# Abstract

In this work we investigate total domination, connected domination and paired-domination with respect to the size of the dominating sets and the structure of the subgraphs induced by these sets.

We show that for a wide range of common graph classes $\mathcal{G}$ it is $NP$-hard to decide whether a given graph has a connected dominating subgraph, total dominating subgraph respectively, which belongs to $\mathcal{G}$. Furthermore, we prove a similar result for the problem of determining the minimal order of such a restricted dominating subgraph, which holds even for some very special instances.

We show that on distance-hereditary graphs some of these problems become tractable, by giving a complete description of the subgraphs induced by (inclusionwise) minimal connected dominating sets of distance-hereditary graphs. We prove that if a distance-hereditary graph does not have a dominating vertex, any two minimal connected dominating sets induce isomorphic subgraphs. Furthermore, we show that if a connected distance-hereditary graph is an induced subgraph of another connected distance-hereditary graph, the same holds for their connected dominating subgraphs.

We introduce and study the structural domination problem (as was solved for connected domination by Bacsó and Tuza recently) for total domination: We characterize the isolate-free graphs for which any isolate-free induced subgraph has a total dominating subgraph with a prescribed additive hereditary property.

We show how to use our results to obtain bounds on the ratio of the (upper) paired-domination number and the (upper) total domination number. These bounds work with generalized claws as forbidden induced subgraphs and generalize the known bounds considerably. Furthermore, we draw a connection between the ratio of the paired-domination number and the upper total domination number and the existence of induced paired-dominating sets.

We give a forbidden subgraph characterization of the connected graphs for which any non-trivial connected induced subgraph has the property that the connected domination number is at most the total domination number. It turns out that in this characterization, the total domination number can equivalently be substituted by the upper total domination number, the paired-domination number and the upper paired-domination number respectively. Another condition is given in terms of structural domination.

In the last part of the thesis we deal with efficient total dominating sets and induced paired-dominating sets. We characterize the class of isolate-free graphs for which any isolate-free induced subgraph has an induced paired-dominating set and show that in this class there is always a minimum paired-dominating set which is an induced paired-dominating set. We furthermore prove some bounds on the induced paired-domination number in this class, in terms of the order and the lower induced matching number of the graph considered.

Furthermore, we provide an in-depth study of the problem of efficient total domination in graphs and digraphs. We obtain positive and negative complexity results for the problems of the existence and the minimal weight of efficient total dominating sets. Among other results, we give an algorithm which efficiently computes a minimum weight efficient total dominating set of a given claw-free graph.

# Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit befassen wir uns mit Dominanzproblemen auf Graphen.

Wir untersuchen zusammenhängende dominierende und total dominierende Mengen deren induzierte Subgraphen weiteren Bedingungen genügen. Für einige bekannte Graphenklassen $\mathcal{G}$ zeigen wir, dass es $NP$-hart ist zu entscheiden, ob ein gegebener Graph eine zusammenhängende dominierende oder total dominierende Menge besitzt deren induzierter Subgraph zu $\mathcal{G}$ gehört. Als noch schwieriger stellt sich das Problem heraus, solche eingeschränkten dominerende Mengen zu minimieren. Die von uns gegebenen Beweise zeigen die $NP$-Härte dieser Probleme auch für gewisse eingeschränkte Instanzen.

Anschlieend zeigen wir für distanz-vererbende Graphen, dass je zwei inklusionsminimale zusammenhängende dominierende Mengen (die keine einzelnen Knoten sind) isomorphe Subgraphen induzieren. Daraus leiten wir ab, dass die oben genannten Probleme für effizient erkennbare, vererbende Klassen $\mathcal{G}$ polynomiell lösbar werden.

Wir übertragen den kürzlich veröffentlichten Satz von Bacsó und Tuza über strukturelle Dominanz auf total dominierende Mengen: Wir charakterisieren die Graphen, für welche in allen induzierten Subgraphen total dominierende Mengen existieren, die eine vorgeschriebene, vererbende additiven Eigenschaft tragen. Als Anwendung unserer Resultate bestimmen wir obere Schranken für das Verhältnis der (oberen) Paar-Dominanzzahl und der (oberen) totalen Dominanzzahl.

Wir charakterisieren die Graphen, für welche die zusammenhängende Dominanzzahl vererbend kleiner oder gleich der totalen Dominanzzahl ist, durch minimal verbotene Subgraphen. In dieser Charakterisierung kann die totale Dominanzzahl durch die obere totale Dominanzzahl, die Paar-Dominanzzahl sowie die obere Paar-Dominanzzahl ersetzt werden, unter Erhalt der Charakterisierung. Wir geben eine weitere quivalente Bedingung mit Hilfe struktureller Dominanz an.

Im letzten Teil der Arbeit untersuchen wir induzierte Paar-dominierende Mengen und effizient total dominierende Mengen.

Wir geben einige Charakterisierungen der Klasse von Graphen an, welche vererbend induzierte Paar-dominierende Mengen besitzen. Wir zeigen, dass es in jedem dieser Graphen eine kardinalitätsminimale Paar-dominierende Menge gibt, welche gleichzeitig eine induzierte Paar-dominierende Menge ist. Darüberhinaus geben wir einige obere Schranken für die minimale Gröe einer induzierten Paar-dominierenden Menge in dieser Klasse an, in Bezug auf die Ordnung und die minimale Gröe eines inklusionsmaximalen induzierten Matchings des betrachteten Graphen.

Zur Theorie der effizienten totalen Dominierung tragen wir positive und negative komplexitätstheoretische Resultate bei. Wir geben für einige Graphenklassen (auch gerichteter Graphen) effiziente Algorithmen zur Berechnung effizient total dominierender Mengen an, auch fr den gewichteten Fall. Fr andere Klassen geben wir Beweise zur $NP$-Vollständigkeit des Problems. Zudem geben wir einige Resultate zur Existenz von effizient total dominierbaren Orientierungen ungerichteter Graphen an.