Untersuchungen zur algebraischen Unabhängigkeit der Werte von Funktionen vom Mahlerschen Typ

I n a u g u r a l — D i s s e r t a t i o n
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Bernd Greuel
aus Heimbach

Hundt Druck GmbH, Köln

Köln 1999

Berichterstatter:	Prof. Dr. P. Bundschuh
	Prof. Dr. H. P. Schlickewei
Tag der mündlichen Prüfung:	30. Juni 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit den arithmetischen Eigenschaften der Werte gewisser Funktionen, die zuerst von MAHLER ([34] – [36]) untersucht wurden. Der Startpunkt seiner Untersuchungen war, daß er aus Langeweile (vgl. [39]) zeigen wollte, daß $\sum_{n\geq 0} \alpha^{2^n}$ für rationale α mit $0 < |\alpha| < 1$ irrational ist. Darüber weit hinausgehend konnte er zeigen, daß diese und weitere Zahlen transzendent sind.

Mit Fragen der Transzendenz – dabei heißt eine Zahl *transzendent*, wenn alle ihre Potenzen $\mathbb{Q}$–linear unabhängig sind – beschäftigt man sich seit 1844, als es LIOUVILLE gelang, transzendente Zahlen zu konstruieren. Als weitere Highlights dieser Entwicklung im 19. Jahrhundert seien noch die Ergebnisse von HERMITE (1873) – er konnte zeigen, daß e nicht algebraisch ist – und LINDEMANN (1882) erwähnt, der die Transzendenz von π bewies. Das erste Ergebnis über algebraische Unabhängigkeit stammt von LINDEMANN und WEIERSTRASS (1885), die aus der $\mathbb{Q}$–linearen Unabhängigkeit der algebraischen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ die algebraische Unabhängigkeit von $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ folgern konnten. Komplexe Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ heißen dabei *algebraisch unabhängig* bzw. genauer *algebraisch unabhängig über* $\mathbb{Q}$, wenn alle ihre Potenzen $\omega_1^{\lambda_1} \cdots \omega_m^{\lambda_m}$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Weitere bedeutende Anstöße kamen in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts von GEL'FOND, SCHNEIDER und SIEGEL. Für die Entwicklung der Transzendenztheorie seit dieser Zeit vergleiche man die hervorragenden Übersichtsartikel von WALDSCHMIDT ([76, 80] bzw. [78]), in denen man weitere Literaturangaben findet.

1996 sorgte ein neues Resultat von NESTERENKO [44] für Aufsehen. NESTERENKO konnte die algebraische Unabhängigkeit von bestimmten Eisenstein–Reihen (s.u.) zeigen. Dieses Ergebnis nutzend konnten beispielsweise DUVERNEY, KEIJI NISHIOKA, KUMIKO NISHIOKA und SHIOKAWA ([14] – [16]) bzw. SHIOKAWA [67] die Transzendenz bzw. algebraische Unabhängigkeit gewisser Reihen zeigen.

Desweiteren wird vermutet (vgl. BERTRAND [10] bzw. DIAZ [13]), daß man aufbauend auf der obigen Arbeit von NESTERENKO sogar eine spezielle Version des sogenannten Vierexponentensatzes beweisen könnte. Für eine übersicht über diesen gesamten Themenkreis vergleiche man beispielsweise WALDSCHMIDT [81].

Doch kommen wir nun zu den von MAHLER untersuchten Zahlen. Charakteristisch für die von ihm betrachteten Zahlen war, daß sie allesamt Werte von Funktionen waren, die einem speziellen Typ von Funktionalgleichung, etwa

$$f\left(z^d\right) = R(z, f(z)),$$

genügten, wobei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und R eine rationale Funktion ist. So genügt die oben betrachtete Funktion $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ der Funktionalgleichung $f(z^2) = f(z) - z$. MAHLER beschränkte sich nicht nur auf die Untersuchung von Funktionen einer Veränderlichen, sondern verallgemeinerte seine Methode auch für mehrere Unbestimmte. So konnte er (vgl. auch Theorem 2.3.4 in [54]) insbesondere folgern, daß für eine positive quadratische Irrationalzahl ω und für algebraische Zahlen α_1 und α_2 mit $0 < |\alpha_1|, |\alpha_1| |\alpha_2|^\omega < 1$ der Wert $F_\omega(\alpha_1, \alpha_2)$ der erstmals von HECKE [23] untersuchten Reihe

$$F_\omega(z_1, z_2) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{[\lambda\omega]} z_1^\lambda z_2^\nu$$

transzendent ist. Speziell ist für jede algebraische Zahl α mit $0 < |\alpha| < 1$ der Wert

$$f_\omega(\alpha) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} [\lambda\omega]\, \alpha^\lambda$$

transzendent. Desweiteren konnte MAHLER zeigen, daß je endlich viele Werte aus der Menge

$$f_\omega(\alpha),\ f_\omega'(\alpha),\ f_\omega''(\alpha),\ \ldots$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Diese sehr allgemeinen Ergebnisse von MAHLER wurden lange Zeit nicht beachtet. Dies änderte sich zum Teil 1969, als MAHLER in seinem Übersichtsartikel [37] auf seine früheren Ergebnisse hinwies und drei neue Probleme aufwarf. Dies war der Startpunkt für eine Entwicklung, die insbesondere von KUBOTA ([24] – [26]), LOXTON und VAN DER POORTEN ([27] – [33]) (man vergleiche dazu auch den Übersichtsartikel in [32]) und KUMIKO NISHIOKA [47, 48] vorangetrieben wurde. NISHIOKA [54, Theorem 2.10.3] konnte beispielsweise die Transzendenz von $F_\omega(\alpha_1, \alpha_2)$ und $f_\omega(\alpha)$ unter den obigen Bedingungen an α_1, α_2 bzw. α für jede Irrationalzahl ω mit $0 < \omega < 1$, die schlecht approximierbar ist, zeigen. Dabei ist ω genau dann *schlecht approximierbar*, wenn die Folge ihrer Teilnenner beschränkt ist (vgl. Theorem 1.5 F in SCHMIDT [64]).

Zu Beginn der 90er Jahre kamen neue Anstöße für die Mahlersche Methode von NISHIOKA ([49] – [51] und [53]), die die eliminationstheoretischen Methoden von NESTERENKO und PHILIPPON – für eine Übersicht über diese Methode vergleiche man etwa Abschnitt 4.1 in NISHIOKA [54] bzw. 6.3 in FEL'DMAN und NESTERENKO [17]– auf Funktionen, die allgemeineren Funktionalgleichungen vom Mahlerschen Typ genügen, anwandte und daraus allgemeine Ergebnisse über die algebraische Unabhängigkeit der Werte dieser Funktionen erhielt. Diverse Autoren, hier seien besonders AMOU [1, 2], BECKER, TANAKA [68, 69] und TÖPFER erwähnt, folgten diesem Ansatz und konnten, zum Teil mit Hilfe der Ergebnisse von NISHIOKA, neue Ergebnisse und Anwendungen finden.

Neuen Aufschwung erhielt die Mahlersche Methode 1996, als BARRÉ–SIRIEIX, DIAZ, GRAMAIN und PHILIBERT [4] – man vergleiche BARRÉ [3] für ein quantitatives Resultat – mit der *klassischen Methode* eine Vermutung von MAHLER [37] im klassischen bzw. MANIN [41] im p–adischen Fall über die Transzendenz von $J(q) = j(\log q/2\pi i)$ für algebraisches q mit $0 < |q| < 1$, wobei $j(\omega)$ die elliptische Modulform ist, bewiesen. Dieses Ergebnis wurde von NESTERENKO [43, 44] verbessert, der zeigen konnte, daß mindestens drei der Zahlen

$$q, J(q), J'(q), J''(q)$$

algebraisch unabhängig sind, woraus man dann insbesondere die algebraische Unabhängigkeit von $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, π und e^{π} folgern kann. Für ein Unabhängigkeitsmaß vergleiche man NESTERENKO [45], welches aber im Spezialfall schlechter ist als das Resultat von BARRÉ [3].

Obwohl man mit der Mahlerschen Methode hervorragende qualitative wie auch quantitative Ergebnisse erziehlt hat, suchte man lange Zeit vergebens nach einem Lehrbuch, das diese Methode behandelt. Das ging sogar soweit, daß MAHLER diese Methode und Ergebnisse in seinem Buch über transzendente Zahlen [38] –immerhin zu seiner Zeit eines der ersten Lehrbücher über Transzendenztheorie– in keiner Weise erwähnt hat. 1996 ist eine Monographie (NISHIOKA [54]) über die Mahlersche Methode erschienen. Dies ist zur Zeit das einzige Lehrbuch (vgl. dazu die Einleitung in [17]), in dem man eine ausführliche Darstellung dieser Methode finden kann.

Doch kommen wir nun zu der vorliegenden Arbeit zurück. Im ersten Kapitel werden einige vorbereitende Überlegungen zur Konstruktion geeigneter Hilfsfunktionen dargestellt, die in den folgenden Kapiteln verwendet werden. Weiterhin findet man dort auch einige Ergebnisse der oben bereits erwähnten eliminationstheoretischen Methode von NESTERENKO und PHILIPPON in einer axiomatisierten Form.

Ein notwendiges Kriterium dafür, daß gewisse Funktionswerte algebraisch unabhängig sind, ist, daß die entsprechenden Funktionen selbst bereits algebraisch unabhängig über einem geeigneten Funktionenkörper sind. Mit diesem Problem beschäftigen wir uns im zweiten Kapitel, wo wir ein Kriterium dafür angeben und beweisen werden, daß Funktionen, die speziellen polynomialen Funktionalgleichungen genügen, über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch unabhängig sind (vgl. [21]).

Im dritten Kapitel untersuchen wir die Werte von Funktionen, die polynomialen Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation T genügen. So untersuchen wir einerseits den Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right)$ über $\mathbb{Q}$ sowohl an algebraischen als auch transzendenten Stellen α. In diesem Kapitel gehen wir auch kurz auf die Problematik quantitativer Ergebnisse ein.

Eines der drei Probleme, die MAHLER in [37] aufwarf, war, die Transzendenz von $f(\alpha)$ in dem Fall zu zeigen, wo f einer Funktionalgleichung des Typs

$$P\left(z, f(z), f\left(z^d\right)\right) = 0$$

genügt. Im vierten Kapitel gehen wir darauf ein und beantworten teilweise eine Frage von TÖPFER [74]. Speziell zeigen wir dort, daß die Werte

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-\alpha^{d^j}\right), \prod_{j=0}^{\infty}\left(1-\alpha^{d^j}\right)^{2^j}, \ldots, \prod_{j=0}^{\infty}\left(1-\alpha^{d^j}\right)^{n^j}$$

für eine algebraische Zahl α mit $0 < |\alpha| < 1$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, falls nur d im Vergleich zu n hinreichend groß ist (vgl. [22]).

Im abschließenden Kapitel 5 benutzen wir die im vierten Kapitel entwickelte Beweistechnik erneut und untersuchen dort die Werte Mahlerscher Funktionen, die linearen Funktionalgleichungen mit algebraischen Transformationen genügen, an algebraischen Argumenten.

An dieser Stelle sei noch ein Ausblick gestattet: Mit den in dieser Arbeit dargestellten Techniken sollte es möglich sein, die Hauptergebnisse der Kapitel 3, 4 und 5 zu vereinigen, d.h. die algebraische Unabhängigkeit von Werten mehrerer Funktionen an algebraischen Stellen für algebraische Transformationen T und beliebigen impliziten Funktionalgleichungen

$$\underline{P}\left(z, \underline{f}(z), \underline{f}\left(T(z)\right)\right) = \underline{0}$$

zu untersuchen. Dadurch wäre die Frage von Töpfer in [74] vollständig beantwortet. Allerdings erweist es sich als schwierig, dafür neue Anwendungen zu finden. Um quantitative Ergebnisse zu erhalten, benötigt man eine allgemeine obere Nullstellenabschätzung für gewisse Funktionen. Der Beweis eines solchen Resultats scheint mit den hier entwickelten Methoden aber nicht möglich zu sein.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh herzlich für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit und die vielen hilfreichen Bemerkungen und Hinweise danken.

Symbole und Bezeichnungen

Die in der vorliegenden Arbeit benutzten Symbole und Bezeichnungen sind weitgehend kanonisch, die wesentlichen sind im Anschluß aufgelistet und erklärt:

Die Mengensymbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ werden wie üblich verwendet. $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$, und für einen Körper $\mathbb{L}$ ist $\mathbb{L}^\times := \mathbb{L} \setminus \{0\}$. $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ bezeichnet den Körper der über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen. $\mathbb{K}$ ist stets ein Zwischenkörper von $\mathbb{Q}$ und $\overline{\mathbb{Q}}$. Den Ganzheitsring eines solchen Körpers bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_\mathbb{K}$, wobei ein Element $\alpha \in \mathbb{K}$ *ganz* bzw. *ganzalgebraisch* heißt, wenn das ganzzahlige Minimalpolynom von α normiert ist.

Ist $\mathbb{L}|\mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung, so ist $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ deren *Grad*. Falls $\mathbb{L}|\mathbb{Q}$ eine transzendente Erweiterung ist, wird der *Transzendenzgrad* von $\mathbb{L}$ über $\mathbb{Q}$ mit $\operatorname{trdeg}_\mathbb{Q} \mathbb{L}$ bezeichnet.

Für eine algebraische Zahl α ist $\overline{|\alpha|}$ das Maximum der Beträge der Nullstellen des Minimalpolynoms von α und wird als das *Haus von* α bezeichnet. Die natürliche Zahl D ist *ein Nenner* der algebraischen Zahl α, wenn $D\alpha$ ganzalgebraisch ist. Die kleinste derartige natürliche Zahl heißt *der Nenner* von α und wird mit $\operatorname{Nen}(\alpha)$ bezeichnet.

Für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[z, y_1, \ldots, y_m]$ ist $\deg_{y_i} P$ der Grad von P bezüglich y_i, $\deg_{\underline{y}} P$ der Gesamtgrad in $\underline{y} := (y_1, \ldots, y_m)$, und $\deg P$ ist der Gesamtgrad von P. Im weiteren Verlauf schreiben wir auch häufig abkürzend: $d_{y_i}P := \deg_{y_i} P$ bzw. $d_{\underline{y}}P := \deg_{\underline{y}} P$.

Sind die Koeffizienten des Polynoms P algebraisch, so ist die *Höhe* $H(P)$ bzw. die *Länge* $L(P)$ das Maximum bzw. die Summe der Häuser der Koeffizienten.

Für eine algebraische Zahl α sind der *Grad* $\deg \alpha$, die *Höhe* $H(\alpha)$ und die *Länge* $L(\alpha)$ von α definiert als der Grad, die Höhe bzw. die Länge des ganzzahligen Minimalpolynoms von α.

Für eine Funktion T bezeichnen wir mit $T^k(\alpha)$ *die k–te Iterierte von T an α*, die für $k \in \mathbb{N}$ definiert ist durch:

$$T^0(\alpha) = \alpha \qquad \text{und} \qquad T^k(\alpha) := T\left(T^{k-1}(\alpha)\right).$$

Die k–te Potenz von T an α bezeichnen wir im Gegensatz dazu mit $T(\alpha)^k$. Ein Punkt $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *Fixpunkt von T der Ordnung δ*, wenn die Funktion $T - \omega$ in ω eine Nullstelle der Ordnung δ hat. Ist $\omega = +\infty$, so heißt ω *Fixpunkt von T der Ordnung δ*, wenn T bei ∞ einen Pol der Ordnung δ hat. Diese Fixpunktordnung bezeichnen wir dann kurz mit $\mathrm{ord}_\omega T$.

Für einen Multiindex $\underline{\mu} \in \mathbb{N}_0^m$ setzen wir $\left|\underline{\mu}\right| := \mu_1 + \cdots + \mu_m$. Sind $\underline{\mu} \in \mathbb{N}_0^m$ und $\underline{y} \in \mathbb{C}^m$, so ist $\underline{y}^{\underline{\mu}}$ definiert durch $\underline{y}^{\underline{\mu}} := y_1^{\mu_1} \cdots y_m^{\mu_m}$.

$[c]$ ist die größte ganze Zahl unterhalb der reellen Zahl c.

Die im Text vorkommenden Konstanten $c, c_0, c_1, \ldots$ und $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ sind stets reell, positiv und unabhängig von den jeweiligen Parametern, in der Regel M, N, k. Der Einfachheit halber numerieren wir die Konstanten nicht durch, so daß in den einzelnen Beweisschritten die Konstanten unterschiedliche Werte haben können. Häufig verwenden wir auch die folgende Schreibweise: $f(k, N) \ll g(k, N)$ bzw. $f(k, N) \gg g(k, N)$, was bedeuteten soll, daß es eine Konstante $c > 0$ gibt, die von k und N unabhängig ist, mit

$$f(k, N) \leq c\, g(k, N) \qquad \text{bzw.} \qquad f(k, N) \geq c\, g(k, N).$$

Wird im Text Lemma 3 zitiert, so ist Lemma 3 im gleichen Kapitel gemeint; Theoreme, Lemmata usw. aus anderen Kapiteln werden unter Angabe der Kapitelnummer zitiert. Während in den Sätzen bzw. Lemmata zum Teil bekannte Ergebnisse zitiert werden, stellen die Theoreme die Hauptergebnisse der einzelnen Kapitel dar.

Kapitel 1

Einige Hilfsresultate

Im vorliegenden Kapitel werden wir die für die späteren Beweise über algebraische Unabhängigkeit entscheidenden Hilfsmittel bzw. Ergebnisse bereitstellen. Dabei wird in den Beweisen stets eine Folge von Polynomen $(Q_k)_{k_0 \le k \le k_1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y_1, \ldots, y_m]$ für einen festen Zahlkörper $\mathbb{K}$ zu konstruieren sein, für die man gute Oberschranken für Grad, Höhe und obere bzw. untere Abschätzungen für die Werte $|Q_k(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))|$ kennt. Die dafür notwendigen allgemeinen Hilfsmittel werden in den folgenden Paragraphen behandelt. Letztlich werden die Beweise auf ein Kriterium für algebraische Unabhängigkeit, welches in der hier angegebenen Form von Töpfer stammt, zurückgeführt.

1.1 Abschätzungen von gewissen Reihenkoeffizienten

Um den Wert $|Q_k(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))|$ in geeigneter Weise nach oben bzw. unten zu beschränken, benötigt man genaue Kenntnisse über die Häuser und Nenner der Taylorkoeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$.

Für $\mu \in \mathbb{N}_0$, $\underline{\mu} \in \mathbb{N}_0^m$ und $f_i(z) := \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} z^j \quad (i = 1, \ldots, m)$ wollen wir dazu vorab die folgenden Bezeichnungen vereinbaren:

(1) $$f_i(z)^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j}^{(\mu)} z^j \qquad \text{mit} \qquad f_{i,j}^{(\mu)} := \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_\mu \in \mathbb{N}_0 \\ \nu_1 + \cdots + \nu_\mu = j}} f_{i,\nu_1} \cdots f_{i,\nu_\mu},$$

$$\begin{aligned} \underline{f}(z)^{\underline{\mu}} &= f_1(z)^{\mu_1}\cdots f_m(z)^{\mu_m} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(\underline{\mu})} z^j \\ \text{(2)} \qquad\qquad \text{mit} \qquad f_j^{(\underline{\mu})} &:= \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_m\in\mathbb{N}_0 \\ \nu_1+\dots+\nu_m=j}} f_{1,\nu_1}^{(\mu_1)}\cdots f_{m,\nu_m}^{(\mu_m)}. \end{aligned}$$

Im folgenden Lemma wird gezeigt, daß die Häuser und Nenner der Koeffizienten $f_{i,j}^{(\mu)}$ und $f_j^{(\underline{\mu})}$ nicht zu schnell anwachsen.

Lemma 1

Wenn reelle Zahlen $L \ge 1$, $c \in \mathbb{R}_+$ und eine natürliche Zahl D existieren, so daß für einen geeigneten algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$, für $i = 1,\dots,m$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$

(3) $$\overline{\left| f_{i,j} \right|} \le \exp\left(c\left(1+j^L\right)\right) \qquad \textit{und} \qquad D^{\left[c\left(1+j^L\right)\right]} f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

gilt, so folgt für alle $\mu \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\underline{\mu} \in \mathbb{N}_0^m$:

(i) $$\overline{\left| f_{i,j}^{(\mu)} \right|} \le \exp\left(c\left(\mu+j^L\right)\right) \qquad \textit{und} \qquad D^{\left[c\left(\mu+j^L\right)\right]} f_{i,j}^{(\mu)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}},$$

(ii) $$\overline{\left| f_j^{(\underline{\mu})} \right|} \le \exp\left(c\left(\left|\underline{\mu}\right|+j^L\right)\right) \qquad \textit{und} \qquad D^{\left[c\left(\left|\underline{\mu}\right|+j^L\right)\right]} f_j^{(\underline{\mu})} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Beweis

Die obigen Abschätzungen folgen sofort aus der Bedingung $L \ge 1$, den Formelzeilen (1) – (3) und der Beobachtung, daß die Anzahl der Multiindizes $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0^{\mu}$ mit $\nu_1 + \ldots + \nu_\mu = j$ beschränkt ist durch

$$\binom{j+\mu-1}{\mu-1} \le 2^{j+\mu}.$$

$\square$

Bemerkung

Im Gegensatz zu dem folgenden Lemma 2 muß im Lemma 1 nicht nur verlangt werden, daß die Koeffizienten von $f_1,\dots,f_m$ algebraisch sind (vgl. Formelzeile (3)), sondern zusätzlich noch, daß sie alle in einem festen algebraischen Zahlkörper liegen und die Häuser bzw. Nenner nicht zu stark anwachsen. Ein zu Lemma 2 analoges Resultat ist unter den allgemeinen Bedingungen von Lemma 1 nicht zu erwarten. Man vergleiche dazu allerdings das später folgende Lemma 4.

Lemma 2
Sei T algebraisch über $\mathbb{Q}(z)$, holomorph in einer Umgebung U um 0, und 0 sei ein Fixpunkt von T der Ordnung $\delta \geq 2$. Sei $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$ eine Potenzreihe mit algebraischen Koeffizienten, welche in U konvergiert und einer Funktionalgleichung der Form

$$P(z, f(z), f(T(z))) = 0$$

in U mit einem Polynom $P \in \overline{\mathbb{Q}}[z, y, u] \setminus \{0\}$ mit $d_u(P) \geq 1$ genügt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existieren eine effektiv berechenbare Konstante $c \in \mathbb{R}_+$, die von ε abhängen kann, eine Zahl $D \in \mathbb{N}$ und ein algebraischer Zahlkörper $\mathbb{K}$, so daß für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f_j \in \mathbb{K}$,

(ii) $\overline{|f_j|} \leq \exp\left(c\left(1 + j^{1+\varepsilon}\right)\right)$,

(iii) $D^{1+j} f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Beweis
Dies ist Proposition 1 in Becker [8]. $\square$

Bemerkung
Ist $T(z) = z^d$ mit $d \geq 2$, so kann man in Lemma 2 den Term $j^{1+\varepsilon}$ durch $j\log(j+1)$ ersetzen (vgl. Nishioka [54, Lemma 1.5.3]). Man beachte auch die Verallgemeinerung (Nishioka [48, Theorem 2]) für mehrere Variablen $z_1, \ldots, z_n$.

Im Spezialfall, daß $f_1, \ldots, f_m$ einem System von linearen Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation T genügt, hat Töpfer [72] bewiesen, daß in diesem Fall $L = 1$ in Lemma 1 gewählt werden kann. Das folgende Lemma 4 verallgemeinert dieses Ergebnis für algebraische Transformationen. Doch zuvor benötigen wir dafür noch ein weiteres Lemma.

Lemma 3
Sei T algebraisch über $\mathbb{Q}(z)$ und in einer Umgebung um 0 holomorph, dann gelten für die Häuser und Nenner der Koeffizienten t_ℓ von T in einem geeigneten algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ und mit geeigneten Konstanten $D \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+$:

(i) $t_\ell \in \mathbb{K}$,

(ii) $D^{\ell+1} t_\ell \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ *und* $\overline{|t_\ell|} \leq \exp(c(\ell+1))$.

Beweis
Dies folgt aus Lemma 6 in BECKER [8] und dem Satz von EISENSTEIN über die Taylorkoeffizienten algebraischer Funktionen (s. POLYA–SZEGÖ [61, Chap. 3.2 ff., 4.4] oder SCHMIDT [65]). $\square$

Nun aber zu dem bereits angekündigten

Lemma 4
Sei T wie im Lemma 2, seien $f_1, \dots, f_m$ in einer Umgebung U um 0 holomorph und genügen in U der folgenden Funktionalgleichung:

$$(4) \qquad a(z)\underline{f}(z) = A(z)\underline{f}(T(z)) + \underline{B}(z),$$

wobei $A(z)$ in U eine reguläre $m \times m$ Matrix mit Einträgen in $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ ist, $\underline{B}(z) \in \left(\overline{\mathbb{Q}}[z]\right)^m$ und $a(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ mit $a(0) \neq 0$.

Sind die Koeffizienten der Taylorentwicklung der Funktionen $f_1, \dots, f_m$ um = algebraisch, dann gibt es einen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$, Konstanten $D \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+$, die lediglich von $f_1, \dots, f_m$ abhängen, so daß für alle $i = 1, \dots, m$ und $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f_{i,j} \in \mathbb{K}$,

(ii) $\overline{|f_{i,j}|} \leq \exp(c(1+j))$ *und* $D^{[c(1+j)]} f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Bemerkung
Unter den speziellen Voraussetzungen von Lemma 4 kann man also in Lemma 1 den Exponenten $L = 1$ wählen.

Beweis
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $f_i(0) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt, sonst betrachte man $f_i(z) - f_i(0)$.

Aufgrund der Voraussetzung $a(0) \neq 0$ sind alle Einträge von $a(z)^{-1}A(z)$ (und damit auch die von $a(z)^{-1}\underline{B}(z)$) in $z = 0$ holomorph.

Sei nun $\mathbb{K}$ der algebraische Zahlkörper, der von den Koeffizienten von T (vgl. dazu Lemma 3), den Koeffizienten der Einträge von $a(z)^{-1}A(z)$ und $a(z)^{-1}\underline{B}(z)$ und endlich vielen Koeffizienten der Funktionen $f_1, \dots, f_m$ erzeugt wird.

Mit $a(z)^{-1}A(z) := (a_{i,j}(z))_{1 \leq i,j \leq m}$, $a(z)^{-1}\underline{B}(z) := (b_i(z))_{1 \leq i \leq m}$ und

$$a_{i,j}(z) \ := \ \sum_{h=0}^{\infty} a_{i,j,h} z^h , \qquad b_i(z) := \sum_{h=0}^{\infty} b_{i,h} z^h ,$$

$$T(z) \;:=\; \sum_{h=\delta}^{\infty} t_h z^h\,, \qquad (T(z))^{\ell} := \sum_{h=\delta\ell}^{\infty} t_h^{(\ell)} z^h$$

folgt aus der Funktionalgleichung (4) für $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty} f_{i,h} z^h &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{h=0}^{\infty} a_{i,j,h} z^h \right) \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{j,\ell} \left(\sum_{h=\delta\ell}^{\infty} t_h^{(\ell)} z^h \right) \right\} + \sum_{h=0}^{\infty} b_{i,h} z^h \\ &= \sum_{h=\delta}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{\kappa=\delta}^{h} a_{i,j,h-\kappa} \left(\sum_{1 \le \ell \le \frac{\kappa}{\delta}} f_{j,\ell}\, t_{\kappa}^{(\ell)} \right) \right\} z^h + \sum_{h=0}^{\infty} b_{i,h} z^h .\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $i = 1, \ldots, m$ und $h \in \mathbb{N}$ die folgende Identität:

$$f_{i,h} = b_{i,h} + \sum_{\kappa=\delta}^{h} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j,h-\kappa} \left(\sum_{1 \le \ell \le \frac{\kappa}{\delta}} f_{j,\ell}\, t_{\kappa}^{(\ell)} \right) . \tag{5}$$

Aus Lemma 3 und (5) folgt bereits die erste Aussage von Lemma 4, die zweite Aussage folgt sofort per Induktion, indem man $\delta \ge 2$ beachtet. $\square$

1.2 Konstruktion einer Hilfsfunktion

In diesem Paragraphen wird für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ ein Polynom $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z, y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ konstruiert, so daß $R\big(z, \underline{f}(z)\big)$ in 0 eine hohe Nullstellenordnung hat. Vorbereitend dafür ist das folgende:

Lemma 5 (Ein Siegelsches Lemma)
Sei $\mathbb{K}$ ein algebraischer Zahlkörper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Die Häuser der Koeffizienten $a_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ seien durch A beschränkt. Dann gibt es eine von n, m, A und den Koeffizienten a_{ij} unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}_+$, so daß alle Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

durch ein $\underline{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{\underline{0}\}$ erfüllt sind, wobei für die Häuser von $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$\overline{|x_j|} \;\le\; (cnA)^{m/(n-m)} .$$

Beweis
Dies ist Hilfssatz 31 in SCHNEIDER [66]. $\square$

Lemma 6
Seien $m, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \gamma = \gamma(m) \in \mathbb{R}_+$ und Funktionen $f_1, \ldots, f_m$, die den Voraussetzungen von Lemma 1 genügen mögen, gegeben. Dann existiert für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ ein Polynom $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right] \setminus \{0\}$ mit

(i) $\deg_z R \leq N,\ \deg_{\underline{y}} R \leq N,$

(ii) $\log H(R) \leq cN^{(m+1)L},$

(iii) $\nu := \operatorname{ord}_0 R\left(z, \underline{f}(z)\right) \ \geq \ \dfrac{1}{4m!} N^{m+1}.$

Beweis
Wir setzen

$$R\left(z, \underline{y}\right) = \sum_{\lambda=0}^{N} \sum_{\left|\underline{\mu}\right| \leq N} r_{\lambda,\underline{\mu}}\, z^{\lambda}\, \underline{y}^{\underline{\mu}}$$

mit den $(N+1)\dbinom{N+m}{m}$ Unbekannten $r_{\lambda,\underline{\mu}}$. Dann gilt:

$$R\left(z, \underline{f}(z)\right) = \sum_{\lambda=0}^{N} \sum_{\left|\underline{\mu}\right| \leq N} r_{\lambda,\underline{\mu}}\, z^{\lambda}\, \underline{f}(z)^{\underline{\mu}} \ = \ \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h\, z^h$$

mit (vgl. Formel (2))

$$\beta_h = \sum_{\lambda=0}^{\min\{h,N\}} \sum_{\left|\underline{\mu}\right| \leq N} r_{\lambda,\underline{\mu}}\, f_{h-\lambda}^{(\underline{\mu})}. \tag{6}$$

Durch die Forderung $\beta_h = 0$ für $0 \leq h < \frac{1}{4m!} N^{m+1}$ entsteht ein lineares Gleichungssystem mit $\left[\frac{1}{4m!} N^{m+1}\right] + 1$ Gleichungen und

$$(N+1)\binom{N+m}{m} \ \geq \ \frac{1}{m!} N^{1+m} > 2\left(\frac{1}{4m!} N^{m+1} + 1\right)$$

Unbekannten.

Nach Multiplikation mit $D^{\left[cN^{(1+m)L}\right]}$ (vgl. Lemma 1) sind die Koeffizienten $f_{h-\lambda}^{(\underline{\mu})}$ ganzalgebraisch, und ihre Häuser sind durch $\exp\left(c\left(N^{(1+m)L}\right)\right)$ beschränkt. Somit folgt die Behauptung aus dem Siegelschen Lemma (Lemma 5). Man beachte dabei, daß für den sogenannten Siegelschen Exponenten $m/(n-m) < 1$ gilt. $\square$

Lemma 7
Seien $S, U_1, \ldots, U_d \in \mathbb{C}$ mit $S^d + U_1 S^{d-1} + \cdots + U_d = 0$ und

$$-X_1 \;\leq\; \log|S| \;\leq\; -X_2, \qquad \log|U_i| \;\leq\; Y \quad (1 \leq i \leq d)$$

mit $X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}_+$ und $X_2 \leq X_1$, dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, d\}$, so daß gilt:

$$-dX_1 - Y - \log d \;\leq \log|U_j| \;\leq\; -X_2 + Y + \log d.$$

Bemerkung
Wie man an den Beispielen $S^d + U_d = 0$ bzw. $S^d + U_1 S^{d-1} = 0$ sieht, ist die Abhängigkeit der Schranken von $|U_j|$ bezüglich X_1, X_2 bestmöglich.

Beweis
Dies ist Lemma 4.2.3 in WASS [82]. □

1.3 Weitere Resultate

Hier werden nun die Ergebnisse der Paragraphen 1.1 und 1.2 ausgenutzt, um gute obere und untere Abschätzungen für $\left|R\left(T^k(\alpha), \underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right|$ abhängig von k und R, T zu erhalten, wobei R das Polynom aus Lemma 6 ist. Im weiteren Verlauf wird dann aus diesem Polynom mit Hilfe von Lemma 7 ein Polynom $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\,\underline{y}\,\right]$ zu konstruieren sein, worauf man schließlich Lemma 13 anwenden kann.

Lemma 8 (Fundamentallemma)
Für $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ gilt

$$|\alpha| \;\geq\; (\mathrm{Nen}(\alpha))^{-[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\; \overline{|\alpha|}^{\,1-[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}.$$

Beweis
Man vergleiche Lemma 6.4.2 in BUNDSCHUH [11]. □

Wir übernehmen weiterhin noch die folgende LIOUVILLE–Abschätzung für die Werte von Polynomen mit algebraischen Koeffizienten an algebraischen Stellen.

Lemma 9
Seien $\mathbb{K}$ ein algebraischer Zahlkörper und $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y_1, \ldots, y_m]$ mit $\deg_{y_j} Q \leq d_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ algebraische Zahlen mit $\deg(\alpha_j) \leq b_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und $b := [\mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : \mathbb{Q}]$. Ist $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$, so gilt:

$$\log|Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)| \;\geq\; (1-b)\log L(Q_k) - \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j b}{b_j} \log L(\alpha_j).$$

Beweis
Siehe Lemma 5 in Galochkin [18] oder auch Proposition 4 in Töpfer [74]. $\square$

Lemma 10
Sei T holomorph in einer Umgebung U um 0, und 0 sei ein Fixpunkt von T der Ordnung $\delta \geq 2$. Eine komplexe Zahl $\alpha \in U$ erfülle $T^k(\alpha) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{k\to\infty} T^k(\alpha) = 0$. Dann gilt für alle hinreichend großen k:

$$-c_1\delta^k \;\leq\; \log\left|T^k(\alpha)\right| \;\leq\; -c_2\delta^k,$$

wobei die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ lediglich von T und α abhängen.

Beweis
Die Abschätzungen für $\left|T^k(\alpha)\right|$ sind offensichtlich. Da 0 eine Nullstelle von T der Ordnung $\delta \geq 2$ ist, kann man schreiben: $T(z) = z^\delta g(z)$, wobei g in einer hinreichend kleinen Umgebung um 0 holomorph und von 0 verschieden ist, also dort beschränkt ist. Aus der induktiv zu zeigenden Formel

$$T^k(z) \;=\; z^{\delta^k} \prod_{j=0}^{k-1} g\left(T^j(z)\right)^{\delta^{k-1-j}}$$

folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Lemma 11
Seien $Q \in \mathbb{C}[z]$ beliebig und α, T wie im Lemma 10, dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, die nur von α, T und Q abhängen, so daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $Q\left(T^k(\alpha)\right) \neq 0$ gilt:

$$-c_1\delta^k \;\leq\; \log\left|Q\left(T^k(\alpha)\right)\right| \;\leq\; c_2.$$

Beweis
Da $Q(z) := \sum\limits_{j=s}^{r} q_j z^j$ in einer Umgebung von 0 beschränkt ist und $T^k(\alpha) \to 0$, folgt somit bereits die rechte Seite der Ungleichung von Lemma 11. Um die linke Seite einzusehen, beachte man Lemma 10 und $q_s \neq 0$ bzw. $Q\left(T^k(\alpha)\right) \neq 0$. Damit erhält man

$$\log\left|Q\left(T^k(\alpha)\right)\right| = s\log\left|T^k(\alpha)\right| + \log\left|\sum_{j=s}^{r} q_j T^k(\alpha)^{j-s}\right| \gg -\delta^k$$

gleichgültig, ob $s = 0$ oder $s > 0$. $\square$

Lemma 12

Konvergieren die Funktionen $f_1,\dots,f_m$ in einer Umgebung U um 0, erfüllen die Bedingungen in (3) von Lemma 1, und ist $R\left(z,\underline{f}(z)\right)=\sum_{j=\nu}^{\infty}\beta_j z^j$ mit ν wie in Lemma 6, dann gilt für $h\in\mathbb{N}$, $\alpha\in U$ mit nur von $\underline{f},\alpha$ und L abhängigen, positiven Konstanten $c>0$:

(i) $|\beta_h|\ \le\ \exp\left(c\left(h+N^{(1+m)L}\right)\right)\ \le\ \exp\left(c\left(h+\nu^L\right)\right)$,

(ii) $|\beta_\nu|\ \ge\ \exp\left(-c\,\nu^L\right)$.

(iii) *Sind T und δ wie in Lemma 10, dann existieren weitere Konstanten $c_1,c_2>0$, so daß für alle $k\in\mathbb{N}$ mit $\delta^k\gg\nu^L$, gilt:*

$$-c_1\nu\,\delta^k\ \le\ \log\left|R\left(T^k(\alpha),\underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right|\ \le\ -c_2\,\nu\,\delta^k.$$

Beweis

Nach Formel (6) gilt

$$\beta_h=\sum_{\lambda=0}^{\min\{h,N\}}\ \sum_{|\underline{\mu}|\le N} r_{\lambda,\underline{\mu}}\, f_{h-\lambda}^{(\underline{\mu})}.$$

Da die Funktionen f_i in einer Umgebung U des Nullpunktes holomorph sind, folgt nach dem Satz von Cauchy–Hadamard bereits $|f_{i,j}|\le\exp(\gamma(j+1))$. Damit erhalten wir analog zum Beweis von Lemma 1

$$\left|f_h^{(\underline{\mu})}\right|\le\exp\left(\gamma\left(|\underline{\mu}|+h\right)\right).$$

Also folgt aus Lemma 6 bereits der erste Teil von Lemma 12.

Sind D,L,c wie in Lemma 1, so ist wegen $\nu\gg N^{1+m}$

$$D^{\left[c(N+\nu^L)\right]}\,\beta_\nu\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}\qquad\text{und}$$
$$\overline{|\beta_\nu|}\ \le\ \exp\left(\gamma\left(N^{(1+m)L}+\nu^L+N\right)\right)\ \le\ \exp\left(\gamma\nu^L\right).$$

Zusammen mit dem Fundamentallemma (Lemma 8) folgt daher der zweite Teil.

Um den letzten Teil von Lemma 12 zu beweisen, zerlegen wir

$$R\left(T^k(\alpha),\underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)=\beta_\nu\left(T^k(\alpha)\right)^\nu\left(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\beta_{h+\nu}}{\beta_\nu}\left(T^k(\alpha)\right)^h\right)$$

und zeigen, daß unter der Voraussetzung $\delta^k \gg \nu^L$ die Summe in der Klammer betraglich durch $1/2$ beschränkt ist:
Nach Lemma 10 und den beiden ersten Teilen dieses Lemmas gilt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\beta_{h+\nu}}{\beta_\nu} \left(T^k(\alpha)\right)^h\right| &\leq \sum_{h=1}^{\infty} \exp\left(c_2\left(\nu^L + h\right) + c_3\nu^L - \gamma_0 h\delta^k\right) \\ &\leq \sum_{h=1}^{\infty} \exp\left(\gamma_1\nu^L - \gamma_2 h\delta^k\right) \leq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\left|\beta_\nu\left(T^k(\alpha)\right)^\nu\right| \leq \left|R\left(T^k(\alpha), \underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right| \leq \frac{3}{2}\left|\beta_\nu\left(T^k(\alpha)\right)^\nu\right|,$$

und damit folgt der letzte Teil von Lemma 12 aus den Abschätzungen (i), (ii) und Lemma 10. □

1.4 Einige eliminationstheoretische Ergebnisse

Zum Abschluß dieses Kapitels zitieren wir noch drei Ergebnisse, die in der hier angegebenen Form von Töpfer stammen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzen wir das folgende Kriterium für algebraische Unabhängigkeit:

Lemma 13
Seien $\underline{\omega} \in \mathbb{C}^m$ *und* $\mathbb{K}$ *ein algebraischer Zahlkörper. Wenn für eine Konstante* $c = c(\underline{\omega}, \mathbb{K}) \in \mathbb{R}_+$ *Funktionen* $\psi_1, \psi_2, \Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *Konstanten* $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{R}_+$ *mit* $\Phi_2 \geq \Phi_1 \geq c$; $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ *mit* $k_0 < k_1$; $m_0 \in \{0, \ldots, m\}$ *und eine Folge von Polynomen* $(Q_k)_{k_0 \leq k \leq k_1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right]$ *existieren, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Die Funktionen* $\psi_1, \psi_2, \Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *sind auf* $\{k_0, \ldots, k_1\}$ *monoton wachsend, und es gilt:*

$$1 \leq \psi_1(k+1)/\psi_2(k) \leq \Lambda(k) \quad \text{und} \quad \psi_2(k) \geq c\left(\log H(Q_k) + \deg Q_k\right).$$

(ii) *Die Polynome* $(Q_k)_{k_0 \leq k \leq k_1}$ *erfüllen für* $k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$

(a) $\deg Q_k \leq \Phi_1$,

(b) $\log H(Q_k) \leq \Phi_2$,

(c) $-\psi_1(k) \leq \log|Q_k(\underline{\omega})| \leq -\psi_2(k)$.

(iii) $\psi_2(k_1) \geq c\Lambda(k_1)^{m_0-1}\,\Phi_1^{m_0-1}\,\max\{\psi_1(k_0),\Phi_2\}$.

Dann folgt

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\,(\underline{\omega}) \geq m_0.$$

Beweis
Diesen Axiomatisierungssatz der Nesterenkoschen Methode findet man mit leichten Modifikationen als Satz 3.2 in Töpfer [70] bzw. Theorem 1 in [71]. □

Bemerkungen

(i) Weitere Kriterien für algebraische Unabhängigkeit, die bei der Mahlerschen Methode Anwendung finden, findet man zum Beispiel bei Gramain, Mignotte und Waldschmidt [20] bzw. bei Philippon [58, 59] (siehe dazu auch Satz 3.1 in Töpfer [70]).

Das Kriterium von Gramain et al. findet lediglich bei *kleinen* Transzendenzgraden Anwendung. Beweise allgemeinerer Unabhängigkeitsresultate scheinen mit diesem Kriterium nicht möglich zu sein.

In den später folgenden Anwendungen scheint Lemma 13 gegenüber dem Kriterium von Philippon von Vorteil zu sein. Anstelle des Nichtvorhandenseins gemeinsamer Nullstellen geeigneter Hilfspolynome in gewissen Umgebungen um $\underline{\omega}$ im Kriterium von Philippon treten hier nichttriviale Unterschranken für den Betrag der Werte geeigneter Hilfsfunktionen. Allerdings hat Lemma 13 gegenüber dem Kriterium von Philippon den Vorteil, daß nur endlich viele Hilfspolynome benötigt werden, was in den Beweisen ganz entscheidend sein wird.

(ii) An dieser Stelle sei noch auf eine Vermutung für simultane Approximationsmaße (vgl. Gramain [19] und Waldschmidt [77]) hingewiesen, welche das Kriterium von Philippon impliziert.

Vermutung (zitiert nach Waldschmidt [77])
Seien $\underline{\omega} \in \mathbb{C}^m$ mit $t = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\,(\underline{\omega}) \geq 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 1$. Weiter seien $(h_N)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

$$c_1 \leq D_N \leq h_N,\ h_N \leq h_{N+1} \leq 2\,h_N \quad \text{und} \quad D_N \leq D_{N+1} \leq 2\,D_N,$$

zusätzlich sei die Folge $(h_N)_{N\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Dann existieren für unendlich viele $N \in \mathbb{N}$ Punkte $\underline{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ mit $[\mathbb{Q}(\underline{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leq D_N,\ h(\underline{\alpha}) \leq h_N$, wobei

$h(\underline{\alpha}) := \max\{h(\alpha_i) : 1 \leq i \leq m\}$ mit der logarithmischen Höhe h (für die Definition von h vgl. man beispielsweise [77]) gesetzt ist, und

$$\max_{1\leq i\leq m} |\omega_i - \alpha_i| \leq \exp\left(-c_2 h_N\, D_N^{1+1/t}\right).$$

Diese Vermutung ist bislang lediglich im Fall $t = 1$ bewiesen (vgl. Roy und Waldschmidt [63]). Die hier angegebene Vermutung ist einem gewissen Sinne (siehe Roy [62] und Waldschmidt [77]) bestmöglich.

Wie stark aber eine solche Aussage über Approximationsmaße ist, sieht man daran, daß Philippon in [60] mit Hilfe eines Approximationsmaßes, aber ohne Nullstellen–Lemma, ebenso die algebraische Unabhängigkeit von π, e^π und $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ zeigen konnte.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas 14 wird es möglich sein, Maße für algebraische Unabhängigkeit zu erhalten.

Lemma 14

Seien $\underline{\omega} \in \mathbb{C}^m$ und $\mathbb{K}$ ein algebraischer Zahlkörper. Wenn für eine Konstante $c = c(\underline{\omega}, \mathbb{K}) \in \mathbb{R}_+$ Funktionen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}_+$, die in beiden Unbestimmten monoton wachsend sind, Zahlen $\Phi_1, \Phi_2, \Lambda \in \mathbb{R}_+$, natürliche Zahlen k_1, N_0, N_1 mit $N_0 \leq N_1$, für jedes $N \in \{N_0, \ldots, N_1\}$ eine natürliche Zahl $k_0(N) < k_1$ und Polynome $Q_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ für $N \in \{N_0, \ldots, N_1\}$ und $k \in \{k_0(N), \ldots, k_1\}$ existieren, die den folgenden Bedingungen für alle $D, H \in \mathbb{N}$ bzw. $N \in \{N_0, \ldots, N_1\}$ und $k \in \{k_0(N), \ldots, k_1\}$ genügen:

(i) (a) $\Phi_2 \geq \Phi_1 \geq c$, $\Lambda \geq \psi_1(k+1, N)/\psi_2(k, N) \geq 1$,

(b) $\psi_1(k_0(N+1), N+1) \leq \psi_1(k_1, N)$,

(ii) $\psi_2(k, N) \geq c(\log H(Q_{k,N}) + \deg Q_{k,N})$,

(iii) *die Polynome $Q_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y_1, \ldots, y_m]$ erfüllen*

(a) $\deg Q_{k,N} \leq \Phi_1$,

(b) $\log H(Q_{k,N}) \leq \Phi_2$,

(c) $\exp(-\psi_1(k, N)) \leq |Q_{k,N}(\underline{\omega})| \leq \exp(-\psi_2(k, N))$,

(iv) $\psi_2(k_1, N_1) \geq c\Lambda^{m-1}\Phi_1^{m-1}\psi_1(k_0(N_0), N_0)\, D$

(v) $\psi_2(k_1, N_1) \geq c\Lambda^m\Phi_1^{m-1}(\Phi_1 \log H + \Phi_2\, D)$

dann gilt mit einer nur von $\mathbb{K}$ *und* $\underline{\omega}$ *abhängenden Konstanten* $C \in \mathbb{R}_+$ *für alle Polynome* $R \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ *mit* $\deg R \leq D$ *und* $H(R) \leq H$*:*

$$|R(\underline{\omega})| \geq \exp\left(-C\,\psi_2(k_1, N_1)\right).$$

Beweis

Dieses Lemma stammt in dieser Form von TÖPFER (siehe [70, Satz 3.3], [73] bzw. mit leichten Modifikationen [72, Lemma 4]). □

Im letzten Lemma dieses Kapitels geben wir nun Oberschranken für die Nullstellenordnung gewisser Funktionen an. Diese oberen Nullstellenabschätzungen sind für die Herleitung quantitativer Resultate bzw. qualitativer Resultate an transzendenten Argumentstellen unerläßlich (vgl. dazu auch NISHIOKA [50]).

Lemma 15

Seien $f_1, \ldots, f_m \in C[[z]]$ *formale Potenzreihen über einem Körper der Charakteristik 0 und erfüllen*

$$A_0\left(z, \underline{f}(z)\right) f_i(T(z)) = A_i\left(z, \underline{f}(z)\right) \qquad (1 \leq i \leq m),$$

wobei $\underline{f}(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$, $T(z) = T_1(z)/T_2(z)$ *eine rationale Funktion mit teilerfremden* $T_1, T_2 \in C[z]$, $d = \max\{\deg T_1, \deg T_2\}$, $\delta = \operatorname{ord}_0 T(z) \geq 2$ *ist und* $A_i \in C[z, y_1, \ldots, y_m]$ $(0 \leq i \leq m)$ *Polynome mit* $\deg_{\underline{y}} A_i \leq t$ *sind. Weiter seien die Bedingungen* $t^m < \delta$ *und* $Q \in C[z, y_1, \ldots, y_m]$ *mit* $\deg_z Q \leq M$ *und* $\deg_{\underline{y}} Q \leq N$ *mit* $1 \leq N \leq M$ *erfüllt. Ist* $Q\left(z, \underline{f}(z)\right) \neq 0$, *so gilt mit einer explizit angebbaren, von* Q *unabhängigen Konstanten* $c > 0$*:*

$$\operatorname{ord}_0 Q\left(z, \underline{f}(z)\right) \leq cMN^{m \log d/(\log \delta - m \log t)}.$$

Beweis

Dies ist Theorem 1 in TÖPFER [75]. □

Bemerkung

In dem Fall, daß eine Funktion f einer impliziten Funktionalgleichung mit einer algebraischen Transformation T genügt, hat TÖPFER [74, Proposition 1] eine obere Nullstellenabschätzung entsprechend Lemma 15 angegeben. Die dortige Abschätzung ist besser als das Resultat in Lemma 15, allerdings scheint es nicht möglich, den Beweis von [74, Proposition 1] auf den Fall mehrerer Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ zu verallgemeinern.

Leider scheint es auch nicht möglich zu sein, den Beweis des Lemmas 15 für andere Arten von Funktionalgleichungen bzw. für algebraische Transformationen

T zu führen, um damit beispielsweise auch in diesen Fällen (vgl. Theorem 4.1 bzw. 5.1) Unterschranken für den Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}(\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))$ für transzendente Zahlen α (vgl. Theorem 3.4) zu erhalten.

In den Beweisen der Theoreme 4.1 bzw. 5.1 wird zwar (mehr oder weniger) explizit eine Hilfsfunktion (analog zum Beweis von Lemma 15) konstruiert. Um aber daraus eine obere Schranke für die Nullstellenordnung zu erhalten, muß die Nullstellenordnung gewisser Summen von Funktionen nichttrivial (vgl. Theorem 2 in [72]) abgeschätzt werden, was im allgemeinen nicht möglich ist.

Kapitel 2

Über Mahlersche Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Existenz und der algebraischen Unabhängigkeit Mahlerscher Funktionen, die speziellen polynomialen Funktionalgleichungen genügen. Die hier bereitgestellten funktionentheoretischen Ergebnisse über diese Klasse von Funktionen werden in den nächsten beiden Kapiteln benötigt, um zu zeigen, daß die dortigen Beispiele den Voraussetzungen der Theoreme genügen. Anhand der Sätze 1 und 2 bzw. des später folgenden Theorems 4 erhält man sofort, daß die Koeffizienten von Funktionen, die speziellen polynomialen Funktionalgleichungen vom Mahlerschen Typ genügen, in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen, der nur von der Funktionalgleichung abhängt, und daß diese Funktionen unter gewissen zusätzlichen Bedingungen algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind.

2.1 Zur Existenz Mahlerscher Funktionen

Wir zitieren im folgenden einige Aussagen, welche die Existenz Mahlerscher Funktionen sichern. Man vergleiche dazu den Abschnitt 1.7 in Nishioka [54].

In diesem Kapitel seien stets $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$ ein Körper und $d \geq 2$ eine natürliche Zahl. Als erstes Resultat haben wir den folgenden

Satz 1
Seien A, $B \in \mathbb{L}[z,u]$, so daß $A(0,0) = 0$ und $B(0,0) \neq 0$ gilt. Dann existiert eine Potenzreihe f, deren Koeffizienten in $\mathbb{L}$ liegen, mit Konvergenzradius $R > 0$, wobei R effektiv angebbar ist und nur von den Koeffizienten von A und B abhängt,

so daß gilt:

$$f(z) = \frac{A\left(z, f\left(z^d\right)\right)}{B\left(z, f\left(z^d\right)\right)}, \quad f(0) = 0.$$

Beweis

Dies ist Theorem 1.7.1 in Nishioka [54]. □

Bemerkungen

(i) Diesen Satz kann man in einer etwas allgemeineren Form zitieren (vgl. auch den folgenden Satz 2). Die Bedingung $A(0,0) = 0$ kann für ein $a \in \mathbb{L}$ durch $A(0,a) = a$, $B(0,a) = 1$ und dann $f(0) = a$ ersetzt werden.

(ii) Mahler gab in [40] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß die Funktionalgleichung

$$P\left(f(z), f\left(z^d\right)\right) = 0$$

eine nichtkonstante holomorphe Lösung hat, wobei P ein irreduzibles Polynom mit komplexen Koeffizienten ist.

Satz 2

Sei $P(z,u,v)$ ein Polynom in z,u,v mit Koeffizienten in $\mathbb{L}$, so daß für $a \in \mathbb{L}$ gilt $P(0,a,a) = 0$ und $\left(\partial P/\partial v\right)(0,a,a) \neq 0$. Dann existieren eine effektiv berechenbare Zahl $R > 0$ und eine Funktion f, deren Taylorkoeffizienten allesamt in $\mathbb{L}$ liegen, so daß f mindestens in $|z| < R$ konvergiert und den Bedingungen

$$P\left(z, f(z), f\left(z^d\right)\right) = 0, \quad f(0) = a$$

genügt.

Beweis

Dies ist Proposition 5 in Nishioka [49] bzw. Theorem 1.7.2 in [54]. □

Bemerkung

Aus Satz 2 und dem folgenden Satz 3 kann man folgern, daß jede Lösung der Funktionalgleichung

$$f\left(z^d\right) = P\left(z, f(z)\right) \qquad \text{bzw.} \qquad f(z) = P\left(z, f\left(z^d\right)\right)$$

holomorph in einer Umgebung um 0 ist und entweder transzendent oder rational ist. Dies wird in dem später folgenden Theorem 4 verallgemeinert.

2.2 Zur algebraischen Unabhängigkeit gewisser Funktionen vom Mahlerschen Typ

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Funktionen, die polynomialen Funktionalgleichungen vom Mahlerschen Typ genügen und geben ein Kriterium dafür an, daß diese Funktionen algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind.

Während im Falle linearer Funktionalgleichungen diverse Kriterien für die algebraische Unabhängigkeit solcher Funktionen vorhanden sind – man vergleiche dazu beispielsweise die Arbeiten von Kubota [26], Kumiko Nishioka [49], Keiji Nishioka und Kumiko Nishioka [55] bzw. diverse Abschnitte in Kumiko Nishioka [54] –, ist im Falle polynomialer Funktionalgleichungen relativ wenig bekannt. In [49] zeigte Kumiko Nishioka, daß die Lösungen $f_1, \ldots, f_{d-1}$ der Funktionalgleichung

$$f_n\left(z^d\right) = f_n(z)^n + z, \quad f_n(0) = 1$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind.

Bemerkung
Liegen die Taylorkoeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in einem Körper $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$, dann gilt (vgl. beispielsweise Mahler [38, 25 (6)] mit leichten Modifikationen):

> *Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ sind genau dann über $\mathbb{L}(z)$ algebraisch unabhängig, wenn sie über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch unabhängig sind.*

Ziel dieses Abschnittes ist es, das folgende Resultat von Keiji Nishioka [46] (vgl. dazu auch [54, Chapter 1.3], Zannier [84] bzw. [21]) zu verallgemeinern.

Satz 3
Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$. Die Funktion $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j\, z^j$ habe positiven Konvergenzradius und erfülle eine der beiden folgenden Bedingungen:

$$f\left(z^d\right) = \frac{P\left(z, f(z)\right)}{Q\left(z, f(z)\right)} \qquad \text{oder} \qquad f(z) = \frac{P\left(z, f\left(z^d\right)\right)}{Q\left(z, f\left(z^d\right)\right)}$$

mit Polynomen P und Q mit komplexen Koeffizienten. Ist f algebraisch über $\mathbb{C}(z)$, so ist f bereits eine rationale Funktion.

Als Verallgemeinerung von Satz 3 zeigen wir das folgende

Theorem 4
Sei $d \geq 2$ eine natürliche Zahl, und $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}(z)[y]$ mit $n_i := \deg_y P_i$ seien Polynome mit komplexen Koeffizienten und $n_i \neq n_j$ für $i \neq j$. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[[z]]$ seien in einer Umgebung um 0 holomorph und erfüllen dort entweder

(i) $f_i\left(z^d\right) = P_i\left(z, f_i(z)\right)$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$

oder

(ii) $f_i(z) = P_i\left(z, f_i\left(z^d\right)\right)$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$.

Sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch abhängig, so ist eine der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ rational.

Bemerkung
Die Aussage des Theorems läßt sich dahingehend verallgemeinern, daß wir sogar $P_i = p_i/q_i$ mit teilerfremden $p_i, q_i \in \mathbb{C}[z, y]$ zulassen und dann verlangen, daß die Zahlen $n_1, \ldots, n_m$ für $n_i := \max\left\{\deg_y p_i, \deg_y q_i\right\}$ paarweise verschieden sind. Allerdings reicht die obige Version für die im folgenden Abschnitt betrachteten Anwendungen aus.

2.2.1 Beispiele und Anwendungen von Theorem 4

Als Anwendungen von Theorem 4 erhalten wir:

(i) Seien n, d mit $d \geq 2$ natürliche Zahlen. Ist f_n eine Lösung der Funktionalgleichung
$$f_n\left(z^d\right) = f_n(z)^n + z, \qquad f_n(0) = 1,$$
dann sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_{d-1}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$. (Dies ist Proposition 6 in Nishioka [49].)

Daß die Bedingungen von Theorem 4 erfüllt sind, ist leicht einzusehen. Man erhält für $n < d$ sofort, daß f_n transzendent ist. Denn die entgegengesetzte Annahme würde implizieren, daß f_n nach Satz 3 rational ist. Hat f_n daher die Darstellung $f_n(z) = a(z)/b(z)$ mit teilerfremden Polynomen a, b, so ergibt sich aus der Funktionalgleichung
$$a\left(z^d\right) b(z)^n \;=\; a(z)^n b\left(z^d\right) + z\, b\left(z^d\right) b(z)^n.$$
Da die Polynome a, b teilerfremd sind, folgt $b\left(z^d\right) \big|\, b(z)^n$. Aufgrund der Bedingung $n < d$ ergibt sich aus Gradbetrachtungen, daß b konstant ist.

Somit erhalten wir

$$a\left(z^d\right)b^n \;=\; a(z)^n b + z b^{n+1}.$$

Im Fall, daß a konstant ist, ergibt sich wegen $b \neq 0$ sofort ein Widerspruch. Ist hingegen $\deg a \geq 1$, so ergibt sich zusammen mit der Bedingung $d \geq 2$ aus obiger Gleichung $d \deg a = n \deg a$, was aber $1 \leq n < d$ widerspricht.

(ii) Seien d, n natürliche Zahlen mit $d > 1$. Die Funktionen $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ definiert durch

$$f_n(z) := \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - z^{d^j}\right)^{n^j} \qquad (n = 1, \ldots, m),$$

sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ (vgl. [22]).

Die Funktion f_n erfüllt die folgende Funktionalgleichung:

$$f_n(z) = (1-z) f_n\left(z^d\right)^n.$$

Analog zum Vorgehen in (i) erkennt man auch hier, daß keine der Funktionen f_n rational ist.

Hat f_n die Darstellung $f = a/b$ mit teilerfremden Polynomen a und b, so ergibt sich

$$a(z) b\left(z^d\right)^n = (1-z) a\left(z^d\right)^n b(z)$$

aus der Funktionalgleichung. Da a und b teilerfremd sind, folgt $a\left(z^d\right)^n | a(z)$, also $a \in \mathbb{C}^\times$, und es gilt

$$(1-z) a^{n-1} b(z) = b\left(z^d\right)^n.$$

Ist $d\,n > 2$ oder $\deg b \geq 2$, so erhalten wir mittels Gradbetrachtungen einen Widerspruch. Im verbleibenden Fall reicht es $b(z) = \alpha z + \beta$ zu betrachten. Aus der Gleichung $(1-z)b(z) = b\left(z^2\right)$ ergibt sich $\alpha = \beta = 0$ und damit der Widerspruch.

Bemerkungen

Im Kapitel 4 zeigen wir, daß für jedes algebraische α mit $0 < |\alpha| < 1$ und d, das im Vergleich zu n hinreichend groß ist, die Werte

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right), \ldots, \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right)^{n^j}$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Während beispielsweise f_1 transzendent ist, gilt

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+z^{2^\nu}\right)=1/(1-z).$$

Untersuchungen darüber, wann ein unendliches Produkt eine rationale Funktion darstellt, findet man schon bei Ostrowski [56, 57] (vgl. auch Mendès–France und van der Poorten [42]).

Ostrowski untersuchte das Problem, rationale Funktionen $\varphi(z)$ zu finden, so daß das Produkt

$$\Psi(z) \;=\; \prod_{\nu=0}^{\infty}(1+z_\nu) \quad \text{mit} \quad z_0=z,\; z_{\nu+1}=\varphi\left(z_\nu\right)$$

eine algebraische Funktion ist. Speziell gab er alle φ an, so daß entweder $\Psi(z)$ oder $\Psi\left(z^{-1}\right)$ ein Polynom oder der Kehrwert eines Polynomes ist.

(iii) Dies aufgreifend betrachten wir nun das folgende Beispiel:

Sei wie üblich $d \geq 2$ eine natürliche Zahl und

$P(z) := 1+a_1z+\cdots+a_{d-1}z^{d-1}$ mit nicht sämtlich verschwindenden $a_i \in \overline{\mathbb{Q}}$,

dann erfüllen die Funktionen

$$f_n(z) \;:=\; \prod_{\lambda=0}^{\infty} P\left(z^{d^\lambda}\right)^{n^\lambda}$$

für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Funktionalgleichung

$$P(z)f_n\left(z^d\right)^n - f_n(z) = 0.$$

Analog zu dem obigen Vorgehen können wir nun wiederum zeigen, daß die Funktionen $f_2,\ldots,f_m$ für alle $m \geq 2$ über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch unabhängig sind.

Bemerkung
Wie wir an dem Beispiel

$$\prod_{\lambda=0}^{\infty}\left(1+z^{2^\lambda}\right)=\frac{1}{1-z}$$

gesehen haben, muß der Fall $n=1$ gesondert betrachtet werden.

Sei also (vgl. dazu Nishioka [54, Example 1.3.1])

$$f(z) := \prod_{\lambda=0}^{\infty} P\left(z^{d^\lambda}\right).$$

Es ist klar, daß die Koeffizienten von f in $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{d-1})$ liegen. Aus der Annahme, daß f algebraisch über $\mathbb{C}(z)$ ist, folgt wie üblich, daß f bereits eine rationale Funktion ist. Hat f daher die Darstellung $f = a/b$ mit teilerfremden Polynomen a, b, so folgt aus der Funktionalgleichung

$$a\left(z^d\right) P(z) b(z) = a(z) b\left(z^d\right). \tag{1}$$

Da a und b teilerfremd sind, folgt $b\left(z^d\right) \mid b(z)P(z)$. Wegen $\deg P \leq d-1$ ergibt sich also $\deg b \leq 1$. Ist $\deg b = 0$, so ist auch $a \in \mathbb{C}^\times$, was der Gleichung (1) und der Bedingung $P \neq 1$ widerspricht. Daher gilt also $\deg b = 1$, $a \in \mathbb{C}^\times$ und $\deg P = d-1$. Setzen wir daher $b(z) := z + c$, so folgt aus (1)

$$\begin{aligned} z^d + c &= (z+c)\left(1 + a_1 z + \cdots + a_{d-1} z^{d-1}\right) \\ &= a_{d-1} z^d + (c a_{d-1} + a_{d-2}) z^{d-1} + \cdots + (c a_1 + 1) z + c. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$a_{d-1} = 1,\ a_{d-2} = -c,\ a_{d-3} = (-c)^2, \ldots, a_1 = (-c)^{d-2},\ (-c)^{d-1} = 1$$

beziehungsweise

$$P(z) = 1 + \gamma z + \cdots (\gamma z)^{d-2} + (\gamma z)^{d-1},$$

wobei $\gamma^{d-1} = 1$ gilt. Daher ist f von der Form $f(z) = (1 - \gamma z)^{-1}$.

Insgesamt erhalten wir daraus, daß f genau dann algebraisch ist, wenn P von der obigen speziellen Form ist. Weiter ergibt sich auch, daß f dann schon die Gestalt $f(z) = (1 - \gamma z)^{-1}$ mit einer $(d-1)$–ten Einheitswurzel γ hat.

Bemerkung
Sei nun

$$P(z) := 1 + z^{s_1} + \cdots + z^{s_\ell} \qquad \text{mit} \qquad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_\ell < d,$$

dann ist

$$f(z) = \prod_{\lambda=0}^{\infty} P\left(z^{d^\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^k,$$

wobei $e(k) \in \{0,1\}$ ist und $e(k)=1$ genau dann gilt, wenn in der d–adischen Entwicklung von k nur die Zahlen $0, s_1, \ldots, s_\ell$ auftauchen. Insbesondere ist f genau dann algebraisch, wenn $\ell = d-1$ ist; denn dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Im Spezialfall $d=2$ und $P(z) = 1-z$ ist

$$f(z) \; = \; \prod_{\lambda=0}^{\infty} \left(1 - z^{2^\lambda}\right) \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} a(k) z^k,$$

wobei $a(k) \in \{1,-1\}$ die Morse–Thue–Folge ist. Dabei gilt $a(k) = 1$ genau dann, wenn die Anzahl der Einsen in der 2–adischen Entwicklung von k gerade ist. Nach den obigen Überlegungen ist klar, daß f transzendent ist.

(iv) Seien $d \geq 2$ und $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ mit $Q(0)=0$ und $1 \leq \deg Q \leq d-1$. Sei f_n für $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung der Funktionalgleichung

$$Q(z) f_n\left(z^d\right)^n \; = \; f_n(z) - 1 \qquad \text{mit} \quad f_n(0) = 1.$$

Für $n=1$ kann man die Lösung $f := f_1$ explizit angeben (vgl. [54, p. 12]):

$$f(z) \; = \; 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} Q\left(z^{d^j}\right).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind. Nehmen wir an, daß $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch abhängig sind, so ist nach Theorem 4 bereits eine solche Lösung f_n rational. Aus der Darstellung $f = a/b$ mit teilerfremden Polynomen a und b erhalten wir

$$Q(z) a\left(z^d\right)^n b(z) = a(z) b\left(z^d\right)^n - b(z) b\left(z^d\right)^n.$$

Da $a\left(z^d\right)$ und $b\left(z^d\right)$ auch teilerfremd sind, folgt daraus $b\left(z^d\right)^n \mid Q(z)b(z)$.

Ist jetzt $n=1$, so folgt daraus $\deg b \leq 1$. Falls $\deg b = 0$ ist, ergibt sich durch Gradbetrachtung aus der Gleichung

$$Q(z) a\left(z^d\right) = a(z) - b$$

ein Widerspruch, wobei man $\deg Q \geq 1$ beachte. Ist hingegen $\deg b = 1$, etwa $b(z) = z + c$, so ergibt sich wiederum aus der Gleichung

$$a(z)\left(z^d + c\right) = (z+c) Q(z) a\left(z^d\right) + (z+c)\left(z^d + c\right)$$

der gesuchte Widerspruch. Im Fall $n \geq 2$ folgt aus $b\left(z^d\right)^n \mid Q(z)b(z)$ direkt $\deg b = 0$ und daraus analog zu oben der Widerspruch.

Bemerkung
Wählen wir

$$Q(z) := z^{s_1} + \cdots + z^{s_\ell} \qquad \text{mit} \qquad 0 < s_1 < s_2 \cdots < s_\ell < d,$$

dann gilt speziell für $f := f_1$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^k,$$

wobei die Koeffizienten $e(k) \in \{0,1\}$ sind, und $e(k) = 1$ gilt dann und nur dann, wenn in der d–adischen Entwicklung von k nur die Ziffern $s_1, \ldots, s_\ell$ vorkommen.

2.2.2 Beweis von Theorem 4

Beim Beweis von Theorem 4 orientieren wir uns am Beweis von Proposition 6 in Nishioka [49]. Für den dazu notwendigen algebraischen Hintergrund vergleiche man beispielsweise das Buch von Weil [83].

Ist $n_{i_0} = 0$ für ein $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, so ist mit Satz 3 klar, daß f_{i_0} eine rationale Funktion ist. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $1 \leq n_1 < \ldots < n_m$ voraussetzen.

Da der Beweis des Theorems in beiden Fällen nahezu identisch ist, beschränken wir uns hier darauf zu zeigen, daß aus der Bedingung (ii) die algebraische Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ folgt.

Wir zeigen dazu vorab, daß

$$\left[\mathbb{C}(z)\left(f_i\left(z^{d^\nu}\right)\right) : \mathbb{C}(z)\left(f_i\left(z\right)\right)\right] = n_i^\nu$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt.

Da das Polynom $P_i(z, Y) - X \in \mathbb{C}(z)\left[X, Y\right]$ klarerweise irreduzibel über $\mathbb{C}(z)[X]$ ist, ist es nach einem Lemma von Gauss auch irreduzibel über $\mathbb{C}(z)(X)$. Ist nun $f_i \notin \mathbb{C}(z)$, so ist f_i nach Satz 3 transzendent über $\mathbb{C}(z)$. Somit ist $P_i(z, Y) - f_i\left(z\right)$ irreduzibel über $\mathbb{C}\left(z, f_i\left(z\right)\right)$. Da $f_i\left(z^d\right)$ das vorstehende Polynom in Y annulliert, folgt

$$\left[\mathbb{C}(z)\left(f_i\left(z^d\right)\right) : \mathbb{C}(z)\left(f_i\left(z\right)\right)\right] = n_i.$$

Für ein beliebiges $\nu \in \mathbb{N}$ beachte man, daß man durch Iteration der Funktionalgleichung und ähnlichen Argumenten ebenso die obige Gleichung erhält.

Wir beweisen Theorem 4 indirekt. Ist keine der Funktionen $f_1, \dots, f_m$ rational, so zeigen wir, daß diese Funktionen dann bereits algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind. Genauer zeigen wir per Induktion über $k \in \{1, \dots, m\}$, daß die Funktionen $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ für paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind.

Aufgrund von Satz 3 ist der Fall $k = 1$ bereits klar. Im Induktionsschritt setzen wir zur Abkürzung für $j = 1, \dots, k$ und alle natürlichen Zahlen ν

$$f_{i_j}(z) =: \varphi_j \qquad \text{und} \qquad f_{i_j}\left(z^{d^\nu}\right) =: \varphi_j^{(\nu)}.$$

Wir nehmen nun an, daß die Aussage bereits für $k-1$ gezeigt sei, die Funktionen $\{f_{i_1}(z), \dots, f_{i_k}(z)\} =: \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ jedoch algebraisch abhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind.

Mit $D^{(\nu)}$ und $D_\varkappa^{(\nu)}$ bezeichnen wir dann die Grade der folgenden Körpererweiterungen

$$\begin{aligned}
D^{(\nu)} &:= \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \dots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \dots, \varphi_k\right)\right], \\
D_\varkappa^{(\nu)} &:= \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \dots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \dots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \dots, \varphi_k\right)\right],
\end{aligned}$$

wobei $(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \dots, \varphi_k) := (\varphi_1, \dots, \varphi_{\varkappa-1}, \varphi_{\varkappa+1}, \dots, \varphi_k)$ usw. gesetzt ist, und zeigen die folgende Formel:

$$D_\varkappa^{(\nu)} = \left(\prod_{\lambda=1,\, \lambda\neq\varkappa}^{k} n_{i_\lambda}\right)^\nu = \left(\prod_{\lambda=1}^{k} n_{i_\lambda}\right)^\nu n_{i_\varkappa}^{-\nu}. \tag{2}$$

Da die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{\varkappa-1}, \varphi_{\varkappa+1}, \dots, \varphi_k$ aufgrund der Induktionsannahme algebraisch unabhängig sind, erhalten wir die algebraische Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1^{(\nu)}, \dots, \varphi_{\varkappa-1}^{(\nu)}, \varphi_{\varkappa+1}^{(\nu)}, \dots, \varphi_k^{(\nu)}$ über $\mathbb{C}(z)$. Denn auf Grund der Funktionalgleichung erhält man für $i = 1, \dots, k$, $i \neq \varkappa$ induktiv

$$\varphi_i \in \mathbb{C}(z)\left(\varphi_i^{(\nu)}\right) \subset \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \dots, \varphi_{\varkappa-1}^{(\nu)}, \varphi_{\varkappa+1}^{(\nu)}, \dots, \varphi_k^{(\nu)}\right).$$

Woraus sich

$$\begin{aligned}
k-1 &= \operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \dots, \varphi_{\varkappa-1}, \varphi_{\varkappa+1}, \dots, \varphi_k\right) \\
&\leq \operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \dots, \varphi_{\varkappa-1}^{(\nu)}, \varphi_{\varkappa+1}^{(\nu)}, \dots, \varphi_k^{(\nu)}\right)
\end{aligned}$$

ergibt, was obige Behauptung zeigt.

Daher sind die Körpererweiterungen $\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}\right), \ldots, \mathbb{C}(z)\left(\varphi_k^{(\nu)}\right)$ *regulär* (vgl. Proposition 21 in WEIL [83]) über dem Körper $\Bbbk := \mathbb{C}(z)$, nach [83, Theorem I.6] sind diese dann über $\mathbb{C}(z)$ *linear zerlegt*. Die letzte Behauptung (Gleichung (2)) folgt nun induktiv aus der Proposition I.14 in [83].

Sei nun $d_\varkappa$ der Grad von $\varphi_\varkappa$ über $\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right)$ und $d_\varkappa^{(\nu)}$ der Grad von $\varphi_\varkappa^{(\nu)}$ über $\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right)$, dann ist klar, daß $d_\varkappa^{(\nu)} \leq d_\varkappa$ gilt. Denn ist

$$P(y) := \sum_{j=0}^{d_\varkappa} p_j\left(z, \varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right) y^j$$

das Minimalpolynom von $\varphi_\varkappa$ über $\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right)$, so folgt

$$P\left(\varphi_\varkappa^{(\nu)}\right) = \sum_{j=0}^{d_\varkappa} p_j\left(z^{d^\nu}, \varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right)\left(\varphi_\varkappa^{(\nu)}\right)^j = 0,$$

wobei $p_j\left(z^{d^\nu}, \varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right) = 0$ auf Grund der algebraischen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}$ über $\mathbb{C}(z)$ nicht für alle $j = 0, \ldots, d_\varkappa$ gelten kann.

Aus der Gradformel für Körpererweiterungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
D^{(\nu)}\, d_\varkappa &= \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_k\right)\right] \cdot \\
&\quad \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_k\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right)\right] \\
&= \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right)\right] \\
&= \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right)\right] \cdot \\
&\quad \left[\mathbb{C}(z)\left(\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa^{(\nu)}}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}\right) : \mathbb{C}(z)\left(\varphi_1, \ldots, \widehat{\varphi_\varkappa}, \ldots, \varphi_k\right)\right] \\
&= d_\varkappa^{(\nu)}\, D_\varkappa^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Seien nun $\mu, \varkappa \in \{1, \ldots, k\}$ und $n_{i_\mu} < n_{i_\varkappa}$. Wir erhalten aus den obigen Resultaten wegen $1 \leq d_\mu^{(\nu)} \leq d_\mu$:

$$1 < \left(\frac{n_{i_\varkappa}}{n_{i_\mu}}\right)^\nu = \frac{D_\mu^{(\nu)}}{D_\varkappa^{(\nu)}} = \frac{d_\mu}{d_\mu^{(\nu)}}\,\frac{d_\varkappa^{(\nu)}}{d_\varkappa} \leq d_\mu.$$

Da aber $n_{i_\mu} < n_{i_\varkappa}$ gilt, erhalten wir für große ν den gewünschten Widerspruch. Also sind auch die Funktionen $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$, und das Theorem 4 ist somit bewiesen. $\square$

Bemerkung

Dem Beweis von Theorem 4 kann man entnehmen, daß sich die Aussage dieses Theorems verallgemeinern ließe, falls nur eine entsprechende Aussage im Fall $k = 1$ gelten würde. Gelingt es also, eine ähnliche Aussage wie in Satz 3 für allgemeinere Transformationen T zu beweisen, so könnte man daraus in analoger Weise ein allgemeineres Kriterium für die algebraische Unabhängigkeit von Funktionen gewinnen. Daß der Sachverhalt im allgemeinen aber nicht so einfach ist, sieht man z.B. in Lemma 1 in Becker [8]:

Sei $T \in \mathbb{C}(z)$ nichtkonstant und holomorph in einer Umgebung U um $\omega \in \mathbb{C}$. Φ sei algebraisch über $\mathbb{C}(z)$ und löse mit einer Funktion $S \in \mathbb{C}(z)$ die Funktionalgleichung

$$\Phi(z) = S(z)\Phi\left(T(z)\right).$$

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\Phi(z)^n \in \mathbb{C}(z).$$

Kapitel 3

Über polynomiale Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation

In diesem Kapitel wird zunächst die algebraische Unabhängigkeit der Werte Mahlerscher Funktionen in einer Unbestimmten, die polynomialen Funktionalgleichungen vom Typ

$$a(z)\underline{f}\,(T(z)) \;=\; \underline{P}\left(z, \underline{f}(z)\right)$$

mit einer rationalen Transformation T genügen, an algebraischen Argumenten untersucht. Nichttriviale Unterschranken für den Transzendenzgrad solcher Funktionen an algebraischen Stellen wurden erstmals von Nishioka [49] für die Transformation $T(z) = z^d$ angegeben. Töpfer verallgemeinerte dies in [71] für den Fall mehrerer Unbestimmter $z_1, \ldots, z_n$ mit geeigneten Verallgemeinerungen der Transformation T. Der Fall linearer Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation $T(z) = p\left(z^{-1}\right)^{-1}$, wobei p ein Polynom vom Grad ≥ 2 ist, wurde von Becker in [7] behandelt. Der allgemeine Fall linearer Funktionalgleichungen mit einer beliebigen rationalen Transformation T wurde von Töpfer in [72] betrachtet. Das folgende Theorem 1 vereinigt die früheren Ergebnisse von Nishioka [49], Becker [7] und Töpfer [72, Theorem 2].

Im Anschluß werden wir dann noch einige Erweiterungen dieses Theorems in Spezialfällen angeben. So untersuchen wir einerseits den Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right)$ über $\mathbb{Q}$ an transzendenten Stellen, andererseits gehen wir auf die Problematik von Unabhängigkeitsmaßen (vgl. Töpfer [72], [73]) bei dieser Klasse von Funktionen ein.

3.1 Formulierung eines Ergebnisses und Anwendungen

Wir kommen nun zu dem Hauptresultat dieses Kapitels, dem folgenden

Theorem 1
Seien $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einer Umgebung U von $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$ und algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$. Die Taylorkoeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in der Entwicklung um ω mögen in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen und mit einem $D \in \mathbb{N}$ und einem reellen $L \geq 1$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j \in \mathbb{N}_0$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{\left| f_{i,j} \right|} \leq \exp\left(c\left(1 + j^L\right)\right) \qquad \text{und} \qquad D^{\left[c\left(1+j^L\right)\right]} f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Sei $T(z) = T_1(z)/T_2(z)$ eine rationale Funktion mit teilerfremden $T_1(z), T_2(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $d := \max\{\deg T_1, \deg T_2\}$, weiter sei ω ein Fixpunkt von T der Ordnung $\delta := \operatorname{ord}_\omega T \geq 2$.

Die Funktionen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ mögen in U dem folgenden System von Funktionalgleichungen genügen:

$$a(z)\underline{f}\left(T(z)\right) = \underline{P}\left(z, \underline{f}(z)\right),$$

wobei $a(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $\underline{P}\left(z, \underline{y}\right) = \left(P_1\left(z, \underline{y}\right), \ldots, P_m\left(z, \underline{y}\right)\right) \in \left(\overline{\mathbb{Q}}\left[z, \underline{y}\right]\right)^m$ mit $t := \max\left\{\deg_{\underline{y}}\left(P_i\right) \,:\, i = 1, \ldots, m\right\} < d$ gilt.

$\alpha \in U$ sei algebraisch mit $\lim_{k\to\infty} T^k(\alpha) = \omega$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelte weiter $T^k(\alpha) \notin \{\omega, \infty\}$, und $T^k(\alpha)$ sei keine Nullstelle von a. Dann gilt:

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq \frac{m \log \delta - L(m+1)\left(\log d - \log \delta\right)}{\log d + ((m+1)L + m)\log t}.$$

Bemerkungen

(i) Aus $T(z)T_2(z) = T_1(z)$ folgt sofort $\delta = \operatorname{ord}_\omega T \leq d$. Man nennt d häufig auch den *Grad* von T und bezeichnet diesen mit $\deg T$.

(ii) Ist $\omega \neq \infty$, so ist ω wegen $\deg T \geq \delta \geq 2$ und $T'(\omega) = 0$ algebraisch.

Als erste Anwendung von Theorem 1 erhalten wir unter den dortigen Voraussetzungen:

Korollar 2

(i) *Ist $\omega = 0$ und $T(z) = z^d$ (also $d = \delta$), so gilt* (vgl. Nishioka [49])*:*

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\,(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \geq \frac{m \log d}{\log d + (L(m+1) + m) \log t}.$$

(ii) *Sind die Polynome $P_1, \dots, P_m$ bezüglich $\underline{y}$ linear (d.h. $t = 1$), so gilt* (vgl. Töpfer [72, Theorem 2])

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\,(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \geq (2m+1) \frac{\log \delta}{\log d} - (m+1).$$

Bemerkung
Eine Verbesserung entsprechend Theorem 3 in [72] ist im Fall einer polynomialen Transformation $T \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $a(z) = 1$ im allgemeinen nicht möglich. Der Grund dafür ist, daß eine Verbesserung der Abschätzungen für die Taylorkoeffizienten der Funktionen $f_1, \dots, f_m$, wie sie im Lemma 12 von [72] erfolgt, im Falle $t > 1$ nicht möglich ist. Man vergleiche dazu auch die Bemerkung zu Lemma 1.1 auf Seite 2.

Neuere Anwendungen sind hier nicht zu erwarten, da es sich als schwierig erweist, die algebraische Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \dots, f_m$ im speziellen Fall nachzuweisen. Eine Aussage entsprechend Theorem 2.4 ist im Fall einer rationalen Transformation T nicht zu erwarten, da selbst im Fall $m = 1$ kein allgemeines Ergebnis analog zu Satz 2.3 bekannt ist.
Im Fall linearer Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation T findet man bei Chirskii [12] und Töpfer [72] zahlreiche Anwendungen für das obige Resultat. Beispiele für den Fall polynomialer Funktionalgleichungen mit der Transformation $T(z) = z^d$ findet man in Nishioka [49] (vergleiche dazu auch das erste Beispiel in 2.2.1).

3.2 Ergänzungen zu Theorem 1

Wir kommen nun zu den bereits zu Beginn dieses Kapitels angekündigten Erweiterungen von Theorem 1. Neben den in den beiden folgenden Abschnitten dargestellten Erweiterungen ist es ebenso möglich, den Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\,(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))$ an sogenannten Liouville–Zahlen, die sehr gut durch rationale Zahlen approximierbar sind, zu untersuchen (vgl. Töpfer [70, 71, 73]). Darauf wurde hier allerdings verzichtet. Für diesen und die beiden folgenden Problemkreise ist die Nullstellenabschätzung aus Lemma 1.15 ganz entscheidend.

3.2.1 Qualitative Untersuchungen der Werte Mahlerscher Funktionen an transzendenten Stellen

Im ersten Teil dieses Kapitels wurden ausschließlich die arithmetischen Eigenschaften der Funktionswerte Mahlerscher Funktionen an algebraischen Stellen untersucht. In diesem Abschnitt wollen wir nun kurz auf die algebraische Unabhängigkeit der Werte dieser Funktionen an transzendenten Stellen eingehen. Dieses Problem wurde erstmals von AMOU [1] untersucht. Er zeigte das folgende

Korollar 3

Seien $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ im Einheitskreis holomorphe Funktionen, deren Taylorkoeffizienten bei der Entwicklung um 0 in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen mögen. Die Funktionen $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ seien über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch unabhängig und mögen mit einer natürlichen Zahl $d \geq 2$ dem folgenden System von Funktionalgleichungen genügen:

$$\underline{f}(z) = A(z)\underline{f}\left(z^d\right) + \underline{B}(z),$$

wobei A eine $m \times m$ Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}[z]$ ist und $\underline{B} \in (\mathbb{K}[z])^m$ ist. Für transzendentes α mit $|\alpha| < 1$ gilt dann:

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq \left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Bemerkungen

(i) Der Fall polynomialer Funktionalgleichungen wurde von TÖPFER [71, Theorem 4] untersucht. PHILIPPON [60] verschärfte schließlich das Resultat von AMOU; unter den Voraussetzungen von Korollar 3 erzielte er das bestmögliche Resultat, nämlich

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq m.$$

(ii) Wie TÖPFER [70, Bemerkung (b) auf Seite 106] schon ausgeführt hat, sind in der allgemeinen Situation nur triviale Ergebnisse zu erhalten, d.h. es kann lediglich die Transzendenz einer der Zahlen $\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ garantiert werden, was bei $\alpha \notin \overline{\mathbb{Q}}$ trivial ist. Für algebraisches α haben wir in Theorem 1 bereits ein deutlich besseres Resultat erhalten. Nichttriviale Ergebnisse sind also höchstens in dem Fall zu erwarten, wo die Häuser und Nenner der Taylorkoeffizienten sehr langsam anwachsen.

Theorem 4

Seien $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einer Umgebung U von $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$ und algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$. Die Taylorkoeffizienten $f_{i,j}$ der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in der Entwicklung um ω mögen in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen und mit einem $D \in \mathbb{N}$ und einem reellen $L > 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j \in \mathbb{N}_0$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{|f_{i,j}|} \leq \exp\left(c\left(1 + j^L\right)\right) \qquad \textit{und} \qquad D^{\left[c\left(1+j^L\right)\right]} f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Sei $T(z) = T_1(z)/T_2(z)$ eine rationale Funktion mit teilerfremden $T_1(z), T_2(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $d := \max\{\deg T_1, \deg T_2\}$. Weiter sei ω ein Fixpunkt von T der Ordnung $\delta \geq 2$.

Die Funktionen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ mögen in U das folgende System von Funktionalgleichungen erfüllen:

$$a(z)\underline{f}\left(T(z)\right) = \underline{P}\left(z, \underline{f}(z)\right),$$

wobei $a(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $\underline{P}\left(z, \underline{y}\right) = \left(P_1\left(z, \underline{y}\right), \ldots, P_m\left(z, \underline{y}\right)\right) \in \left(\overline{\mathbb{Q}}\left[z, \underline{y}\right]\right)^m$ mit $t := \max\left\{\deg_{\underline{y}} P_i \,:\, i = 1, \ldots, m\right\} < \delta^{1/m}$ gilt.

Sei $\alpha \in U$ mit $\lim_{k\to\infty} T^k(\alpha) = \omega$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelte weiter $T^k(\alpha) \notin \{\omega, \infty\}$, und $T^k(\alpha)$ sei keine Nullstelle von a. Für $\mu := 1 + m\log d / (\log\delta - m\log t)$ sei ferner $\log d < \left(\frac{m}{1+L\mu} + 1\right)\log\delta$ erfüllt, dann gilt:

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq \frac{m\log\delta + (1 + L\mu)(\log\delta - \log d)}{\log\delta + (1 + L\mu)\log d}.$$

Bemerkungen

(i) Im Gegensatz zu Theorem 1 lassen wir hier wie oben bereits ausgeführt $L > 0$ zu, andererseits müssen wir hier $t^m < \delta$ verlangen. Der Grund dafür ist, daß unter dieser zusätzlichen Bedingung eine obere Abschätzung (vgl. Lemma 1.15) für die Nullstellenordnung einer geeigneten Hilfsfunktion bekannt ist. Die zweite Bedingung $\log d < \left(\frac{m}{1+L\mu} + 1\right)\log\delta$ ist ebenso technischer Natur.

(ii) Selbst unter optimalen Voraussetzungen, d.h. $d = \delta$ und $L = 0$ erreichen wir lediglich dieselbe Schranke wie Amou. Mit einem Ausbau des Beweises von Philippon [60] könnte es aber möglich sein, auch in etwas allgemeineren Situationen deutlich bessere Ergebnisse als beispielsweise in Theorem 4 zu erzielen.

Ein Beispiel für Theorem 4

In diesem Beispiel beschäftigen wir uns mit Reihen der Form

$$\chi_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_i(T^j(z)) \qquad (i = 1, \dots, m),$$

wobei $T \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ mit $\deg T =: d$ sei. $\omega \in \mathbb{C}$ sei ein Fixpunkt von T der Ordnung $\delta \geq 2$, $q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ mit $\deg q_i \geq 1$ und $q_i(\omega) = 0$. Die arithmetischen Eigenschaften der Werte dieser Funktionen an algebraischen Stellen wurden von Töpfer in [72] untersucht. Die Funktionen $\chi_1, \dots, \chi_m$ sind in einer Umgebung U um $\omega \in \mathbb{C}$ holomorph und erfüllen die Funktionalgleichung

$$\chi_i(z) = \chi_i(T(z)) + q_i(z) \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Damit erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 5
Seien $1, q_1, \dots, q_m$ $\mathbb{C}$–linear unabhängig. Für beliebige $(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{\underline{0}\}$ gelte $d \nmid \deg(\sum_{i=1}^m s_i q_i(z))$, ferner sei $d < \delta^{m+1}$. Ist $\alpha \in U$ mit $\lim_{k\to\infty} T^k(\alpha) = \omega$ und $T^k(\alpha) \neq \omega$ für $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\,(\alpha, \chi_1(\alpha), \dots, \chi_m(\alpha)) \geq \frac{(m+1)\log\delta - \log d}{\log\delta + \log d}.$$

Bemerkung
Für algebraisches α (vgl. Töpfer [72, Corollary 4]) läßt sich diese Unterschranke verschärfen zu

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\,(\chi_1(\alpha), \dots, \chi_m(\alpha)) \geq (m+1)\frac{\log\delta}{\log d} - 1.$$

Wir müssen hier $\omega \in \mathbb{C}$ verlangen, da sich unter dieser Bedingung die Häuser und Nenner der Koeffizienten von $f_1, \dots, f_m$ sehr gut beschränken lassen.

Beweis
In Töpfer [72, Corollary 4] wurde gezeigt, daß die Funktionen $\chi_1, \dots, \chi_m$ unter den obigen Bedingungen an die Polynome $q_1, \dots, q_m$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ sind. Aus dem Lemma 12 in Töpfer [72] folgt dann, daß die Potenzreihenkoeffizienten den im Theorem geforderten Bedingungen für alle $L > 0$ genügen. Damit folgt die Behauptung des Korollars aus Theorem 4. $\square$

3.2.2 Über Unabhängigkeitsmaße einer speziellen Klasse Mahlerscher Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nun mit Unabhängigkeitsmaßen für die Werte Mahlerscher Funktionen.

Seien $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathbb{C}$ algebraisch unabhängig. Existiert ferner eine Funktion $\varphi(D, H)$ mit der Eigenschaft, daß

$$|P(\omega_1, \ldots, \omega_m)| \geq \varphi(D, H)$$

für alle Polynome $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ mit $\deg P \leq D$ und $H(P) \leq H$ gilt, so heißt $\varphi(D, H)$ ein *Unabhängigkeitsmaß* für $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Gilt mit Konstanten $c, \tau \in \mathbb{R}_+$ ferner

$$\log |P(\omega_1, \ldots, \omega_m)| \geq -c\, t(P)^{\tau}$$

für jedes Polynom $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$, wobei

$$t(P) := \deg P + \log H(P)$$

gesetzt ist, so sagt man, daß der Körper $\mathbb{Q}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ einen *Transzendenztyp* $\leq \tau$ hat. Andererseits folgt aus einem Schubfachschluß bereits $\tau \geq m + 1$ (vgl. Waldschmidt [79]).

Die ersten effektiven Unabhängigkeitsmaße stammen von Becker [6]. Dessen Resultat wurde von Nishioka [51] verbessert und von Töpfer [72, 73] verallgemeinert. In dem folgenden Theorem werden die beiden oben zitierten Resultate von Töpfer in einer Aussage zu vereint.

Theorem 6
Seien $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einer Umgebung U von $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$ und algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$. Die Taylorkoeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in der Entwicklung um ω mögen in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen und mit einem $D \in \mathbb{N}$ und einem reellen $L > 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j \in \mathbb{N}_0$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{\left|f_{i,j}\right|} \leq \exp\left(c\left(1 + j^L\right)\right) \qquad \textit{und} \qquad D^{\left[c\left(1+j^L\right)\right]} f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Sei $T(z) = T_1(z)/T_2(z)$ eine rationale Funktion mit teilerfremden $T_1(z), T_2(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $d := \max\{\deg T_1, \deg T_2\}$. Weiter sei ω ein Fixpunkt von T der Ordnung $d \geq 2$.

Die Funktionen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ *mögen in* U *dem folgenden System von Funktionalgleichungen genügen:*

$$a(z)\underline{f}\,(T(z)) = \underline{P}\left(z, \underline{f}(z)\right),$$

wobei $a(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ *und* $\underline{P}\left(z, \underline{y}\right) = \left(P_1\left(z, \underline{y}\right), \ldots, P_m\left(z, \underline{y}\right)\right) \in \left(\overline{\mathbb{Q}}\left[z, \underline{y}\right]\right)^m$ *mit* $t := \max\left\{\deg_{\underline{y}} P_i \,:\, i = 1, \ldots, m\right\} < d^{1/m}$ *und* $(m-1)((L+1)\mu - m)\log t < \log d$ *gilt, wobei* $\mu := 1 + m\log d/(\log d - m\log t)$ *gesetzt ist.*

$\alpha \in U$ *sei algebraisch mit* $\lim_{k\to\infty} T^k(\alpha) = \omega$*. Für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *gelte weiter* $T^k(\alpha) \notin \{\omega, \infty\}$*, und* $T^k(\alpha)$ *sei keine Nullstelle von* a*.*

Dann gilt für jedes Polynom $Q \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ *mit* $\deg Q \le D$ *und* $H(Q) \le H$ *die Abschätzung*

$$\log|Q(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > -cD^\mu \left(D^{((L+1)\mu - m)\mu_1/\mu_2} + \left(\frac{\log H}{D}\right)^{\mu_1/\mu_3}\right)$$

mit einer nur von $\alpha, f_1, \ldots, f_m$ *abhängenden Konstanten* $c > 0$ *und*

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \log d + (m-1)\mu\log t, \\ \mu_2 &:= \log d - (m-1)((L+1)\mu - m)\log t \\ \text{und}\quad \mu_3 &:= \log d - \log t. \end{aligned}$$

Bemerkungen

(i) Dieses Ergebnis entspricht in dem Fall der Transformation $T(z) = z^d$ dem Ergebnis in Töpfer [73].

(ii) Man beachte, daß wir hier $d = \delta$ voraussetzen mußten. Der Grund hierfür ist, daß wir zwar im anderen Fall ebenso eine geeignete Folge von Polynomen konstruieren können, auf welche wir dann das Lemma 1.14 anwenden könnten. Allerdings treten im Beweis Ober– und Unterschranken für den Parameter k auf, so daß es nicht gelungen ist, die Parameterwahl entsprechend zu koordinieren, daß alle Bedingungen von Lemma 1.14 erfüllt sind. Selbst im *einfachen* Fall $t = 1$, aber $d > \delta$ ist noch kein Unabhängigkeitsmaß bekannt.

Im Fall linearer Funktionalgleichungen läßt sich die Aussage von Theorem 6 entsprechend der Behauptung von Töpfer [72, Theorem 1] verschärfen. Dies ist der Inhalt des folgenden Korollars.

Korollar 7
Es seien die Voraussetzungen von Theorem 6 mit $t = 1$ erfüllt, dann gilt für jedes Polynom $Q \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m] \setminus \{0\}$ mit $\deg Q \le D$ und $H(Q) \le H$ die Abschätzung

$$\log |Q(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > -cD^m \left(D^{m+2} + \log H\right),$$

wobei die Konstante $c > 0$ lediglich von α und $f_1, \ldots, f_m$ abhängt.

Beweis
Die Aussage des Korollars folgt analog zum Beweis von Theorem 6 (vgl. den Beweis von Satz 3.10 in Töpfer [70]). In dem später folgenden Lemma 10 brauchen wir lediglich $d^k \gg \nu$ zu verlangen und können dann $k_0(N)$ durch die Bedingung

$$d^{k_0(N)} \ge \gamma_0 N^{m+1} > d^{k_0(N)-1}$$

fixieren. □

3.3 Beweis von Theorem 1

Der nun folgende Beweis von Theorem 1 erfolgt in mehreren Schritten.

3.3.1 Reduktion auf den Fall $\omega = 0$

Im ersten Schritt zeigen wir, daß der Beweis des Theorems 1 auf den Fall $\omega = 0$ reduziert werden kann. Wir betrachten dazu die folgende Möbius–Transformation (vgl. Becker [8])

$$\Phi(z) := \begin{cases} z - \omega, & \text{falls } \omega \in \mathbb{C} \text{ ist,} \\ 1/(z - \beta) & \text{für } \omega = \infty \end{cases}$$

mit einer algebraischen Zahl β und $T^k(\alpha) \ne \beta$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Mit dieser Definition gilt in beiden Fällen $\Phi(\omega) = 0$. Ferner betrachten wir die Funktionen $f_i^*(z) := f_i\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ und die Transformation $T^*(z) := \Phi\left(T\left(\Phi^{-1}(z)\right)\right)$. Man beachte, daß T und T^* beide vom Grad d sind und $\mathrm{ord}_0 T^* = \mathrm{ord}_\omega T = \delta$ gilt. Mit $a^*(z) := a\left(\Phi^{-1}(z)\right)$, $\underline{P}^*\left(z, \underline{y}\right) := \underline{P}\left(\Phi^{-1}(z), \underline{y}\right)$ gilt, wie man sofort nachrechnet:

$$a^*(z)\underline{f}^*(T^*z) = \underline{P}^*\left(z, \underline{f}^*(z)\right).$$

Ist nun $d \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ ein Nenner für die rationalen Funktionen $a^*(z)$, $\underline{P}^*$ (man vergleiche dazu auch die Bemerkung nach Theorem 1), so sind die Voraussetzungen von Theorem 1 für $\underline{f}^*$, $d(z)a^*(z)$, $d(z)\underline{P}^*\left(z, \underline{y}\right)$ und $\omega = 0$ erfüllt.

3.3.2 Konstruktion einer Hilfsfunktion

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein algebraischer Zahlkörper, der die Taylorkoeffizienten von $f_1, \ldots, f_m$, die Koeffizienten der Polynome $a, P_1, \ldots, P_m$, die Koeffizienten der Taylorentwicklung von T um 0 (vgl. Lemma 1.3) und α enthält. Weiterhin können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Koeffizienten der Polynome $a, P_1, \ldots, P_m$ bereits ganzalgebraisch sind.

Nach Lemma 1.6 existiert für jedes genügend große $N \in \mathbb{N}$ ein Polynom $R_N \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right] \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{array}{rcl} \deg_z R_N & \leq & N, \qquad \deg_{\underline{y}} R_N \;\leq\; N, \\ \log H\left(R_N\right) & \ll & N^{(m+1)L}, \\ \nu & := & \mathrm{ord}_0 R_N\left(z, \underline{f}(z)\right) \;\geq\; cN^{m+1}. \end{array} \tag{1}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\delta^k \gg \nu^L$ folgt aus Lemma 1.12

$$-c_1 \nu \delta^k \;\leq\; \log\left|R_N\left(T^k(\alpha), \underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right| \;\leq\; -c_2 \nu \delta^k. \tag{2}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung definieren wir nun rekursiv eine Folge von Polynomen $R_{k,N} \in \mathbb{K}\left[z, \underline{y}\right]$ durch:

$$\begin{array}{rcl} R_{0,N}\left(z, \underline{y}\right) & := & R_N\left(z, \underline{y}\right) \\ R_{k+1,N}\left(z, \underline{y}\right) & := & T_2(z)^{d_z\left(R_{k,N}\right)} a(z)^{d_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right)} R_{k,N}\left(T(z), \dfrac{\underline{P}\left(z, \underline{y}\right)}{a(z)}\right). \end{array}$$

Damit erhalten wir:

Lemma 8
Für $k, N \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $R_{k,N} \in \mathbb{K}\left[z, \underline{y}\right]$,

(ii) $d_z\left(R_{k,N}\right) \ll d^k N$ *und* $d_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right) \leq t^k N$,

(iii) $\log H\left(R_{k,N}\right) \ll \left(d^k N + N^{L(m+1)}\right)$.

(iv) *Gelten zusätzlich die beiden Ungleichungen $\delta^k \gg \nu^L$ und $d^k N \ll \nu \delta^k$, so folgt*

$$-c_1 \nu \delta^k \;\leq\; \log\left|R_{k,N}\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right| \;\leq\; -c_2 \nu \delta^k.$$

Beweis
Der Teil (i) und die Aussage über den Grad von $R_{k,N}$ bezüglich $\underline{y}$ in (ii) folgen sofort induktiv. Ist s eine Oberschranke für die Grade der Polynome $a, P_1, \ldots, P_m$ bezüglich z, so erhalten wir wegen $t < d$ induktiv

$$\begin{aligned} d_z\left(R_{k+1,N}\right) &\leq d\, d_z\left(R_{k,N}\right) + s\, d_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right) \\ &\leq d^{k+1}\, d_z\left(R_N\right) + s\sum_{j=0}^{k} d^j\, d_{\underline{y}}\left(R_{k-j,N}\right) \leq d^{k+1}N + sN\sum_{j=0}^{k} d^j t^{k-j} \\ &\ll d^{k+1}N. \end{aligned}$$

Ist C eine Oberschranke für die Längen von a und $\underline{P}$, so folgt

$$\begin{aligned} H\left(R_{k+1,N}\right) &\leq L\left(R_{k+1,N}\right) \\ &\leq L\left(R_{k,N}\right)\max\{1,C\}^{t^k N}\max\{1,L(T_1),L(T_2)\}^{cd^k N} \\ &\leq L(R_N)\exp\left(\gamma N\left(\sum_{j=0}^{k} t^j + \sum_{j=0}^{k} d^j\right)\right) \\ &\leq L(R_N)\exp\left(\gamma N d^{k+1}\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$L(R_N) \leq (1+N)^{m+1}H(R_N) \leq \exp\left(\gamma N^{L(m+1)}\right)$$

folgt damit

$$H\left(R_{k+1,N}\right) \leq \exp\left(\gamma\left(N^{L(m+1)} + d^{k+1}N\right)\right).$$

Die Aussage (iv) ergibt sich aus der folgenden, induktiv zu zeigenden Formel

$$R_{k,N}\left(\alpha,\underline{f}(\alpha)\right) = R_N\left(T^k(\alpha),\underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\prod_{j=0}^{k-1} a\left(T^j(\alpha)\right)^{t_{k-j-1}} T_2\left(T^j(\alpha)\right)^{d_{k-j-1}},$$

wobei wir abkürzend $t_j := d_{\underline{y}}\left(R_{j,N}\right)$ und $d_j := d_z\left(R_{j,N}\right)$ gesetzt haben. Da $\mathrm{ord}_0 T \geq 2$ ist und T_1, T_2 teilerfremd sind, gilt $T_2(0) \neq 0$. Mittels Formel (2) und Lemma 1.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} \log\left|R_{k,N}\left(\alpha,\underline{f}(\alpha)\right)\right| &\leq \log\left|R_N\left(T^k(\alpha),\underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right| + \gamma\sum_{j=0}^{k-1}\left(Nt^{k-j-1} + d_{k-j-1}\right) \\ &\leq -\gamma_1\nu\delta^k + \gamma_2 N d^k. \end{aligned}$$

Da aber $Nd^k \leq c\nu\delta^k$ mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich

$$\left|R_{k,N}\left(\alpha,\underline{f}(\alpha)\right)\right| \ll -\nu\delta^k.$$

Die untere Abschätzung ergibt sich analog. Denn aus Lemma 1.11 und wegen $T_2(0) \neq 0$ und $T_2\left(T^j(\alpha)\right) \neq 0$ für $j = 0, 1, \ldots$ folgt

$$\begin{aligned} \log\left|\prod_{j=0}^{k-1} a\left(T^j(\alpha)\right)^{t_{k-j-1}} T_2\left(T^j(\alpha)\right)^{d_{k-j-1}}\right| &\gg -\sum_{j=0}^{k-1} N\left(\delta^j t^{k-j-1} + d^{k-j-1}\right) \\ &\gg -Nd^k. \end{aligned}$$

Dies ergibt zusammen mit der unteren Abschätzung aus (2) wegen $Nd^k \leq c\nu\delta^k$

$$\log\left|R_{k,N}\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right| \geq -\gamma N d^k - c_1\nu\delta^k \gg -\nu\delta^k.$$

□

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nun noch zusätzlich verlangen, daß die Koeffizienten von T (vgl. Lemma 1.3) bereits ganzalgebraisch sind. Sei nun D ein Nenner von α, dann setzen wir

$$Q_{k,N}\left(\underline{y}\right) := D^{\left[cd^k N\right]} R_{k,N}\left(\alpha, \underline{y}\right).$$

Somit folgt für k, N mit $Nd^k \ll \nu\delta^k$ und $\delta^k \gg \nu^L$ bereits $Q_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right] \setminus \{0\}$. Für den Grad von $Q_{k,N}$ erhalten wir aus Lemma 8

$$\deg_{\underline{y}} Q_{k,N} \leq t^k N$$

und entsprechend für die Höhe wegen $N^{L(m+1)} \ll \nu^L \ll \delta^k \ll d^k$

$$\begin{aligned} \log H\left(Q_{k,N}\right) &\leq \log H\left(R_{k,N}\right) + \gamma d^k N \ll \left(d^k N + N^{L(m+1)}\right) \\ &\ll d^k N. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir eine obere und eine untere Schranke für $\left|Q_{k,N}\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right|$, nämlich

$$-c_1\nu\delta^k \leq \log\left|Q_{k,N}\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2\nu\delta^k.$$

3.3.3 Anwendung von Lemma 1.13

Der Beweis von Theorem 1 kann nun auf Lemma 1.13 zurückgeführt werden. Um dieses Lemma anzuwenden, definieren wir für eine hinreichend große Zahl M und ein später noch geeignet zu bestimmendes $k_1 \in \mathbb{N}$ die folgenden Konstanten bzw. Funktionen:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= t^{k_1} M, & \Phi_2 &:= cd^{k_1} M, \\ \psi_1(k) &:= c_1\nu\delta^k, & \psi_2(k) &:= c_2\nu\delta^k \quad \text{und} \quad \Lambda(k) := \frac{c_1}{c_2}\delta. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir zeigen dann, daß unter den Voraussetzungen des Theorems die Bedingungen (i) bis (iii) von Lemma 1.13 für diese Folge $(Q_k)_{k_0 \leq k \leq k_1}$ von Polynomen und den oben definierten Werten bzw. Funktionen erfüllt sind.

Ist ν wie in (1), so ist klar, daß die Bedingungen (i) und (ii) von Lemma 1.13 für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \leq M$ gelten, falls für $k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$ die Bedingungen

$$\delta^k \gg \nu^L \qquad \text{und} \qquad d^k N \ll \nu \delta^k \tag{4}$$

aus Lemma 8 erfüllt sind. Definieren wir dementsprechend die reelle Zahl M implizit durch $\nu =: cM^{m+1}$ mit $M \geq N$ (vgl. (1) und (3)), so ergibt sich aus der Wahl von

$$k_0 := \left[\frac{(1+m)L}{\log \delta} \log M \; + \; \gamma \right]$$

mit einer geeigneten Konstanten $\gamma > 0$ bereits $\delta^k \gg \nu^L$ für alle $k \geq k_0$.

Die zweite Bedingung in (4) liefert wegen $d \geq \delta \geq 2$ eine Oberschranke für k_1. Definiert man k_1 durch

$$k_1 := [\beta \log M]$$

mit einer noch zu bestimmenden reellen Zahl $\beta > 0$, so erhalten wir schließlich aus den Bedingungen $k_0 \leq k_1$ und aus (4) die folgenden Schranken für β

$$\frac{L(m+1)}{\log \delta} < \beta < \frac{m}{\log d - \log \delta}, \tag{5}$$

falls nur N und damit M hinreichend groß gewählt ist. Denn aus $N \leq M$ folgt bei $d \neq \delta$ sofort

$$\beta(\log d - \log \delta) \; < \; m \; \leq \; m + 1 - \limsup_{M \to \infty} \frac{\log N}{\log M},$$

woraus dann schließlich

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)^{k_1} \; \ll \; \frac{M^{m+1}}{N}$$

und die zweite Ungleichung in (4) folgen. Im Falle $d = \delta$ liefert dabei die rechte Seite in (5) keinen Beitrag.

Ist nun m_0 die kleinste ganze Zahl mit

$$m_0 \geq \frac{m \log \delta - L(m+1)\,(\log d - \log \delta)}{\log d + ((m+1)L + m) \log t},$$

dann folgt daraus

$$m_0 - 1 < \frac{m \log \delta - L(m+1)\,(\log d - \log \delta)}{\log d + ((m+1)L + m) \log t}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned}&\left((m_0-1)\log t+\log d-\log\delta\right)\left((m_0-1)+L(m+1)\right)\\&\quad<\quad(m-m_0+1)\left(\log\delta-(m_0-1)\log t\right).\end{aligned}$$

Speziell ergibt sich bereits $\delta > t^{m_0-1}$. Setzt man desweiteren $m_0 \geq 1$ voraus, was keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, so erhält man aus der obigen Formelzeile die Existenz einer positiven reellen Zahl β mit

$$(6)\qquad \begin{cases}\beta\left(\log\delta-(m_0-1)\log t\right) & > \quad (m_0-1)+L(m+1)\\ \text{und} \qquad\qquad m-m_0+1 & > \quad \beta\left((m_0-1)\log t+\log d-\log\delta\right).\end{cases}$$

Wir zeigen nun, daß diese Bedingungen an β mit den Schranken in (5) verträglich sind.

Einerseits erhalten wir wegen $m_0 \geq 1$

$$\beta > \frac{(m_0-1)+L(m+1)}{\log\delta-(m_0-1)\log t} \geq \frac{L(m+1)}{\log\delta},$$

andererseits ergibt sich für $\delta \neq d$:

$$\beta < \frac{m-m_0+1}{(m_0-1)\log t+\log d-\log\delta} \leq \frac{m}{\log d-\log\delta}.$$

Mit solch einem β kann man also k_1 wie oben definieren.

Abschließend müssen wir noch zeigen, daß die Bedingung (iii) von Lemma 1.13 erfüllt ist. Aus

$$\beta\left(\log\delta-(m_0-1)\log t\right) > (m_0-1)+L(m+1)$$

erhalten wir

$$k_1\left(\log\delta-(m_0-1)\log t\right) \geq (m_0-1)\log M+k_0\log\delta+\gamma,$$

woraus der erste Teil von (iii) in Lemma 1.13 für ein hinreichend großes $M \geq N$ folgt. Aus der zweiten Bedingung in (6) an β ergibt sich analog mit einer gemeinsamen Konstanten $\gamma > 0$

$$(m-m_0+1)\log M \geq k_1\left((m_0-1)\log t+\log d-\log\delta\right)+\gamma$$

und daraus folgt auch der zweite Teil der Bedingung (iii) in Lemma 1.13.

Somit ist das Theorem 1 vollständig bewiesen. $\square$

3.4 Beweis der Theoreme 4 und 6

Beweis von Theorem 4

Der Beweis von Theorem 4 verläuft analog zu dem Beweis von Theorem 1. Sei $\mathbb{K}$ genau wie dort. Ohne Einschränkung betrachten wir wiederum nur den Fall $\omega = 0$. Aus Lemma 2 in Töpfer [73] erhalten wir entsprechend der Voraussetzung $L > 0$ die Existenz eines Polynoms $R_N \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right] \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned} \deg_z R_N &\leq N, \qquad \deg_{\underline{y}} R_N \leq N, \\ \log H\left(R_N\right) &\ll N^{1+(m+1)L}, \\ c_1 N^{m+1} &\leq \nu := \mathrm{ord}_0 R_N\left(z, \underline{f}(z)\right) \leq c_2 N^{\mu} \end{aligned}$$

mit effektiven Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Die obere Abschätzung für ν folgt aus der Nullstellenabschätzung in Lemma 1.15.

Die Konstruktion der Folge von Polynomen $R_{k,N}$ übernehmen wir aus dem Beweis von Theorem 1 und erhalten dann analog zu Lemma 8 nach Multiplikation mit einem geeigneten Nenner das folgende

Lemma 9
Für $k, N \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $R_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$,

(ii) $d_z\left(R_{k,N}\right) \ll d^k N$ *und* $d_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right) \leq t^k N$,

(iii) $\log H\left(R_{k,N}\right) \ll \left(d^k N + N^{1+L(m+1)}\right)$.

(iv) *Gilt zusätzlich $\delta^k \gg N\nu^L$ und $d^k N \ll \nu\delta^k$, so folgt*

$$-c_1 \nu \delta^k \leq \log\left|R_{k,N}\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2 \nu \delta^k.$$

Man beachte, daß wir im Beweis das Lemma 1.12 durch ein zu Lemma 4 aus Töpfer [73] analoges Resultat zu ersetzen haben. Der Rest des Beweises läuft dann vollkommen analog zu dem Beweis von Lemma 8, wobei wir wiederum ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, daß die Koeffizienten der Polynome $a, P_1, \ldots, P_m$ bereits ganzalgebraisch sind.

Setzt man dann

$$\begin{aligned} \Phi_1(k) &= c_0 d^k N, \quad \Phi_2(k) = c_0 d^k N, \\ \psi_1(k) &= c_1 \nu \delta^k, \quad \psi_2(k) = c_2 \nu \delta^k \quad \text{und} \quad \Lambda(k) = \frac{c_1}{c_2}\delta \end{aligned}$$

und wählt

$$N \;:=\; N(k) \;:=\; c\delta^{k/(1+L\mu)}$$

mit einer passenden Konstanten $c > 0$, so folgt bereits $\delta^k \gg N\nu^L$ für alle großen k. Wegen

$$\log d < \left(\frac{m}{1+L\mu} + 1\right)\log\delta$$

und der unteren Abschätzung von ν ist ebenso die Bedingung $d^k N \ll \nu\delta^k$ für hinreichend große k erfüllt. Wir müssen daher lediglich noch zeigen, daß die Bedingung (iii) von Lemma 1.13 für alle $k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$ für geeignet fixierte Zahlen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Die Bedingung (iii) des Lemmas ist aber für eine entsprechende Konstante $c > 0$ äquivalent zur Gültigkeit der folgenden beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \nu(k_1)\delta^{k_1} &\geq cd^{k_1(m_0-1)}N(k_1)^{m_0-1}\nu(k_0)\delta^{k_0}, \\ \nu(k_1)\delta^{k_1} &\geq cd^{k_1 m_0}N(k_1)^{m_0}. \end{aligned}$$

Wählen wir m_0 entsprechend der Behauptung von Theorem 4 als die größte ganze Zahl mit

$$m_0 < \frac{m\log\delta + (1+L\mu)(\log\delta - \log d)}{\log\delta + (1+L\mu)\log d} + 1,$$

so erhalten wir daraus

$$(m - m_0 + 1)\log\delta > (1+L\mu)(m_0\log d - \log\delta)$$

und damit erst recht

$$\begin{aligned} (m - m_0 + 2)\log\delta &> (1+L\mu)(m_0\log d - \log\delta) + \log\delta \\ &> (1+L\mu)((m_0-1)\log d - \log\delta). \end{aligned}$$

Fixieren wir nun $k_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend groß und wählen k_1 für eine passende Konstante $c > 0$ derart, daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} N(k_1)^{m-m_0+2} &\geq c\left(\frac{d^{m_0-1}}{\delta}\right)^{k_1}\nu(k_0)\delta^{k_0}, \\ N(k_1)^{m-m_0+1} &\geq c\left(\frac{d^{m_0}}{\delta}\right)^{k_1} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann folgt daraus, daß auch die Bedingung (iii) von Lemma 1.13 erfüllt ist. Mithin ist das Theorem 4 also bewiesen. □

Beweis von Theorem 6

Wir übernehmen hier die Konstruktion der Hilfsfunktion aus dem Beweis von Theorem 1 bzw. Theorem 4. Aus Lemma 9 folgt im allgemeinen Fall, d.h. $\delta := \mathrm{ord}_0 T \leq d$, für $k, N \in \mathbb{N}$ die Existenz eines Polynomes $R_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right]$ mit

(i) $\deg_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right) \leq t^k N$,

(ii) $\log H\left(R_{k,N}\right) \ll \left(d^k N + N^{1+L(m+1)}\right)$.

(iii) Gilt zusätzlich $\delta^k \gg N\nu^L$ und $d^k N \ll \nu\delta^k$ so folgt

$$-c_1\nu\delta^k \leq \log\left|R_{k,N}\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2\nu\delta^k.$$

Bemerkung
Im allgemeinen Fall ist es die Bedingung $d^k N \ll \nu\delta^k$, welche es schwierig gestaltet, die Parameterwahl entsprechend Lemma 1.14 zu koordinieren.

In unserem Fall, d.h. $\delta = d$, ist die Bedingung $d^k N \ll \nu\delta^k$ trivialerweise erfüllt, so daß wir das folgende Lemma erhalten.

Lemma 10
Für $k, N \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $R_{k,N} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right]$,

(ii) $\deg_{\underline{y}}\left(R_{k,N}\right) \leq t^k N$,

(iii) $\log H\left(R_{k,N}\right) \ll \left(d^k N + N^{1+L(m+1)}\right) \leq c_0 d^k N$.

(iv) *Gilt zusätzlich $d^k \gg N\nu^L$, so folgt*

$$-c_1\nu d^k \leq \log\left|R_{k,N}\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2\nu d^k.$$

Für $k, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq N_0\left(\alpha, f_1, \ldots, f_m\right)$, $d^k \geq \nu^L$ und $N^{m+1} \ll \nu \ll N^\mu$ setzen wir:

$$\begin{array}{rclrcl} \Phi_1 & := & t^{k_1}N_1, & \Phi_2 & := & c_0 d^{k_1}N_1, \\ \psi_1(k,N) & := & c_1\nu d^k, & \psi_2(k,N) & := & c_2\nu d^k \quad \text{und} \\ \Lambda & := & \dfrac{c_1}{c_2}d, & & & \end{array}$$

wobei die Parameter N_1 und k_1 noch geeignet zu bestimmen sind. Fixieren wir $k_0(N)$ durch die Bedingung

$$d^{k_0(N)} \geq \gamma_0 N^{1+L\mu} > d^{k_0(N)-1},$$

so müssen wir lediglich noch zeigen, daß durch eine geeignete Wahl der Parameter N_1 und k_1 die Ungleichungen

$$\begin{aligned} d^{k_1} &\gg N_1^{(L+1)\mu-m}, \\ N_1^{m+1} d^{k_1} &\gg N_1^{m-1}\, t^{(m-1)k_1}\, N_0^{\mu}\, d^{k_0(N_0)}\, D, \\ N_1^{m+1} d^{k_1} &\gg N_1^{m-1}\, t^{(m-1)k_1} \left(N_1 t^{k_1} \log H \;+\; N_1 d^{k_1} D\right) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Definieren wir dazu

$$\begin{aligned} N_1 &:= \left[\gamma_1 D\, t^{(m-1)k_1}\right] + 1 \qquad \text{und} \\ k_1 &:= \left[\frac{1}{\mu_1} \log\left(D^{((L+1)\mu-m)\mu_1/\mu_2} \;+\; \left(\frac{\log H}{D}\right)^{\mu_1/\mu_3}\right) + \gamma_2\right], \end{aligned}$$

so entnehmen wir dem Vorgehen in TÖPFER [70, Seite 117] bzw. [73], daß damit die obigen Bedingungen und daher die Voraussetzungen von Lemma 1.14 erfüllt sind. Wegen

$$\begin{aligned} \psi_2(k_1, N_1) &\ll N_1^{\mu}\, d^{k_1} \\ &\ll D^{\mu} \left(t^{(m-1)\mu}\, d\right)^{k_1} \\ &\ll D^{\mu} \left(D^{((L+1)\mu-m)\mu_1/\mu_2} \;+\; \left(\frac{\log H}{D}\right)^{\mu_1/\mu_3}\right). \end{aligned}$$

erhalten wir daraus schließlich die Behauptung von Theorem 6. $\square$

Kapitel 4

Über Funktionen, die impliziten Funktionalgleichungen genügen

4.1 Einleitung und Ergebnisse

In seinem Übersichtsartikel [37] wies MAHLER auf drei offene Probleme hin. Das dritte Problem – für die ersten beiden Probleme vergleiche man beispielsweise den Artikel von LOXTON und VAN DER POORTEN [32] – beschäftigte sich mit impliziten Funktionalgleichungen vom Typ

$$P(z, f(z), f(T(z))) = 0$$

mit $T(z) = z^d$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und einem Polynom $P \in \overline{\mathbb{Q}}[z, u, v]$. Dieses Problem wurde von NISHIOKA [47] für polynomiale Transformationen T (vgl. auch [54, Chapter 1.5]) bzw. im Fall mehrerer Unbestimmter in [48] gelöst. BECKER [8] verallgemeinerte das Ergebnis von NISHIOKA auf algebraische Transformationen T, und TÖPFER bewies in [74] ein vollkommen effektives Transzendenzmaß für $f(\alpha)$.

In diesem Artikel fragte TÖPFER nach Kriterien, um die algebraische Unabhängigkeit solcher Funktionswerte an algebraischen Stellen zu zeigen, wo die Funktionen impliziten Funktionalgleichungen genügen. Bei dem Beweis des folgenden Theorems 1 (vgl. dazu auch [22]) folgen wir dem Vorgehen in [74].

Mit den in den Kapiteln 3 bzw. 5 dargestellten Methoden ist es sicherlich möglich, die Aussage von Theorem 1 auf rationale oder auch auf algebraische Transformationen zu verallgemeinern.

Hat man erst einmal die Transzendenz bzw. algebraische Unabhängigkeit gewisser Werte gezeigt, so stellt sich ganz natürlich die Frage nach Transzendenzmaßen bzw. Unabhängigkeitsmaßen. Im Rahmen der bisherigen technischen Möglichkeiten läßt sich aber kein Unabhängigkeitsmaß zeigen. Der Grund hierfür ist, daß im allgemeinen Fall impliziter Funktionalgleichungen keine oberen Nullstellenabschätzungen geeigneter Hilfsfunktionen bekannt sind, welche für quantitative Resultate für die Werte Mahlerscher Funktionen ganz entscheidend sind. Die bislang weitreichendsten Ergebnisse in dieser Richtung stammen von Töpfer ([74, Proposition 1] im oben bereits erwähnten Spezialfall und [75] im Fall expliziter Funktionalgleichungen mit einer rationalen Transformation).

Doch nun zu dem oben angekündigten

Theorem 1
Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ mögen in einer Umgebung U des Ursprungs holomorph und über $\mathbb{C}(z)$ algebraisch unabhängig sein. Die Koeffizienten $f_{j,\nu}$ der Potenzreihen

$$f_j(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^{\nu} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

mögen einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ angehören und für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $j = 1, \ldots, m$ mit einem $D \in \mathbb{N}$ und einer reellen Zahl $L \geq 1$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{\left| f_{j,\nu} \right|} \leq \exp\left(c\left(1+\nu^L\right)\right) \qquad \text{und} \qquad D^{\left[\left(c\left(1+\nu^L\right)\right)\right]} f_{j,\nu} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Seien $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ und $\beta := n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ mögen für $z \in U$ einer der Funktionalgleichung vom Typ

$$a(z) f_j\left(z^d\right)^{n_j} = \sum_{\nu=0}^{n_j-1} P_{\nu,j}\left(z, \underline{f}(z)\right) f_j\left(z^d\right)^{\nu} \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

mit Polynomen $a \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $P_{0,1}, \ldots, P_{n_m-1,m} \in \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \underline{y}\right]$ genügen.

Sei $d > \max\left\{\beta^L, d_{\underline{y}}(\underline{P})\right\}$, dabei ist $d_{\underline{y}}(\underline{P}) := \max\left\{d_{\underline{y}}\left(P_{0,1}\right), \ldots, d_{\underline{y}}\left(P_{n_m-1,m}\right)\right\}$ gesetzt. Ferner sei $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \cap U$, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei α^{d^k} keine Nullstelle von a, dann gilt $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq m_0$, wobei m_0 die kleinste ganze Zahl ist mit:

$$m_0 \geq \frac{m \log d - L(m+1)\log\beta\left(1+\frac{\log\beta}{\log d}\right)}{\log\beta + \log d + \left(L(m+1)\left(1+\frac{\log\beta}{\log d}\right)+m\right)\left(2\log\beta + \log d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)}.$$

Als einfache Anwendung des Theorems erhalten wir sofort das folgende

Korollar 2
Sei $m > 1$. α, die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ und die Parameter d, β und $d_{\underline{y}}(\underline{P})$ mögen den Bedingungen von Theorem 1 genügen und die Ungleichung

$$\frac{\log d_{\underline{y}}(\underline{P})}{\log d} < \frac{1 - \frac{\log \beta}{\log d}\left(2m^2 - m - 1 + L(m+1)\left(1 + \frac{\log \beta}{\log d}\right)(2m-1)\right)}{(m-1)\left(L(m+1)\left(1 + \frac{\log \beta}{\log d}\right) + m\right)}$$

erfüllen, dann sind die Werte $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Bemerkungen

(i) Genügt f einer allgemeinen impliziten Funktionalgleichung vom Typ

$$P\left(z, f(z), f\left(z^d\right)\right) = 0,$$

so zeigte Nishioka [47] die Transzendenz von $f(\alpha)$ für algebraisches $\alpha \neq 0$ unter der Bedingung

$$\max\left\{d, \deg_y(P)\right\} n^2 < d^2.$$

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen des Theorems erhalten wir die Transzendenz von $f(\alpha)$ nur unter der stärkeren Bedingung

$$d > \max\left\{n^{\sqrt{3}+1}, \deg_y(P)\right\}.$$

Der Grund für das schlechtere Ergebnis ist, daß wir im Beweis des Theorems im allgemeinen Fall eine Folge von Polynomen $(Q_k)_{k_0 \leq k \leq k_1}$ konstruieren müssen, wobei die Differenz $k_1 - k_0$ relativ groß sein muß (vgl. Lemma 1.13).

Im Paragraphen 4.4 werden wir aber zeigen, daß wir mit der hier benutzten Beweismethode *fast* das Resultat von Nishioka erreichen (vgl. das folgende Korollar 3) und damit die Aussage von Theorem 1 im Fall $m = 1$ deutlich verbessern können. Wir erhalten die Transzendenz von $f(\alpha)$ unter den Voraussetzungen des Theorems bereits für $d^3 > n^2 \max\left\{d, \deg_y(P)\right\}^2$. Dies entspricht für $d \geq \deg_y(P)$ dem Ergebnis von Nishioka [47].

(ii) Die in Theorem 1 vorausgesetzte Bedingung $a\left(\alpha^{d^k}\right) \neq 0$ ist stärker als die von Becker und Töpfer verlangte Bedingung $P\left(\alpha^{d^k}, f\left(\alpha^{d^k}\right), u\right) \neq$

0. Allerdings reicht die obige Voraussetzung für die später betrachteten Anwendungen. Würde man stattdessen nur

$$a\left(\alpha^{d^k}\right) u^{n_j} - \sum_{i=0}^{n_j-1} P_{i,j}\left(\alpha^{d^k}, \underline{f}\left(\alpha^{d^k}\right)\right) u^i \neq 0$$

für $j = 1, \ldots, m$ und $k \in \mathbb{N}_0$ verlangen, wäre der Beweis technisch deutlich aufwendiger, da dann die Grade geeigneter Hilfspolynome nur trivial abgeschätzt werden könnten.

(iii) Die hier vorausgesetzte Bedingung $d > \deg_y(P)$ ist im nichttrivialen Fall ($m_0 > 1$) nicht abzuschwächen, wie wir im Abschnitt 4.3.7 (Bemerkung auf Seite 63) sehen werden.

Während Becker und Bergweiler in [9] das Ergebnis von Becker [8] ausnützen konnten, um die Transzendenz der Werte geeigneter Böttcher–Funktionen (vgl. Beardon [5]) zu zeigen, scheint es aufgrund der obigen Überlegungen nicht möglich zu sein, den Beweis von Theorem 1 so zu modifizieren, daß die Aussage auch auf Böttcher–Funktionen anwendbar ist.

(iv) Töpfer bewies in [74] unter den Voraussetzungen des Theorems ein Transzendenzmaß für $f(\alpha)$ unter den Bedingungen $d^2 > n^2 \max\left\{d, \deg_y(P)\right\}$ und $d > n \deg_y P$. Dabei ist die Bedingung $d > n \deg_y P$ für den Beweis einer geeigneten Nullstellenabschätzung notwendig.

(v) Für $m \geq 1$ und $\beta = 1$ erhalten wir wieder das Ergebnis von Nishioka [49] bzw. die Aussage von Theorem 1 aus Kapitel 3 für die Transformation $T(z) = z^d$.

Wir kommen nun zu dem bereits oben angekündigten

Korollar 3
Sei f in einer Umgebung U des Ursprungs holomorph und transzendent über $\mathbb{C}(z)$. Die Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$$

mögen algebraisch sein, und die Funktion f erfülle in U eine Funktionalgleichung der Form

$$P\left(z, f(z), f\left(z^d\right)\right) = 0$$

mit einem $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ *und einem Polynom* $P \in \overline{\mathbb{Q}}[z,y,u] \setminus \{0\}$. *Ferner sei* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \cap U$ *und* $P\left(T^k\alpha, f\left(T^k\alpha\right), u\right) \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$. *Gilt* $\deg_u P \geq 1$ *und*

$$d^3 > (\deg_u P)^2 \max\left\{d, \deg_y P\right\}^2,$$

so ist $f(\alpha)$ *transzendent.*

Beweis
Der Beweis von Korollar 3 erfolgt im Abschnitt 4.4. $\square$

4.2 Anwendungen von Theorem 1

In unserer ersten Anwendung des Theorems beschäftigen wir uns mit unendlichen Produkten der Form

$$f_n(z) := \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - z^{d^j}\right)^{n^j},$$

wobei d und n natürliche Zahlen mit $d \geq 2$ sind. Die Funktionen f_n sind in $|z| < 1$ holomorph und genügen dort der folgenden Funktionalgleichung:

$$f_n(z) \;=\; (1-z) f_n\left(z^d\right)^n.$$

Korollar 4
Seien $1 \leq n_1 < \ldots < n_m$ *natürliche Zahlen und* $\beta := n_1 \cdots n_m$. *Ist* α *algebraisch mit* $0 < |\alpha| < 1$, *und ist* d *eine natürliche Zahl mit*

$$\log d > \left(2m^2 - 1 + \sqrt{4m^4 - 2m^2 + m}\right) \log \beta,$$

dann sind die Werte

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right)^{n_1^j}, \ldots, \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right)^{n_m^j}$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$. *Unter den entsprechenden Bedingungen an* α, d *und* n *erhalten wir die algebraische Unabhängigkeit von*

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right), \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right)^{2^j}, \ldots, \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \alpha^{d^j}\right)^{n^j}.$$

Bemerkung
Nishioka erhielt in [52] die algebraische Unabhängigkeit

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-\alpha^{d^j}\right) \qquad (d=2,3,\ldots)$$

für alle algebraischen Zahlen α mit $0<|\alpha|<1$.

Beweis
Die algebraische Unabhängigkeit der Funktionen $f_{n_1},\ldots,f_{n_m}$ über $\mathbb{C}(z)$ folgt bereits aus Theorem 2.4 (vgl. dazu das Beispiel (ii) auf Seite 19).

Nach Lemma 1.2 erfüllen die Koeffizienten der Funktionen $f_{n_1},\ldots,f_{n_m}$ die Bedingungen für die Häuser bzw. Nenner im Theorem für jedes $L>1$. Daher folgt die Behauptung des Korollars 4 direkt aus Theorem 1. □

Dieses Ergebnis wollen wir nun entsprechend dem Beispiel (iii) in 2.2.1 verallgemeinern. Seien mit $d\geq 2$ und $n\in\mathbb{N}$

$$P(z):=1+a_1z+\cdots+a_{d-1}z^{d-1} \quad \text{mit nicht sämtlich verschwindenden } a_i\in\overline{\mathbb{Q}}$$

und

$$f_n(z):=\prod_{\lambda=0}^{\infty}P\left(z^{d^\lambda}\right)^{n^\lambda}$$

definiert. Dabei sei P nicht von der Gestalt $P(z)=1+\gamma z+(\gamma z)^2+\cdots+(\gamma z)^{d-2}+z^{d-1}$ mit einer $(d-1)$–ten Einheitswurzel γ. Wie wir bereits in 2.2.1 gesehen haben, sind dann die Funktionen $f_1,\ldots,f_m$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$ und erfüllen

$$P(z)f_n\left(z^d\right)^n-f_n(z)=0.$$

Also können wir wiederum aus Theorem 1 folgern:

Korollar 5
Seien m,d natürliche Zahlen mit

$$\log d>\left(2m^2-1+\sqrt{4m^4-2m^2+m}\right)\log(m!).$$

Ist α algebraisch mit $0<|\alpha|<1$ und $P\left(\alpha^{d^k}\right)\neq 0$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$, dann sind die Werte

$$\prod_{j=0}^{\infty}P\left(\alpha^{d^j}\right),\ \prod_{j=0}^{\infty}P\left(\alpha^{d^j}\right)^{2^j},\ \ldots,\ \prod_{j=0}^{\infty}P\left(\alpha^{d^j}\right)^{m^j}$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Zum Abschluß dieses Abschnitts greifen wir auch noch das Beispiel (iv) aus 2.2.1 auf.

Ist f_n für $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung der Funktionalgleichung

$$Q(z) f_n \left(z^d\right)^n \; = \; f_n(z) - 1,$$

mit $d \geq 2$ bzw. $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ mit $Q(0) = 0$ und $1 \leq \deg Q \leq d-1$, dann folgt wiederum aus Theorem 1

Korollar 6
Ist α algebraisch mit $0 < |\alpha| < 1$ und $Q\left(\alpha^{d^k}\right) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt ferner

$$\log d > \left(2m^2 - 1 + \sqrt{4m^4 - 2m^2 + m}\right) \log(m!),$$

dann sind die Funktionswerte $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Insbesondere erhalten wir wiederum (vgl. Beispiel 1.3.2 in Nishioka [54]) *für alle algebraischen α mit $0 < |\alpha| < 1$ und $Q\left(\alpha^{d^k}\right) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ bei*

$$Q(z) \; := \; z^{s_1} + \cdots + z^{s_\ell} \qquad \text{mit} \qquad 0 < s_1 < s_2 \cdots < s_\ell < d$$

die Transzendenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} e(k) \alpha^k,$$

wobei die Koeffizienten $e(k) \in \{0,1\}$ sind, und $e(k) = 1$ gilt dann und nur dann, wenn in der d–adischen Entwicklung von k nur die Ziffern $s_1, \ldots, s_\ell$ vorkommen.

4.3 Beweis von Theorem 1

4.3.1 Beweisskizze

Da der Beweis relativ länglich ist, geben wir hier eine kurze Skizze. Der Fall $\beta = 1$ (d.h. $n_1 = \ldots = n_m = 1$) wurde bereits von Nishioka in [49] behandelt. Daher können wir für den Beweis ohne Einschränkung $\beta \geq 2$ voraussetzen.

Im ersten Schritt zeigen wir, wie die Potenzen der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ mit Hilfe der Funktionalgleichung reduziert werden können. Dies ausnutzend konstruieren wir im zweiten Schritt ausgehend von einem Startpolynom R ein Polynom R_k, dessen Grade und Höhe durch eine Funktion, welche nur von k, den Vorgaben an $d, \beta, d_{\underline{y}}(\underline{P})$ und dem Startpolynom R abhängt, beschränkt sind. Entscheidend dabei ist, daß wir für $\left|R_k\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right|$ nahezu dieselben analytischen Schranken wie für $\left|R\left(T^k(\alpha), \underline{f}\left(T^k(\alpha)\right)\right)\right|$ erhalten. Im letzten Schritt konstruieren wir aus R_k ein geeignetes Polynom Q_k mit ganzalgebraischen Koeffizienten, welches den Voraussetzungen von Lemma 1.13 genügt. Daraus werden wir dann schließlich die Behauptung des Theorems folgern.

Wir definieren für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$:

$$a_+ := \max\{a,\, 0\} = \frac{1}{2}(a + |a|)\,.$$

4.3.2 Über Potenzen von $f_1, \ldots, f_m$

Sei $\mathbb{K}$ ein algebraischer Zahlkörper, der α und entsprechend Theorem 1 die Koeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ und der Polynome $a, P_{0,1}, \ldots, P_{n_m-1,m}$ umfaßt. Ohne Einschränkung kann man voraussetzen, daß bereits $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ und $P_{0,1}, \ldots, P_{n_m-1,m} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ gilt.

Im weiteren Verlauf sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt, die im Beweis vorkommenden Konstanten hängen dabei nicht von k ab. Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 an α, d und $\underline{f}$ schreiben wir abkürzend

$$\tau_\kappa := \alpha^{d^\kappa},\ \varphi_{i,\kappa} := f_i\left(\alpha^{d^\kappa}\right) \quad \text{und} \quad \underline{\varphi}_\kappa := \left(f_1\left(\alpha^{d^\kappa}\right), \ldots, f_m\left(\alpha^{d^\kappa}\right)\right).$$

Setzen wir $P_{n_j,j} := a$ für $j = 1, \ldots, m$, so vereinbaren wir damit die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
d_z(\underline{P}) &:= \max\left\{\deg_z(P_{0,1}), \ldots, \deg_z(P_{n_m,m})\right\}, \\
d_{\underline{y}}(\underline{P}) &:= \max\left\{\deg_{\underline{y}}(P_{0,1}), \ldots, \deg_{\underline{y}}(P_{n_m,m})\right\}, \\
L(\underline{P}) &:= \max\left\{L(P_{0,1}), \ldots, L(P_{n_m,m})\right\}.
\end{aligned}$$

Lemma 7
Für $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{N}_0$ und alle $j = 1, \ldots, m$ gilt:

$$(a(\tau_{k-1}) f_j(\tau_k))^\lambda = \sum_{i=0}^{n_j-1} P_{i,\lambda,j}^{(k)}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1}) f_j(\tau_k))^i$$

mit Polynomen $P_{i,\lambda,j}^{(k)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$, deren Grade und Längen den folgenden Abschätzungen genügen:

$$d_z\left(P_{i,\lambda,j}^{(k)}\right) \le (\lambda - i)_+\, d_z(\underline{P}),$$

$$
\begin{aligned}
d_{\underline{y}}\left(P^{(k)}_{i,\lambda,j}\right) &\leq (\lambda-i)_+\, d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right),\\
L\left(P^{(k)}_{i,\lambda,j}\right) &\leq 2^{(\lambda-n_j)_+} L\left(\underline{P}\right)^{(\lambda-i)_+}.
\end{aligned}
$$

Beweis
Gilt $0 \leq \lambda \leq n_j - 1$, so kann man

$$
P^{(k)}_{i,\lambda,j} = \delta_{i,\lambda}
$$

wählen, und die Behauptungen des Lemmas sind klar.

Ist hingegen $\lambda = n_j + \ell$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}_0$, so zeigt man obige Behauptungen per Induktion über ℓ.

Im Fall $\ell = 0$ folgt aus der Funktionalgleichung (1) bereits

$$
(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{n_j} = \sum_{i=0}^{n_j-1} P_{i,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right) a(\tau_{k-1})^{n_j-1-i}\left(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k)\right)^i,
$$

also $P^{(k)}_{i,n_j,j}\left(z,\underline{y}\right) = a^{n_j-1-i}(z)\, P_{i,j}\left(z,\underline{y}\right)$ und daraus schließlich die Behauptungen.

Im Induktionsschritt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{n_j+\ell+1} &= (a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{n_j+\ell}\ (a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))\\
&= \sum_{i=0}^{n_j-1} P^{(k)}_{i,n_j+\ell,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n_j-2} P^{(k)}_{i,n_j+\ell,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{i+1}\\
&+ P^{(k)}_{n_j-1,n_j+\ell,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{n_j}\\
&= \sum_{i=0}^{n_j-2} P^{(k)}_{i,n_j+\ell,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{i+1}\\
&+ P^{(k)}_{n_j-1,n_j+\ell,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)\sum_{i=0}^{n_j-1} P^{(k)}_{i,n_j,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{i}\\
&= \sum_{i=0}^{n_j-1} P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)(a(\tau_{k-1})f_j(\tau_k))^{i},
\end{aligned}
$$

dabei ist mit $P^{(k)}_{-1,n_j+\ell,j}\left(z,\underline{y}\right) := 0$

$$
P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j}\left(z,\underline{y}\right) := P^{(k)}_{n_j-1,n_j+\ell,j}\left(z,\underline{y}\right) P^{(k)}_{i,n_j,j}\left(z,\underline{y}\right) + P^{(k)}_{i-1,n_j+\ell,j}\left(z,\underline{y}\right)
$$

gesetzt.

Somit folgt induktiv $P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ und

$$\begin{aligned} d_z\left(P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j}\right) &\leq (n_j+\ell+1-i)d_z\left(\underline{P}\right), \\ d_{\underline{y}}\left(P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j}\right) &\leq (n_j+\ell+1-i)d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right), \\ L\left(P^{(k)}_{i,n_j+\ell+1,j}\right) &\leq 2^{\ell+1}L\left(\underline{P}\right)^{n_j+\ell+1-i}, \end{aligned}$$

was das Lemma schließlich beweist. □

4.3.3 Ein erster Reduktionsschritt

In den folgenden Reduktionsschritten ersetzen wir $R\left(\tau_k,\underline{\varphi}_k\right) =: R_0\left(\tau_k,\underline{\varphi}_k\right)$, wobei $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ erstmal beliebig ist, induktiv durch Polynome $R_\ell\left(\tau_{k-\ell},\underline{\varphi}_{k-\ell}\right)$ und erhalten so schließlich ein Polynom R_k, welches ähnliche Schranken für $\left|R_k\left(\alpha,\underline{f}(\alpha)\right)\right|$ und den Grad bzw. die Höhe von R_k besitzt wie das Startpolynom R.

Wir definieren dafür

$$M := \{0,1,\ldots,n_1-1\}\times\cdots\times\{0,1,\ldots,n_m-1\}.$$

Lemma 8
Sei $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ beliebig. Dann existiert ein Polynom $R^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{u},\underline{y}\right]$ mit

$$\begin{aligned} a(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)}R\left(\tau_k,\underline{\varphi}_k\right) &= \sum_{\underline{\mu}\in M} R^*_{\underline{\mu}}\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\mu}} \\ &=: R^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1},a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right), \end{aligned}$$

und $R^*_{\underline{\mu}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z,\underline{u}]$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} d_{y_j}\left(R^*\right) &\leq n_j-1 \qquad (j=1,\ldots,m), \\ d_z\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) &\leq d\,d_z(R)+d_z\left(\underline{P}\right)d_{\underline{y}}(R), \\ d_{\underline{u}}\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) &\leq d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)d_{\underline{y}}(R), \\ L\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) &\leq L(R)L\left(\underline{P}\right)^{d_{\underline{y}}(R)}2^{d_{\underline{y}}(R)}. \end{aligned}$$

Bemerkung
An dieser Stelle geht die *starke* Voraussetzung $a(\tau_k) \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ ein. Würden wir hier eine schwächere Bedingung zulassen, so ließe sich $d_{\underline{y}}\left(R^*_{\underline{\mu}}\right)$ nur trivial abschätzen, was das Ergebnis verschlechtern würde.

Beweis
Aus der Darstellung

$$R\left(z, \underline{y}\right) := \sum_{i=0}^{d_z(R)} \sum_{\left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)} R_{i,\underline{j}}\, z^i\, \underline{y}^{\underline{j}}$$

gewinnt man mittels Lemma 7:

$$\begin{aligned} a(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)} R\left(\tau_k, \underline{\varphi}_k\right) &= \sum_{i=0}^{d_z(R)} \sum_{\left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)} R_{i,\underline{j}}\, \tau_k^i\, a(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)-\left|\underline{j}\right|} \left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{j}} \\ &= \sum_{\underline{\mu} \in M} R^*_{\underline{\mu}}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right) \left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\mu}}, \end{aligned}$$

dabei ist

$$R^*_{\underline{\mu}}\left(z, \underline{u}\right) = \sum_{i=0}^{d_z(R)} \sum_{\left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)} R_{i,\underline{j}} \left(z^d\right)^i a(z)^{d_{\underline{y}}(R)-\left|\underline{j}\right|} P^{(k)}_{\mu_1,j_1,1}(z, \underline{u}) \cdot \ldots \cdot P^{(k)}_{\mu_m,j_m,m}(z, \underline{u}).$$

Die erste und dritte Aussage von Lemma 8 folgen daraus sofort.

Aus Lemma 7 folgt weiterhin

$$d_z\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) \leq d d_z(R) + d_z\left(\underline{P}\right) d_{\underline{y}}(R) + d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right) \max\left\{\sum_{i=1}^m (j_i - \mu_i)_+ - j_i : \left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)\right\},$$

und daraus gewinnt man dann auch die zweite Behauptung des Lemmas.

Die Länge von $R^*_{\underline{\mu}}$ können wir analog abschätzen:

$$\begin{aligned} L\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) &\leq L(R) 2^{\max\left\{\sum_{i=1}^m (j_i - n_i)_+ : \left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)\right\}} L\left(\underline{P}\right)^{d_{\underline{y}}(R) + \max\left\{\sum_{i=1}^m (j_i - n_i)_+ - j_i : \left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)\right\}} \\ &\leq L(R) L\left(\underline{P}\right)^{d_{\underline{y}}(R)} 2^{d_{\underline{y}}(R)}. \end{aligned}$$

□

4.3.4 Ein weiterer Reduktionsschritt

Lemma 9
Sei nun $R^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{u}, \underline{y}\right]$ wie in Lemma 8, dann existieren Polynome $U_1, \ldots, U_\beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{u}\right]$, so daß an der Stelle $\left(z_0, \underline{u}_0, \underline{y}_0\right) := \left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}, a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)$ gilt:

$$R^{*\,\beta} + U_1 R^{*\,\beta-1} + \cdots + U_\beta = 0.$$

Für die Grade und die Höhe der Polynome U_ℓ erhalten wir mit einer nur von $\underline{f}$ und α abhängigen Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
d_z(U_\ell) &\leq \beta d\, d_z(R) + \beta d_z\left(\underline{P}\right)\left(d_{\underline{y}}(R) + |\underline{n}|\right), \\
d_{\underline{u}}(U_\ell) &\leq \beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\left(d_{\underline{y}}(R) + |\underline{n}|\right), \\
L(U_\ell) &\leq \exp\left(c\left(d_z(R) + d_{\underline{y}}(R)\right)\right) H(R)^\beta.
\end{aligned}$$

Beweis
Mit $R^*\left(z, \underline{u}, \underline{y}\right) = \sum_{\underline{\mu}\in M} R^*_{\underline{\mu}}(z, \underline{u})\, \underline{y}^{\underline{\mu}}$ erhalten wir für ein beliebiges $\underline{\nu} \in M$

$$\begin{aligned}
R^*\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}, a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)\left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\nu}} &= \sum_{\underline{\mu}\in M} R^*_{\underline{\mu}}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\mu}+\underline{\nu}} \\
&= \sum_{\underline{\lambda}\in M} R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\lambda}},
\end{aligned}$$

wobei wir nach Lemma 7

$$R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}(z, \underline{u}) := \sum_{\underline{\mu}\in M} R^*_{\underline{\mu}}(z, \underline{u})\, P^{(k)}_{\lambda_1, \mu_1+\nu_1, 1}(z, \underline{u}) \cdot \ldots \cdot P^{(k)}_{\lambda_m, \mu_m+\nu_m, m}(z, \underline{u})$$

gesetzt haben. Mittels Lemma 7 und 8 ergeben sich für die Grade und die Länge von $R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}$ die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
d_z\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\right) &\leq \max_{\underline{\mu}\in M}\left\{d_z\left(R^*_{\underline{\mu}}\right) + \sum_{j=1}^m d_z\left(P^{(k)}_{\lambda_j, \mu_j+\nu_j, j}\right)\right\} \\
&\leq d\, d_z(R) + d_z\left(\underline{P}\right) d_{\underline{y}}(R) + d_z\left(\underline{P}\right) \max_{\underline{\mu}\in M}\left\{\sum_{j=1}^m \left(\mu_j + \nu_j - \lambda_j\right)_+\right\} \\
&\leq d d_z(R) + d_z\left(\underline{P}\right)\left(d_{\underline{y}}(R) + |\underline{n}| + |\underline{\nu}| - |\underline{\lambda}|\right)
\end{aligned}$$

und analog dazu ergibt sich

$$\begin{aligned} d_{\underline{u}}\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\right) &\leq d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\left(d_{\underline{y}}(R)+|\underline{n}|+|\underline{\nu}|-|\underline{\lambda}|\right), \\ L\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\right) &\leq L(R)L\left(\underline{P}\right)^{d_{\underline{y}}(R)+|\underline{n}|+|\underline{\nu}|-|\underline{\lambda}|}\, 2^{d_{\underline{y}}(R)+|\underline{\nu}|} \\ &\leq L(R)c^{d_{\underline{y}}(R)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ lediglich von $\underline{P}$ und $\underline{n}$ abhängt.

Somit hat das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\underline{\lambda}\in M}\left\{R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)-\delta_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}R^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1},a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)\right\}\ \underline{\omega}_{\underline{\lambda}}=0,$$

wobei

$$\delta_{\underline{\lambda},\underline{\nu}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \underline{\lambda}=\underline{\nu}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das verallgemeinerte Kronecker–Symbol ist, für $\underline{\omega} = \left(\underline{\omega}_{\underline{\lambda}}\right)_{\underline{\lambda}\in M}$ eine nichttriviale Lösung

$$\underline{\omega}_{\underline{\lambda}} = \left(a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{\lambda}}.$$

Die Koeffizientenmatrix ist vom Format $\beta\times\beta$ und an der Stelle $\left(z_0,\underline{u}_0,\underline{y}_0\right) := \left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1},a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)$ singulär. Entwickelt man nun dort deren Determinante nach den Potenzen von $R^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1},a(\tau_{k-1})\underline{\varphi}_k\right)$, so erhält man mit Polynomen $U_\ell \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{u}\right]$

$$0=\det\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}-\delta_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}R^*\right)=\pm\left(R^{*\,\beta}+U_1R^{*\,\beta-1}+\cdots+U_\beta\right).$$

Jedes Polynom U_ℓ besteht aus Summen von Produkten der Form

$$R_{\underline{\lambda}_1,\underline{\sigma}(\underline{\lambda}_1)}\cdot\ldots\cdot R_{\underline{\lambda}_s,\underline{\sigma}(\underline{\lambda}_s)},$$

wobei $\underline{\lambda}_1,\ldots,\underline{\lambda}_s \in M$ paarweise verschieden sind und $\underline{\sigma} := (\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ eine Permutation der Menge $M := \{0,\ldots,n_1-1\}\times\cdots\times\{0,\ldots,n_m-1\}$ ist.

Für $\ell\in\{1,\ldots,\beta\}$ erhalten wir aus den vorangegangenen Betrachtungen:

$$d_{\underline{u}}(U_\ell) \leq \max_{\underline{\sigma}}\left\{\sum_{\underline{\lambda}\in M} d_{\underline{u}}\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\sigma}(\underline{\lambda})}\right)\right\} \leq \beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\left(d_{\underline{y}}(R)+|\underline{n}|\right),$$

da

$$\sum_{\underline{\lambda}\in M}|\lambda|-|\underline{\sigma}(\underline{\lambda})|=0$$

ist. Analog ergibt sich

$$d_z(U_\ell) \le \max_{\underline{\sigma}} \left\{ \sum_{\underline{\lambda}\in M} d_z\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\sigma}(\underline{\lambda})}\right) \right\} \le \beta d\, d_z(R) + \beta d_z\left(\underline{P}\right)\Big(d_{\underline{y}}(R) + |\underline{n}|\Big).$$

Die Höhe bzw. Länge von U_ℓ kann man wie folgt abschätzen:

$$H(U_\ell) \;\le\; L(U_\ell) \le \beta!\max\left\{L\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\right) \mid \underline{\lambda},\underline{\nu}\in M\right\}^\beta.$$

Aber wegen

$$\begin{aligned} L\left(R_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}\right) &\le L(R)c^{d_{\underline{y}}(R)} \le (1+d_z(R))\Big(1+d_{\underline{y}}(R)\Big)^m H(R)c^{d_{\underline{y}}(R)} \\ &\le \exp\Big(c\Big(d_z(R)+d_{\underline{y}}(R)\Big)\Big) H(R), \end{aligned}$$

folgt schließlich die Behauptung von Lemma 9. □

4.3.5 Über gewisse Differenzenungleichungen

Im nächsten Abschnitt wollen wir nun induktiv die Existenz einer Folge von Polynomen $R_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ für $j = 0,\dots,k$ zeigen, die für $j=0$ den folgenden Startbedingungen genügt:

$$\begin{aligned} d_z(R_0) &= d_{1,0}, \qquad d_{\underline{y}}(R_0) \;=\; d_{2,0}, \\ \log H(R_0) &= H_0, \\ \exp\left(-\psi_1(0)\right) &\le \left|R_0\left(\tau_k,\underline{\varphi}_k\right)\right| \;\le\; \exp\left(-\psi_2(0)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

und für $j \ge 1$:

$$d_{\underline{y}}(R_j) = d_{2,j} \;\le\; \beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\left(d_{2,j-1} + |\underline{n}|\right), \tag{3}$$

$$d_z(R_j) = d_{1,j} \;\le\; \beta d\, d_{1,j-1} + \beta d_z\left(\underline{P}\right)\left(d_{2,j-1} + |\underline{n}|\right), \tag{4}$$

$$\log H(R_j) = H_j \;\le\; \beta H_{j-1} + c\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right), \tag{5}$$

wobei die Konstante c lediglich von $\underline{f}$ und α abhängt, und

$$\exp\left(-\psi_1(j)\right) \;\le\; \left|R_j\left(\tau_{k-j},\underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| \;\le\; \exp\left(-\psi_2(j)\right). \tag{6}$$

Dabei genügen ψ_1, ψ_2 für $j \ge 1$ unter der Bedingung, daß für eine hinreichend große Konstante $c>0$, die wiederum nur von $\underline{f}$ und α abhängt, und alle großen $k \in \mathbb{N}$

$$\psi_2(0) \ge c\,\beta^k\;\left(H_0 + d^k(d_{1,0}+d_{2,0})\right) \tag{7}$$

gilt, den folgenden Differenzengleichungen:

$$\psi_1(j) = \beta\psi_1(j-1) + \beta H_{j-1} + c\left(d_{1,j-1} + d^{k-j} d_{2,j-1}\right), \tag{8}$$

$$\psi_2(j) = \psi_2(j-1) - \beta H_{j-1} - c\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right). \tag{9}$$

Diese Aussagen werden im nächsten Abschnitt bewiesen. Wir wollen hier noch Oberschranken für $d_{1,j}$, $d_{2,j}$, H_j und $\psi_1(j)$ bzw. Unterschranken für $\psi_2(j)$ angeben.

Aus (3) folgt sofort:

$$d_{2,j} \ll \left(\beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)^j \left(d_{2,0} + |\underline{n}|\right) \ll \left(\beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)^j d_{2,0}.$$

Die Ungleichung (4) führt induktiv unter Beachtung von $d > d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)$ zu:

$$d_{1,j} \leq (\beta d)^j d_{1,0} + \beta d_z\left(\underline{P}\right) \sum_{i=0}^{j-1} (\beta d)^i \left(d_{2,j-i-1} + |\underline{n}|\right) \ll (\beta d)^j \left(d_{1,0} + d_{2,0}\right).$$

Für die Abschätzung der Höhe in (5) ergibt sich dazu analog

$$H_j \leq \beta^j H_0 + c \sum_{i=0}^{j-1} \beta^i \left(d_{1,j-i-1} + d_{2,j-i-1}\right) \leq \beta^j H_0 + c\left(d_{1,0} + d_{2,0}\right)(\beta d)^j$$

mit einer nur von $\underline{f}$ und α abhängenden Konstanten $c > 0$.

Indem man nun die oberen Abschätzungen von $H_j, d_{1,j}$ und $d_{2,j}$ benutzt, erhält man aus (8)

$$\begin{aligned} \psi_1(k) &= \beta^k \psi_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \left(\beta H_{k-i-1} + c\left(d_{1,k-i-1} + d^{k-(j-i)} d_{2,k-i-1}\right)\right) \\ &\leq \beta^k \psi_1(0) + k\beta^k H_0 + c\,(\beta d)^k \left(d_{1,0} + d_{2,0}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

In ähnlicher Weise erhält man eine untere Abschätzung für $\psi_2(k)$:

$$\begin{aligned} \psi_2(k) &= \psi_2(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \left\{\beta H_{k-i-1} + c\left(d_{1,k-i-1} + d_{2,k-i-1}\right)\right\} \\ &\geq \psi_2(0) - c\beta^k \left(H_0 + d^k \left(d_{1,0} + d_{2,0}\right)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Aufgrund der Bedingung (7) erhalten wir also $\psi_2(j) \in \mathbb{R}_+$ für alle $j \in \{0, \ldots, k\}$.

4.3.6 Über die Existenz der Polynome R_j

Die Existenz der Folge von Polynomen $R_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ für $j = 0, \ldots, k$, so daß die Bedingungen aus Abschnitt 4.3.5 erfüllt sind, wird nun per Induktion über j bewiesen.

Im Fall $j = 0$ folgt die Existenz eines Polynoms $R_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$, das den Bedingungen in (2) genügt, bereits aus Lemma 1.6 und Lemma 1.12 mit den Startwerten

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} d_{1,0} & = & d_{2,0} \leq N, \\ H_0 & \ll & N^{(m+1)L}, \\ \psi_1(0) & = & c_1 \nu d^k \qquad \text{und} \\ \psi_2(0) & = & c_2 \nu d^k, \end{array} \right.$$

vorausgesetzt, daß $d^k \gg \nu^L$ für eine genügend große Konstante gilt.

Sei die Behauptung nun bereits für $j-1$ bei $j \in \{1, \ldots, k\}$ bewiesen. Wendet man nun Lemma 8 und Lemma 9 auf R_{j-1} anstatt R an, so folgt aus Lemma 9 die Existenz von Polynomen $U_1, \ldots, U_\beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{u}\right]$ mit

$$\begin{array}{rcl} d_z\left(U_\ell\right) & \leq & \beta\, d\, d_{1,j-1} + \beta d_z\left(\underline{P}\right)\left(d_{2,j-1} + |\underline{n}|\right), \\ d_{\underline{u}}\left(U_\ell\right) & \leq & \beta\, d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\left(d_{2,j-1} + |\underline{n}|\right), \\ \log H(U_\ell) & \leq & c(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}) + \beta H_{j-1} \end{array}$$

für $\ell = 1, \ldots, \beta$, so daß

$$R_{j-1}^{*\,\beta} + U_1 R_{j-1}^{*\,\beta-1} + \ldots + U_\beta = 0$$

an der Stelle $\left(z_0, \underline{u}_0, \underline{y}_0\right) := \left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}, a(\tau_{k-j})\underline{\varphi}_{k-(j-1)}\right)$ gilt. Dabei ist $R_{j-1}^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{u}, \underline{y}\right]$ analog zu Lemma 8 definiert durch:

$$a(\tau_{k-j})^{d_{2,j-1}} R_{j-1}\left(\tau_{k-(j-1)}, \underline{\varphi}_{k-(j-1)}\right) = R_{j-1}^*\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}, a(\tau_{k-j})\underline{\varphi}_{k-(j-1)}\right).$$

Aus der Induktionsannahme und Lemma 1.11 folgt

$$\begin{array}{rcl} -\psi_1(j-1) - c d^{k-j} d_{2,j-1} & \leq & \log\left|R_{j-1}^*\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}, a(\tau_{k-j})\underline{\varphi}_{k-(j-1)}\right)\right| \\ & \leq & -\psi_2(j-1) + c d_{2,j-1}, \end{array}$$

dabei beachte man, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $-\gamma_1 d^k \leq \log\left|a\left(\tau_k\right)\right| \leq \gamma_2$.

Aus Lemma 9 erhält man für $\ell = 1, \ldots, \beta$ mittels Standardmethoden

$$\begin{array}{rcl} \left|U_\ell\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| & \leq & L(U_\ell) \max\left\{1, \left|\tau_{k-j}\right|, \left|\varphi_{1,\,k-j}\right|, \ldots, \left|\varphi_{m,\,k-j}\right|\right\}^{d_z(U_\ell) + d_{\underline{u}}(U_\ell)} \\ & \leq & \exp\left(\beta H_{j-1} + c(d_{1,j-1} + d_{2,j-1})\right), \end{array}$$

wobei die Konstante c nur von $\underline{f}$ und α abhängt.

Aus Lemma 1.7 folgt nun, daß es mindestens ein $\ell_0 \in \{1, \dots, \beta\}$ gibt, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \log\left|U_{\ell_0}\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| &\leq -\psi_2(j-1) + \beta H_{j-1} + c(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}) \\ &= -\psi_2(j), \end{aligned}$$

dabei beachte man, daß nach (7) und (12)

$$\psi_2(j-1) - (\beta H_{j-1} + c(d_{1,j-1} + d_{2,j-1})) > 0$$

ist. Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} \log\left|U_{\ell_0}\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| &\geq -\beta\psi_1(j-1) - cd^{k-j}d_{2,j-1} - \beta H_{j-1} - c(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}) \\ &\geq -\beta\psi_1(j-1) - \beta H_{j-1} - c(d_{1,j-1} + d^{k-j}d_{2,j-1}) \\ &= -\psi_1(j). \end{aligned}$$

Somit setzen wir $R_j\left(z, \underline{y}\right) := U_{\ell_0}\left(z, \underline{y}\right) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ und sehen, daß R_j die Bedingungen (3) – (6) erfüllt.

4.3.7 Beweisende

Wir haben nun die notwendigen Hilfsmittel bereit, um das Theorem 1 zu beweisen. Aus den vorangegangenen Abschnitten erhalten wir also insgesamt:

Lemma 10
Seien $k, N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß und genügen den Bedingungen

$$d^k \gg \nu^L, \tag{13}$$

$$\nu d^k \gg \beta^k\left(N^{(1+m)L} + d^k N\right), \tag{14}$$

so existiert ein Polynom $R_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ mit

$$d_z(R_k) \ll (\beta d)^k N, \tag{15}$$

$$d_{\underline{y}}(R_k) \ll \left(\beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)^k N, \tag{16}$$

$$\log H(R_k) \ll (\beta d)^k N \qquad \text{und} \tag{17}$$

$$-c_1 (\beta d)^k \nu \leq \log\left|R\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2 d^k \nu. \tag{18}$$

Dabei hängen die Konstanten lediglich von α und $\underline{f}$ ab.

Beweis
Wählt man im letzten Paragraphen $k = j$, so sind die Abschätzungen für die Grade in (15) und (16) aus den vorangegangenen Untersuchungen und der Wahl der Startwerte in (12) sofort klar. Die Abschätzungen für die Höhe von R_k in (17) und die rechte Seite von (18) folgen aus (13) $d^k \gg \nu^L \gg N^{(1+m)L}$ und den Ungleichungen (11) bzw. (7).

Mit (10) und (12) folgt aus (14) ebenso

$$\psi_1(k) \ll \beta^k d^k \nu + k\beta^k \left(N^{(1+m)L} + d^k N\right) \ll \beta^k d^k \nu + k d^k \nu.$$

Da wir aber ohne Einschränkung $\beta \geq 2$ (vgl. Seite 51) annehmen konnten, erhalten wir daraus auch die linke Seite der Abschätzung in (18). □

Wir wollen nun Lemma 1.13 auf eine geeignete Folge von Polynomen $(Q_k)_{k_0 \leq k \leq k_1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right]$ anwenden. Dazu sei nun $D \in \mathbb{N}$ ein Nenner von α, und wir setzen

$$Q_k\left(\underline{y}\right) := D^{d_z(R_k)} R_k\left(\alpha, \underline{y}\right).$$

Wegen (14) und $d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right) < d$ erhalten wir aus Lemma 10 für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
d_{\underline{y}}(Q_k) &\ll \left(\beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)^k N, \\
\log H(Q_k) &\ll (\beta d)^k N, \\
\log\left|Q_k\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| &\leq -c_1 d^k \nu + c_2 (\beta d)^k N \ll -\nu d^k, \\
\log\left|Q_k\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| &\gg -\nu (\beta d)^k.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\nu := cM^{1+m}$ mit einem $M \geq N$, so folgt aus (13) bereits $k \log d \geq \log c + L(1+m)\log M$. Damit setzen wir mit einer Konstanten $\gamma_0 > 0$, die nur von $\underline{f}$ abhängt

$$k_0 := \left[\frac{(1+m)L}{\log d} \log M + \gamma_0\right].$$

Daher definieren wir für M mit $M \geq N \in \mathbb{N}$ und $k_0 \leq k \leq k_1$ mit einer geeigneten, später noch zu definierenden Zahl k_1 mit $k_1 > k_0 \in \mathbb{N}$

$$(19) \qquad \begin{cases}
\Phi_1 := c\left(\beta d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)^{k_1} M, & \Phi_2 := c(\beta d)^{k_1} M, \\
\psi_1(k) := c_1 \nu (\beta d)^k, & \psi_2(k) := c_2 \nu d^k \\
\text{und} \quad \Lambda(k) := \dfrac{\psi_1(k+1)}{\psi_2(k)} = c_6 \beta^k. &
\end{cases}$$

Folglich sind mit (14) die Bedingungen (i) und (ii) von Lemma 1.13 für alle $k \geq k_0$ erfüllt.

Die Bedingung (iii) folgt aus (19), falls die Ungleichungen

$$\text{(20)} \qquad \left(\frac{d}{\beta^{2(m_0-1)} d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)^{m_0-1}}\right)^{k_1} \geq cM^{m_0-1}\left(d\beta\right)^{k_0}$$

$$\text{(21)} \qquad \text{und} \qquad M^{m+1-m_0} \geq c\left(\beta^{2(m_0-1)+1} d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)^{m_0-1}\right)^{k_1}$$

für eine genügend große Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$ und dem zugehörigen $M \geq N$ erfüllt sind.

Bemerkung
An dieser Stelle (Formel (20)) sieht man, daß hier im allgemeinen (d.h. im Fall $m_0 > 1$) auf die Bedingung $d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right) < d$, die bislang rein technischer Natur war, nicht verzichtet werden kann. Die Annahme $d \leq d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)$ führt in (20) sofort zu einem Widerspruch, so daß man in diesem Fall maximal die Transzendenz einer der Zahlen $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ zeigen kann. Dazu vergleiche man auch die Ausführungen in dem Abschnitt 4.4.

Doch nun weiter zum Beweis von Theorem 1. Aus der Voraussetzung an m_0 erhält man

$$m_0 < \frac{m - \sigma L(m+1)(1+\sigma)}{\sigma + 1 + (L(m+1)(1+\sigma) + m)\left(2\sigma + \log d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right) / \log d\right)} + 1,$$

wobei $\sigma := \dfrac{\log \beta}{\log d}$ gesetzt ist. Unter der zusätzlichen Annahme $m_0 \geq 1$, die keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, folgt daher

$$\begin{aligned}(m_0 - 1)\left(\log \beta + \log d + (L(m+1)(1+\sigma) + m)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)\right)& \\ < \; m \log d - \log \beta \left(L(m+1)\left(1+\sigma\right)\right)&\end{aligned}$$

beziehungsweise dazu äquivalent

$$\begin{aligned}\left((m_0-1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right) + \log \beta\right)\left((m_0-1) + L(m+1)(1+\sigma)\right)& \\ < \; (m+1-m_0)\left(\log d - (m_0-1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)\right).&\end{aligned}$$

Somit existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$, welches gleichzeitig den Ungleichungen

$$\gamma\left((m_0-1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right) + \log \beta\right) < m + 1 - m_0$$

und

$$(m_0 - 1) + L(m+1)(1+\sigma) < \gamma\left(\log d - (m_0-1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)\right)$$

genügt. Mit einem solchen γ setzen wir nun $k_1 := [\gamma \log M]$ und zeigen, daß daraus $k_0 < k_1$ folgt, sowie die beiden Bedingungen in (13) und (14) erfüllt sind.

Da wir ohne Einschränkung bereits $m_0 \geq 1$ voraussetzen konnten, folgt wegen

$$\gamma > \frac{(m_0 - 1) + L(m+1)(1+\sigma)}{\log d - (m_0 - 1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)} \geq \frac{L(m+1)}{\log d}$$

bereits $k_0 < k_1$. Durch die Wahl von k_0 ist ebenso die Bedingung (13) erfüllt.

Um einzusehen, daß die Ungleichung (14) erfüllt ist, zeigen wir, daß für alle $k_0 \leq k \leq k_1$ die beiden Ungleichungen $\nu d^k \gg \beta^k M^{L(m+1)}$ und $\nu d^k \gg \beta^k d^k M$ gelten.

Aber wegen $m_0 \geq 1$ gilt:

$$\gamma < \frac{m + 1 - m_0}{(m_0 - 1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right) + \log\beta} \leq \frac{m}{\log\beta},$$

so daß daraus schon

$$m \log M \geq k \log\beta + \gamma_0$$

für $k \leq k_1$ folgt und damit auch die Ungleichung $\nu d^k \geq c\beta^k d^k M$ für jede Konstante $c > 0$ erfüllt ist.

Analog sieht man $\nu d^k \gg \beta^k M^{L(m+1)} \geq 1$ ein. Aufgrund der Voraussetzung $d > \beta^L$ folgt für $k \geq k_0$ und alle Konstanten $\gamma_0 \in \mathbb{R}$

$$k\left(\log d - \log\beta\right) \geq \frac{(1+m)L}{\log d}\log M\left(\log d - \log\beta\right) > (L-1)(m+1)\log M + \gamma_0,$$

falls nur M hinreichend groß ist. Daher ist also

$$\left(\frac{d}{\beta}\right)^k \geq \left(\frac{d}{\beta}\right)^{k_0} \geq cM^{(L-1)(m+1)}$$

für jede vorgegebene Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ erfüllt.

Damit ist nun vollständig gezeigt, daß mit diesen Wahlen von k_0, k_1 und N bzw. M die Bedingungen von Lemma 10 erfüllt sind. Somit gelten die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} & k_1\left(\log d - (m_0 - 1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right)\right) \\ & \qquad \geq \quad \left((m_0 - 1) + L(m+1)(1+\sigma)\right)\log M + c \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (m + 1 - m_0)\log M \\ & \qquad \geq \quad k_1\left((m_0 - 1)\log\left(\beta^2 d_{\underline{y}}\left(\underline{P}\right)\right) + \log\beta\right) + c \end{aligned}$$

für eine genügend große Konstante $c > 0$. Daraus folgt aber direkt die Gültigkeit der Ungleichungen (20) und (21), falls nur $M \geq N$ hinreichend groß ist. $\square$

4.4 Untersuchungen des Falls $m = 1$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß wir mit der in dem vorangegangenen Abschnitt dargestellten Methode fast das Ergebnis von NISHIOKA [47] erhalten. Allerdings ist der Beweis nicht sonderlich elegant, da wir die Fälle $d = d_y(P)$ und $d \neq d_y(P)$ und dabei zusätzlich noch $n = 1$ bzw. $n \geq 2$ einzeln betrachten müssen. Der Grund dafür ist, daß wir bei gewissen Abschätzungen, geometrische Summen der Form $\sum_{i=0}^{j} (n d_y(P)/d)^i$ zu betrachten haben.

Aus Lemma 1.2 erhalten wir, daß die Koeffizienten der Funktion f unter den obigen Voraussetzungen bereits in einem festen algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen, und es gibt ein $D \in \mathbb{N}$, und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $c > 0$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\overline{|f_j|} \leq \exp\left(c\left(1 + j^{1+\varepsilon}\right)\right) \qquad \text{und} \qquad D^{1+j} f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

Im folgenden werden wir dieses ε gegebenenfalls leicht modifizieren, ohne dann darauf gesondert einzugehen.

Die Bedingung $d > d_y(P)$ wurde erstmals in der Abschätzung von $d_{1,j}$ in Paragraph 4.3.5 benutzt. Um also die entsprechenden Resultate auch in den anderen Fällen zu erhalten, müssen wir lediglich die Abschätzungen für $d_{1,j}, \ldots, \psi_2(j)$ dahingehend modifizieren. Unter den etwas allgemeineren Voraussetzungen müssen wir den Beweis aus den vorherigen Abschnitten leicht modifizieren, insbesondere ersetzen wir die Höhe durch die Länge geeigneter Polynome. Da dabei jedoch keine Schwierigkeiten auftauchen, zitieren wir hier nur das Ergebnis (vgl. TÖPFER [74]).

Unter der Bedingung $d^k \gg \nu^{1+\varepsilon}$ erhalten wir für $j = 0, \ldots, k$ die Existenz von Polynomen $R_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z, y]$, so daß für $j = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} d_z(R_0) &= d_{1,0} \leq N, \quad d_y(R_0) = d_{2,0} \leq N, \\ \log L(R_0) &= L_0 \ll N^{2+\varepsilon}, \\ 0 &< \left|R_0\left(T^k\alpha, f\left(T^k\alpha\right)\right)\right| \leq \exp(-c\nu d^k), \end{aligned}$$

wobei $\nu = \mathrm{ord}_0 R_0(z, f(z)) \gg N^2$ gilt. Setzen wir nun noch $\psi(0) = c\nu d^k$ und $n := \deg_u P$, so erfüllen die Polynome R_j für $j \geq 1$:

$$d_z(R_j) = d_{1,j} \ll n\left(d_z(P)\, d_{1,j-1} + d\, d_{2,j-1}\right),$$

$$\begin{aligned} d_y(R_j) &= d_{2,j} \ll n\, d_y(P)\, d_{2,j-1}, \\ \log L(R_j) &= L_j \ll n\, L_{j-1} + cn\,(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}) \\ \text{und} \quad 0 &< \left|R_j\left(T^{k-j}\alpha, f\left(T^{k-j}\alpha\right)\right)\right| \le \exp(-\psi(j)), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi(j) = \begin{cases} \psi(j-1) - c\left(d_{1,j-1} + d^{k-j} d_{2,j-1} + L_{j-1}\right), & \text{im Fall } n = 1, \\ \psi(j-1) - c\left(d^{k-j}\,(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}) + L_{j-1}\right), & \text{für } n \ge 2 \end{cases}$$

definiert ist, vorausgesetzt, daß für $\delta := \max\{d, d_y(P)\}$

$$\nu d^k \gg \begin{cases} k\delta^k N + kN^{2+\varepsilon}, & \text{falls } n = 1 \text{ und } d = d_y(P) \text{ gilt}, \\ \delta^k N + kN^{2+\varepsilon}, & \text{falls } n = 1 \text{ und } d \ne d_y(P) \text{ gilt}, \\ k(n\delta)^k N + n^k N^{2+\varepsilon}, & \text{falls } n \ge 2 \text{ und } d = d_y(P), \\ (n\delta)^k N + n^k N^{2+\varepsilon}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{22}$$

in den jeweiligen Fällen für eine genügend große Konstante erfüllt ist.

Induktiv erhalten wir sofort für $j = 0, \ldots, k$:

$$d_{2,j} \ll (nd_y(P))^j\, N.$$

Aus der Annahme, daß $f(\alpha)$ algebraisch ist, erhalten wir so eine analytische Oberschranke für eine nichtverschwindende, algebraische Zahl. Lemma 1.9 liefert dann eine arithmetische Unterschranke, von der wir zeigen werden, daß diese nicht mit der hier erhaltenen Oberschranke verträglich ist. Was Korollar 3 schließlich beweist.

4.4.1 $d = d_y(P)$

Wie üblich erhalten wir induktiv

$$d_{1,j} \ll (nd)^j N + c\sum_{i=0}^{j-1} (nd)^i\,(nd)^{j-i-1}\, N \ll j(nd)^j N.$$

Die Länge kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$L_j \ll n^j N^{2+\varepsilon} + n^j N \sum_{i=0}^{j-1} (j-i-1) d^{j-i-1} \ll n^j N^{2+\varepsilon} + j(nd)^j N.$$

Als Unterschranke für $\psi(j)$ ergibt sich im Fall $n = 1$

$$\begin{aligned}\psi(j) &= \psi(0) - c\sum_{i=0}^{j-1}\left(d^{k-j+i}d_{2,j-i-1} + d_{1,j-i-1} + L_{j-i-1}\right)\\ &\gg \nu d^k - c\left(k\,d^k N + kN^{2+\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

dabei ist diese Unterschranke wegen (22) positiv. Ist nun $n \geq 2$, so erhalten wir analog dazu

$$\begin{aligned}\psi(j) &= \psi(0) - c\sum_{i=0}^{j-1}\left(d^{k-j+i}\left(d_{1,j-i-1} + d_{2,j-i-1}\right) + L_{j-i-1}\right)\\ &\gg \nu d^k - c\left(k(n\,d)^k N + n^k N^{2+\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

was wiederum nach (22) positiv ist.

Ist jetzt $D \in \mathbb{N}$ ein Nenner für α, so definieren wir

$$Q_k(y) := D^{\deg_z R_k} R_k(\alpha, y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y].$$

Für dieses Polynom gilt:

$$\begin{aligned}\deg Q_k &\ll (nd)^k N,\\ \log L(Q_k) &\ll n^k N^{2+\varepsilon} + k(nd)^k N\\ \text{und}\quad 0 &< |Q_k(f(\alpha))| \leq \exp(-cd^k\nu).\end{aligned}$$

Mithin ergibt sich aus Lemma 1.9 und (22) die Ungleichung

$$\nu d^k \leq c\left(n^k N^{2+\varepsilon} + k(n\,d)^k N\right),$$

dabei hängt die (feste) Konstante $c > 0$ lediglich von α und $f(\alpha)$ ab. Aus (22) erhalten wir weiterhin

$$\nu d^k \geq c\max\left\{kN^{2+\varepsilon} + k\,d^k N, n^k N^{2+\varepsilon} + k(n\,d)^k N\right\}$$

für jede Konstante $c > 0$. Dies liefert bei $n = 1$ direkt einen Widerspruch, falls nur k so groß ist, daß $d^k \gg \nu^{1+\varepsilon}$ erfüllt ist. Bei $n \neq 1$ definieren wir nun M implizit durch $\nu = cM^2$ und setzen damit

$$k := [\gamma \log M + c],$$

wobei $\gamma > 0$ noch geeignet zu bestimmen ist. Wegen $d^k \gg \nu^{1+\varepsilon}$ ist es hinreichend $\gamma > 2/\log d$ zu verlangen.

Damit die Bedingung $\nu d^k \gg n^k \left(N^{2+\varepsilon} + k\, d^k N\right)$ erfüllt ist, reicht es,

$$\nu d^k \geq c n^k M^{2+\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \nu d^k \geq ck(nd)^k M$$

zu zeigen. Während die erste Ungleichung bereits dann für große $M \geq N$ erfüllt ist, wenn nur $d > n$ ist, ist im zweiten Fall $\gamma \log n < 1$ hinreichend. Damit erhalten wir für γ folgende Schranken

$$\frac{2}{\log d} < \gamma < \frac{1}{\log n}.$$

Dabei ist dieses Intervall aber aufgrund der Bedingung $d > n^2$ nichtleer. Diese Wahl von γ zeigt, daß sich die obigen Ungleichungen für νd^k widersprechen, falls N und damit M hinreichend groß gewählt ist. Damit ist das Korollar 3 in diesem Fall gezeigt.

4.4.2 $d \neq d_y(P)$

Dieser Fall ist einfacher, da die Abschätzungen der Summen einfacher sind. Wir erhalten sofort:

$$\begin{aligned} d_{1,j} &\ll (nd)^j N + c \sum_{i=0}^{j-1} (nd)^i \left(n d_y(P)\right)^{j-i-1} N \ll (n\delta)^j N, \\ L_j &\ll n^j N^{2+\varepsilon} + (n\delta)^j N. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als obere Abschätzung für $\log |R_k(\alpha, f(\alpha))|$:

$$\log |R_k(\alpha, f(\alpha))| \leq -\psi(k) \ll -\nu d^k + c \begin{cases} \left(\delta^k N + k N^{2+\varepsilon}\right), & \text{falls } n = 1 \text{ gilt,} \\ \left((n\delta)^k N + n^k N^{2+\varepsilon}\right), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun verfahren wir analog zu Fall 1 und erhalten hier aus der Annahme $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ erneut einen Widerspruch.

Während dies bei $n = 1$ wiederum direkt klar ist, erhalten wir im Fall $n \geq 2$

$$\frac{2}{\log d} < \gamma < \frac{1}{\log(n\delta) - \log d}$$

als Schranken für γ. Wegen $d^3 > n^2\delta^2$ ist dieses Intervall nichtleer. Somit ist Korollar 3 nun vollständig bewiesen. $\square$

Kapitel 5

Über lineare Funktionalgleichungen mit algebraischen Transformationen

5.1 Einleitung und Ergebnisse

Wie schon in der Einleitung von Kapitel 4 angedeutet wurde, hat BECKER in [8] das Resultat von NISHIOKA [47, 48] auf algebraische Transformationen T verallgemeinert. Wir folgen hier nun wiederum dem Vorgehen von TÖPFER in [74] (vgl. auch den Beweis in Kapitel 4), um Unterschranken für den Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\,(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))$ zu erhalten, wobei α algebraisch ist und die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ linearen Funktionalgleichungen mit einer algebraischen Transformation T genügen. Das nun folgende Theorem 1 verallgemeinert die früheren Resultate von BECKER [7] und TÖPFER [72] für rationale Transformationen.

Doch nun zu dem angekündigten Ergebnis:

Theorem 1
Seien $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{C}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(z)$, holomorph in einer Umgebung U um $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$. Die Koeffizienten der Potenzreihen von $f_1, \ldots, f_m$ um ω seien algebraisch.

Sei T algebraisch vom Grad n über $\mathbb{Q}(z)$, meromorph in U und gelte $T(U) \subset U$. ω sei ein Fixpunkt von T mit $\mathrm{ord}_\omega T := \delta > n$. Mit $Q(z, y) \in \mathbb{Q}\,[z, y]$ bezeichnen wir das Minimalpolynom von T über $\mathbb{Q}(z)$ und mit $d := \deg_z Q$ den Grad von Q

bezüglich z.

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ mögen einer Funktionalgleichung des Typs

$$a(z)\underline{f}\,(T(z)) = A(z)\underline{f}(z) + \underline{B}(z)$$

genügen. Dabei sei $a(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, die $m \times m$ Matrix $A(z)$ sei in U regulär mit Einträgen in $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ und $\underline{B}(z) \in \left(\overline{\mathbb{Q}}[z]\right)^m$.

Sei $\alpha \in U$ algebraisch mit $\lim\limits_{k\to\infty} T^k(\alpha) = \omega$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gelte ferner $T^k(\alpha) \in U \backslash \{\omega, \infty\}$, und $T^k(\alpha)$ sei keine Nullstelle von $a(z)$.

Ist dann m_0 die kleinste ganze Zahl mit

$$m_0 \geq \frac{(2m+1)\log\delta - (m+1)\log d\left(1 + \frac{\log n}{\log\delta}\right) - (m+1)\frac{\log^2 n}{\log\delta}}{(4m+3)\log n + 2(m+1)\frac{\log^2 n}{\log\delta} + \log d},$$

so gilt

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \geq m_0.$$

Bemerkungen

(i) Im Fall, daß T eine rationale Funktion ist, entspricht das Ergebnis von Theorem 1 dem Resultat von Töpfer [72, Theorem 2] (vgl. auch Becker [7]).

(ii) Es ist klar, daß $\delta = \operatorname{ord}_\omega T \leq \deg_z Q = d$ gilt, denn aus $Q(z, T(z)) = 0$ folgt

$$Q_n(z)T(z)^n = -\sum_{i=0}^{n-1} Q_i(z)T(z)^i.$$

Betrachtet man nun die Ordnung der linken bzw. rechten Seite dieser Gleichung im Punkt ω, so ergibt sich $n\delta \leq (n-1)\delta + d$, mithin also $\delta \leq d$.

(iii) Man beachte, daß wir hier, im Gegensatz zu den Theoremen in Kapitel 3 bzw. Theorem 4.1, lediglich verlangen, daß die Koeffizienten der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch sind. Aus Lemma 1.4 folgt dann bereits, daß die Koeffizienten in einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}$ liegen und die Häuser bzw. Nenner der Koeffizienten einer entsprechenden Wachstumsbedingung genügen.

(iv) Natürlich stellt sich auch hier die Frage nach Anwendungen. Wie bereits oben erwähnt, kann man aus Theorem 1 die Korollare 3 und 6 in Töpfer

[72] folgern. Die dort definierten Funktionen χ_i (vgl. auch Seite 32) und θ_i sind sicherlich Kandidaten, wenn man dort nicht nur rationale sondern auch algebraische Transformationen T zuläßt. Allerdings ist es nicht gelungen, die algebraische Unabhängigkeit dieser Funktionen (unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen) zu zeigen.

Als einfache Konsequenz von Theorem 1 erhalten wir das folgende

Korollar 2
Ist unter den Voraussetzungen von Theorem 1 die Ungleichung

$$\frac{\log d}{\log \delta} < \frac{2m+1 - \sigma\left((2m-1)(m+1)\sigma + (m-1)(4m+3)\right)}{2m + \sigma(m+1)}$$

mit $\sigma := \log n / \log \delta$ *erfüllt, so sind die Funktionswerte* $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ *algebraisch unabhängig über* $\mathbb{Q}$.

Bemerkung
Aus Theorem 1 bzw. Korollar 2 folgt dann unter den entsprechenden Voraussetzungen des Theorems die Transzendenz eines Wertes $f(\alpha)$ aus der Gültigkeit der folgenden Ungleichung:

$$3 \log \delta > 2 \log d(1+\sigma) + 2\sigma \log n.$$

Dieses Ergebnis ist allerdings deutlich schwächer als das Resultat von Becker [8], der die Transzendenz eines dieser Werte unter den Voraussetzungen von Theorem 1 unter der Bedingung $\delta^3 > n^2 d^2$ zeigte. Im folgenden Korollar 3 behaupten wir, daß wir dieses Ergebnis durch eine Verschärfung des Beweises von Theorem 1 im Fall $m = 1$ ebenso erhalten können. Der Beweis des Korollars erfolgt zum Abschluß (Abschnitt 5.3) dieses Kapitels.

Korollar 3
Die Voraussetzungen von Theorem 1 seien mit $m = 1$ *erfüllt. Ist dann* $\delta^3 > n^2 d^2$, *so gilt* $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Bemerkung
Aus der Ungleichung $\delta^3 > n^2 d^2$ folgt insbesondere $n < \delta$. Diese in Theorem 1 geforderte Bedingung bedeutet damit also keine weitere Einschränkung.

5.2 Beweis von Theorem 1

Der Beweis von Theorem 1 verläuft in den wesentlichen Schritten vollkommen analog zu dem Beweis von Theorem 1 in Kapitel 4. Ergänzend zu dem dortigen

Vorgehen müssen wir hier noch zeigen, daß es ausreicht, die Behauptung lediglich für den Fall $\omega = 0$ zu zeigen.

5.2.1 Reduktion auf den Fall $\omega = 0$

Wir betrachten wieder (vgl. Becker [8] bzw. Kapitel 3, Seite 35) die folgende Möbius–Transformation

$$\Phi(z) := \begin{cases} z - \omega & \text{für } \omega \in \mathbb{C}, \\ 1/(z-\beta) & \text{für } \omega = \infty \end{cases}$$

mit einer algebraischen Zahl β und $T^k(\alpha) \neq \beta$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Nun kann man wiederum zeigen, daß dann die Funktionen $f_i^*(z) := f_i\left(\Phi^{-1}(z)\right)$, $a^*(z) := d(z)a\left(\Phi^{-1}(z)\right)$, $A^*(z) := d(z)A\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ und $\underline{B}^*(z) := d(z)\underline{B}\left(\Phi^{-1}(z)\right)$, wobei $d \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ ein gemeinsamer Nenner für die rationalen Funktionen $a \circ \Phi^{-1}$, $A \circ \Phi^{-1}$ und $\underline{B} \circ \Phi^{-1}$ ist, den Voraussetzungen von Theorem 1 für $\omega = 0$ mit der Transformation $T^*(z) := \Phi\left(T\left(\Phi^{-1}(z)\right)\right)$ genügen. Die restlichen Aussagen übertragen sich entsprechend. Für Einzelheiten dazu vergleiche man Becker [7].

5.2.2 Iteration der Funktionalgleichung

Im weiteren Verlauf sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt; die in den Beweisen vorkommenden Konstanten hängen nicht von k ab. Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 an $\alpha, T, \underline{f}$ schreiben wir wiederum abkürzend:

$$\tau_\kappa := T^\kappa(\alpha),\ \varphi_{i,\kappa} := f_i\left(T^\kappa(\alpha)\right) \quad \text{und} \quad \underline{\varphi}_\kappa := \left(f_1\left(T^\kappa(\alpha)\right), \dots, f_n\left(T^\kappa(\alpha)\right)\right).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß die Koeffizienten des Minimalpolynoms $Q(z,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(z)y^i$ teilerfremd sind und können daher

$$n_k := \max\left\{i \in \{0,\dots,n\} \mid Q_i\left(T^{k-1}(\alpha)\right) \neq 0\right\}$$

setzen. Aufgrund der Teilerfremdheit der Koeffizienten folgt, daß die Menge $\left\{i \in \{0,\dots,n\} \mid Q_i\left(T^{k-1}(\alpha)\right) \neq 0\right\}$ nichtleer ist, und ebenso ist $n_k \geq 1$ klar. Denn aus $n_k = 0$ würde folgen:

$$0 = Q\left(\tau_{k-1}, \tau_k\right) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(\tau_{k-1})\tau_k^{\,i} = Q_0(\tau_{k-1}) \neq 0.$$

Wir kommen nun zu einem Lemma, welches hier die Rolle von Lemma 4.7 übernimmt, um die Ordnungen von T, die bei der Iteration der Funktionalgleichung auftauchen, induktiv zu reduzieren.

Lemma 4
Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\,\tau_k)^{n_k+\ell} = \sum_{i=0}^{n_k-1} Q_{\ell,i}^{(k)}(\tau_{k-1})\,(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k)^i$$

mit $Q_{\ell,i}^{(k)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ und

$$\begin{aligned} d_z\left(Q_{\ell,i}^{(k)}\right) &\leq (n_k + \ell - i)\, d, \\ L\left(Q_{\ell,i}^{(k)}\right) &\leq 2^\ell\, L(Q)^{n_k+\ell-i}. \end{aligned}$$

Beweis
Dies ist Lemma 4 in Töpfer [74]. Der Beweis verläuft vollkommen analog zu dem Beweis von Lemma 4.7. □

Im folgenden sei M eine Oberschranke für den Grad von a bzw. die Grade der Einträge in A und $\underline{B}$.

Lemma 5
Sei $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ mit $d_z(R) \geq n$, dann existiert ein Polynom $R^*\left(z, u, \underline{y}\right) = \sum_{i=0}^{n_k-1} R_i^*\left(z, \underline{y}\right) u^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, u, \underline{y}\right]$ mit

$$Q_{n_k}(\tau_{k-1})^{d_z(R)} a\,(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)}\, R\left(\tau_k, \underline{\varphi}_k\right) \;=\; R^*\left(\tau_{k-1}, Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k, \underline{\varphi}_{k-1}\right),$$

und für $i = 0, \ldots, n_k - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} d_z\left(R_i^*\right) &\leq M d_{\underline{y}}(R) + (d_z(R) - i)\, d, \\ d_{\underline{y}}\left(R_i^*\right) &\leq d_{\underline{y}}(R) \qquad\qquad \text{bzw.} \\ L\left(R_i^*\right) &\leq c^{d_z(R)+d_{\underline{y}}(R)}\, L(R)\, L(Q)^{d_z(R)-i} \end{aligned}$$

mit einer explizit angebbaren Konstanten $c > 0$, die lediglich von den Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ abhängt.

Beweis
Aus der Darstellung

$$R\left(z, \underline{y}\right) = \sum_{i=0}^{d_z(R)} \sum_{\left|\underline{j}\right| \leq d_{\underline{y}}(R)} R_{i,\underline{j}}\, z^i\, \underline{y}^{\underline{j}}$$

erhalten wir mittels Lemma 4

$$
\begin{aligned}
& Q_{n_k}(\tau_{k-1})^{d_z(R)} a\,(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)}\, R\left(\tau_k, \underline{\varphi}_k\right) \\
= & \sum_{\substack{0\le i\le d_z(R)\\ |\underline{j}|\le d_{\underline{y}}(R)}} R_{i,\underline{j}}\, Q_{n_k}(\tau_{k-1})^{d_z(R)-i}\, a\,(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)-|\underline{j}|}\, (Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k)^i \left(a\,(\tau_{k-1})\,\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{j}} \\
= & \sum_{\substack{0\le i\le n_k-1\\ |\underline{j}|\le d_{\underline{y}}(R)}} R_{i,\underline{j}}\, Q_{n_k}(\tau_{k-1})^{d_z(R)-i}\, a\,(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)-|\underline{j}|} \left(a\,(\tau_{k-1})\,\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{j}} (Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k)^i \\
+ & \sum_{i=0}^{n_k-1} (Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k)^i \times \sum_{n_k\le \ell\le d_z(R)} Q_{n_k}(\tau_{k-1})^{d_z(R)-\ell} \times \\
\times & \sum_{|\underline{j}|\le d_{\underline{y}}(R)} R_{\ell,\underline{j}}\, Q^{(k)}_{\ell-n_k,i}(\tau_{k-1}) a\,(\tau_{k-1})^{d_{\underline{y}}(R)-|\underline{j}|} \left(a\,(\tau_{k-1})\,\underline{\varphi}_k\right)^{\underline{j}}.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir für R_i^* und damit für R^* die folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
R_i^*\left(z, \underline{y}\right) = & \sum_{|\underline{j}|\le d_{\underline{y}}(R)} a(z)^{d_{\underline{y}}(R)-|\underline{j}|} \left(A(z)\underline{y} + \underline{B}(z)\right)^{\underline{j}} \times \\
& \left(R_{i,\underline{j}} Q_{n_k}(z)^{d_z(R)-i} + \sum_{n_k\le\ell\le d_z(R)} R_{\ell,\underline{j}}\, Q_{n_k}(z)^{d_z(R)-\ell}\, Q^{(k)}_{\ell-n_k,i}(z) \right),
\end{aligned}
$$

woraus sich $R_i^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ und $d_{\underline{y}}\left(R_i^*\right) \le d_{\underline{y}}(R)$ sofort ergibt. Die Aussage über $d_z\left(R_i^*\right)$ folgt aus Lemma 4 und der Ungleichung

$$
d_z\left(R_i^*\right) \le d_{\underline{y}}(R) M + \max_{n_k\le\ell\le d_z(R)} \left\{ \left(d_z(R) - i\right) d, \left(d_z(R) - \ell\right) d + d(\ell - i) \right\}.
$$

Damit bleibt lediglich noch die Abschätzung der Länge zu zeigen, was aber wiederum trivial aus Lemma 4 folgt:

$$
L\left(R_i^*\right) \le L(R) L(Q)^{d_z(R)-i} L^{d_{\underline{y}}(R)} \left(1 + 2^{d_z(R)-n_k+1}\right) \left(\sum_{|\underline{j}|\le d_{\underline{y}}(R)} 1 \right),
$$

wobei L eine Oberschranke für die Länge von a bzw. für die Längen der Einträge in A bzw. $\underline{B}$ ist. □

Das Ergebnis von Lemma 5 wird nun im folgenden benutzt, um die Ordnung k von τ_k zu reduzieren.

Lemma 6
Sei $R^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,u,\underline{y}\right]$ *wie im Lemma 5, dann existieren Polynome* $U_1,\ldots,U_{n_k}$*, so daß an der Stelle* $\left(z_0,u_0,\underline{y}_0\right)=\left(\tau_{k-1},\, Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k,\, \underline{\varphi}_{k-1}\right)$

$$R^{*\,n_k}+R^{*\,n_k-1}U_1+\cdots+U_{n_k}=0$$

gilt. Dabei gilt für die Polynome $U_1,\ldots,U_{n_k}\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ *und:*

$$\begin{aligned} d_z\left(U_j\right) &\le n\,M\,d_{\underline{y}}(R)+n\,d\,d_z(R),\\ d_{\underline{y}}\left(U_j\right) &\le n\,d_{\underline{y}}(R) \qquad\qquad \text{und}\\ L\left(U_j\right) &\le \exp\left(cn\left(d_z(R)+d_{\underline{y}}(R)\right)\right)H(R)^n \end{aligned}$$

für $j=1,\ldots,n_k$*, wobei die Konstante* $c>0$ *explizit ist und lediglich von den Vorgaben abhängt.*

Beweis
Sei $\lambda\in\{0,\ldots,n_k-1\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{\lambda} R^*\left(\tau_{k-1},Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k,\underline{\varphi}_{k-1}\right)\\ &\quad= \sum_{i=0}^{n_k-1} R_i^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{i+\lambda}\\ &\quad= \sum_{i=0}^{n_k-1-\lambda} R_i^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{i+\lambda}\\ &\quad+ \sum_{j=0}^{\lambda-1} R_{j+n_k-\lambda}^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{j+n_k}\\ &\quad= \sum_{i=0}^{n_k-1-\lambda}\left(R_i^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)+\sum_{j=0}^{\lambda-1}R_{j+n_k-\lambda}^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)Q_{j,i}^{(k)}(\tau_{k-1})\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{i}\\ &\quad+ \sum_{i=n_k-\lambda}^{n_k-1}\left(\sum_{j=0}^{\lambda-1}R_{j+n_k-\lambda}^*\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)Q_{j,i}^{(k)}(\tau_{k-1})\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{i}\\ &\quad= \sum_{i=0}^{n_k-1} R_{i,\lambda}\left(\tau_{k-1},\underline{\varphi}_{k-1}\right)\left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^{i}. \end{aligned}$$

Damit ist $R_{i,\lambda}\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z,\underline{y}\right]$ klar. Für die Grade und die Längen ergeben sich aus Lemma 5 die folgenden Oberschranken:

$$d_{\underline{y}}\left(R_{i,\lambda}\right) \;\le\; d_{\underline{y}}\left(R^*\right) \le d_{\underline{y}}\left(R\right),$$

$$\begin{aligned}
d_z\left(R_{i,\lambda}\right) &\leq Md_{\underline{y}}(R) + d\left(d_z(R) - (i-\lambda)\right), \\
L\left(R_{i,\lambda}\right) &\leq \gamma_1^{d_z(R)+d_{\underline{y}}(R)} L(R)\left(L(Q)^{d_z(R)-i} + L(Q)^{d_z(R)-(i-\lambda)}\sum_{j=0}^{\lambda-1} 2^{j+1}\right) \\
&\leq \gamma_2^{d_z(R)+d_{\underline{y}}(R)} L(R)L(Q)^{d_z(R)-(i-\lambda)}
\end{aligned}$$

mit expliziten Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Daher hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{n_k-1}\left(R_{i,\lambda}\left(\tau_{k-1}, \underline{\varphi}_{k-1}\right) - \delta_{i,\lambda}\, R^*\left(\tau_{k-1}, Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k, \underline{\varphi}_{k-1}\right)\right)\omega_i = 0$$

für jedes $\lambda \in \{0, \ldots, n_k - 1\}$ eine nichttriviale Lösung $\omega_i = \left(Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k\right)^i$. Folglich gilt an der Stelle $(z_0, u_0, \underline{y}_0) = \left(\tau_{k-1}, Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k, \underline{\varphi}_{k-1}\right)$:

$$0 = \det\left(R_{i,\lambda} - \delta_{i,\lambda}R^*\right)_{0\leq i,\lambda\leq n_k-1} = \pm\left(R^{*\,n_k} + R^{*\,n_k-1}U_1 + \cdots + U_{n_k}\right),$$

wenn man die Determinante nach den Potenzen von $R^*\left(\tau_{k-1}, Q_{n_k}(\tau_{k-1})\tau_k, \underline{\varphi}_{k-1}\right)$ entwickelt. Für die dabei auftretenden Polynome U_j gilt $U_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$, und jedes dieser Polynome besteht aus Summen von Produkten der Form

$$R_{\,i_1,\sigma(i_1)} \cdots R_{\,i_s,\sigma(i_s)},$$

wobei $i_1, \ldots, i_s \in \{0, \ldots, n_k - 1\}$ $(s \leq n_k)$ paarweise verschieden sind und $\sigma \in S_{n_k}$ eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, n_k - 1\}$ ist. Die Grade der Polynome U_j sind aufgrund der vorangegangenen Betrachtungen beschränkt durch

$$\begin{aligned}
d_{\underline{y}}\left(U_j\right) &\leq nd_{\underline{y}}(R), \\
d_z\left(U_j\right) &\leq \sum_{i=0}^{n_k-1} Md_{\underline{y}}(R) + \left(d_z(R) - (i-\sigma(i))\right)d \\
&\leq nMd_{\underline{y}}(R) + nd_z(R)d.
\end{aligned}$$

Die Länge läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
L\left(U_j\right) &\leq n!\max\left\{L\left(R_{i,j}\right) \mid i,j \in \{0, \ldots, n_k-1\}\right\}^n \\
&\leq \exp\left(c\left(d_z(R) + d_{\underline{y}}(R)\right)\right) L(R)^n \\
&\leq \exp\left(c\left(d_z(R) + d_{\underline{y}}(R)\right)\right) H(R)^n,
\end{aligned}$$

womit Lemma 6 nun vollständig bewiesen ist. □

5.2.3 Konstruktion geeigneter Hilfsfunktionen

Da der Fall rationaler Transformationen T, d.h. $n = 1$, bereits in TÖPFER [72] vollständig behandelt wurde, beschränken wir uns im Beweis von Theorem 1 auf den Fall $n \geq 2$, weshalb wir im folgenden zumindest auf einige Fallunterscheidungen verzichten können.

Wir haben nun die Techniken dafür bereitgestellt, wie man ausgehend von einem geeigneten Startpolynom R durch Iteration der Funktionalgleichung zu einem Polynom R_k mit guten Schranken für Grade, Höhen etc. gelangt.

Wir können nun wiederum zeigen, daß für $j \in \{0, \ldots, k\}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\delta^k \gg \nu$ Polynome $R_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ existieren, die für $j = 0$ den Bedingungen

$$\begin{aligned}
d_{1,0} &= d_{\underline{y}}\left(R_0\right) \leq N, \\
d_{2,0} &= d_z\left(R_0\right) \leq N, \\
H_0 &= \log H\left(R_0\right) \ll N^{1+m}, \\
-\psi_1(0) &:= -c_1 \nu \delta^k \leq \log\left|R_0\left(\tau_k, \underline{\varphi}_k\right)\right| \leq -c_2 \nu \delta^k =: -\psi_2(0)
\end{aligned}$$

genügen.

Dies folgt aus den Lemmata 1.4, 1.6 und 1.12. Da die Matrix A in einer Umgebung U des Ursprungs regulär ist und die Einträge von $(\det A(z)) A^{-1}(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ sind, folgt daraus, daß die Voraussetzungen des Lemmas 1.4 erfüllt sind.

Für $j \geq 1$ erfüllen die Polynome R_j:

$$\begin{aligned}
d_{1,j} &= d_{\underline{y}}\left(R_j\right) \leq n^j \, d_{1,j-1}, \\
d_{2,j} &= d_z\left(R_j\right) \leq n\left(M \, d_{1,j-1} + d \, d_{2,j-1}\right), \\
H_j &= \log H\left(R_j\right) \leq n H_{j-1} + c\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right), \\
-\psi_1(j) &\leq \log\left|R_0\left(\tau_k, \underline{\varphi}_k\right)\right| \leq -\psi_2(j)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\psi_1(j) &:= n \, \psi_1(j-1) + c_1\left(\delta^{k-j}\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right) + H_{j-1}\right), \\
\psi_2(j) &:= \psi_2(j-1) - c_2\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1} + H_{j-1}\right),
\end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß

$$\nu \, \delta^k \geq c\left((n \, d)^k \, N + n^k \, N^{1+m}\right)$$

für eine geeignete Konstante $c > 0$ erfüllt ist.

Wie in Kapitel 4 können wir daraus im folgenden obere Abschätzungen für die Grade und Länge von R_j bzw. $\psi_1(j)$ und eine untere Abschätzung für $\psi_2(j)$ bekommen. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_{1,j} &\leq n^j\, N, \\ d_{2,j} &\ll (n\,d)^j N, \\ H_j &\ll n^j\, N^{m+1} \,+\, (n\,d)^j\, N. \end{aligned}$$

Ist $\delta = d$, so erhalten wir

$$\psi_1(j) \ll (n\delta)^k \nu + kn^k \left(\delta^k\, N + N^{m+1}\right).$$

Im anderen Fall ($\delta < d$) ergibt sich:

$$\psi_1(j) \ll (n\delta)^k \nu + n^k \left(d^k\, N + N^{m+1}\right).$$

Bei der unteren Abschätzung für ψ_2 erübrigt sich diese Fallunterscheidung. Wir erhalten

$$\psi_2(j) \gg \nu\delta^k - \left(n^k\, N^{1+m} \,+\, (n\,d)^k\, N\right).$$

Da wir

$$\nu\,\delta^k \gg (n\,d)^k\, N + n^k\, N^{1+m}$$

vorausgesetzt haben, folgt für $j = 0, \ldots, k$ einerseits $\psi_2(j) > 0$ bzw. genauer $\psi_2(k) \gg \nu\,\delta^k$, andererseits ergibt sich wegen $n \geq 2$ auch im Fall $\delta = d$ die folgende obere Abschätzung für $\psi_1(j)$:

$$\psi_1(j) \ll (n\delta)^k \nu + kn^k \left(\delta^k\, N + N^{m+1}\right) \ll (n\delta)^k \nu + k\delta^k \nu \ll (n\,\delta)^k.$$

Die Existenz der Polynome $R_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ mit den geforderten Eigenschaften ist für $j = 0$ bereits klar. Sei die Existenz nun bereits für $j-1$ mit $j \in \{1, \ldots, k\}$ gezeigt. Nach Lemma 6 existieren dann Polynome $U_1, \ldots, U_{n_{k-(j-1)}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ mit

$$\begin{aligned} \deg_{\underline{y}}(U_\ell) &\leq n\, d_{1,j-1}, \\ \deg_z(U_\ell) &\leq n\, M\, d_{1,j-1} \,+\, n\, d\, d_{2,j-1}, \\ \log H(U_\ell) &\leq n\, H_{j-1} \,+\, c\,(d_{1,j-1} \,+ d_{2,j-1}) \end{aligned}$$

für $\ell = 1, \ldots, n_{k-(j-1)}$, so daß

$$R^{*\,n_{k-(j-1)}} + R^{*\,n_{k-(j-1)}-1} U_1 + \cdots + U_{n_{k-(j-1)}} = 0$$

an der Stelle $\left(z_0, u_0, \underline{y}_0\right) = \left(\tau_{k-j}, Q_{n_{k-(j-1)}}(\tau_{k-j})\tau_{k-(j-1)}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)$ gilt. Dabei ist das Polynom $R^* \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, u, \underline{y}\right]$ analog zu Lemma 5 durch

$$\begin{aligned} & R^*\left(\tau_{k-j}, Q_{n_{k-(j-1)}}(\tau_{k-j})\tau_{k-(j-1)}, \underline{\varphi}_{k-j}\right) \\ & \qquad = \; a\left(\tau_{k-j}\right)^{d_{1,j-1}} \; Q_{n_{k-(j-1)}}(\tau_{k-j})^{d_{2,j-1}} \, R\left(\tau_{k-(j-1)}, \underline{\varphi}_{k-(j-1)}\right) \end{aligned}$$

definiert.

Aus der Induktionsvoraussetzung und aus Lemma 1.11 folgt sodann

$$\begin{aligned} & -\psi_1(j-1) - c\,\delta^{k-j}\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right) \\ & \quad \leq \; \log\left|R^*\left(\tau_{k-j}, Q_{n_{k-(j-1)}}(\tau_{k-j})\tau_{k-(j-1)}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| \\ & \quad \leq \; -\psi_2(j-1) + c\,\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right). \end{aligned}$$

Um Lemma 1.7 anwenden zu können, müssen wir noch $\left|U_\ell\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right|$ nach oben abschätzen. Wir erhalten dafür:

$$\begin{aligned} \left|U_\ell\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| \; & \leq \; L\left(U_\ell\right) \max\left\{1, \left|\tau_{k-j}\right|, \left|\varphi_{1,k-j}\right|, \ldots, \left|\varphi_{m,k-j}\right|\right\}^{d_z(U_\ell) + d_{\underline{y}}(U_\ell)} \\ & \leq \; \exp\left(nH_{j-1} + c\left(d_{1,j-1} + d_{2,j-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die für $P \in \overline{\mathbb{Q}}\left[y_1, \ldots, y_m\right]$ gültigen Ungleichungen

$$H(P) \;\leq\; L(P) \;\leq\; \left(1 + \deg_{y_1} P\right) \cdots \left(1 + \deg_{y_m} P\right) H(P)$$

benutzt.

Nach Lemma 1.7 existiert dann wiederum ein $\ell_0 \in \left\{1, \ldots, n_{k-(j-1)}\right\}$, so daß

$$-\psi_1(j) \leq \log\left|U_{\ell_0}\left(\tau_{k-j}, \underline{\varphi}_{k-j}\right)\right| \leq -\psi_2(j)$$

gilt. Wählen wir dann $R_j := U_{\ell_0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$, so erfüllt dieses Polynom die obigen Bedingungen, und die Behauptung ist bewiesen.

Damit haben wir also gezeigt, daß für alle $N \geq N_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \delta^k \; & \gg \; \nu, \\ \nu\delta^k \; & \gg \; (nd)^k N \;+\; n^k\, N^{1+m} \end{aligned}$$

Polynome $R_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[z, \underline{y}\right]$ existieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} d_z\left(R_k\right) \; & \ll \; (nd)^k\, N, \\ d_{\underline{y}}\left(R_k\right) \; & \leq \; n^k N, \\ \log H\left(R_k\right) \; & \ll \; n^k\, N^{1+m} \;+\; (nd)^k\, N, \\ -c_1\nu(n\delta)^k \; & \leq \; \log\left|R_k\left(\alpha, \underline{f}(\alpha)\right)\right| \;\leq\; -c_2\nu\delta^k. \end{aligned}$$

Ist nun $D \in \mathbb{N}$ ein Nenner für α und definieren wir das Polynom $Q_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\left[\underline{y}\right]$ durch

$$Q_k\left(\underline{y}\right) := D^{\left[cn^k d^k N\right]+1} R_k\left(\alpha, \underline{y}\right),$$

so gelten für Q_k dieselben Abschätzungen wie für R_k. Wegen $N^{m+1} \ll \nu \ll \delta^k \leq d^k$ gilt also weiter:

$$\begin{aligned} d_{\underline{y}}\left(Q_k\right) &\leq n^k N, \\ \log H\left(Q_k\right) &\ll (nd)^k N, \\ -c_1\nu(n\delta)^k &\leq \log\left|Q_k\left(\underline{f}(\alpha)\right)\right| \leq -c_2\nu\delta^k. \end{aligned}$$

Wir setzen dann $\nu = cM^{1+m}$ und mit diesem M mit $M \geq N$

$$k_0 := \left[\frac{(1+m)}{\log\delta}\log M + \gamma_0\right],$$

womit bereits für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $\delta^k \gg \nu$ erfüllt ist. Desweiteren setzen wir mit einem noch geeignet zu bestimmenden $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= n^{k_1} M, & \Phi_2 &:= c\,(n\,d)^{k_1} M, \\ \psi_1(k) &:= c_1\nu\,(n\delta)^k, & \psi_2(k) &:= c_2\nu\,\delta^k \\ \text{und}\quad \Lambda(k) &:= \frac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)} = c_3 n^k. \end{aligned}$$

Folglich sind die Bedingungen (i) und (ii) von Lemma 1.13 für alle $k \geq k_0$ erfüllt.

Setzen wir

$$k_1 := [\beta \log M]$$

mit $\beta > (1+m)/\log\delta$, so erhalten wir einerseits $k_0 \leq k_1$ für große M und andererseits aus der Bedingung

$$\nu\delta^k \gg (nd)^k N + n^k N^{1+m}$$

obere Schranken für k_1 und damit auch für β. Da wir aber $\delta > n$ im Theorem vorausgesetzt haben, folgt, daß die Ungleichung

$$\nu\delta^k \geq c\left((nd)^k N + n^k N^{1+m}\right)$$

für alle Konstanten $c > 0$ erfüllt ist, falls nur N und damit M groß genug sind und

$$\beta < \frac{m}{\log(n\,d) - \log\delta}$$

gilt. Hierbei beachte man, daß wir $n \geq 2$ vorausgesetzt haben, weshalb also $\log(n\,d) > \log\delta$ folgt.

Die Behauptung von Theorem 1 folgt dann wiederum aus Lemma 1.13, wenn wir mit den obigen Bezeichnungen zeigen können, daß die folgenden Ungleichungen für alle M bzw. $N \geq N_0$ erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{n^{2(m_0-1)}}\right)^{k_1} &\gg M^{m_0-1}\,(n\,\delta)^{k_0}\,, \\ \nu\delta^{k_1} &\gg n^{(2m_0-1)\,k_1}d^{k_1}M^{m_0}. \end{aligned}$$

Wegen $\nu = cM^{1+m}$ sind diese Ungleichungen sicherlich dann erfüllt, wenn

$$\beta\,(\log\delta \;-\; 2(m_0-1)\log n) \;>\; (m_0-1) \;+\; (1+m)\left(1+\frac{\log n}{\log\delta}\right)$$

bzw. $\beta\,((2m_0-1)\log n + \log d - \log\delta) \;<\; m+1-m_0$

gilt.

Aufgrund der Voraussetzung im Theorem an m_0 folgt

$$m_0 < \frac{(2m+1)\log\delta - (m+1)\log d\left(1+\frac{\log n}{\log\delta}\right) - (m+1)\frac{\log^2 n}{\log\delta}}{(4m+3)\log n + 2(m+1)\frac{\log^2 n}{\log\delta} + \log d} + 1.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir wieder annehmen, daß bereits $m_0 \geq 1$ gilt. Aus der obigen Ungleichung für m_0 folgt dann:

$$\begin{aligned} (m_0-1)\cdot\left((4m+3)\log n + (2m+1)\frac{\log^2 n}{\log\delta} + \log d\right) \\ < \;(2m+1)\log\delta - (m+1)\log d\left(1+\frac{\log n}{\log\delta}\right) \end{aligned}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned} \left((m_0-1) + (1+m)\left(1+\frac{\log n}{\log\delta}\right)\right)\cdot((2m_0-1)\log n + \log d - \log\delta) \\ < \;(\log\delta \;-\; 2(m_0-1)\log n)\cdot(m+1-m_0)\,. \end{aligned}$$

Daher können wir β entsprechend den obigen Vorgaben wählen. Schließlich müssen wir noch zeigen, daß damit

$$\frac{(1+m)}{\log\delta} < \beta < \frac{m}{\log(n\,d) - \log\delta}$$

ebenso erfüllt ist. Dies ist aber wegen (man beachte $m_0 \geq 1$ und $\log n \geq 0$)

$$\beta > \frac{(m_0-1) + (1+m)\left(1+\frac{\log n}{\log\delta}\right)}{\log\delta \;-\; 2(m_0-1)\log n} \geq \frac{1+m}{\log\delta}$$

und

$$\beta < \frac{m+1-m_0}{(2m_0-1)\log n + \log d - \log\delta} \leq \frac{m}{\log n + \log d - \log\delta}$$

klar. Somit ist die Behauptung von Theorem 1 vollständig gezeigt. $\square$

5.3 Beweis von Korollar 3

Wir wollen nun zeigen, daß wir die Behauptung von Theorem 1 im Fall $m = 1$ deutlich verbessern können. Aus dem Beweis von Theorem 1 übernehmen wir die Existenz eines Polynomes $Q_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[y]$, welches den Bedingungen

$$\begin{aligned} \deg_y(Q_k) &\leq n^k N, \\ \log H(Q_k) &\ll (nd)^k N, \\ 0 &< |Q_k(f(\alpha))| \leq \exp\left(-c_2 \nu \delta^k\right) \end{aligned}$$

genügt, falls die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \delta^k &\gg \nu \qquad\qquad \text{und} \\ \nu\delta^k &\gg (nd)^k N + n^k N^2 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Nehmen wir an, daß $f(\alpha)$ unter den Voraussetzungen von Theorem 1 algebraisch ist, so erhalten wir aus den obigen Abschätzungen und aus Lemma 1.9:

$$\log |Q_k(f(\alpha))| \gg -n^k N^2 - (nd)^k N.$$

Dies liefert zusammen mit der oberen Abschätzung für $|Q_k(f(\alpha))|$, daß die Ungleichung

$$\nu\delta^k \leq c\left(n^k N^2 + (nd)^k N\right) \tag{1}$$

mit einer festen, expliziten Konstanten $c > 0$ gelten muß. Wir werden zeigen, daß dies der geforderten Bedingung

$$\nu\delta^k \gg n^k N^2 + (nd)^k N$$

widerspricht.

Definieren wir wiederum $M \geq N$ durch $\nu =: c_0 M^2$ und

$$k := [\gamma \log M + c_1],$$

so folgt aus

$$\gamma > \frac{2}{\log \delta}$$

bereits $\delta^k \geq c\nu$ für alle Konstanten $c > 0$, falls nur M hinreichend groß ist. Andererseits ist für $\nu\delta^k \gg (nd)^k N + n^k N^2$ wegen $\delta > n$ aber auch die Bedingung

$$\gamma < \frac{1}{\log n + \log d - \log \delta}$$

hinreichend. Daher erhalten wir für γ die folgenden Schranken:

$$\frac{2}{\log\delta} < \gamma < \frac{1}{\log n + \log d - \log\delta}.$$

Dieses Intervall ist aber aufgrund der in Korollar 3 vorausgesetzten Bedingung $\delta^3 > n^2 d^2$ nichtleer. Wählt man nun k dementsprechend mit einem solchen γ, so erkennt man, daß damit die Vorgaben erfüllt sind, falls nur N und damit M hinreichend groß sind. Andererseits widerspricht dies aber der in (1) geforderten Ungleichung, womit Korollar 3 nun bewiesen ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] M. Amou. *Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number.* Acta Arith. **59** (1991), 71–82.

[2] M. Amou. *On the proof of Mahler–Manin conjecture.* Proceedings of Japan–Korea joint seminar on transcendental number theory and related topics (1997), 1-19.

[3] K. Barré. *Mesure d'approximation simultanée de q et $J(q)$.* J. Number Theory **66** (1997), 102–128.

[4] K. Barré–Sirieix, G. Diaz, F. Gramain and G. Philibert. *Une preuve de la conjecture de Mahler–Manin.* Invent. Math. **124** (1996), 1–9.

[5] A. Beardon. *Iteration of rational functions.* GTM **132**, Springer, 1991.

[6] P.-G. Becker. *Effective measures for algebraic independence of the values of Mahler type functions.* Acta Arith. **58** (1991), 239–250.

[7] P.-G. Becker. *Algebraic independence of the values of certain series by Mahler's method.* Mh. Math. **114** (1992), 183–198.

[8] P.-G. Becker. *Transcendence of the values of functions satisfying generalized Mahler type functional equations.* J. reine angew. Math. **440** (1993), 111–128.

[9] P.-G. Becker and W. Bergweiler. *Transcendency of local conjugacies in complex dynamics and transcendency of their values.* Manuscripta Math. **81** (1993), 329–337.

[10] D. Bertrand. *Theta functions and transcendence. International Symposium on Number Theory (Madras, 1996).* The Ramanujan J. **1** (1997), 339–350.

[11] P. Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, (vierte Auflage) 1998.

[12] V. G. Chirskii. *On the algebraic independence of the values of functions satisfying systems of functional equations.* Proc. Steklov Inst. Math. **218** (1997), 433–438.

[13] G. Diaz. *La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire.* J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 229–245.

[14] D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka and I. Shiokawa. *Transcendence of Jacobi's theta series and related results.* Proc. Japan Acad. (Ser. A) Math. Sci. **72** (1996), 202–206.

[15] D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka and I. Shiokawa. *Transcendence of Rogers–Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers.* Proc. Japan Acad. (Ser. A) Math. Sci. **73** (1997), 140–142.

[16] D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka and I. Shiokawa. *Transcendence of Jacobi's theta series and related results.* Number theory (Eger, 1996), de Gruyter, Berlin (1998), 157–168.

[17] N. I. Fel'dman and Y. V. Nesterenko. *Number Theory IV. Transcendental Numbers*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **44**, Springer, Berlin, 1998.

[18] A. I. Galochkin. *Transcendence measures of values of functions satisfying certain functional equations.* Math. Notes **27** (1980), 83–88.

[19] F. Gramain. *Quelques résultats d'indépendance algébrique.* Doc. Math., J. DMV Extra Volume ICM II (1998), 173–182.

[20] F. Gramain, M. Mignotte and M. Waldschmidt. *Valeurs algébriques de fonctions analytiques.* Acta Arith. **47** (1986), 97–121.

[21] B. Greuel. *Algebraic independence of Mahler functions.* Arch. Math., to appear.

[22] B. Greuel. *Algebraic independence of the values of Mahler functions satisfying implicit functional equations.* Acta Arith., to appear.

[23] E. Hecke. *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1921), 54–76.

[24] K. K. Kubota. *Linear functional equations and algebraic independence.* Transcendence Theory–Advances and Applications, ed. by A. Baker and D. W. Masser (1977), 227–229.

[25] K. K. Kubota. *On a transcendence problem of K. Mahler.* Can. J. Math. **29** (1977), 638–647.

[26] K. K. Kubota. *On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values.* Math. Ann. **277** (1977), 9–50.

[27] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *On algebraic functions satisfying a class of functional equations.* Aequationes Math. **14** (1976), 413–420.

[28] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *Arithmetic properties of certain functions in several variables.* J. Number Theory **9** (1977), 87–106.

[29] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *Arithmetic properties of certain functions in several variables II.* J. Austral. Math. Soc. **24** (1977), 393–408.

[30] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *Arithmetic properties of certain functions in several variables III.* Bull. Austral. Math. Soc. **16** (1977), 15–47.

[31] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *A class of hypertranscendental functions.* Aequationes Math. **16** (1977), 93–106.

[32] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler.* Transcendence Theory–Advances and Applications, ed. by A. Baker and D. W. Masser (1977), 211–226.

[33] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten. *Algebraic independence properties of the Fredholm series.* J. Austral. Math. Soc. (Series A) **26** (1978), 31–45.

[34] K. Mahler. *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen.* Math. Ann. **101** (1929), 342–366.

[35] K. Mahler. *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental–transzendenter Funktionen.* Math. Z. **32** (1930), 545–585.

[36] K. Mahler. *Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher in speziellen Punktfolgen.* Math. Ann. **103** (1930), 573–587.

[37] K. Mahler. *Remarks on a paper by W. Schwarz.* J. Number Theory **1** (1969), 512–521.

[38] K. Mahler. *Lectures on transcendental numbers.* Springer, LNM **546**, 1976.

[39] K. Mahler. *Fifty years as a mathematician.* J. Number Theory **14** (1982), 121–155.

[40] K. Mahler. *On the analytic solution of certain functional and difference equations.* Proc. Roy. Soc. London **389** (Ser. A) (1983), 1–13.

[41] Y. Manin. *Cyclotomic fields and modular curves.* Russian Math. Surveys **26** (1971), 7–78.

[42] M. Mendès–France and A. J. van der Poorten. *From geometry to Euler identities.* Theor. Comput. Sci. **65** (1989), 213–220.

[43] Y. V. Nesterenko. *Modular functions and transcendence problems – Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires.* C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **322** (1996), 909–914.

[44] Y. V. Nesterenko. *Modular functions and transcendence questions.* Math. Sb. **187** (1996), 1319–1348.

[45] Y. V. Nesterenko. *On the measure of algebraic independence of the values of Ramanujan functions.* Proc. Steklov Inst. Math. **218** (1997), 294–331.

[46] Keiji Nishioka, *Algebraic function solutions of a certain class of functional equations.* Arch. Math. **44** (1985), 330–335.

[47] Kumiko Nishioka. *On a problem of Mahler for transcendency of function values.* J. Austral. Math. Soc. (Ser A.) **33** (1982), 386–393.

[48] Kumiko Nishioka. *On a problem of Mahler for transcendency of function values II.* Tsukuba J. Math. **7** (1983), 265–279.

[49] Kumiko Nishioka. *New approach in Mahler's method.* J. reine angew. Math. **407** (1990), 202–219.

[50] Kumiko Nishioka. *On an estimate for the zeros of Mahler type functions.* Acta Arith. **56** (1990), 249–256.

[51] Kumiko Nishioka. *Algebraic independence measures of the values of Mahler functions.* J. reine angew. Math. **420** (1991), 203–214.

[52] Kumiko Nishioka. *Algebraic independence by Mahler's method and S–unit equations.* Composito Math. **92** (1994), 87–110.

[53] Kumiko Nishioka. *Mahler functions and transcendental numbers.* Amer. Math. Soc. Transl. **172** (1996), 21–30.

[54] Kumiko Nishioka. *Mahler functions and transcendence.* LNM **1631**, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1996.

[55] Keiji Nishioka and Kumiko Nishioka. *Algebraic independence of functions satisfying a certain system of functional equations.* Funkcialaj Ekvacioj **37** (1994), 195–209.

[56] A. Ostrowski. *Sur quelques généralisations du produit d' Euler* $\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+x^{2^\nu}\right) = 1/(1-x)$. C. R. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 249–251.

[57] A. Ostrowski. *Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produktes* $\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+x^{2^\nu}\right) = 1/(1-x)$, 1984. In Ostrowski, Collected Mathematical Papers, Vol. 3, 352– 413, Birkhäuser, Basel.

[58] P. Philippon. *Critères pour l'indépendance algébrique.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **64** (1986), 5–52.

[59] P. Philippon. *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques.* J. Number Theory **64** (1997), 291–338.

[60] P. Philippon. *Indépendance algébrique et K–fonctions.* J. reine angew. Math. **497** (1998), 1–15.

[61] G. Pólya and G. Szegö. *Problems and theorems in Analysis II.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[62] D. Roy. *Approximation algébrique simultanée de nombres de Liouville.* Submitted.

[63] D. Roy and M. Waldschmidt. *Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **30** (1997), 753–796.

[64] W. M. Schmidt. *Diophantine approximation.* LNM **785**, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1980.

[65] W. M. Schmidt. *Eisenstein's theorem on power series expansions of algebraic functions.* Acta Arith. **56** (1991), 161–179.

[66] T. Schneider. *Einführung in die transzendenten Zahlen.* Springer, Berlin–Göttingen–New York, 1957.

[67] I. Shiokawa. *Applications of Nesterenko's theorem on modular functions to transcendency of certain numbers.* Proceedings of Japan–Korea joint seminar on transcendental number theory and related topics (1997), 33–46.

[68] T. Tanaka. *Algebraic independence of certain numbers defined by linear recurrences.* Keio Science and Technology Reports **47** (1994), 11–20.

[69] T. Tanaka. *Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences.* Acta Arith. **74** (1996), 177–190.

[70] T. Töpfer. *Untersuchungen zur algebraischen Unabhängigkeit der Werte Mahlerscher Funktionen.* Dissertation Universität zu Köln, 1991.

[71] T. Töpfer. *An axiomatization of Nesterenko's method and applications on Mahler functions.* J. Number Theory **49** (1994), 1–26.

[72] T. Töpfer. *Algebraic independence of the values of generalized Mahler functions.* Acta Arith. **70** (1995), 161–181.

[73] T. Töpfer. *An axiomatization of Nesterenko's method and applications on Mahler functions II.* Composito Math. **95** (1995), 323–342.

[74] T. Töpfer. *Simultaneous approximation measures for functions satisfying generalized functional equations of Mahler type.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **66** (1996), 177–201.

[75] T. Töpfer. *Zero order estimates for functions satisfying generalized functional equations of Mahler type.* Acta Arith. **85** (1998), 1–12.

[76] M. Waldschmidt. *Algebraic independence of transcendental numbers: a survey.* Monograph on Number Theory, Indian National Science Academy, R.P. Bambah, V.C. Dumir and R.J. Hans Gill eds.; to appear.

[77] M. Waldschmidt. *Conjectures for large transcendence degree.* Preprint. `http://www.math.jussieu.fr/~miw/graz.html`, 1999.

[78] M. Waldschmidt. *Un demi–siècle de transcendance.* To appear in: Développement des Mathématiques au cours de la seconde moitié du XXème siècle, Birkhäuser Verlag.

[79] M. Waldschmidt. *Nombres Transcendants.* LNM **402**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.

[80] M. Waldschmidt. *Algebraic independence of transcendental numbers. Gel'fond's method and its developments.* Perspectives in mathematics, Birkhäuser, Basel–Boston, Mass. (1984), 551–571.

[81] M. Waldschmidt. *Transcendance et independance algébrique de valeurs de fonctions modulaire.* CNTA5, Carlton 1996; Proceedings of the Fifth Conference of the Canadian Number Theory Association; R. Gupta and K. Williams eds.; CRM Proceedings and Lecture Notes, Amer. Math. Soc. **19** (1999), 353-375.

[82] N. C. Wass. *Algebraic independence of the values at algebraic points of a class of functions considered by Mahler.* Dissertationes Mathematicae **303** (1990).

[83] A. Weil. *Foundations of Algebraic Geometry.* AMS, Colloq. Publ. XXIX, 1962.

[84] U. Zannier. *On a functional equation relating a Laurent series $f(x)$ to $f(x^m)$.* Aequationes Math. **55** (1998), 15–43.

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; daß diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie – abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh betreut worden.

Köln, den

(Teilpublikationen siehe Literaturverzeichnis [21, 22])

Lebenslauf

Name:	Bernd Greuel
Geburtsdatum, –ort:	17. November 1967 in Hasenfeld jetzt Heimbach
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	verheiratet, ein Kind
Religion:	römisch–katholisch
Eltern:	Jakob Greuel und Magda Greuel, geb. Schöller
Schulausbildung:	1974 – 1978: Grundschule in Hasenfeld 1978 – 1984: Städtisches Gymnasium Schleiden, mittlere Reife 1984 – 1987: Clara-Fey-Gymnasium in Schleiden, Abitur
Zivildienst:	1987 – 1989 in der Jugendherberge Gemünd
Studium:	Oktober 1989: Beginn des Studiums der Mathematik mit Studienziel Diplom und Nebenfach Biologie an der Universität zu Köln
Vordiplom:	25. Februar 1992
Diplom:	23. Februar 1996
Beschäftigungen:	Mai 1992 – Dezember 1992: studentische Hilfskraft bei der Kölnischen Rück April 1993 – Februar 1994 und Oktober 1994 – Februar 1996: studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln März 1996 – Juli 1996: wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln August 1996 – Juli 1999: wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Herrn Prof. Dr. P. Bundschuh
Auslandsaufenthalt:	Februar 1994 – Juni 1994: Nancy/Frankreich im Rahmen des Erasmus – Programms