

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende mathematikdidaktische Arbeit stellt einen Beitrag zur Didaktik der Arithmetik dar. Sie geht der Frage nach, wie Kinder den Begriff der natürlichen Zahl (1, 2, 3, ...) erwerben. Das Verfügen über einen angemessenen Zahlbegriff ist für die Teilhabe an unserer Gesellschaft zentral. Die Kenntnis, auf welche Art Kinder die Zahlen erlernen, ist eine wesentliche Grundlage für eine angemessene Vermittlung im vorschulischen und schulischen Bereich.

Mathematik kann man verschiedenartig auffassen. Nach der modernen, formalistischen Auffassung werden mathematische Begriffe lediglich „implizit“ durch ein Axiomensystem definiert. Ausgangspunkt der Arbeit ist die Beobachtung, dass Kinder ein anderes Verständnis von Mathematik, insbesondere von Arithmetik besitzen. Sie erwerben den Zahlbegriff in Situationen, in denen es um reale Phänomene geht, wie Mengen von Plättchen, Spielsteinen und Personen. Durch diese Anbindung der Zahlen an reale Situationen erhält die Zahlentheorie für Kinder eher den Charakter einer Naturwissenschaft als einer formalistischen mathematischen Theorie.

In der vorliegenden Arbeit werden die Anfänge der Entwicklung des Zahlbegriffs untersucht. Ein Ergebnis ist ein enger Zusammenhang zwischen Mengen- und Zahlbegriff. Während in der Fachwissenschaft Mathematik der Mengenbegriff im Allgemeinen als eine Voraussetzung für den Begriff der natürlichen Zahl gesehen wird, zeigen die empirischen Untersuchungen dieser Arbeit, dass beide Begriffe zusammen erworben werden.

Für eine präzise Darstellung dieses Zusammenhangs wird das Verhalten der untersuchten Kinder als das Verfügen über eine Theorie beschrieben – eine Methode, die dem kognitionspsychologischen Ansatz der Theory Theory folgt. Die den Kindern zugeschriebenen Theorien werden in der Arbeit formal als empirische Theorien im Sinne des Strukturalismus dargestellt. Durch diese präzise formale Darstellung werden grundlegende didaktische Probleme beschreibbar und erklärbar. Als ein Beispiel seien die Probleme genannt, welche die Zahl Null Kindern bereitet. Dies ist insofern ein für die Mathematikdidaktik grundlegendes Problem, weil die Zahl Null nicht nur für Darstellungen von anderen Zahlen unerlässlich ist (bereits für die Darstellung der Zahl Zehn als „10“), sondern auch für die Entwicklung einer funktional-logischen Sichtweise auf Zahlen.

Etwaige Schwierigkeiten im Erwerb mathematischer Fertigkeiten in Zusammenhang mit diesen und ähnlichen Begriffen lassen sich als Probleme struktureller und nicht individueller Art auffassen. Dieser strukturell bedingten Hürde sollten sich Wissenschaftler und Lehrende bewusst sein.

Abstract

The work of mathematical didactics presented here represents a contribution to didactics of arithmetics. It discusses questions how children acquire the concept of natural numbers $(1, 2, 3, \dots)$. Knowing an appropriate concept of number is central for the participation in our society. The knowledge in how far children learn numbers is a central foundation for an appropriate mediation in (pre-) educational areas.

Mathematics can be understood in different ways. According to the modern, formalistic conception, mathematical terms are only defined implicitly via axiomatic systems. The work's starting point is the observation that children have another conception of mathematics especially of the field of arithmetics. They acquire the concept of numbers in situations that include real phenomena like the amount of platelets, tokens or persons. With the help of this connection, the children's theory of numbers gets the character of science rather than a formalistic mathematical theory.

In the here presented work starting points of the evolution of the concept of numbers are examined. The result is a strong connection of concept of sets and concept of numbers. While the concept of sets is regarded as a precondition of the concept of natural numbers generally, the work's empirical examinations show that both concepts are acquired together. For a precise depiction of this connection, the examined children's behavior is described as knowing a theory – a method that follows the cognitive psychological approach of Theory Theory. In this work, the theories that are attributed to the children are depicted as empirical theories according to structuralism. Due to the precise and formal depiction, fundamentally didactical problems are describable and explainable. For example, children have problems with the number zero. This is a basic problem for the mathematical didactics because the number zero is not only essential for the depiction of other numbers (already for the depiction of the number ten as “10”) but also for the evolution of the functional-logical view on numbers.

Possible difficulties with the acquisition of mathematical skills in connection with these and other concepts can be understood as structural and not individual problems. Scientists and teachers should be aware of this structural caused barrier.