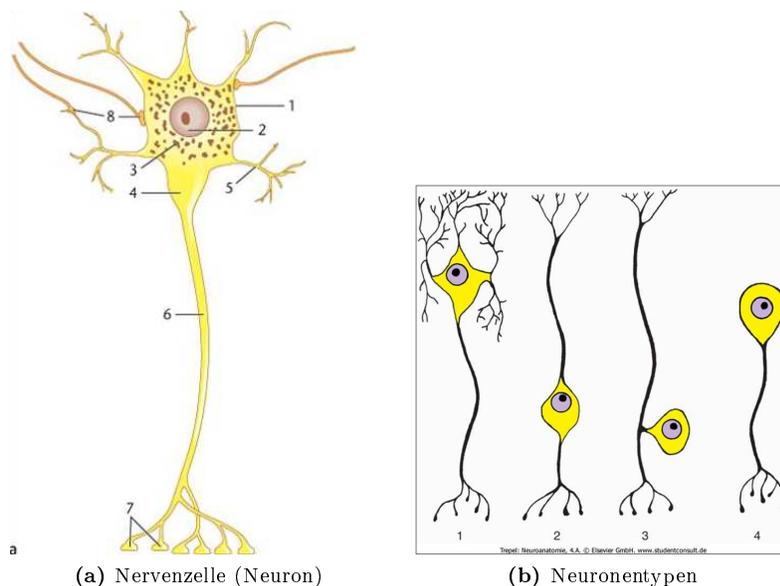


Abbildung 1.1.: Die beiden Abbildungen sind jeweils entnommen aus [33].

(a): Schematische Darstellung eines Prototyps. **1** Perikaryon (Soma), **2** Zellkern, **3** raues endoplasmatisches Retikulum, **4** Axonursprung, **5** Dendrit, **6** Axon, **7** synaptische Endknöpfchen, **8** synaptische Endknöpfchen anderer Nervenzellen.

(b): Die Axone mit den synaptischen Endknöpfchen sind jeweils nach unten gerichtet. **1** Multipolares Neuron, **2** bipolares Neuron, **3** pseudounipolares Neuron, **4** unipolares Neuron.

1.1.3. Synapse

Nervenzellen sind in der Lage, elektrische Signale zu leiten und auf diese Weise erregende oder hemmende Informationen an benachbarte Zellen weiterzugeben. Dazu befinden sich am Ende eines Axons terminale Aufzweigungen, welche knötchenförmige Auftreibungen besitzen (*synaptische Endknöpfchen*, siehe Abbildung 1.1). Die Endknöpfchen bilden gemeinsam mit der Zellmembran einer benachbarten Zelle sowie dem dazwischenliegenden Spalt sogenannte *Synapsen*, an welchen gerade die Signalübertragung von einer Zelle auf die nächste stattfinden kann. Die Erregungsübertragung erfolgt dabei über chemische Botenstoffe, welche als *Neurotransmitter* bezeichnet werden. Eine Erregung der *präsynaptischen* (d.h. vor der Synapse liegenden) Zelle führt dazu, dass es an der Zellmembran der jeweiligen synaptische Endknöpfchen zu einem Einstrom von Ca^{2+} - Ionen kommt. Die folgende Erhöhung der intrazellulären Ca^{2+} - Konzentration stellt den Trigger zur Freisetzung

des Neurotransmitters in den synaptischen Spalt dar. Der Botenstoff bindet wiederum an Rezeptoren der *postsynaptischen* Membran und löst auf diese Weise in der postsynaptischen Zelle eine weitere Signalkaskade aus, innerhalb derer diese Zelle je nach Neurotransmitter elektrisch *erregt* oder *gehemmt* wird. In diesem Zusammenhang kann daher zwischen *erregenden* (= *exzitatorischen*) und *hemmenden* (*inhibitorischen*) *Synapsen* bzw. zwischen *exzitatorischen* und *inhibitorischen Neuronen* unterschieden werden.

Die meisten Neurone sind über zahlreiche Synapsen mit einer Vielzahl anderer Nervenzellen gekoppelt. In diesem Zusammenhang sind die *Afferenzen* eines Neurons, d.h. die in einem Neuron *ankommenden* Informationen, von dessen *Efferenzen*, d.h. die von einem Neuron ausgesendeten Informationen, zu unterscheiden.

1.1.4. Zentrales Nervensystem

Im ZNS sind die sogenannte *graue* und die *weiße Substanz* voneinander abzugrenzen. Die *graue Substanz* besteht dabei aus Ansammlungen von *Perikaryen* zentralnervöser Neurone, wohingegen die *weiße Substanz* nur die *Fortsätze* von Nervenzellen enthält. Im Gehirn ist der überwiegende Teil der grauen Substanz außen lokalisiert und umhüllt dabei als *Rinde (Cortex)* das Großhirn und das Kleinhirn. Dementsprechend können *Großhirncortex* und *Kleinhirncortex* unterschieden werden. Da wir uns in den späteren mathematischen Modellierungen ausschließlich auf den Großhirncortex beziehen werden, wird im Folgenden der Begriff *Cortex* immer synonym mit *Großhirncortex* verwendet (siehe 1.1.5).

Der restliche Teil der grauen Substanz ist in die weiße Substanz eingebettet und bildet innerhalb dieser sogenannte *Nervenkerne (Nuclei)*. Als Beispiel für eine Ansammlung von solchen Nuclei ist in diesem Zusammenhang der *Thalamus* zu nennen, ein Areal des Zwischenhirns, das sich aus vielen Einzelkernen zusammensetzt und in unseren weiteren Ausführungen eine wichtige Rolle spielt (siehe 1.1.6).

1.1.5. Cortex

Der Großhirncortex enthält $10^9 - 10^{10}$ Neurone und besitzt eine außerordentlich komplexe Struktur. Afferenzen erhalten kortikale Areale von mehreren Quellen: Über sogenannte *Assoziationsfasern* kann ein kortikales Neuron Informationen von weiteren kortikalen Nervenzellen anderer Areale empfangen. Des Weiteren erhalten kortikale Neurone *thalamo-kortikale* Afferenzen von Kerngebieten des Thalamus (siehe 1.1.6). Über diese thalamo-kortikalen Projektionen erhalten die Zellen des Cortex Informationen über Wahrnehmungen der unterschiedlichen Sinnesorgane.

Auch *effe*rent sind ein Großteil der kortikalen Neurone mit Arealen des Thalamus verbunden. Thalamo-kortikale und kortiko-thalamische Projektionen sind dabei in der Regel wechselseitig (*reziprok*) angelegt: Erhält ein Rindenareal *Afferenzen* von einem bestimmten Kerngebiet des Thalamus, so existiert dann auch immer eine *effe*rente Verbindung des jeweiligen kortikalen Gebietes mit dem entsprechenden thalamischen Areal (und umgekehrt). Eine Erregung eines kortikalen Areals durch ein Kerngebiet des Thalamus führt somit stets zu einer reziproken Erregung des jeweiligen thalamischen Gebiets durch den Cortex (und umgekehrt).

Kortikale Neurone mit direkten thalamischen Afferenzen sind auf diese Weise in der Lage, Informationen, welche der Thalamus über Sinneswahrnehmungen erhalten hat, zunächst einmal interpretationsfrei zum Bewusstsein zu bringen. Anschließend erfolgt über Assoziationsfasern eine Verknüpfung von unterschiedlichen Informationen, wodurch Handlungskonsequenzen als Antwort auf die jeweiligen Sinneswahrnehmungen generiert werden können.

Die Möglichkeit der Aufzeichnung kortikaler Aktivität mittels der *Elektroenzephalographie (EEG)* stellt einen wichtigen Zugangsweg zum Verständnis der Beziehungen zwischen sensorischen, motorischen, kognitiven und emotionalen Prozessen dar (vgl. [25]). Dabei werden mittels Elektroden an der Kopfoberfläche kontinuierliche elektrische Potentialschwankungen abgeleitet. Frequenzen und Amplituden dieser Potentiale spiegeln dann den Aktivitätszustand des Cortex wider. Hierbei erfolgt eine Klassifizierung in folgende Rhythmen:

- **α – Rhythmus:** herrscht bei gesunden Erwachsenen im wachen, aber unaufmerksamen Zustand vor. Dieser Rhythmus entspricht einer Frequenz von 8-13 Hz (durchschnittlich 10 Hz).
- **β – Rhythmus:** Bei Sinnesreizen oder geistiger Tätigkeit kommt es zu einem Verschwinden der α – Wellen (*α – Blockade*). Stattdessen kommt es zum Auftreten hochfrequenter β – Wellen: Frequenz 13-30 Hz (durchschnittlich 20 Hz).
- **γ – Rhythmus:** Als γ – Wellen werden solche mit einer Frequenz über 30 Hz bezeichnet. Sie treten bei Lern- und Aufmerksamkeitsprozessen auf.
- **ϑ – Rhythmus:** Hierbei handelt es sich um Wellen mit langsamer Frequenz (4-7 Hz). Bei einem wachen Erwachsenen treten sie nur mit sehr kleiner Amplitude auf, mit größerer Amplitude sind sie hingegen im Schlaf aufzuzeichnen.

Der Aktivitätszustand des Cortex ist somit entscheidend abhängig vom Aufmerksamkeitszustand der jeweiligen Person und der Intensität der wahrgenommenen Sinesindrücke. Das “Tor zum Bewusstsein“ bildet hierbei der Thalamus über entspre-

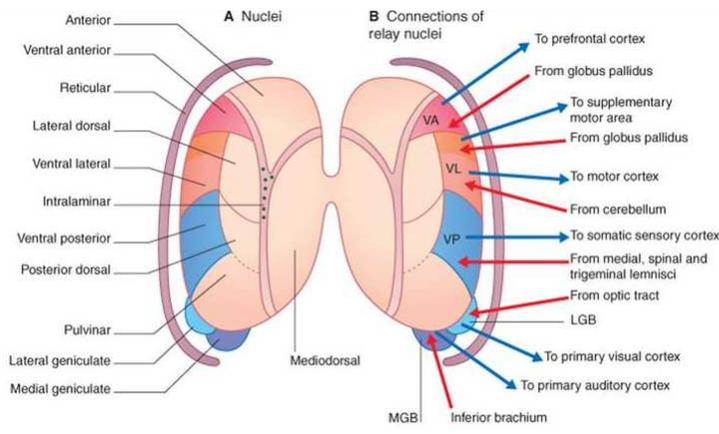


Abbildung 1.2.: Darstellung der Kerngebiete des Thalamus und des Nucleus reticularis sowie einiger thalamischen Afferenzen und Efferenzen. Die Abbildung wurde entnommen aus [9].

chende thalamo-kortikale Projektionen. Funktion und Arbeitsweise dieses Hirnareals werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

1.1.6. Thalamus

Der Thalamus befindet sich im Zwischenhirn und ist aus zahlreichen Einzelkernen zusammengesetzt (siehe Abb. 1.2). Alle thalamischen Nuclei mit einer Ausnahme (der *Nucleus reticularis*) verfügen über *reziproke exzitatorische* Faserverbindungen mit dem Großhirncortex. Nahezu alle sensiblen (Tasten, Vibration, Schmerz) und sensorischen (Sehen, Hören, Schmecken) Nervenbahnen (mit Ausnahme der olfaktorischen Bahnen) projizieren in ein thalamisches Kerngebiet und werden von da aus über entsprechende Synapsen zum Cortex weiterverschaltet. Die Erregbarkeit eines thalamischen Neurons wird dabei durch Afferenzen von anderen thalamischen Neuronen oder durch afferente Projektionen aus anderen Hirnarealen moduliert. Auf diese Weise kann die Weitergabe von Informationen an den Cortex erleichtert oder erschwert werden (durch Herab- bzw. Heraufsetzen der Erregbarkeitsschwelle). Aufgrund dieser Filterfunktion wird der Thalamus häufig als *“Tor zur Großhirnrinde“* bzw. als *“Tor zum Bewusstsein“* bezeichnet.

Von entscheidender Bedeutung für die Regulation der thalamo-kortikalen Aktivität ist dabei der *Nucleus reticularis*, welcher anatomisch zwar als thalamisches Kerngebiet aufgefasst wird, funktionell aber eine eigenständige Struktur darstellt.

1.1.7. Der Nucleus reticularis im thalamo-kortikalen Regelkreis

Der Nucleus reticularis ist wie ein *“Netz“* um die vorderen und seitlichen Anteile der übrigen Thalamuskerngelegen (siehe Abb. 1.2). Alle Nervenfasern, welche von thalamischen Arealen zum Cortex verlaufen, durchqueren den Nucleus reticularis und

geben *kollaterale Äste* dahin ab. Auf diese Weise erhält dieses Kerngebiet gewissermaßen eine Kopie jeder Information, welche von Neuronen des Thalamus zu solchen des Cortex projiziert wird. Ebenso verhält es sich bei kortiko-thalamischen Verbindungen: die entsprechenden Nervenfasern ziehen durch den Nucleus reticularis, geben Kollaterale darin ab und versorgen diesen dadurch mit allen Informationen über die kortiko-thalamischen Interaktionen.

Während es sich bei den thalamo-kortikalen und kortiko-thalamischen Projektionen ausschließlich um *exzitatorische* Verbindungen handelt, besteht der Nucleus reticularis komplett aus *inhibitorischen* Neuronen. Wird nun ein solches Neuron durch die Kollaterale einer thalamo-kortikalen oder kortiko-thalamischen Projektion erregt, so verfügt das jeweilige Neuron in der Regel über eine efferente *inhibitorische* Verbindung zu dem korrespondierenden thalamischen Kerngebiet (siehe Abb. 1.3).

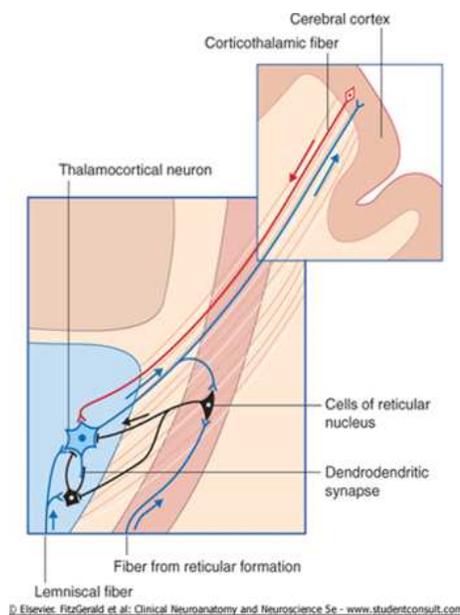


Abbildung 1.3.: Abbildung entnommen aus [9]

Um die Bedeutung dieser Hemmwirkung durch den Nucleus reticularis zu verstehen, vergegenwärtigen wir uns noch einmal das in 1.1.5 beschriebene Prinzip der thalamo-kortikalen Verschaltung:

Jede Erregung eines kortikalen Gebiets durch den Thalamus führt stets zu einer *reziproken Erregung* des entsprechenden thalamischen Areals durch den Cortex. Diese Erregung hat wiederum eine reziproke Erregung des Cortex durch den Thalamus zur Folge usw. Hiermit wird deutlich, dass ohne eine Regulation der thalamo-kortikalen Schleife durch andere Hirnareale aus diesem Verschaltungsprinzip eine Über- bzw. Dauererregung der involvierten kortikalen und thalamischen Gebiete resultieren würde. In diesem Zusammenhang stellt der Nucleus reticularis eine wichtige Kontrollin-

stanz dar:

Über die Abgabe von Kollateralen führt eine thalamo-kortikale Projektion auch zur Erregung von Neuronen des Nucleus reticularis, welche nun wiederum das involvierte thalamische Areal inhibieren. Durch diese Modulation wird eine Überstimulation der betreffenden thalamischen und kortikalen Areale verhindert (vgl. [6]).

Darüberhinaus spielt der Nucleus reticularis eine wichtige Rolle beim Mechanismus der "gerichteten Aufmerksamkeit" sowie bei der Steuerung von Schlaf- und Wachzustand. Klinische Relevanz erlangt dieser Nerven Kern u.a. bei bestimmten Formen epileptischer Anfälle (vgl. [33]).

1.2. Mathematische Modellierung thalamo-kortikaler Regelkreise

1.2.1. Repräsentation von Neuronenpopulationen durch Oszillatoren

Der Grundstein zur mathematischen Modellierung neuronaler Aktivität wurde 1952 durch das von *Hodgkin* und *Huxley* entwickelte System zur Modellierung der Weiterleitung elektrischer Signale im Tintenfischaxon gelegt (vgl. [15]). Das Modell beschreibt dabei die Potentialänderung einer erregbaren Zelle über den Ein- und Ausfluss von Ionen und den von außen angelegten Strom. Zahlreiche Erweiterungen dieses Systems wurden seitdem entwickelt. Auch heute noch stellt das Hodgkin-Huxley-Modell einen typischen Ansatz zur Beschreibung der Dynamik einzelner erregbarer Zellen oder auch kleiner Zellnetzwerke dar. Für die Modellierung größerer Zellpopulationen ist dieses Modell hingegen weniger geeignet.

In dieser Arbeit wählen wir daher einen anderen Ansatz. In Abschnitt 1.1.5 wurde bereits dargelegt, dass sich die Aktivität von kortikalen Arealen über EEG-Messungen als *oszillatorische Dynamik* darstellt. Die oszillatorischen Bewegungen, die dabei über das EEG aufgezeichnet werden, sind dabei nicht jeweils von einem einzelnen Neuron generiert, sondern entstehen durch die Überlagerung der Potentialschwankungen einer größeren Population kortikaler Neurone. Aus diesem Grund liegt es nahe, bei der Modellierung von Interaktionen verschiedener Hirnareale einen Ansatz zu wählen, bei dem die (jeweils aus vielen Zellen bestehenden) relevanten Areale durch jeweils *eine* oszillatorische Entität repräsentiert sind. Die Dynamik dieser Oszillatoren und ihre Interaktionen untereinander lassen sich dann durch ein entsprechendes *System gekoppelter Oszillatoren* beschreiben. Aus diesem Grund werden wir in den nachfolgenden Abschnitten darlegen, auf welche Weise eine oszillatorische Dynamik mathematisch repräsentiert werden kann. Ausserdem werden wir zeigen, dass wir uns bei der Modellierung der oszillatorischen Prozesse auf die Beschreibung der *Phasendynamik* beschränken können.

Zahlreiche verschiedene Typen von rhythmischer Aktivität werden in den unterschiedlichen Gehirnarealen beobachtet (siehe 1.1.5). Diese Frequenzcluster sind von Bedeutung sowohl bei physiologischen als auch bei pathologischen Prozessen (vgl. [4], [30]). In beiden Fällen spielt das Phänomen der *Synchronisation*, auch als *Frequency locking* bezeichnet, eine wichtige Rolle. Hierunter verstehen wir einen Zustand, bei dem die in den jeweiligen Arealen vorherrschenden Rhythmen zueinander in einem festen Verhältnis stehen (z.B. $n \cdot$ Frequenz eines thalamischen Areals $\approx m \cdot$ Frequenz eines kortikalen Areals). Den Begriff der Synchronisation werden wir in 1.3.3 mathematisch definieren.

1.2.2. Konfigurationen thalamo-kortikaler Regelkreise

In den mathematischen Modellen dieser Arbeit wird jedes relevante Hirnareal durch einen Oszillator mit einer entsprechenden charakteristischen Eigenfrequenz repräsentiert. Hierbei werden wir zwei unterschiedliche Konfigurationen von jeweils drei gekoppelten Oszillatoren betrachten.

1. Im ersten Fall betrachten wir drei Areale, welche allesamt durch rein *exzitatorische* Kopplungen miteinander verbunden sind. So kann dabei ein Oszillator ein Gebiet des *Thalamus* (T) repräsentieren, welches mit zwei weiteren *kortikalen Arealen* (C_1, C_2) reziprok exzitatorisch gekoppelt ist. Zwischen den beiden kortikalen Oszillatoren besteht ebenfalls eine exzitatorische Verbindung (über Assoziationsfasern) (Abb. 1.4). Die Kopplungsstärken sind hierbei in der Regel als *asymmetrisch* vorauszusetzen, d.h. die Oszillatoren beeinflussen sich gegenseitig unterschiedlich stark.

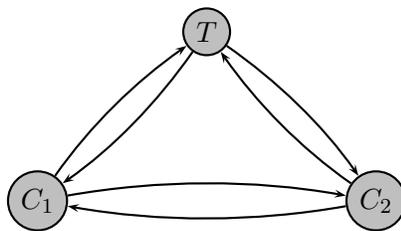


Abbildung 1.4.: 1.Konfiguration: Modell mit einem thalamischen (T) und zwei kortikalen Arealen (C_1, C_2) mit jeweils wechselseitigen exzitatorischen Kopplungen.

2. Im zweiten Fall betrachten wir wiederum drei Areale, allerdings werden wir bei dieser Konfiguration auch den *Nucleus reticularis* berücksichtigen. Wie im ersten Modell repräsentiert ein Oszillator ein Gebiet des Thalamus, ein weiteres ein kortikales Areal und der dritte Oszillator ein Kerngebiet des Nucleus reticularis. Demensprechend ist berücksichtigt, dass alle Projektionen vom Nucleus

reticularis zum Thalamus als *inhibitorisch* vorauszusetzen sind (roter Pfeil in Abb. 1.5). Darüberhinaus besitzt der Nucleus reticularis keine afferenten Verbindungen zum Cortex. Alle übrigen Kopplungen sind wiederum als *exzitatorisch* vorauszusetzen. Auch hier gehen wir wieder von *asymmetrischen* Kopplungen aus.

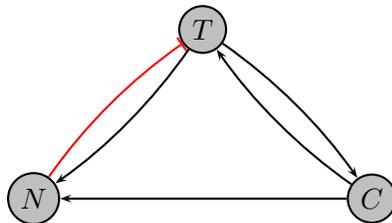


Abbildung 1.5.: 2.Konfiguration: Modell mit einem thalamischen, einem kortikalen und einem Areal des Nucleus reticularis. Exzitatorische Kopplungen schwarz dargestellt, Inhibition rot. Der Nucleus reticularis ist *efferent* aber *nicht afferent* mit dem Cortex verbunden.

Zur Herleitung entsprechender mathematischer Modelle sind nun die folgenden Arbeitsschritte durchzuführen:

- Mathematische Repräsentation einer oszillatorischen Dynamik
- Darstellung der Kopplungen der Oszillatoren untereinander;
In diesem Zusammenhang sind folgende Eigenschaften der Kopplungen zu berücksichtigen:
 - *Asymmetrische* Kopplungen
 - *Inhibitorische* vs. *exzitatorische* Kopplungen
- Mathematische Definition des Begriffs der *Synchronisation*

Im folgenden Abschnitt 1.3 werden wir nun sukzessive diese Schritte unternehmen, um dann abschließend zu den obigen zwei Konfigurationen korrespondierende mathematische Modelle präsentieren zu können.

1.3. Herleitung des mathematischen Modells

In diesem Abschnitt werden wir die Herleitung der dieser Arbeit zu Grunde liegenden Systeme phasengekoppelter Oszillatoren durchführen und den Begriff der Phasensynchronisation einführen. Wir werden uns dabei an Methoden von *Kuramoto* orientieren, wie sie etwa in [17] und [21] beschrieben wurden. Abschließend erfolgt ein kurzer bibliographischer Abriss bezüglich der Verwendung von Phasensystemen zur Modellierung inhibitorisch-exzitatorischer neuronaler Prozesse.

1.3.1. Phasendynamik eines einzelnen Oszillators

In diesem Abschnitt werden wir zunächst erläutern, auf welche Weise eine oszillatorische Dynamik mathematisch repräsentiert ist. Anschließend wird dargelegt, wie die Dynamik von selbsterhaltenden Oszillationen auf die Beschreibung der *Phasendynamik* zurückgeführt werden kann. Die folgenden Ausführungen orientieren sich dabei am Ansatz von *Kuramoto* [17] und *Pikovsky et al.* [21].

Wie in [17] und [21] betrachten wir zunächst ein N -dimensionales ($N \geq 2$) dissipatives autonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\dot{X} = f(X), \quad X = (X_1, \dots, X_N), \quad (1.1)$$

und setzen weiter voraus, dass (1.1) eine *stabile periodische* Lösung $X_0(t)$ besitzt. Der Grenzyklus $X_0(t)$ repräsentiert dann gerade einen "selbsterhaltenden Oszillator". Das nächste Ziel ist es nun, die Dynamik des Oszillators, welche durch (1.1) charakterisiert ist, auf die Beschreibung der Phasendynamik zurückzuführen. Hierfür müssen wir zunächst den Begriff der *Phase* definieren.

1.1 Definition (Phase und natürliche Frequenz eines Oszillators)

Für das System (1.1) bezeichne X_0 eine zugehörige stabile stationäre Lösung sowie T_0 die Periode von X_0 . Eine skalare Funktion $\phi(t) = \tilde{\phi}(X_0(t))$ heißt **Phase** des Oszillators X_0 , wenn ϕ (bzw. $\tilde{\phi}$) entlang $X_0(t)$ linear wächst und zwar mit jeder Rotation um genau 2π , d.h.

$$\begin{aligned} \phi(t + T_0) &= \phi(t) + 2\pi \\ \dot{\phi} &\equiv \omega_0 \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

ω_0 heißt dann die zum Oszillator X_0 gehörige **natürliche Frequenz**.

Eine Phasenfunktion ϕ mit den genannten Eigenschaften existiert immer, wie es das folgende Lemma zeigt:

1.2 Lemma

Es sei $X_0(t)$ ein stabiler Grenzyklus mit Periode T_0 des dynamischen Systems (1.1). Dann existiert stets eine skalare Phasenfunktion ϕ mit zugehörigen Eigenschaften (1.2). Für jede stetig differenzierbare skalare Funktion $\rho(t)$, welche entlang $X_0(t)$ streng monoton anwächst, gilt dann die Beziehung

$$\phi = \omega_0 \int_0^\rho \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^{-1} d\rho \quad (1.3)$$

Beweis. Eine Funktion ρ mit den geforderten Eigenschaften existiert immer, so können wir etwa $\rho(t)$ exemplarisch als die *Weglänge* von $X_0(0)$ zu $X_0(t)$ definieren. Da

X_0 stetig differenzierbar ist, ist dann auch ρ stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und somit auch umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Notieren wir weiter $\tau(\rho)$ für die Umkehrfunktion von $\rho(t)$, so folgt mit dem bekannten Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{d}{d\rho}\tau(\rho) = \left(\frac{d\rho}{dt}(\tau(\rho))\right)^{-1}$$

Definieren wir nun ϕ gemäß (1.3) so gilt für $t \geq 0$:

$$\phi(t) = \omega_0 \int_0^{\rho(t)} \frac{d}{d\rho}\tau(\rho) d\rho = \omega_0 \cdot [\tau(\rho)]_0^{\rho(t)} = \omega_0 t$$

Weiter erhalten wir mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$

$$\phi(t + T_0) = \omega_0 t + \omega_0 T_0 = \phi(t) + 2\pi$$

□

Somit folgt für jede Phasenfunktion ϕ und die natürliche Frequenz ω_0 :

$$\omega_0 = \dot{\phi} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial X_k} \dot{X}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial X_k} f_k(X) \quad (1.4)$$

Wir betrachten nun wiederum (1.1), aber diesmal mit einer kleinen Störung:

$$\dot{X} = f(X) - K p(X) \quad (1.5)$$

Der skalare Parameter K reguliert hierbei die Stärke der Störung. Des Weiteren betrachten wir hier nur autonome Störungen $p(X)$, welche nicht explizit von der Zeit t abhängen (der zeitabhängige Fall kann analog betrachtet werden, siehe [21]). Für das gestörte System und jede Phasenfunktion ϕ erhalten wir nun aus (1.4) und (1.5):

$$\dot{\phi} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial X_k} \dot{X}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial X_k} (f_k(X) - K p_k(X)) = \omega_0 - K \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial X_k} p_k(X) \quad (1.6)$$

Für kleine Störungen $|K| \ll 1$ verläuft der Fluss $X(t)$ nahe des Grenzyklus $X_0(t)$, so dass wir in erster Näherung

$$\dot{\phi} = \omega_0 - K \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi(X_0)}{\partial X_k} p_k(X_0) \quad (1.7)$$

setzen können. Da wir jeden Punkt $X_0(t)$ des Grenzyklus mit der entsprechenden

Phase $\phi(t)$ identifizieren können, können wir nun (1.7) in eine reine Phasendifferentialgleichung transformieren:

$$\dot{\phi} = \omega_0 - K Q(\phi), \quad (1.8)$$

wobei

$$Q(\phi) := \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi(X_0(\phi))}{\partial X_k} p_k(X_0(\phi))$$

Wir haben hiermit dargelegt, dass bei kleiner Störung K die oszillatorische Bewegung (1.5) durch die Dynamik der Phase in (1.8) beschrieben werden kann. Im folgenden Abschnitt werden wir nun diese Ausführungen auf Systeme von miteinander gekoppelten Oszillatoren erweitern.

1.3.2. Herleitung des Phasenmodells

Als nächsten Schritt betrachten wir hier ein System von 3 miteinander gekoppelten Oszillatoren X^1, X^2, X^3 :

$$\begin{aligned} \dot{X}^1 &= f_1(X^1) - K_{12} p_{12}(X^1, X^2) - K_{13} p_{13}(X^1, X^3) \\ \dot{X}^2 &= f_2(X^2) - K_{21} p_{21}(X^2, X^1) - K_{23} p_{23}(X^2, X^3) \\ \dot{X}^3 &= f_3(X^3) - K_{31} p_{31}(X^3, X^1) - K_{32} p_{32}(X^3, X^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

mit $X^i = (X_1^i, \dots, X_N^i)$ für $N \geq 2$. Im Falle $K_{ij} = 0 \forall i, j$ besitze jedes ungestörte System $\dot{X}^i = f(X^i)$ einen stabilen Grenzzyklus mit Periode T_i . Die Störfunktionen p_{ij} hängen in diesem Fall von der *Interaktion* der Oszillatoren untereinander ab. Die einzige Voraussetzung, die wir in diesem Zusammenhang an die Dynamik der Oszillatoren stellen, ist somit die Annahme, dass die *autonome Dynamik* eines jeden Oszillators (modelliert jeweils durch $f_i(X_i)$) strikt getrennt von der *Interaktion* eines Oszillators mit den jeweiligen anderen beiden (Terme p_{ij}) beobachtet werden kann. Die Stärke der Kopplung zwischen i -ten und j -ten Oszillator wird wiederum gesteuert durch die Parameter K_{ij} und K_{ji} .

Analog zu der Argumentation im vorangegangenen Abschnitt 1.3.1 erhalten wir die folgenden Evolutionsgleichungen für die zugehörigen Phasen ϕ_i mit 2π -periodischen *Interaktionsfunktionen* Q_{ij} und *natürlichen Frequenzen* $\omega_i = 2\pi/T_i$:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - K_{12} Q_{12}(\phi_1, \phi_2) - K_{13} Q_{13}(\phi_1, \phi_3) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - K_{21} Q_{21}(\phi_2, \phi_1) - K_{23} Q_{23}(\phi_2, \phi_3) \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_3 - K_{31} Q_{31}(\phi_3, \phi_1) - K_{32} Q_{32}(\phi_3, \phi_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Als 2π -periodische Funktionen sind die Interaktionsterme Q_{ij} als doppelte Fourier-

reihen darstellbar:

$$Q_{ij}(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (a_{ij}^{kl} \cos(k\phi_i + l\phi_j) + b_{ij}^{kl} \sin(k\phi_i + l\phi_j))$$

Besteht keine Kopplung zwischen den Oszillatoren, d.h. $K_{ij} = 0 \forall i, j$, und setzen wir außerdem $\phi_k(0) = 0 \forall k$ voraus, so folgt

$$\dot{\phi}_k(t) = \omega_k t$$

und somit auch

$$Q_{ij}(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (a_{ij}^{kl} \cos((k\omega_i + l\omega_j)t) + b_{ij}^{kl} \sin((k\omega_i + l\omega_j)t)).$$

Sind natürlicherweise keine oszillatorischen Bewegungen vorhanden, d.h. liegt der Grenzfall $\omega_k = 0 \forall k$ vor, so soll nun das entsprechende Phasensystem so konfiguriert sein, dass auch durch Kopplung der Phasen in diesem Fall keinerlei Dynamik entsteht. Daher muss mathematisch sichergestellt sein, dass im Falle $\omega_k = 0 \forall k$ und $K_{ij} \neq 0$ weiterhin $\dot{\phi}_k = 0$ gilt. Aus diesem Grund folgt

$$a_{ij}^{00} = 0.$$

Ist die Frequenz $|k\omega_i + l\omega_j| \gg 0$, so beschreibt der zugehörige Fourier-Term eine schnelle Drehung und ist für die Langzeitdynamik der Phasenbewegungen vernachlässigbar. Demgegenüber sind die *resonanten* Terme in Q_{ij} entscheidend:

$$k\omega_i + l\omega_j \approx 0.$$

Im weiteren Verlauf setzen wir nun voraus, dass die natürlichen Frequenzen $\omega_j > 0$ bzgl. $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ näherungsweise die Resonanzbedingung erfüllen:

$$n_i \omega_i \approx n_j \omega_j. \tag{1.11}$$

Damit sind alle Vielfachen $(k, l) = m \cdot (n_i, -n_j)$ resonant und mitbestimmend für die Dynamik der Phasen. Durch Vernachlässigung der nicht-resonanten Terme in Q_{ij} erhalten wir somit die folgende Modifikation der Evolutionsgleichungen (1.10):

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - K_{12}q_{12}(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - K_{13}q_{13}(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - K_{21}q_{21}(n_2\phi_2 - n_1\phi_1) - K_{23}q_{23}(n_2\phi_2 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_3 - K_{31}q_{31}(n_3\phi_3 - n_1\phi_1) - K_{32}q_{32}(n_3\phi_3 - n_2\phi_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

mit

$$q_{ij}(n_i\phi_i - n_j\phi_j) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(a_{ij}^{mn_i, -mn_j} \cos(m(n_i\phi_i - n_j\phi_j)) + b_{ij}^{mn_i, -mn_j} \sin(m(n_i\phi_i - n_j\phi_j)) \right).$$

Betrachten wir die mit den Skalierungen n_i und n_j gewichtete Phasendifferenz $\theta = n_i\phi_i - n_j\phi_j$, so folgt

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= n_i\omega_i - n_j\omega_j - K_{ij}n_iq_{ij}(\theta) + K_{ji}n_jq_{ji}(-\theta) \\ &\quad - K_{ik}n_iq_{ik}(n_i\phi_i - n_k\phi_k) + K_{jk}n_jq_{jk}(n_j\phi_j - n_k\phi_k), \quad k \neq i, j. \end{aligned}$$

Sind die direkten Kopplungstärken zwischen i -tem und j -ten Oszillator genau entgegengesetzt, d.h. $K_{ij} = -K_{ji}$, so ist dies dahingehend zu interpretieren, dass die gegenseitigen Einflüsse der Phasen sich gerade neutralisieren. Mathematisch bedeutet dies

$$\begin{aligned} 0 &= n_iq_{ij}(\theta) + n_jq_{ji}(-\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left((n_ia_{ij}^{mn_i, -mn_j} + n_ja_{ji}^{mn_j, -mn_i}) \cos(m\theta) \right. \\ &\quad \left. + (n_ib_{ij}^{mn_i, -mn_j} - n_jb_{ji}^{mn_j, -mn_i}) \sin(m\theta) \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} n_ia_{ij}^{mn_i, -mn_j} &= -n_ja_{ji}^{mn_j, -mn_i}, \\ n_ib_{ij}^{mn_i, -mn_j} &= n_jb_{ji}^{mn_j, -mn_i}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Wie bei der Herleitung des Kuramoto-Systems (vgl. [17] und [21]) wählen wir nun für q_{ij} möglichst einfache Funktionen, welche die Bedingung (1.13) gerade erfüllen, und setzen

$$a_{ij}^{mn_i, -mn_j} = 0 \quad \forall i, j, m$$

sowie

$$b_{ij}^{mn_i, -mn_j} = \begin{cases} \frac{1}{n_i} & m = 1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases}$$

Die Interaktionsfunktionen q_{ij} besitzen somit die Darstellung:

$$q_{ij}(n_i\phi_i - n_j\phi_j) = \frac{1}{n_i} \sin(n_i\phi_i - n_j\phi_j).$$

Final können wir daher das folgende System phasengekoppelter Oszillatoren ablei-

ten:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - \frac{K_{13}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) \\
\dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \frac{K_{21}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_1\phi_1) - \frac{K_{23}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_3\phi_3) \\
\dot{\phi}_3 &= \omega_3 - \frac{K_{31}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_1\phi_1) - \frac{K_{32}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_2\phi_2)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Das hergeleitete System (1.14) phasengekoppelter Oszillatoren bildet die Grundlage dieser Arbeit. In den folgenden Kapiteln werden wir mehrere unterschiedliche Konfigurationen von Kopplungskonstanten K_{ij} betrachten und die Dynamik der zugehörigen Phasenmodelle analysieren. Von entscheidender Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Unterscheidung zwischen einem rein *exzitatorisch* gekoppelten System einerseits und einem gemischt *inhibitorisch-exzitatorisch* gekoppelten System andererseits. Diese Begriffe werden im Abschnitt 1.3.4 erläutert. Des Weiteren ist die zentrale Fragestellung bei der Analyse von Systemen wie (1.14) die mögliche Existenz von *Phasen-Synchronisation*. Aus diesem Grund folgt im nächsten Abschnitt zunächst eine Einführung in die Theorie der Synchronisation.

1.3.3. Grundlagen der Synchronisation

Von zentraler Bedeutung für die Definition von Phasensynchronisation ist der Begriff der *gewichteten Phasendifferenzen*:

1.3 Definition (Gewichtete Phasendifferenzen)

Zu den Phasenvariablen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 im System (1.14) sind die zugehörigen gewichteten Phasendifferenzen definiert durch

$$\begin{aligned}
\theta_1 &:= n_1\phi_1 - n_3\phi_3 \\
\theta_2 &:= n_2\phi_2 - n_3\phi_3
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Ausgehend von System (1.14) und den gewichteten Phasendifferenzen in (1.15) ist der Begriff der *Phasensynchronisation* in diesem Zusammenhang wie folgt definiert:

1.4 Definition (Synchronisation)

Existiert eine nichtleere, offene und beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^2$, so dass

$$\begin{aligned}
&(n_1\phi_1(0) - n_3\phi_3(0), n_2\phi_2(0) - n_3\phi_3(0)) \in \bar{D} \\
\Rightarrow &(n_1\phi_1(t) - n_3\phi_3(t), n_2\phi_2(t) - n_3\phi_3(t)) \in \bar{D} \quad \forall t \geq 0
\end{aligned}$$

gilt, so heißen die zugehörigen Phasen ϕ_j , $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{n}_1 : \mathbf{n}_2 : \mathbf{n}_3$ -synchronisiert.

Weiterhin können wir zu (θ_1, θ_2) die zugehörigen Evolutionsgleichungen betrachten:

1.5 System der gewichteten Phasendifferenzen

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= n_1\omega_1 - n_3\omega_3 - K_{12}\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - (K_{13} + K_{31})\sin\theta_1 - K_{32}\sin\theta_2 \\
\dot{\theta}_2 &= n_2\omega_2 - n_3\omega_3 + K_{21}\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - K_{31}\sin\theta_1 - (K_{23} + K_{32})\sin\theta_2
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Liegt eine $n_1 : n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation vor, so ist \bar{D} aus Definition 1.4 offenbar eine *invariante* Menge des Systems 1.16.

1.6 Notation

Für die rechten Seiten der Differentialgleichungen für ϕ_j in (1.14), ausgedrückt durch gewichteten Phasendifferenzen (θ_1, θ_2) , notieren wir im Folgenden:

$$\begin{aligned}
h_1(\theta_1, \theta_2) &:= \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{K_{13}}{n_1}\sin\theta_1 \\
h_2(\theta_1, \theta_2) &:= \omega_2 + \frac{K_{21}}{n_2}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{K_{23}}{n_2}\sin\theta_2 \\
h_3(\theta_1, \theta_2) &:= \omega_3 + \frac{K_{31}}{n_3}\sin\theta_1 + \frac{K_{32}}{n_3}\sin\theta_2
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Bemerkung: Reduktion des 3-dimensionalen Systems

Die Reduktion des 3-dimensionalen Systems (1.14) auf das 2-dimensionale System (1.16) ist zulässig. Setzen wir etwa $\theta_3 := n_3\phi_3$ so ist die Transformation ζ , definiert durch

$$\zeta : (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mapsto (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

ein Diffeomorphismus ($\det D\zeta = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$). Die Dynamik von θ_3 ist dabei vollständig durch θ_1 und θ_2 bestimmt:

$$\dot{\theta}_3 = n_3\omega_3 + K_{31}\sin\theta_1 + K_{32}\sin\theta_2$$

Das Synchronisationsverhalten der Phasen ϕ_j ist daher durch die Dynamik des reduzierten Systems (1.16) hinreichend charakterisiert:

1.7 Lemma (Charakterisierung von Synchronisation)

Eine $n_1 : n_2 : n_3$ -Synchronisation der Phasen ϕ_j im System (1.14) ist genau dann möglich, wenn das zugehörige System (1.16) der gewichteten Phasendifferenzen (θ_1, θ_2) eine stabile stationäre Lösung oder einen stabilen periodischen Orbit besitzt.

Der Beweis dieses Lemmas ergibt sich unmittelbar durch Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson.

Bemerkung zu Lemma 1.7:

Beim klassischen Kuramoto-System ($K_{ij} = K$, $n_j = 1 \forall i, j$) für 3 phasengekoppelte

Oszillatoren ist die Existenz von Synchronisation immer gleichbedeutend mit der Existenz eines stabilen stationären Punktes des zugehörigen reduzierten Systems, die Phasensynchronisation ist dabei in keinem Fall durch einen stabilen periodischen Orbit charakterisiert (vgl. [19]). In Kapitel 3 werden wir sehen, dass dies bei System (1.14) mit asymmetrischen inhibitorisch-exzitatorischen Kopplungen K_{ij} nicht notwendigerweise der Fall ist.

Des Weiteren kann der Begriff der *Frequenz*, welcher im Abschnitt 1.3.1 für die ungestörte oszillatorische Dynamik eingeführt wurde ($\dot{X} = f(X) \Rightarrow \dot{\phi} = \omega_0$), auch für gestörte Oszillatoren bzw. gekoppelte Systeme erweitert werden:

1.8 Definition (Durchschnittliche Frequenz)

Ist $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ ein Fluss des Systems (1.14), so sind die zu diesem Fluss gehörigen **durchschnittlichen Frequenzen** $\bar{\omega}_j$ definiert durch

$$\bar{\omega}_j := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi_j(t)}{t} \quad (1.18)$$

Daneben ist die zugehörige **gewichtete durchschnittliche Frequenz** Ω_j jeweils definiert durch

$$\Omega_j = n_j \bar{\omega}_j \quad (1.19)$$

Bemerkung zu Definition 1.8:

Der Limes in (1.18) existiert in jedem Fall, da $\dot{\phi}_j$ und somit auch $\phi_j(t)/t$ beschränkt sind.

Ist $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ stationärer Punkt des reduzierten Systems (1.16), so ergibt sich der folgende Zusammenhang zu den gewichteten Durchschnittsfrequenzen Ω_j :

1.9 Lemma

Ist $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$, stationärer Punkt von (1.16) mit der Eigenschaft, dass $n_1\phi_1(0) - n_3\phi_3(0) = \bar{\theta}_1$ und $n_2\phi_2(0) - n_3\phi_3(0) = \bar{\theta}_2$ gilt, so existiert eine Konstante Ω , so dass

$$\Omega_j = n_j h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = \Omega \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (1.20)$$

gilt.

Beweis. Mit den gegebenen Voraussetzungen folgt für alle $j \in \{1, 2, 3\}$ und $t \geq 0$

$$n_j \dot{\phi}_j(t) = h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$$

und folglich auch

$$n_j \phi_j(t) = t \cdot h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + n_j \phi_j(0).$$

Für Ω_j erhalten wir also

$$\begin{aligned}\Omega_j &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_j \phi_j(t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + n_j \phi_j(0)}{t} \\ &= h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)\end{aligned}$$

Da $n_i \dot{\phi}_i - n_j \dot{\phi}_j = 0$ für alle Paarungen i, j gilt, ist folglich auch $h_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = h_j(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ für alle i, j .

□

Liegt im System (1.14) eine $n_1 : n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation vor, so ergibt sich der folgende Zusammenhang zu den durchschnittlichen Frequenzen:

1.10 Lemma (Synchronisationsfrequenz)

Sind die Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 gemäß Definition 1.4 phasensynchronisiert, und bezeichne (θ_1^s, θ_2^s) den zugehörigen Attraktor (asymptotisch stabiler Fixpunkt oder stabiler Grenzyklus) des reduzierten Systems (1.16), so existiert eine Zahl $\Omega \in \mathbb{R}$, so dass für die gewichteten Durchschnittsfrequenzen gilt:

$$\Omega_j = \Omega, \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (1.21)$$

Ω heißt dann die zu (θ_1^s, θ_2^s) gehörige **Synchronisationsfrequenz**.

Ist (θ_1^s, θ_2^s) stationäre Lösung, so gilt

$$\Omega = n_j h_j(\theta_1^s, \theta_2^s), \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

Ist der Attraktor $(\theta_1^s(t), \theta_2^s(t))$ hingegen ein periodischer Orbit mit Periode T_0 , so gilt

$$\Omega = \frac{n_j}{T_0} \int_0^{T_0} h_j(\theta_1^s(r), \theta_2^s(r)) dr, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Beweis. Da $n_i \phi_i(t) - n_j \phi_j(t)$ für $t \geq 0$ beschränkt ist, folgt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i \phi_i(t) - n_j \phi_j(t)}{t} = 0$$

und somit auch

$$\Omega_i = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i \phi_i(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_j \phi_j(t)}{t} = \Omega_j.$$

Wir zeigen nun die Aussagen (1.22) und (1.23).

Ist (θ_1^s, θ_2^s) stabile stationäre Lösung, und die Trajektorie $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ so ge-

wählt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} (n_j \phi_j(t) - n_3 \phi_3(t)) = \theta_j^s$ für $j = 1, 2$, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_j(n_1 \phi_1(t) - n_3 \phi_3(t), n_2 \phi_2(t) - n_3 \phi_3(t)) = h_j(\theta_1^s, \theta_2^s).$$

Notieren wir weiter

$$\dot{\phi}_j(t) = h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) + r_j(t),$$

so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} r_j(t) = 0$. Für beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$ sei nun $t_0 \geq 0$ so gewählt, dass $|r_j(t)| < \epsilon$ für alle $t \geq t_0$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes folgt dann mit $\bar{t} \in [t_0, t]$:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_j(t)}{t} &= \frac{\phi_j(t_0)}{t} + \frac{t-t_0}{t} \dot{\phi}_j(\bar{t}) \\ &= \frac{\phi_j(t_0)}{t} + \frac{t-t_0}{t} h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) + \frac{t-t_0}{t} r_j(\bar{t}) \\ \Rightarrow \left| \frac{\phi_j(t)}{t} - h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) \right| &\leq \left| \frac{\phi_j(t_0)}{t} - \frac{t_0}{t} h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) \right| + \frac{t-t_0}{t} |r_j(\bar{t})| \\ &< \left| \frac{\phi_j(t_0)}{t} - \frac{t_0}{t} h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) \right| + \frac{t-t_0}{t} \epsilon \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi_j(t)}{t} - h_j(\theta_1^s, \theta_2^s) \right| < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, haben wir hiermit die Aussage (1.22) bewiesen.

Ist (θ_1^s, θ_2^s) ein stabiler Grenzyklus mit Periode T_0 , so gilt offenbar für jedes $t_0 \geq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t h_j(\theta_1^s(r), \theta_2^s(r)) dr = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} h_j(\theta_1^s(r), \theta_2^s(r)) dr. \quad (1.24)$$

Die Trajektorie $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ sei nun so gegeben, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} (n_j \phi_j(t) - n_3 \phi_3(t) - \theta_j^s(t)) = 0$ für $j = 1, 2$. Abkürzend notieren wir im Folgenden

$$\kappa_j(t) := h_j((n_1 \phi_1 - n_3 \phi_3)(t), (n_2 \phi_2 - n_3 \phi_3)(t)) - h_j(\theta_1^s(t), \theta_2^s(t))$$

und wählen außerdem $t_0 \geq 0$ für $\epsilon > 0$ so, dass $|\kappa_j(t)| < \epsilon$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\phi_j(t)}{t} &= \frac{\phi_j(t_0)}{t} + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t h_j((n_1 \phi_1 - n_3 \phi_3)(r), (n_2 \phi_2 - n_3 \phi_3)(r)) dr \\ &= \frac{\phi_j(t_0)}{t} + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \kappa_j(r) dr + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t h_j(\theta_1^s(r), \theta_2^s(r)) dr. \end{aligned}$$

Für den Limesübergang $t \rightarrow \infty$ folgt nun

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\phi_j(t)}{t} - \frac{1}{t} \int_{t_0}^t h_j(\theta_1^s(r), \theta_2^s(r)) dr \right) \right| < \epsilon. \quad (1.25)$$

Da auch hier $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, erhalten wir aus (1.25) zusammen mit (1.24) die Aussage (1.23).

Wir werden in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit der Kürze halber den Begriff “*stabil*“ immer synonym mit “*asymptotisch stabil*“ verwenden. In der Situation, dass ein Fixpunkt *stabil, aber nicht asymptotisch stabil* ist, werden wir dies durch die Formulierung “*neutral stabil*“ gesondert kennzeichnen.

Von zentraler Bedeutung für das Verständnis dieser Arbeit ist auch die Unterscheidung zwischen *Inphasen-* und *Antiphasen-Synchronisation*:

1.11 Definition (Inphasen- vs. Antiphasen-Synchronisation)

Ist (θ_1^s, θ_2^s) ein stabiler stationärer Zustand des Systems (1.16), und gilt $\text{mod } 2\pi$, dass $|\theta_j^s| < \frac{\pi}{2}$ für $j = 1, 2$ sowie $|\theta_1^s - \theta_2^s| < \frac{\pi}{2}$, so wird (θ_1^s, θ_2^s) als **Inphasen-Synchronisationszustand** bezeichnet. Ist dies nicht der Fall so liegt eine **Antiphasen-Synchronisation** vor.

Ist $(\theta_1^s(t), \theta_2^s(t))$ ein stabiler periodischer Orbit mit Periode T_0 und gilt $\text{mod } 2\pi$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \theta_j^s(t) dt \right| &< \frac{\pi}{2} \quad \text{für } j = 1, 2 \text{ und} \\ \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (\theta_1^s(t) - \theta_2^s(t)) dt \right| &< \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

so wird dies ebenfalls als **Inphasen-Synchronisation** bezeichnet. Entsprechend handelt es sich um eine **Antiphasen-Synchronisation**, wenn (1.26) nicht gültig ist.

Die Tatsache, ob eine Inphasen- oder eine Antiphasen-Synchronisation eintritt, ist entscheidend abhängig von der Konfiguration der Kopplungskonstanten K_{ij} . In diesem Zusammenhang unterscheiden wir zwischen *exzitatorischen* und *inhibitorischen* Kopplungen, wie es im folgenden Abschnitt dargelegt wird.

1.3.4. Exzitatorische vs. inhibitorische Kopplung

Je nach Vorzeichen der Kopplungsstärke K_{ij} kann zwischen *attraktiver* bzw. *exzitatorischer* Kopplung $K_{ij} > 0$ und *repulsiver* bzw. *inhibitorischer* Kopplung $K_{ij} < 0$ unterschieden werden. Die Begriffe *attraktiv* und *repulsiv* resultieren aus der Tatsache, dass Kopplung mit beidseitig positiven Kopplungsstärken zwischen zwei Oszillatoren im Allgemeinen zu einer *Inphasen-Synchronisation* führt (d.h. die Phasen

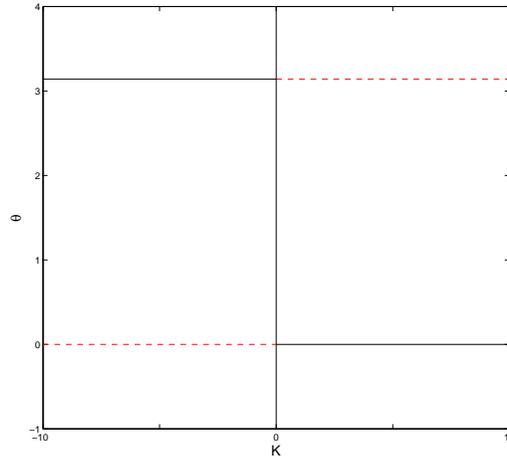


Abbildung 1.6.: 2-dimensionales Kuramoto-System. Degenerierte Bifurkation bei $K = 0$: Stabilitätswechsel von Inphasen- zu Antiphasen-Synchronisation

ziehen sich gegenseitig an), während Oszillatoren mit beidseitiger Negativkopplung zu einer *Antiphasen-Synchronisation* tendieren (Phasen “stoßen sich ab“). Dies kann leicht anhand des 2-dimensionalen Kuramoto-Systems veranschaulicht werden. Hierfür betrachten wir die Evolutionsgleichungen zweier phasengekoppelter Oszillatoren:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \frac{K}{2} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Weiter nehmen wir $\omega_1 = \omega_2 = \omega^*$ an und betrachten die Evolutionsgleichung der Phasendifferenz $\theta := \phi_1 - \phi_2$:

$$\dot{\theta} = -K \sin \theta \tag{1.27}$$

Für jedes $K \neq 0$ besitzt (1.27) genau 2 stationäre Zustände; für $K > 0$ (exzitatorische Kopplung) ist der *Inphasen*-Zustand $\theta^i = 0$ stabil während der *Antiphasen*-Zustand $\theta^a = \pi$ instabil ist. Bei *inhibitorischer* Kopplung verhält es sich genau umgekehrt: θ^i ist instabil und θ^a ist stabil (Abbildung 1.6). Außer der degenerierten Bifurkation bei $K = 0$ treten im System (1.27) keine weiteren Verzweigungen auf. Anhand dieses einfachen Beispiels wird deutlich, dass eine rein *exzitatorische* Kopplung mit *Inphasen-Synchronisation* einher geht, während rein *inhibitorische* Interaktionen zu einer *Antiphasen-Synchronisation* führen. Auf diese Weise veranschaulichen sich auch die synonymen Bezeichnungen *attraktive* bzw. *repulsive* Kopplung. Hinsichtlich der *Synchronisationsfrequenz* unterscheiden sich das exzitatorische und das inhibitorische System jedoch nicht. In beiden Fällen stimmt die Synchronisationsfrequenz Ω mit der natürlichen Frequenz der beiden Oszillatoren überein: $\Omega = \omega^*$.

Ein ähnlicher Sprung von Inphasen- zu Antiphasen-Synchronisation beim Übergang von inhibitorischer zu exzitatorischer Kopplung zeigt sich auch beim 3-dimensionalen

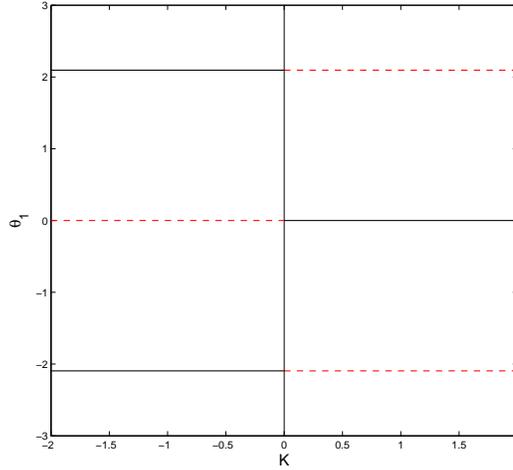


Abbildung 1.7.: 3-dimensionales Kuramoto-System; Degenerierte Pitchfork-Bifurkation bei $K = 0$: Exzitatorische Kopplung, $K > 0$, führt zu Inphasen-Synchronisation während inhibitorische Kopplung, $K < 0$ zu einer Bistabilität zweier Antiphasen-Zustände führt.

Kuramoto-System:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \frac{K}{3} \sum_{j \neq i} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

Auch hier betrachten wir nur den Spezialfall identischer Oszillatoren, d.h. $\omega_i = \omega^* \forall i$, und erhalten für das zugehörige System der Phasendifferenzen $\theta_1 := \phi_1 - \phi_3$, $\theta_2 := \phi_2 - \phi_3$:

$$\dot{\theta}_i = -K \left(\frac{2}{3} \sin \theta_i - \frac{1}{3} \sin \theta_j - \frac{1}{3} \sin(\theta_i - \theta_j) \right), \quad i, j \in \{1, 2\}; i \neq j. \quad (1.29)$$

Für jedes $K \neq 0$ besitzt das reduzierte System (1.29) genau 6 Gleichgewichtspunkte. Die Lokalisation der stationären Punkte im Phasenraum ist nicht von K abhängig, das qualitative Verhalten des Systems in der Umgebung der Fixpunkte hingegen schon. Für jedes $K > 0$ ist der *Inphasen-Zustand* $(\theta_1^i, \theta_2^i) = (0, 0)$ die einzige stabile stationäre Lösung. Für $K < 0$ ist umgekehrt $(0, 0)$ instabil, statt dessen sind die beiden *Antiphasen-Lösungen* $(\theta_1^{a1}, \theta_2^{a1}) = (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$ und $(\theta_1^{a2}, \theta_2^{a2}) = (-\frac{2}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi)$ stabil (Abbildung 1.7). In diesem Fall führt der Wechsel von Exzitation zu Inhibition außerdem zu einer *Bistabilität*, d.h. zur Koexistenz von zwei unterschiedlichen antiphasischen Synchronisationszuständen. Wie beim 2-dimensionalen Kuramoto-System tritt auch hier beim Wechsel vom exzitatorischen zum inhibitorischen System keine Änderung der *Synchronisationsfrequenz* Ω ein. Auch hier gilt sowohl für $K > 0$ als auch für $K < 0$ $\Omega = \omega^*$. Eine genaue qualitative Analyse der stationären Punkte sowie eine Bifurkationsanalyse für $\omega_i \neq \omega_j$ erfolgt für $K > 0$ in [19].

Die Zuordnung *exzitatorisch* \leftrightarrow *attraktiv* bzw. *inhibitorisch* \leftrightarrow *repulsiv* bei der Modellierung von neuronaler Aktivität durch Systeme phasengekoppelter Oszillatoren findet sich in zahlreichen Arbeiten und ist experimentell gestützt, siehe z.B. [8],[10],[16],[24],[34],[35]. Wird ein Neuronennetzwerk durch gekoppelte Phasenoszillatoren modelliert, so führen demnach exzitatorische (d.h. *depolarisierende*) Interaktionen der Oszillatoren untereinander tendenziell zu einer Inphasen-Synchronisation, während inhibitorische (d.h. *hyperpolarisierende*) Verbindungen diesem entgegenwirken und eher einen Antiphasenzustand begünstigen (siehe [10] für weitere Referenzen).

Zum exzitatorischen Kuramoto-Systems finden sich in der Literatur zahlreiche Analysen. Viele analytische und numerische Resultate sind für dieses Modell erhalten, des Weiteren wurden in den letzten Jahren einige Erweiterungen beschrieben, z.B. Time-delay, Phasenshiftparameter, Kopplungsfunktionen mit höheren Fouriertermen (vgl. Abschnitt 1.3.2), adaptive Kopplungen, externe Stimulierung, Rauschen etc.(siehe u.a. [3],[20],[28],[29],[30],[31]). Relativ wenig Resultate sind bisher hingegen zu Systemen mit nicht-symmetrischen und inhibitorischen Kopplungen bekannt.

In [8] betrachteten *Ermentrout* und *Kopell* eine Konfiguration von in einer Reihe angeordneten, gekoppelten Phasenoszillatoren mit exzitatorischer “Nearest-Neighbour-Kopplung“ und inhibitorischer “Long-Distance-Kopplung“ (siehe Abbildung 1.8). Eine solche Konfiguration von Kopplungen tritt u.a. bei der Modellierung von mo-

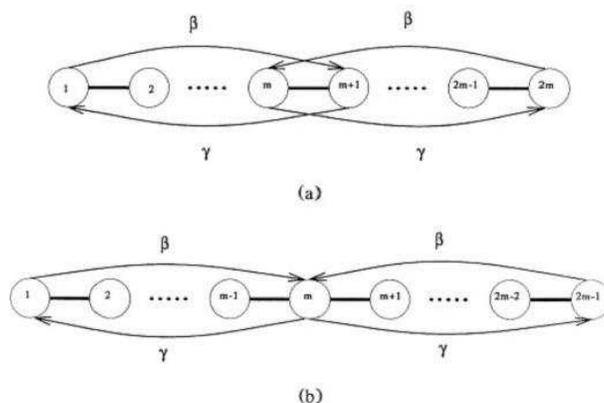


Abbildung 1.8.: *Nearest-Neighbour-Coupling:* Bei dieser Kopplungstopologie sind die Oszillatoren in einer Reihe angeordnet, und jeder der $2m$ bzw. $2m - 1$ Oszillatoren ist mit seinem rechten und linken Nachbarn exzitatorisch gekoppelt (mit Ausnahme der am Rand liegenden Oszillatoren). *Long-Distance-Inhibition:* Eine Inhibition der Stärke β bzw. γ erfolgt von den randständigen zu den zentral liegenden Oszillatoren und umgekehrt. Diese Abbildung wurde entnommen aus [8].

toneuronaler Aktivität von fischähnlichen Wirbeltieren (z.B. Neunauge) auf, hierbei repräsentiert die Kette von Oszillatoren gerade die hintereinander verschalteten Motoneurone der Wirbelsäule. In diesem Zusammenhang wurde nachgewiesen, dass eine derartige Topologie von Kopplungen zum Auftreten sogenannter *S-Waves* führen

kann, falls ein gewisses Gleichgewicht von erregenden und hemmenden Interaktionen besteht. Dabei handelt es sich um Zustände, in welchen sich die Gesamtgruppe der Oszillatoren in 2 Fraktionen splittet: Jede Einzelgruppe ist jeweils *in Phase* synchronisiert, die beiden Gruppen befinden sich zueinander jedoch in *Antiphase*. Das gleichzeitige Auftreten von exzitatorischen und inhibitorischen Verbindungen kann somit gewissermaßen eine Art Wettstreit zwischen Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation zur Folge haben.

In [24] und [34] untersuchten *Tsimring et. al.* das Kuramoto-System mit inhibitorischer Kopplung ($K < 0$). Dabei wurde nachgewiesen, dass für mehr als 3 gekoppelte nichtidentische Oszillatoren keine Synchronisation mehr eintreten kann. Auch wenn wir in dieser Arbeit nicht mehr als 3 gekoppelte Oszillatoren betrachten werden, so weisen die Ergebnisse dieser Publikationen doch darauf hin, dass sich die Dynamik von Systemen phasengekoppelter Oszillatoren mit Inhibition fundamental von der von rein exzitatorischen Systemen unterscheidet.

Die Hauptgrundlage dieser Arbeit stellt das oben hergeleitete System (1.14) dar. Wir werden im folgenden Kapitel dabei zunächst eine *rein exzitatorische* Konfiguration von Kopplungen betrachten ($K_{ij} > 0 \forall i, j$). In Kapitel 3 werden wir dann ein entsprechendes System mit einer gemischten *inhibitorisch-exzitatorischen* Kopplungstopologie untersuchen. Obwohl beide Systeme sich nicht in ihren Modellgleichungen, sondern lediglich in dem Vorzeichen eines Kopplungsparameters unterscheiden, führt der Wechsel von einer exzitatorischen zu einer inhibitorischen Kopplung, ähnlich wie beim Beispiel des 3-dimensionalen Kuramoto-Systems, zu essentiellen Unterschieden in der Dynamik der beiden Systeme.

2. Exzitatorisches System

Wie es im Abschnitt 1.2.2 motiviert wurde, betrachten wir zunächst ein mathematisches Modell zur Darstellung der Interaktionen *eines thalamischen* (T) und *zweier kortikaler Areale* (C_1, C_2). In 1.1.5 und 1.1.6 wurde bereits erläutert, dass kortikale Neurone sowohl *afferent* als auch *efferent exzitatorisch* mit entsprechenden thalamischen Nervenzellen verbunden sind. Des Weiteren gehen wir in diesem Zusammenhang davon aus, dass auch zwischen den beiden kortikalen Gebieten C_1 und C_2 wechselseitige exzitatorische Projektionen existieren (Abb. 2.1).

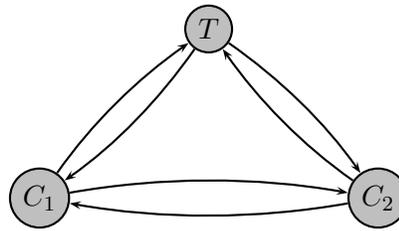


Abbildung 2.1.: Modell mit einem thalamischen (T) und zwei kortikalen Arealen (C_1, C_2) mit wechselseitigen exzitatorischen Verbindungen.

Zentraler Ansatz bei der Herleitung eines korrespondierenden mathematischen Modells im Abschnitt 1.3 war die Repräsentation jedes relevanten Hirnareals durch jeweils einen *Oszillator*. Durch die Ausführungen in 1.3.1 und 1.3.2 wurde ferner gezeigt, dass wir uns hier bei der Modellierung auf die Beschreibung der *Phasendynamik* der Oszillatoren beschränken können.

Sind die Phase des thalamischen Gebietes durch ϕ_1 und die Phasen der kortikalen Areale durch ϕ_2 und ϕ_3 gegeben, so erhalten wir gemäß der Herleitung im Abschnitt 1.3.2 das folgende System von Evolutionsgleichungen zur Beschreibung der Phasendynamik:

2.1 System phasengekoppelter Oszillatoren

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - \frac{K_{13}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) \\
 \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \frac{K_{21}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_1\phi_1) - \frac{K_{23}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_3\phi_3) \\
 \dot{\phi}_3 &= \omega_3 - \frac{K_{31}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_1\phi_1) - \frac{K_{32}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_3\phi_3)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit den folgenden Bezeichnungen:

- ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : **Phasen** der Oszillatoren.
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$: zugehörige **natürliche Frequenzen** der Oszillatoren
- $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$: zugehörige **Gewichtungskoeffizienten**
- $K_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3\}$: **Kopplungskoeffizienten**.
Durch K_{ij} ist jeweils die Stärke des Feedbacks des j -ten Oszillators zum i -ten Oszillator beschrieben.

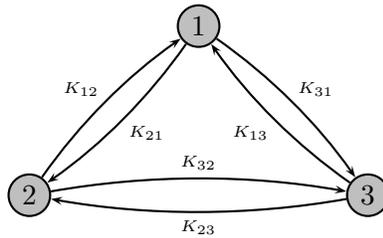


Abbildung 2.2.: Konfiguration der exzitatorischen Kopplungen im System (2.1)

An die Kopplungsgrößen K_{ij} stellen wir in diesem Zusammenhang zur Modellierung eines *rein exzitatorischen* Systems die folgende Bedingung:

2.2 Voraussetzung (Exzitatorische Kopplung)

$$K_{ij} > 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.2)$$

Im Abschnitt 1.3.4 wurde ausführlich dargelegt, dass im Phasenmodell (2.1) *positive* Parameter K_{ij} zu einer *exzitatorischen* Kopplung korrespondieren, während *negative* K_{ij} einem *inhibitorischen* Feedback zuzuordnen sind. Die Voraussetzung (2.2) werden wir daher im gesamten weiteren Verlauf dieses Kapitels beibehalten.

Im Abschnitt 1.3.3 wurde ferner gezeigt, dass eine *Reduktion* des *3-dimensionalen* Differentialgleichungssystems (2.1) zu einem *2-dimensionalen* System zulässig ist, da die rechten Seiten in (2.1) nur von den *gewichteten Phasendifferenzen* $n_i\phi_i - n_j\phi_j$ abhängig sind.

Gemäß der Definition 1.3 im Abschnitt 1.3.3 sind die **gewichteten Phasendifferenzen** θ_1, θ_2 folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= n_1\phi_1 - n_3\phi_3 \\ \theta_2 &:= n_2\phi_2 - n_3\phi_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wie in 1.3.3 ergibt sich nun für θ_1, θ_2 das folgende reduzierte System:

2.3 System der gewichteten Phasendifferenzen

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= n_1\omega_1 - n_3\omega_3 - K_{12}\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - (K_{13} + K_{31})\sin(\theta_1) - K_{32}\sin(\theta_2) \\
&=: G_1(\theta_1, \theta_2) \\
\dot{\theta}_2 &= n_2\omega_2 - n_3\omega_3 - K_{21}\sin(\theta_2 - \theta_1) \\
&\quad - K_{31}\sin(\theta_1) - (K_{23} + K_{32})\sin(\theta_2) \\
&=: G_2(\theta_1, \theta_2)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Zentrale Fragestellung bei der Analyse des Systems (2.1) ist die mögliche Existenz von *Synchronisationszuständen*. Den Begriff der $\mathbf{n}_1 : \mathbf{n}_2 : \mathbf{n}_3$ – **Phasensynchronisation** im Zusammenhang mit dem System (2.1) hatten wir bereits in 1.3.3 eingeführt (siehe Definition 1.4 auf S. 15). Durch Lemma 1.7 konnte diese Definition ferner zu dem reduzierten System (2.4) in Beziehung gesetzt werden:

Eine $\mathbf{n}_1 : \mathbf{n}_2 : \mathbf{n}_3$ – **Synchronisation** der Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 im System (2.1) ist genau dann möglich, wenn das zugehörige System der gewichteten Phasendifferenzen (2.4) eine *stabile stationäre Lösung* oder einen *stabilen periodischen Orbit* besitzt.

2.1. Einführung und erste Analyse

Grundlegende Fragestellung zu diesem System ist die Existenz eines synchronen Zustandes. Die Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sind synchronisiert, wenn das zugehörige reduzierte System (2.4) eine stabile stationäre Lösung oder einen stabilen periodischen Orbit besitzt. Ein Synchronisationszustand, welcher durch das Vorhandensein eines stabilen periodischen Orbits und nicht durch einen stabilen stationären Zustand von (2.4) charakterisiert ist, kann bei dem hiesigen System nicht auftreten. In einem planaren System impliziert die Existenz eines stabilen Grenzzyklus die Existenz eines instabilen Fixpunktes. Wir werden im Abschnitt 2.3 zeigen, dass aus der Existenz eines instabilen Fixpunktes von (2.4) immer auch die eines stabilen Gleichgewichtspunktes folgt.

Zur abkürzenden Schreibweise führen wir nun die folgenden Notationen ein:

2.4 Notation

$$\begin{aligned}
b_1 &:= K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} \\
b_2 &:= K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23} \\
b_3 &:= K_{21}K_{31} + K_{12}K_{31} + K_{13}K_{21}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

sowie für $K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31} \neq 0$

$$c_j := \frac{b_j}{(K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31})}. \quad (2.6)$$

Für eine erste Analyse betrachten wir zunächst den einfachen Fall $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^*$ und ermitteln hierzu die zugehörigen stationären Lösungen des Systems (2.4):

2.5 Lemma (Stationäre Lösungen für $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3$)

Gilt $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^*$, so besitzt das System (2.4) mod 2π in jedem Fall die 4 stationären Lösungen $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π) . Zwei zusätzliche stationäre Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ existieren genau dann, wenn gilt

$$|b_1^2 - b_2^2 - b_3^2| < 2b_2b_3, \quad (2.7)$$

und sind dann charakterisiert durch

$$\sin \theta_1^\pm = \mp \frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_3} \quad (2.8)$$

$$\sin \theta_2^\pm = \pm \frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_2} \quad (2.9)$$

$$\sin(\theta_1^\pm - \theta_2^\pm) = \pm \frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_2b_3} \quad (2.10)$$

mit den zugehörigen Frequenzen

$$\Omega_\pm = \omega^* \pm \frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_2b_3} \cdot (K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}). \quad (2.11)$$

Beweis. Unmittelbar ergeben sich die stationären Punkte $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π) .

Für die Ermittlung weiterer stationärer Lösungen des Systems (2.4) beachten wir, dass zu jeder stationären Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ eine zugehörige Frequenz $\Omega \in \mathbb{R}$ existiert (vgl. Abschnitt 1.3.3, Lemma 1.9), so dass für ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 in (2.1) mit $n_1\phi_1 - n_3\phi_3 = \bar{\theta}_1$ und $n_2\phi_2 - n_3\phi_3 = \bar{\theta}_2$ gilt

$$n_j\dot{\phi}_j = \Omega, \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned}x_1 &:= \sin(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2), \\x_2 &:= \sin \bar{\theta}_1, \\x_3 &:= \sin \bar{\theta}_2\end{aligned}$$

und

$$\bar{\Omega} := \Omega - \omega^*$$

erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= -K_{12}x_1 - K_{13}x_2 \\ \bar{\Omega} &= K_{21}x_1 - K_{23}x_3 \\ \bar{\Omega} &= K_{31}x_2 + K_{32}x_3\end{aligned}\tag{2.12}$$

Gilt $K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31} \neq 0$ so ist dieses LGS eindeutig lösbar. Als Lösung ergibt sich dann in Abhängigkeit von der Unbekannten $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}x_1 &= c_1\bar{\Omega} \\ x_2 &= -c_2\bar{\Omega} \\ x_3 &= c_3\bar{\Omega}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Ferner ist die folgende nichtlineare Nebenbedingung gültig:

$$x_1 = x_2 \cos \bar{\theta}_2 - x_3 \cos \bar{\theta}_1$$

Mit den Darstellungen (2.13) können wir diese Identität wie folgt ausdrücken

$$c_1\bar{\Omega} = -c_2\bar{\Omega}\sqrt{1 - c_3^2\bar{\Omega}^2} \cdot \text{sign}(\cos \bar{\theta}_2) - c_3\bar{\Omega}\sqrt{1 - c_2^2\bar{\Omega}^2} \cdot \text{sign}(\cos \bar{\theta}_1)\tag{2.14}$$

Eine Lösung von (2.14) ist $\bar{\Omega} = 0$. Für jede weitere Lösung $\bar{\Omega} \neq 0$ gilt dann

$$\left(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2c_2^2c_3^2\bar{\Omega}^2\right)^2 = 4c_2^2c_3^2(1 - c_2^2\bar{\Omega}^2)(1 - c_3^2\bar{\Omega}^2)\tag{2.15}$$

Durch Auflösen von (2.15) nach $\bar{\Omega}$ erhalten wir schließlich

$$\bar{\Omega} = \pm \frac{\sqrt{4c_2^2c_3^2 - (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)^2}}{2c_1c_2c_3}$$

und damit die Darstellung (2.11). Unmittelbar ergeben sich nun die Darstellungen (2.8)-(2.10).

Gilt $K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$, so ist das LGS (2.12) nicht mehr eindeutig nach

(x_1, x_2, x_3) auflösbar. Des Weiteren folgt in diesem Fall

$$\bar{\Omega} = 0$$

sowie

$$x_2 = -\frac{K_{12}}{K_{13}}x_1 = -\frac{b_2}{b_1}x_1, \quad x_3 = \frac{K_{21}}{K_{23}}x_1 = \frac{b_3}{b_1}x_1.$$

Wie oben ergibt sich als nichtlineare Nebenbedingung

$$x_1 = -\frac{b_2}{b_1}x_1 \cos \bar{\theta}_2 - \frac{K_{21}}{K_{23}}x_1 \cos \bar{\theta}_1$$

und somit auch

$$b_1 = -b_2 \sqrt{1 - \frac{b_3^2}{b_1^2}x_1^2} \cdot \text{sign}(\cos \bar{\theta}_2) - b_3 \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{b_1^2}x_1^2} \cdot \text{sign}(\cos \bar{\theta}_1).$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach x_1 erhalten wir schließlich wieder die obigen Darstellungen (2.8)-(2.10) für x_1, x_2, x_3 .

□

Durch Berechnung der Jacobi-Matrix $A(\theta_1, \theta_2) := DG(\theta_1, \theta_2)$ können die Fixpunkte aus Lemma 2.5 nun qualitativ klassifiziert werden:

2.6 Lemma (Stabilität der stationären Lösungen)

Gilt $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^*$, so ist der stationäre Punkt $(0, 0)$ des Systems (2.4) (=Inphasen-Synchronisationszustand) stabil. Die übrigen stationären Lösungen $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) und $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ (falls existent) sind hingegen immer instabil. Des Weiteren besitzen die Fixpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ die Darstellung

$$\theta_1^\pm = \begin{cases} \mp \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_3} \right) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi \pm \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_3} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\theta_2^\pm = \begin{cases} \pm \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_2} \right) & \text{falls } b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 < 0 \\ \pi \mp \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_1b_2} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\theta_1^\pm - \theta_2^\pm = \begin{cases} \pm \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2 b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_2 b_3} \right) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 > 0 \\ \pi \mp \arcsin \left(\frac{\sqrt{4b_2^2 b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)}}{2b_2 b_3} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.18)$$

Beweis. Für die Linearisierung des Systems (2.4) berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix $A(\theta_1, \theta_2) := DG(\theta_1, \theta_2)$:

$$A(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} a_{11}(\theta_1, \theta_2) & a_{12}(\theta_1, \theta_2) \\ a_{21}(\theta_1, \theta_2) & a_{22}(\theta_1, \theta_2) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{11}(\theta_1, \theta_2) &= -K_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1 \\ a_{12}(\theta_1, \theta_2) &= K_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{32} \cos \theta_2 \\ a_{21}(\theta_1, \theta_2) &= K_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{31} \cos \theta_1 \\ a_{22}(\theta_1, \theta_2) &= -K_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Wir können nun die Stabilität der obigen Fixpunkte anhand des jeweiligen Spektrums von $A(\theta_1, \theta_2)$ analysieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \det A(\theta_1, \theta_2) &= b_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + b_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 \\ &\quad + b_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{spur } A(\theta_1, \theta_2) &= -(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1 \\ &\quad - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det A(0, 0) &= b_1 + b_2 + b_3 > 0 \\ \text{spur } A(0, 0) &= -K_{12} - K_{21} - K_{13} - K_{31} - K_{23} - K_{32} < 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \det A(\pi, 0) &= -b_1 - b_2 + b_3, \\ \text{spur } A(\pi, 0) &= K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \det A(0, \pi) &= -b_1 + b_2 - b_3 \\ \text{spur } A(0, \pi) &= K_{12} + K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \det A(\pi, \pi) &= b_1 - b_2 - b_3 \\ \text{spur } A(\pi, \pi) &= -K_{12} - K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Unmittelbar ergibt sich damit die Stabilität der *Inphasen*-Synchronisationslösung

$(0, 0)$. Die *antiphasischen* Zustände $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π) sind hingegen *instabil*, wie wir es im Folgenden darlegen werden:

Wir betrachten hier nur den Fixpunkt $(0, \pi)$, die entsprechenden Argumentationen für die anderen beiden Punkte erfolgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass $(0, \pi)$ stabil sei, und führen diese Aussage dann zum Widerspruch:

Ist $(0, \pi)$ stabil, so gilt $\text{spur}A(0, \pi) \leq 0$ und folglich

$$K_{12} - K_{13} - K_{31} < 0 \quad \wedge \quad K_{32} - K_{13} - K_{31} < 0. \quad (2.26)$$

Für $\det A(0, \pi)$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \det A(0, \pi) &= K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23} - K_{21}K_{31} - K_{12}K_{31} \\ &\quad - K_{13}K_{21} - K_{23}K_{31} - K_{13}K_{32} - K_{13}K_{23} \\ &\leq K_{23}(K_{12} - K_{13} - K_{31}) + K_{21}(K_{32} - K_{13} - K_{31}) \\ &\quad + \max(K_{12}(K_{32} - K_{13} - K_{31}), K_{32}(K_{12} - K_{13} - K_{31})) \\ &< 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur angenommenen Stabilität von $(0, \pi)$. Ebenso lässt sich die Instabilität von $(\pi, 0)$ und (π, π) nachweisen.

Zur Herleitung der Darstellungen (2.16)-(2.18) müssen wir zeigen, unter welchen Voraussetzungen an b_1, b_2, b_3 die Phasendifferenzen $\theta_1^\pm, \theta_2^\pm, \theta_1^\pm - \theta_2^\pm$ gerade von der *Inphasen*-Darstellung $\arcsin(\cdot)$ in die *Antiphasen*-Form $\pi - \arcsin(\cdot)$ umschwenken. Unmittelbar ergeben sich die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} |\theta_1^\pm| = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 = 0 \\ |\theta_2^\pm| = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0 \\ |\theta_1^\pm - \theta_2^\pm| = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Zum Beweis der Darstellungen (2.16)-(2.18) müssen wir somit nur noch nachweisen, dass die Ungleichheitszeichen auf der rechten Seite in (2.16)-(2.18) "richtig herum" gestellt sind.

Betrachten wir nun eine Folge von Parametern $((K_{ij})_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $((b_j)_n)_{n \in \mathbb{N}}$, derart, dass für $n \rightarrow \infty$

$$|(b_1)_n^2 - (b_2)_n^2 - (b_3)_n^2| < 2(b_2)_n(b_3)_n \quad \forall n \quad \text{und} \quad 2(b_2)_n(b_3)_n - |(b_1)_n^2 - (b_2)_n^2 - (b_3)_n^2| \rightarrow 0,$$

so gilt für die zugehörigen stationären Lösungen $((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n)$ für $n \rightarrow \infty$:

$$\sin(\theta_1^\pm)_n \rightarrow 0, \quad \sin(\theta_2^\pm)_n \rightarrow 0, \quad \sin(\theta_1^\pm - \theta_2^\pm)_n \rightarrow 0.$$

Gilt etwa $((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow (\pi, 0)$ so erhalten wir im Limes ebenso

$$\det A((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow \det A(\pi, 0) = b_1 + b_2 - b_3 = 0. \quad (2.27)$$

Es muss im Limes $\det A(\pi, 0) = 0$ gelten; wäre $\det A(\pi, 0) \neq 0$ so würden nach dem *Satz über implizit definierte Funktionen* offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^6$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} ((K_{12})_n, (K_{13})_n, (K_{21})_n, (K_{23})_n, (K_{31})_n, (K_{32})_n) \in U$ und $(\pi, 0) \in V$ sowie eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\vartheta : U \rightarrow V$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} \forall (\theta_1, \theta_2) \in V : (\theta_1, \theta_2) &= \vartheta(K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{23}, K_{31}, K_{32}) \\ &\Leftrightarrow G(K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, \theta_1, \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

(Funktion G =rechte Seite des Systems (2.4)). Für $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gilt dann

$$((K_{12})_n, (K_{13})_n, (K_{21})_n, (K_{23})_n, (K_{31})_n, (K_{32})_n) \in U, \quad \forall n \geq N,$$

sowie

$$((\theta_1^+)_n, (\theta_2^+)_n) \in V \quad \text{und} \quad ((\theta_1^-)_n, (\theta_2^-)_n) \in V, \quad \forall n \geq N.$$

Dann gilt $\vartheta((K_{12})_n, (K_{13})_n, (K_{21})_n, (K_{23})_n, (K_{31})_n, (K_{32})_n) = ((\theta_1^+)_n, (\theta_2^+)_n)$ oder $\vartheta((K_{12})_n, (K_{13})_n, (K_{21})_n, (K_{23})_n, (K_{31})_n, (K_{32})_n) = ((\theta_1^-)_n, (\theta_2^-)_n)$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Funktion ϑ . Es muss daher die Beziehung (2.27) gelten.

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 &= 2b_3(b_3 - b_2) > 0, \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 &= 2b_2(b_2 - b_3) < 0, \\ b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 &= -2b_2b_3 < 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Gilt hingegen $((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow (0, \pi)$, so erhalten wir im Limes ebenso

$$\det A((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow \det A(0, \pi) = b_1 - b_2 + b_3 = 0$$

und daher auch

$$\begin{aligned} b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 &= 2b_3(b_3 - b_2) < 0, \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 &= 2b_2(b_2 - b_3) > 0, \\ b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 &= -2b_2b_3 < 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Analog ergibt sich für $((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow (\pi, \pi)$

$$\det A((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow \det A(\pi, \pi) = b_1 - b_2 - b_3 = 0.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 &= 2b_3(b_2 + b_3) > 0, \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 &= 2b_2(b_2 + b_3) > 0, \\ b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 &= 2b_2b_3 > 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der Fall $((\theta_1^\pm)_n, (\theta_2^\pm)_n) \rightarrow (0, 0)$ kann nicht eintreten, da dies $\det A(0, 0) = b_1 + b_2 + b_3 = 0$ implizieren würde, was aufgrund der vorausgesetzten Positivität der Kopplungskonstanten K_{ij} ausgeschlossen ist.

Da die Darstellung der Fixpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ konsistent bzgl. der Limesübergänge $|b_1^2 - b_2^2 - b_3^2| \nearrow 2b_2b_3$ sein muss, erhalten wir als Konsequenz aus den Beziehungen (2.28)-(2.30) nun gerade (2.16)-(2.18).

Für die qualitative Analyse der Fixpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \text{spur } A(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) &= -(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1^\pm - \theta_2^\pm) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1^\pm \\ &\quad - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2^\pm \\ &= -(K_{12} + K_{21}) \frac{b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{2b_2b_3} \\ &\quad + (K_{13} + K_{31}) \frac{b_1^2 - b_2^2 + b_3^2}{2b_1b_3} \\ &\quad + (K_{23} + K_{32}) \frac{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}{2b_1b_2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Hiermit folgt des Weiteren:

$$\begin{aligned} \text{spur } A(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) &> 0 \\ \Leftrightarrow b_1^2(K_{31}b_2 + K_{32}b_3) + b_2^2(K_{21}b_1 + K_{23}b_3) + b_3^2(K_{12}b_1 + K_{13}b_2) &> 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da die rechte Seite der Äquivalenz in (2.32) immer erfüllt ist, sind die Fixpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$, falls existent, immer instabil.

□

Insgesamt existieren also im Falle $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^* \pmod{2\pi}$ entweder 4 oder 6 stationäre Zustände des Systems (2.4), wobei der Inphasen-Zustand $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ die einzige stabile stationäre Lösung darstellt. Durch Analyse des Spektrums von $A(0, 0)$ für $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3$ sehen wir, dass die Existenz einer eindeutigen stabilen stationären Lösung durch den Satz über implizit definierte Funktionen auch für $0 < |n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ gewährleistet ist:

2.7 Lemma (Eindeutige stabile stationäre Lösung für $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| > 0$)

Gilt $0 < |n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, so existiert eine eindeutig bestimmte stabile stationäre Lösung (θ_1^s, θ_2^s) des Systems (2.4). Für $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \rightarrow 0 \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ folgt dann $(\theta_1^s, \theta_2^s) \rightarrow (0, 0)$.

Beweis. Definieren wir $\epsilon_1 := n_1\omega_1 - n_3\omega_3$ und $\epsilon_2 := n_2\omega_2 - n_3\omega_3$, und betrachten ϵ_1, ϵ_2 als Parameter im System (2.4), so folgt für die Funktion $\tilde{G}(\epsilon_1, \epsilon_2, \theta_1, \theta_2) := G(\theta_1, \theta_2)$ ($G =$ rechte Seite in (2.4))

$$\tilde{G}(0, 0, 0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \det \frac{\partial \tilde{G}}{\partial (\theta_1, \theta_2)} \bigg|_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \theta_1, \theta_2) = (0, 0, 0, 0)} \neq 0.$$

Nach dem *Satz über implizit definierte Funktionen* existieren dann offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in U$ und $0 \in V$ sowie eine *eindeutig bestimmte* stetig differenzierbare Funktion $\vartheta : U \rightarrow V$, derart, dass

$$\vartheta(0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{G}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vartheta(\epsilon_1, \epsilon_2)) = 0$$

gilt. Durch die Bildmenge $\vartheta(\epsilon_1, \epsilon_2)$, $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in U$, wird dann gerade der Zweig der stabilen stationären Lösung beschrieben.

Darüberhinaus unterliegen die übrigen instabilen Fixpunkte für $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3$ auch keiner Verzweigung, bei welcher zusätzliche Zweige stabiler stationärer Lösungen generiert werden könnten, denn aus dem Beweis von Lemma 2.6 folgt für jeden Fixpunkt $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \neq (0, 0)$

$$\text{spur } A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \det A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) < 0.$$

Somit stellt für (ϵ_1, ϵ_2) mit $|\epsilon_j| \ll 1$ der zugehörige Fixpunkt $\vartheta(\epsilon_1, \epsilon_2)$ die *einzig* stabile stationäre Lösung des Systems (2.4) dar.

□

Die in diesem Abschnitt beschriebene Konstellation von instabilen bzw. stabilen stationären Punkten bleibt also auch für $0 < |n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ zunächst bestehen. Im folgenden Abschnitt werden wir nun den Fall $n_i\omega_i - n_j\omega_j \neq 0$ betrachten. Dabei werden wir untersuchen, wieweit $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| > 0$ variiert werden kann, so dass eine Synchronisation der Phasen ϕ_k noch möglich ist.

2.2. Berechnung einer unteren und einer oberen Schranke für das Synchronisationsregime

Ziel des hier vorliegenden Abschnitts ist es, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines synchronen Zustandes des Systems (2.1) herzuleiten. Durch Definition der gewichteten Phasendifferenzen θ_1, θ_2 in (2.3) konnte eine Reduktion von (2.1) zu einem planaren System (2.4) erzielt werden. In der nun folgenden Analyse werden wir eine weitere Reduktion vornehmen; durch Charakterisierung des synchronen Zustands über die *Synchronisationsfrequenz* werden wir die Existenz einer Synchronisationslösung des *3-dimensionalen* Systems (2.1) auf die Existenz

einer Nullstelle *einer* Gleichung zurückführen können.

Für den weiteren Verlauf aller Abschnitte dieses Kapitels wählen wir nun die folgende Schreibweise:

2.8 Notation (Gewichtete Differenzen der natürlichen Frequenzen)

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &:= n_1\omega_1 - n_3\omega_3, \\ \epsilon_2 &:= n_2\omega_2 - n_3\omega_3.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Ferner notieren wir abkürzend

$$\omega^* = n_3\omega_3.$$

(Für $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ gilt dann folglich $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^*$.)

ϵ_1 und ϵ_2 lassen sich jetzt als Parameter in das reduzierte System (2.4) integrieren. Durch Lemma 2.7 im vorangegangenen Abschnitt wurde die Existenz einer eindeutigen stabilen stationären Lösung von (2.4) bereits für $|\epsilon_j| \ll 1$ garantiert. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es nun, eine Darstellung des *Synchronisationsregimes in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene* herzuleiten. Hierunter verstehen wir dasjenige Gebiet in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene, in welchem eine Synchronisation der Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 im System (2.1) eintreten kann. Die Darstellung des *exakten* Synchronisationsregimes ist dabei nur mit Hilfe von numerischen Verfahren zu erreichen. Durch analytische Methoden können wir jedoch sowohl eine *obere* als auch ein *untere Schranke* des Synchronisationsregimes in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene berechnen:

2.9 Satz (Obere Schranke für das Synchronisationsregime)

Die Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 im System (2.1) seien $n_1 : n_2 : n_3$ -phasensynchronisiert. Dann gilt für die Systemparameter $n_1\omega_1, n_2\omega_2, n_3\omega_3$ und $K_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}&|K_{31}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + K_{13}(n_3\omega_3 - n_2\omega_2)| \\ &\leq K_{31}(K_{12} + K_{21} + K_{23}) + K_{13}(K_{21} + K_{23} + K_{32})\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}&|K_{32}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + K_{23}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3)| \\ &\leq K_{32}(K_{12} + K_{13} + K_{21}) + K_{23}(K_{12} + K_{13} + K_{31})\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}&|K_{21}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3) + K_{12}(n_2\omega_2 - n_3\omega_3)| \\ &\leq K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32}) + K_{12}(K_{23} + K_{31} + K_{32})\end{aligned}\tag{2.36}$$

Der zulässige Bereich für (ϵ_1, ϵ_2) , welcher durch die Bedingungen (2.34)-(2.36) beschrieben wird, beschreibt dann eine obere Schranke des Synchronisationsregimes in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene und stellt sich dabei als Polygon P dar, welches durch den Schnitt

der folgenden 6 Geraden entsteht:

$$\begin{aligned}
g_{1/2} : \quad \epsilon_2 &= \frac{K_{31}}{K_{13} + K_{31}} \epsilon_1 \pm \frac{b_1 + b_3}{K_{13} + K_{31}} \\
g_{3/4} : \quad \epsilon_2 &= \frac{K_{23} + K_{32}}{K_{32}} \epsilon_1 \pm \frac{b_1 + b_2}{K_{32}} \\
g_{5/6} : \quad \epsilon_2 &= -\frac{K_{21}}{K_{12}} \epsilon_1 \pm \frac{b_2 + b_3}{K_{12}}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Beweis. Befindet sich das System (2.4) in einem stationären Zustand $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = ((n_1\phi_1 - n_3\phi_3)(t), (n_2\phi_2 - n_3\phi_3)(t))$, so folgt nach Lemma 1.9 für die in Definition 1.8 beschriebenen *gewichteten durchschnittlichen Frequenzen* Ω_j im System (2.1)

$$\Omega_j = \Omega, \quad \forall j = 1, 2, 3, \tag{2.38}$$

mit einer zugehörigen *Frequenz* Ω . Liegt eine $n_1 : n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation von ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 vor, so existiert nach Lemma 1.7 für das System (2.4) eine stabile stationäre oder eine stabile periodische Lösung. In dem Fall, dass der Synchronisationszustand durch eine periodische Lösung repräsentiert ist, existiert ebenso ein instabiler stationärer Punkt, welcher sich im Inneren des Grenzyklus befindet. Eine Phasensynchronisation des Systems (2.1) impliziert daher in jedem Fall die Existenz einer stabilen oder instabilen stationären Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ des reduzierten Systems (2.4) und somit auch die Existenz einer Frequenz $\Omega \in \mathbb{R}$ wie in (2.38). Wir wählen nun wie im Beweis von Lemma 2.5 die folgende Substitution:

$$\begin{aligned}
x_1 &:= \sin(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2), \\
x_2 &:= \sin \bar{\theta}_1, \\
x_3 &:= \sin \bar{\theta}_2.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\bar{\theta}_1 = (n_1\phi_1 - n_3\phi_3)(t)$, $\bar{\theta}_2 = (n_2\phi_2 - n_3\phi_3)(t)$ und $\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = (n_1\phi_1 - n_2\phi_2)(t)$ in die Gleichungen von (2.1) ein, so ergibt sich unter Beachtung von (2.38) nun das folgende lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned}
\Omega - n_1\omega_1 &= -K_{12}x_1 - K_{13}x_2 \\
\Omega - n_2\omega_2 &= K_{21}x_1 - K_{23}x_3 \\
\Omega - n_3\omega_3 &= K_{31}x_2 + K_{32}x_3
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt

$$K_{13}K_{21}K_{32} \neq K_{12}K_{23}K_{31}. \tag{2.40}$$

Wir werden nun zunächst annehmen, dass (2.40) erfüllt ist, den gegenteiligen Fall

werden wir am Ende dieses Beweises gesondert betrachten.

Als Lösung des LGS (2.39) errechnet sich in Abhängigkeit von Ω :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{K_{23}K_{31}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{13}K_{32}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{13}K_{23}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \\ x_2 &= -\frac{K_{21}K_{32}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{12}K_{32}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{12}K_{23}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \\ x_3 &= \frac{K_{21}K_{31}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{12}K_{31}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{13}K_{21}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \end{aligned}$$

Wäre die Frequenz Ω bekannt, so könnte hiermit die stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ berechnet werden. Für diese Lösung gilt dann:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 &= \begin{cases} \arcsin x_1 & \text{oder} \\ \pm \pi - \arcsin x_1 \end{cases} \\ \bar{\theta}_1 &= \begin{cases} \arcsin x_2 & \text{oder} \\ \pm \pi - \arcsin(x_2) \end{cases} \\ \bar{\theta}_2 &= \begin{cases} \arcsin x_3 & \text{oder} \\ \pm \pi - \arcsin(x_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Notwendige Bedingung für die Existenz einer stationären Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ von (2.4) ist daher die Voraussetzung

$$|x_j| \leq 1, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.42)$$

Abkürzend notieren wir im Folgenden

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{K_{23}K_{31}n_1\omega_1 + K_{13}K_{32}n_2\omega_2 + K_{13}K_{23}n_3\omega_3}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \\ d_2 &:= \frac{K_{21}K_{32}n_1\omega_1 + K_{12}K_{32}n_2\omega_2 + K_{12}K_{23}n_3\omega_3}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \\ d_3 &:= \frac{K_{21}K_{31}n_1\omega_1 + K_{12}K_{31}n_2\omega_2 + K_{13}K_{21}n_3\omega_3}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \end{aligned}$$

so dass wir nun mit den Bezeichnungen c_j aus (2.6) kurz

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1\Omega - d_1, \\ x_2 &= -c_2\Omega + d_2, \\ x_3 &= c_3\Omega \end{aligned} \quad (2.43)$$

schreiben können. Ferner gilt für Ω die Voraussetzung (2.42) genau dann, wenn mit

$$\Omega_L := \max_{j=1,2,3} \frac{d_j}{c_j} - \frac{1}{|c_j|}, \quad \Omega_R := \min_{j=1,2,3} \frac{d_j}{c_j} + \frac{1}{|c_j|},$$

gerade

$$\Omega \in [\Omega_L, \Omega_R] = \left[\frac{d_1}{c_1} - \frac{1}{|c_1|}, \frac{d_1}{c_1} + \frac{1}{|c_1|} \right] \cap \left[\frac{d_2}{c_2} - \frac{1}{|c_2|}, \frac{d_2}{c_2} + \frac{1}{|c_2|} \right] \cap \left[\frac{d_3}{c_3} - \frac{1}{|c_3|}, \frac{d_3}{c_3} + \frac{1}{|c_3|} \right]$$

erfüllt ist. Das Intervall $[\Omega_L, \Omega_R]$ existiert genau dann wenn

$$\frac{d_j}{c_j} - \frac{1}{|c_j|} \leq \frac{d_i}{c_i} + \frac{1}{|c_i|}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad (2.44)$$

gültig ist. (2.44) ist wiederum äquivalent zu den Voraussetzungen (2.34)-(2.36).

Ersetzen wir in (2.34)-(2.36) nun die Terme $n_i \omega_i - n_j \omega_j$ durch entsprechende ϵ_j -Terme, so ergeben sich für die Grenze des zulässigen Bereichs in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene die Bedingungen

$$\begin{aligned} K_{31}\epsilon_1 - (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 &= \pm(b_1 + b_3), \\ (K_{23} + K_{32})\epsilon_1 - K_{32}\epsilon_2 &= \pm(b_1 + b_2), \\ K_{21}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2 &= \pm(b_2 + b_3). \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir unmittelbar die Darstellungen der Geraden g_j in (2.37).

Wir wenden uns nun dem Spezialfall

$$K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$$

zu. Betrachten wir wieder das obige lineare Teilsystem (2.39) für x_1, x_2, x_3 , so ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned} K_{23}K_{31}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{13}K_{32}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{13}K_{23}(\Omega - n_3\omega_3) \\ = (K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31})x_1 \\ = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für Ω :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{K_{23}K_{31}n_1\omega_1 + K_{13}K_{32}n_2\omega_2 + K_{13}K_{23}n_3\omega_3}{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23}} \\ &= \frac{K_{21}K_{32}n_1\omega_1 + K_{12}K_{32}n_2\omega_2 + K_{12}K_{23}n_3\omega_3}{K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23}} \\ &= \frac{K_{21}K_{31}n_1\omega_1 + K_{12}K_{31}n_2\omega_2 + K_{13}K_{21}n_3\omega_3}{K_{21}K_{31} + K_{12}K_{31} + K_{13}K_{21}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ω hängt in diesem Fall also *linear* von den gewichteten Eigenfrequenzen $n_j\omega_j$ ab. In Abhängigkeit von x_1 erhalten wir nun für x_2 und x_3 die Darstellungen

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-K_{12}x_1 - \Omega + n_1\omega_1}{K_{13}} \\ x_3 &= \frac{K_{21}x_1 - \Omega + n_2\omega_2}{K_{23}} \end{aligned}$$

Die notwendige Voraussetzung (2.42) ist genau dann erfüllt, wenn mit

$$\begin{aligned} x_1^L &:= \max \left\{ -1, \frac{-\Omega + n_1\omega_1 - K_{13}}{K_{12}}, \frac{\Omega - n_2\omega_2 - K_{23}}{K_{21}} \right\}, \\ x_1^R &:= \min \left\{ 1, \frac{-\Omega + n_1\omega_1 + K_{13}}{K_{12}}, \frac{\Omega - n_2\omega_2 + K_{23}}{K_{21}} \right\} \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} x_1 \in [x_1^L, x_1^R] &= [-1, 1] \cap \left[\frac{-\Omega + n_1\omega_1 - K_{13}}{K_{12}}, \frac{-\Omega + n_1\omega_1 + K_{13}}{K_{12}} \right] \\ &\quad \cap \left[\frac{\Omega - n_2\omega_2 - K_{23}}{K_{21}}, \frac{\Omega - n_2\omega_2 + K_{23}}{K_{21}} \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Mit der Darstellung (2.45) für Ω können wir nun bestimmen, wann das Intervall $[x_1^L, x_1^R]$ existiert. Die Voraussetzung $x_1^L \leq x_1^R$ ist dabei gerade äquivalent zu den Voraussetzungen (2.34)-(2.36):

Es gilt $x_1^L \leq x_1^R$ genau dann, wenn jedes Element aus der max-Menge für x_1^L kleiner als oder gleich jedem Element aus der min-Menge für x_1^R ist. Wir zeigen hier exemplarisch, zu welcher Bedingung für (ϵ_1, ϵ_2) die Voraussetzung

$$-1 \leq \frac{-\Omega + n_1\omega_1 + K_{13}}{K_{12}} \quad (2.47)$$

führt. Mit der Darstellung (2.45) für Ω ist (2.47) äquivalent zu

$$-K_{12} - K_{13} \leq \frac{K_{13}K_{32}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + K_{13}K_{23}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3)}{\underbrace{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23}}_{=b_1}}$$

Ferner gilt $K_{12}b_1 = K_{13}b_2$ für $K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$, somit erhalten wir

$$-b_1 - b_2 \leq K_{32}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + K_{23}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3).$$

Analog führt die Voraussetzung

$$\frac{-\Omega + n_1\omega_1 - K_{13}}{K_{12}} \leq 1$$

zu der äquivalenten Bedingung

$$b_1 + b_2 \geq K_{32}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + K_{23}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3).$$

Insgesamt ergibt sich also die Voraussetzung (2.35). Ebenso können nun (2.34) und (2.36) gezeigt werden. Wir erhalten damit die Darstellungen (2.34)-(2.36) sowie (2.37) auch für den Fall $K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$.

□

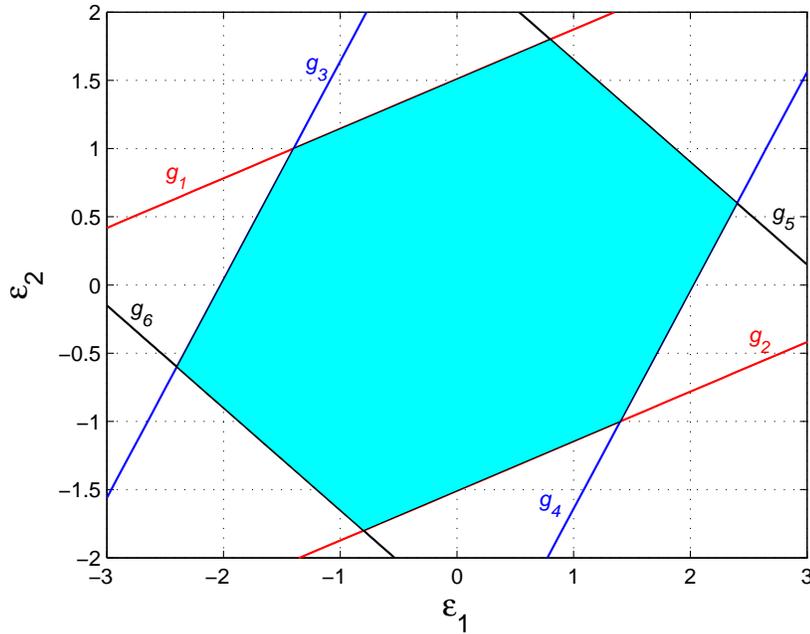


Abbildung 2.3.: $K_{12} = 0.8$, $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.6$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.5$. Das Polygon P , definiert durch den Schnitt der Geraden g_1, \dots, g_6 , liefert eine obere Schranke für das Synchronisationsregime in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene.

Daran anschließend können wir nun auch eine *untere Schranke* für das Synchronisationsregime herleiten:

2.10 Satz (Untere Schranke für das Synchronisationsregime)

Für $j \in \{1, 2, 3\}$ seien jeweils die Kurven $\sigma_L^j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\sigma_R^j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\sigma_L^1 : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{12} - (K_{13} + K_{31})s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{21} - K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.48)$$

$$\sigma_L^2 : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{13} + K_{31} + K_{12}s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{31} - K_{21}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.49)$$

$$\sigma_L^3 : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{32} + K_{12}s - (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{23} - K_{32} - K_{21}s - K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.50)$$

$$\sigma_R^1 : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{12} + (K_{13} + K_{31})s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{21} + K_{31}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.51)$$

$$\sigma_R^2 : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{13} - K_{31} - K_{12}s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{31} + K_{21}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.52)$$

$$\sigma_R^3 : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{32} - K_{12}s + (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ K_{23} + K_{32} + K_{21}s + K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.53)$$

Dann bildet die Vereinigung dieser 6 Kurven eine geschlossene Kurve σ im \mathbb{R}^2 . Ist M gegeben als das von σ eingeschlossene Gebiet, so existiert für alle $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \bar{M}$ im korrespondierenden System (2.4) eine stabile stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$. Ferner gilt für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial M$:

$$|\bar{\theta}_1| = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad |\bar{\theta}_2| = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad |\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2| = \frac{\pi}{2} \quad (2.54)$$

sowie für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathring{M}$

$$|\bar{\theta}_1| < \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad |\bar{\theta}_2| < \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad |\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2| < \frac{\pi}{2}. \quad (2.55)$$

\bar{M} stellt damit eine untere Schranke für das tatsächliche Synchronisationsregime in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene dar. Des Weiteren gilt für die Anfangs- und Endpunkte der Kurven σ_L^i und σ_R^j (d.h. $(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sigma_L^i(0)$ und $(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sigma_L^i(1)$ bzw. $(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sigma_R^j(0)$ und $(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sigma_R^j(1)$):

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial P \cap \partial M.$$

Beweis. Das gesuchte Gebiet $M \subset \mathbb{R}^2$ stellt gerade denjenigen Parameterbereich in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene dar, in welchem eine *Inphasen-Synchronisationslösung* existiert, d.h. eine stabile stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ von (2.4) der Form (2.55). Dieses Gebiet werden wir nun schrittweise konstruieren. Wie beim Beweis von Satz 2.9 $K_{13}K_{21}K_{32} \neq K_{12}K_{23}K_{31}$ werden wir hierbei eine Fallunterscheidung bzgl.

$$K_{13}K_{21}K_{32} \neq K_{12}K_{23}K_{31} \quad \text{und} \quad K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$$

durchführen.

Nehmen wir zunächst $K_{13}K_{21}K_{32} \neq K_{12}K_{23}K_{31}$ an, so impliziert wie im Beweis von Satz 2.9 die geforderte Existenz einer stationären Lösung die Existenz einer *Frequenz* Ω mit der Eigenschaft (2.43). Wählen wir wie oben die Substitution $x_1 =$

$\sin(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$, $x_2 = \sin \bar{\theta}_1$, $x_3 = \sin \bar{\theta}_2$ so erhalten wir ebenso das LGS (2.39) mit der zugehörigen Lösung (2.41) bzw. (2.43). Da wir hier gerade die Existenz einer *Inphasen-Synchronisationslösung* untersuchen, d.h. $|\bar{\theta}_j| < \frac{\pi}{2}$ für $j = 1, 2$ und $|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2| < \frac{\pi}{2}$, setzen wir daher weiter voraus, dass

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 &= \arcsin x_1 = \arcsin(c_1\Omega - d_1), \\
 \bar{\theta}_1 &= \arcsin x_2 = -\arcsin(c_2\Omega - d_2), \\
 \bar{\theta}_2 &= \arcsin x_3 = \arcsin(c_3\Omega - d_3)
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

gilt. Ist für alle $j \in \{1, 2, 3\}$ $|c_j\Omega - d_j| \leq 1$ erfüllt, so existiert die rechte Seite, und die zugehörige stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ des reduzierten Systems (2.4) ist stabil, denn es gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 \det A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) &= b_1 \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 + b_2 \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \\
 &\quad + b_3 \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \cos \bar{\theta}_1 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \text{spur } A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) &= -(K_{12} + K_{21}) \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \bar{\theta}_1 \\
 &\quad - (K_{23} + K_{32}) \cos \bar{\theta}_2 \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Um eine Synchronisationslösung des Systems (2.1) durch die Variablen x_1, x_2, x_3 bzw. Ω hinreichend zu charakterisieren, muss für x_1, x_2, x_3, Ω außerdem die folgende nichtlineare Bedingung erfüllt sein:

$$\arcsin x_1 - \arcsin x_2 + \arcsin x_3 = 0. \tag{2.57}$$

Setzen wir nun die obige Darstellungen für $\arcsin x_j$ in (2.57) ein, so kann damit die unbekannte Synchronisationsfrequenz Ω als Nullstelle der folgenden Funktion F charakterisiert werden:

$$\begin{aligned}
 F(\Omega) &:= \arcsin \left(\frac{K_{23}K_{31}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{13}K_{32}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{13}K_{23}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \right) \\
 &\quad + \arcsin \left(\frac{K_{21}K_{32}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{12}K_{32}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{12}K_{23}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \right) \\
 &\quad + \arcsin \left(\frac{K_{21}K_{31}(\Omega - n_1\omega_1) + K_{12}K_{31}(\Omega - n_2\omega_2) + K_{13}K_{21}(\Omega - n_3\omega_3)}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}} \right) \\
 &= \arcsin(c_1\Omega - d_1) + \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \arcsin(c_3\Omega - d_3).
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Es gilt $c_j \neq 0$ für $j = 1, 2, 3$ und außerdem

$$\text{sign}(c_i) = \text{sign}(K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}).$$

F ist für $\Omega \in \left[\frac{d_1}{c_1} - \frac{1}{|c_1|}, \frac{d_1}{c_1} + \frac{1}{|c_1|} \right] \cap \left[\frac{d_2}{c_2} - \frac{1}{|c_2|}, \frac{d_2}{c_2} + \frac{1}{|c_2|} \right] \cap \left[\frac{d_3}{c_3} - \frac{1}{|c_3|}, \frac{d_3}{c_3} + \frac{1}{|c_3|} \right]$ definiert und differenzierbar für alle $\Omega \in \left(\frac{d_1}{c_1} - \frac{1}{|c_1|}, \frac{d_1}{c_1} + \frac{1}{|c_1|} \right) \cap \left(\frac{d_2}{c_2} - \frac{1}{|c_2|}, \frac{d_2}{c_2} + \frac{1}{|c_2|} \right) \cap \left(\frac{d_3}{c_3} - \frac{1}{|c_3|}, \frac{d_3}{c_3} + \frac{1}{|c_3|} \right)$. Für die Ableitung ergibt sich

$$F'(\Omega) = \frac{c_1}{\sqrt{1 - (c_1\Omega - d_1)^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1 - (c_2\Omega - d_2)^2}} + \frac{c_3}{\sqrt{1 - (c_3\Omega - d_3)^2}}.$$

Im Falle $K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31} > 0$ (< 0) ist F somit *streng monoton wachsend* (*fallend*). Existiert also eine Nullstelle von F , so ist diese eindeutig bestimmt.

Weiter seien wie im Beweis von Satz 2.9 Ω_L und Ω_R gegeben durch

$$\Omega_L := \max_{j=1,2,3} \frac{d_j}{c_j} - \frac{1}{|c_j|}, \quad \Omega_R := \min_{j=1,2,3} \frac{d_j}{c_j} + \frac{1}{|c_j|}. \quad (2.59)$$

Durch das Intervall $[\Omega_L, \Omega_R]$ ist somit genau der obige Definitionsbereich von F beschrieben. Wir sehen also an dieser Stelle, dass wie im Beweis von Satz 2.9 die Voraussetzung (2.44) notwendig für die Existenz einer stationären Inphasen-Lösung von (2.4) ist.

Da F streng monoton und stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz

$$\text{sign}(F(\Omega_L)) \neq \text{sign}(F(\Omega_R)) \Leftrightarrow \exists \Omega : F(\Omega) = 0.$$

Wir betrachten jetzt den Fall $K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31} > 0$, der gegenteilige Fall kann analog behandelt werden. F ist daher nun als *streng monoton wachsend* vorzusetzen. Die Bedingungen $F(\Omega_L) \leq 0$ und $F(\Omega_R) \geq 0$ sind daher nach dem Zwischenwertsatz notwendig und hinreichend für die Existenz einer Nullstelle. Wir untersuchen nun zunächst, unter welchen Voraussetzungen an $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in P$ gerade der kritische Fall $F(\Omega_L) = 0$ eintritt.

Hierfür notieren wir im Folgenden

$$\begin{aligned} \Omega_L^j &:= \frac{d_j}{c_j} - \frac{1}{|c_j|}, & j \in \{1, 2, 3\}, \\ \Omega_R^j &:= \frac{d_j}{c_j} + \frac{1}{|c_j|}, & j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Es gilt dann in (2.59) $\Omega_L = \max_{j=1,2,3} \Omega_L^j$ und $\Omega_R = \min_{j=1,2,3} \Omega_R^j$. Ist $\Omega_L = \Omega_L^1$, so folgt wegen $\arcsin(c_1\Omega_L^1 - d_1) = -\frac{\pi}{2}$ im Falle $F(\Omega_L^1) = 0$ notwendi-

gerweise

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \arcsin(c_2\Omega_L^1 - d_2) + \arcsin(c_3\Omega_L^1 - d_3) \\ &= \arcsin\left(\frac{-(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2 - b_2}{b_1}\right) \\ &\quad + \arcsin\left(\frac{-K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 - b_3}{b_1}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

(2.34),(2.36) und (2.61) gemeinsam sind wiederum äquivalent zu den folgenden drei Bedingungen:

$$b_2 \leq -(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2 \leq b_1 + b_2 \quad (2.62)$$

$$b_3 \leq -K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 \leq b_1 + b_3 \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \left(-(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2 - b_2 \right)^2 + \left(-K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 - b_3 \right)^2 \\ &= b_1^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in P$ mit $F(\Omega_L^1) = 0$ ergibt sich hieraus mit einem $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} b_2 + sb_1 &= -(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2, \\ b_3 + \sqrt{1 - s^2} &= -K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Durch Lösung des Gleichungssystems (2.65) für (ϵ_1, ϵ_2) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -K_{12} - (K_{13} + K_{31})s + K_{32}\sqrt{1 - s^2}, \\ \epsilon_2 &= K_{21} - K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1 - s^2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Für $s = 0$ folgt $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-K_{12} + K_{32}, K_{21} + K_{23} + K_{32}) = (\epsilon_1, g_1(\epsilon_1))$. Ebenso gilt für $s = 1$ $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-K_{12} - K_{13} - K_{31}, K_{21} - K_{31}) = (\epsilon_1, g_3(\epsilon_1))$. Für $s \in [0, 1]$ wird somit durch (2.66) eine Kurve σ_L^1 in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene beschrieben, deren Anfang- und Endpunkt jeweils am Rand des Polygons P liegen.

Analoge Rechnungen lassen sich nun für die übrigen Fälle $F(\Omega_L^2) = 0$ bzw. $F(\Omega_L^3) = 0$ und ebenso $F(\Omega_R^j) = 0$ durchführen. Auch diese Ansätze führen zur Definition entsprechender Kurven σ_L^i und σ_R^j in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene. Auf diese Weise kann die Parametermenge in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene, für welche F genau eine Nullstelle besitzt, exakt berechnet werden. Ferner bildet die Vereinigung der 6 Kurven σ_L^i und σ_R^j eine *geschlossene* Kurve; dies können wir leicht durch Berechnung der Anfangs- und Endpunkte der Kurven, $\sigma_L^i(0)$ und $\sigma_L^i(1)$ bzw. $\sigma_R^j(0)$ und $\sigma_R^j(1)$, verifizieren:

$$\begin{aligned} \sigma_L^1(0) &= (-K_{12} + K_{32}, K_{21} + K_{23} + K_{32}) \\ \sigma_L^1(1) &= (-K_{12} - K_{13} - K_{31}, K_{21} - K_{31}) \\ \sigma_L^2(0) &= (K_{13} + K_{31} + K_{32}, K_{23} + K_{31} + K_{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_L^2(1) &= (K_{12} + K_{13} + K_{31}, K_{31} - K_{21}) \\
\sigma_L^3(0) &= (-K_{13} - K_{31} - K_{32}, -K_{23} - K_{31} - K_{32}) \\
\sigma_L^3(1) &= (K_{12} - K_{32}, -K_{21} - K_{23} - K_{32}) \\
\sigma_L^1(0) &= (K_{12} - K_{32}, -K_{21} - K_{23} - K_{32}) \\
\sigma_R^1(1) &= (K_{12} + K_{13} + K_{31}, K_{31} - K_{21}) \\
\sigma_R^2(0) &= (-K_{13} - K_{31} - K_{32}, -K_{23} - K_{31} - K_{32}) \\
\sigma_R^2(1) &= (-K_{12} - K_{13} - K_{31}, K_{21} - K_{31}) \\
\sigma_R^2(0) &= (K_{13} + K_{31} + K_{32}, K_{23} + K_{31} + K_{32}) \\
\sigma_R^3(1) &= (K_{32} - K_{12}, K_{21} + K_{23} + K_{32})
\end{aligned}$$

So wie wir es oben für das Beispiel σ_L^1 erläutert haben, lässt sich leicht zeigen, dass jeder dieser Punkte auf einer der 6 in (2.37) definierten Geraden g_j liegt. Da nach Satz 2.9 die Bedingung $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \bar{P}$ *notwendig* für die Existenz eines Synchronisationszustandes ist, müssen die obigen Anfangs- und Endpunkte daher gerade auf ∂P liegen.

Bezeichnet M nun das von den Kurven σ_L^i , und σ_R^j umschlossene Gebiet in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene (siehe Abb. 2.4), so gilt auf ∂M für die zugehörige Nullstelle Ω_0 stets $\Omega_0 = \Omega_L^j$ oder $\Omega_0 = \Omega_R^j$, also $|\arcsin(c_j \Omega_0 - d_j)| = \frac{\pi}{2}$ für ein $j \in \{1, 2, 3\}$. Damit folgt für die zugehörige stabile stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = (\bar{\theta}_1(\Omega_0), \bar{\theta}_2(\Omega_0))$ (gegeben gemäß (2.56)):

$$\begin{aligned}
|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2| &= \frac{\pi}{2} \quad \text{falls } \Omega_0 \in \{\Omega_L^1, \Omega_R^1\}, \\
|\bar{\theta}_1| &= \frac{\pi}{2} \quad \text{falls } \Omega_0 \in \{\Omega_L^2, \Omega_R^2\}, \\
|\bar{\theta}_2| &= \frac{\pi}{2} \quad \text{falls } \Omega_0 \in \{\Omega_L^3, \Omega_R^3\}.
\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun wiederum dem Fall $K_{13}K_{21}K_{32} = K_{12}K_{23}K_{31}$ zu. Führen wir hier wie im ersten Teil des Beweises die Substitutionen x_1, x_2, x_3 durch, so ergeben sich wie im Beweis von Satz 2.9 die Auflösung des LGS (2.39), die Darstellung (2.45) für Ω sowie die Beziehungen

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-K_{12} x_1 - \Omega + n_1 \omega_1}{K_{13}}, \\
x_3 &= \frac{K_{21} x_1 - \Omega + n_2 \omega_2}{K_{23}}.
\end{aligned}$$

Definieren wir weiter

$$F(x_1) := \arcsin x_1 + \arcsin \left(\frac{K_{12} x_1 + \Omega - n_1 \omega_1}{K_{13}} \right) + \arcsin \left(\frac{K_{21} x_1 - \Omega + n_2 \omega_2}{K_{23}} \right),$$

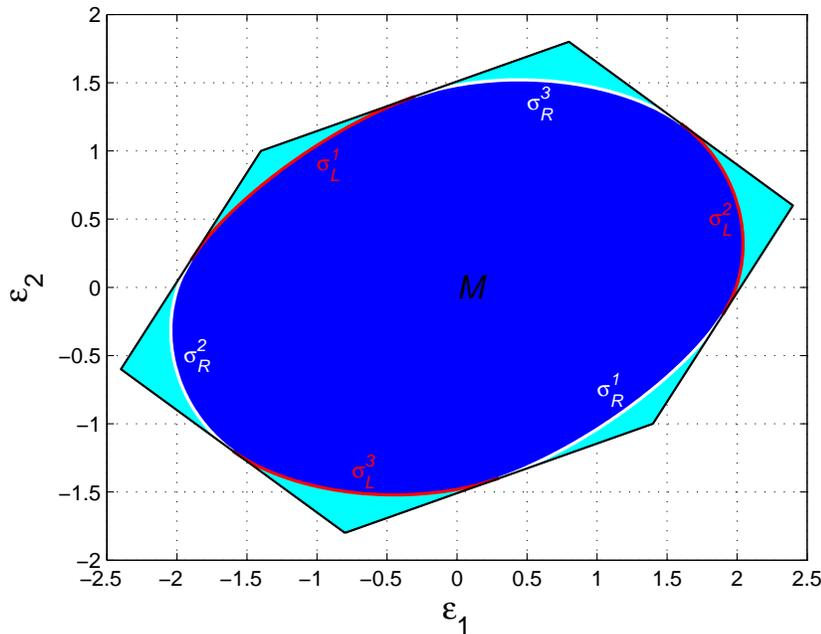


Abbildung 2.4.: $K_{12} = 0.8$, $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.6$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.5$. Darstellung der oberen Schranke P (türkise + blaue Region) und unteren Schranke M (blaue Region) des Synchronisationsregimes in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene. M wird begrenzt durch die in (2.48)-(2.53) definierten Kurven σ_L^i und σ_R^j .

so erhalten wir zusammen mit der Bedingung (2.57) für eine Inphasen-Synchronisationslösung die Beziehung

$$F(x_1) = 0.$$

Durch das im Beweis von Satz 2.9 bestimmte Intervall $[x_1^L, x_1^R]$ (siehe (2.46)) erhalten wir gerade den Definitionsbereich der Funktion F . In (x_1^L, x_1^R) ist F außerdem differenzierbar:

$$\begin{aligned} F'(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{K_{12}}{K_{13}\sqrt{1-\left(\frac{K_{12}x_1+\Omega-n_1\omega_1}{K_{13}}\right)^2}} \\ &\quad + \frac{K_{21}}{K_{23}\sqrt{1-\left(\frac{K_{21}x_1-\Omega+n_2\omega_2}{K_{23}}\right)^2}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

F ist somit *streng monoton wachsend*. Eine Nullstelle von F ist daher, falls existent, stets eindeutig bestimmt. Wie oben kann nun mit Hilfe des Zwischenwertsatzes anhand der Funktionswerte $F(x_1^L)$ und $F(x_1^R)$ entschieden werden, ob eine Nullstelle existiert. Die Bedingungen $F(x_1^L) = 0$ und $F(x_1^R) = 0$ führen dabei wie oben zu den in (2.48)-(2.53) definierten Grenzkurven σ_L^i, σ_R^j , die das Gebiet M in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene umschließen.

□

Das Polygon P , definiert durch den Schnitt der Geraden g_1, \dots, g_6 in (2.37) in Satz 2.9, und die durch die Kurven σ_L^i, σ_R^j eingeschlossene Menge M liefern uns somit eine *obere* bzw. *untere Begrenzung* für das tatsächliche Synchronisationsregime in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene (vgl. Abb. 2.4). Durch die ‘‘Verknüpfungsstellen‘‘ $\sigma_L^i = \sigma_R^j$ sind uns dabei 6 Punkte (ϵ_1, ϵ_2) gegeben, deren Vereinigung gerade die Schnittmenge $\partial M \cap \partial P$ bildet, und welche sich somit auch auf dem Rand des *exakten Synchronisationsregimes* befinden.

Auch ohne analytische Bestimmung des exakten Synchronisationsregimes ist es nun möglich, den *Verzweigungsmechanismus* zu ermitteln, welcher sich für variierende Parameter (ϵ_1, ϵ_2) beim Verlassen des Synchronisationsregimes vollzieht. Dies ist Gegenstand der Untersuchungen im nachfolgenden Abschnitt.

2.3. Desynchronisation via Sattel-Knoten-Verzweigung

Im hiesigen Abschnitt untersuchen wir, auf welche Weise sich der Übergang vom synchronen zum nicht-synchronen System vollzieht, wenn die Parameter ϵ_1, ϵ_2 den zulässigen Bereich verlassen. Dabei betrachten wir im System (2.4) (ϵ_1, ϵ_2) als *Bifurkationsparameter*.

∂M (siehe Satz 2.10) ist dadurch charakterisiert, dass für die dort existierende stabile stationäre Lösung $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ gilt

$$\bar{\theta}_1 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (2.67)$$

Somit folgt in diesem Fall für $A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = DG(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$:

$$\det A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = \begin{cases} b_1 \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 & \text{falls } \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ b_2 \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \cos \bar{\theta}_2 & \text{falls } \bar{\theta}_1 = \pm \frac{\pi}{2} \\ b_3 \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \cos \bar{\theta}_1 & \text{falls } \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sowie

$$\text{spur } A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = \begin{cases} -(K_{13} + K_{31}) \cos \bar{\theta}_1 - (K_{23} + K_{32}) \cos \bar{\theta}_2 & \text{falls } \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ -(K_{12} + K_{21}) \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) - (K_{23} + K_{32}) \cos \bar{\theta}_2 & \text{falls } \bar{\theta}_1 = \pm \frac{\pi}{2} \\ -(K_{12} + K_{21}) \cos(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \bar{\theta}_1 & \text{falls } \bar{\theta}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Liegt $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial M$ nicht gerade auf einer ‘‘Verknüpfungsstelle‘‘, derart dass $\sigma_L^i = \sigma_R^j$ (bzw. $\Omega_L^i = \Omega_R^j$) gilt, so ist in (2.67) *genau eine* der 3 Gleichungen erfüllt, die anderen beiden Phasendifferenzen sind jeweils betragsmäßig $< \frac{\pi}{2}$. Aus diesem Grund folgt

$$\det A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) > 0 \quad \text{und} \quad \text{spur } A(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) < 0.$$

Im Allgemeinen tritt auf ∂M somit keine *Verzweigung* auf, vielmehr existiert eine stabile stationäre Lösung des Systems (2.4) auch weiterhin. Im Folgenden soll nun untersucht werden, wann und auf welche Weise *Desynchronisation* eintritt, d.h. der stabile stationäre Lösungsweig von (2.4) verschwindet.

Wie im vorangegangene Abschnitt wird der Hauptansatzpunkt unserer Argumentation im Beweis des folgenden Satzes die Charakterisierung einer Synchronisationslösung von (2.1) bzw. einer stationären Lösung von (2.4) durch die Nullstelle einer skalaren Funktion sein. Durch das ‘‘Zusammentreffen‘‘ zweier Nullstellen einer solchen Funktion bei einem bestimmten Parameterwert (ϵ_1, ϵ_2) kann dabei der Verzweigungsmechanismus beim Übergang von Synchronisation zu Desynchronisation beschrieben werden.

2.11 Satz (Desynchronisation via Sattel-Knoten-Verzweigung)

Mit den Bezeichnungen M und P aus Satz 2.9 und Satz 2.10 bezeichne ζ einen beliebigen stetigen Weg von \mathring{M} zu ∂P , welcher in \mathring{P} verläuft:

$$\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \zeta(0) \in \mathring{M}, \quad \zeta(1) \in \partial P \quad \text{und} \quad \zeta(s) \in \mathring{P} \quad \text{für } s \in (0, 1).$$

Dann existiert ein $s^* \in (0, 1]$, so dass für $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = \zeta(s^*)$ das System (2.4) einer **Sattel-Knoten-Bifurkation** unterliegt.

Beweis. Der Beweis von Satz 2.11 gliedert sich in die folgenden Schritte:

- Repräsentation der *instabilen* stationären Lösungen von (2.4) für (ϵ_1, ϵ_2) nahe $(0, 0)$ durch zugehörige *Frequenzen* Ω , welche wiederum als *Nullstellen* gewisser skalarer Funktionen charakterisiert sind
- ‘‘Weiterverfolgen‘‘ dieser Zweige von instabilen stationären Lösungen entlang des Pfades $\zeta(s)$
- ‘‘Weiterverfolgen‘‘ des Zweiges der *stabilen* stationären Lösung für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathring{P} \setminus \mathring{M}$ entlang des Pfades $\zeta(s)$

Ferner beschränken wir uns im Beweis dieses Satzes auf den Fall

$$K_{13}K_{21}K_{32} \neq K_{12}K_{23}K_{31},$$

der gegenteilige Fall kann analog zu der Argumentation in den Beweisen von Satz 2.9 und Satz 2.10 betrachtet werden.

Im Abschnitt 2.1 wurde bereits gezeigt, dass das reduzierte System (2.4) im Falle $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ mindestens 4 und höchstens 6 stationäre Punkte besitzt (siehe Lemma 2.5). Die Inphasen-Synchronisationslösung $\theta_1 = \theta_2 = 0$ stellte hierbei nach Lemma 2.6 den einzigen stabilen Gleichgewichtspunkt dar. Für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq (0, 0)$ werden nun die übrigen “antiphasischen“ instabilen Lösungszweige weiterverfolgt; auch diese können mithilfe von Nullstellen der folgenden Funktionen charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} H_{1,2}(\Omega) &:= \pi - \arcsin(c_1\Omega - d_1) - \pi - \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \arcsin(c_3\Omega - d_3) \\ &= -\arcsin(c_1\Omega - d_1) - \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \arcsin(c_3\Omega - d_3) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$H_{1,3}(\Omega) := -\arcsin(c_1\Omega - d_1) + \arcsin(c_2\Omega - d_2) - \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.69)$$

$$H_{2,3}(\Omega) := \arcsin(c_1\Omega - d_1) - \arcsin(c_2\Omega - d_2) - \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.70)$$

$$H_1(\Omega) := \pi - \arcsin(c_1\Omega - d_1) + \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.71)$$

$$H(\Omega) := \pi - \arcsin(c_1\Omega - d_1) - \arcsin(c_2\Omega - d_2) - \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.72)$$

Mit den Bezeichnungen (2.59) für Ω_L und Ω_R ist der Definitionsbereich dieser Funktionen wiederum durch $[\Omega_L, \Omega_R]$ gegeben. Ist Ω_0 Nullstelle von einer dieser Funktionen, so besitzt die zugehörige stationäre Lösung (θ_1, θ_2) von (2.4) dann die folgende Darstellung:

$$H_{1,2}(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = \pi + \arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \pi - \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases} \quad (2.73)$$

$$H_{1,3}(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = -\arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \pi - \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \pi - \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases} \quad (2.74)$$

$$H_{2,3}(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = \pi + \arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \pi - \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases} \quad (2.75)$$

$$H_1(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = -\arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \pi - \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases} \quad (2.76)$$

$$H(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = \pi + \arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \pi - \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \pi - \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases} \quad (2.77)$$

$H_{i,j}$, H_1 und H sind des Weiteren in (Ω_l, Ω_R) stetig differenzierbar. Gilt $\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0) = \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1)$ so erhalten wir für die Ableitung des \arcsin -Terms an der Nullstelle Ω_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left(\arcsin(c_1\Omega - d_1) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= \frac{c_1}{\sqrt{1 - (c_1\Omega_0 - d_1)^2}} \\ &= \frac{c_1}{\cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0))}. \end{aligned}$$

Gilt hingegen $\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0) = \pi - \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1)$ so folgt ebenso

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left(-\arcsin(c_1\Omega - d_1) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= -\frac{c_1}{\sqrt{1 - (c_1\Omega_0 - d_1)^2}} \\ &= \frac{c_1}{\cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0))}. \end{aligned}$$

Dementsprechend erhalten wir nun auch

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left(\arcsin(c_2\Omega - d_2) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= \frac{c_2}{\cos(\theta_1(\Omega_0))} \quad \text{für } \theta_1(\Omega_0) = -\arcsin(c_2\Omega_0 - d_2), \\ \frac{d}{d\Omega} \left(-\arcsin(c_2\Omega - d_2) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= -\frac{c_2}{\cos(\theta_1(\Omega_0))} \quad \text{für } \theta_1(\Omega_0) = \pi + \arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left(\arcsin(c_3\Omega - d_3) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= \frac{c_3}{\cos(\theta_2(\Omega_0))} \quad \text{für } \theta_2(\Omega_0) = \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3), \\ \frac{d}{d\Omega} \left(-\arcsin(c_3\Omega - d_3) \right) \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= -\frac{c_3}{\cos(\theta_2(\Omega_0))} \quad \text{für } \theta_2(\Omega_0) = \pi - \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3). \end{aligned}$$

Bei jeder der Funktionen F, H_{ij}, H_1, H (F wie im Beweis von Satz 2.10) zeigt das jeweilige Vorzeichen $+/-$ eines $\arcsin(c_j\Omega - d_j)$ -Terms in der Funktionsdefinition an, ob die zugehörige Phasendifferenz gerade als *inphasisch* (d.h. $= \pm \arcsin(\cdot)$) oder als *antiphasisch* (d.h. $= \pi \mp \arcsin(\cdot)$) gegeben ist. Aus diesem Grund gilt für jede Nullstelle Ω_0 von einer Funktion $W \in \{F, H_{i,j}, H_1, H\}$ mit korrespondierendem Fixpunkt $(\theta_1(\Omega_0), \theta_2(\Omega_0))$

$$\begin{aligned} W'(\Omega_0) &= \frac{c_1}{\cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0))} + \frac{c_2}{\cos \theta_1(\Omega_0)} + \frac{c_3}{\cos \theta_2(\Omega_0)} \\ &= \left(c_1 \cos(\theta_1(\Omega_0)) \cos(\theta_2(\Omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + c_2 \cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0)) \cos(\theta_2(\Omega_0)) \right. \\ &\quad \left. + c_3 \cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0)) \cos(\theta_1(\Omega_0)) \right) / \\ &\quad \left(\cos(\theta_1(\Omega_0)) \cos(\theta_2(\Omega_0)) \cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0)) \right). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Mit der Darstellung von $\det A(\theta_1, \theta_2)$ in (2.20) folgt hiermit

$$W'(\Omega_0) = \frac{\det A(\theta_1(\Omega_0), \theta_2(\Omega_0))}{(K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}) \cdot (\cos(\theta_1(\Omega_0)) \cos(\theta_2(\Omega_0)) \cos(\theta_1(\Omega_0) - \theta_2(\Omega_0)))}$$

Somit erhalten wir die Beziehung

$$\det A(\theta_1(\Omega_0), \theta_2(\Omega_0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W'(\Omega_0) = 0. \quad (2.79)$$

Jede Funktion $H_{i,j}$ kann bis zu 3 Nullstellen besitzen. Für $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ist $\omega^* = n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3$ gemeinsame Nullstelle von $H_{1,2}, H_{1,3}, H_{2,3}$ und F . Der Fixpunkt $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$ korrespondiert dabei zur Nullstelle ω^* von $H_{1,2}$, entsprechend kann $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi)$ über $H_{1,3}(\omega^*) = 0$ sowie $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$ über $H_{2,3}(\omega^*) = 0$ identifiziert werden. Existieren für $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ zwei weitere Fixpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ mit der Darstellung (2.16)-(2.18), so sind diese ebenfalls durch entsprechende Nullstellen Ω_\pm von genau einer der Funktionen $H_{1,2}, H_{1,3}, H_{2,3}, H_1$ oder H charakterisiert.

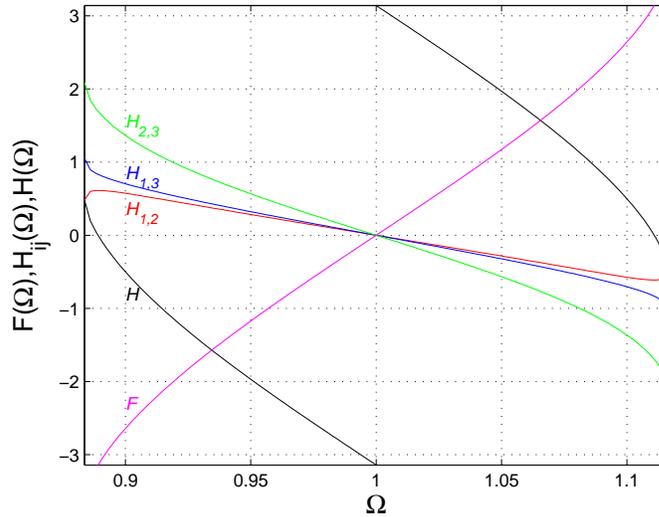


Abbildung 2.5.: $K_{12} = 0.8, K_{13} = 0.7, K_{21} = 0.6, K_{23} = 0.3, K_{31} = 0.4, K_{32} = 0.5; \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0, \omega^* = 1$. Charakterisierung der instabilen stationären Lösungen des Systems (2.4) mittels der Nullstellen der Funktionen $H_{i,j}$ und H : Die gemeinsame Nullstelle $\Omega = \omega^*$ der Funktionen $H_{i,j}$ korrespondiert jeweils zu den Fixpunkten $(\pi, 0), (0, \pi)$ und (π, π) , während durch die Nullstellen $\Omega_\pm \approx \pm 1.11$ von H die Frequenzen zweier zusätzlicher instabiler Knoten $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) \approx (\mp 1.987, \pm 1.877)$ gegeben sind.

Um eine Bifurkationsanalyse der stationären Lösungen des Systems (2.4) durch alleinige Betrachtung der von $\epsilon_1, \epsilon_j, \omega^*$ und K_{ij} abhängigen Funktionen $F, H_{i,j}$ und H durchführen zu können, müssen wir zunächst klären, auf welche Weise sich Verzweigungen stationärer Lösungen im System (2.4) durch Veränderungen jener Funktionen manifestieren. Ebenso wie im bekannten Kuramoto-Modell können bei dem hiesigen System keine *Hopf-Verzweigungen* auftreten (für den Beweis siehe A.1). Es

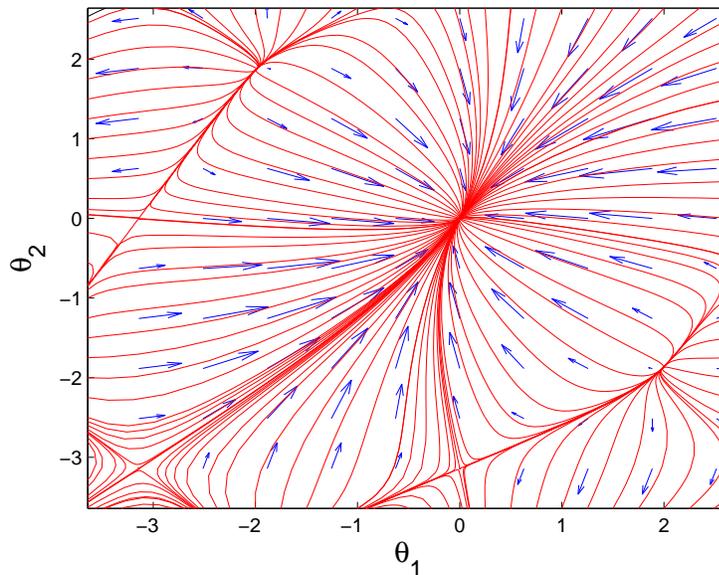


Abbildung 2.6.: $K_{12} = 0.8$, $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.6$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.5$; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, $\omega^* = 1$. Phaseportrait in der (θ_1, θ_2) -Ebene. Zu erkennen ist der stabile Fixpunkt $(0, 0)$, die instabilen Knoten $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) \approx (\mp 1.987, \pm 1.877)$ sowie die Sattelpunkte $(0, -\pi)$, $(-\pi, 0)$ und $(-\pi, -\pi)$.

stellt sich daher vor allem die Frage nach der Darstellung möglicher *Sattel-Knoten* oder *Pitchfork*-Bifurkationen der stationären Lösungen. Da der letztere Verzweigungstyp immer gewisse Symmetrievoraussetzungen an das System erfordert, können derartige Bifurkationen hier nur in Spezialfällen auftreten (z.B. $K_{ij} = K \forall i, j$ und $\epsilon_1 = \epsilon_2$, vgl. 3-dim. Kuramoto-System in [19].)

Für $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ liegen alle Nullstellen der oben definierten Funktionen im Inneren (Ω_L, Ω_R) des Definitionsbereiches. Bei stetiger Veränderung der Parameter ϵ_j innerhalb von P verändert sich nun die Lage der Nullstellen. Die Funktionen $H_{i,j}$, H_1 und H können dabei auf zwei verschiedene Arten Nullstellen verlieren bzw. hinzugewinnen:

1. Die Nullstelle erreicht den Rand des Definitionsbereichs, d.h. $\Omega_0 = \Omega_L$ oder $\Omega_0 = \Omega_R$. Da $|\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{L/R}} H'_{i,j}(\Omega)| = \infty$ sowie $|\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{L/R}} H'_1(\Omega)| = \infty$ und $|\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{L/R}} H'(\Omega)| = \infty$ gilt, folgt wegen (2.79) dann

$$\det A(\theta_1(\Omega_0), \theta_2(\Omega_0)) \neq 0.$$

Der zugehörige stationäre Lösungsweig bleibt somit weiterhin bestehen und unterliegt dabei auch keiner qualitativen Veränderung (wie oben bereits angemerkt wurde, ist eine Hopf-Verzweigung, also der Verzweigungsmechanismus, der mit $\det A(\theta_1(\Omega_0), \theta_2(\Omega_0)) \neq 0$ einher gehen würde, auch nicht möglich, siehe A.1). Lediglich die Darstellung der stationären Lösung als Nullstelle einer

dieser Funktionen ändert sich:

Ist $\Omega_0 \in \{\Omega_L, \Omega_R\}$ Nullstelle von H , so gilt für die zugehörige stationäre Lösung entweder $|\theta_1| = \frac{\pi}{2}$ oder $|\theta_2| = \frac{\pi}{2}$ oder $|\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2}$. Ω_0 ist in diesem Falle daher auch Nullstelle einer der Funktionen $H_{i,j}$. Bei weiter anwachsendem Abstand der Parameter (ϵ_1, ϵ_2) vom Nullpunkt “verliert“ daraufhin entweder H diese Nullstelle, so dass stattdessen eine der Funktionen $H_{i,j}$ einen zusätzlichen Nullstellenzweig “gewinnt“ oder es findet umgekehrt eine Übergabe der Nullstelle von $H_{i,j}$ zu H statt. Der erste Fall kann nur dann eintreten, wenn für H bei $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ überhaupt Nullstellen existieren. Gelangt hingegen eine Nullstelle von einer der Funktionen $H_{i,j}$ an den Rand, so verliert diese Funktion bei zunehmender Entfernung von (ϵ_1, ϵ_2) vom Nullpunkt ebenfalls diese Nullstelle und “übergibt“ diese entweder an H , H_1 oder an eine der wie folgt definierten Funktionen:

$$H_2(\Omega) := \arcsin(c_1\Omega - d_1) + \pi - \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.80)$$

$$H_3(\Omega) := \arcsin(c_1\Omega - d_1) + \arcsin(c_2\Omega - d_2) + \pi - \arcsin(c_3\Omega - d_3) \quad (2.81)$$

Die Nullstellen Ω_0 der Funktionen H_j charakterisieren wiederum stationäre Lösungen von (2.4), welche gegeben sind durch

$$H_2(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = \pi + \arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases}$$

$$H_3(\Omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = -\arcsin(c_2\Omega_0 - d_2) \\ \theta_2 = \pi - \arcsin(c_3\Omega_0 - d_3) \\ \theta_1 - \theta_2 = \arcsin(c_1\Omega_0 - d_1) \end{cases}$$

Ferner sind (2.78) und (2.79) ebenso mit $W = H_j$ gültig.

Genauso kann die Funktion H_1 ihre Nullstellen (falls existent) an eine der Funktionen $H_{i,j}$ übergeben. Ein analoges “Weiterreichen“ einer Nullstelle von H_1 an die Funktion F des stabilen stationären Lösungszweiges kann ebenfalls stattfinden, wie wir es später im Beweis darlegen werden.

Wir halten fest: Gelangt bei Variation der Parameter (ϵ_1, ϵ_2) eine Nullstelle Ω_0 von $H_{i,j}$, H , H_j oder F an den Rand des Definitionsbereiches dieser Funktion, so dass bei weiterer Entfernung von (ϵ_1, ϵ_2) von $(0, 0)$ die entsprechende Funktion diesen Nullstellenzweig verliert, so bleiben die durch die Nullstellen

charakterisierten stationären Lösungsweige im Allgemeinen weiterhin bestehen und unterlaufen auch keiner qualitativen Veränderung. Bei diesem Mechanismus findet daher im Allgemeinen *keine* Verzweigung stationärer Lösungen statt. (Ausnahme: Ist $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial P \cap \partial M$, so gilt $\Omega_L = \Omega_R$, wie es im Beweis von Satz 2.10 gezeigt wurde. In diesem Fall gilt $F(\Omega_L) = F(\Omega_R) = 0$ und $\det A(\theta_1(\Omega_L), \theta_2(\Omega_L)) = 0$. Es existieren jedoch nur genau 6 Parameterpaare $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial P \cap \partial M$)

2. Eine Funktion $H_{i,j}$, H oder H_j besitzt zwei Nullstellen Ω_1 und Ω_2 , welche bei Variation der Parameter (ϵ_1, ϵ_2) näher aneinanderrücken und schließlich zusammenfallen. Kurz bevor die beiden Nullstellen miteinander kollidieren, gilt für $W = H_{i,j}$, $W = H$ oder $W = H_j$ stets

$$\text{sign}(W'(\Omega_1)) = -\text{sign}(W'(\Omega_2)) \quad (2.82)$$

und somit nach (2.79)

$$\text{sign}(\det(A(\theta_1(\Omega_1), \theta_2(\Omega_1)))) = -\text{sign}(\det(A(\theta_1(\Omega_2), \theta_2(\Omega_2)))). \quad (2.83)$$

Bei den zugehörigen stationären Lösungen handelt es sich also immer um einen Sattelpunkt und einen Knoten (bzw. Strudel). Ist schließlich $\Omega_1 = \Omega_2$, so folgt

$$\det(A(\theta_1(\Omega_1), \theta_2(\Omega_1))) = \det(A(\theta_1(\Omega_2), \theta_2(\Omega_2))) = 0. \quad (2.84)$$

Bei weiterer Parametervariation besitzt die entsprechende Funktion $H_{i,j}$, H oder H_j dann zwei Nullstellen weniger, hierbei sind diese - im Gegensatz zum 1. Fall - allerdings nicht von einer anderen Funktion "übernommen" worden. Stattdessen hat hier eine *Sattel-Knoten-Bifurkation* stattgefunden.

Ausgehend von $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ variieren wir nun diese Parameter, indem wir uns entlang eines stetigen Pfades $\zeta : [0, 1] \rightarrow \bar{P}$ auf der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene bewegen, welcher von $\zeta(0) \in \overset{\circ}{M}$ zu $\zeta(1) \in \partial P$ führt, wobei $\zeta(s) \in \overset{\circ}{P}$ für alle $s \in (0, 1)$ gilt (siehe Beispielpfad in Abb. 2.7). Ohne Einschränkung nehmen wir dabei $\zeta(0) = (0, 0)$ an.

Wir definieren nun die folgenden Kurven in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene:

$$\begin{aligned} \gamma_L^1 : s \mapsto & \left(-K_{12} + (K_{13} + K_{31})s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \right. \\ & \left. -K_{21} - K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \right) \end{aligned} \quad s \in [0, 1] \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \gamma_L^2 : s \mapsto & \left(K_{13} + K_{31} - K_{32}s - K_{12}\sqrt{1-s^2}, \right. \\ & \left. K_{31} - (K_{23} + K_{32})s + K_{21}\sqrt{1-s^2} \right) \end{aligned} \quad s \in [0, 1] \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \gamma_L^3 : s \mapsto & \left(-K_{32} - K_{12}s + (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \right. \\ & \left. -K_{23} - K_{32} + K_{21}s + K_{31}\sqrt{1-s^2} \right) \end{aligned} \quad s \in [0, 1] \quad (2.87)$$

werte, bei welchen die Funktion H ihre Nullstellen “verliert“ und an $H_{i,j}$ “überreicht“ (Abb. 2.8a und (d)). Falls H für $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ keine Nullstellen besitzt, so stellen die Kurven γ_L, γ_R gerade die Parameterwerte dar, an welchen umgekehrt H von einer Funktion $H_{i,j}$ eine Nullstelle übernimmt. Auf diese Weise erhält H auf dem Weg von $(0, 0)$ zu ∂P zwei Nullstellen, welche im weiteren Verlauf innerhalb von P per Sattel-Knoten-Verzweigung zusammenfallen und danach verschwinden. Wir betrachten nun die folgende Kurve in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene:

$$\tau_{1,2}^{L2} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{13} + K_{31} + K_{12}s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{31} - K_{21}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.91)$$

Anfangs- und Endpunkt von $\tau_{1,2}^{L2}$ liegen auf ∂M , für alle $t \in (0, 1)$ verläuft die Kurve hingegen im Inneren von M . Liegt (ϵ_1, ϵ_2) auf dieser Kurve, so gilt

$$H_{1,2}(\Omega_L^2) = 0$$

und außerdem $\Omega_R = \Omega_R^1$.

Ebenso sei die Kurve $\tau_{1,3}^{L3}$ wie folgt definiert:

$$\tau_{1,3}^{L3} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{32} + K_{12}s + (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{23} - K_{32} - K_{21}s + K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.92)$$

(Zur Berechnung von $\tau_{1,2}^{L2}$ und $\tau_{1,3}^{L3}$ siehe A.3).

Liegt (ϵ_1, ϵ_2) auf $\tau_{1,3}^{L3}$, so folgt analog $H_{1,3}(\Omega_L^3) = 0$ und $\Omega_R = \Omega_R^1$.

$\tau_{1,2}^{L2}$ und $\tau_{1,3}^{L3}$ bilden gemeinsam mit σ_R^1 , definiert in (2.51), eine geschlossene Kurve, das hierbei umschlossene Teilgebiet von M sei im Folgenden als M_R^1 bezeichnet. Des Weiteren sei P_R^1 das anliegende Teilgebiet von $P \setminus \bar{M}$, welches von σ_R^1 sowie den Geraden g_2 und g_4 eingeschlossen wird (siehe Abb. 2.7).

Für alle $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in M_R^1 \cup P_R^1$ gilt offenbar $\Omega_R = \Omega_R^1$. Liegt (ϵ_1, ϵ_2) auf der Kurve $\tau_{1,2}^{L2}$ bzw. $\tau_{1,3}^{L3}$, so folgt ferner mit der in (2.71) definierten Funktion H_1 :

$$H_1(\Omega_L^2) = H_{1,2}(\Omega_L^2) = 0 \quad \text{bzw.} \quad H_1(\Omega_L^3) = H_{1,3}(\Omega_L^3) = 0.$$

Der instabile Lösungsweig welcher auf $\tau_{1,2}^{L2}$ (bzw. $\tau_{1,3}^{L3}$) gerade durch $H_{1,2}(\Omega_L^2) = 0$ (bzw. $H_{1,3}(\Omega_L^3) = 0$) repräsentiert wird, kann daher bei Eintritt in den Parameterbereich M_R^1 nicht mehr als Nullstelle der Funktion $H_{1,2}$ dargestellt werden, stattdessen kann diese stationäre Lösung nun innerhalb von M_R^1 als Nullstelle von H_1 charakterisiert werden.

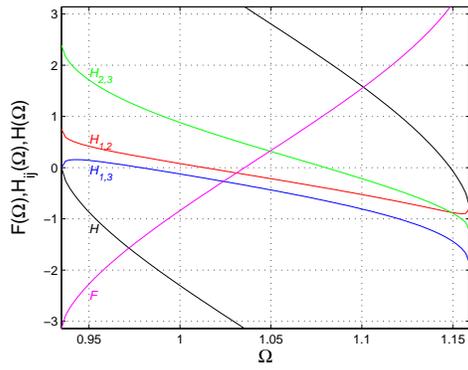
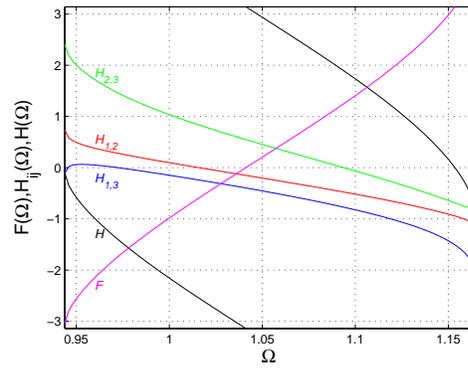
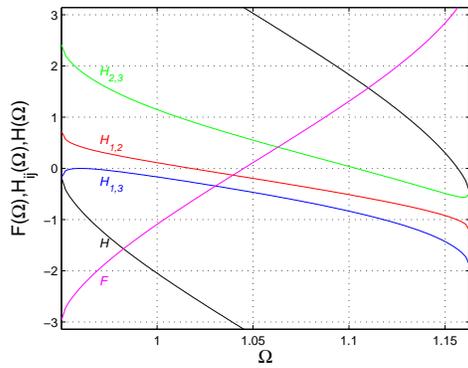
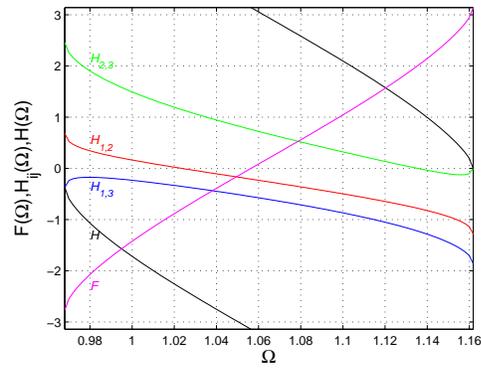
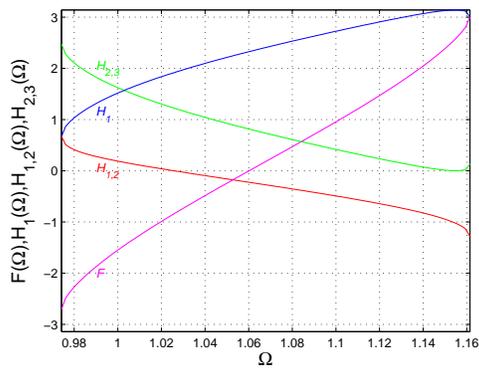
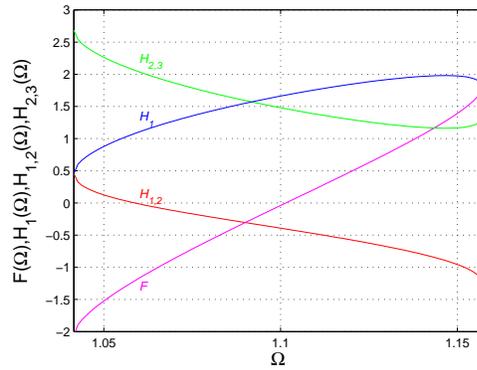
(a) $\epsilon_1 \approx 0.3414, \epsilon_2 = -0.1242$ (b) $\epsilon_1 = 0.396, \epsilon_2 = -0.144$ (c) $\epsilon_1 = 0.4346, \epsilon_2 = -0.158$ (d) $\epsilon_1 \approx 0.5435, \epsilon_2 \approx -0.1976$ (e) $\epsilon_1 \approx 0.5805, \epsilon_2 \approx -0.2111$ (f) $\epsilon_1 = 0.99, \epsilon_2 = -0.36$

Abbildung 2.8.: Veränderung der darstellenden Funktionen $F, H_{1,2}, H_{1,3}, H_{2,3}, H$ und H_1 bei Variation der Parameter (ϵ_1, ϵ_2) entlang des Pfades in Abb. 2.7.

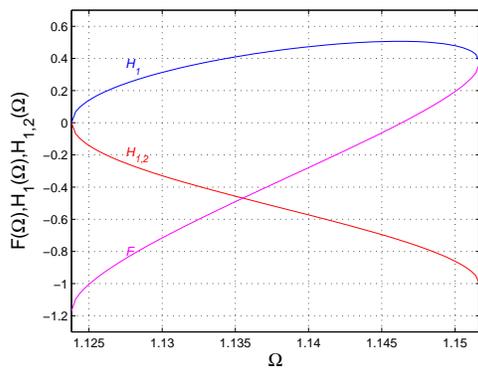
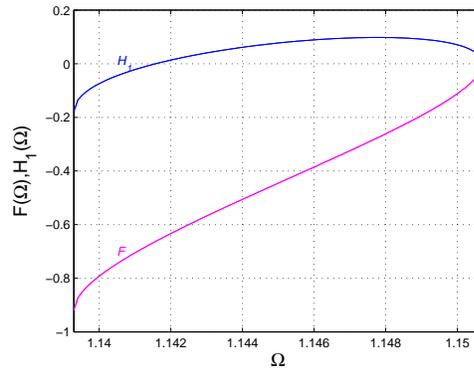
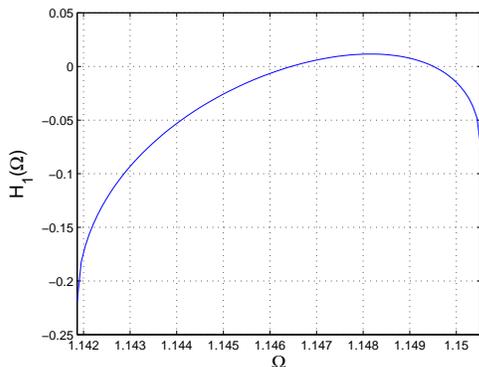
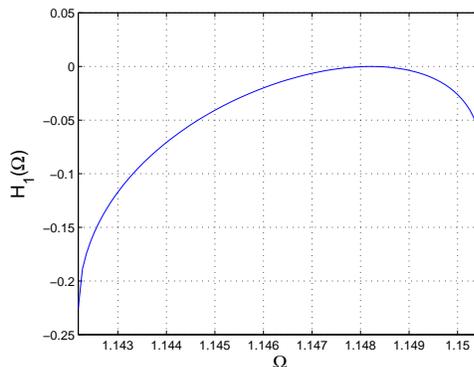

 (a) $\epsilon_1 \approx 1.4907, \epsilon_2 \approx -0.5421$

 (b) $\epsilon_1 \approx 1.4906, \epsilon_2 \approx -0.5421$

 (c) $\epsilon_1 = 1.6005, \epsilon_2 = -0.582$: Existenz eines stabilen Fixpunktes und eines Sattelpunktes

 (d) $\epsilon_1 \approx 1.6025, \epsilon_2 \approx -0.5827$: Sattel-Knoten-Verzweigung der stabilen stationären Lösung und des Sattelpunktes

Abbildung 2.9.: (a): Übergabe der Nullstelle $\Omega_0 = \Omega_L^2$ von $H_{1,2}$ an H_1 . (b): Übergabe der Nullstelle $\Omega_0 = \Omega_R^1$ von F an H_1 . (c)-(d): Verlauf der Funktion H_1 für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in P_R^1$

In $(M_R^1 \cup P_R^1) \setminus \partial P$ gilt weiterhin $\Omega_R = \Omega_R^1$ sowie $\Omega_L \in \{\Omega_L^2, \Omega_L^3\}$ und folglich

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_R} H_1'(\Omega) &= -\infty, \\ \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_L} H_1'(\Omega) &= +\infty, \\ H_1(\Omega_L) &< 0. \end{aligned}$$

H_1 besitzt in M_R^1 genau eine Nullstelle Ω_u , nämlich gerade diejenige, welche auf $\tau_{1,2}^{L2}$ (bzw. $\tau_{1,3}^{L3}$) gerade von $H_{1,2}$ (bzw. $H_{1,3}$) übergeben worden ist. Ferner gilt $H_1'(\Omega_u) > 0$; für die durch diese Nullstelle charakterisierte instabile stationäre Lösung (θ_1^u, θ_2^u) folgt somit $\det A(\theta_1^u, \theta_2^u) < 0$, es handelt sich also um einen Sattelpunkt.

Verlassen wir nun den Parameterbereich M_R^1 in Richtung P_R^1 , so “überqueren“ wir dabei die Kurve σ_R^1 , wobei gilt

$$H_1(\Omega_R^1) = F(\Omega_R^1) = 0. \quad (2.93)$$

H_1 gewinnt hiermit eine weitere Nullstelle Ω_s hinzu, indem die Funktion den durch F repräsentierten *stabilen* stationären Lösungszweig übernimmt (Abb. 2.9b).

Innerhalb von P_R^1 gilt nun unmittelbar nach Überschreiten von $\partial M_R^1 \cap \partial M$:

$$H_1(\Omega_L) < 0, \quad H_1(\Omega_R) < 0. \quad (2.94)$$

Für $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial M$ besitzt H_1 genau zwei Nullstellen Ω_u (korrespondierend zu einem Sattelpunkt) und Ω_s (zum stabilen stationären Punkt gehörig) mit $\Omega_u < \Omega_s$ sowie eine Maximalstelle $\Omega_{\max} \in (\Omega_u, \Omega_s)$ (Abb. 2.9b). Auf ∂P ist hingegen $\Omega_L = \Omega_R$ und $H_1(\Omega_L) < 0$. Folglich müssen beide stationäre Lösungszweige innerhalb von P verschwinden. Innerhalb von P_R^1 können die Nullstellen von H_1 jedoch nicht mehr den Rand $\{\Omega_L, \Omega_R\}$ erreichen, daher müssen die beiden zugehörigen Lösungszweige gleichzeitig mittels einer *Sattel-Knoten-Bifurkation* verschwinden (Abb. 2.9d).

Für jeden Pfad $\zeta(s)$, welcher von $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ über M_R^1 und P_R^1 zu ∂P verläuft, existiert somit ein $s^* \in (0, 1)$, so dass $\zeta(s^*) \in P_R^1$ gilt, und bei $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = \zeta(s^*)$ im System (2.4) gerade eine Sattel-Knoten-Verzweigung auftritt.

Analog lassen sich nun die übrigen Gebiete M_R^i, P_L^i sowie M_L^j, P_L^j betrachten. Jeder stetige Weg in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene, ausgehend von $(0, 0)$ hin zu ∂P verlaufend, schneidet die Kurven γ_R und γ_L sowie eine Kurve $\tau_{i,j}^{Lk}$ bzw. $\tau_{i,j}^{Rk}$ und ebenso σ_L^i bzw. σ_R^j . Die gegenseitige ‘‘Übernahme‘‘ von Nullstellen durch die entsprechenden Funktionen $H, H_{i,j}, H_j$ und F erfolgt daher wie beschrieben, ebenso verschwinden innerhalb von M alle bis auf eine instabile stationäre Lösung per Sattel-Knoten-Verzweigung. In den Gebieten P_R^i und P_L^j können schließlich nur noch ein stabiler stationärer Punkt und ein Sattelpunkt existieren, welche bei Annäherung an ∂P gleichzeitig per Sattel-Knoten-Bifurkation verschwinden (Abb. 2.10).

Abschließend erfolgt hier eine Auflistung der Parameterdarstellungen der Kurven τ_{ij}^{Lk} und τ_{ij}^{Rk} , welche gemeinsam mit σ_L^i, σ_R^j die Begrenzungen der Gebiete M_L^i und M_R^j liefern:

$$\tau_{1,2}^{L1} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{12} - (K_{13} + K_{31})s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{21} - K_{31}s + (K_{23} - K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.95)$$

$$\tau_{2,3}^{L3} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{32} - K_{12}s - (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{23} - K_{32} + K_{21}s - K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.96)$$

$$\tau_{1,3}^{L1} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{12} + (K_{13} + K_{31})s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{21} + K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1] \quad (2.97)$$

$$\tau_{2,3}^{L2} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{13} + K_{31} - K_{12}s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ K_{31} + K_{21}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.98)$$

$$\tau_{1,2}^{R2} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{13} - K_{31} - K_{12}s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{31} + K_{21}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.99)$$

$$\tau_{1,3}^{R3} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{32} + K_{12}s + (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ K_{23} + K_{32} - K_{21}s + K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.100)$$

$$\tau_{1,2}^{R1} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{12} + (K_{13} + K_{31})s + K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{21} + K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.101)$$

$$\tau_{2,3}^{R3} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{32} + K_{12}s + (K_{13} + K_{31})\sqrt{1-s^2}, \\ K_{23} + K_{32} - K_{21}s + K_{31}\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.102)$$

$$\tau_{1,3}^{R1} : s \mapsto \begin{pmatrix} K_{12} - (K_{13} + K_{31})s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{21} - K_{31}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.103)$$

$$\tau_{2,3}^{R2} : s \mapsto \begin{pmatrix} -K_{13} - K_{31} + K_{12}s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \\ -K_{31} - K_{21}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad s \in [0, 1] \quad (2.104)$$

□

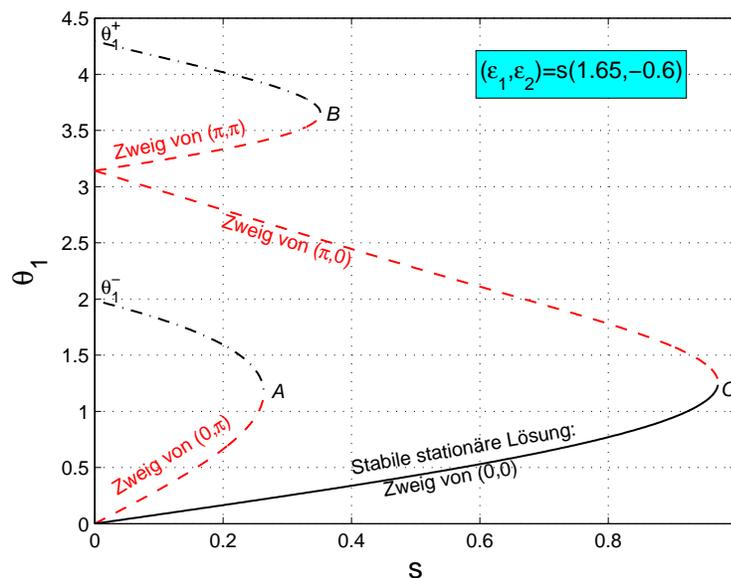


Abbildung 2.10.: $K_{12} = 0.8, K_{13} = 0.7, K_{21} = 0.6, K_{23} = 0.3, K_{31} = 0.4, K_{32} = 0.5$; Darstellung der θ_1 -Komponente der stationären Lösungen. A, B : Sattel-Knoten-Verzweigungen von instabilen Knoten und Sattelpunkt. C : Sattel-Knoten-Verzweigung der stabilen stationären Lösung mit einem Sattelpunkt. Die Verzweigung A geht mit dem Zusammenfallen zweier Nullstellen von $H_{1,3}$ einher (Bild 2.8c), ebenso B mit $H_{2,3}$ (Bild 2.8e). Die Bifurkation C erfolgt mit dem Verschwinden der Nullstellen der Funktion H_1 (Bild 2.9d).

Mit den Ausführungen dieses Abschnitts haben wir damit den Übergangsmechanis-

mus vom synchronen zum desynchronen System aufgezeigt. Ferner kann das tatsächliche Synchronisationsregime in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene numerisch ermittelt werden (Abbildung 2.11).

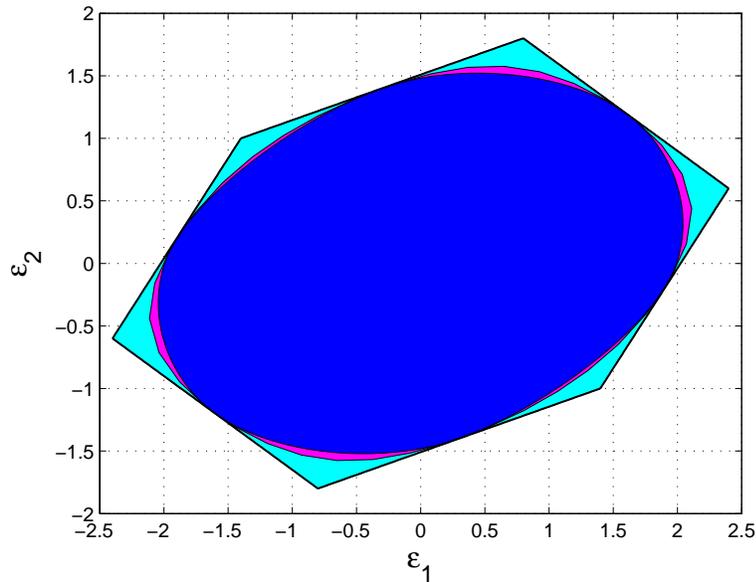


Abbildung 2.11.: $K_{12} = 0.8, K_{13} = 0.7, K_{21} = 0.6, K_{23} = 0.3, K_{31} = 0.4, K_{32} = 0.5$; Darstellung der oberen (türkis) und unteren (blau) Schranke des Synchronisationsregimes sowie des numerisch berechneten tatsächlichen Synchronisationsgebietes (magenta).

2.4. Approximative Berechnung von Frequenz und Phasenshifts im synchronen Zustand

Im Folgenden werden wir die *Synchronisationsfrequenz* Ω sowie die *Phasenshifts* $(\theta_1^s, \theta_2^s) = (n_1\phi_1 - n_3\phi_3, n_2\phi_2 - n_3\phi_3)$ im synchronen Zustand für $0 < |n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ approximativ berechnen. Erinnern wir uns an das klassische Kuramoto-System ($K_{ij} = K$ und $n_j = 1$ für alle i, j), so war in diesem Fall die Synchronisationsfrequenz Ω stets als Mittelwert der natürlichen Frequenzen der Phasenoszillatoren gegeben:

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3} \quad (2.105)$$

Für das hier zugrunde liegende System (2.1) stellt sich daher jetzt die Frage, wie die unterschiedlich stark gewichteten Kopplungsstärken K_{ij} sowie die Skalierungskoeffizienten n_j in die Darstellung der Synchronisationsfrequenz Ω sowie der Phasenshifts θ_j^s mit eingehen.

Der folgende Satz liefert nun eine Bestimmung von Ω und θ_j in Termen von $n_i\omega_i - n_j\omega_j$:

2.12 Satz (Approximative Darstellung von Ω und (θ_1^s, θ_2^s))

Gilt $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ für alle i, j in (2.1), so ist eine Synchronisation der Phasen ϕ_j möglich. Die zugehörige stabile stationäre Lösung (θ_1^s, θ_2^s) des Systems (2.4) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1^s &= \frac{K_{32}}{C}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + \frac{K_{21} + K_{23}}{C}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3) \\ &\quad + \frac{K_{12}}{C}(n_2\omega_2 - n_3\omega_3) \\ &\quad + \frac{1}{2C}(K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23}) \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{K_{32}}{C}(n_1\omega_1 - n_2\omega_2) + \frac{K_{21} + K_{23}}{C}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{12}}{C}(n_2\omega_2 - n_3\omega_3) \right)^3 + O \left(\sum_{i,j} |n_i\omega_i - n_j\omega_j|^5 \right), \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \theta_2^s &= \frac{K_{31}}{C}(n_2\omega_2 - n_1\omega_1) + \frac{K_{21}}{C}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3) \\ &\quad + \frac{K_{12} + K_{13}}{C}(n_2\omega_2 - n_3\omega_3) \\ &\quad + \frac{1}{2C}(K_{21}K_{31} + K_{12}K_{31} + K_{13}K_{21}) \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{K_{31}}{C}(n_2\omega_2 - n_1\omega_1) + \frac{K_{21}}{C}(n_1\omega_1 - n_3\omega_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{12} + K_{13}}{C}(n_2\omega_2 - n_3\omega_3) \right)^3 + O \left(\sum_{i,j} |n_i\omega_i - n_j\omega_j|^5 \right), \end{aligned} \quad (2.107)$$

wobei ξ_1, ξ_2 und C definiert sind durch

$$\xi_1 = \frac{(K_{21} + K_{23} + K_{32})(\eta_1 - \eta_2) + (K_{12} + K_{21} + K_{23})(\eta_2 - \eta_3)}{C}, \quad (2.108)$$

$$\xi_2 = \frac{(K_{12} + K_{13} + K_{31})(\eta_2 - \eta_1) + (K_{12} + K_{13} + K_{21})(\eta_1 - \eta_3)}{C}, \quad (2.109)$$

$$C = b_1 + b_2 + b_3. \quad (2.110)$$

Ferner ist die zugehörige Synchronisationsfrequenz Ω dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{C} \left((K_{21}K_{31} + K_{21}K_{32} + K_{23}K_{31}) n_1\omega_1 \right. \\ & + (K_{12}K_{31} + K_{12}K_{32} + K_{13}K_{32}) n_2\omega_2 \\ & + (K_{12}K_{23} + K_{13}K_{21} + K_{13}K_{23}) n_3\omega_3 \\ & + \frac{K_{12}K_{23}K_{31} - K_{13}K_{21}K_{32}}{2C} \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - \xi_1) \\ & \left. + O \left(\sum_{i,j} |n_i\omega_i - n_j\omega_j|^5 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Beweis. Die Tatsache, dass für $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ im System eine Phasensynchronisation eintreten kann, wurde bereits in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels gezeigt. Ferner haben wir dort bereits bewiesen, dass ein synchroner Zustand im System (2.1) stets durch eine stabile stationäre Lösung (θ_1^s, θ_2^s) des reduzierten Systems (2.4) sowie durch eine zugehörige Synchronisationsfrequenz Ω charakterisiert ist.

Zu Berechnung von Ω integrieren wir zunächst diese Unbekannte in das System (2.1). Hierfür definieren wir

$$\begin{aligned} \psi_j(t) &:= n_j\phi_j(t) - \Omega t \\ \eta_j &:= n_j\omega_j - \Omega \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.112)$$

Transformiert in die neuen Variablen ψ_j und η_j erhalten wir somit die folgende Darstellung von (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \eta_1 - K_{12} \sin(\psi_1 - \psi_2) - K_{13} \sin(\psi_1 - \psi_3) \\ \dot{\psi}_2 &= \eta_2 - K_{21} \sin(\psi_2 - \psi_1) - K_{23} \sin(\psi_2 - \psi_3) \\ \dot{\psi}_3 &= \eta_3 - K_{31} \sin(\psi_3 - \psi_1) - K_{32} \sin(\psi_3 - \psi_2) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Befindet sich das System (2.1) im synchronen Zustand mit zugehöriger Synchronisationsfrequenz Ω , so ist die Synchronität der Phasen ϕ_j nun als stationäre Lösung (θ_1^s, θ_2^s) des Systems (2.113) charakterisiert. Ziel ist es nun, Ω mittels des Ansatzes $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = 0$ zu bestimmen. Die Vorgehensweise der folgenden Untersuchungen lehnt sich hierbei an Arbeiten von *Tass* und *Haken* ([29],[32]) an und erfolgt unter Zuhilfenahme des *Zentrumsmannigfaltigkeitstheorems* (siehe z.B. [18]).

Für $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ tritt nach Satz 2.10 eine *inphasische* Synchronisation ein (es gilt in Satz 2.10 $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in M$), d.h. $|\psi_i - \psi_j| \bmod 2\pi \ll 1$. Aus diesem Grund ist für eine approximative Berechnung der Phasenshifts $\psi_i - \psi_j$ eine Taylorreihenent-

wicklung der \sin -Terme in (2.113) um $\psi_i - \psi_j = 0$ sinnvoll:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \eta_1 - (K_{12} + K_{13})\psi_1 + K_{12}\psi_2 + K_{13}\psi_3 \\ &\quad + \frac{K_{12}}{6}(\psi_1 - \psi_2)^3 + \frac{K_{13}}{6}(\psi_1 - \psi_3)^3 + \sum_{j \neq 1} O(|\psi_1 - \psi_j|^5), \\ \dot{\psi}_2 &= \eta_2 + K_{21}\psi_1 - (K_{21} + K_{23})\psi_2 + K_{23}\psi_3 \\ &\quad + \frac{K_{21}}{6}(\psi_2 - \psi_1)^3 + \frac{K_{23}}{6}(\psi_2 - \psi_3)^3 + \sum_{j \neq 2} O(|\psi_2 - \psi_j|^5), \\ \dot{\psi}_3 &= \eta_3 + K_{31}\psi_1 + K_{32}\psi_2 - (K_{31} + K_{32})\psi_3 \\ &\quad + \frac{K_{31}}{6}(\psi_3 - \psi_1)^3 + \frac{K_{32}}{6}(\psi_3 - \psi_2)^3 + \sum_{j \neq 3} O(|\psi_3 - \psi_j|^5).\end{aligned}$$

Mit

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} -(K_{12} + K_{13}) & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & -(K_{21} + K_{23}) & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & -(K_{31} + K_{32}) \end{pmatrix}$$

und

$$\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T, \quad \eta := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$$

können wir nun zu (2.113) das zugehörige *linearisierte* System betrachten:

$$\dot{\psi} = \mathcal{A}\psi + \eta. \quad (2.114)$$

Die Berechnung der Eigenwerte von \mathcal{A} ergibt

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2}(K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32}) \\ &\quad \pm \frac{1}{2}\sqrt{(K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32})^2 - 4C}, \\ \lambda_3 &= 0\end{aligned} \quad (2.115)$$

wobei

$$\begin{aligned}C &:= K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23} \\ &\quad + K_{21}K_{31} + K_{12}K_{31} + K_{13}K_{21} \\ &= b_1 + b_2 + b_3.\end{aligned} \quad (2.116)$$

Offenbar ist $\Re e \lambda_{1/2} < 0$. Wir erweitern nun das System (2.114) zu einem 6-dimensionalen System, indem wir die folgende gültige Beziehung für η hinzufügen:

$$\dot{\eta} = 0.$$

Mit

$$u := (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$$

und

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

betrachten wir jetzt die Linearisierung des erweiterten Systems für u :

$$\dot{u} = \mathcal{B}u. \quad (2.117)$$

Es gilt $\text{rg}(\mathcal{B}) = 3$. Der Eigenwert $\lambda_3 = 0$ besitzt bzgl. \mathcal{B} die algebraische Vielfachheit 4, die geometrische Vielfachheit 3 und die folgenden *rechten* Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} K_{12} + K_{13} \\ -K_{21} \\ -K_{31} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -K_{12} \\ K_{21} + K_{23} \\ -K_{32} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächsten Schritt transformieren wir nun das System (2.117) in eine Darstellung durch die Eigenvektoren v_j . Als zusätzlichen Basisvektor wählen wir hierbei

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie entsprechende Vektoren $v_{5/6}$ als zugehörige rechte Eigenvektoren zu $\lambda_{1/2}$. Es gilt dann $\mathcal{B}v_4 = v_3$. u besitzt dann bzgl. der Basis $\{v_1, \dots, v_6\}$ eine Darstellung der Form

$$u = \sum_{j=1}^6 \xi_j v_j.$$

Es folgt

$$\dot{u} = \sum_{j=1}^6 \dot{\xi}_j v_j.$$

Hierbei sind nun die *Zentrumsvariablen* $\xi_c := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ von den *stabilen* Variablen ξ_5, ξ_6 zu unterscheiden. Ist $\{w_1, \dots, w_6\}$ die zu $\{v_1, \dots, v_6\}$ gehörige *adjungierte*

Basis von *linken* Eigenvektoren, so gilt:

$$\begin{aligned} v_i \bullet w_j &= \delta_{ij} \\ \mathcal{B}^T w_i &= 0, \quad i = 1, 2, 4 \\ \mathcal{B}^T w_3 &= w_4 \\ \mathcal{B}^T w_5 &= \lambda_1 w_5 \\ \mathcal{B}^T w_6 &= \lambda_2 w_6 \end{aligned}$$

und somit

$$\dot{\xi}_i = w_i \bullet \dot{u}.$$

Wir wenden uns nun wieder dem ursprünglichen nichtlinearen System zu. Hierfür sei

$$\mathcal{N}(u) := (0, 0, 0, N_1(u), N_2(u), N_3(u))^T,$$

wobei

$$\begin{aligned} N_1(u) &= \frac{K_{12}}{6}(\psi_1 - \psi_2)^3 + \frac{K_{13}}{6}(\psi_1 - \psi_3)^3 + \sum_{j \neq 1} O(|\psi_1 - \psi_j|^5) \\ N_2(u) &= \frac{K_{21}}{6}(\psi_2 - \psi_1)^3 + \frac{K_{23}}{6}(\psi_2 - \psi_3)^3 + \sum_{j \neq 2} O(|\psi_2 - \psi_j|^5) \\ N_3(u) &= \frac{K_{31}}{6}(\psi_3 - \psi_1)^3 + \frac{K_{32}}{6}(\psi_3 - \psi_2)^3 + \sum_{j \neq 3} O(|\psi_3 - \psi_j|^5) \end{aligned}$$

Somit gilt für u :

$$\dot{u} = \mathcal{B}u + \mathcal{N}(u). \quad (2.118)$$

Für die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel ist es nicht notwendig, die Eigenvektoren v_5, v_6 zu λ_1, λ_2 exakt zu berechnen, es genügt, lediglich einige Eigenschaften dieser Vektoren zu kennen; so folgt unmittelbar

$$v_j^1 = v_j^2 = v_j^3 = 0, \quad j = 5, 6,$$

für die ersten drei Komponenten dieser Vektoren. η_1, η_2, η_3 können somit bereits mit der neuen Basis dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (K_{12} + K_{13})\xi_1 - K_{12}\xi_2 + \xi_4 \\ \eta_2 &= -K_{21}\xi_1 + (K_{21} + K_{23})\xi_2 + \xi_4 \\ \eta_3 &= -K_{31}\xi_1 - K_{32}\xi_2 + \xi_4 \end{aligned}$$

Damit lassen sich ξ_1, ξ_2, ξ_4 durch Lösung eines linearen Gleichungssystems in Ab-

hängigkeit von η_1, η_2, η_3 ausdrücken:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{(K_{21} + K_{23} + K_{32})(\eta_1 - \eta_2) + (K_{12} + K_{21} + K_{23})(\eta_2 - \eta_3)}{C} \\ \xi_2 &= \frac{(K_{12} + K_{13} + K_{31})(\eta_2 - \eta_1) + (K_{12} + K_{13} + K_{21})(\eta_1 - \eta_3)}{C} \\ \xi_4 &= \frac{(K_{21}K_{31} + K_{21}K_{32} + K_{23}K_{31})n_1\omega_1 + (K_{12}K_{31} + K_{12}K_{32} + K_{13}K_{32})n_2\omega_2}{C} \\ &\quad + \frac{(K_{12}K_{23} + K_{13}K_{21} + K_{13}K_{23})n_3\omega_3}{C} - \Omega\end{aligned}$$

Insbesondere gilt: $\eta_i - \eta_j = n_i\omega_i - n_j\omega_j$. Ferner ergibt die Berechnung der letzten 3 Komponenten von w_3 :

$$\begin{aligned}w_3^4 &= \frac{1}{C}(K_{21}K_{31} + K_{21}K_{32} + K_{23}K_{31}) \\ w_3^5 &= \frac{1}{C}(K_{12}K_{31} + K_{12}K_{32} + K_{13}K_{32}) \\ w_3^6 &= \frac{1}{C}(K_{12}K_{23} + K_{13}K_{21} + K_{13}K_{23})\end{aligned}\tag{2.119}$$

Für ξ_3 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_3 &= w_3 \bullet \dot{u} = w_3 \bullet (\mathcal{B}u + \mathcal{N}(u)) \\ &= u \bullet \mathcal{B}^T w_3 + w_3 \bullet \mathcal{N}(u) \\ &= \underbrace{u \bullet w_4}_{=\xi_4} + w_3 \bullet \mathcal{N}(u).\end{aligned}$$

Für eine stationäre Lösung u von (2.118) muss $\dot{\xi}_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, 6$ erfüllt sein. Wir wissen bereits, dass $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_4 = 0$ gilt. Für ξ_3, ξ_5 und ξ_6 erhalten wir nun die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_3 &= \frac{1}{C} \left((K_{21}K_{31} + K_{21}K_{32} + K_{23}K_{31})n_1\omega_1 \right. \\ &\quad + (K_{12}K_{31} + K_{12}K_{32} + K_{13}K_{32})n_2\omega_2 \\ &\quad \left. + (K_{13}K_{21} + K_{12}K_{23} + K_{13}K_{23})n_3\omega_3 \right) \\ &\quad + \frac{K_{12}K_{23}K_{31} - K_{13}K_{21}K_{32}}{6C} ((\psi_1 - \psi_2)^3 + (\psi_3 - \psi_1)^3 \\ &\quad \quad \quad + (\psi_2 - \psi_3)^3) \\ &\quad - \Omega,\end{aligned}\tag{2.120}$$

$$\dot{\xi}_{5/6} = w_{5/6} \bullet (\mathcal{B}u + \mathcal{N}(u)) = \lambda_{1/2} \xi_{5/6} + w_{5/6} \bullet \mathcal{N}(u)\tag{2.121}$$

mit $\mathcal{N}(u) \in O(\|\xi\|^3)$. Nach dem *Zentrumsmannigfaltigkeitstheorem* besitzen die sta-

bilen Variablen (ξ_5, ξ_6) für $|\eta_i - \eta_j| \ll 1$ eine lokale Darstellung der Form $(\xi_5, \xi_6) = h(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Also gilt im stationären Fall $\dot{\xi}_{5/6} = 0$ und somit auch

$$\xi_{5/6} = -\frac{1}{\lambda_{1/2}} w_{5/6} \bullet \mathcal{N}(u) \in O(\|\xi_c\|^3).$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \psi_1 - \psi_2 &= \xi_1 - \xi_2 + O(\|\xi_c\|^3), \\ \psi_1 - \psi_3 &= \xi_1 + O(\|\xi_c\|^3), \\ \psi_2 - \psi_3 &= \xi_2 + O(\|\xi_c\|^3). \end{aligned} \tag{2.122}$$

(2.122) eingesetzt in (2.120) liefert uns nun mit der Bedingung $\dot{\xi}_3 = 0$ gerade die Darstellung (2.111) der Synchronisationsfrequenz Ω bis einschließlich zu Termen 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{C} \left((K_{21}K_{31} + K_{21}K_{32} + K_{23}K_{31}) n_1 \omega_1 \right. \\ &\quad + (K_{12}K_{31} + K_{12}K_{32} + K_{13}K_{32}) n_2 \omega_2 \\ &\quad \left. + (K_{12}K_{23} + K_{13}K_{21} + K_{13}K_{23}) n_3 \omega_3 \right) \\ &\quad + \frac{K_{12}K_{23}K_{31} - K_{13}K_{21}K_{32}}{2C} \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - \xi_1) \\ &\quad + \underbrace{O(\|\xi\|^5)}_{\in O(\sum_{i,j} |n_i \omega_i - n_j \omega_j|^5)}. \end{aligned}$$

Für die zugehörigen *Phasenshifts* $\theta_1^s = \psi_1 - \psi_3$ und $\theta_2^s = \psi_2 - \psi_3$ im synchronen Zustand ergeben sich dann mit der Beziehung (2.122) analog die Darstellungen (2.106) und (2.107).

□

Betrachten wir nur den konstanten Anteil der Synchronisationsfrequenz Ω , so wird deutlich, dass im System (2.1) Ω als eine Art “gewichteter Mittelwert“ der natürlichen Frequenzen ω_j gegeben ist. Ist der Einfluss des j-ten Oszillators auf die anderen beiden überproportional groß, also $K_{ij} \gg K_{mn}$ für $n \neq j$, so wird auch der gewichtete Mittelwert Ω in Richtung $n_j \omega_j$ verschoben. Ebenso zeigt sich, dass eine vergleichsweise starke Kopplung zwischen i-ten und j-ten Oszillator, d.h. K_{ij}, K_{ji} sehr groß, selektiv die zugehörige Phasendifferenz zur 0 hin verschiebt, so gilt

$$\begin{aligned} K_{13}, K_{31} \rightarrow \infty &\Rightarrow \theta_1 \rightarrow 0, \\ K_{23}, K_{32} \rightarrow \infty &\Rightarrow \theta_2 \rightarrow 0, \\ K_{12}, K_{21} \rightarrow \infty &\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.5. Partielle Synchronisation

Im diesem letzten Abschnitt des Kapitels 2 befassen wir uns mit der Dynamik des Systems (2.4) *außerhalb* des Synchronisationsregimes. Grundsätzlich können dabei je nach Konfiguration von Kopplungsparametern und natürlichen Frequenzen zwei unterschiedliche Arten von Dynamik auftreten:

- Partielle Synchronisation (siehe Definition unten)
- Komplette inkohärentes System

Wir definieren zunächst den Begriff der partiellen Synchronisation analog zu der Terminologie von *Kazanovich* und *Borisyuk* (siehe [13] und [14]):

2.13 Definition (Partielle Synchronisation)

Das System (2.1) der Phasenoszillatoren ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 heißt *partiell synchronisiert*, wenn es eine Paarung (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass

$$\exists C > 0 : |n_i \phi_i(t) - n_j \phi_j(t)| < C, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.123)$$

Unter einer *komplett inkohärenten* Dynamik verstehen wir demgegenüber einen Zustand, in welchem *weder vollständige noch partielle Phasensynchronisation* vorliegt. Wir werden in diesem Abschnitt keine vollständige Analyse über das Auftreten partieller Synchronität in Systemen phasengekoppelter Oszillatoren liefern. Stattdessen werden wir uns auf die Herleitung einiger Sätze beschränken, welche uns hinreichende Kriterien für die Existenz bzw. Nichtexistenz partieller Synchronisation an die Hand geben. Die Aussagen dieser Theoreme sind dabei gleichermaßen für die bisher betrachteten *exzitatorischen* Systeme als auch für die späteren *inhibitorisch-exzitatorischen* Systeme gültig.

Wie beim Begriff der *vollständigen* Synchronisation wird *partielle* Synchronisation durch die Beschränktheit von gewichteten Phasendifferenzen charakterisiert. In den vorangegangenen Abschnitten 2.1-2.3 wurde dargelegt, dass im Falle eines Systems mit rein exzitatorischer Kopplung die vollständige $n_1 : n_2 : n_3$ -Synchronisation des Systems (2.1) die Existenz einer stabilen stationären Lösung des reduzierten Systems (2.4) impliziert. Diese Schlussfolgerung gilt beim Vorliegen von partieller Synchronisation hingegen im Allgemeinen nicht; um dies zu verdeutlichen, betrachten wir exemplarisch den Fall einer (echten) partiellen Synchronisation von ϕ_1 und ϕ_3 . Nehmen wir nun weiter an, dass $\theta_1(t) = n_1 \phi_1(t) - n_3 \phi_3(t) = c$ mit konstantem c und folglich $\dot{\theta}_1 = 0$ gilt, so folgt mit der Evolutionsgleichung für θ_1 aus (2.4):

$$n_3 \omega_3 - n_1 \omega_1 + (K_{13} + K_{31}) \sin c = -K_{12} \sin(c - \theta_2) - K_{32} \sin(\theta_2). \quad (2.124)$$

Die rechte Seite von (2.124) ist genau dann konstant wenn $K_{12} = \pm K_{32}$ und $c = 0$ (für $K_{12} = K_{32}$) bzw. $c = \pi$ (für $K_{12} = -K_{32}$) gilt. Dies impliziert wiederum $\sin c = 0$ und $n_1\omega_1 = n_3\omega_3$. Nur in diesem Spezialfall ist somit bei partieller Synchronisation von 1. und 3. Oszillator die zugehörige gewichtete Phasendifferenz konstant.

Ist eine Trajektorie $(n_i\phi_i - n_j\phi_j)(t)$ beschränkt, so ist zwar nicht $n_i\dot{\phi}_i - n_j\dot{\phi}_j \equiv 0$, unterliegt aber in jedem Fall Vorzeichenwechseln. Die zugehörige *Nullcline* $G_k(\theta_1, \theta_2) = 0$, $k = 1$ für $(i, j) = (1, 3)$, und $k = 2$ für $(i, j) = (2, 3)$ (siehe (2.4)) bzw. $G_1(\theta_1, \theta_2) - G_2(\theta_1, \theta_2)$ für $(i, j) = (1, 2)$, muss daher für ein Teilgebiet $U \subset [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ existieren. Aus der Nichtexistenz einer Nullcline kann somit auf die Nichtexistenz einer partiellen Phasensynchronisation der jeweiligen Oszillatorpaarung geschlossen werden:

2.14 Satz (Nichtexistenz partieller Phasensynchronisation)

Es seien $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und die Größen g_{ij}, g_{ji} für $\theta \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= \max_{\theta} \left((K_{ij} + K_{ji})^2 - (n_i\omega_i - n_j\omega_j)^2 + K_{ik}^2 + 2K_{ik}(K_{ij} \right. \\ &\quad \left. + K_{ji}) \cos \theta - K_{jk}^2 (\sin \theta)^2 - 2K_{jk}(n_i\omega_i - n_j\omega_j) \sin \theta \right) \\ g_{ji} &:= \max_{\theta} \left((K_{ij} + K_{ji})^2 - (n_i\omega_i - n_j\omega_j)^2 + K_{jk}^2 + 2K_{jk}(K_{ij} + K_{ji}) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - K_{ik}^2 (\sin \theta)^2 + 2K_{ik}(n_i\omega_i - n_j\omega_j) \sin \theta \right) \end{aligned}$$

Gilt

$$\min(g_{ij}, g_{ji}) < 0, \quad (2.125)$$

so ist eine partielle $n_i : n_j$ -Phasensynchronisation zwischen i -ten und j -ten Oszillator nicht möglich.

Beweis. Es gilt $n_i\dot{\phi}_i - n_j\dot{\phi}_j = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 = G_{ij}(\theta_1, \theta_2) &:= n_i\omega_i - n_j\omega_j - (K_{ij} + K_{ji}) \sin(n_i\phi_i - n_j\phi_j) \\ &\quad - K_{ik} \sin(n_i\phi_i - n_k\phi_k) + K_{jk} \sin(n_j\phi_j - n_k\phi_k). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Mit $\theta := n_i\phi_i - n_k\phi_k$ und $s := \sin(n_i\phi_i - n_j\phi_j)$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} \pm K_{jk} \sqrt{1 - s^2} \sin \theta &= n_i\omega_i - n_j\omega_j - (K_{ij} + K_{ji})s \\ &\quad - K_{jk} s \cos \theta + K_{ik} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Durch Quadrieren von (2.127) resultiert nun die folgende quadratische Gleichung für s :

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 \left((K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta)^2 + K_{jk}^2 (\sin \theta)^2 \right) \\ &\quad + s \cdot 2 \left(K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta \right) \cdot \left(K_{ik} \sin \theta + n_j\omega_j - n_i\omega_i \right) \\ &\quad + (n_i\omega_i - n_j\omega_j)^2 + (K_{ik}^2 - K_{jk}^2) \sin^2 \theta + 2(n_j\omega_j - n_i\omega_i) K_{ik} \sin \theta. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$s = - \frac{(K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta) \cdot (K_{ik} \sin \theta + n_j \omega_j - n_i \omega_i)}{((K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta)^2 + K_{jk}^2 (\sin \theta)^2)} \\ \pm \left(\frac{(K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta)^2 \cdot (K_{ik} \sin \theta + n_j \omega_j - n_i \omega_i)^2}{((K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta)^2 + K_{jk}^2 (\sin \theta)^2)^2} \right. \\ \left. - \frac{(n_i \omega_i - n_j \omega_j)^2 + (K_{ik}^2 - K_{jk}^2) (\sin \theta)^2 + 2(n_j \omega_j - n_i \omega_i) K_{ik} \sin \theta}{(K_{ij} + K_{ji} + K_{jk} \cos \theta)^2 + K_{jk}^2 (\sin \theta)^2} \right)^{1/2}.$$

Notwendige Bedingung für die Existenz einer reellwertigen Lösung s ist demnach

$$0 \leq (K_{ij} + K_{ji})^2 + K_{jk}^2 + 2(K_{ij} + K_{ji})K_{jk} \cos \theta \\ - (n_i \omega_i - n_j \omega_j - K_{ik} \sin \theta)^2. \quad (2.128)$$

Existiert kein θ , so dass 2.128 erfüllt ist, so kann die Nullcline $G_{ij}(\theta_1, \theta_2) = 0$ nicht existieren, folglich kann auch keine partielle Synchronisation zwischen i -ten und j -ten Phasenoszillator eintreten.

Setzen wir ausgehend (2.126) weiterhin $s := \sin(n_i \phi_i - n_j \phi_j)$ aber $\theta := n_j \phi_j - n_k \phi_k$, so folgt analog

$$\pm K_{ik} \sqrt{1 - s^2} \sin \theta = n_i \omega_i - n_j \omega_j - (K_{ij} + K_{ji} + K_{ik} \cos \theta)s + K_{jk} \sin \theta.$$

Folglich gilt

$$0 = s^2 - s \frac{2(K_{ij} + K_{ji} + K_{ik} \cos \theta) \cdot (n_i \omega_i - n_j \omega_j + K_{jk} \sin \theta)}{(K_{ij} + K_{ji} + K_{ik} \cos \theta)^2 + K_{ik}^2 (\sin \theta)^2} \\ + \frac{(n_i \omega_i - n_j \omega_j + K_{jk} \sin \theta)^2 + K_{ik}^2 (\sin \theta)^2}{(K_{ij} + K_{ji} + K_{ik} \cos \theta)^2 + K_{ik}^2 (\sin \theta)^2}. \quad (2.129)$$

Die Existenz einer reellwertigen Lösung s der quadratischen Gleichung (2.129) ist damit äquivalent zu der Beziehung

$$0 \leq (K_{ij} + K_{ji})^2 + K_{ik}^2 + 2(K_{ij} + K_{ji})K_{ik} \cos \theta \\ - (n_i \omega_i - n_j \omega_j + K_{jk} \sin \theta)^2. \quad (2.130)$$

Existiert kein θ , so dass 2.130 erfüllt ist, so kann die Nullcline $G_{ij}(\theta_1, \theta_2) = 0$ ebenso nicht existieren.

Insgesamt erhalten wir damit die Aussage (2.125).

□

Die Größenordnung der gewichteten Phasendifferenz $|n_i \omega_i - n_j \omega_j|$ im Verhältnis zu den Kopplungsstärken $K_{ij}, K_{ji}, K_{ik}, K_{jk}$ ist somit entscheidend für das Eintreten

partieller Phasensynchronisation zwischen i -ten und j -ten Oszillator. In diesem Zusammenhang erhalten wir auch das folgende Resultat bzgl. der Existenz partieller Synchronisation:

2.15 Satz (Existenz von partieller Phasensynchronisation I)

Es seien $K_{ij} \geq 0$ beliebig, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $k \neq i, j$. Gilt

$$|n_i \omega_i - n_j \omega_j| \leq \max_{\theta \in [0, \pi/2]} (K_{ij} + K_{ji}) \sin \theta - \sqrt{K_{ik}^2 + K_{jk}^2 - 2K_{ik}K_{jk} \cos \theta}, \quad (2.131)$$

so tritt eine partielle $n_i : n_j$ -Synchronisation der Phasen ϕ_i und ϕ_j ein.

Beweis. Wir zeigen die Aussage (2.131) für $(i, j) = (1, 2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} n_2 \dot{\phi}_2 - n_1 \dot{\phi}_1 &= n_2 \omega_2 - n_1 \omega_1 - (K_{12} + K_{21}) \sin(n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1) \\ &\quad - K_{13} \sin(n_3 \phi_3 - n_1 \phi_1) + K_{23} \sin(n_3 \phi_3 - n_2 \phi_2) \\ &= n_2 \omega_2 - n_1 \omega_1 - (K_{12} + K_{21}) \sin(n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1) \\ &\quad - (K_{13} + K_{23}) \sin\left(\frac{n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1}{2}\right) \cos\left(n_3 \phi_3 - \frac{n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2}{2}\right) \\ &\quad + (K_{23} - K_{13}) \cos\left(\frac{n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1}{2}\right) \sin\left(n_3 \phi_3 - \frac{n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Mit $\alpha := n_3 \phi_3 - \frac{n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2}{2}$ und $\theta := n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1$ sei weiter

$$f_\theta(\alpha) := (K_{12} + K_{21}) \sin \theta + (K_{13} + K_{23}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha + (K_{13} - K_{23}) \cos \frac{\theta}{2} \sin \alpha.$$

Für jedes $\theta \in [0, \pi]$ nimmt f_θ in $\bar{\alpha} = \pi + \arctan\left(\frac{K_{13} - K_{23}}{K_{13} + K_{23}} \cot \frac{\theta}{2}\right)$ ihr *Minimum* an. Definieren wir nun $g_-(\theta) := f_\theta(\bar{\alpha})$, so gilt für $\theta \in [0, \pi]$:

$$g_-(\theta) := (K_{12} + K_{21}) \sin \theta - \sqrt{K_{13}^2 + K_{23}^2 - 2K_{13}K_{23} \cos \theta}.$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass $f_\theta(\alpha)$ für $\theta \in [-\pi, 0]$ bei $\bar{\alpha}$ *maximiert* wird. In diesem Fall ergibt sich für $g_+(\theta) := f_\theta(\bar{\alpha})$:

$$g_+(\theta) = (K_{12} + K_{21}) \sin \theta + \sqrt{K_{13}^2 + K_{23}^2 - 2K_{13}K_{23} \cos \theta}.$$

Weiter folgt für ein $\theta^* \in (0, \pi/2)$:

$$\max_{\theta \in [0, \pi]} g_-(\theta) = g_-(\theta^*) = -g_+(-\theta^*) = -\min_{\theta \in [-\pi, 0]} g_+(\theta).$$

Gilt also (2.131), so lässt sich folgern: Ist für einen beliebigen Orbit des Systems (2.1) $(n_i \phi_i - n_j \phi_j)(t_0) \in [-\theta^* + 2\pi m, \theta + 2\pi m]$ zu einem Zeitpunkt $t_0 \geq 0$ mit $k \in \mathbb{Z}$,

so folgt

$$(n_i\phi_i - n_j\phi_j)(t) \in [-\theta^* + 2\pi m, \theta + 2\pi m] \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Da für jeden Orbit irgendwann der Fall $(n_i\phi_i - n_j\phi_j)(t_0) \in [-\theta^* + 2\pi m, \theta + 2\pi m]$ mit $\theta^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ eintritt, ist damit für jeden Orbit $n_i\phi_i - n_j\phi_j$ beschränkt.

□

Das in Satz 2.15 formulierte Kriterium ist zwar *hinreichend* aber *nicht notwendig*. Darüberhinaus ist die Anwendbarkeit dieses Satzes beschränkt, da die rechte Seite in (2.131) negativ sein kann und damit dann nur aufgrund der Größenordnung dieses Terms keinerlei Aussage bzgl. des Eintretens bzw. Nichteintretens partieller Synchronisation getroffen werden kann. Zur Herleitung der Aussagen in Satz 2.14 und Satz 2.15 wurde nur allein diejenige Differenz $n_i\omega_i - n_j\omega_j$ von gewichteten natürlichen Frequenzen betrachtet, deren zugehörige Phasenoszillatoren gerade auf partielle Synchronisation untersucht werden sollten. Tatsächlich wird das Eintreten von partieller Synchronisation aber auch durch die Größe der Eigenfrequenz ω_k des nicht-synchronisierten Phasenoszillators ($k \neq i, j$) mitbestimmt, wie es der Beweis des folgenden Satzes zeigt:

2.16 Satz (Existenz von partieller Phasensynchronisation II)

Es seien $K_{ij} > 0$ beliebig und es gelte $\omega_k \rightarrow \infty$. Dann tritt eine partielle Synchronisation zwischen i -ten und j -ten Phasenoszillator mit $i, j \neq k$ genau dann ein, wenn gilt

$$|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \leq K_{ij} + K_{ji}. \quad (2.132)$$

Bemerkung: Die Limesbetrachtung $\omega_k \rightarrow \infty$ führt formal zu einer Entkopplung des k -ten Oszillators.

Beweis. Wir zeigen die Aussage (2.132) exemplarisch für $(i, j) = (1, 2)$. Es gilt

$$n_3\phi_3 - n_j\phi_j = n_3\omega_3 + f_j(t), \quad j = 1, 2,$$

wobei f_j jeweils eine Funktion mit beschränkter Ableitung ist. Für die gewichtete Phasendifferenz $n_2\phi_2 - n_1\phi_1$ gilt dann

$$\begin{aligned} n_2\phi_2(t) - n_1\phi_1(t) &= n_2\phi_2(t_0) - n_1\phi_1(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t (n_2\omega_2 - n_1\omega_1 - (K_{12} + K_{21}) \sin(n_2\phi_2(s) - n_1\phi_1(s))) ds \\ &+ \int_{t_0}^t (-K_{13} \sin(n_3\omega_3 s + f_1(s)) + K_{23} \sin(n_3\omega_3(s) + f_2(s))) ds. \end{aligned}$$

Nach dem *Riemann-Lebesgue-Lemma* konvergiert das letzte Integral für $\omega_3 \rightarrow \infty$

gegen 0. Damit folgt

$$\begin{aligned} n_2\phi_2(t) - n_1\phi_1(t) &= n_2\phi_2(t_0) - n_1\phi_1(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t (n_2\omega_2 - n_1\omega_1 - (K_{12} + K_{21}) \sin(n_2\phi_2(s) - n_1\phi_1(s))) ds. \end{aligned}$$

Für $\omega_3 \rightarrow \infty$ genügt $n_2\phi_2 - n_1\phi_1$ also der Differentialgleichung

$$n_2\dot{\phi}_2 - n_1\dot{\phi}_1 = n_2\omega_2 - n_1\omega_1 - (K_{12} + K_{21}) \sin(n_2\phi_2 - n_1\phi_1).$$

Die Lösungskurven dieser Gleichung sind beschränkt genau dann, wenn eine *stabile stationäre* Lösung existiert. Dies ist gerade der Fall, wenn

$$|n_2\omega_2 - n_1\omega_1| \leq K_{12} + K_{21}.$$

□

Die Annahme $\omega_k \rightarrow \infty$ in Satz 2.16, welche formal zur Entkopplung des k -ten Phasenoszillators führt, stellt eine künstlich konstruierte Situation dar, welche im Normalfall nicht eintritt. Die Aussage des Satzes verdeutlicht vielmehr, dass die Bedingung (2.132) eine Minimalvoraussetzung für das mögliche Eintreten von partieller Synchronisation zwischen den entsprechenden Phasenoszillatoren darstellt. Gilt (2.132), und ist ω_k hinreichend groß, so führt diese Konfiguration zu einer partiellen Phasensynchronisation von i -ten und j -ten Oszillator. Hiermit zeigt sich auch, dass auch bei Nichtanwendbarkeit von Satz 2.15 (aufgrund von Negativität der rechten Seite in (2.131)) eine partielle Phasensynchronisation möglich sein kann.

Die Aussagen in Satz 2.15 und Satz 2.16 leiten sich von analogen Theoremen über die Existenz partieller Synchronisation im klassischen Kuramoto-System für 3 phasengekoppelte Oszillatoren ab, wie sie etwa von *Aeyels et al.* in [2] und [27] formuliert wurden. Die Modifikation dieser Existenzsätze für die Situation einer nicht-symmetrischen Kopplungskonfiguration führt jedoch zu einigen Einschränkungen, wie es sich etwa, wie oben bereits bemerkt, in der begrenzten Anwendbarkeit von Satz 2.15 äußert.

Abschließend betrachten wir als Beispiel die folgende Konfiguration von Kopplungen:

$$\begin{aligned} K_{12} &= K, & K_{13} &= 0.3 K, & K_{21} &= 1.4 K, \\ K_{23} &= 0.7 K, & K_{31} &= 0.4 K, & K_{32} &= 0.3 K. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Hierbei dient $K \in [0, 1]$ als Verzweigungsparameter. Für die gewichteten Phasendifferenzen sei vorausgesetzt

$$n_1\omega_1 - n_3\omega_3 = 1, \quad n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = 0.4.$$

Die numerische Simulation zeigt, dass für $K = 1$ eine vollständige $n_1 : n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation auftritt, d.h. die gewichteten Phasendifferenzen $\theta_1 = n_1\phi_1 - n_3\phi_3, \theta_2 = n_2\phi_2 - n_3\phi_3$ streben auf einen stationären Zustand zu (Abb. 2.12a). Für kleiner werdendes K geht hingegen bei einem bestimmten Parameterwert $K_c \in (0, 1)$ dieser Zustand der totalen Synchronisation verloren. Gilt für K nun gerade

$$K \geq \frac{|n_2\omega_2 - n_1\omega_1|}{\max_{\gamma \in [0, \pi/2]} [(K_{12} + K_{21}) \sin \gamma - \sqrt{K_{13}^2 + K_{23}^2 - 2K_{13}K_{23} \cos \gamma}]}$$

$$\approx \frac{0.6}{1.655} \approx 0.363,$$

so tritt nach Satz 2.15 eine *partielle Phasensynchronisation* zwischen dem 1. und 2. Oszillator auf (Abb. 2.12b). Das Erreichen des kritischen Parameters $K = K_c$ führt somit nicht zu einem vollständig inkohärenten System. Erst für einen kleineren kritischen Parameterwert $\tilde{K}_p < K_c$ wird dieser Zustand erreicht. Aufgrund von Satz 2.14 lässt sich schließen, dass $K_p > 0$ gelten muss (Bedingung (2.125) wird für hinreichend kleine $K > 0$ erfüllt). Die Sätze 2.14 und 2.15 liefern somit zwar keine genaue Bestimmung von K_p aber stattdessen eine obere (Satz 2.14) und untere (Satz 2.15) Schranke für diesen Parameterwert.

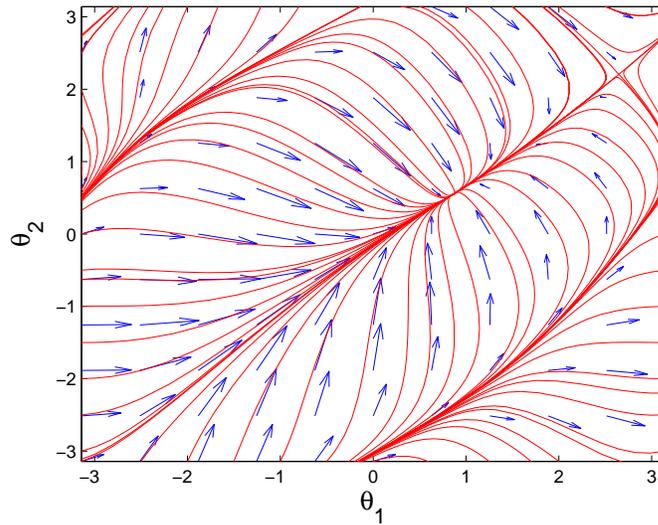
Verändern wir nun in dem obigen Beispiel das Vorzeichen des gewichteten Frequenzshifts vom 1. und 2. Phasenoszillator zu

$$n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = -0.4,$$

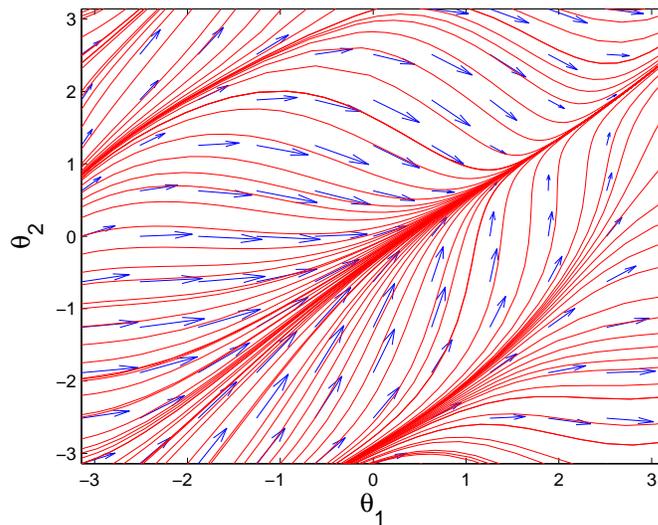
so ändert sich die Dynamik des Systems hinsichtlich partieller Synchronisation vollständig. Analog zum obigen Setting kommt es beim Erreichen eines kritischen Parameters $K_c \in (0, 1)$ zum Verlust des Zustandes der vollständigen $n_1 : n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation, allerdings tritt für $K < K_c$ hier keine partielle Synchronisation zwischen dem 1. und 2. Oszillator auf. Stattdessen zeigt sich in der numerischen Simulation eine partielle Phasensynchronisation vom 2. und 3. Oszillator (Abb. 2.13). Dieses Phänomen kann hierbei jedoch nicht durch Anwendung von Satz 2.15 verifiziert werden, da

$$\max_{\gamma \in [0, \pi/2]} (K_{23} + K_{32}) \sin \gamma - \sqrt{K_{21}^2 + K_{31}^2 - 2K_{21}K_{31} \cos \gamma} < 0$$

gilt, und somit Satz 2.15 nicht angewendet werden kann. Die beschriebenen qualitativen Veränderungen bei Variation des Parameters K können auch durch numerische Berechnung der *gewichteten durchschnittlichen Frequenzen* Ω_j (vgl. (1.18) und (1.19) im Abschnitt 1.3.3) illustriert werden. Das Erreichen der kritischen Parameterwerte K_p und K_c manifestiert sich dabei jeweils als sogenannte *Frequenz-Splitting-Bifurkation* (die Verwendung dieses Terminus erfolgt hierbei in Anlehnung



(a) $K = 1$: *Vollständige Phasensynchronisation*. Es existieren 2 stationäre Punkte; der stabile Fixpunkt $(\theta_1, \theta_2) \approx (0.868, 0.554)$ als Korrelat der Phasensynchronisation und der Sattelpunkt $(\theta_1, \theta_2) \approx (2.645, 2.206)$.



(b) $K = 0.55$: *Partielle Synchronisation vom 1. und 2. Phasenoszillator*. Zu erkennen ist ein Attraktor, welcher entlang einer Parallelen der Winkelhalbierenden verläuft. Für diesen anziehenden Orbit gilt folglich $\theta_1(t) - \theta_2(t) = \eta(t)$ mit einer beschränkten Funktion η .

Abbildung 2.12.: Phasenporträts für K_{ij} wie in (2.133), $n_1\omega_1 - n_3\omega_3 = 1, n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = 0.4$. Erstellung der Phasenporträts mit *MATLAB R2007b*.

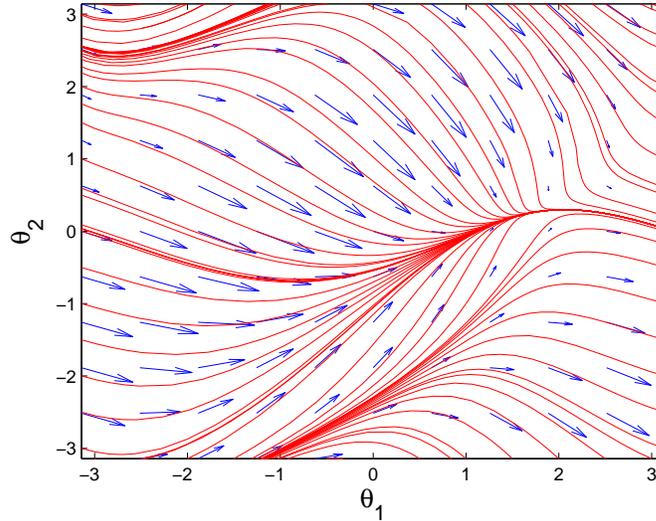


Abbildung 2.13.: Phasenporträt für K_{ij} wie in (2.133) mit $K = 0.55$, $n_1\omega_1 - n_3\omega_3 = 1$, $n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = -0.4$: *Partielle Synchronisation vom 2. und 3. Phasenoszillator.* Zu erkennen ist ein Attraktor, welcher bzgl. θ_2 beschränkt ist und somit das Korrelat einer partiellen $n_2 : n_3$ -Phasensynchronisation darstellt. (Erstellung des Phasenporträts mit *MATLAB R2007b*)

an Maistrenko et al., vgl. [19]). Für $K > K_c$ liegt ein vollständig synchronisiertes System vor. Folglich gilt für alle j : $\Omega_j = \Omega$ mit zugehöriger Synchronisationsfrequenz Ω . Bei $K = K_c$ findet dann zunächst ein *partielles Frequenz-Splitting* statt; während für $K \in (K_p, K_c)$ weiterhin $\Omega_i = \Omega_j$ gilt, „splittet“ sich die gewichtete Frequenz Ω_k davon ab, d.h. es ist $\Omega_k \neq \Omega_{i/j}$. Bei der zweiten Frequenz-Splitting-Verzweigung für $K = K_p$ wird nun auch die partielle Synchronisation zwischen dem i -ten und j -ten Phasenoszillatoren beendet. Im Zustand der vollständigen Inkohärenz für $K < K_p$ sind damit alle gewichteten durchschnittlichen Frequenzen paarweise verschieden (Abb. 2.14). Anhand der vorangegangenen Ausführungen zeigt sich durch Vergleich mit dem bekannten Kuramoto-System einmal mehr deutlich, wie sich die Voraussetzung einer nicht-symmetrischen Kopplungskonfiguration auf die Dynamik des Systems auswirkt. Partielle Synchronisation und Frequenz-Splitting-Verzweigungen treten zwar auch bei Systemen mit Kuramoto-Kopplung auf, jedoch tritt hierbei eine partielle Synchronisation immer nur bei gerade derjenigen Paarung (i, j) auf, für die gilt:

$$|n_i\omega_i - n_j\omega_j| = \min_{k \neq l} |n_k\omega_k - n_l\omega_l|.$$

In unserem ersten Fallbeispiel für partielle Phasensynchronisation zwischen dem 1. und 2. Oszillator galt aber gerade

$$n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = 0.4 < 0.6 = n_1\omega_1 - n_2\omega_2.$$

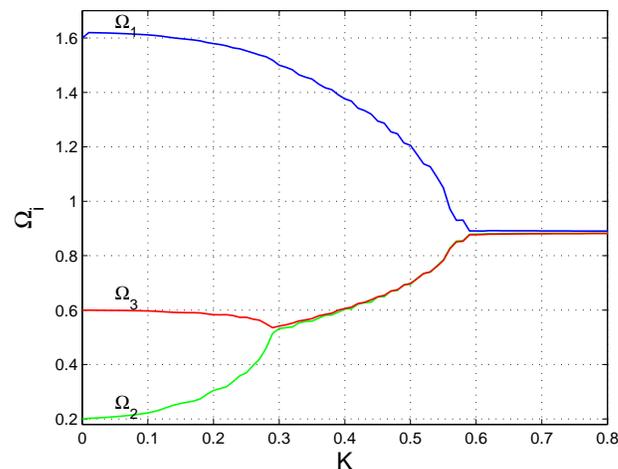


Abbildung 2.14.: K_{ij} wie in (2.133), $n_1\omega_1 - n_3\omega_3 = 1, n_2\omega_2 - n_3\omega_3 = -0.4$. Darstellung der gewichteten durchschnittlichen Frequenzen Ω_j in Abhängigkeit von K . Bei $K_c \approx 0.6$ kommt es zur 1. Frequenz-Splitting-Bifurkation mit Verlust der vollständigen Phasensynchronisation durch “Absplitten“ von Ω_1 . Die 2. Frequenz-Splitting-Bifurkation findet bei $K_p \in (0.3, 0.5)$ statt, so dass für $K < K_p$ jeweils ein komplett inkohärentes System vorliegt. (Berechnung der Phasen mittels explizitem Euler-Verfahren, Simulation mit $C++$. Für Details bzgl. der numerischen Berechnung siehe C.2.)

Bei unsymmetrischer Kopplung ist somit auch eine partielle Synchronisation von Phasenoszillatoren möglich, deren Differenz von gewichteten natürlichen Frequenzen nicht minimal ist. Vielmehr lassen sich sogar Kopplungskonfigurationen konstruieren, bei welchen eine partielle Phasensynchronisation von derjenigen Oszillatoren-Paarung erzwungen wird, bei welchen die zugehörige gewichtete Differenz von Frequenzen die maximale ist (vgl. Abb. 2.15).

Generell muss beim Erreichen der Grenze des Synchronisationsregimes nicht notwendigerweise eine partielle Phasensynchronisation eintreten. Durch Wahl einer geeigneten Konfiguration von Kopplungen und Frequenzshifts lässt sich auch ein direkter Übergang von vollständiger Synchronisation zu einem komplett inkohärenten System erreichen. Als einfachstes Beispiel können wir hierbei auf das klassische Kuramoto-System verweisen; mit $K_{ij} = K \forall (i, j)$, $n_j = 1 \forall j$ und der Symmetriebedingung $\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3$ lässt sich ein solches Szenario konstruieren (vgl. [19]).

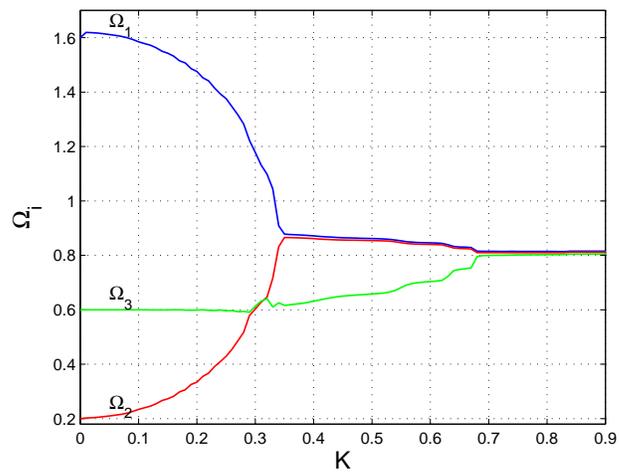


Abbildung 2.15.: $K_{12} = 2.2K$, $K_{13} = 0.1K$, $K_{21} = 2K$, $K_{23} = 0.1K$, $K_{31} = 0.2K$, $K_{32} = 0.1K$. $n_1\omega_1 = 1.6$, $n_2\omega_2 = 0.2$, $n_3\omega_3 = 0.6$, $n_1\omega_1 - n_2\omega_2 = \max_{i \neq j} |n_i\omega_i - n_j\omega_j| = 1.4$. 1. Frequenz-Splitting bei $K_c \approx 0.68$ mit Beendigung des Zustandes der vollständigen Synchronität, 2. Frequenz-Splitting bei $K_p \approx 0.35$, so dass für $K < K_p$ ein vollständig inkohärentes System vorliegt. (Berechnung der Phasen mittels explizitem Euler-Verfahren, Simulation mit *C++*. Für Details bzgl. der numerischen Berechnung siehe C.2.)

3. Inhibitorisch-exzitatorisches System

Im vorangegangenen Kapitel erfolgte die mathematische Analyse eines Systems von 3 phasengekoppelten Oszillatoren zur Beschreibung eines thalamo-kortikalen Regelkreises. Hierbei repräsentierten die Phasenoszillatoren *ein thalamisches* sowie *2 kortikale Areale*. Im Abschnitt 1.1 hatten wir mit dem *Nucleus reticularis* bereits eine zusätzliche *inhibitorische* Funktionseinheit des Gehirns kennengelernt, welche eine entscheidende Rolle bei der Modulation und Kontrolle thalamo-kortikaler Interaktionen spielt. Ziel dieses Kapitels ist es nun, diese inhibitorische Struktur in unsere Modellierung zu integrieren.

Vereinfachend betrachten wir dabei einen Regelkreis, welcher, wie im vorangegangenen Fall, aus *einem thalamischen Areal*, im Unterschied zu eben aber nur über *ein kortikales Areal* verfügt. Als 3. Funktionseinheit wird nun *ein Areal des Nucleus reticularis* in diese thalamo-kortikale Schleife eingebunden. Während der thalamische und der kortikale Oszillator weiterhin durch beidseitige *exzitatorische* Projektionen miteinander interagieren, erhält der Oszillator, welcher den N. reticularis repräsentiert, exzitatorische Feedbacks von den beiden anderen Arealen, wirkt selbst aber *inhibitorisch* auf das thalamische Areal ein. Im zugehörigen Differentialgleichungs-

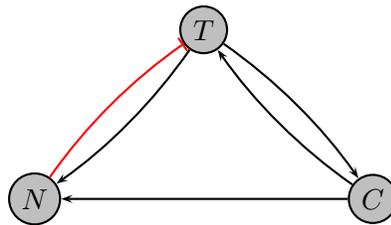


Abbildung 3.1.: 2.Konfiguration: Modell mit einem thalamischen (T), einem kortikalen (C) und einem Areal des Nucleus reticularis (N). Exzitatorische Kopplungen schwarz dargestellt, Inhibition rot.

system zur Beschreibung der Phasendynamik führt das Auftreten einer inhibitorischen Kopplung zu entscheidenden Unterschieden im Synchronisationsverhalten im Vergleich zu dem rein exzitatorischer Systeme. Insbesondere zeigt sich, dass Veränderungen der Kopplungskonfiguration zu einer Vielzahl unterschiedlicher Bifurkationen höherer Kodimension führen. Aus diesem Grund legen wir hier den Schwerpunkt bei der Betrachtung des inhibitorisch-exzitatorischen Systems phasengekoppelter Oszillatoren in die **Bifurkationsanalyse** verschiedener Konfigurationen von Kopplungs-

stärken.

3.1. Einführung und erste Analyse

In diesem Kapitel betrachten wir somit das System

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - \frac{K_{13}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \frac{K_{21}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_1\phi_1) - \frac{K_{23}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_3 - \frac{K_{31}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_1\phi_1) - \frac{K_{32}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_2\phi_2)\end{aligned}\quad (3.1)$$

mit *inhibitorisch-exzitatorischer* Kopplung. Wie es in 1.2.2 motiviert wurde, ist die Konfiguration von Kopplungen dabei dahingehend festgelegt, dass der 1. Oszillator einer Inhibition durch den 2. Oszillator unterliegt, alle weiteren Interaktionen hingegen als exzitatorisch vorausgesetzt sind. Somit gilt

3.1 Voraussetzung (Inhibitorisch-exzitatorische Kopplungskonfiguration)

$$K_{12} < 0 \quad \text{und} \quad K_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \neq (1, 2). \quad (3.2)$$

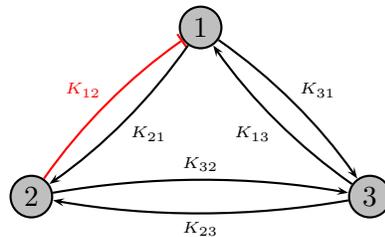


Abbildung 3.2.: Konfiguration der inhibitorischen (rot) und exzitatorischen Kopplungen (schwarz) im System (3.1)

Der 1. Oszillator repräsentiert somit das thalamische Areal, der 2. ein Gebiet des N. reticularis sowie der 3. einen kortikalen Abschnitt. Durch Vergleich der Kopplungskonfigurationen in Abb. 3.1 und Abb. 3.2 wird deutlich, dass wir in unserem mathematischen Modell eine zusätzliche Kopplung angenommen haben, welche im korrespondierenden physiologischen System nicht vorliegt: Kortikale Gebiete empfangen keine Afferenzen des N. reticularis, aus diesem Grund müsste im zugehörigen mathematischen System (3.1) der Parameter K_{32} eigentlich gleich 0 gesetzt werden. Wir werden dennoch im weiteren Verlauf $K_{32} \geq 0$ voraussetzen, um allgemeinere mathematische Resultate zu erhalten. Alle Ausführungen in diesem Kapitel bleiben

jedoch weiterhin gültig, wenn der physiologische Fall $K_{32} = 0$ eintritt.

Im Unterschied zum vorangegangenen Kapitel werden wir hier ausschließlich Triplets von Phasenoszillatoren betrachten, welche die *Resonanzbedingung* in Abschnitt 1.3.2 (vgl. (1.11)) exakt erfüllen, d.h. für die natürlichen Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ gelte

3.2 Voraussetzung (Resonanzbedingung)

$$n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3 = \omega^*, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Wie in den vorangegangenen Kapiteln ist für eine Analyse des Synchronisationsverhaltens die Einführung des zugehörigen 2-dimensionalen Systems der gewichteten Phasendifferenzen $\theta_1 := n_1\phi_1 - n_3\phi_3$, $\theta_2 := n_2\phi_2 - n_3\phi_3$ sinnvoll. Mit der Voraussetzung (3.3) sind die Evolutionsgleichungen für θ_1, θ_2 unabhängig von den Termen $n_j\omega_j$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -K_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \sin \theta_1 - K_{32} \sin \theta_2 \\ &=: G_1(\theta_1, \theta_2) \\ \dot{\theta}_2 &= K_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2) - K_{31} \sin \theta_1 - (K_{23} + K_{32}) \sin \theta_2 \\ &=: G_2(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wie in Kapitel 2 ergibt sich

$$A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2) := DG(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} a_{11}(\theta_1, \theta_2) & a_{12}(\theta_1, \theta_2) \\ a_{21}(\theta_1, \theta_2) & a_{22}(\theta_1, \theta_2) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{11}(\theta_1, \theta_2) &= -K_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1 \\ a_{12}(\theta_1, \theta_2) &= K_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{32} \cos \theta_2 \\ a_{21}(\theta_1, \theta_2) &= K_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{31} \cos \theta_1 \\ a_{22}(\theta_1, \theta_2) &= -K_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

(Wir verwenden hier das Subscriptum K_{12} , da dieser Parameter in den späteren Bifurkationsanalysen eine herausragende Rolle spielen wird.)

Als abkürzende Schreibweise setzen wir wie in Kapitel 2:

$$\begin{aligned} b_1 &:= K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} \\ b_2 &:= K_{21}K_{32} + K_{12}K_{32} + K_{12}K_{23} \\ b_3 &:= K_{21}K_{31} + K_{12}K_{31} + K_{13}K_{21} \end{aligned} \quad (3.6)$$

sowie

$$c_j := \frac{b_j}{K_{13}K_{21}K_{32} - K_{12}K_{23}K_{31}}.$$

Mit diesen Notationen gilt wie im Abschnitt 2.1 (vgl. (2.20) und (2.21))

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2) &= b_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + b_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 \\ &\quad + b_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2) &= -(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1 \\ &\quad - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Insbesondere ergibt sich für $\theta_1, \theta_2 \in \{0, \pi\}$:

3.3 Lemma (Darstellung von $\det A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2)$ für $\theta_1, \theta_2 \in \{0, \pi\}$)

Mit den Bezeichnungen (3.5) und (3.6) gilt für $\theta_1, \theta_2 \in \{0, \pi\}$

$$\det A_{K_{12}}(0, 0) = b_1 + b_2 + b_3 \quad (3.8)$$

$$\det A_{K_{12}}(\pi, 0) = -b_1 - b_2 + b_3 \quad (3.9)$$

$$\det A_{K_{12}}(0, \pi) = -b_1 + b_2 - b_3 \quad (3.10)$$

$$\det A_{K_{12}}(\pi, \pi) = b_1 - b_2 - b_3 \quad (3.11)$$

sowie

$$\text{spur } A_{K_{12}}(0, 0) = -K_{12} - K_{21} - K_{13} - K_{31} - K_{23} - K_{32} \quad (3.12)$$

$$\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) = K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32} \quad (3.13)$$

$$\text{spur } A_{K_{12}}(0, \pi) = K_{12} + K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32} \quad (3.14)$$

$$\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, \pi) = -K_{12} - K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32} \quad (3.15)$$

Der Beweis erfolgt durch direktes Einsetzen der Punkte (θ_1, θ_2) in (3.1) und (3.7).

Wir nehmen nun noch 3 weitere technische Voraussetzungen an:

3.4 Voraussetzung

$$K_{23} + K_{32} - K_{31} > 0 \quad (3.16)$$

$$0 < (K_{23} + K_{32} + K_{31})^2 + (K_{21} + K_{31})(K_{13} - K_{23}) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} K_{21}(K_{13} - K_{23}) &< (K_{23} + K_{32})(K_{23} + K_{32} + K_{31}) \\ &\quad + K_{31}(K_{13} + K_{31} + K_{32}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bemerkung zur Voraussetzung 3.4:

Die Bedeutung der Annahmen in Voraussetzung 3.4 wird im Zusammenhang mit dem Beweis von Lemma 3.5 deutlich werden. Ist $K_{13} \geq K_{23}$, so ist (3.17) in jedem Fall erfüllt. Ebenso gilt (3.18) für $K_{21} < K_{31}$. Andernfalls werden durch diese Voraussetzungen zu starke Heterogenitäten der Kopplungskonstanten begrenzt (z.B. kann im Falle $K_{13} < K_{23}$ aufgrund von (3.17) der Parameter K_{21} nicht unbegrenzt groß

gewählt werden).

Unter den Voraussetzungen (3.2),(3.3),(3.16) und (3.17) können wir nun folgende erste Bilanz hinsichtlich der Qualität stationärer Lösungen von (3.4) ziehen:

3.5 Lemma (Inphasen vs. Antiphasen-Synchronisation)

Es seien (3.2),(3.3),(3.16),(3.17) und (3.18) vorausgesetzt. Dann besitzt das System (3.4) mod 2π entweder genau 4 oder genau 6 stationäre Lösungen. Weiterhin ist der **Inphasen-Zustand** $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ genau dann stabil, wenn

$$K_{12} > -\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} \quad (3.19)$$

gilt. Demgegenüber ist der **Antiphasen-Zustand** $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$ genau dann stabil, wenn

$$K_{12} < \min \left(\frac{-(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23}) + K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}}, \right. \\ \left. -K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32} \right) \quad (3.20)$$

erfüllt ist. Die übrigen antiphasischen stationären Lösungen $(0, \pi)$ und (π, π) können für kein $K_{12} \in \mathbb{R}$ Stabilität erhalten.

Zwei zusätzliche Zweige symmetriebrechender stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ existieren genau dann, wenn gilt

$$|b_1^2 - b_2^2 - b_3^2| < 2|b_2b_3|. \quad (3.21)$$

$(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ sind dann charakterisiert durch

$$\begin{aligned} \sin \theta_1^\pm &= c_2(\Omega_\pm - \omega^*), \\ \sin \theta_2^\pm &= c_3(\Omega_\pm - \omega^*), \\ \sin(\theta_1^\pm - \theta_2^\pm) &= c_1(\Omega_\pm - \omega^*), \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei die zugehörigen gewichteten Frequenzen Ω_\pm gegeben sind durch

$$\Omega_\pm = \omega^* \pm \frac{\sqrt{4c_2^2c_3^2 - (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)^2}}{2c_1c_2c_3}. \quad (3.23)$$

Beweis. Mit den Darstellungen für $\det A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2)$ und $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1, \theta_2)$ für $\theta_1, \theta_2 \in$

$\{0, \pi\}$ in Lemma 3.3 folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(0, 0) < 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} < -\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} \end{aligned}$$

sowie

$$\text{spur } A_{K_{12}}(0, 0) > 0 \Leftrightarrow K_{12} < -K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32}. \quad (3.24)$$

Damit für jedes K_{12} in (3.19) tatsächlich $(0, 0)$ stabil ist, darf für kein solches K_{12} die rechte Seite in (3.24) erfüllt sein. Aus diesem Grund erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} &-\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} \\ &< -K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.24) ist nun gerade äquivalent zur Voraussetzung (3.18). Die Behauptung in (3.19) ist also gültig.

Ebenso gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(\pi, 0) = -b_1 - b_2 + b_3 &= -K_{23}K_{31} - K_{13}K_{32} - K_{13}K_{23} \\ &+ K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32}) \\ &- K_{12}(K_{23} + K_{32} - K_{31}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung (3.16) folgt nun

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(\pi, 0) > 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} < \frac{-(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23}) + K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mit der Darstellung von $\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0)$ in (3.13) gilt außerdem

$$\text{spur } A(\pi, 0) < 0 \Leftrightarrow K_{12} < -K_{21} - K_{13} - K_{13} + K_{23} + K_{32}. \quad (3.27)$$

Unmittelbar folgen somit die Aussagen (3.19) und (3.20).

Für den stationären Zustand $(0, \pi)$ folgt analog mit den Darstellungen von $\det A_{K_{12}}(0, \pi)$ und $\text{spur } A_{K_{12}}(0, \pi)$ aus (3.10) und (3.14) aufgrund von Voraussetzung (3.16):

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(0, \pi) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} \geq \frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \text{spur } A_{K_{12}}(0, \pi) \leq 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} \leq -K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32}. &\quad (3.29) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} -K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32} &< \frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23}}{K_{23} + K_{32} - K_{31}} \\ &+ \frac{K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}} \\ &\Leftrightarrow \\ -K_{21}K_{23} - K_{13}K_{31} - (K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 &< K_{23}K_{31} + K_{13}K_{21}. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Da (3.30) immer erfüllt ist, können daher (3.28) und (3.29) niemals gleichzeitig erfüllt und somit der Fixpunkt $(0, \pi)$ für keinen Parameterwert K_{12} stabil werden. Eine analoge Argumentation lässt sich nun auch für den Antiphazenzustand (π, π) durchführen. In diesem Fall folgt mit den Darstellungen aus (3.11) und (3.15)

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(\pi, \pi) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} \leq \frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} - K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} &\quad (3.31) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{spur } A_{K_{12}}(\pi, \pi) \leq 0 &\Leftrightarrow \\ K_{12} \geq -K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32}. &\quad (3.32) \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$\begin{aligned} &\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} - K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} \\ &< -K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} \end{aligned}$$

ist nun gerade äquivalent zu (3.17). Aus diesem Grund ist ebenso der Fixpunkt (π, π) instabil für alle $K_{12} \in \mathbb{R}$.

Die Existenz der symmetriebrechenden Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ erfolgt wie beim Beweis von Lemma 2.5 im Abschnitt 2.1.

□

Bemerkung zu Lemma 3.5:

Die Bedeutung der Voraussetzungen (3.16)-(3.18) zeigt sich im Beweis von Lemma 3.5. Durch (3.16) ist sichergestellt, dass für hinreichend kleines K_{12} sowohl

det $A_{K_{12}}(\pi, 0) > 0$ als auch spur $A(\pi, 0) < 0$ erfüllt ist, und somit dieser Fixpunkt dann Stabilität erlangt. Der umgekehrte Fall $K_{31} > K_{23} + K_{32}$ kann analog betrachtet werden. Anstelle eines Stabilitätswechsels von $(0, 0)$ zu $(\pi, 0)$ für $K_{12} \rightarrow -\infty$, wie es in Lemma 3.5 beschrieben wurde, würde dann ein Stabilitätsübergang von der Inphase $(0, 0)$ hin zum Gleichgewichtspunkt $(0, \pi)$ stattfinden. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir untersuchen, auf welche Weise, d.h. über welche *Bifurkationen*, sich bei verschiedenen Konfigurationen der exzitatorischen Kopplungsstärken und variierendem inhibitorischen Verzweigungsparameter K_{12} der Übergang von der *Inphasen-Synchronisation* $(0, 0)$ zur *Antiphasen-Synchronisation*, hier repräsentiert durch den stabilen Fixpunkt $(\pi, 0)$, vollzieht. Dabei werden wir zahlreiche unterschiedliche Bifurkationsszenarien unterscheiden. Im Falle $K_{23} + K_{32} < K_{31}$ würden wir ebenso für den Übergang von $(0, 0)$ hin zu $(0, \pi)$ eine Reihe verschiedener Verzweigungstypen erhalten, welche sich qualitativ jedoch völlig analog zu den Verzweigungsszenarien des Übergangs von $(0, 0)$ hin zu $(\pi, 0)$ darstellen. Aus diesem Grund beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Analyse des erstgenannten Stabilitätsübergangs von $(0, 0)$ hin zu $(\pi, 0)$. Den Grenzfall $K_{23} + K_{32} = K_{31}$ werden wir im Abschnitt 3.10 gesondert betrachten.

Durch die Bedingung (3.17) ist des Weiteren ausgeschlossen, dass der Fixpunkt (π, π) für irgendeinen Parameterwert K_{12} Stabilität erhalten kann (vgl. Argumentation am Ende des Beweises von Lemma 3.5). Die Voraussetzung (3.18) hingegen gewährleistet, dass der Inphasenzustand $(0, 0)$ für variierendes K_{12} niemals einer *Hopf-Bifurkation* unterliegen kann, da für spur $A_{K_{12}}(0, 0) = 0$ stets det $A_{K_{12}} < 0$ gilt (siehe Beweis von Lemma 3.5). Durch (3.17) und (3.18) wird somit die Anzahl möglicher Bifurkationen sowie die Anzahl möglicher stabiler Fixpunkte begrenzt. Dennoch ist eine solche Beschränkung an dieser Stelle sinnvoll, da damit zu starke Heterogenitäten der exzitatorischen Kopplungsgrößen ausgeschlossen werden.

Wir werden ab jetzt die folgenden Schreibweisen verwenden:

3.6 Notation

$$K_{12}^i := -\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}} \quad (3.33)$$

(Bei K_{12}^i gilt gemäß der Darstellung (3.8) dann gerade det $A_{K_{12}^i}(0, 0) = 0$.)

$$K_{12}^a := \frac{-(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32}) + K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}} \quad (3.34)$$

(Bei diesem Parameterwert ist wegen (3.9) gerade det $A_{K_{12}^a}(\pi, 0) = 0$.)

$$K_{12}^H := -K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32} \quad (3.35)$$

(Gemäß der Darstellung (3.13) gilt hier gerade spur $A_{K_{12}^H}(\pi, 0) = 0$.)

Für $K_{12}^i, K_{12}^a, K_{12}^H$ ergeben sich ferner die folgenden Beziehungen:

3.7 Korollar

Mit den Bezeichnungen aus 3.6 gilt $K_{12}^a < K_{12}^i$ genau dann wenn

$$K_{21} < K_{31} \quad (3.36)$$

erfüllt ist.

Beweis. Durch elementare Umformungen der Ungleichung $K_{12}^a < K_{12}^i$ ergibt sich die äquivalente Beziehung

$$2K_{21}(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32}) < 2K_{31}(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32}).$$

Unmittelbar folgt damit nun die Aussage (3.36). □

3.8 Korollar

Mit den Bezeichnungen aus 3.6 gilt $K_{12}^H < K_{12}^a$ genau dann, wenn

$$(K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 < (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{23}) \quad (3.37)$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Voraussetzung $K_{12}^H < K_{12}^a$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & (K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 + K_{21}(-K_{23} - K_{32} + K_{31}) - K_{13}K_{23} - K_{13}K_{32} - K_{13}K_{31} \\ & < K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32}) - K_{23}K_{31} - K_{13}K_{23} - K_{13}K_{32}. \end{aligned}$$

Durch elementare Äquivalenzumformungen ergibt sich schließlich (3.37). □

Die Besonderheit des hier vorliegenden Systems phasengekoppelter Oszillatoren (3.1) liegt in der Existenz des inhibitorischen Kopplungsterms $K_{12} \sin(\phi_1 - \phi_2)$. Im Abschnitt 1.3.4 wurde bereits beschrieben, wie sich inhibitorische im Vergleich zu exzitatorischen Kopplungen auf die Dynamik von Phasensystemen auswirken. Dies wurde in 1.3.4 insbesondere durch die Beispiele des *Kuramoto-Systems* für 2 und 3 phasengekoppelte Oszillatoren motiviert (vgl. Abb. 1.6 und 1.7).

Während in einem System mit rein exzitatorischer (=attraktiver) Kopplung (d.h. $K > 0$ in (1.27) und (1.29)) stets eine *Inphasen-Synchronisation* einher ging, führte eine rein inhibitorische (=repulsive) Kopplung (d.h. $K < 0$) zu einer *Antiphasen-Synchronisation*. Bereits in 1.3.4 hatten wir auf diese Weise geschlussfolgert, dass

eine *gemischt inhibitorisch-exzitatorische* Kopplungskonfiguration gewissermaßen eine Art “Wettstreit“ zwischen Inphasen- und Antiphasensynchronisation zur Folge haben kann.

Weiterhin zeigte sich speziell im Beispiel des 3-dimensionalen Kuramoto-Systems, dass eine inhibitorische Kopplung auch zur *Existenz mehrerer unterschiedlicher Synchronisationszustände* führen kann.

In diesem Zusammenhang sind wir insbesondere an der Existenz von Kopplungskonfigurationen interessiert, in welcher sich die exzitatorischen und inhibitorischen Einflüsse gerade im *Gleichgewicht* befinden. Mathematisch repräsentiert ist ein solches ausgewogenes System etwa durch die Existenz von Synchronisationszuständen, d.h. stabile stationäre oder stabile periodische Lösungen des Systems (3.4), welche sich gerade als *Übergangszustände von Inphase zu Antiphase* darstellen, d.h. $\theta_j \approx \pm\pi/2$. Andererseits könnte ein ausgeglichenes System auch durch die gleichzeitige Stabilität der Fixpunkte $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ charakterisiert werden. Befindet sich das System (3.1) etwa in Inphasen-Synchronisation, und ergänzen wir die Evolutionsgleichungen der Phasen nun durch zusätzliche *Störterme*, so kann eine hinreichend starke Störung des Systems dazu führen, dass der zugehörige Fluss des reduzierten Systems (3.1) daraufhin aus dem Anziehungsbereich des Fixpunkts $(0, 0)$ entfernt wird und stattdessen in den Anziehungsbereich des ebenfalls stabilen Gleichgewichtspunkts $(\pi, 0)$ gelangt. Ein solches “Hin-und-her-Switchen“ zwischen Inphase und Antiphase kann ebenso als Gleichgewicht von Inhibition und Exzitation im System (3.1) interpretiert werden.

Da dem inhibitorischen Kopplungsparameter K_{12} im System (3.1) somit eine signifikante Stellung zukommt, liegt der Ansatz nahe, im Hinblick auf eine Bifurkationsanalyse gerade K_{12} als *primären Verzweigungsparameter* zu wählen. Bei der Untersuchung unterschiedlicher Kopplungskonfigurationen wird sich des Weiteren herausstellen, dass in diesem Zusammenhang insbesondere auch den Parametern K_{21} und K_{31} eine entscheidende Bedeutung zukommt. Die exzitatorische Kopplung K_{21} ist der Inhibition K_{12} genau entgegengesetzt und kann diese bei hinreichender Stärke kompensieren. Eine reziproke Einflussnahme des 1. Phasenoszillators auf den 2. kann aber nicht nur direkt mittels des Interaktionsterms $K_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2)$ erfolgen, sondern auch indirekt über den 3. Oszillator. Die Stärke der Einwirkung des 1. Oszillators auf den 3. wird nun gerade durch den Parameter K_{31} reguliert, somit erklärt sich die besondere Rolle dieses Parameters. Aus diesem Grund werden wir für entsprechende Bifurkationsanalysen in der 2-Parameterebene K_{21} und K_{31} als *sekundäre Verzweigungsparameter* auswählen (vgl. Abschnitt 3.11).

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels stellen wir nun also verschiedene Konfigurationen von exzitatorischen Kopplungsstärken und ihre dazu korrespondierenden

Bifurkationsszenarien vor.

3.2. Übergang von Inphase zu Antiphase via superkritischer Pitchfork-Verzweigungen

In unserem ersten betrachteten Fall nehmen wir zunächst an, dass die der Inhibition K_{12} entgegengesetzte exzitatorische Kopplung K_{21} im Vergleich zur Kopplung K_{31} , welche das Feedback des inhibierten 1. Oszillators auf den 3. quantifiziert, "relativ schwach" ausgeprägt ist. Mathematisch bedeutet dies

$$K_{31} > K_{21}. \quad (3.38)$$

Damit gilt nach Korollar 3.7, dass $K_{12}^a < K_{12}^i$. Gemeinsam mit Voraussetzung (3.16) erhalten wir eine Konfiguration von Kopplungen, in welcher die reziproken Erregungen zwischen 2. und 3. Phasenoszillator im Verhältnis zu den übrigen Interaktionen als besonders dominant hervortreten. Variieren wir nun den inhibitorischen Parame-

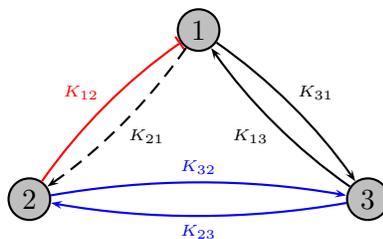


Abbildung 3.3.: Inhibition (rot), schwach (schwarze gestrichelte Linie), mittlere (schwarze durchgezogene Linie) and starke exzitatorische Kopplungen (blau)

ter K_{12} , so ergibt sich das folgende Bifurkationsszenario:

3.9 Satz (Stabilitätswechsel per superkritischer Pitchfork-Bifurkation)

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5, und es gelte (3.38). Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Der Inphasenzustand $(0, 0)$ verliert seine Stabilität bei $K_{12} = K_{12}^i$ über eine superkritische Pitchfork-Bifurkation.
2. Die bei $K_{12} = K_{12}^i$ generierten Zweige stabiler stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ existieren für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ und münden in den Antiphasezustand $(\pi, 0)$ für $K_{12} = K_{12}^a$ wiederum per superkritischer Pitchfork-Verzweigung.

3. Mit Ω_{\pm} definiert durch (3.23) sind $(\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm})$ dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1^{\pm} &= \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_{\pm} - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 > 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_{\pm} - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_2^{\pm} &= \arcsin(c_3(\Omega_{\pm} - \omega^*)) \\ \theta_1^{\pm} - \theta_2^{\pm} &= \begin{cases} \arcsin(c_1(\omega_{\pm} - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 > 0 \\ \pi - \arcsin(c_1(\Omega_{\pm} - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.39)$$

4. $(\pi, 0)$ ist dann stabil für alle $K_{12} < K_{12}^a$.

Beweis. Es gilt aufgrund von (3.16)

$$b_2 - b_3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_{12} < \bar{K}_{12} := \frac{K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}}. \quad (3.40)$$

Für alle $K_{12} < K_{12}^i$ ist dann die rechte Seite von (3.40) gültig, denn es gilt

$$K_{12}^i < \bar{K}_{12}. \quad (3.41)$$

Weiter folgt mit der Darstellung von K_{12}^a in (3.34)

$$K_{12} > K_{12}^a \quad \Leftrightarrow \quad b_1 > b_3 - b_2$$

mit $b_3 - b_2 > 0$ (wegen (3.40) und (3.41)). Ebenso erhalten wir

$$K_{12} < K_{12}^i \quad \Leftrightarrow \quad b_1 < -b_2 - b_3.$$

Somit ergibt sich

$$b_2^2 + b_3^2 - 2b_2b_3 < b_1^2 < b_2^2 + b_3^2 + 2b_2b_3. \quad (3.42)$$

(3.42) ist wiederum äquivalent zu (3.21), es existieren daher symmetriebrechende Zweige $(\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm})$ gemäß (3.22) für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$.

Wir zeigen nun, dass die für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ existenten Zweige $(\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm})$ tatsächlich jeweils per superkritischer Pitchfork-Bifurkation in den Gleichgewichtspunkten $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ generiert werden.

Wie in Kapitel 2 können die stationären Lösungen von (3.4) über ihre zugehörigen Frequenzen und damit als Nullstellen einer skalaren Funktion charakterisiert werden. Mit Hilfe der Funktion

$$F_1(\Omega) := \arcsin(c_1\Omega) + \arcsin(c_2\Omega) + \arcsin(c_3\Omega) \quad (3.43)$$

können nun auch die Lösungszweige $(\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm})$ für K_{12} nahe K_{12}^i beschrieben werden. Die Funktion F_1 besitzt entweder genau eine Nullstelle $\Omega_0 = 0$ oder genau 3

Nullstellen:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= 0, \\ \bar{\Omega}_\pm &= \pm \frac{\sqrt{4c_2^2 c_3^2 - (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)^2}}{2c_1 c_2 c_3}.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Zur Ω_0 korrespondiert der Inphasenzustand $(0, 0)$, während die Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ den Zweigen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ entsprechen, welche durch

$$\begin{aligned}\theta_1^\pm &= -\arcsin(c_2 \bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3 \bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_1^\pm - \theta_2^\pm &= \arcsin(c_1 \bar{\Omega})\end{aligned}$$

gegeben sind. Die zu den stationären Lösungen gehörigen Frequenzen sind dann gegeben durch $\Omega_\pm = \omega^* + \bar{\Omega}_\pm$.

Ist Ω Nullstelle von F_1 , und $(\theta_1(\Omega), \theta_2(\Omega))$ die zugehörige stationäre Lösung von (3.4), so lässt sich wie in (2.31) auf S.34 folgender Zusammenhang von $\det A_{K_{12}}(\theta_1(\Omega), \theta_2(\Omega))$ mit der Ableitung $F_1'(\Omega)$ herleiten:

$$F_1'(\Omega) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A_{K_{12}}(\theta_1(\Omega), \theta_2(\Omega)) > 0.$$

Somit gilt für $K_{12} < K_{12}^i$

$$F_1'(0) < 0$$

und folglich für $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ (falls existent)

$$F_1'(\bar{\Omega}_\pm) > 0.$$

Also erhalten wir in diesem Fall auch $\det A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) > 0$. Außerdem ist weiterhin die Beziehung (2.32) von S.34 gültig:

$$\begin{aligned}\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) &> 0 \\ \Leftrightarrow b_1^2(K_{31}b_2 + K_{32}b_3) + b_2^2(K_{21}b_1 + K_{23}b_3) + b_3^2(K_{12}b_1 + K_{13}b_2) &> 0.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Offenbar gilt für $K_{12} \nearrow K_{12}^i$ $\bar{\Omega}_\pm \rightarrow 0$ und somit auch $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) \rightarrow (0, 0)$. $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ zweigen also für $K_{12} = K_{12}^i$ von der Inphase $(0, 0)$ ab. Da $\text{spur } A_{K_{12}}(0, 0) < 0$ für $K_{12} = K_{12}^i$ folgt mit (3.45)

$$\text{spur } A_{K_{12}^i}(0, 0) = b_1^2(K_{31}b_2 + K_{32}b_3) + b_2^2(K_{21}b_1 + K_{23}b_3) + b_3^2(K_{12}^i b_1 + K_{13}b_2) < 0.$$

Für $K_{12} < K_{12}^i$ wird der mittlere Term noch kleiner, somit gilt auch $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) < 0$ für alle $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$. Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ sind somit stabil. Ebenso verliert der Fixpunkt $(0, 0)$ bei $K_{12} = K_{12}^i$ gerade seine Stabilität, wobei bei diesem

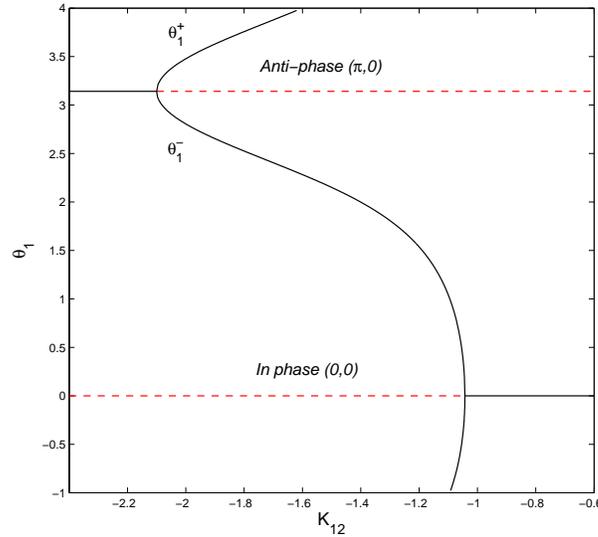


Abbildung 3.4.: $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.4$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.6$, $K_{32} = 0.5$. Superkritische Pitchfork-Verzweigungen bei $K_{12}^i \approx -10.043$ und $K_{12}^a = -2.1$.

Parameterwert gilt

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}^i}(0, 0) &= \det A_{K_{12}^i}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) = 0, \\ \text{spur } A_{K_{12}^i}(0, 0) &= \text{spur } A_{K_{12}^i}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) < 0. \end{aligned}$$

Für $K_{12} < K_{12}^i$ ist $(0, 0)$ folglich ein Sattelpunkt. Es findet somit bei $K_{12} = K_{12}^i$ eine *superkritische Pitchfork-Verzweigung* des Inphasenzustandes $(0, 0)$ statt (siehe Abb. 3.4). Wir zeigen nun, wie sich die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ weiter fortsetzen. Die Nullstelle $\Omega_0 = 0$ von F_1 existiert für jedes $K_{12} \in \mathbb{R}$. $\bar{\Omega}_\pm$ sind jedoch nur genau dann existent, wenn gilt

$$b_2^2 + b_3^2 < b_1^2 < (b_2 + b_3)^2. \quad (3.46)$$

Ist gerade $b_1^2 = b_2^2 + b_3^2$, so folgt $\bar{\Omega}_\pm = \pm \frac{1}{c_1}$ und somit

$$\theta_1^\pm - \theta_2^\pm = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Für $b_1^2 = b_2^2 + b_3^2$ findet folglich zwar keine Verzweigung statt, stattdessen unterliegen die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ aber einem Übergang von *Inphase* zu *Antiphase*. Wie im Abschnitt 2.2 können durch die Funktion F_1 jedoch nur inphasische stationäre Lösungen repräsentiert werden. Zur weiteren Charakterisierung dieser Lösungszeige betrachten wir nun die folgende Funktion

$$F_2(\Omega) := \pi - \arcsin(c_1\Omega) + \arcsin(c_2\Omega) + \arcsin(c_3\Omega). \quad (3.47)$$

Gilt

$$b_2^2 - b_3^2 < b_1^2 < b_2^2 + b_3^2, \quad (3.48)$$

so besitzt F_2 genau 2 Nullstellen $\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-$, welche wiederum durch (3.44) gegeben sind. Für die zugehörigen Phasendifferenzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= -\arcsin(c_2 \bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3 \bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_1^\pm - \theta_2^\pm &= \pi - \arcsin(c_1 \bar{\Omega}_\pm). \end{aligned}$$

Wie bei F_1 folgt $F_2'(\bar{\Omega}_\pm) > 0$ und somit auch $\det A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) > 0$. Oben wurde bereits gezeigt, dass $\text{spur } A(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) < 0$ für alle $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ gilt. Beim Wechsel von Inphase zu Antiphase bleiben die stationären Zustände $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ somit weiterhin stabil.

Für K_{12} mit $b_2^2 - b_3^2 = b_1^2$ erhalten wir

$$\bar{\Omega}_\pm = \pm \frac{1}{c_2}$$

und somit

$$\theta_1^\pm = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Bei diesem Parameterwert wechseln also auch die Phasendifferenzen θ_1^\pm von der Inphase zur Antiphase. Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ können dann auch nicht mehr durch entsprechende Nullstellen von F_2 charakterisiert werden. An Stelle von F_2 tritt stattdessen die folgende Funktion

$$F_3(\Omega) := -\arcsin(c_1 \Omega) - \arcsin(c_2 \Omega) + \arcsin(c_3 \Omega). \quad (3.49)$$

F_3 besitzt entweder genau eine Nullstelle $\Omega_0 = 0$ oder genau 3 Nullstellen $\Omega_0 = 0$ sowie $\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-$, wiederum gegeben durch (3.44). Für jede Nullstelle Ω von F_3 ergibt sich dann für die zugehörige stationäre Lösung $(\theta_1(\Omega), \theta_2(\Omega))$ von (3.1)

$$\begin{aligned} \theta_1(\Omega) &= \pi + \arcsin(c_2 \Omega), \\ \theta_2(\Omega) &= \arcsin(c_3 \Omega), \\ \theta_1(\Omega) - \theta_2(\Omega) &= \pi - \arcsin(c_1 \Omega). \end{aligned}$$

Die Nullstelle $\Omega_0 = 0$ korrespondiert daher zum Antiphazenzustand $(\pi, 0)$. Wie bei F_1 und F_2 folgt $\det A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) > 0$ und $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) < 0$. $\bar{\Omega}_\pm$ als Nullstellen von F_3 existieren genau dann, wenn

$$(b_2 - b_3)^2 < b_1^2 < b_2^2 - b_3^2. \quad (3.50)$$

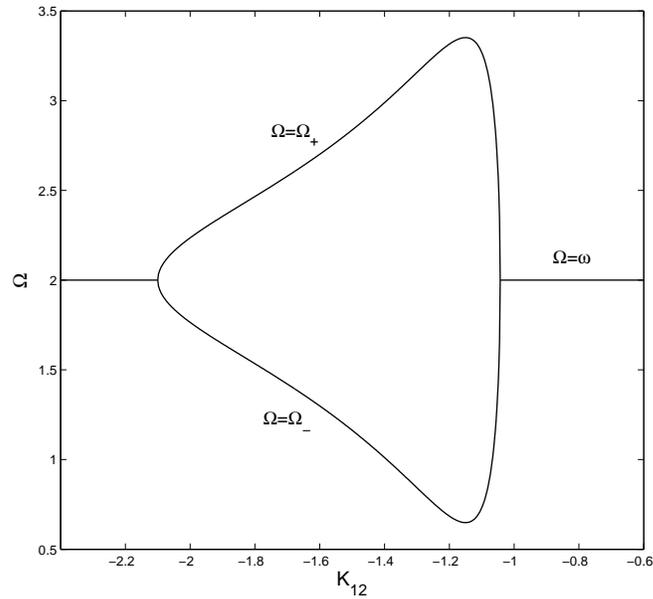
Für $K_{12} \searrow K_{12}^a$ folgt daraufhin $\bar{\Omega}_\pm \rightarrow 0$ und damit auch $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) \rightarrow (\pi, 0)$. We-

gen $K_{21} < K_{31}$ gilt nach Korollar 3.8 $K_{12}^H > K_{12}^a$. Folglich ist für $K_{12} = K_{12}^a$ $\det A_{K_{12}^a}(\pi, 0) = 0$ sowie $\text{spur } A_{K_{12}^a}(\pi, 0) < 0$. Für $K_{12} < K_{12}^a$ ist $(\pi, 0)$ somit stabil. Der Antiphasezustand $(\pi, 0)$ erhält somit seine Stabilität bei $K_{12} = K_{12}^a$ ebenfalls über eine *superkritische Pitchfork-Bifurkation* (vgl. Abb. 3.4).

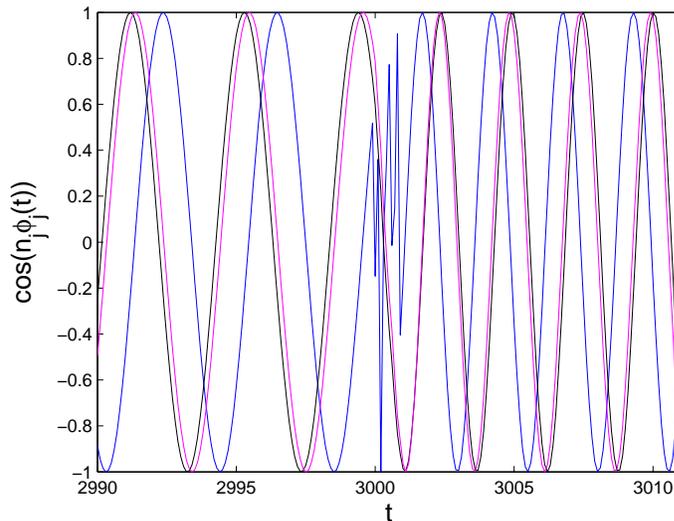
□

Satz 3.9 zeigt, dass die Voraussetzung $K_{21} < K_{31}$ und die Wahl des inhibitorischen Parameters $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ zum Auftreten von 3 entscheidenden Phänomenen führt:

- **Bistabilität:** Für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ besitzt das System (3.4) 2 unterschiedliche stabile stationäre Lösungen. Dies stellt einen ersten wichtigen Unterschied zu Systemen mit rein exzitatorischer Kopplung dar. Bei rein exzitatorischen Konfigurationen war ein stabiler stationärer Zustand stets eindeutig bestimmt (vgl. Abschnitte 1.3.4 und 2.1). Die Existenz zweier unterschiedlicher Synchronisationszustände spielt insbesondere eine Rolle, wenn die Evolutionsgleichung des Thalamus (entspricht 1. Phasenoszillator) in (3.4) um einen *Stimulus-Term* ergänzt wird. Befindet sich das System in einem der beiden möglichen Synchronisationszustände, so kann ein kurzzeitiger, hinreichend starker Stimulus bewirken, dass die gewichteten Phasendifferenzen $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ aus dem Anziehungsgebiet des Attraktors “herausgeworfen“ werden, statt dessen sich aber nun im Anziehungsgebiet des anderen Attraktors befinden. Auf diese Weise kann durch die externe Stimulierung ein *Wechsel zwischen verschiedenen Synchronisationszuständen* erfolgen.
- **Stabile Übergangszustände von Inphase zu Antiphase:** Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ stellen stabile *Übergangszustände* von Inphase zu Antiphase dar. Ein Übergangszustand zwischen Inphase und Antiphase ist nun dahingehend zu interpretieren, dass hier ein *Gleichgewicht zwischen Inhibition und Exzitation* vorliegt.
- **Frequenzsplitting:** Sowohl bei der Inphasensynchronisation für $K_{12} > K_{12}^i$ als auch bei der Antiphasensynchronisation für $K_{12} < K_{12}^a$ ist die zugehörige *Synchronisationsfrequenz* Ω gegeben durch $\Omega = \omega^* = n_j \omega_j$, $j = 1, 2, 3$. Die zu den Zweigen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ gehörigen Frequenzen sind hingegen gegeben durch (3.23). An den Verzweigungspunkten $K_{12} = K_{12}^i$ und $K_{12} = K_{12}^a$ findet somit jeweils ein *Frequenzsplitting* statt (Abb. 3.5a). Das Auftreten von Synchronisationsfrequenzen $\Omega \neq \omega^*$ stellt auch einen essentiellen Unterschied zu Systemen mit rein exzitatorischer Kopplung dar (vgl. 1.3.4 und 2.1). Eine wie oben beschriebene externe Stimulierung des Systems kann daher nicht nur eine Änderung der gewichteten Phasendifferenzen, sondern auch einen *Wechsel der Synchronisationsfrequenz* bewirken.



(a) Darstellung der Synchronisationsfrequenz Ω . Für $K_{12} \notin (K_{12}^a, K_{12}^i)$ ist $\Omega = \omega^* = 2$. Für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ existieren zu den Synchronisationszuständen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ zwei unterschiedliche Frequenzen Ω_\pm .



(b) $\omega^* = 2$. Darstellung von $\cos(n_1 \phi_1(t))$ (blau), $\cos(n_2 \phi_2(t))$ (schwarz) und $\cos(n_3 \phi_3(t))$ (magenta). Eine Stimulation der Stärke $I = 50$ des 1. Phasenzillators in $[3000, 3001)$ führt zu einem Wechsel der Synchronisationsfrequenz: Langsame Oszillationen mit $\Omega = \Omega_- \approx 1.54$ vor der Stimulation. Nach Beendigung des Stimulus tritt unmittelbar eine erneute Phasensynchronisation auf, jedoch mit höherer Frequenz $\Omega = \Omega_+ \approx 2.46$. (Für Details zur numerischen Simulation siehe C.1).

Abbildung 3.5.: $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.4$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.6$, $K_{32} = 0.5$, $\omega^* = 2$.

3.3. Konfiguration $K_{21} > K_{31}$

Bei der als nächstes betrachteten Konfiguration nehmen wir nun an, dass der Parameter K_{12} gegenüber dem Fall im vorangegangenen Abschnitt 3.2 an Gewicht zulegt:

$$K_{21} > K_{31}. \quad (3.51)$$

Mit den in 3.6 eingeführten Bezeichnungen gilt dann nach Korollar 3.7:

$$K_{12}^i < K_{12}^a.$$

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ kann somit auch bereits dann Stabilität erhalten, wenn auch $(0, 0)$ noch stabil ist. Im Unterschied zu dem in 3.2 betrachteten Bifurkationsszenario können im Falle $K_{21} > K_{31}$ eine Vielzahl unterschiedlicher Verzweigungstypen auftreten. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang die Relation der Parameterwerte K_{12}^H und K_{12}^a zueinander. Das Größenverhältnis dieser beiden Werte zueinander wird durch die Bedingung (3.37) in Korollar 3.8 verifiziert. Gilt in diesem Zusammenhang $K_{12}^H < K_{12}^a$, so könnte bei K_{12}^H möglicherweise eine *Hopf-Verzweigung* stattfinden. Andernfalls erlangt $(\pi, 0)$ seine Stabilität über ein *super- oder subkritische Pitchfork-Verzweigung*.

Ein weiteres Augenmerk gilt auch den folgenden Parameterwerten:

3.10 Notation

$$K_{12}^{(0,\pi)} := \frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32} + K_{21}(K_{13} + K_{31} - K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}} \quad (3.52)$$

$$K_{12}^{(\pi,\pi)} := \frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32} - K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{32} + K_{31}} \quad (3.53)$$

(Gemäß der Darstellungen (3.10) und (3.11) gilt gerade $\det A_{K_{12}^{(0,\pi)}}(0, \pi) = 0$ sowie $\det A_{K_{12}^{(\pi,\pi)}}(\pi, \pi) = 0$.)

In Lemma 3.5 wurde zwar gezeigt, dass die Fixpunkte $(0, \pi)$ und (π, π) für kein K_{12} Stabilität erhalten können, dennoch können auch diese stationären Lösungen Verzweigungen unterlaufen. Werden bei $K_{12}^{(0,\pi)}$ oder bei $K_{12}^{(\pi,\pi)}$ etwa im Rahmen einer *inversen Pitchfork-Bifurkation* neue Zweige instabiler stationärer Lösungen generiert, so könnte bei diesen später eine weitere Verzweigung stattfinden, welche zur Stabilität dieser Zweige führen könnte. Aus diesem Grund sollten im Folgenden auch $K_{12}^{(0,\pi)}$ und $K_{12}^{(\pi,\pi)}$ als Verzweigungspunkte in Betracht gezogen werden.

Bezüglich der Größenrelation der Werte K_{12}^i , K_{12}^a , $K_{12}^{(0,\pi)}$ und $K_{12}^{(\pi,\pi)}$ gilt die folgende Beziehung:

3.11 Lemma

Es sei $K_{31} < K_{21}$ und ansonsten die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5. Dann gilt

im Falle

$$K_{21} > K_{23} + K_{32} \quad (3.54)$$

die Beziehung

$$K_{12}^i < K_{12}^{(\pi,\pi)} < K_{12}^a < K_{12}^{(0,\pi)}. \quad (3.55)$$

Ist hingegen

$$K_{21} < K_{23} + K_{32}, \quad (3.56)$$

so folgt

$$K_{12}^i < K_{12}^a < K_{12}^{(\pi,\pi)} < K_{12}^{(0,\pi)}. \quad (3.57)$$

Gilt $K_{21} \neq K_{23} + K_{32}$, so finden bei allen 4 Parameterwerten jeweils Pitchfork-Verzweigungen statt. Im Falle (3.54) existieren für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ und für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)})$ jeweils Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$, welche über die jeweiligen Parameterintervalle die stationären Punkte $(0, 0)$ mit (π, π) bzw. $(\pi, 0)$ mit $(0, \pi)$ verbinden. Mit Ω_\pm wie in (3.23) sind $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ als Verbindung von $(0, 0)$ und (π, π) dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_2^\pm &= \begin{cases} \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0 \\ \pi - \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ als Verbindung von $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$ besitzen die Darstellung

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_2^\pm &= \begin{cases} \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 < 0 \\ \pi - \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Gilt hingegen (3.56), so existieren die stationären Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^i)$ und $K_{12} \in (K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^{(0,\pi)})$. In diesem Fall wird $(0, 0)$ mit $(\pi, 0)$ bzw. (π, π) mit $(0, \pi)$ über (K_{12}^i, K_{12}^a) bzw. $(K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^{(0,\pi)})$ durch die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ verbunden. Für die Verbindungszweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ zwischen $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Für $K_{12} \in (K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^{(0,\pi)})$ sind $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ als Verbindung von (π, π) zu $(0, \pi)$ gegeben

durch

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Im Grenzfall

$$K_{21} = K_{23} + K_{32} \quad (3.62)$$

gilt

$$K_{12}^i < K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)} < K_{12}^{(0,\pi)}. \quad (3.63)$$

Bemerkung zu Lemma 3.11:

Auch im Grenzfall $K_{21} = K_{23} + K_{32}$ existieren die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(0,\pi)})$. Diese Situation werden wir jedoch im Abschnitt 3.7 gesondert betrachten.

Beweis. Wie es bereits zu Beginn dieses Abschnitts argumentiert wurde, gilt in jedem Fall $K_{12}^i < K_{12}^a$. Durch direkten Vergleich der Darstellungen von $K_{12}^i, K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)}$ und $K_{12}^{(\pi,\pi)}$ gemäß (3.33), (3.34), (3.52) und (3.53) folgt

$$K_{12}^i < \min(K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^a) \leq \max(K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^a) < K_{12}^{(0,\pi)}.$$

Ferner gilt $K_{12}^{(\pi,\pi)} < K_{12}^a$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &2(K_{23} + K_{32})(K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32}) \\ &< K_{21}((K_{13} + K_{31} - K_{32})(K_{23} + K_{32} + K_{31}) \\ &\quad + (K_{13} + K_{31} + K_{32})(K_{23} + K_{32} - K_{31})). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Durch weitere elementare Äquivalenzumformungen erhalten wir (3.56) aus (3.64). Dementsprechend ist (3.54) äquivalent zu $K_{12}^a < K_{12}^{(\pi,\pi)}$ sowie (3.62) äquivalent zu $K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)}$, so dass wir in diesem Fall auch (3.55) bzw. (3.63) schlussfolgern können.

Für die Existenz der Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ betrachten wir zunächst den Fall (3.54). Für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ gilt dann

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}}(0, 0) &= b_1 + b_2 + b_3 > 0, \\ \det A_{K_{12}}(\pi, \pi) &= b_1 - b_2 - b_3 > 0, \\ \det A_{K_{12}}(\pi, 0) &= -b_1 - b_2 + b_3 > 0, \\ \det A_{K_{12}}(0, \pi) &= -b_1 + b_2 - b_3 < 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

und somit auch

$$(b_2 - b_3)^2 < b_1^2 < (b_2 + b_3)^2. \quad (3.66)$$

Insbesondere folgt aus den Ungleichungen in (3.65) auch

$$b_3 > 0 \quad \forall K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)}). \quad (3.67)$$

(3.66) ist wiederum äquivalent zu (3.21), somit existieren die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)})$. Die Herleitung der Darstellung von $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)})$ erfolgt wie im Beweis von Satz 3.9. Wir zeigen hier exemplarisch die Herleitung von (3.58), die übrigen Darstellungen (3.59)-(3.61) ergeben sich analog.

Die in (3.43) definierte Funktion $F_1(\Omega) = \arcsin(c_1\Omega) + \arcsin(c_2\Omega) + \arcsin(c_3\Omega)$ besitzt hier genau 3 Nullstellen $\Omega_0 = 0, \bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-$ (mit $\bar{\Omega}_\pm = \Omega_\pm - \omega^*$ und Ω_\pm wie in (3.23)), wenn gilt

$$b_1^1 < (b_2 + b_3)^2 \quad \wedge \quad b_1^2 < b_2^2 + b_3^2. \quad (3.68)$$

Die zugehörigen stationären Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= -\arcsin(c_2\bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3\bar{\Omega}_\pm). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Für $K_{12} = K_{12}^i$ gilt $b_1 = -b_2 - b_3$, somit ist die linke Ungleichung in (3.68) gerade nicht mehr erfüllt. Die Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ fallen dann gerade mit $\Omega_0 = 0$ zusammen: $\bar{\Omega}_\pm = 0$. Folglich gilt

$$\lim_{K_{12} \searrow K_{12}^i} \theta_1^\pm = 0, \quad \lim_{K_{12} \searrow K_{12}^i} \theta_2^\pm = 0.$$

Die stationären Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ zweigen also bei $K_{12} = K_{12}^i$ von $(0, 0)$ ab. Es findet somit bei diesem Parameterwert eine *Pitchfork-Verzweigung* statt. Für alle $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)})$, für die (3.68) erfüllt ist, sind die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ dann durch (3.69) gegeben.

Des Weiteren gilt für $K_{12} = K_{12}^i$ wegen $b_1 = -b_2 - b_3$ auch $b_2 + b_3 < 0$ und aufgrund von (3.67) auch $b_2 < 0 < b_3$. Hiermit erhalten wir für $K_{12} = K_{12}^i$

$$\begin{aligned} b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 &= 2b_3^2 + 2b_2b_3 \\ &= 2b_3(b_2 + b_3) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

sowie

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 &= 2b_2^2 + 2b_2b_3 \\ &= 2b_2(b_2 + b_3) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Für $K_{12} = K_{12}^{(\pi, \pi)}$ gilt $b_1 = b_2 + b_3$ sowie weiterhin $\det A_{K_{12}^{(\pi, \pi)}}(\pi, 0) = -b_1 - b_2 + b_3 > 0$

und $\det A_{K_{12}^{(\pi,\pi)}}(0, \pi) = -b_1 + b_2 - b_3 < 0$. Wir erhalten damit

$$b_1^2 = b_2^2 + b_3^2 + 2b_2b_3 < b_2^2 + b_3^2 - 2b_2b_3. \quad (3.71)$$

Folglich gilt $b_2b_3 < 0$, $b_2 + b_3 > 0$ und $b_2 < 0 < b_3$. Insgesamt ergibt sich für $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$

$$\begin{aligned} b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 &= 2b_3^2 + 2b_2b_3 \\ &= 2b_3(b_2 + b_3) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Da für K_{12} nahe K_{12}^i gerade die gegenteilige Beziehung (3.70) gültig ist, muss folglich ein $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ existieren, so dass gerade

$$b_1^2 = b_2^2 - b_3^2$$

gilt. Für die Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ von F_1 und die zugehörigen stationären Lösungen gilt in diesem Fall

$$\bar{\Omega}_\pm = \pm \frac{1}{c_2} \quad \Rightarrow \quad \theta_1^\pm = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Stattdessen sind $\bar{\Omega}_\pm$ nun für $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 > 0$ zunächst als Nullstellen der Funktion $F_2(\Omega) = \pi + \arcsin(c_1\Omega) - \arcsin(c_2\Omega) + \arcsin(c_3\Omega)$ repräsentiert. $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_1^\pm &= \pi + \arcsin(c_2\bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_2^\pm &= \arcsin(c_3\bar{\Omega}_\pm). \end{aligned}$$

$\bar{\Omega}_\pm$ als Nullstellen von F_2 existieren genau dann, wenn sowohl die Beziehung (3.66) als auch

$$b_1^2 > |b_2^2 - b_3^2| \quad (3.72)$$

gültig sind. Wie eben folgt für $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$:

$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 2b_2(b_2 + b_3) < 0.$$

(3.72) ist daher für $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ nicht mehr erfüllt. Somit existiert ein $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ so dass

$$b_1^2 = b_3^2 - b_2^2$$

erfüllt ist. In diesem Fall gilt

$$\bar{\Omega}_\pm = \pm \frac{1}{c_3} \quad \Rightarrow \quad \theta_2^\pm = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ mit $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0$ sind die stationären Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ dann durch entsprechende Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ der Funktion $F_3(\Omega) := \arcsin(c_1\Omega) -$

$\arcsin(c_2\Omega) - \arcsin(c_3\Omega)$ charakterisiert. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\theta_1^\pm &= \pi + \arcsin(c_2\bar{\Omega}_\pm), \\ \theta_2^\pm &= \pi - \arcsin(c_3\bar{\Omega}_\pm).\end{aligned}$$

$\bar{\Omega}_\pm$ als Nullstellen von F_3 existieren solange wie

$$b_3^2 - b_2^2 < b_1^2 \quad \text{und} \quad b_2 + b_3 < b_1$$

gültig ist. Für $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ ist gerade $b_1 = b_2 + b_3$, und es gilt $\bar{\Omega}_\pm \rightarrow 0$ für $K_{12} \nearrow K_{12}^{(\pi,\pi)}$. Folglich erhalten wir die Limesbeziehung

$$\lim_{K_{12} \nearrow K_{12}^{(\pi,\pi)}} \theta_1^\pm = \pi, \quad \lim_{K_{12} \nearrow K_{12}^{(\pi,\pi)}} \theta_2^\pm = \pi.$$

Somit findet auch bei $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ eine *Pitchfork-Bifurkation* statt. Hiermit haben wir gezeigt, dass die stationären Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi,\pi)})$ existieren und durch (3.58) gegeben sind, wobei sie bei $K_{12} = K_{12}^i$ vom Fixpunkt $(0, 0)$ abzweigen und bei $K_{12} = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ durch Zusammenfallen mit dem Fixpunkt (π, π) wieder verschwinden.

Für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)})$ gilt analog

$$\begin{aligned}\det A_{K_{12}}(0, 0) &= b_1 + b_2 + b_3 > 0, \\ \det A_{K_{12}}(\pi, \pi) &= b_1 - b_2 - b_3 < 0, \\ \det A_{K_{12}}(\pi, 0) &= -b_1 - b_2 + b_3 < 0, \\ \det A_{K_{12}}(0, \pi) &= -b_1 + b_2 - b_3 < 0.\end{aligned}$$

Auch aus diesen Ungleichungen folgt (3.66) und damit die Existenz von $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ in $(K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)})$. Die Herleitung der Darstellung (3.59) erfolgt analog zur obigen Argumentation über die Charakterisierung der stationären Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ durch Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ entsprechender Funktionen F_j .

Auch im Fall von (3.56) lassen sich die Existenz und die Darstellungen (3.60) und (3.61) analog beweisen.

□

Bei der Analyse der Dynamik des Systems (3.4) für $K_{21} > K_{31}$ sind daher hinsichtlich $K_{21} \leq K_{23} + K_{32}$ und $K_{12}^H \leq K_{12}^a$ eine Reihe von Fallunterscheidungen durchzuführen. Alle hierbei zu unterscheidenden Kopplungskonfigurationen werden wir in den folgenden Abschnitten untersuchen.

3.4. Subkritische Pitchfork-Verzweigungen

Bei der hier betrachteten Kopplungskonfiguration setzen wir voraus, dass mit $K_{21} > K_{31}$ der Parameter K_{21} zwar an relativer Stärke gewonnen hat, die exzitatorischen Kopplungen K_{23} und K_{32} aber immer noch das System dominieren. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies

$$K_{31} < K_{21} < K_{23} + K_{32}. \quad (3.73)$$

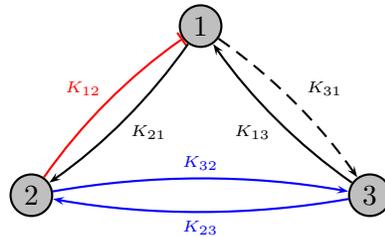


Abbildung 3.6.: Inhibition (rot), schwache (schwarze gestrichelte Linie), mittlere (schwarze durchgezogene Linie) und starke exzitatorische Kopplungen (blau)

Des Weiteren setzen wir in diesem Abschnitt

$$(K_{31} - K_{23} - K_{32})^2 > (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{31}) \quad (3.74)$$

voraus. Nach Korollar (3.8) gilt somit $K_{12}^a < K_{12}^H$. Ferner folgt nach Lemma 3.11 aufgrund von (3.73) $K_{12}^i < K_{12}^a < K_{12}^{(\pi, \pi)} < K_{12}^{(0, \pi)}$. Bezüglich des Übergangs von *Inphasen-* zu *Antiphasen-Synchronisation* erhalten wir nun die folgende Aussage:

3.12 Satz (Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation)

*Es gelte (3.73), (3.74) sowie die Voraussetzungen aus Lemma 3.5. Dann finden bei K_{12}^i und K_{12}^a jeweils subkritische Pitchfork-Verzweigungen statt, so dass der Fixpunkt $(\pi, 0)$ für $K_{12} < K_{12}^a$ stabil sowie $(0, 0)$ für $K_{12} < K_{12}^i$ instabil ist. Dabei werden Zweige von Sattelpunkten $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ generiert, welche gerade für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ existieren und durch (3.60) in Lemma 3.11 gegeben sind. In (K_{12}^i, K_{12}^a) besteht dann eine **Bistabilität** von Inphasen- und Antiphasensynchronisation.*

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung (3.73) ergibt sich nach Lemma 3.11 die Existenz der Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ sowie ihre Darstellung durch (3.60) als ‘Verbindung’ von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$.

Wegen (3.74) gilt $K_{12}^a < K_{12}^H$ (Korollar 3.8) und somit für $K_{12} = K_{12}^a$ dann

$$\det A_{K_{12}^a}(\pi, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \text{spur } A_{K_{12}^a}(\pi, 0) < 0.$$

Somit ist $(\pi, 0)$ stabil für $K_{12} < K_{12}^a$. Ebenso folgt nach Lemma 3.5 die Instabilität

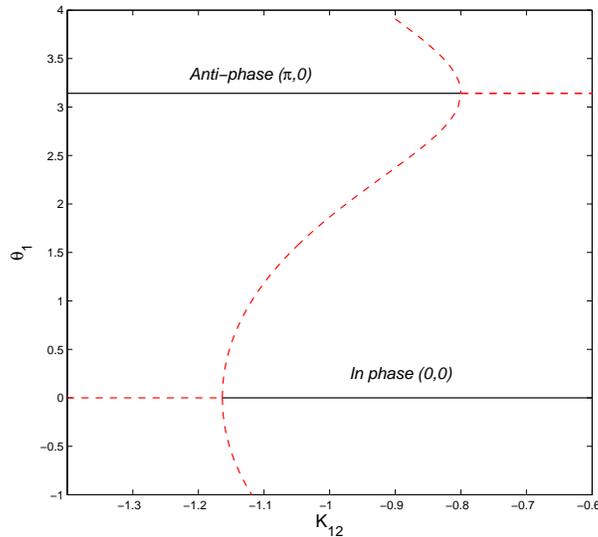


Abbildung 3.7.: $K_{31} = 0.5, K_{21} = 0.8, K_{23} = 1.5, K_{32} = 0.2$. Subkritische Pitchfork-Bifurkationen bei $K_{12}^i \approx -1.16$ und $K_{12}^a = -0.8$

von $(0, 0)$ für $K_{12} < K_{12}^i$.

Für $K_{12} > K_{12}^i$ mit $K_{12} - K_{12}^i \ll 1$ sind wie in den Beweisen von Satz 3.9 und Lemma 3.11 die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ über Nullstellen $\bar{\Omega}_\pm$ der Inphasenfunktion $F_1(\Omega) = \arcsin(c_1\Omega) + \arcsin(c_2\Omega) + \arcsin(c_3\Omega)$ charakterisiert. Ferner gilt wie im Beweis von Satz 3.9 für jede Nullstelle $\bar{\Omega}$ mit zugehöriger stationärer Lösung $(\theta_1(\bar{\Omega}), \theta_2(\bar{\Omega}))$ von F_1 :

$$\text{sign} \left(\det A_{K_{12}}(\theta_1(\bar{\Omega}), \theta_2(\bar{\Omega})) \right) = \text{sign} \left(F_1'(\bar{\Omega}) \right). \quad (3.75)$$

Für $K_{12} > K_{12}^i$ ist der Fixpunkt $(0, 0)$ stabil, folglich gilt in diesem Fall $F_1'(0) > 0$ und somit auch $F_1'(\bar{\Omega}_\pm) < 0$. Des Weiteren werden die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ wie im Beweis von Satz 3.9 für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ noch durch Nullstellen der Funktionen F_2 und F_3 , definiert in (3.47) und (3.49), repräsentiert. Auch für $j = 2, 3$ gilt $F_j'(\bar{\Omega}_\pm) < 0$ und die entsprechende Äquivalenz (3.75). Bei den Zweigen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ handelt es sich daher um *Sattelpunkte*, welche bei $K_{12} = K_{12}^i$ und $K_{12} = K_{12}^a$ jeweils über eine *subkritische Pitchfork-Verzweigung* generiert werden (siehe Abb. 3.7). Folglich liegt für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ eine *Bistabilität* des Inphasenzustands $(0, 0)$ und des Antiphasezustands $(\pi, 0)$ vor.

□

Ähnlich wie bei der im Abschnitt 3.2 untersuchten Kopplungskonfiguration $K_{21} < K_{31}$ können wir hier das Intervall (K_{12}^i, K_{12}^a) der Bistabilität von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ dahingehend interpretieren, dass eine Inhibition mit einer Stärke aus diesem Bereich, die Exzitation gewissermaßen “ausbalanciert“, so dass ein Gleichgewicht zwischen

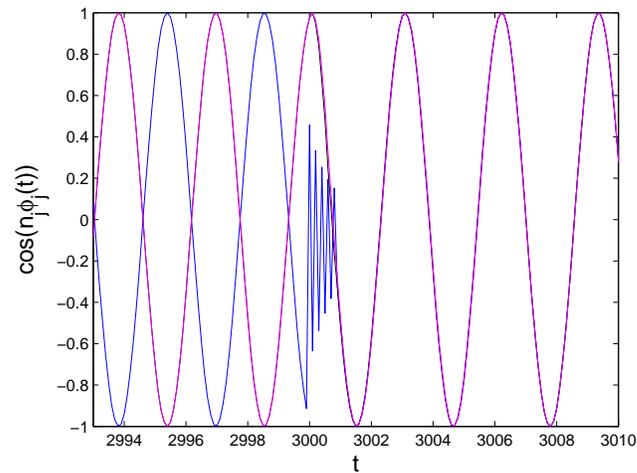


Abbildung 3.8.: $K_{12} = -1, K_{13} = 0.5, K_{21} = 0.8, K_{23} = 1.5, K_{31} = 0.5, K_{32} = 0.2, \omega^* = 2$. Darstellung von $\cos(n_1\phi_1(t))$ (blau), $\cos(n_2\phi_2(t))$ (schwarz, wird von der $\cos(n_3\phi_3(t))$ -Kurve überdeckt) und $\cos(n_3\phi_3(t))$ (magenta). Eine Stimulation der Stärke $I = 20$ des 1. Phasenzillators in $[3000, 3001]$ führt zu einem Wechsel von Antiphase- zu Inphasensynchronisation, die Synchronisationsfrequenz $\Omega = \omega^*$ bleibt jedoch bestehen. (Für Details zur numerischen Simulation siehe C.1)

inhibitorischen und exzitatorischen Einflüssen vorliegt. Dieses Gleichgewicht äußert sich hier gerade durch die Koexistenz von Inphasen- und Antiphase-Synchronisation. Zwischen der hier vorliegenden Bistabilität von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ und der im Abschnitt 3.2 aufgetretenen Bistabilität der Übergangszustände $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ besteht jedoch ein entscheidender Unterschied. In 3.2 trat zusätzlich zur Bistabilität ein *Frequenzsplitting* auf (vgl. Abb. 3.5a), ein Wechsel von der einen Synchronisationslösung zur anderen, hervorgerufen durch eine Störung des Systems, ging daher immer auch mit einer Frequenzänderung einher. Da in diesem Fall sowohl zur Inphasen- als auch zur Antiphase-Synchronisation die Synchronisationsfrequenz $\Omega = \omega^*$ korrespondiert, kann bei der hiesigen Kopplungskonfiguration hingegen im Zuge eines Wechsels von Inphasen- zu Antiphase-Synchronisation und umgekehrt *keine Frequenzänderung* (vgl. Abb. 3.8) eintreten.

3.5. “Sprung“ von Inphasen- zu Antiphase-Synchronisation: Grenzfall $K_{21} = K_{31}$

Nach den in den Abschnitten 3.2-3.4 analysierten Konfigurationen $K_{21} < K_{31}$ und $K_{21} > K_{31}$ widmen wir uns nun auch dem Grenzfall

$$K_{21} = K_{31}. \quad (3.76)$$

Zusammen mit der Voraussetzung (3.16) ergibt sich weiter

$$K_{21} < K_{23} + K_{32}. \quad (3.77)$$

Nach Korollar 3.7 folgt nun mit der Voraussetzung (3.76)

$$K_{12}^a = K_{12}^i.$$

Ferner gilt wegen (3.77) nach Lemma 3.11 $K_{12}^a = K_{12}^i < K_{12}^{(\pi,\pi)} < K_{12}^{(0,\pi)}$, des Weiteren existieren für $K_{12} \in (K_{12}^{(\pi,\pi)}, K_{12}^{(0,\pi)})$ Verbindungsäste $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$, welche wiederum gemäß (3.61) gegeben sind.

Beim ‘‘doppelten‘‘ Bifurkationspunkt $K_{12}^a = K_{12}^i$ ergibt sich nun das folgende Szenario:

3.13 Satz (Degenerierte Pitchfork-Bifurkation bei $K_{12}^i = K_{12}^a$)

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5 und außerdem (3.76) gültig. Dann gilt $K_{12}^i = K_{12}^a$, der Inphasenzustand $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ und der Antiphasezustand $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$ wechseln bei diesem Parameterwert simultan ihre Stabilität. Des Weiteren existieren bei diesem Wert unendlich viele stationäre Punkte der Form $(\vartheta, 0)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, mit $\det A_{K_{12}}(\vartheta, 0) = 0$.

Beweis. Die Herleitung $K_{12}^a = K_{12}^i$ wurde bereits in der Motivation zu Beginn dieses Abschnittes durchgeführt. Ferner ist durch Lemma 3.5 sichergestellt, dass die Inphasenlösung $(0, 0)$ genau für $K_{12} > K_{12}^i = K_{12}^a$ stabil ist, während die Antiphase $(\pi, 0)$ genau für $K_{12} < K_{12}^a = K_{12}^i$ Stabilität besitzt. Für die Existenz des Kontinuums $(\vartheta, 0)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, von stationären Punkten bei diesem Parameterwert stellen wir zunächst fest, dass im Falle $K_{21} = K_{31}$ auch

$$K_{12}^i = K_{12}^a = -K_{13} - K_{31} \quad (3.78)$$

gültig ist. Mit den Identitäten (3.76) und (3.78) erhalten wir ferner für $K_{12} = K_{12}^i = K_{12}^a$

$$b_2 = -b_1 \quad \text{und} \quad b_3 = 0.$$

Für die Evolutionsgleichungen in (3.4) folgt nun bei diesem Parameterwert für $(\theta_1, \theta_2) = (\vartheta, 0)$, mit beliebigem $\vartheta \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -K_{12}^i \sin \theta_1 - (K_{13} + K_{31}) \sin \theta_1 = 0, \\ \dot{\theta}_2 &= K_{21} \sin \theta_1 - K_{31} \sin \theta_1 = 0. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \det A_{K_{12}^i}(\vartheta, 0) &= b_1 \cos \vartheta \cos 0 + \underbrace{b_2}_{=-b_1} \cos \vartheta \cos 0 \\ &\quad + \underbrace{b_3}_{=0} (\cos(\vartheta))^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Da sich bei $K_{21} = K_{31}$ gerade der Wechsel von *superkritischen* zu *subkritischen* Stabilitätsübergängen von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ vollzieht, bezeichnen wir diesen resultierenden sprunghaften Übergang im Weiteren als **degenerierte Pitchfork-Bifurkation**. Eine ähnliche Situation des Zusammentreffens zweier Pitchfork-Verzweigungen wird sich in Abschnitt 3.7 vollziehen.

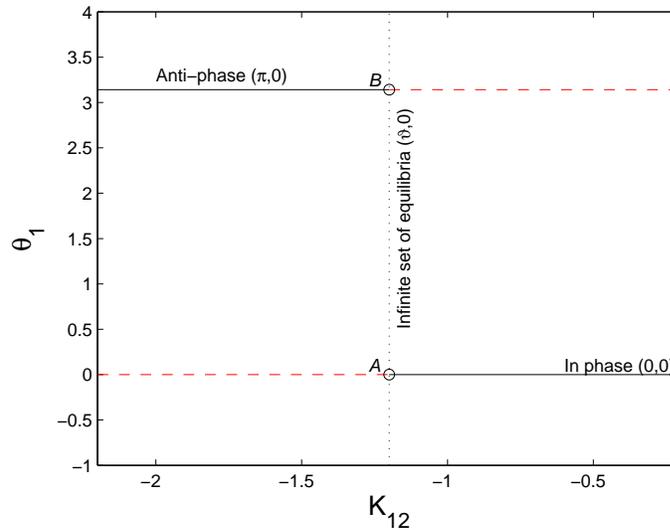


Abbildung 3.9.: $K_{13} = 0.2$, $K_{23} = 1.4$, $K_{21} = K_{31} = 1$, $K_{32} = 1.6$. Es gilt $K_{12}^i = K_{12}^a = -1.2$. Bei diesem Wert wechseln die Fixpunkte $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ simultan ihre Stabilität. Diese “degenerierten Pitchfork-Bifurkationen“ A und B gehen mit der Existenz unendlich vieler Equilibria der Form $(\vartheta, 0)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, einher.

3.6. Tristabilität: Koexistenz von 3 Synchronisationszuständen

Wächst der Parameter K_{21} weiter an, so dass $K_{21} > K_{23} + K_{32}$ gilt, so können weitere interessante Phänomene in der Dynamik des Systems (3.4) beobachtet werden. Eine *Bistabilität*, d.h. das gleichzeitige Auftreten von zwei unterschiedlichen stabilen stationären Lösungen des reduzierten Systems (3.4) als Korrelat der Koexistenz zweier unterschiedlicher Synchronisationszustände im System (3.1), trat bereits in den zuvor behandelten Kopplungskonfigurationen auf und stellte einen wesentlichen qualitativen Unterschied dieser Systeme zu solchen mit rein exzitatorischer Kopplungstopologie dar. Bei dem in diesem Abschnitt betrachteten Szenario wird dieser Vorgang der Bistabilität noch weiter gesteigert: auch eine *Koexistenz von 3 unterschiedlichen Synchronisationszuständen* ist möglich.

In diesem Abschnitt setzen wir zum einen

$$K_{31} < K_{23} + K_{32} < K_{21} \quad (3.79)$$

voraus, nehmen aber wie im vorangegangenen Abschnitt weiter an, dass die Kopplungsstärke K_{21} durch die Voraussetzung

$$(K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 > (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{23}) \quad (3.80)$$

noch nach oben beschränkt ist. Da die letztere Bedingung sicher stellt, dass

$$\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0 \quad \text{für} \quad \det A_{K_{12}}(\pi, 0) = 0$$

gilt, können wir damit schlussfolgern, dass auch hier der Antiphasezustand $(\pi, 0)$ seine Stabilität bei $K_{12} = K_{12}^a$ über eine Pitchfork-Bifurkation erhält (vgl. Lemmata 3.5 und 3.11).

Da $K_{31} < K_{21}$ vorausgesetzt ist, gilt ebenso $K_{12}^i < K_{12}^a$, so dass wie eben für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ eine vorübergehende *Bistabilität von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation* vorliegt. Aufgrund der rechten Ungleichung in (3.79) folgt hier mit Lemma 3.11

$$K_{12}^i < K_{12}^{(\pi, \pi)} < K_{12}^a < K_{12}^{(0, \pi)}$$

sowie die Existenz der symmetriebrechenden Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ in $(K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)})$ und $(K_{12}^{(0, \pi)}, K_{12}^a)$. Bezüglich der Anzahl und Darstellung stabiler stationärer Lösungen ergibt sich in diesem Zusammenhang die folgende Aussage:

3.14 Satz (Tristabilität)

*Es seien (3.79) und (3.80) vorausgesetzt, und ansonsten die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5. Dann findet bei $K_{12} = K_{12}^a$ eine **superkritische Pitchfork-Verzweigung** statt. Die dabei generierten Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ stabiler stationärer Lösungen unterliegen für ein $K_{12}^\pm \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0, \pi)})$ einer **Hopf-Verzweigung**. K_{12}^\pm ist dabei mit $b_2 = b_2(K_{12}^\pm)$ und $b_3 = b_3(K_{12}^\pm)$ implizit gegeben durch*

$$b_1^2(K_{31}b_2 + K_{32}b_3) + b_2^2(K_{21}b_1 + K_{23}b_3) + b_3^2(K_{12}^\pm b_1 + K_{13}b_2) = 0. \quad (3.81)$$

*In (K_{12}^a, K_{12}^\pm) koexistieren somit **3 Synchronisationszustände mit jeweils verschiedenen Synchronisationsfrequenzen**. Für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ liegt hingegen eine **Bistabilität** von der Inphase $(0, 0)$ und der Antiphase $(\pi, 0)$ vor.*

Beweis. Nach Lemma 3.11 existieren die Verbindungsäste $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ für

$$K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0, \pi)})$$

und sind gegeben durch (3.59). Ferner gilt für $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0, \pi)})$, dass $\det A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0$, sowie $\det A_{K_{12}}(0, \pi) < 0$. Folglich erhalten wir für die Verbindungsbranche $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ in diesem Parameterintervall: $\det A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) > 0$.

Für $K_{12} = K_{12}^a$ folgt aufgrund von Voraussetzung (3.80) $\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0$. Somit ergibt sich auch für $K_{12} > K_{12}^a$ mit $K_{12} - K_{12}^a \ll 1$ für die Verbindungsbranche

$(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$: $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) < 0$. Für $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)}$ gilt hingegen $\text{spur } A_{K_{12}}(0, \pi) > 0$. Aus diesem Grund folgt auch für $K_{12} < K_{12}^{(0,\pi)}$ mit $K_{12}^{(0,\pi)} - K_{12} \ll 1$:

$$\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) > 0.$$

Hiermit können wir nun schlussfolgern, dass $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ innerhalb des Intervalls $(K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)})$ das Vorzeichen wechseln muss. Auf diese Weise unterlaufen die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ auch einer qualitativen Änderung. In der Nähe von K_{12}^a sind diese stationären Lösungen stabil, wogegen sie nahe bei $K_{12}^{(0,\pi)}$ instabil geworden sind.

Ferner gilt weiterhin die Beziehung (3.45)

$$\begin{aligned} \text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm) = 0 &\Leftrightarrow \\ b_1^2(K_{31}b_2 + K_{32}b_3) + b_2^2(K_{21}b_1 + K_{23}b_3) + b_3^2(K_{12}b_1 + K_{13}b_2) &= 0. \end{aligned}$$

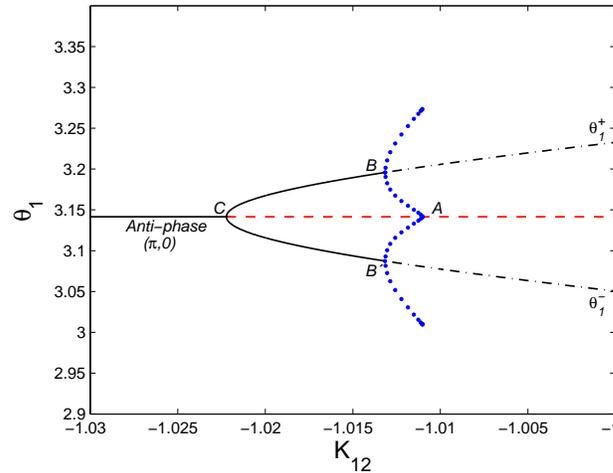
Aufgrund der obigen Argumentation existiert in jedem Fall genau ein K_{12}^\pm mit $K_{12}^\pm \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0,\pi)})$, so dass (3.81) und somit $\text{spur } A_{K_{12}}(\theta_1^\pm(K_{12}^\pm), \theta_2^\pm(K_{12}^\pm)) = 0$ gerade erfüllt sind. Da dann auch $\det A_{K_{12}}(\theta_1^\pm(K_{12}^\pm), \theta_2^\pm(K_{12}^\pm)) > 0$ gültig ist, findet somit bei $K_{12} = K_{12}^\pm$ sowohl in (θ_1^+, θ_2^+) als auch in (θ_1^-, θ_2^-) jeweils eine *Hopf-Bifurkation* statt.

Während für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^a)$ nach Lemma 3.5 eine *Bistabilität* von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ vorliegt, existieren im Intervall (K_{12}^a, K_{12}^\pm) 3 stabile stationäre Lösungen, $(0, 0)$, (θ_1^+, θ_2^+) , (θ_1^-, θ_2^-) von (3.4) und somit 3 unterschiedliche Synchronisationszustände im System (3.1). Darüberhinaus korrespondieren zu den 3 Synchronisationslösungen jeweils eigene *Synchronisationsfrequenzen*: $\Omega_- < \omega^* < \Omega_+$ (mit Ω_\pm wieder gegeben durch (3.23)), wohingegen in (K_{12}^i, K_{12}^a) die Inphase $(0, 0)$ und die Antiphase $(\pi, 0)$ beide die Synchronisationsfrequenz ω^* besitzen.

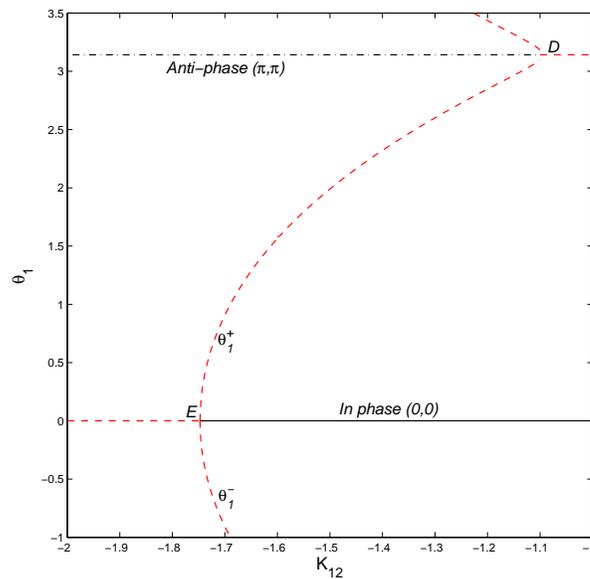
□

Bemerkung zu Satz 3.14:

In allen durchgeführten numerischen Simulationen zu Kopplungskonfigurationen vom beschriebenen Typ tritt die oben nachgewiesene Hopf-Verzweigung als *superkritische Bifurkation* auf. Die dabei generierten Zweige von stabilen periodischen Orbits $(\bar{\theta}_1^\pm, \bar{\theta}_2^\pm)$ existieren dann für $K_{12} \in (K_{12}^\pm, \bar{K}_{12}^\pm)$ wobei $\bar{K}_{12}^\pm < K_{12}^{(0,\pi)}$ gültig ist. Bei $K_{12} = \bar{K}_{12}^\pm$ kommt es schließlich zu einer doppelten *homoklinen* Verzweigung, bei welcher die Grenzzyklen $(\bar{\theta}_1^\pm, \bar{\theta}_2^\pm)$ gleichzeitig als homokline Orbits auf den Sattelpunkt $(\pi, 0)$ treffen (Abb. 3.10). Die in Satz 3.14 benannte *Tristabilität* als Korrelat der Koexistenz von 3 unterschiedlichen Synchronisationszuständen geht somit in diesem Fall noch weiter; auch durch die stabilen Grenzzyklen $(\bar{\theta}_1^\pm, \bar{\theta}_2^\pm)$ werden Synchronisationszustände repräsentiert, so dass sich die Tristabilität in diesem Fall sogar im gesamten Intervall $(K_{12}^a, \bar{K}_{12}^\pm)$ erstreckt. Der Vorgang des *Frequenz-Triplings*, d.h.



(a) Stabilitätswechsel des Antiphazenzustandes $(\pi, 0)$. Bei der doppelten homoklinen Bifurkation A werden 2 Zweige stabiler periodischer Orbits generiert, welche über die superkritischen Hopf-Verzweigungen B, B' wieder verschwinden. Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ erlangen auf diese Weise Stabilität und transferieren diese zu $(\pi, 0)$ über eine superkritische Pitchfork-Bifurkation bei $K_{12}^c \approx -1.02222$. (Berechnung der periodischen Zweige mit *XPPAUT*)



(b) Über eine inverse Pitchfork-Verzweigung D in (π, π) werden die Zweige von Sattelpunkten $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ generiert, welche für $K_{12}^i \approx -1.747$ über eine subkritische Pitchfork-Verzweigung E in $(0, 0)$ münden.

Abbildung 3.10.: $K_{13} = 0.3, K_{21} = 1.5, K_{23} = 0.4, K_{31} = 0.5, K_{32} = 1$. Darstellung der stabilen stationären Lösungen (schwarze durchgezogene Linie), stabilen periodischen Lösungen (blaue gepunktete Linie), Sattelpunkte (rote gestrichelte Linie) und instabilen Knoten (schwarze gestrichelte Linie).

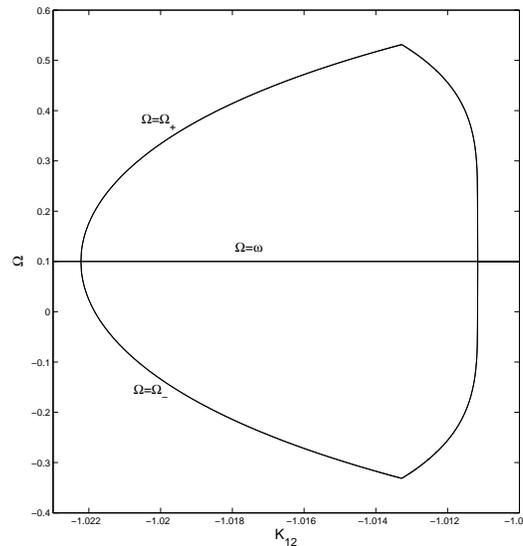


Abbildung 3.11.: $K_{13} = 0.3, K_{21} = 1.5, K_{23} = 0.4, K_{31} = 0.5, K_{32} = 1, \omega^* = 0.1$. Frequenz-Tripling bei $K_{12}^a \approx -1.02222$ (superkritische Pitchfork-Verzweigung) und $\bar{K}_{12}^\pm \approx -1.01103$.

der Koexistenz von 3 unterschiedlichen Synchronisationsfrequenzen, lässt sich dabei gut durch die Darstellung der zugehörigen Synchronisationsfrequenzen in diesem Intervall veranschaulichen (Abb. 3.11).

Im Hopf-Verzweigungspunkt K_{12}^\pm gilt $\Omega_- < \omega^* < \Omega_+$. Die Synchronisationsfrequenzen Ω_\pm , welche zu den stabilen periodischen Orbits $(\bar{\theta}_1^\pm, \bar{\theta}_2^\pm)$ korrespondieren, lassen sich dann numerisch gemäß (1.18) bzw. (1.23) berechnen. Im homoklinen Verzweigungspunkt \bar{K}_{12}^\pm muss folglich gelten: $\Omega_\pm = \omega^*$, da es sich ja jeweils um homokline Orbits des Fixpunktes $(\pi, 0)$ handelt. Auf diese Weise erfolgt durch die stabilen periodischen Zweige $(\bar{\theta}_1^\pm, \bar{\theta}_2^\pm)$ eine *stetige* Rückführung der “symmetriebrechenden“ Synchronisationsfrequenzen Ω_\pm zu ω^* .

Die Plausibilität dieses stetigen Verlaufs gibt Anlass zu der Vermutung, dass die Hopf-Verzweigung in K_{12}^\pm immer superkritisch sei. Mathematisch konnte diese These allerdings nicht verifiziert werden, da es angesichts der Fülle von Parametern nicht möglich war, allgemein die Hopf-Verzweigung etwa durch Berechnung des 1. Lyapunov-Koeffizienten qualitativ zu klassifizieren.

3.7. Existenz unendlich vieler Equilibria: Grenzfall

$$K_{21} = K_{23} + K_{32}$$

Auf den Grenzfall

$$K_{21} = K_{23} + K_{32} \tag{3.82}$$

wurde bereits in Lemma 3.11 hingewiesen. Obwohl dieser Fall sich im Hinblick auf die Existenz und Anzahl von Synchronisationslösungen qualitativ nicht von bereits vorgestellten Szenarien unterscheidet, soll er an dieser Stelle ausführlich vorgestellt werden, da das zugehörige Bifurkationsszenario einige Besonderheiten aufweist.

Weiterhin sei wie im vorherigen Abschnitt (3.80) vorausgesetzt. Diese Bedingung garantiert, dass bei $K_{12} = K_{12}^a$ (weiterhin gemäß (3.34) gegeben) der Fixpunkt $(\pi, 0)$ über eine *Pitchfork-Bifurkation* stabil wird. Hinsichtlich der Qualität dieser Pitchfork-Verzweigungen hatten sich je nach weiteren Voraussetzungen sowohl *sub-* als auch *superkritische* Bifurkationen ergeben (vgl. Satz 3.12 im Abschnitt 3.4 und Satz 3.14 im Abschnitt 3.6). Anhand des Vergleichs $K_{21} \leq K_{23} + K_{32}$ konnte dabei (unter der Voraussetzung (3.51) $K_{21} > K_{31}$) eine Aussage über die Qualität *sub-/superkritisch* getroffen werden. Im kritischen Fall $K_{21} = K_{23} + K_{32}$ ergibt sich nun das folgende Szenario:

3.15 Satz (Existenz unendlich vieler Fixpunkte)

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5, außerdem gelte (3.51), (3.80) sowie (3.82). Dann finden bei $K_{12}^{(0,\pi)}$ und K_{12}^i (gegeben durch (3.52) und (3.33) jeweils Pitchfork-Verzweigungen statt, bei welchen Verbindungszweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ generiert werden, welche im Intervall $(K_{12}^i, K_{12}^{(0,\pi)})$ existieren und gegeben sind durch

$$\theta_1^\pm = \begin{cases} -\arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 < 0 \\ \pi + \arcsin(c_2(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.83)$$

$$\theta_2^\pm = \begin{cases} \pi - \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{falls } b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0 \wedge \\ & K_{12} > -K_{32} \\ \arcsin(c_3(\Omega_\pm - \omega^*)) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.84)$$

Für $K_{12} \rightarrow K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Omega_\pm &\rightarrow \omega^* \pm \frac{1}{c_1} \sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}}, \\ \theta_1^\pm &\rightarrow \pi, \\ \theta_2^\pm &\rightarrow \pm \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Für $K_{12} = K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ existieren dann unendlich viele stationäre Punkte der Form

$$(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi). \quad (3.86)$$

Ferner gilt $\det A_{K_{12}^a}(\pi, \vartheta) = 0$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Beweis. Nach Lemma 3.11 gilt unter der Voraussetzung (3.82)

$$K_{12}^i < K_{12}^a = K_{12}^{(\pi, \pi)} < K_{12}^{(0, \pi)}.$$

Verbindungszweige stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ existieren ferner nach Lemma 3.5 in $(K_{12}^i, K_{12}^{(0, \pi)})$ und sind gemäß

$$\sin \theta_1^\pm = -c_2 \bar{\Omega}_\pm, \quad \sin \theta_2^\pm = c_3 \bar{\Omega}_\pm$$

charakterisiert, wobei $\bar{\Omega}_\pm$ durch (3.44) gegeben ist. Des Weiteren gilt für $K_{12}^a = K_{12}^{(\pi, \pi)}$

$$\det A_{K_{12}}(\pi, 0) = -b_1 - b_2 + b_3 = 0 = b_1 - b_2 - b_3 = \det A_{K_{12}}(\pi, \pi)$$

und folglich

$$b_2 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 = b_3.$$

Mit der Voraussetzung (3.82) erhalten wir dann für $K_{12} = K_{12}^a$

$$b_2 = K_{21}K_{32} + K_{12}^a \underbrace{(K_{23} + K_{32})}_{=K_{21}}.$$

Somit gilt $K_{12}^a = K_{12}^{(\pi, \pi)} = -K_{32}$.

Für die Darstellungen in (3.85) betrachten wir zunächst $c_3 \bar{\Omega}_\pm$ im Limes $K_{12} \rightarrow K_{12}^a$:

$$\lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} c_3 \bar{\Omega}_\pm = \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \pm \frac{\sqrt{4b_2^2 b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)^2}}{2b_1 b_2}. \quad (3.87)$$

Da auf der rechten Seite in (3.87) sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren, wenden wir zur Limesberechnung zweimal die Regel von *L'Hospital* an:

$$\begin{aligned} \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} c_3 \bar{\Omega}_\pm &= \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \left[\frac{-4b_3^2(K_{23} + K_{32}) - 4b_3^3 K_{31} + 4b_1^2 b_2(K_{23} + K_{32})}{8b_1^2 b_2(K_{23} + K_{32})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{32} + 4b_1^2 b_3 K_{31} + 4b_2 b_3^2(K_{23} + K_{32}) + 4b_2^2 b_3 K_{31}}{8b_1^2 b_2(K_{23} + K_{32})} \right] \\ &= \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \left[\frac{-12b_2^2(K_{23} + K_{32})^2 - 12b_3^2 K_{31}^2 + 4b_1^2(K_{23} + K_{32})^2}{8b_1^2(K_{23} + K_{32})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4b_1^2 K_{31}^2 + 4b_3^2(K_{23} + K_{32})^2 + 16b_2 b_3(K_{23} + K_{32})K_{31} + 4b_2^2 K_{31}^2}{8b_1^2(K_{23} + K_{32})^2} \right] \\ &= 1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2} \quad (\text{da } b_1 = b_3 \text{ und } b_2 = 0 \text{ im Limes}) \end{aligned}$$

Es gilt $1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2} \in (0, 1)$ aufgrund von Voraussetzung (3.16). Des Weiteren

erhalten wir hiermit auch die Limesbeziehungen

$$\begin{aligned} \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \bar{\Omega}_{\pm} &= \pm \frac{1}{c_1} \sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}} \quad (c_1 = c_3 \text{ im Limes}) \\ &= \pm \frac{K_{32}(K_{13}K_{21} + K_{23}K_{31})}{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{23} + K_{13}K_{32}} \sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}}, \\ \lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} c_2 \bar{\Omega}_{\pm} &= 0 \quad (c_2 = 0 \text{ im Limes}) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Darstellungen (3.83) und (3.84).

Wie in den Beweisen von Satz 3.9 und Lemma 3.11 gilt

$$\theta_1^{\pm} = \pm\pi \quad \Leftrightarrow \quad b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 = 0.$$

Ferner erhalten wir für $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)}$:

$$\det A_{K_{12}^{(0,\pi)}}(0, \pi) = -b_1 + b_2 - b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 - b_2 < 0. \quad (3.88)$$

Für $K_{12} = K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ wurden oben bereits die Beziehungen $b_1 = b_3$ und $b_2 = 0$ gezeigt. Wegen $K_{12}^a < K_{12}^{(0,\pi)}$ ergibt sich daher nun für $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)}$

$$0 < b_1 < b_3 \quad \text{und} \quad b_2 > 0.$$

Mit der Identität auf der linken Seite in (3.88) erhalten wir somit für $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)}$ nun die Beziehung

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 = 2b_3(b_3 - b_2) < 0.$$

Des Weiteren gilt für $K_{12} = K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)}$ offensichtlich

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 = b_1^2 + b_3^2 = 2b_1^2 > 0.$$

Ebenso ergibt sich für $K_{12} = K_{12}^i$

$$\det A_{K_{12}^i}(0, 0) = b_1 + b_2 + b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 + b_3 = -b_1 < 0. \quad (3.89)$$

Wegen $K_{12}^i < K_{12}^a$ gilt außerdem

$$b_1 < b_3 - b_2.$$

Mit der Identität auf der rechten Seite in (3.89) folgt damit $b_3 > 0$. Zusammenfassend erhalten wir also für $K_{12} = K_{12}^i$

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 = 2b_3(b_2 + b_3) < 0.$$

Hiermit haben wir die Beziehung (3.83) bewiesen.

Für den Nachweis von (3.84) vergegenwärtigen wir uns nun zunächst die Situation für $K_{12} = K_{12}^a = K_{12}^{(\pi, \pi)} = -K_{32}$, indem wir zunächst (3.86) zeigen. Setzen wir $\theta_1 = \pi$ so folgt

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= - \underbrace{(K_{12}^a + K_{32})}_{=0} \sin \theta_2 = 0, \\ \dot{\theta}_2 &= \underbrace{(K_{21} - K_{23} - K_{32})}_{=0} \sin \theta_2 = 0.\end{aligned}$$

Es existieren somit für diesen Parameterwert *unendlich viele stationäre Lösungen* der Form $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \vartheta)$ mit $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Weiter gilt für $K_{12} = -K_{32}$

$$\begin{aligned}\det A_{K_{12}}(\pi, \vartheta) &= b_1 \cos \pi \cos \vartheta + \underbrace{b_2}_{=0} \cos(\pi - \vartheta) \cos \vartheta \\ &\quad + \underbrace{b_3}_{=b_1} \cos(\pi - \vartheta) \cos \pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mit der bereits bewiesenen Darstellung (3.83) sowie der gezeigten Limesbeziehung $\lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} c_2 \bar{\Omega}_{\pm} = 0$ ergibt sich nun für $K_{12} = K_{12}^a$ (wegen $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 > 0$ für diesen Parameterwert)

$$\lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \theta_1^{\pm} = \pi.$$

Für den Nachweis von (3.84) betrachten wir nun für $K_{12} = K_{12}^a$ den Term $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2$. Direkt ergibt sich

$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0.$$

In allen bisher betrachteten Bifurkationsszenarios war diese Identität stets äquivalent zu einem Inphase-Antiphase-Übergang von θ_1^{\pm} (vgl. Lemma 3.11). Andererseits haben wir bereits die Limesbeziehung

$$\lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} c_3 \bar{\Omega}_{\pm} = 1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}$$

nachgewiesen; aufgrund der Voraussetzung (3.16) ist dieser Grenzwert < 1 , somit gilt $\lim_{K_{12} \rightarrow K_{12}^a} \theta_2^{\pm} \neq \pm\pi/2$. Wir sehen hiermit, dass die Voraussetzung $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2$ in diesem Fall zwar weiterhin *notwendig* für einen Inphasen-Antiphasen-Übergang ist, jedoch *nicht hinreichend*.

Der Term $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2$ stellt bzgl. K_{12} ein Polynom 2. Ordnung dar, neben $K_{12} = -K_{32}$ kann daher höchstens noch eine weitere Lösung der Gleichung $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0$ existieren. Da die Zweige $(\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm})$ gerade die Gleichgewichtspunkte $(0, 0)$ und $(0, \pi)$ miteinander verbinden, muss somit eine 2. Nullstelle $K_{12}^{ia} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(0, \pi)})$ existieren. Für die Darstellung in (3.84) müssen wir nun klären, ob K_{12}^{ia} größer oder kleiner als

die 1. Nullstelle $K_{12} = -K_{32}$ ist. Hierfür definieren wir eine Hilfsfunktion F mit der Darstellung

$$F(K_{12}) := b_1^2 + b_2^2 - b_3^2.$$

Es gilt $F'(K_{12}) = 0$ genau dann, wenn

$$K_{12} = K_{\min} := \frac{K_{21}((K_{13} + K_{31})K_{31} - K_{21}K_{32})}{K_{21}^2 - K_{31}^2}.$$

Wegen $F''(K_{12}) = 2(K_{23} + K_{32})^2 - 2K_{31}^2 > 0$ liegt bei $K_{12} = K_{\min}$ eine *Minimalstelle* vor.

Des Weiteren gilt für $K_{12} = K_{12}^i$ (wegen $b_1 = -b_2 - b_3$, $b_2 < 0$ und $b_2 + b_3 < 0$, s.o.)

$$F(K_{12}^i) = b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 2b_2(b_2 + b_3) > 0.$$

Ebenso folgt für $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)}$ (wegen $b_1 = b_2 - b_3$ und $b_2 > b_3 > 0$, s.o.)

$$F(K_{12}^{(0,\pi)}) = b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 2b_2(b_2 - b_3) > 0.$$

Außerdem gilt $K_{12}^a = -K_{32} < K_{\min}$, da diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$K_{31}^2 K_{32} < (K_{13} + K_{31}) \underbrace{K_{21}}_{>K_{32}} K_{31}.$$

Folglich ist auch $F(K_{\min}) < F(-K_{32}) = 0$. Da $F(K_{12}^{(0,\pi)}) > 0$ gilt, muss F daher eine 2. Nullstelle K_{12}^{ia} im Intervall $(K_{\min}, K_{12}^{(0,\pi)})$ besitzen (vgl. Abb. 3.12). Bei diesem Parameterwert findet dann für θ_2^\pm der Übergang von Inphase zu Antiphase statt. Hiermit erhalten wir nun auch die Darstellung (3.84).

□

Wie wir es in den vorangegangenen Abschnitten analysiert haben, erhält der Fixpunkt $(\pi, 0)$ im Falle $K_{21} < K_{23} + K_{32}$ bei $K_{12} = K_{12}^a$ seine Stabilität über eine *subkritische* Pitchfork-Verzweigung (vgl. Abschnitt 3.4), im Falle $K_{21} > K_{23} + K_{32}$ hingegen liegt hierbei eine *superkritische* Bifurkation vor (vgl. Abschnitt 3.6). In der hier betrachteten Situation $K_{21} = K_{23} + K_{32}$ findet somit bei $K_{12} = K_{12}^a$ gewissermaßen ein ‘‘Umschlagen‘‘ von einer subkritischen in eine superkritische Pitchfork-Bifurkation statt (Abb. 3.14-3.16), welches zur Existenz unendlich vieler stationärer Punkte führt (vgl. Phasenportrait in Abb. 3.13).

Wir werden später bei der Identifizierung von Bifurkationen im 2-Parameterraum (Abschnitt 3.11) nochmals auf diesen Fall zurückkommen. Die Paarung $(K_{12}, K_{21}) = (-K_{32}, K_{23} + K_{32})$ werden wir dann als sogenannten *Multi-equilibria-Point* charakterisieren.

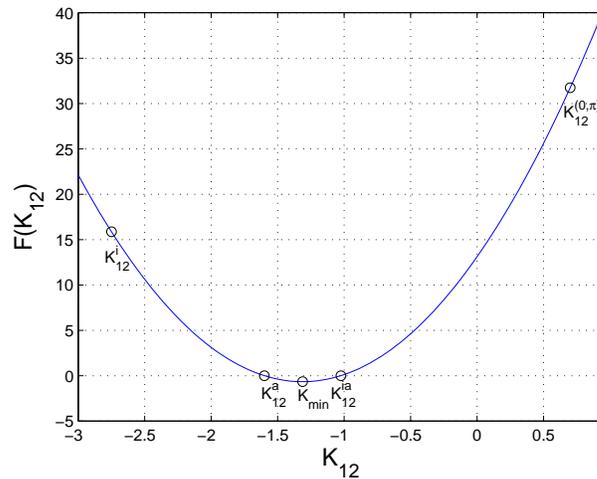


Abbildung 3.12.: $K_{13} = 0.3$, $K_{21} = 3$, $K_{23} = 1.4$, $K_{31} = 1$, $K_{32} = 1.6$. Darstellung von $F(K_{12}) := b_1^2 + b_2^2 - b_3^2$. Für $K_{12} = K_{12}^i = -2.75$ und $K_{12} = K_{12}^{(0,\pi)} = 0.7$ gilt $F(K_{12}) > 0$, während bei $K_{12}^a = K_{12}^{(\pi,\pi)} = -K_{32} = -1.6$ eine Nullstelle vorliegt. Die Minimalstelle K_{\min} liegt bei -1.3125 , eine 2. Nullstelle befindet sich bei $K_{12}^{ia} = -1.025$. Bei K_{12}^{ia} findet für θ_2^\pm dann der Übergang von Inphase zu Antiphase statt.

3.8. Stabilitätswechsel des Antiphazenzustandes $(\pi, 0)$ via Hopf-Bifurkation

Bei den in den vorangegangenen Abschnitten 3.4-3.7 betrachteten Kopplungskonfigurationen hatte die der Inhibition unmittelbar entgegengesetzte exzitatorische Kopplungsstärke K_{21} zwar an Einfluss zugenommen (Voraussetzungen $K_{21} > K_{31}$ und in 3.6 $K_{21} > K_{23} + K_{32}$), durch die zusätzlich angenommene Bedingung (3.74) (bzw. (3.80)), d.h.

$$(K_{31} - K_{23} - K_{32})^2 > (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{31}),$$

war die Kopplungsgröße K_{21} jedoch noch nach oben beschränkt gewesen. Nach Korollar 3.8 wurde durch diese Voraussetzung gewährleistet, dass $K_{12}^H > K_{12}^a$ galt, wobei K_{12}^H und K_{12}^a weiterhin gemäß (3.35) und (3.34) gegeben und mittels $\text{spur } A_{K_{12}^H}(\pi, 0) = 0$ bzw. $\det A_{K_{12}^a}(\pi, 0) = 0$ charakterisiert sind.

In diesem und dem nachfolgenden Abschnitt werden wir nun den umgekehrten Fall betrachten, generelle Voraussetzung in diesem sowie im nachfolgenden Abschnitt ist somit

$$(K_{31} - K_{23} - K_{32})^2 < (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{31}). \quad (3.90)$$

(Den Grenzfall $(K_{31} - K_{23} - K_{32})^2 = (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{31})$ werden wir im Abschnitt 3.11 im Zusammenhang mit den 2-Parameter-Bifurkationen gesondert untersuchen.) Ist (3.90) erfüllt, so können wir damit nun die Existenz einer *Hopf-Bifurkation* des Antiphazenzustandes $(\pi, 0)$ schlussfolgern:

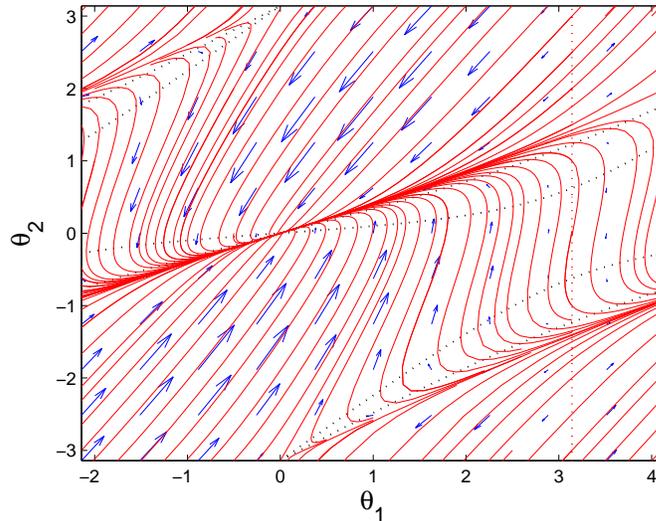


Abbildung 3.13.: $K_{12} = -1.6$, $K_{13} = 0.3$, $K_{21} = 3$, $K_{23} = 1.4$, $K_{31} = 1$, $K_{32} = 1.6$. Somit ist $(K_{12}, K_{21}) = (-K_{32}, K_{23} + K_{32})$. Phasenportrait mit Darstellung der Nullclines (schwarze gepunktete Linien). Die Gerade $\theta_1 = \pi$ (rote gepunktete Linie) markiert das Kontinuum von stationären Punkten (π, ϑ) . Für diesen Parameterwert K_{12} stellt der Fixpunkt $(0, 0)$ die einzige stabile stationäre Lösung dar. (Erstellung des Phasenportraits mit *MATLAB R2007b*).

3.16 Satz (Stabilitätswechsel von $(\pi, 0)$ via Hopf-Verzweigung)

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5 und außerdem die Bedingung (3.90) erfüllt. K_{12}^i , K_{12}^a und K_{12}^H seien gemäß (3.33)-(3.35) gegeben. Dann gilt $K_{12}^H < K_{12}^a$. Des Weiteren unterliegt der Antiphasezustand $(\pi, 0)$ bei $K_{12} = K_{12}^H$ einer **Hopf-Bifurkation**. Der zugehörige **1. Lyapunov-Koeffizient** $\ell_1(K_{12}^H)$ ist dann gegeben durch

$$\ell_1(K_{12}^H) = \frac{1}{16\omega_0^3} \left(\frac{(K_{13} + K_{31})(K_{21} + K_{31} - K_{23} - K_{32})}{-K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + 2K_{32}} + \frac{(K_{23} - K_{21})(K_{23} + K_{32})}{-K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + 2K_{32}} \right), \quad (3.91)$$

wobei $\omega_0 := \sqrt{\det A_{K_{12}^H}(\pi, 0)}$. Ist $\ell_1(K_{12}^H) < 0$ so liegt eine **superkritische** Verzweigung vor, im Fall $\ell_1(K_{12}^H) > 0$ handelt es sich um eine **subkritische** Hopf-Bifurkation.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussage $K_{12}^H < K_{12}^a$ mit (3.90) wurde bereits in Korollar 3.8 nachgewiesen. Nach Lemma 3.5 findet dann bei $K_{12} = K_{12}^H$ der Stabilitätswechsel von $(\pi, 0)$ statt. Allgemein ist die Jacobi-Matrix $A_{K_{12}}(\pi, 0)$ des Systems (3.4) ausgewertet an $(\pi, 0)$ gegeben durch

$$A_{K_{12}}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} K_{12} + K_{13} + K_{31} & -K_{12} - K_{32} \\ -K_{21} + K_{31} & K_{21} - K_{23} - K_{32} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden notieren wir $\mathcal{A} := A_{K_{12}^H}(\pi, 0)$. Für $K_{12} = K_{12}^H = -K_{21} - K_{13} - K_{31} +$

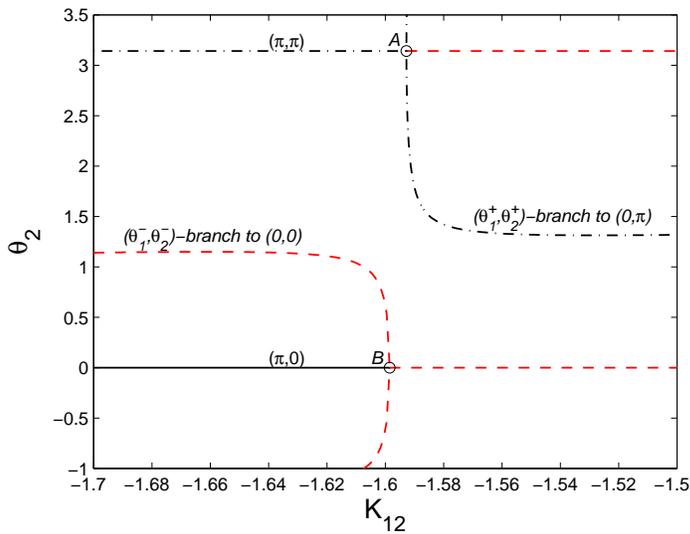


Abbildung 3.14.: $K_{13} = 0.3$, $K_{23} = 1.4$, $K_{31} = 1$, $K_{32} = 1.6$, $K_{21} = 2.99 < K_{23} + K_{32}$. Darstellung der θ_2 -Komponente stationärer Lösungen. Bei $K_{12}^{(\pi, \pi)} = -1.59275$ inverse Pitchfork-Verzweigung (A), bei $K_{12}^0 = -1.5985$ subkritische Pitchfork-Verzweigung (vgl. Abschnitt 3.4).

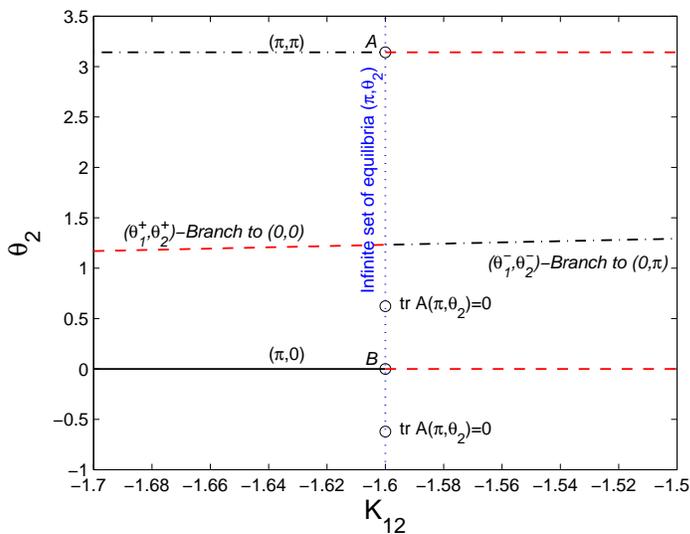


Abbildung 3.15.: K_{13} , K_{23} , K_{31} , K_{32} wie bei Abb. 3.14, $K_{21} = 3 = K_{23} + K_{32}$. Die Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ münden bei $K_{12}^a = K_{12}^{(\pi, \pi)} = -K_{32} = -1.6$ in $(\pi, \pm \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{(K_{23} + K_{32})^2}}\right)) = (\pi, \pm \arcsin(\sqrt{8/3})) \approx (\pi, \pm 1.23)$. Bei $K_{12} = -1.6$ liegen jeweils “degenerierte Pitchfork-Bifurkationen“ für (π, π) und $(\pi, 0)$ vor (A und B), außerdem existieren bei diesem Parameterwert unendlich viele stationäre Punkte der Form (π, ϑ) , $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

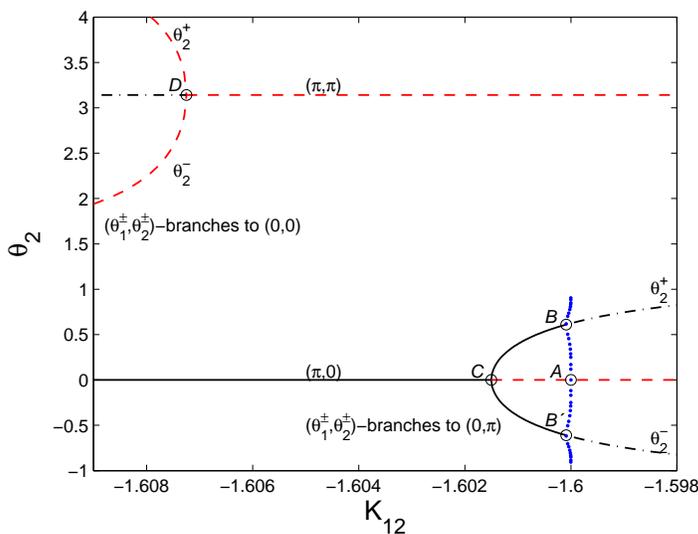


Abbildung 3.16.: K_{13} , K_{23} , K_{31} , K_{32} wie bei Abb. 3.14, $K_{21} = 3.01 > K_{23} + K_{32}$. Es gilt $K_{12}^i < K_{12}^{(\pi, \pi)} < K_{12}^a < K_{12}^{(0, \pi)}$. A : doppelte homokline Verzweigung in $(\pi, 0)$; B, B' : simultane Hopf-Verzweigungen in $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$; C : superkritische Pitchfork-Bifurkation in $(\pi, 0)$; D inverse Pitchfork-Verzweigung in (π, π) (vgl. Abschnitt 3.6).

$K_{23} + K_{32}$ gilt offensichtlich

$$\text{spur } \mathcal{A} = K_{12}^H + K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32} = 0.$$

Wegen $K_{12}^H < K_{12}^a$ folgt andererseits $\det \mathcal{A} > 0$ für $K_{12} = K_{12}^H$. Somit besitzt $A_{K_{12}}(\pi, 0)$ für diesen Parameterwert zwei rein imaginäre Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$ wobei $\omega_0 = \sqrt{\det \mathcal{A}}$. Des Weiteren definieren wir

$$\mu(K_{12}) := \frac{1}{2} \text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) = \frac{1}{2} (K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} - K_{23} - K_{32}).$$

Es folgt

$$\mu(K_{12}^H) = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d\mu}{dK_{12}} \right|_{K_{12}=K_{12}^H} = \frac{1}{2} \neq 0. \quad (3.92)$$

Da also mit (3.92) auch die *Transversalitätsbedingung* erfüllt ist, sind somit alle Voraussetzungen für das Vorhandensein einer *Hopf-Verzweigung* bei $K_{12} = K_{12}^H$ erfüllt. Die Berechnung des 1. *Lyapunov-Koeffizienten* erfolgt in B.

□

Numerische Berechnungen der Bifurkationsdiagramme für verschiedene Kopplungskonfigurationen legen nahe, dass der bei der Hopf-Verzweigung bei K_{12}^H generierte Zweig einer (stabilen oder instabilen) periodischen Lösung entweder über eine *homo-* bzw. *heterokline* Verzweigung oder über eine *Sattel-Knoten-Verzweigung von periodischen Orbits* wieder verschwindet (siehe Abb. 3.17-3.19).

Gilt $K_{12}^i < K_{12}^H$, so liegt für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^H)$ wiederum eine *Bistabilität* der Inphasen-Synchronisation $(0, 0)$ mit der antiphasischen Synchronisation $(\pi, 0)$ vor. Ist die Hopf-Bifurkation in K_{12}^H außerdem noch superkritisch, und existiert der zugehörige Zweig des stabilen periodischen Orbits für $K_{12} \in (K_{12}^H, \bar{K}_{12})$, so liegt tatsächlich eine Inphasen-Antiphasen-Bistabilität für $K_{12} \in (K_{12}^i, \bar{K}_{12})$ vor; in (K_{12}^H, \bar{K}_{12}) ist die Antiphasen-Synchronisation dann nicht mehr durch eine stationäre Lösung sondern durch einen Grenzzyklus repräsentiert.

Für die weiteren Ausführungen ist nun die Klassifizierung $K_{12}^i \lesseqgtr K_{12}^H$ von Bedeutung:

3.17 Korollar

Für K_{12}^i und K_{12}^H , definiert gemäß (3.33) und (3.35) gilt $K_{12}^i < K_{12}^H$ genau dann, wenn

$$(K_{23} + K_{32})^2 - K_{31}^2 > (K_{21} - K_{31})(K_{23} - K_{13}). \quad (3.93)$$

Beweis. Aus den Darstellungen für K_{12}^i und K_{12}^H ergibt sich unmittelbar:

$$K_{12}^i < K_{12}^H$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad K_{21}(K_{23} - K_{13}) &< K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} \\
&\quad - (K_{13} + K_{31})(K_{23} + K_{31} + K_{32}) \\
&\quad + (K_{23} + K_{32})(K_{23} + K_{31} + K_{32}) \\
&= K_{31}(K_{23} - K_{13}) + (K_{23} + K_{32})^2 - K_{31}^2.
\end{aligned}$$

□

Hinsichtlich der Bedingung (3.93) sowie des Vorliegens einer sub- oder superkritischen Verzweigung ergeben sich nun wiederum eine Reihe von Fallunterscheidungen, welche größtenteils in den Beispielen in Abb. 3.17-3.20 illustriert werden. Den besonderen Fall $K_{12}^H < K_{12}^i$, welcher für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ zu einem *desynchronisiertem* System führen kann, werden wir im folgenden Abschnitt ausführlich behandeln.

Das Auftreten von Hopf-Bifurkationen stellt einen weiteren entscheidenden Unterschied des hier vorliegenden inhibitorisch-exzitatorischen Systems mit den klassischen Kuramoto-Modellen dar. Bei den Standard Kuramoto-Systemen ($K_{ij} = K$ für alle i, j , ω_j beliebig, keine sonstigen Modifikationen) treten generell keine Hopf-Verzweigungen der stabilen Fixpunkte auf (vgl. z.B. [19]).

3.9. Desynchronisation

Dominiert die exzitatorische Kopplung K_{21} das gesamte System derart, dass

$$(K_{23} + K_{32})^2 - K_{31}^2 < (K_{21} - K_{31})(K_{23} - K_{13}) \quad (3.94)$$

gilt, so kann ein weiteres interessantes Phänomen auftreten. In diesem Fall gilt nach Korollar 3.17 $K_{12}^H < K_{12}^i$. Es stellt sich nun die Frage nach der Existenz einer Synchronisationslösung für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$. Im Falle einer *superkritischen* Hopf-Bifurkation bei K_{12}^H kann ein synchroner Zustand für K_{12} aus diesem Intervall existieren; dieser Synchronisationszustand ist dann durch einen stabilen Grenzzyklus und nicht durch einen Fixpunkt repräsentiert. Zu klären ist dann jeweils, ob dieser synchrone Zustand für alle $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ existiert.

Liegt eine *subkritische* Hopf-Bifurkation vor, so existiert hingegen für kein $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ ein synchroner Zustand:

3.18 Satz (Desynchronisation)

Es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.5, ansonsten gelte (3.90) und (3.94). Dann gilt

$$K_{12}^H < K_{12}^i < K_{12}^a. \quad (3.95)$$

Gilt $\ell_1(K_{12}^H) > 0$ (mit ℓ_1 gegeben durch (3.91)), so existiert für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ kein Synchronisationszustand. Ist hingegen $\ell_1(K_{12}^H) < 0$, so wird bei $K_{12} = K_{12}^H$ ein Zweig von stabilen Grenzzyklen generiert, welcher bei einem \bar{K}_{12} mit $\bar{K}_{12} >$

Abbildung 3.17.: $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.8$, $K_{23} = 0.7$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.3$. Darstellung der stabilen stationären Lösungen (schwarze durchgezogene Linie), der instabilen Knoten (schwarze Punkt-Strich-Linie), der Sattelpunkte (rote gestrichelte Linie) sowie des stabilen periodischen Orbits (blaue Punkte). A : inverse Pitchfork-Verzweigung von $(\pi, 0)$ bei $K_{12}^a = -0.56$; B^+, B^- heterokline Verzweigung der Sattelpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ bei $K_{12}^\pm \approx -0.888823$; C : superkritische Hopf-Verzweigung von $(\pi, 0)$ bei $K_{12}^H = -0.9$; D : subkritische Pitchfork-Verzweigung von $(0, 0)$ bei $K_{12}^i = -1.5$. In (K_{12}^i, K_{12}^\pm) liegt somit eine Bistabilität von Inphase und Antiphase vor, wobei für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^\pm)$ der stabile Antiphasezustand durch einen periodischen Orbit und nicht durch einen Fixpunkt charakterisiert ist.

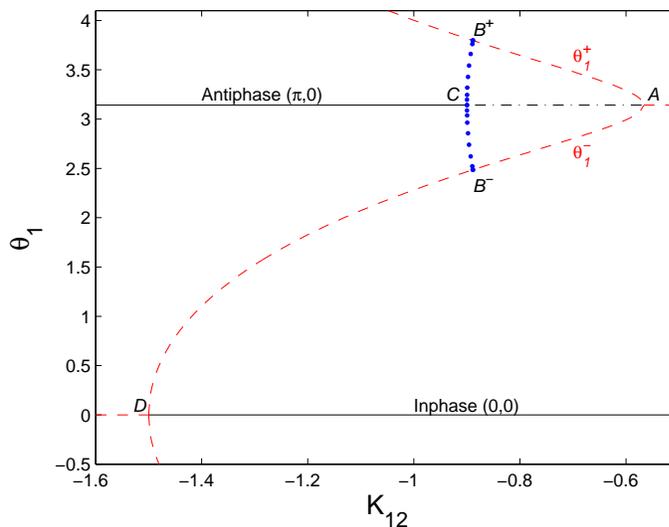


Abbildung 3.18.: $K_{13} = 0.7$, $K_{21} = 0.6$, $K_{23} = 0.3$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.5$. Darstellung der stationären Lösungen wie in Abb. 3.17, die Linie der nicht ausgefüllten blauen Kreise charakterisiert einen instabilen periodischen Orbit. A : inverse Pitchfork-Verzweigung von $(\pi, 0)$ bei $K_{12}^a = -0.8$; B : subkritische Hopf-Verzweigung von $(\pi, 0)$ bei $K_{12}^H = -0.9$; C^+, C^- : heterokline Verzweigung der Sattelpunkte $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ bei $K_{12}^\pm \approx -0.901567$; D : subkritische Pitchfork-Verzweigung von $(0, 0)$ bei $K_{12}^i = -1.36$.

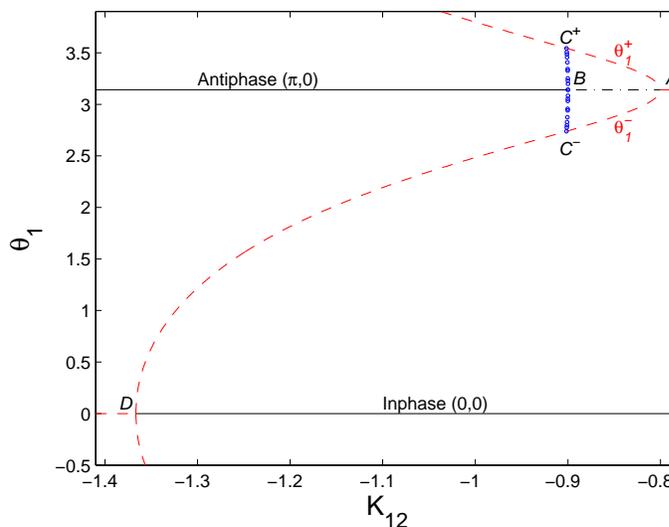
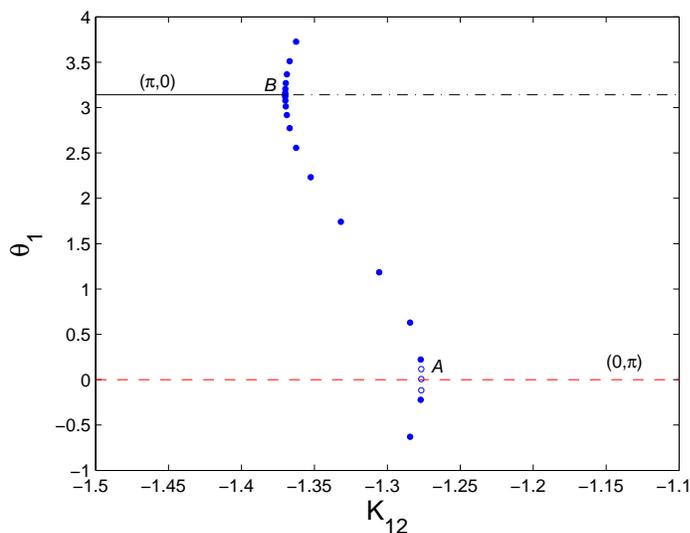


Abbildung 3.19.: $K_{13} = 0.3$, $K_{21} = 1.4$, $K_{23} = 0.7$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.03$. Darstellung der stationären Lösungen $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$. Bei $K_{12}^H = -1.37$ unterliegt $(\pi, 0)$ einer superkritischen Hopf-Verzweigung (B), der dabei entstehende stabile Grenzzyklus unterliegt wiederum einer Sattel-Knoten-Verzweigung mit einem instabilen periodischen Orbit (A).



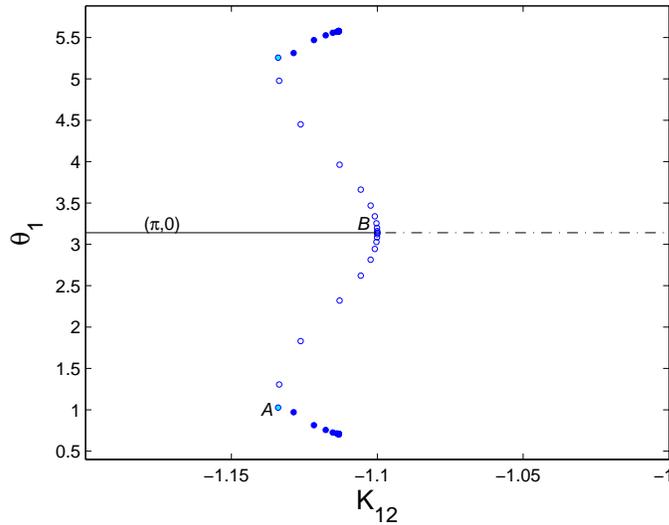


Abbildung 3.20.: $K_{13} = 0.3$, $K_{21} = 1.4$, $K_{23} = 0.7$, $K_{31} = 0.4$, $K_{32} = 0.3$. Darstellung der stationären Lösungen $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$. Bei $K_{12}^H = -1.1$ unterliegt $(\pi, 0)$ einer subkritischen Hopf-Verzweigung (B), der dabei entstehende instabile Grenzzyklus unterliegt wiederum bei $K_{12} \approx -1.134$ einer Sattel-Knoten-Verzweigung mit einem stabilen periodischen Orbit (A).

K_{12}^H verschwindet. Gilt $\bar{K}_{12} < K_{12}^i$, so existiert für $K_{12} \in (\bar{K}_{12}, K_{12}^H)$ ebenfalls kein Synchronisationszustand.

Beweis. Die Aussage (3.95) ergibt sich durch die Voraussetzungen (3.90) (aus dieser Bedingung folgt $K_{21} > K_{31}$) und (3.94) unmittelbar mittels der Korollare 3.7 und 3.17.

Ferner folgt aus (3.94) auch

$$K_{21} > K_{23} + K_{32}.$$

Nach Lemma 3.11 gilt $K_{12}^i < K_{12}^{(\pi, \pi)} < K_{12}^a < K_{12}^{(0, \pi)}$. Des Weiteren existieren symmetriebrechende stationäre Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ gemäß Lemma 3.11 genau für $K_{12} \in (K_{12}^i, K_{12}^{(\pi, \pi)})$ sowie $K_{12} \in (K_{12}^a, K_{12}^{(0, \pi)})$. Für $K_{12} < K_{12}^i$ existieren somit nur die 4 Fixpunkte $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π) , wobei nach Lemma 3.5 die stationären Punkte $(0, \pi)$ und (π, π) niemals Stabilität erhalten können. Da für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ $(0, 0)$ nicht mehr sowie $(\pi, 0)$ nach Satz 3.16 noch nicht stabil ist, existiert in diesem Intervall folglich kein stabiler Fixpunkt.

Gilt $\ell_1(K_{12}^H)$ so findet nach Satz 3.16 bei K_{12}^H eine subkritische Hopf-Bifurkation statt. Es wird daher in diesem Fall bei $K_{12} = K_{12}^H$ auch kein stabiler Grenzzyklus in $(\pi, 0)$ generiert. Für $K_{12} \in (K_{12}^H, K_{12}^i)$ existiert somit weder ein stabiler Gleichgewichtspunkt noch eine stabile periodische Lösung, folglich ist in diesem Parameterbereich keine Synchronisation des Systems (3.1) möglich.

Ist die Hopf-Verzweigung superkritisch, d.h. $\ell_1(K_{12}^H) < 0$, so wird in K_{12}^H ein Zweig stabiler Grenzzyklen generiert, welcher für $K_{12} \in (K_{12}^H, \bar{K}_{12})$ existiert. In diesem Parameterbereich existiert somit ein Antiphasen-Synchronisationszustand, welcher in diesem Fall nicht durch eine stationäre Lösung, sondern durch einen periodischen

Orbit, welcher den instabilen Knoten $(\pi, 0)$ umgibt, repräsentiert ist. Gilt $\bar{K}_{12} < K_{12}^i$, so existiert hingegen für $K_{12} \in (\bar{K}_{12}, K_{12}^i)$ weder eine stabile stationäre noch eine stabile periodische Lösung, folglich ist dann auch *keine Synchronisation* des Systems (3.1) möglich. □

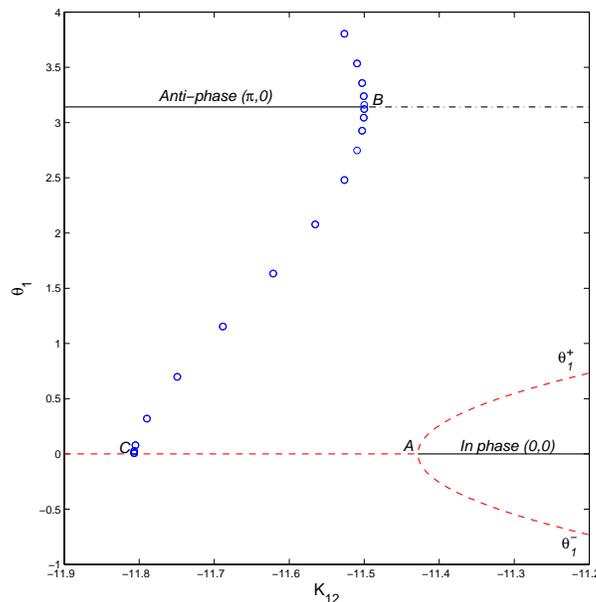


Abbildung 3.21.: $K_{13} = 1$, $K_{21} = 12$, $K_{23} = 1.5$, $K_{31} = 1$, $K_{32} = 1$. Nichtexistenz eines Synchronisationszustandes für $K_{12} \in (-11.5, -11.42)$. Der Fixpunkt $(0, 0)$ verliert seine Stabilität bei $K_{12}^i \approx -11.43$ über eine subkritische Pitchfork-Verzweigung A . Die dabei generierten Zweige von Sattelpunkten $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ verbinden $(0, 0)$ mit dem instabilen Antiphasezustand (π, π) . Der stationäre Punkt $(\pi, 0)$ erlangt Stabilität über eine subkritische Hopf-Bifurkation B bei $K_{12}^H = -11.5$, der dabei generierte instabile periodische Orbit terminiert bei $K_{12} \approx -11.81$ in einem homoklinen Orbit (C) .

Bemerkung zu Satz 3.18:

Bei der Verzweigung der stabilen periodischen Lösung in \bar{K}_{12} traten in numerischen Auswertungen sowohl *homokline* Bifurkationen im Sattelpunkt $(0, \pi)$ als auch *Sattel-Knoten-Verzweigungen* periodischer Lösungen auf.

Des Weiteren ist im Falle einer subkritischen Hopf-Bifurkation in Satz 3.18 zu beachten, dass für $K_{12} < K_{12}^H$ mit $K_{12}^H - K_{12} \ll 1$ eine Antiphase-Synchronisation dann zwar grundsätzlich möglich ist, der stabile Fixpunkt $(\pi, 0)$ allerdings noch von einem instabilen periodischen Orbit mit relativ kleiner Amplitude umschlossen wird, d.h. das Anziehungsgebiet dieses Attraktors ist entsprechend klein. Je weiter K_{12} sich von K_{12}^H entfernt, desto größer wird auch das Anziehungsgebiet von $(\pi, 0)$. Betrachtet man etwa die gewichteten Durchschnittsfrequenzen Ω_i des Systems (3.1) für verschiedene Startwerte $\phi_j(0)$, so werden in den Simulationen für den Übergang Desynchronisation \rightarrow Synchronisation je nach Startwerten verschiedene kritische

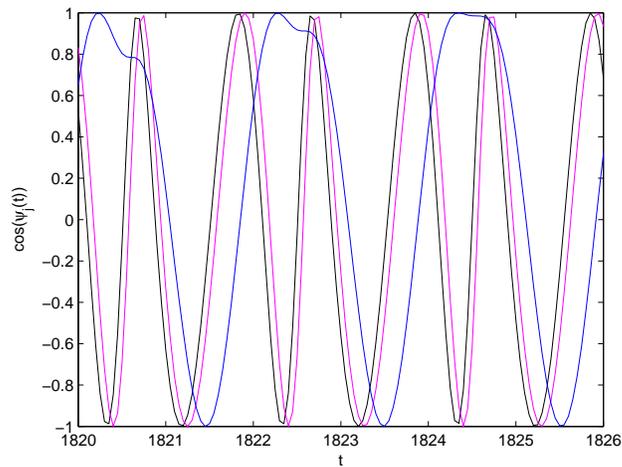


Abbildung 3.22.: $K_{12} = -11.46$, alle übrigen K_{ij} wie in Abb. 3.21. Darstellung von $\cos(n_1\phi_1(t))$ (magenta), $\cos(n_2\phi_2(t))$ (schwarz) und $\cos(n_3\phi_3(t))$ (blau) für $t \in [1820, 1826]$ mit den Anfangswerten $n_1\phi_1(0) = 0$, $n_2\phi_2(0) = 0.2$, $n_3\phi_3(0) = 0.1$. Zu erkennen ist eine partielle Phasensynchronisation von dem 1. und 2. Oszillator. (Für Details zur numerischen Simulation siehe C.1.)

Parameter $K_{12}^{\text{krit}} < K_{12}^H$ angezeigt (vgl. Abb. 3.24a-3.24b).

Betrachten wir die numerischen Simulationen in Abb. 3.22-3.24b, so geben diese Auswertungen Anlass zu der Vermutung, dass unter den Voraussetzungen von Satz 3.18 für einen bestimmten Parameterbereich von K_{12} zwar *keine vollständige Phasensynchronisation* mehr möglich ist, dafür aber eine **partielle Phasensynchronisation** (im Sinne von Definition 2.13 auf S. 70) vom 1. und 2. Oszillator eintritt. Einen Beweis, dass dies immer der Fall ist, bzw. ein formales Kriterium an die exzitatorischen Parameter K_{ij} als Bedingung für eine partielle Phasensynchronisation, konnten wir jedoch bislang noch nicht erbringen.

3.10. Grenzfall $K_{23} + K_{32} = K_{31}$

Bevor wir unsere Verzweigungsanalyse in der 2-Parameter-Ebene fortsetzen, wenden wir uns hier noch abschließend dem Grenzfall

$$K_{23} + K_{32} = K_{31} \quad (3.96)$$

zu. In diesem Fall hängt $\det A_{K_{12}}(\pi, 0)$ nicht von K_{12} ab:

$$\det A_{K_{12}}(\pi, 0) = (K_{13} + K_{23})(K_{21} - K_{31}). \quad (3.97)$$

Je nach Vorzeichen von $\det A_{K_{12}}(\pi, 0)$ erhalten wir nun unterschiedliche Aussagen hinsichtlich der Stabilität des Fixpunktes $(\pi, 0)$:

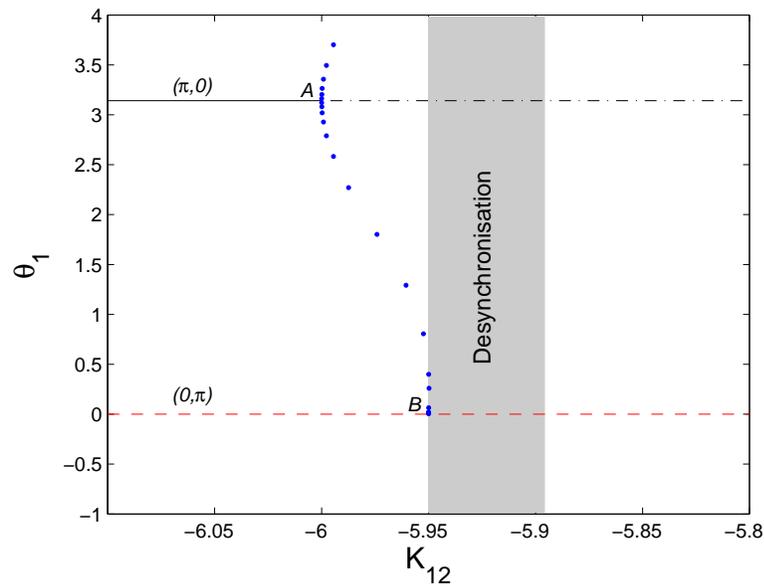
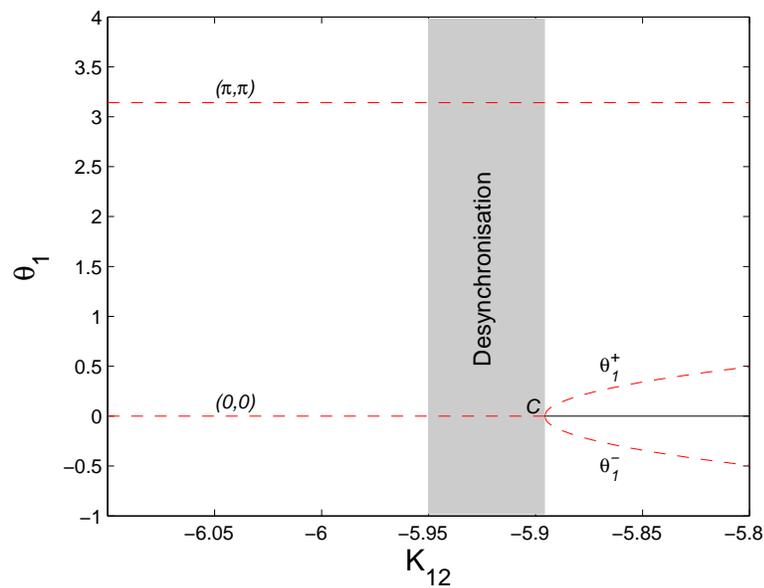
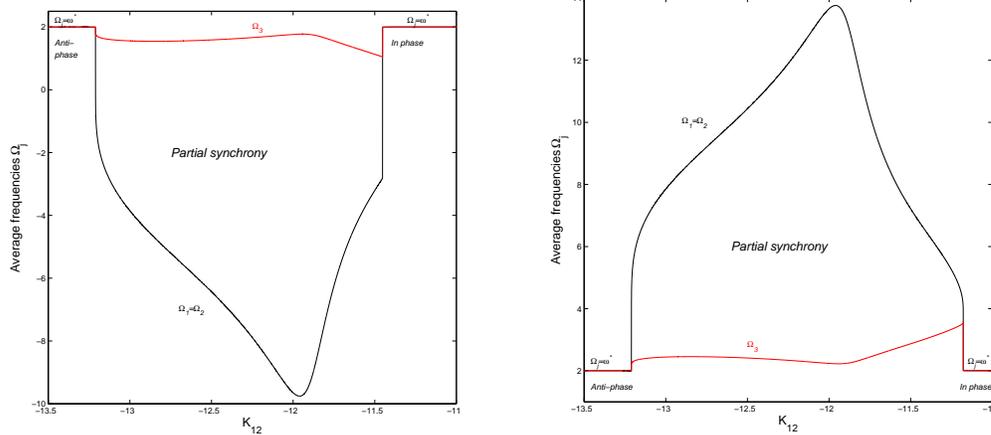
(a) Darstellung der stationären Lösungen $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$ (b) Darstellung der stationären Lösungen $(0, 0)$ und (π, π)

Abbildung 3.23.: $K_{13} = 1$, $K_{21} = 6$, $K_{23} = 1.5$, $K_{31} = 0.7$, $K_{32} = 0.2$. A : superkritische Hopf-Verzweigung bei $K_{12}^H = -6$. Der dabei generierte Zweig von stabilen periodischen Orbits verschwindet bei $\bar{K}_{12} \approx -5.94999$ über eine homokline Verzweigung B in $(0, \pi)$. Der Inphasenzustand $(0, 0)$ erlangt bei $K_{12}^i \approx -5.89583$ Stabilität über eine subkritische Pitchfork-Bifurkation C . Für $K_{12} \in (\bar{K}_{12}, K_{12}^i)$ existiert somit weder ein stabiler Fixpunkt noch ein stabiler Grenzzyklus.



(a) $n_1\phi_1(0) = 0, n_2\phi_2(0) = 0.2, n_3\phi_3(0) = 0.1.$ (b) $n_1\phi_1(0) = 1.5, n_2\phi_2(0) = 0.2, n_3\phi_3(0) = 0.1.$

Abbildung 3.24.: $K_{13} = K_{31} = K_{32} = 1, K_{21} = 12, K_{23} = 1.5, \omega^* = 2.$ Darstellung der gewichteten Durchschnittsfrequenzen Ω_j mit den bezeichneten Startwerten $n_j\phi_j(0)$ für $K_{12} \in (-13.5, -11)$. Auch im Desynchronisationsbereich bleibt stets eine partielle Phasensynchronisation vom 1. und 2. Oszillator bestehen ($\Omega_1 = \Omega_2$). (Für Details zur numerischen Simulation siehe C.2).

3.19 Satz

Es seien (3.2), (3.3), (3.17), (3.18) sowie (3.96) vorausgesetzt. Gilt $K_{21} > K_{31}$ so erlangt der Fixpunkt $(\pi, 0)$ bei $K_{12} = K_{12}^H$ Stabilität über eine Hopf-Bifurkation. Ist hingegen $K_{21} < K_{31}$, so erlangt $(\pi, 0)$ für kein $K_{12} \in \mathbb{R}$ Stabilität. In diesem Fall verliert der Inphasen-Zustand $(0, 0)$ seine Stabilität bei $K_{12} = K_{12}^i$ über eine superkritische Pitchfork-Verzweigung. Dabei werden zwei Zweige stabiler stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ generiert, welche gemäß (3.39) gegeben sind und für alle $K_{12} \in (-\infty, K_{12}^i)$ existieren. Im Limes $K_{12} \rightarrow -\infty$ gilt ferner

$$\begin{aligned}
 |\theta_1^\pm - \theta_2^\pm| &\rightarrow \pi, \\
 \theta_1^\pm &\rightarrow \pi \mp \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}} \right), \\
 \theta_2^\pm &\rightarrow \pm \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}} \right), \\
 \Omega_\pm &\rightarrow \mp \frac{1}{K_{23}} \sqrt{1 - \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Gilt $K_{21} = K_{31}$ so ist der Fixpunkt $(\pi, 0)$ für $K_{12} < K_{12}^H$ neutral stabil.

Beweis. Gilt $K_{21} > K_{31}$ so folgt mit der Darstellung (3.97)

$$\det A_{K_{12}}(\pi, 0) > 0 \quad \forall K_{12} \in \mathbb{R}.$$

Für alle K_{12} mit $\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0$ ist $(\pi, 0)$ somit stabil. Der Wechsel von einem instabilen zu einem stabilen Knoten findet daher wie in Satz 3.16 bei $K_{12} = K_{12}^H$ statt.

Ist umgekehrt $K_{21} < K_{31}$ vorausgesetzt, so ergibt sich $\det A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0$ für alle $K_{12} \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ kann aus diesem Grund für kein $K_{12} \in \mathbb{R}$ Stabilität erhalten. Ferner gilt für alle $K_{12} < K_{12}^i$

$$\det A_{K_{12}}(0, 0) = b_1 + b_2 + b_3 < 0$$

und folglich

$$b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 < 2b_2b_3.$$

Mit der Identität (3.96) erhalten wir ferner

$$b_3 - b_2 = K_{21}(K_{13} + K_{23}) > 0$$

Ebenso gilt

$$\det A_{K_{12}}(\pi, 0) = -b_1 - b_2 + b_3 < 0 \quad \text{und} \quad \det A_{K_{12}}(0, \pi) = -b_1 + b_2 - b_3 < 0$$

und somit auch

$$b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 > -2b_2b_3.$$

für alle $K_{12} < K_{12}^i$. Damit ist die Bedingung (3.21) für die Existenz stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$, gegeben gemäß (3.22), für $K_{12} \in (-\infty, K_{12}^i)$ erfüllt. Die genaue Darstellung der Lösungszweige (3.39) folgt wie im Beweis von Satz 3.9. Der hier betrachtete Fall $K_{31} = K_{23} + K_{32}$ stellt gewissermaßen den Grenzfall der Situation von Satz 3.9 dar (betrachte $K_{31} \nearrow K_{23} + K_{32}$ für $K_{21} < K_{31}$), daher ergibt sich die Darstellung (3.39) auch durch einfachen Übergang zum Limes $K_{31} \nearrow K_{23} + K_{32}$ in Satz 3.9.

Wir betrachten nun für $K_{12} \rightarrow -\infty$ den Limes $\theta_1^\pm - \theta_2^\pm$. Unter der Voraussetzung (3.96) erhalten wir für b_2 und b_3 die Darstellungen

$$b_2 = K_{12}K_{31} + K_{21}K_{32}, \quad b_3 = K_{12}K_{31} + K_{21}(K_{13} + K_{31}).$$

Somit folgt auch

$$\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{b_2}{b_3} = \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{b_3}{b_2} = 1.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} (\sin(\theta_1^\pm - \theta_2^\pm))^2 &= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{4b_2^2 b_3^2 - (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)^2}{4b_2^2 b_3^2} \\
&= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{2b_1^2 b_2^2 + 2b_1^2 b_3^2 + 2b_2^2 b_3^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4}{4b_2^2 b_3^2} \\
&= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{b_1^2}{2b_2^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{b_1^2}{2b_3^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{b_1^4}{4b_2^2 b_3^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{b_2^4}{4b_3^2}}_{\rightarrow 1/4} - \underbrace{\frac{b_3^4}{4b_2^2}}_{\rightarrow 1/4} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da gemäß der Darstellung (3.39) $\theta_1^\pm - \theta_2^\pm = \pi - \arcsin(c_1(\Omega_\pm - \omega^*))$ für $b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 < 0$ gilt, folgt hiermit $\theta_1^\pm - \theta_2^\pm \rightarrow \pi$ für $K_{12} \rightarrow -\infty$.

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} (\sin \theta_1^\pm)^2 &= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{2b_1^2 b_2^2 + 2b_1^2 b_3^2 + 2b_2^2 b_3^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4}{4b_1^2 b_3^2} \\
&= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\frac{b_2}{2b_3}}_{\rightarrow 1/2} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{b_1^2}{4b_3^2}}_{\rightarrow 0} - \frac{(b_2^2 - b_3^2)^2}{4b_1^2 b_3^2} \right).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{(b_2^2 - b_3^2)^2}{4b_1^2 b_3^2} &= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{4b_1^2} \underbrace{\left(\frac{b_2 + b_3}{b_3} \right)}_{\rightarrow 2} \\
&= \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \sin \theta_1^\pm = \pm \sqrt{1 - \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}}.$$

Mit der Darstellung (3.39) für $K_{12} \rightarrow -\infty$ ergibt sich dann der Limesübergang (3.98) für θ_1^\pm .

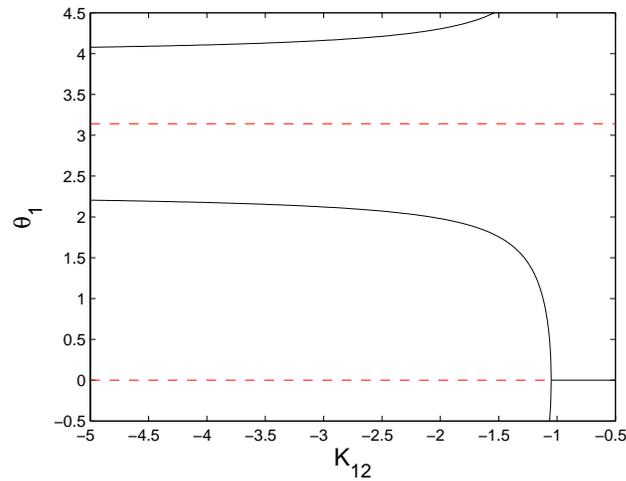


Abbildung 3.25.: Der Inphasenzustand $(0, 0)$ verliert seine Stabilität bei $K_{12} = -1.05$ durch eine superkritische Pitchfork-Verzweigung. Die dabei generierten stabilen Zweige $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$ existieren für alle $K_{12} < -1.05$ und zeigen für $K_{12} \rightarrow -\infty$ die folgende Konvergenz: $(\theta_1^+, \theta_2^+) \rightarrow (\pi - 0.84106867, -0.84106867)$, $(\theta_1^-, \theta_2^-) \rightarrow (\pi + 0.84106867, 0.84106867)$. Im Limes gilt also $\theta_1^\pm - \theta_2^\pm = \pi$.

Für θ_2^\pm folgt analog

$$\begin{aligned} \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} (\sin \theta_2^\pm)^2 &= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \frac{2b_1^2 b_2^2 + 2b_1^2 b_3^2 + 2b_2^2 b_3^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4}{4b_1^2 b_2^2} \\ &= \lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{b_3^2}{2b_2^2}}_{\rightarrow 1/2} - \underbrace{\frac{b_1^2}{4b_2^2}}_{\rightarrow 0} - \frac{(b_2^2 - b_3^2)^2}{4b_1^2 b_2^2} \right) \\ &= 1 - \frac{K_{21}^2 (K_{32} - K_{13} - K_{31})^2}{b_1^2}. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir nun auch die Darstellung $\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \theta_2^\pm$ in (3.98). Ferner ergibt sich der Grenzwert $\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} \Omega_\pm$ aus der Beziehung $\sin \theta_2^\pm = c_3(\Omega_\pm - \omega^*)$ und dem Limes

$$\lim_{K_{12} \rightarrow -\infty} c_3 = -\frac{1}{K_{23}}.$$

Gilt $K_{21} = K_{31}$ so ist $\det A_{K_{12}}(\pi, 0) = 0$ für alle $K_{12} \in \mathbb{R}$. Für $K_{12} < K_{12}^H$ gilt dann $\text{spur } A_{K_{12}}(\pi, 0) < 0$, $A_{K_{12}}(\pi, 0)$ besitzt somit für $K_{12} < K_{12}^H$ einen negativen Eigenwert $\lambda_1 < 0$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist daher für $K_{12} < K_{12}^H$ *neutral stabil* (d.h. *nicht asymptotisch stabil*).

□

Im Grenzfall (3.96) und $K_{21} < K_{31}$ treten somit zwei weitere interessante Phänomene auf: Zum einen erhalten wir eine *Bistabilität* von zwei unterschiedlichen Synchro-

nisationszuständen, welche, im Gegensatz zum Szenario in 3.2, für eine *unendliche Menge von inhibitorischen Kopplungsstärken* $(-\infty, K_{12}^i)$ existiert. Zum anderen erlangt hierbei *keiner* der *Antiphasezustände* $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ oder (π, π) Stabilität.

3.11. Verzweigungsanalyse in der 2-Parameter-Ebene

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir verschiedene mögliche Mechanismen für den Übergang der reinen Inphasen-Synchronisation zur reinen Antiphasen-Synchronisation kennengelernt:

1. **Stetiger Übergang von Inphase zu Antiphase** mit Existenz von Übergangszuständen (“Gleichgewicht“ von Inhibition und Exzitation, vgl. Abschnitt 3.2)
Verzweigungsmechanismus: *Superkritische Pitchfork-Bifurkationen* von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$
2. **Bistabilität von Inphase und Antiphase** (vgl. Abschnitt 3.4)
Verzweigungsmechanismus: *Subkritische Pitchfork-Bifurkationen* von $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$
3. **“Sprung“ von Inphase zu Antiphase** (vgl. Abschnitt 3.5)
Verzweigungsmechanismus: *Degenerierte Pitchfork-Bifurkation* mit Existenz unendlich vieler stationärer Punkte $(\vartheta, 0)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, im Verzweigungspunkt
4. **“Tristabilität“**, d.h. Existenz von 3 unterschiedlichen Synchronisationszuständen, repräsentiert einerseits durch *3 stabile Fixpunkte* und andererseits durch *Koexistenz eines stabilen Fixpunktes und zweier stabiler Grenzzyklen* (vgl. Abschnitt 3.6)
Verzweigungsmechanismus: *Superkritische Pitchfork-Bifurkation* von $(\pi, 0)$ mit Generierung zweier Zweige stabiler stationärer Lösungen $(\theta_1^\pm, \theta_2^\pm)$, welcher ihrerseits ihre Stabilität über *Hopf-Verzweigungen* wieder verlieren. Im Falle einer *superkritischen* Hopf-Bifurkation wiederum Generierung zweier Zweige von stabilen periodischen Orbits. *Subkritische Pitchfork-Verzweigung* von $(0, 0)$.
5. **Hopf-Bifurkation von $(\pi, 0)$** (vgl. Abschnitt 3.8)
Verzweigungsmechanismus: *Sub- oder superkritische Hopf-Verzweigung* von $(\pi, 0)$ mit entsprechender Generierung eines instabilen oder stabilen periodischen Orbits.
6. **Desynchronisation**: Nichtexistenz eines stabilen Fixpunkts oder einer stabilen periodischen Lösung (vgl. Abschnitt 3.9)
Verzweigungsmechanismus: *Sub- oder superkritische Hopf-Verzweigung* von $(\pi, 0)$

mit entsprechender Generierung eines Zweiges von instabilen oder stabilen periodischen Orbits, welcher über eine *homokline* Verzweigung wieder verschwindet.

Der Übergang von Inphasen- zu Antiphasen-Synchronisation für die stärker werdende Inhibition K_{12} hängt daher entscheidend von der Konfiguration der exzitatorischen Kopplungsparameter K_{ij} , $(i, j) \neq (1, 2)$, ab. Insbesondere durch die Größe von K_{21} und K_{31} wird die Dynamik des Systems (3.4) kontrolliert. Aus diesem Grund liegt es nahe, im Zusammenhang einer umfassenden Verzweigungsanalyse auch eine Darstellung der Bifurkationen in verschiedenen *2-Parameter-Ebenen* durchzuführen. Die Übergänge von einem Bifurkationsszenario der oben genannten Liste zu einem anderen können dann in einer 2-Parameter-Ebene als Bifurkation von *Kodimension* >1 beschrieben werden. Wir werden hierbei sowohl die Darstellung in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene als auch die in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene betrachten.

3.11.1. Darstellung in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene

Der exzitatorische Kopplungsparameter K_{21} wirkt der Inhibitionsstärke K_{12} genau entgegen, dies erklärt die herausragende Bedeutung der Größe von K_{21} im Hinblick auf das jeweils vorliegende Bifurkationsszenario. Für festgewählte Kopplungsgrößen K_{13} , K_{23} , K_{31} , K_{32} können nun folgende Kurven in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene beschrieben werden:

- **Pitchfork-Verzweigung der Inphase $(0, 0)$:**

$$K_{12}^i = -\frac{K_{23}K_{31} + K_{13}K_{32} + K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{31} + K_{32}}$$

- **Pitchfork-Verzweigung der Antiphase $(\pi, 0)$:**

$$K_{12}^a = \frac{-K_{23}K_{31} - K_{13}K_{32} - K_{13}K_{23} + K_{21}(K_{13} + K_{31} + K_{32})}{K_{23} + K_{32} - K_{31}}$$

$(\pi, 0)$ erlangt genau dann Stabilität über eine sub- oder superkritische Pitchfork-Verzweigung, wenn gilt

$$(K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 < (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{23}) \quad (3.99)$$

- **Hopf-Verzweigung der Antiphase $(\pi, 0)$:**

$$K_{12}^H = -K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + K_{32}$$

Diese Kurve existiert genau dann, wenn die zu (3.99) umgekehrte Ungleichung gilt.

- **Homokline Verzweigung in $(\pi, 0)$** : Generierung zweier Zweige periodischer Lösungen über eine doppelte homokline Verzweigung im Sattelpunkt $(\pi, 0)$. Diese Kurve existiert für

$$K_{31} < K_{21} < K_{23} + K_{32}$$

und kann numerisch ermittelt werden.

Durch $K_{12}^i(K_{21})$, $K_{12}^a(K_{21})$ und $K_{12}^H(K_{21})$ werden dann jeweils *lineare* Funktionen beschrieben. Des Weiteren ergeben sich die folgenden *kritischen Punkte* in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene:

- $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{31}$ und $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{12}^i = \mathbf{K}_{12}^a$: Übergang von *sub-* zu *superkritischen Pitchfork-Verzweigungen* in $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ (“Sprung“ von Inphase zu Antiphase, vgl. Abschnitt 3.5)
- $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{23} + \mathbf{K}_{32}$ und $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{12}^a$: Übergang von *sub-* zu *superkritischer Pitchfork-Verzweigung* in $(\pi, 0)$ mit Existenz unendlich vieler Fixpunkte der Form (π, ϑ) , $\vartheta \in [0, 2\pi)$ (vgl. Abschnitt 3.7)

Am Schnittpunkt der Kurven K_{12}^a und K_{12}^H erhalten wir nun die folgende Bifurkation von Kodimension 2:

3.20 Satz (Bogdanov-Takens-Bifurkation)

Es seien (3.2), (3.3), (3.16)-(3.18) sowie

$$(K_{23} + K_{32} - K_{31})^2 = (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{23}) = 0. \quad (3.100)$$

vorausgesetzt. Dann gilt $K_{12}^a(K_{21}) = K_{12}^H(K_{21})$. Bei $(K_{21}, K_{12}^H(K_{21}))$ liegt dann eine Bogdanov-Takens-Bifurkation vor.

Beweis. Die Identität $K_{12}^a = K_{12}^H$ aufgrund der Voraussetzung (3.100) folgt direkt mit Korollar 3.8. Folglich gilt für $K_{12} = K_{12}^a = K_{12}^H$

$$\det A_{K_{12}^H}(\pi, 0) = \text{spur } A_{K_{12}^H}(\pi, 0) = 0$$

Für die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ der Jacobi-Matrix $A_{K_{12}^H}(\pi, 0)$ erhalten wir daher $\lambda_{1/2} = 0$. Es liegt somit in diesem Punkt eine *Bogdanov-Takens-Bifurkation* der Antiphase $(\pi, 0)$ vor. Hierbei handelt es sich um den Spezialfall, dass die Bogdanov-Takens-Bifurkation entlang einer Hopf-Verzweigungskurve lokalisiert ist (vgl. [18]).

□

Ferner können die folgenden *Areale* in der $K_{21} - K_{12}$ -Ebene markiert werden:

- Gebiet der reinen **Inphasen-Synchronisation**: Parameterbereich, in welchem der Fixpunkt $(0, 0)$ einziger Attraktor ist

- Gebiet der reinen **Antiphasen-Synchronisation**: Parameterbereich, in welchem der Fixpunkt $(\pi, 0)$ einziger Attraktor ist
- Gebiet der **Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation**: Parameterbereich, in welchem eine *Bistabilität* der Fixpunkte $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ vorliegt
- Gebiet der **Übergangszustände**: Parameterbereich, in welchem stabile Fixpunkte (θ_1, θ_2) mit $\sin \theta_j \neq 0$ und $\sin(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$ existieren
- Gebiet der **Tristabilität**: Parameterbereich, in welchem eine Koexistenz von 3 unterschiedlichen Synchronisationszuständen vorliegt

Alle beschriebenen Kurven, kritischen Punkte und Areale sind exemplarisch in Abb. 3.26 dargestellt. Für die dort gewählte Konfiguration von Kopplungen $K_{13}, K_{23}, K_{31}, K_{32}$ gilt im Falle einer Hopf-Bifurkation bei K_{12}^H stets $\ell_1(K_{12}^H) > 0$, es liegt daher stets eine *subkritische* Hopf-Bifurkation vor.

3.11.2. Darstellung in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene

Für eine Darstellung der Bifurkationen in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene wählen wir nun eine feste Konfiguration von Kopplungskonstanten $K_{13}, K_{21}, K_{23}, K_{32}$. Durch die Voraussetzungen (3.16)-(3.18) wird dann der zulässige Bereich für K_{31} bestimmt. Des Weiteren setzen wir in diesem Fall auch (3.90) sowie (3.94) voraus:

$$\begin{aligned} (K_{23} + K_{23} - K_{31})^2 &< (K_{21} - K_{31})(K_{13} + K_{23}), \\ (K_{23} + K_{32})^2 - K_{31}^2 &< (K_{21} - K_{31})(K_{23} - K_{13}). \end{aligned}$$

Somit gilt stets $K_{12}^a > K_{12}^H$ sowie $K_{12}^i(K_{31}) > K_{12}^H(K_{31})$ nach den Korollaren 3.37 und 3.17, der Antiphasenzustand $(\pi, 0)$ erlangt daher seine Stabilität über eine *Hopf-Bifurkation*. Die Kurven K_{12}^i und K_{12}^H in Abhängigkeit von K_{31} können wie im vorherigen Fall auch in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene beschrieben werden; $K_{12}^H(K_{31})$ beschreibt weiterhin ein lineare Funktion, $K_{12}^i(K_{31})$ stellt eine Hyperbel-Funktion dar. Die folgende Bifurkation von Kodimension 2 lässt sich nun in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene darstellen:

3.21 Satz (Bautin-Bifurkation)

Es seien (3.2), (3.3), (3.16)-(3.18) sowie (3.90) vorausgesetzt. Gilt für (K_{31}, K_{12}) dann $K_{12} = K_{12}^H(K_{31})$ sowie $K_{31} = K_{31}^B$ wobei

$$(K_{13} + K_{31}^B)(K_{21} + K_{31}^B - K_{23} - K_{32}) + (K_{23} - K_{21})(K_{23} + K_{32}) = 0 \quad (3.101)$$

so findet bei $(K_{31}^B, K_{12}^H(K_{31}^B))$ eine **Bautin-Bifurkation** (*syn. degenerierte Hopf-Bifurkation*) statt.

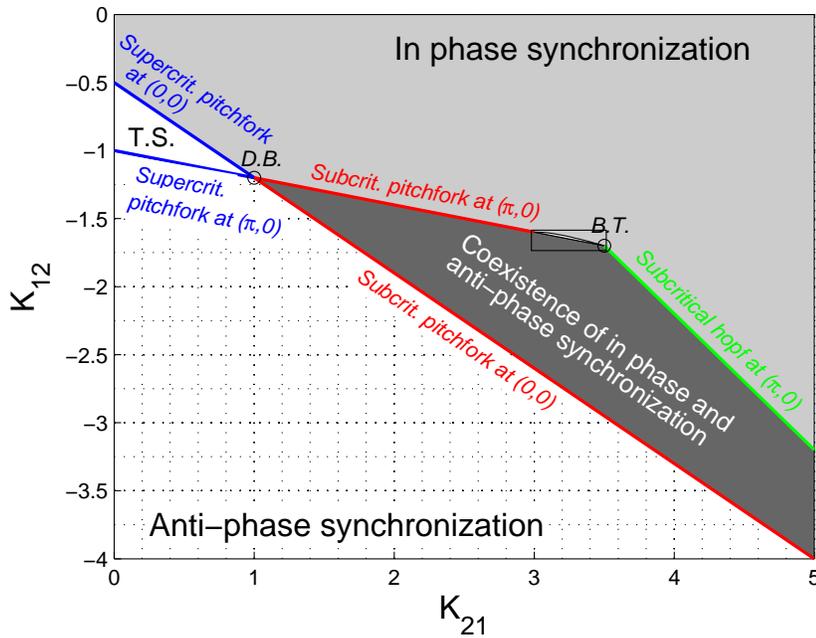
Beweis. Nach Satz 3.16 findet bei $K_{12} = K_{12}^H(K_{31})$ jeweils eine *Hopf-Verzweigung* statt, welche über den 1. Lyapunov-Koeffizienten $\ell_1(K_{12}^H)$ jeweils klassifiziert werden kann (vgl. (3.91)). Gilt für $K_{31} = K_{31}^B$ (3.101), so gilt für $(K_{12}^H(K_{31}^B))$ gerade

$$\det A_{K_{12}^H(K_{31}^B)}(\pi, 0) > 0 \quad \wedge \quad \text{spur } A_{K_{12}^H(K_{31}^B)}(\pi, 0) = 0 \quad \wedge \quad \ell_1(K_{12}^H(K_{31}^B)) = 0.$$

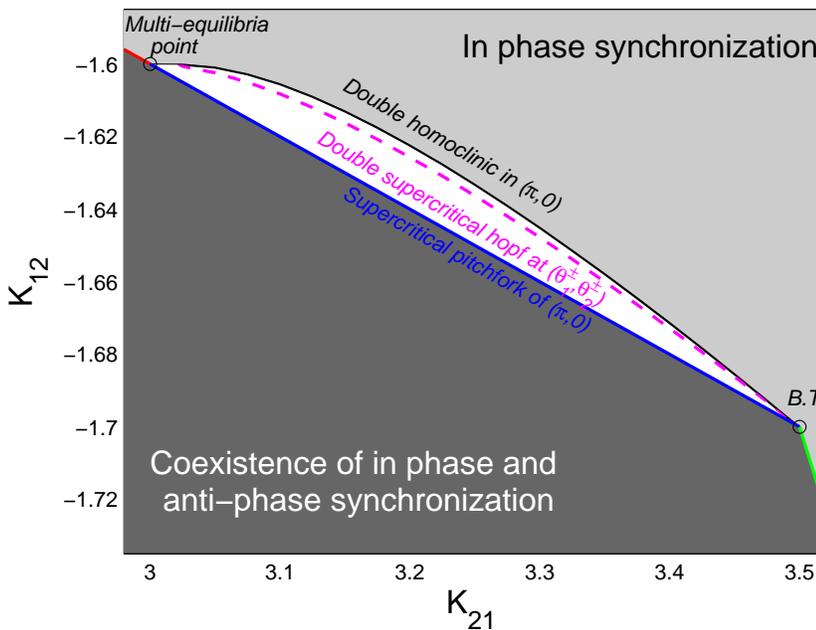
Damit sind gerade die Bedingungen für eine *Bautin-Bifurkation* gegeben (vgl. [18]). Bei $(K_{31}^B, K_{12}^H(K_{31}^B))$ findet also auf der Kurve $(K_{31}, K_{12}^H(K_{31}))$ gerade der Übergang von einer *sub-* zu einer *superkritischen Hopf-Verzweigung* statt.

□

Neben den Gebieten der reinen **Inphasen-Synchronisation** und der reinen **Anti-phasen-Synchronisation** kann nun auch noch ein **Desynchronisationsregime** in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene markiert werden (vgl. Abschnitt 3.9). Das Areal der reinen Antiphasen-Synchronisation kann zum einen durch den stabilen Fixpunkt $(\pi, 0)$ repräsentiert sein, zum anderen auch durch einen stabilen periodischen Orbit, welcher den (in diesem Falle instabilen) Fixpunkt $(\pi, 0)$ umgibt. Außerdem können wir wiederum denjenigen Parameterbereich beschreiben, in dem eine **Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation** vorliegt (vgl. Abb. 3.27).



(a) Darstellung des Gebiets der reinen Inphasen-Synchronisation (hellgrau), des Areals der reinen Antiphasen-Synchronisation (Gitterlinien) sowie des Gebiets der Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation (dunkelgrau). Weißes Areal: Parameterbereich, in dem stabile Übergangszustände zwischen In- und Antiphase existieren (T.S.=transitional states). Bei $(K_{21}, K_{12}) = (1, -1.2)$ gilt $K_{12} = K_{12}^i = K_{12}^a$: Degenerierte Bifurkation (D.B.) als Übergang von super- zu subkritischen Pitchfork-Bifurkationen der Fixpunkte $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ ("Sprung" von Inphase zu Antiphase). $(K_{21}, K_{12}) = (3.5, -1.6)$: Bogdanov-Takens-Bifurkation (B.T.) von $(\pi, 0)$. Das durch das Rechteck markierte Teilgebiet ist in Abb. 3.26b detaillierter dargestellt.



(b) Darstellung des Tristabilitäts-Areals (weiß). Gebiet zwischen blauer und magentafarbener Kurve: Koexistenz von 3 stabilen stationären Punkten vor $((0, 0), (\theta_1^\pm, \theta_2^\pm))$. Gebiet zwischen magentafarbener und schwarzer Kurve: Koexistenz des stabilen Fixpunkts $(0, 0)$ und zweier stabiler Grenzzyklen. $(K_{21}, K_{31}) = (3, -1.6)$: "Umschlagen" von sub- zu superkritischer Pitchfork-Verzweigung in $(\pi, 0)$ mit Existenz unendlich viele stationäre Punkte der Form (π, ϑ) , $\vartheta \in [0, 2\pi)$. (Ermittlung der Kurve der homoklinen Verzweigungen mittels XPPAUT)

Abbildung 3.26.: Darstellung des $K_{21} - K_{12}$ -Verzweigungsdiagramms für $K_{13} = 0.2$, $K_{23} = 1.4$, $K_{31} = 1$, $K_{32} = 1.6$.

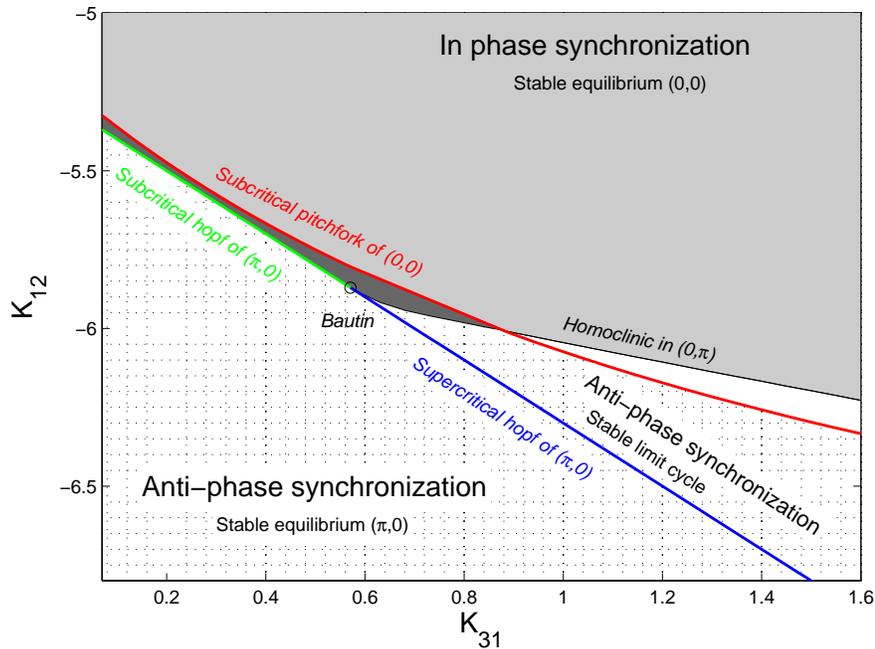


Abbildung 3.27.: $K_{13} = 1$, $K_{21} = 6$, $K_{23} = 1.5$, $K_{32} = 0.2$. Darstellung des Gebiets der reinen Inphasen-Synchronisation (hellgrau), des Desynchronisationsregimes (dunkelgrau), des Areals der reinen Antiphasen-Synchronisation (Gitterlinien) sowie des Gebiets der Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation (weiß) in der $K_{31} - K_{12}$ -Ebene. Die Antiphasen-Synchronisation kann sowohl durch den stabilen Fixpunkt $(\pi,0)$ als auch durch einen stabilen Grenzzyklus (um $(\pi,0)$ herum gelegen) repräsentiert sein. Es sind nur diejenigen Bifurkationen dargestellt, bei welchen stabile Fixpunkte oder Grenzzyklen generiert werden: Subkritische Pitchfork-Bifurkation der Inphase $(0,0)$ (rot), subkritische (grün) bzw. superkritische (blau) Hopf-Verzweigung von $(\pi,0)$, homokline Bifurkation eines stabilen Grenzzyklus im Sattelpunkt $(0,\pi)$ (schwarz). Bautin-Bifurkation bei $(K_{31}, K_{12}) \approx (0.5706, -5.8706)$. (Ermittlung der Kurve der homoklinen Bifurkation mittels *XPPAUT*)

4. Diskussion und Ausblick

4.1. Modellierung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Differentialgleichungssystem von 3 phasengekoppelten Oszillatoren zur Modellierung thalamo-kortikaler Schleifen präsentiert. Hierbei wurden zwei unterschiedliche Konfigurationen eines thalamo-kortikalen Regelkreises betrachtet. Im ersten Fall, welcher in Kapitel 2 untersucht wurde, handelte es sich um ein *rein exzitatorisches* System zur Modellierung der Interaktionen zweier kortikaler Areale und eines thalamischen Kerngebiets. In Kapitel 3 wurde hingegen eine *inhibitorisch-exzitatorische* Konfiguration, bestehend aus einem thalamischen und einem kortikalen Areal sowie einem Gebiet des Nucleus reticularis, analysiert. Als Ansatz für ein korrespondierendes mathematisches Modell wurde in beiden Fällen ein *modifiziertes Kuramoto-System* für 3 phasengekoppelte Oszillatoren gewählt:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - \frac{K_{13}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \frac{K_{21}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_1\phi_1) - \frac{K_{23}}{n_2} \sin(n_2\phi_2 - n_3\phi_3) \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_3 - \frac{K_{31}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_1\phi_1) - \frac{K_{32}}{n_3} \sin(n_3\phi_3 - n_2\phi_2)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Die Veränderungen und Erweiterungen dieses Modells im Vergleich zum klassischen Kuramoto-Modell (vgl. (1.28)) umfasst dabei die folgenden Punkte:

- **Asymmetrische Kopplungen:** Anstelle einer globalen Kopplungskonstante K ist die Kopplungsstärke zwischen dem i -ten und j -ten Oszillator jeweils individuell durch den zugehörigen Parameter K_{ij} bestimmt.
- **Skalierungskoeffizienten n_i :** Nicht die Phasendifferenzen $\phi_i - \phi_j$ sondern die gewichteten Phasendifferenzen $n_i\phi_i - n_j\phi_j$, $n_i, n_j \in \mathbb{N}$, gehen in die Berechnung der sinus-Kopplungsterme mit ein. Voraussetzung an die Skalierungskoeffizienten n_i, n_j ist hierbei eine *Resonanzbedingung* der Form $|n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$.
- **Inhibitorische vs. exzitatorische Kopplungen:** Inhibitorische Kopplungen sind durch eine korrespondierende negative Kopplungskoeffizienten $K_{ij} < 0$ charakterisiert, während exzitatorische Kopplungen durch $K_{ij} > 0$ gekennzeichnet sind. Auf diese Weise können durch das System (4.1) auch *gemischt-inhibitorisch-exzitatorische* Kopplungskonfigurationen modelliert werden. In

einem System mit klassischer Kuramoto-Kopplung ist hingegen nur ein *rein inhibitorisches oder rein exzitatorisches* Setting möglich.

Durch diese Modifikationen erhalten wir somit ein System, welches im Vergleich zum Kuramoto-Modell eine weitaus größere Flexibilität bei der Festlegung der Kopplungstopologie und damit auch eine größere Anwendungsbreite zulässt. So ist etwa die Modellierung *inhibitorisch-exzitatorischer* Systeme wie in Kapitel 3 mit einem klassischen Kuramoto-Ansatz nicht möglich.

4.2. Resultate der mathematischen Analyse

Im Rahmen der mathematischen Analyse des Systems (4.1) wurde zunächst das System mit rein exzitatorischer Kopplungskonfiguration untersucht. Hierbei wurden die Differenzen der skalierten natürlichen Frequenzen $\epsilon_j = n_j\omega_j - n_3\omega_3$ für $j = 1, 2$ als Systemparameter angesetzt. Davon ausgehend erfolgte eine Abschätzung des Synchronisationsregimes in der (ϵ_1, ϵ_2) -Ebene sowie eine Bifurkationsanalyse. Hierbei konnten wir zeigen, dass das Verlassen des Synchronisationsregimes, d.h. der Übergang von einem synchronisierten zu einem desynchronisierten System, gerade einer *Sattel-Knoten-Bifurkation* des korrespondierenden Systems der gewichteten Phasendifferenzen entspricht. Der gleiche Verzweigungsmechanismus findet sich auch beim klassischen Kuramoto-System (vgl. [19]). Rein *qualitativ* unterscheidet sich daher das Synchronisationsverhalten des exzitatorischen Systems (4.1) nicht von dem des Kuramoto-Modells.

Bei der *quantitativen* Analyse treten jedoch einige Unterschiede des Systems (4.1) zu klassischen Phasenmodellen auf. In 2.4 konnten wir eine approximative Darstellung der Phasenverschiebungen und Frequenz für das synchronisierte System herleiten. Dabei zeigte sich deutlich die Regulation dieser Größen durch die Kopplungsparameter K_{ij} (vgl. Satz 2.12). Beim Kuramoto-System hingegen ist die Synchronisationsfrequenz stets unabhängig von der Kopplungsstärke (vgl. (2.105)).

Ebenso kann beim Kuramoto-System für 3 phasengekoppelte Oszillatoren eine echte *partielle Synchronisation* nur zwischen denjenigen Phasenoszillatoren ϕ_i, ϕ_j auftreten, für die gilt: $|\omega_i - \omega_j| = \min_{k \neq l} |\omega_k - \omega_l|$.

Im System (4.1) hingegen ist bei geeigneter Konfiguration der Kopplungen K_{ij} eine partielle Synchronisation für jede Oszillatorenpaarung möglich (vgl. Abschnitt 2.5).

Insbesondere die Abhängigkeit der Synchronisationsfrequenz von den Kopplungsgrößen lässt nun darauf schließen, dass der Ansatz durch das System (4.1) zur Modellierung neuronaler Regelkreise besser geeignet ist als klassische Phasenmodelle mit symmetrischer Kopplung: Wird der Einfluss des i -ten neuronalen Areal auf die anderen beiden immer stärker, ohne dass diese ihr Feedback auf das i -te Areal in gleichem Maße verstärken, so hat dies zur Folge, dass das i -te Areal den anderen

beide seine eigene Frequenz gewissermaßen “auf obtruiert“. Für das System (4.1) bedeutet dies $K_{ji} \rightarrow \infty$ für $j \neq i$ bei gleichbleibenden K_{jk} , $k \neq i$, und K_{ij} . Mit der Darstellung aus Satz 2.12 erhalten wir dann $\Omega \rightarrow n_i \omega_i$, das asymptotische Verhalten der Synchronisationsfrequenz stellt sich damit als physiologisch plausibel heraus.

Im zweiten Schritt erfolgte eine Analyse des Systems (4.1) mit *inhibitorisch-exzitatorischer* Kopplungskonfiguration. Hierbei wurde $K_{12} < 0$ als einziger inhibitorischer Parameter angesetzt. Des Weiteren wurde ausschließlich der Fall $n_i \omega_i - n_j \omega_j = 0$ betrachtet. Für eine schwache Inhibition $|K_{12}| \ll 1$ dominieren im System (4.1) die exzitatorischen Verbindungen. Dies äußert sich durch das Auftreten einer *Inphasen-Synchronisation*. Im Zuge einer stärker werdenden Inhibition findet hingegen ein Übergang zu einer *Antiphasen-Synchronisation* statt.

Grundlegende Fragestellung in Kapitel 3 war daher, auf welche Weise sich dieser Wechsel von Inphasen- zu Antiphasen-Synchronisation vollzieht. Zu diesem Zweck wurde die inhibitorische Kopplungsgröße K_{12} als *Bifurkationsparameter* betrachtet. Davon ausgehend erfolgte dann eine umfassende Verzweigungsanalyse. In Abhängigkeit von der Konfiguration der übrigen exzitatorischen Kopplungsparameter ergaben sich dabei zahlreiche unterschiedliche Bifurkationsszenarien, welche durch analytische Methoden nahezu vollständig klassifiziert werden konnten.

Während bei rein exzitatorischen Systemen ein Synchronisationszustand stets eindeutig bestimmt ist, kann die Existenz einer inhibitorischen Kopplung zu einer *Mehrstabilität* unterschiedlicher Synchronisationszustände führen. Auch die zugehörigen Synchronisationsfrequenzen können sich dabei voneinander unterscheiden. In Kapitel 3 wurde nachgewiesen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Kopplungsgrößen K_{ij} im System (4.1) bis zu 3 unterschiedliche Synchronisationszustände mit jeweils voneinander verschiedenen Frequenzen auftreten können.

Besonderes Interesse gilt in diesem Zusammenhang der Existenz von Kopplungskonfigurationen, in denen sich Inhibition und Exzitation gewissermaßen “im Gleichgewicht“ befinden. Dies ist der Fall bei einer *Koexistenz von Inphasen- und Antiphasen-Synchronisation* sowie beim Auftreten von Synchronisationslösungen, welche sich als *Übergangszustand von Inphase zu Antiphase* darstellen. In Kapitel 3 wurde dabei genau dargelegt, unter welchen Voraussetzungen an die Kopplungskoeffizienten solche Gleichgewichtslösungen gerade auftreten.

Eine weitere Besonderheit des inhibitorisch-exzitatorischen Systems stellt das mögliche Auftreten von *Hopf-Bifurkationen* dar. Während im rein exzitatorischen System sowie im klassischen Kuramoto-Modell keine Hopf-Verzweigungen möglich sind (vgl. A.1), konnten für das inhibitorisch-exzitatorische System notwendige und hin-

reichende Bedingungen für das Auftreten dieses Verzweigungstyps bewiesen werden.

Neben dem gleichzeitigen Auftreten mehrerer unterschiedlicher Synchronisationszustände, kann auch das komplette Gegenteil eintreten: Es existieren inhibitorisch-exzitatorische Parameterkonfigurationen, für die das zugehörige System (4.1) *keine* Synchronisationslösung besitzt. Dieses Resultat ist insofern erstaunlich, als dass auch hier für die gewichteten natürlichen Frequenzen die Resonanzbedingung $n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3$ gültig ist; in einem entsprechenden rein exzitatorischen System würde diese Voraussetzung *immer* die Existenz eines Synchronisationszustandes implizieren (vgl. Lemma 2.5 und 2.6). Hinreichende Bedingungen für das Auftreten eines komplett *desynchronen* Systems konnten ebenfalls in Kapitel 3 bewiesen werden.

Numerische Analysen geben des Weiteren Anlass zu der Vermutung, dass im Falle einer Desynchronisation eine *partielle Phasensynchronisation* zwischen zwei Oszillatoren bestehen bleibt.

Ferner konnten die Übergänge von verschiedenen Bifurkationsszenarien zueinander auch in verschiedenen *2-Parameter-Ebenen* als *Kodimension-2-Bifurkationen* veranschaulicht werden.

4.3. Zukünftige Untersuchungen

Die hier vorgestellten Phasenmodelle können analog auf Konfigurationen mit mehr als 3 Oszillatoren erweitert werden. So ist im Rahmen eines 4-Oszillatoren-Modells eine Integration der Ergebnisse aus Kapitel 2 und 3 dieser Arbeit möglich:

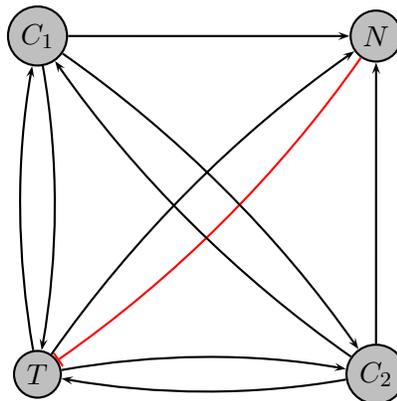


Abbildung 4.1.: Thalamo-kortikaler Regelkreis bestehend aus 2 kortikalen Arealen (C_1, C_2) sowie einem thalamischen (T) und einem retikulären Areal (N). Reziproke exzitatorische Verbindungen (schwarz) zwischen dem thalamischen und den kortikalen Arealen sowie zwischen den kortikalen Arealen. Jedes kortikale und thalamische Areal projiziert exzitatorisch auf den retikulären Kern, das Gebiet des Nucleus reticularis projiziert hingegen *inhibitorisch* auf das thalamische Areal.

Betrachten wir eine Konfiguration bestehend aus einem thalamischen, einem retiku-

lären und zwei kortikalen Arealen, so erhalten wir ein entsprechendes System von 4 phasengekoppelten Oszillatoren (Abb. 4.1). In [24] und [34] zeigten *Tsimring et al.*, dass bei Kuramoto-Systemen für N Oszillatoren mit $N \geq 4$ und rein inhibitorischer Kopplung, im Falle $0 < |\omega_i - \omega_j| \ll 1$ für alle i, j , *keine Synchronisationslösung* existiert. In diesem Zusammenhang wäre somit die Fragestellung interessant, ob und unter welchen Voraussetzungen bei einem gemischt inhibitorisch-exzitatorischen System mit $0 < |n_i\omega_i - n_j\omega_j| \ll 1$ Synchronisationszustände existieren.

Des Weiteren besteht die Möglichkeit, *time delays* in die Kopplungsfunktionen des Systems (4.1) zu integrieren. Insbesondere für den inhibitorischen Feedback-Term $K_{12} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2)$ kann die Einführung eines Verzögerungsterms physiologisch plausibel sein: Die inhibitorische Projektion des Nucleus reticularis trifft in Wahrheit etwas zeitverzögert zu der exzitatorischen kortikalen Projektion am Thalamus ein.

A. Ergänzungen zum Exzitatorischen System

A.1. Nichtexistenz von Hopf-Verzweigungen

Notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Hopf-Verzweigung im System (2.4) ist

$$\begin{aligned}
 0 &= \text{spur } A(\theta_1, \theta_1) \\
 &= -(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (K_{13} + K_{31}) \cos \theta_1 \\
 &\quad - (K_{23} + K_{32}) \cos \theta_2.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Unter der Voraussetzung $K_{ij} > 0 \forall (i, j)$ kann höchstens einer der drei Terme $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$ gleich 0 sein. Des Weiteren muss mindestens einer der Terme negativ und mindestens einer positiv sein. Wir betrachten zunächst die folgenden zwei Konstellationen:

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta_1 - \theta_2) > 0, \quad \cos \theta_1 < 0, \quad \cos \theta_2 \leq 0, \quad \text{bzw.} \\
 \cos(\theta_1 - \theta_2) < 0, \quad \cos \theta_1 > 0, \quad \cos \theta_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Gilt (A.1), so folgt

$$\begin{aligned}
 \text{sign}(- (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{13} \cos \theta_1) &= \text{sign}(\cos \theta_2), \\
 \text{sign}(- (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{23} \cos \theta_2) &= \text{sign}(\cos \theta_1).
 \end{aligned}$$

Mit der Darstellung von $\det A(\theta_1, \theta_2)$ aus (2.20) erhalten wir in jedem Fall

$$\begin{aligned}
 \det A(\theta_1, \theta_2) &= \underbrace{-\cos \theta_1(-K_{31}(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{23}K_{31} \cos \theta_2)}_{\leq 0} \\
 &\quad \underbrace{-\cos \theta_2(-K_{32}(K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{13}K_{32} \cos \theta_1)}_{\leq 0} \\
 &\quad + K_{13}K_{23} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + K_{13}K_{21} \cos(\theta_1 - \theta_1) \cos \theta_1 \\
 &\quad + K_{12}K_{23} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 \\
 &< \max \left(-K_{13} \cos \theta_1 (-K_{23} \cos \theta_2 - (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2)), \right. \\
 &\quad \left. -K_{23} \cos \theta_2 (-K_{13} \cos \theta_1 - (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2)) \right) \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

da höchstens einer der beiden Terme $\cos \theta_1(-K_{23} \cos \theta_2 - (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2))$ und $\cos \theta_2(-K_{13} \cos \theta_1 - (K_{12} + K_{21}) \cos(\theta_1 - \theta_2))$ gleich 0 sein kann.

Eine Hopf-Verzweigung kann somit nicht vorliegen. Der Beweis für jede weitere mögliche Vorzeichenkonstellation der Terme $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$ erfolgt analog.

A.2. Berechnung der Kurven γ_L^i und γ_R^j

Wir zeigen beispielhaft, wie die Berechnung der Kurve γ_L^1 erfolgt. Mit γ_L^1 soll gerade diejenige Parametermenge in M charakterisiert werden, für deren Elemente (ϵ_1, ϵ_2) gilt

$$\Omega_L = \Omega_L^1 \quad \text{und} \quad H(\Omega_L^1) = H_{2,3}(\Omega_L^1) = 0.$$

Wegen $\arcsin(c_1 \Omega_L^1 - d_1) = -\frac{\pi}{2}$ folgt für die in (2.72) definierte Funktion H :

$$H(\Omega_L^1) = \frac{3}{2}\pi - \arcsin(c_2 \Omega_L^1 - d_2) - \arcsin(c_3 \Omega_L^1 - d_3).$$

Wir erhalten somit die Identität

$$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(c_2 \Omega_L^1 - d_2) + \arcsin(c_3 \Omega_L^1 - d_3),$$

welche äquivalent zu den folgenden 3 Bedingungen ist:

$$0 \geq c_2 \Omega_L^1 - d_2, \tag{A.2}$$

$$0 \geq c_3 \Omega_L^1 - d_3, \tag{A.3}$$

$$1 = (c_2 \Omega_L^1 - d_2)^2 + (c_3 \Omega_L^1 - d_3)^2. \tag{A.4}$$

Die Auswertung der Terme $c_j \Omega_L^1 - d_j$ liefert wiederum die Äquivalenz von (A.2), (A.3) und (A.4) zu

$$\begin{aligned} b_2 &\geq -(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2, \\ b_3 &\geq -K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2, \\ b_1^2 &= \left(-(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2 - b_2 \right)^2 \\ &\quad + \left(-K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 - b_3 \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen $\Omega_L^i \leq \Omega_L^1$ für $i = 2, 3$ folgt außerdem

$$\begin{aligned} -(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2 &\geq b_2 - b_1, \\ -K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2 &\geq b_3 - b_1. \end{aligned}$$

Für jedes (ϵ_1, ϵ_2) mit den oben geforderten Eigenschaften gilt daher mit einem $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} b_2 - sb_1 &= -(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 + K_{32}\epsilon_2, \\ b_3 - \sqrt{1 - s^2}b_1 &= -K_{31}\epsilon_1 + (K_{13} + K_{31})\epsilon_2. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Durch Auflösen von (A.5) nach (ϵ_1, ϵ_2) erhalten wir schließlich γ_L^1 :

$$\begin{aligned} \gamma_L^1 : s \mapsto & \left(-K_{12} + (K_{13} + K_{31})s - K_{32}\sqrt{1 - s^2}, \right. \\ & \left. -K_{21} - K_{31}s + (K_{23} + K_{32})\sqrt{1 - s^2} \right). \end{aligned} \quad s \in [0, 1]$$

In analoger Weise können nun γ_L^2, γ_L^3 sowie $\gamma_R^j, j = 1, 2, 3$, berechnet werden.

A.3. Berechnung der Kurven $\tau_{i,j}^{Lk}$ und $\tau_{i,j}^{Rk}$

Wir zeigen hier exemplarisch die Berechnung der Kurve $\tau_{1,2}^{L2}$ (siehe (2.91)), die Herleitung der übrigen Darstellungen (2.92) und (2.95)-(2.104) erfolgt analog.

Mit $\tau_{1,2}^{L2}$ soll gerade diejenige Parametermenge in M charakterisiert werden, für deren Elemente (ϵ_1, ϵ_2) gilt:

$$\Omega_L = \Omega_L^2 \quad \text{und} \quad H_{1,2}(\Omega_L^2) = H_1(\Omega_L^2) = 0.$$

Wir erhalten somit die Identität

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin(c_1\Omega_L^2 - d_1) - \arcsin(c_3\Omega_L^2 - d_3),$$

welche äquivalent zu den folgenden 3 Bedingungen ist:

$$0 \leq c_1\Omega_L^2 - d_1, \tag{A.6}$$

$$0 \geq c_3\Omega_L^2 - d_3, \tag{A.7}$$

$$1 = (c_1\Omega_L^2 - d_1)^2 + (c_3\Omega_L^2 - d_3)^2. \tag{A.8}$$

Die Auswertung der Terme $c_j\Omega_L^1 - d_j$ liefert wiederum die Äquivalenz von (A.6), (A.7) und (A.8) zu

$$\begin{aligned} b_1 &\leq (K_{23} + K_{32})\epsilon_1 - K_{32}\epsilon_2, \\ b_3 &\geq K_{21}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2, \\ b_2^2 &= \left((K_{23} + K_{32})\epsilon_1 - K_{32}\epsilon_2 - b_1 \right)^2 \\ &\quad + \left(K_{21}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2 - b_3 \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen $\Omega_L^3 \leq \Omega_L^2$ folgt außerdem

$$K_{21}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2 \geq b_3 - b_2.$$

Des Weiteren erhalten wir aus Satz 2.9 (vgl. (2.35))

$$(K_{23} + K_{32})\epsilon_1 - K_{32}\epsilon_2 \leq b_1 + b_2.$$

Für jedes (ϵ_1, ϵ_2) mit den oben geforderten Eigenschaften gilt daher mit einem $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} b_1 + sb_2 &= (K_{23} + K_{32})\epsilon_1 - K_{32}\epsilon_2, \\ b_3 - \sqrt{1-s^2}b_2 &= K_{21}\epsilon_1 + K_{12}\epsilon_2. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Durch Auflösen von (A.9) nach (ϵ_1, ϵ_2) erhalten wir schließlich $\tau_{1,2}^{L2}$:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}^{L2} : s \mapsto & \left(K_{13} + K_{31} + K_{12}s - K_{32}\sqrt{1-s^2}, \right. \\ & \left. K_{31} - K_{21}s - (K_{23} + K_{32})\sqrt{1-s^2} \right). \end{aligned} \quad s \in [0, 1]$$

In analoger Weise können nun die übrigen Kurven $\tau_{i,j}^{Lk}$ sowie $\tau_{i,j}^{Rk}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, berechnet werden.

B. Ergänzungen zum inhibitorisch-exzitatorischen System

Berechnung der Lyapunov-Koeffizienten

Zur Klassifikation der Hopf-Verzweigung in Abschnitt 3.8 berechnen wir nun den zugehörigen Lyapunov-Koeffizienten. Die Vorgehensweise folgt dabei Methoden, wie sie etwa in [12] und [18] beschrieben werden.

Die folgenden Ausführungen schließen sich in ihrer Notation direkt an den Beweis von Satz 3.16 an.

Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \vartheta_1 + \pi, \\ \theta_2 &= \vartheta_2\end{aligned}\tag{B.1}$$

erhalten wir das System

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1 &= K_{12} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (K_{13} + K_{31}) \sin \vartheta_1 - K_{32} \sin \vartheta_2, \\ \dot{\vartheta}_2 &= -K_{21} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + K_{31} \vartheta_1 - (K_{23} + K_{32}) \vartheta_2.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Mit der Taylorapproximation $\sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + O(|z|^5)$ für $|z| \ll 1$ folgt weiter aus (B.2):

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1 &= (K_{12} + K_{13} + K_{31})\vartheta_1 - (K_{12} + K_{32})\vartheta_2 \\ &\quad - \frac{K_{12}}{6}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^3 - \frac{K_{13} + K_{31}}{6}\vartheta_1^3 + \frac{K_{32}}{6}\vartheta_2^3 + O(\|\vartheta\|^5), \\ \dot{\vartheta}_2 &= (-K_{21} + K_{31})\vartheta_1 + (K_{21} - K_{23} - K_{32})\vartheta_2 \\ &\quad + \frac{K_{21}}{6}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^3 - \frac{K_{31}}{6}\vartheta_1^3 + \frac{K_{23} + K_{32}}{6}\vartheta_2^3 + O(\|\vartheta\|^5).\end{aligned}\tag{B.3}$$

Zusammenfassend können wir (B.3) nun wie folgt notieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}C(\vartheta, \vartheta, \vartheta) + O(\|\vartheta\|^5),\tag{B.4}$$

wobei

$$C(x, y, z) := \begin{pmatrix} -K_{12}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) - (K_{13} + K_{31})x_1y_1z_1 + K_{32}x_2y_2z_2 \\ +K_{21}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) - K_{31}x_1y_1z_1 + (K_{23} + K_{32})x_2y_2z_2 \end{pmatrix}$$

für $x, y, z \in \mathbb{C}^2$. Ferner sind die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ von \mathcal{A} gegeben durch $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$ mit

$$\omega_0 := \sqrt{\det \mathcal{A}} = \sqrt{-b_1 - b_2 + b_3}.$$

Hierzu bestimmen wir nun zugehörige Eigenvektoren $p, q \in \mathbb{C}^2$, so dass gilt

$$\mathcal{A}^T p = -i\omega_0 p \quad \text{und} \quad \mathcal{A} q = i\omega_0 q, \quad (\text{B.5})$$

sowie die Voraussetzung

$$p \bullet q = \bar{p}_1 \cdot q_1 + \bar{p}_2 \cdot q_2 = 1 \quad (\text{B.6})$$

erfüllt ist. Mit der Wahl

$$p := \begin{pmatrix} \omega_0 - i(K_{21} - K_{23} - K_{32}) \\ -i(K_{12} + K_{32}) \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega_0} \\ \frac{K_{12} + K_{13} + K_{31}}{2(K_{12} + K_{32})\omega_0} - i \frac{1}{2(K_{12} + K_{32})} \end{pmatrix}$$

sind sowohl (B.5) als auch (B.6) gültig.

Gemäß der Notation in [18] setzen wir

$$\begin{aligned} g_{21} &:= p \bullet C(q, q, \bar{q}) \\ &= \bar{p}_1 \cdot \left(-K_{12}|q_1 - q_2|^2(q_1 - q_2) - (K_{13} + K_{31})|q_1|^2 q_1 + K_{32}|q_2|^2 q_2 \right) \\ &\quad + \bar{p}_2 \cdot \left(+K_{21}|q_1 - q_2|^2(q_1 - q_2) - K_{31}|q_1|^2 q_1 + (K_{23} + K_{32})|q_2|^2 q_2 \right). \end{aligned}$$

Für den zu errechnenden Lyapunov-Koeffizienten $\ell_1(K_{12}^H)$ und g_{21} gilt aufgrund des Nichtvorhandenseins quadratischer Terme in (B.4) der folgende Zusammenhang:

$$\ell_1(K_{12}^H) = \frac{1}{2\omega_0} \Re e g_{21}.$$

Durch Berechnung von $\Re e g_{21}$ erhalten wir somit

$$\ell_1(K_{12}^H) = \frac{1}{16\omega_0^3} \frac{(K_{13} + K_{31})(K_{21} + K_{31} - K_{23} - K_{32}) + (K_{23} - K_{21})(K_{23} + K_{32})}{-K_{21} - K_{13} - K_{31} + K_{23} + 2K_{32}}. \quad (\text{B.7})$$

Ist $\ell_1(K_{12}^H) < 0$, so liegt eine *superkritische* Hopf-Verzweigung vor, falls hingegen $\ell_1(K_{12}^H) > 0$ gilt, so handelt es sich um eine *subkritische* Bifurkation.

C. Numerische Simulation

C.1. Numerische Berechnung der Phasen ϕ_j mit Stimulierung des 1. Phasenoszillators

Für die Berechnung der Flüsse ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 in den Beispielen von Abb. 3.5b, 3.8 und 3.22 wurde ein *explizites Euler-Verfahren* verwendet. Die Evolutionsgleichung für ϕ_1 (also die Phase des *Thalamus*) wurde in den Beispielen von Abb. 3.5b und 3.8 durch einen zusätzlichen *Stimulationsterm* $I(t)$ ergänzt:

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 - \frac{K_{12}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_2\phi_2) - \frac{K_{13}}{n_1} \sin(n_1\phi_1 - n_3\phi_3) + I(t) \cos(\phi_1).$$

$I(t)$ ist hierbei als Treppenfunktion gegeben:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{I}{n_1} & t \in [t_{\text{on}}, t_{\text{off}}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch $I > 0$ kann hierbei die Intensität der Stimulation reguliert werden. Durch das Intervall $[t_{\text{on}}, t_{\text{off}})$ wird dann die *On-* und *Offset-Zeit* des Stimulus festgelegt. Je größer also $t_{\text{off}} - t_{\text{on}}$ und I , desto stärker ist der Einfluss der Stimulation auf die Dynamik des Systems.

Des Weiteren wurde in den hier aufgeführten Beispielen der Einfachheit halber stets $n_1 = 1$ vorausgesetzt.

Für die *Zeitschrittweite* Δt im Euler-Iterationsverfahren wurde in allen Beispielen $\Delta t = 0.1$ festgelegt. Die Anfangswerte $n_i\phi_i(0)$ und die Parameter $I, t_{\text{off}}, t_{\text{on}}$ wurden in den einzelnen Beispielen wie folgt festgesetzt:

- **Abbildung 3.5b:** Anfangswerte $n_1\phi_1(0) = 3.2, n_2\phi_2(0) = 0.2, n_3\phi_3(0) = 0.1$.
Stimulationsparameter $I = 50, t_{\text{on}} = 3000, t_{\text{off}} = 3001$
- **Abbildung 3.8:** Anfangswerte $n_1\phi_1(0) = 3.2, n_2\phi_2(0) = 0.2, n_3\phi_3(0) = 0.1$.
Stimulationsparameter $I = 20, t_{\text{on}} = 3000, t_{\text{off}} = 3001$

Im Beispiel von **Abbildung 3.22** (keine Stimulation) sind ferner die Anfangswerte durch $n_1\phi_1(0) = 0, n_2\phi_2(0) = 0.2, n_3\phi_3(0) = 0.1$ gegeben.

C.2. Numerische Berechnung der durchschnittlichen Frequenzen

Für die numerische Berechnung der gewichteten durchschnittlichen Frequenzen Ω_i in 2.5 (vgl. Abb. 2.14 und 2.15) sowie im Abschnitt 3.9 (vgl. Abb. 3.24a und 3.24b) wurde ebenso zunächst ein *explizites Euler-Verfahren* zur Lösung des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems (2.1) verwendet. Anschließend erfolgte dann die näherungsweise Berechnung der Frequenzen.

- **Abbildung 2.14:** Als Anfangswerte wurden hierbei $n_1\phi_1(0) = 2$, $n_2\phi_2(0) = 0.2$, $n_3\phi_3(0) = 0$ festgesetzt. Als Zeitschrittweite wurde $\Delta t = 0.000001$ gewählt, die gewichteten Phasen $n_i\phi_i$ wurden hierbei für das Zeitintervall $[0, 10]$ berechnet. Als Parameterschrittweite ΔK wurde $\Delta K = 0.0001$ bestimmt, so dass die Euler-Iterationen für alle $K = m\Delta K$ mit $0 \leq m \leq 10000$ durchgeführt wurde. Die gewichteten durchschnittlichen Frequenzen wurden dabei dann durch

$$\Omega_i \approx \frac{n_i\phi_i(10)}{10}$$

approximiert.

- **Abbildung 2.15:** Als Anfangswerte wurden hierbei $n_1\phi_1(0) = 2$, $n_2\phi_2(0) = 0.2$, $n_3\phi_3(0) = 0$ festgesetzt. Als Zeitschrittweite wurde $\Delta t = 0.001$ gewählt, die gewichteten Phasen $n_i\phi_i$ wurden hierbei für das Zeitintervall $[0, 100]$ berechnet. Als Parameterschrittweite ΔK wurde $\Delta K = 0.01$ bestimmt, so dass die Euler-Iterationen für alle $K = m\Delta K$ mit $0 \leq m \leq 100$ durchgeführt wurde. Die gewichteten durchschnittlichen Frequenzen wurden dabei dann durch

$$\Omega_i \approx \frac{n_i\phi_i(100)}{100}$$

approximiert.

- **Abbildung 3.24a und 3.24b:** Im Euler-Verfahren wurde die Schrittweite Δt mit $\Delta t = 0.1$ festgelegt. Die Lösung wurde dabei für das Zeitintervall $[0, 6000]$ berechnet. Als *Parameterschrittweite* ΔK wurde des Weiteren $\Delta K = 2.5/3000 = 0.0008\bar{3}$ gewählt, so dass im Folgenden für alle $K_{12} = -11 + m\Delta K$ mit $0 \leq m \leq 3000$ dann die durchschnittlichen Frequenzen Ω_i berechnet wurden. Als Näherungswert für Ω_i wurde dabei

$$\Omega_i \approx \frac{n_i\phi_i(6000)}{6000}$$

angesetzt. Die Startwerte $n_i\phi_i(0)$ sind bei den jeweiligen Beispielen im Abschnitt 3.9 angegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] *Handbook of Physiology, Section 1: The Nervous System, Vol. II, Part 2.* Bethesda : V.B. Brooks, ed. Amer. Physiol. Soc., 1981
- [2] AEYELS, D. ; ROGGE, J. : Existence of Partial Entrainment and Stability of Phase Locking Behaviour of Coupled Oscillators. In: *Prog. of Theor. Phys.*, **112**, No. 6 (2004)
- [3] ASHWIN, P. ; BURLYKO, O. ; MAISTRENKO, Y. ; POPOVYCH, O. : Extreme sensitivity of detuning for globally coupled phase oscillators. In: *Phys.Rev. Lett.*, **96**, 054102 (2006)
- [4] BROCKHAUS-DUMKE, A. ; MUELLER, R. ; FAIGLE, U. ; KLOSTERKOETTER, J. : Sensory gating revisited: Relation between brain oscillations and auditory evoked potentials in schizophrenia. In: *Schizophrenia Research* **99**, 238-249 (2008)
- [5] COHEN, A. (Hrsg.) ; ROSSIGNOL, S. (Hrsg.) ; GRILLNER, S. (Hrsg.): *Neural Control of Rhythmic Movements in Vertebrates.* Wiley Series in Neurobiology, 1988
- [6] CRICK, F. : Function of the thalamic reticular complex: The searchlight hypothesis. In: *Proc. Natl. Acad. Sci USA*, **81**, 4586-4590 (1984)
- [7] ERMENTROUT, B. : *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students.* SIAM Publications, 2002
- [8] ERMENTROUT, G. ; KOPELL, N. : Inhibition-produced Patterning in Chains of Coupled Nonlinear Oscillators. In: *SIAM J. Appl. Math.*, **54**, No. 2, 478-507 (1994)
- [9] FITZGERALD, M. T. ; GRUENER, G. ; MTUI, E. : *Clinical Neuroanatomy and Neuroscience.* Fifth Edition. Saunders Elsevier, 2007
- [10] GRILLNER, S. : Control of Locomotion in bipeds, tetrapods and fish. [1], S. 1179–1236
- [11] HANSEL, D. ; MATO, G. ; MEUNIER, C. : Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. In: *Phys. Rev. E*, **48**, 3470-3477 (1993)

- [12] HASSARD, B. ; KAZARINOFF, N. ; WAN, Y. : *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. vol. 41 of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1981
- [13] KAZANOVICH, Y. ; BORISYUK, R. : Dynamics of neural networks with a central element. In: *Neural Networks*, **12**, No.3, 149-161 (1999)
- [14] KAZANOVICH, Y. ; BORISYUK, R. : Synchronization in Oscillator Systems with a central Element and Phase Shifts. In: *Prog. of Theor. Phys.*, **110**, No. 6 (2003)
- [15] KEENER, J. ; SNEYD, J. : *Mathematical Physiology*. Springer series of Interdisciplinary Applied Mathematics, **8**, 1998
- [16] KOPELL, N. : Toward a Theory of Modelling Generators. In: [5], S. 369–413
- [17] KURAMOTO, Y. : *Chemical oscillations, waves and turbulences*. Springer, Berlin, 1984
- [18] KUZNETSOV, Y. : *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Third Edition. Springer, New York, 2004
- [19] MAISTRENKO, Y. ; POPOVYCH, O. ; TASS, P. : Desynchronization and Chaos in the Kuramoto Model. In: *Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 285-306* (2005)
- [20] MONTBRIÓ, E. ; PAZÓ, D. ; SCHMIDT, J. : Time delay in the Kuramoto model with bimodal frequency distribution. In: *Phys. Rev. E* **74**, 056201 (2006)
- [21] PIKOVSKY, A. ; ROSENBLUM, M. ; KURTHS, J. : *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001
- [22] PLASCHKO, P. ; BROD, K. : *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*. Vieweg Lehrbuch Angewandte Mathematik, 1995
- [23] POPOVYCH, S. ; KÜPPER, T. ; MÜLLER, R. ; BROCKHAUS-DUMKE, A. : Modeling disturbances in early sensory processing in schizophrenia. In: *GAMM-Mitt.* **32**, 1, 93-104 (2009)
- [24] RULKOV, N. ; TSIMRING, L. ; LARSEN, M. ; GABBAY, M. : Synchronization and beam forming in an array of repulsively coupled oscillators. In: *Phys. Rev. E*, **74**, 056205 (2006)
- [25] SCHMIDT, R. ; LANG, F. : *Physiologie des Menschen*. 30. Auflage. Springer Medizin Verlag Heidelberg, 2007
- [26] SCHWEITZER, W. : *MATLAB kompakt*. 3.Auflage. Oldenbourg Verlag München, 2008

- [27] SMET, F. D. ; AEYELS, D. : Partial entrainment in the finite Kuramoto-Sakaguchi model. In: *Physica D*, **234**, No. 2, 81-89 (2007)
- [28] STROGATZ, S. : From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. In: *Physica D*, **143**, 1-20 (2000)
- [29] TASS, P. : Phase and frequency shifts of two nonlinearly coupled oscillators. In: *Zeitschrift für Physik B*, **99**, 111-121 (1995)
- [30] TASS, P. : *Phase Resetting in Medicine and Biology*. Springer, Berlin, 1999
- [31] TASS, P. : Transmission of stimulus-locked responses in two coupled oscillators. In: *Phys. Rev. E* **69**, 051909 (2004)
- [32] TASS, P. ; HAKEN, H. : Synchronization in networks of limit cycle oscillators. In: *Zeitschrift für Physik B., B* **100**, 303-320 (1996)
- [33] TREPEL, M. : *Neuroanatomie. Struktur und Funktion*. 4. Auflage. Urban & Fischer, 2008
- [34] TSIMRING, L. ; RULKOV, N. ; LARSEN, M. ; GABBAY, M. : Repulsive Synchronization in an Array of Phase coupled oscillators. In: *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 014101 (2005)
- [35] VREESWIJK, C. van ; ABBOTT, L. ; ERMENTROUT, B. : When Inhibition not Excitation Synchronizes Neural Firing. In: *J. of Computational Neuroscience*, **1**, 313-321 (1995)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Entstehung meiner Arbeit unterstützt haben.

Allen voran bedanke ich mich bei Prof. Dr. Küpper für die Bereitstellung des Themas sowie für die tatkräftige Betreuung meiner Arbeit in den vergangenen drei Jahren.

Meinen Kollegen am Mathematischen Institut danke ich für ein stets freundschaftliches kollegiales Verhältnis und viele erfrischende Diskussionen über mathematische und auch nicht mathematische Themen. Ganz besonderem Dank gilt in diesem Zusammenhang Frau Dr. Svitlana Popovych für ihr Engagement bei der Unterstützung meines Dissertationsprojekts und ihre Bereitschaft, jederzeit meine fachlichen Fragen mit ihr zu diskutieren.

Des Weiteren danke ich Jörg Nowakowski, Sevda Çağırıcı und Katharina Menz für das Korrekturlesen einzelner Kapitel dieser Arbeit.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Dr. hc. Tassilo Küpper betreut worden.

Köln, im Dezember 2009