

# Verzweigung von DM-Solitonen in optischen Übertragungssystemen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

MICHAEL KURTH

aus Köln

Köln, 2003

Erster Berichtstatter: Prof. Dr. Küpper  
Zweiter Berichtstatter: Prof. Dr. Seydel

Tag der mündlichen Prüfung: 14.2.2003

## Kurzzusammenfassung

Die Ausbreitung eines Signals in optischen Übertragungsstrecken mit Dispersionskompensation wird durch eine nichtlineare Schrödingergleichung mit periodischen Koeffizienten beschrieben. Im Falle des starken Dispersionsmanagements ist die lokale Dispersion viel größer als mittlere Dispersion und Nichtlinearität, was ein Mittelungsverfahren ermöglicht. Diese charakteristischen Eigenschaften bleiben auch nach der Linsentransformation erhalten, welche in dieser Arbeit durchgeführt wird. Es stellt sich heraus, dass die resultierende Gleichung ein zusätzliches quadratisches Potential besitzt, welches nach Mittelung in Abhängigkeit der Parameter anziehend oder abstoßend sein kann. Im Fall positiver mittlerer Dispersion und nicht zu großer Energie des Signals ist es anziehend, und eine weitgehende analytische Beschreibung des Lösungsverhalten ist möglich. Mit verzweigungstheoretischen Mitteln sowie Variationsargumenten wird gezeigt, dass das DM-Soliton stabil als Grundzustand eines Energiefunktionals ist. Darüber hinaus fällt sie exponentiell schnell ab, wobei sie sich im Zentrum wie ein Gauß-Kern verhält. Für kleine Energien lässt sich Eindeutigkeit und Symmetrie des DM-Solitons zeigen. Zusätzlich wird die Existenz unendlich vieler verschiedener Lösungen der gemittelten Gleichung zu vorgeschriebener Energie nachgewiesen; diese korrespondieren zu nichtlinearen Moden höherer Ordnung. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren erlaubt in den übrigen Parameterbereichen ebenfalls eine qualitative Charakterisierung der Lösungen. Insbesondere die Existenz von DM-Solitonen größerer Energie kann sichergestellt werden.

## Abstract

Pulse propagation in optical transmission systems with dispersion compensation is modeled by a nonlinear Schrödinger equation with periodic coefficients. In the regime of strong dispersion management local dispersion is much greater than average dispersion and nonlinearity which permits an averaging procedure. This characteristic properties are preserved under lens transform which is performed in this thesis. It turns out, that the resulting equation has an additional quadratic potential which can be attractive or repelling after averaging depending on the involved parameters. In the case of positive residual dispersion and energy below a critical value it is shown to be attractive and an extensive analytical description of the solutions is at hand. Using bifurcation theory and variational arguments we show that the DM-soliton is stable as a ground state of the corresponding energy functional. Moreover it has exponential decay with a Gaussian core; for small energy uniqueness and symmetry of the DM-soliton is proven. Furthermore there exist infinitely many solutions of the averaged with prescribed energy corresponding to nonlinear higher order modes. In the other regimes a qualitative description of the solutions is given. In particular the existence of DM-solitons of larger energy is assured.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1. Die NLS als Modellgleichung . . . . .	4
1.2. Dispersionsmanagement und DM-Solitonen . . . . .	7
1.3. Bisherige Resultate . . . . .	11
<b>2. Linsentransformation und nichtlineare <math>TM</math>-Gleichungen</b>	<b>14</b>
2.1. Linsentransformation der DM-NLS . . . . .	14
2.2. Verzweigung in den nichtlinearen $TM$ -Gleichungen . . . . .	21
<b>3. Mittelung der DM-NLS nach Linsentransformation</b>	<b>29</b>
3.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$ . . . . .	30
3.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$ . . . . .	39
3.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$ . . . . .	41
<b>4. Numerische Berechnung von <math>a</math> und <math>b</math></b>	<b>43</b>
4.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$ . . . . .	43
4.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$ . . . . .	48
4.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$ . . . . .	51
<b>5. Analyse der gemittelten Gleichung</b>	<b>52</b>
5.1. Verzweigungsuntersuchungen . . . . .	55
5.2. Variationsmethoden . . . . .	59
5.3. Abklingverhalten . . . . .	70
<b>6. Anwendung der Ergebnisse auf die DM-NLS</b>	<b>74</b>
6.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$ . . . . .	76
6.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$ . . . . .	89
6.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$ . . . . .	91
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>93</b>
<b>A. Beweis einiger Lemmata</b>	<b>95</b>
<b>B. Störungsrechnung</b>	<b>101</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>

# Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der mathematischen Analyse der Signalausbreitung in Glasfasern zum Zweck der Datenübertragung. Aufgrund des rasanten Wachstums der Telekommunikation, insbesondere des Internets, ist dieses Thema von großer Bedeutung. Heutzutage werden riesige Datenmengen über große Entfernungen übertragen, beispielsweise bei transatlantischen Verbindungen. Daher ist man daran interessiert, möglichst hohe Übertragungsraten zu erzielen. Das Signal sollte dabei nahezu unverändert beim Empfänger eintreffen. Während der Ausbreitung in der Faser wird es aber von einer Vielzahl von Effekten gestört. Das wichtigste Problem ist dabei die Dämpfung in der Faser, welche durch Verstärker kompensiert wird. Weitere Störungen sind Dispersion und Kerr-Nichtlinearität. Um die Gestalt des Pulses zu erhalten, wurde daher zunächst versucht, diese beiden Effekte gleichzeitig zu minimieren. Hasegawa und Tappert schlugen dann in einer richtungweisenden Arbeit [29] aus dem Jahre 1973 vor, eine Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität herzustellen. Die zugehörigen Pulse werden optische Solitonen genannt und heutzutage in der Praxis mit großem Erfolg eingesetzt. Experimentell wurden sie erst 1980 von einer Arbeitsgruppe um Mollenauer in den Bell Laboratories nachgewiesen [54].

Anfang des letzten Jahrzehnts wurde dann das Konzept des Dispersionsmanagements (DM) populär. Dessen Idee besteht darin, nicht die Dispersion der Faser zu minimieren, sondern die durch sie hervorgerufenen Effekte mit Hilfe eines Faserstücks entgegengesetzter Dispersion zu kompensieren. Das so konstruierte Übertragungssystem besitzt dann eine kleine mittlere Gesamtdispersion. Ein Signal ist demzufolge innerhalb einer Kompensationsperiode starken Veränderungen ausgesetzt, am Ende hingegen sollte sich seine Gestalt periodisch reproduzieren. Es handelt sich hierbei um eine neue Form der Signalübertragung, die zugehörigen Pulse werden atmende Solitonen oder auch DM-Solitonen genannt. Ein großer Vorteil der Technik des Dispersionsmanagements besteht darin, dass bereits bestehende Systeme nicht komplett ersetzt werden müssen, sondern nur an gewissen Stellen neue Faserstücke hinzugefügt werden. Die Realisierung dieses Konzepts übertraf alle Erwartungen, die benutzten Signale reproduzieren ihre Gestalt über Hunderte von Perioden und sind äußerst stabil gegenüber Störungen. Nahezu alle heutigen Übertragungssysteme beruhen auf dem Prinzip der Dispersionskompensation und werden mit großem Erfolg in der Praxis verwendet. Im Gegensatz dazu sind theoretisch noch viele Fragen ungeklärt.

In der mathematischen Modellierung wird Signalübertragung in Glasfasern durch die kubische nichtlineare Schrödingergleichung (NLS) beschrieben, wobei aber im Gegensatz zur üblichen Interpretation der Gleichung Orts- und Zeitvariable vertauscht sind. Die NLS spielt in vielen praktischen Anwendung wie Quantenmechanik, Plasmaphysik

oder auch der Wellenmechanik eine zentrale Rolle; sie ist eine der wenigen integrablen partiellen Differentialgleichungen und besitzt spezielle nichtlineare Wellen als Lösung, die als Solitonen bezeichnet werden. Die allgemeine Theorie der nichtlinearen Schrödingergleichungen ist sehr gut entwickelt, eine vollständige Beschreibung des Lösungsverhaltens ist in vielen Fällen möglich. Für die kubische NLS mit konstanten Koeffizienten ist eine inverse Streumethode zur Hand, mit deren Hilfe sich die Existenz und Gestalt der traditionellen Solitonen beschreiben lässt. Im Fall des Dispersionsmanagements kann der Dispersionskoeffizient nicht mehr als konstant angesehen werden, die beschreibende Gleichung ist dann die NLS mit periodisch variierenden Koeffizienten, welche bei weitem nicht so gut verstanden ist wie die übliche NLS.

Numerische Untersuchungen legen die Existenz des DM-Solitons als periodische Lösung der NLS mit periodisch variierenden Koeffizienten nahe; ein theoretischer Beweis liegt aber derzeit noch in weiter Ferne. Die bisher bekannten Ergebnisse beziehen sich entweder auf reduzierte Modelle oder auf eine gemittelte Form der Gleichung. Dabei wird üblicherweise die mittlere Dispersion als klein gegenüber der lokalen Dispersion angesehen, man spricht in diesem Fall vom starken Dispersionsmanagement. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Theorie der Mittelung für partielle Differentialgleichungen komplizierter. Oft ist es bereits schwierig, das Problem auf eine Standardform zu bringen. Aus diesem Grund wird häufig ein formales Mittelungsverfahren durchgeführt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Modellgleichung durch geeignete Transformationen und einem anschließenden Mittelungsverfahren auf eine Gleichung vom Typ der NLS mit konstanten Koeffizienten gebracht. Diese besitzt ein zusätzliches quadratisches Potential und eine nicht-lokale Nichtlinearität. Für das Lösungsverhalten der Gleichung spielt das Vorzeichen des Potentials eine zentrale Rolle. Es wird sich herausstellen, dass das Potential in Abhängigkeit von der Parameterkonstellation anziehend aber auch abstoßend sein kann.

Die NLS mit quadratischem Potential beschreibt ebenfalls ein Bose-Einstein-Kondensat und ist in letzter Zeit verstärkt Gegenstand der Forschung. Dort, wie auch in den meisten Anwendungen, ist die NLS ein vereinfachtes Modell für die nicht-lokale Struktur der Nichtlinearität. Daher liefert die Analyse der hier hergeleiteten Gleichung Ergebnisse, die über die Anwendung auf DM-Solitonen hinausgehen und wird daher möglichst allgemein gehalten. Dabei finden sowohl verzweigungstheoretische Resultate als auch Variationsmethoden Anwendung.

Mit Hilfe der analytischen Ergebnisse gelingt es dann, ein tieferes Verständnis über DM-Solitonen zu gewinnen. Einerseits lassen sich viele aus der Praxis bekannte Eigenschaften theoretisch erklären, andererseits gelingt es, neue Erkenntnisse zu gewinnen. Beispielsweise existieren im Fall positiver mittlerer Dispersion und nicht zu großer Energie unendlich viele exponentiell abfallende pulsartige Lösungen, welche zu nichtlinearen Moden der Gleichung korrespondieren. Die nullte Mode ist dabei das DM-Soliton. Diese ist stabil als Grundzustand eines Energiefunktional und fällt im Kern ab wie ein Gaußkern. An den Rändern weist sie hingegen ein stark oszillierendes Verhalten auf, was auf den Einfluss der höheren Moden zurückzuführen ist. Die Lösungen für negative mittlere Dispersion lassen sich ebenfalls anhand der Art des Potentials charakterisieren.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 1** wird zunächst das dieser Arbeit zugrunde liegende mathematische Modell erklärt und eine Einführung in die Technik des Dispersionsmanagements gegeben. Des Weiteren wird der Begriff des DM-Solitons präzisiert und deren charakteristische Eigenschaften dargestellt. Das Kapitel schließt mit einem Überblick über die bisher bekannten analytischen Ergebnisse.

**Kapitel 2** befasst sich mit der Linsentransformation der Modellgleichung, welche im direkten Zusammenhang mit periodischen Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen steht. Nachdem zunächst der Ursprung der Linsentransformation geklärt wird, befasst sich der zweite Teil des Kapitels mit der Analyse der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen. Insbesondere werden Näherungsformeln hergeleitet, die für das Verständnis der korrekten Skalen in der transformierten Gleichung unerlässlich sind.

In **Kapitel 3** wird dann ein Mittelungsverfahren auf die transformierte Gleichung angewandt. Dabei stellt sich heraus, dass die resultierende Gleichung ein zusätzliches quadratisches Potential enthält. Das Vorzeichen dieses Potentials ist dabei von zentraler Bedeutung und abhängig von der Parameterkonstellation. Lediglich in Grenzfällen lassen sich analytische Näherungsformeln für die Koeffizienten der gemittelten Gleichung angeben.

Die numerische Untersuchung der Koeffizienten der gemittelten Gleichung in Abhängigkeit von den Parameterkonstellationen ist Gegenstand von **Kapitel 4**. Dabei stellt sich heraus, dass in einem großen, in der Praxis relevanten Parameterbereich das Potential anziehend ist, in anderen Situationen hingegen abstoßend.

Die mathematische Analyse der Gleichung im Fall des anziehenden Potentials wird in **Kapitel 5** durchgeführt. Dabei werden sowohl Verzweigungsargumente als auch Variationsmethoden verwandt und damit eine genaue Beschreibung der Lösungen und deren Struktur erreicht. In jedem Eigenwert der linearisierten Gleichung verzweigt ein unbeschränkter Ast von Lösungen, die sich als Grundzustand bzw. Sattelpunkte eines geeigneten Energiefunctionals charakterisieren lassen. Aufgrund des breiten Anwendungsgebiets der Gleichung sind die erzielten Ergebnisse auch außerhalb des Kontextes der DM-Solitonen von großem Interesse und werden daher möglichst allgemein gehalten.

Die Übertragung der theoretischen Ergebnisse auf die Ursprungsgleichung ist Gegenstand von **Kapitel 6**. Dabei lassen sich einige bekannte Phänomene der DM-Solitonen mit Hilfe der hergeleiteten Resultate erstmals analytisch erklären. Zusätzlich liefert die mathematische Analyse der Modellgleichung einige Erkenntnisse über die DM-Solitonen, die bisher unbekannt waren. Des Weiteren wird ein an das Galerkinverfahren angelehntes Näherungsverfahren zur Berechnung des DM-Solitons vorgestellt, welches aufgrund der theoretischen Überlegungen eine gute Approximation liefert.

Die Arbeit schließt mit einem **Ausblick**.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit befinden sich einige technische Beweise wie auch Details der Störungsrechnung aus dem zweiten Kapitel im **Anhang**.

# 1. Grundlagen

In diesem Kapitel wird zunächst das Prinzip der Signalübertragung in Glasfaserkabeln erläutert und insbesondere auf deren mathematische Modellierung eingegangen. Ein sehr gutes Modell zur Beschreibung der Pulsausbreitung ist die nichtlineare Schrödingergleichung (NLS). Bezieht man weitere Effekte wie etwa Dispersion dritter Ordnung [47], verschiedene Polarisierungen oder Interaktionen zwischen Pulsen in verschiedenen Kanälen mit ein, so ist die beschreibende Gleichung eine Schrödingergleichung höherer Ordnung [23] oder ein System gekoppelter NLS [25]. In dieser Arbeit werden wir aber diese Effekte vernachlässigen und uns stattdessen mit der Technik des Dispersionsmanagements (DM) beschäftigen, welches heutzutage in realen Übertragungssystemen äußerst erfolgreich eingesetzt wird. Die beschreibende Gleichung ist dann die NLS mit periodisch variierenden Koeffizienten. Nachdem im ersten Abschnitt des Kapitels das zugrunde liegende Modell kurz erklärt wird, beschäftigt sich der zweite Teil mit der Technik des Dispersionsmanagements und der zugehörigen mathematischen Problemstellung, nämlich mit der Frage nach der Existenz periodischer Lösungen, den sogenannten DM-Solitonen. Am Ende des Kapitels werden dann kurz die bisher bekannten Ergebnisse dargestellt.

## 1.1. Die NLS als Modellgleichung

Insbesondere durch den Gebrauch des Internets hat in den letzten Jahren die Bedeutung der Datenübertragung exponentiell zugenommen. Riesige Datenmengen müssen dabei über große Entfernungen in möglichst kurzer Zeit übermittelt werden. Dazu werden diese in Form von Wellen (binär) kodiert und mit Hilfe von optischen Fasern an ihren Bestimmungsort gebracht. Während der Ausbreitung in einer solchen Faser unterliegt das Signal einer Reihe von Störungen, die dazu beitragen, dessen Gestalt zu verändern. Damit man aus dem Ausgangssignal am Ende der Übertragung die Information herausfiltern kann, sollte es jedoch möglichst unverändert beim Empfänger eintreffen. Daher müssen Techniken entwickelt werden, die dazu beitragen, die Stabilität und Geschwindigkeit der Signalübertragung zu erhöhen. In diesem Abschnitt wird zunächst das zugrunde liegende mathematische Modell erklärt.

Das Prinzip der Signalübertragung lässt sich leicht verstehen: Ein Signal wird in Form eines lokalisierten optischen Pulses in die Faser gegeben. Um die Informationen am Ende der Faser aus dem Signal herausfiltern zu können, sollte das Ausgangssignal möglichst gut mit dem Eingangssignal übereinstimmen. Darüber hinaus sollte es auch sehr stabil gegenüber Störungen sein. Bekanntermaßen lässt sich Licht als elektromagnetische Welle auffassen. Wie alle elektromagnetischen Phänomene wird daher auch die Übertragung optischer Pulse in Glasfasern durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Aus

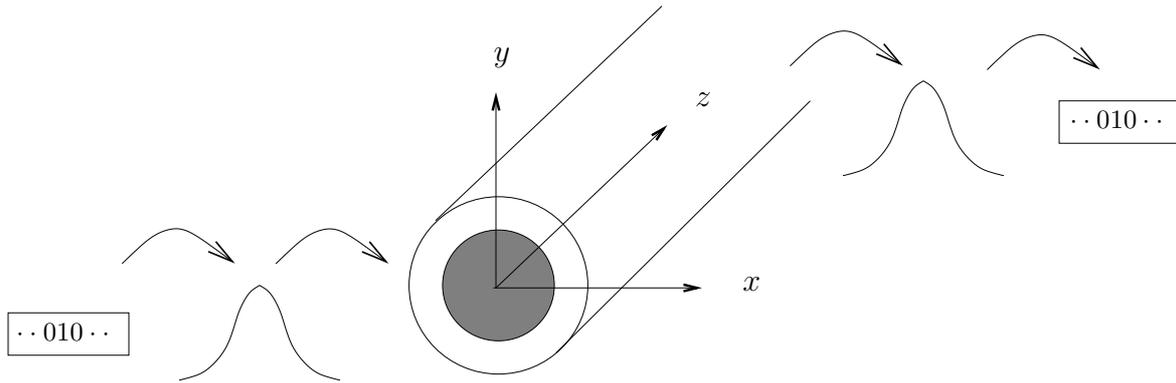


Abbildung 1.1.: Schematischer Aufbau eines optischen Übertragungssystems

diesen lässt sich herleiten (cf. [24, 25, 37, 45]), dass in einer verlustfreien, polarisations-erhaltenden Einmodenfaser die langsam variierende Amplitude  $A$  des elektrischen Feldes eines Signals näherungsweise einer Gleichung vom Typ der nichtlinearen Schrödinger-gleichung genügt. Dazu approximiert man das elektrische Feld durch

$$E(r, z, t) = A(z, t)U(r)e^{i(kz - \omega t)} + \bar{A}(z, t)\bar{U}(r)e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (1.1)$$

wobei  $U$  die von der Faser unterstützte Mode,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\omega$  die Trägerfrequenz der Welle und  $k$  die zugehörige Wellenzahl ist. Mit Hilfe eines Mehrskalenformalismus [55] oder einer Störungsrechnung [37, 45] kann man dann zeigen, dass  $A$  der Gleichung

$$iA_z(z, t) - \frac{k_1''}{2}A_{tt}(z, t) + \sigma |A(z, t)|^2 A(z, t) = 0 \quad (1.2)$$

mit  $\sigma > 0$  genügt. Hierbei ist  $z$  die Ausbreitungsdistanz in der Faser (vgl. Abbildung 1.1) und  $t$  die skalierte Zeit. Man beachte, dass im Gegensatz zu der üblichen Interpretation der NLS in (1.2) die Raum- und die Zeitvariable vertauscht sind. Des Weiteren ist die Gleichung (1.2) eindimensional, die Variablen  $x$  und  $y$ , die den Querschnitt der Faser beschreiben, sind in der NLS nicht mehr vorhanden. In (1.2) beschreibt nun  $k''$  die Gruppengeschwindigkeitsdispersion und  $\sigma = \omega n_{NL}(\omega)/c$  ist ein positiver Parameter, der den nichtlinearen Anteil des Brechungsindex  $n$  enthält. Dabei bezeichnet  $c$  wie üblich die Lichtgeschwindigkeit.

Im Folgenden wollen wir das Modell nun näher an die Realität anpassen. Dazu muss man den durch Absorption in einer Faser entstehenden Verlust  $\gamma$  mit einbeziehen. Um diesen zu kompensieren, werden an festen Stellen  $z_k = kL_A$  ( $k = 1, \dots, n$ ) Verstärker in die Faser eingesetzt. Die Länge  $l$  eines Verstärkers ist in der Realität wesentlich kleiner als der Abstand  $L_A$  zwischen zwei Verstärkern und kann daher vernachlässigt werden. Mathematisch lässt sich die Aktion eines Verstärkers dann gemäß  $A_z = g\delta(z - z_k)A$  beschreiben. Dabei ist  $g > 0$  ein Verstärkungsparameter und  $\delta$  bezeichnet die Delta-Distribution. Man kann errechnen, dass  $g = \exp(\gamma L_A) - 1$  gewählt werden muss, um den Verlust komplett zu kompensieren [24]. Beziehen wir nun den Verlust und den Einfluss

der Verstärker in die NLS ein, so gilt [53, 79]:

$$iA_z(z, t) - \frac{k_1''}{2}A_{tt}(z, t) + \sigma |A(z, t)|^2 A(z, t) = i\left(-\gamma + g \sum_{k=1}^n \delta(z - z_k)\right)A(z, t) =: iG(z)A(z, t). \quad (1.3)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$A(z, t) = \exp\left(-\int_0^z G(z') dz'\right)\tilde{A}(z, t) \quad (1.4)$$

lassen sich die durch den Einfluss der Verstärker und des Verlustes schnellen Oszillationen von  $A$  heraustransformieren. Wir erhalten

$$i\tilde{A}_z(z, t) - \frac{k_1''}{2}\tilde{A}_{tt}(z, t) + \sigma \exp(2G(z))|\tilde{A}(z, t)|^2\tilde{A}(z, t) = 0. \quad (1.5)$$

Setzen wir nun  $D = -k_1''/2$  sowie  $c(z) = \sigma \exp(2G(z))$  und schreiben wieder  $A$  anstelle von  $\tilde{A}$ , so gilt

$$iA_z(z, t) + DA_{tt}(z, t) + c(z)|A(z, t)|^2 A(z, t) = 0. \quad (1.6)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir die NLS in obiger Notation untersuchen. Um das Problem korrekt zu stellen, müssen wir noch am Anfang der Faser ein Eingangssignal  $A(0, t) = A_0(t)$  vorgeben, welches möglichst unverändert am Ende der Übertragungstrecke eintreffen sollte. Die Einflüsse der Dispersion  $D$  und der Nichtlinearität bewirken eine Veränderung des Eingangssignals. In der Geschichte der Signalübertragung wurde daher zunächst versucht, Faser derart zu konstruieren, dass diese Parameter sehr klein sind. Ist die Faser verlustfrei, also  $c(z)$  konstant, so lässt sich obige Gleichung mit Hilfe der inversen Streumethode lösen. Im Bereich positiver Dispersion  $D$  sind die Lösungen Solitonen [64]. Positives  $D$  korrespondiert zu  $k'' < 0$  und wird Bereich *anomaler Dispersion* genannt. Solitonen sind schnell abfallende, lokalisierte Pulse, die sehr robust gegenüber Störungen sind. Die Solitonenlösung der NLS im Bereich anomaler Dispersion lässt sich explizit berechnen und hat die Gestalt einer Secans Hyperbolicus. Im Bereich normaler Dispersion ( $D < 0$ ) sind die Lösungen nicht lokalisiert, sie sind daher für die Signalübertragung ungeeignet und werden dunkle Solitonen genannt.

Die Existenz optischer Solitonen wurde theoretisch in einer Arbeit von Hasegawa und Tappert von 1973 gezeigt [29], experimentell dagegen erst 1980 von Mollenauer et al. [54]. Vereinfacht gesprochen liegt der Erfolg der optischen Solitonen darin, eine Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität herzustellen, anstatt beide Effekt gleichzeitig zu minimieren. Heutzutage beruhen alle optischen Übertragungssysteme auf diesem Konzept; nichtdestotrotz sind die Übertragungsraten durch störende Einflüsse wie den Gordon-Hauss-Effekt, der durch Rauschen hervorgerufen wird, Interaktionen zwischen Signalen in verschiedenen Kanälen, Instabilität durch Phasen- und Amplitudenmodulation sowie den Einfluss von Effekten höherer Ordnung begrenzt (vgl. die Übersichtsartikel [6, 23]). Ein äußerst erfolgreicher Ansatz, diese Probleme zu verkleinern, ist die Technik des Dispersionsmanagements, welche im nächsten Abschnitt erklärt wird.

## 1.2. Dispersionsmanagement und DM-Solitonen

Die Idee des Dispersionsmanagements (DM) besteht darin, Faserstücke unterschiedlicher Dispersion so zu kombinieren, dass das Signal seine Gestalt nicht verliert und dabei stabilisiert wird. In der Praxis geht man wie folgt vor: Die bestehenden optischen Übertragungssysteme bestehen aus Fasern mit einer relativ hohen anomalen Dispersion, die eine Abflachung und Verbreiterung des Impulses zur Folge haben. Setzt man nun in festen Abständen Faserstücke mit entgegengesetzter Dispersion ein, sollte sich dieses Verhalten wieder umkehren. Ist die mittlere Dispersion (*residual dispersion*) nun sehr klein, so erwartet man, dass das Signal seine Gestalt periodisch zurückerhält; der Puls wird dann *atmendes Soliton* oder *DM-Soliton* genannt (vgl. unten stehende Definition 1.2.1).

Obwohl die Idee der Dispersionskompensation bereits im Jahr 1980 das erste Mal in der Literatur auftauchte [48], konnte sie sich erst Mitte des letzten Jahrzehnts zuerst in experimentellen (cf. [68, 71]), dann auch in theoretischen Betrachtungen (cf. [15, 16, 28]) durchsetzen. Die ersten experimentellen Ergebnisse übertrafen alle Erwartungen: Mit Hilfe der Technik des Dispersionsmanagements können extrem stabile Signale übermittelt werden, die ihre Gestalt für mehrere hundert Perioden behalten. Heutzutage wird Dispersionsmanagement in allen realen Übertragungssystemen mit großem Erfolg angewendet, theoretisch sind aber noch viele Fragen ungeklärt.

In der mathematischen Modellierung bedeutet das DM-Konzept, dass der Dispersionskoeffizient  $D$  der Faser nicht mehr konstant ist, sondern sich während der Ausbreitung in der Faser ändert. Die beschreibende Gleichung ist dann die NLS mit einem in  $z$  variierenden Dispersionskoeffizienten  $D = D(z)$ . Berücksichtigt man dies in Gleichung (1.6), so erhält man die sogenannte DM-NLS, die die Ausbreitung eines Pulses in einer Faser mit variierender Dispersion beschreibt:

$$iA_z(z, t) + D(z)A_{tt}(z, t) + c(z)|A(z, t)|^2A(z, t) = 0. \quad (1.7)$$

In dieser Arbeit wollen wir uns, wie in der Literatur üblich, auf den Fall eines zweistufigen, stückweise konstanten Dispersionsprofils beschränken:

$$D(z) = D_{\text{loc}}(z) + \langle D \rangle = \begin{cases} d + \langle D \rangle & : 0 \leq z \leq \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \leq z \leq 1 \\ -d + \langle D \rangle & : \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{mit } d > 0. \quad (1.8)$$

Dabei bezeichne hier und im Folgenden  $\langle \cdot \rangle$  Mittelung über eine Periode, also

$$\langle D \rangle = \int_0^1 D(z') dz'.$$

Man beachte, dass die Periode der Dispersionsabbildung auf 1 normiert wurde und dass  $\langle D_{\text{loc}} \rangle = 0$  ist.

Des Weiteren wollen wir hier nur das *verlustfreie Modell*  $c(z) = c > 0$  betrachten. Diese Annahme ist zwar idealisiert, liefert aber eine gute Näherung in Fällen, wo der Abstand der Verstärker wesentlich kleiner als die Kompensationsperiode ist, was in realen Übertragungssystemen gegeben ist. In diesem Fall lassen sich die durch die Absorption

verursachten Variationen des Signals durch Mittelung heraustransformieren [45, 79]. Die DM-NLS lautet dann

$$iA_z(z, t) + D(z)A_{tt}(z, t) + c|A(z, t)|^2A(z, t) = 0. \quad (1.9)$$

und unterscheidet sich von (1.7) dadurch, dass der Koeffizient der Nichtlinearität nun konstant in  $z$  ist. Das Konzept des Dispersionsmanagements sieht vor, dass wir an in der Ausbreitungsvariable  $z$  periodischen Lösungen der DM-NLS (1.9) interessiert sind, den DM-Solitonen. Des Weiteren werden wir uns in dieser Arbeit nur mit dem Fall des *starken Dispersionsmanagements* beschäftigen. Die Begriffe klärt folgende Definition:

**Definition 1.2.1.**

- (i) Ein DM-Soliton ist eine stabile und schnell abfallende Lösung der DM-NLS (1.9) in der Form

$$A(z, t) = \exp(ikz)u(z, t), \text{ mit } u(z + 1, t) = u(z, t). \quad (1.10)$$

Die Konstante  $k$  wird in Anlehnung an das Blochtheorem Quasiimpuls genannt.

- (ii) Starkes Dispersionsmanagement zeichnet sich durch hohe lokale Dispersion im Vergleich zu der gemittelten Dispersion aus, i.e.  $|\langle D \rangle| \ll d$ .

Um die Skalen, auf die die einzelnen Faktoren Einfluss nehmen, besser zu verstehen, ist folgende Transformation üblich [79]:

$$A(t, z) = N \frac{\tilde{A}(t/T_0, z)}{\sqrt{T_0}}, \quad x = t/T_0 \quad (1.11)$$

Dabei ist  $T_0$  eine charakteristische Pulsbreite und  $N$  die Energie des Signals.

**Bemerkung 1.2.2.**

- (i) Mit Hilfe der Linsentransformation werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit in der Lage sein, eine Beziehung zwischen  $T_0$  und  $N^2$  herzustellen.
- (ii) Eine Erhaltungsgröße in der DM-NLS ist die Energie  $N$  des Pulses im Sinne der  $L^2$ -Norm. Es ist daher sinnvoll, diese als Parameter vorzugeben und dann nach normierten Lösungen zu suchen, vgl. Kapitel 6.

Unter Verwendung von Transformation (1.11) erhalten wir

$$i\tilde{A}_z + \frac{D_{\text{loc}}}{T_0^2}\tilde{A}_{xx} + \frac{\langle D \rangle}{T_0^2}\tilde{A}_{xx} + \frac{N^2}{T_0}|A|^2A = 0. \quad (1.12)$$

**Definition 1.2.3.**

- (i) Die charakteristischen Skalen sind definiert als

$$Z_{\text{disp}} = \frac{T_0^2}{d}, \quad Z_{\text{rd}} = \frac{T_0^2}{\langle D \rangle}, \quad Z_{\text{nl}} = \frac{T_0}{N^2} \quad (1.13)$$

(ii) Der Parameter  $y = d/(2T_0^2)$  beschreibt die Stärke der Dispersionsabbildung und wird *map strength* genannt.

(iii) Die normalisierte lokale Dispersionsabbildung ist von der Gestalt

$$\mathbb{1}_{\text{disp}} = \begin{cases} 1 & : 0 \leq z \leq 1/4, 3/4 \leq z \leq 1 \\ -1 & : 1/4 < z < 3/4 \end{cases}. \quad (1.14)$$

Mit Hilfe der Definition gilt dann

$$i\tilde{A}_z + \frac{1}{Z_{\text{disp}}}\mathbb{1}_{\text{disp}}\tilde{A}_{xx} + \frac{1}{Z_{\text{rd}}}\tilde{A}_{xx} + \frac{1}{Z_{\text{nl}}}|A|^2A = 0. \quad (1.15)$$

Im Fall des starken Dispersionsmanagements gilt bekanntlich  $d \gg \langle D \rangle$ , also  $Z_{\text{disp}} \ll Z_{\text{rd}}$ . Um dieser Tatsache mathematisch Rechnung zu tragen, führen wir einen Kleinheitsparameter  $\epsilon > 0$  ein und schreiben die ursprüngliche DM-NLS in folgender Form:

$$iA_z(z, t) + D_{\text{loc}}(z)A_{tt}(z, t) + \epsilon\alpha A_{tt}(z, t) + c|A(z, t)|^2A(z, t) = 0. \quad (1.16)$$

In den bisherigen Untersuchungen dieser Gleichung wurde stets angenommen, dass der Einfluss der Nichtlinearität von derselben Ordnung wie die gemittelte Dispersion ist, also

$$iA_z(z, t) + D_{\text{loc}}(z)A_{tt}(z, t) + \epsilon\left(\alpha A_{tt}(z, t) + \tilde{c}|A(z, t)|^2A(z, t)\right) = 0. \quad (1.17)$$

Dabei ist  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$  und  $c = \epsilon\tilde{c}$  gesetzt worden. Es ist aber a priori nicht klar, warum  $Z_{\text{nl}} \sim Z_{\text{rd}}$  gelten sollte. Im Verlauf dieser Arbeit werden wir sehen, dass obige Gleichung in bestimmten Parameterbereichen Gültigkeit besitzt. Allerdings wird sich auch herausstellen, dass es Situationen gibt, in denen obige Gleichung ein falsches Modell ist.

An Gleichung (1.17) wird das Prinzip des (starken) Dispersionsmanagements noch einmal deutlich: Die ungestörte ( $\epsilon = 0$ ) Gleichung besitzt eine stabile periodische Lösung (vgl. Abschnitt 2.1.1). In der gestörten Gleichung will man wie beim üblichen Konzept des Solitons eine Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität erzielen, jedenfalls für positive mittlere Dispersion. Heuristisch sollte dann das DM-Soliton nahe an der Lösung des ungestörten Problems liegen.

#### Bemerkung 1.2.4.

*Im Falle des schwachen Dispersionsmanagements  $|\langle D \rangle| \gg d$  ist die Guiding-Center Theorie von Hasegawa und Kodama anwendbar [26]; die Lösungen ähneln den klassischen Solitonen.*

Die Existenz des DM-Solitons konnte bisher nur durch numerische Simulationen und Experimente an realen Übertragungssystemen verifiziert werden. Dabei stellten sich folgende prinzipielle Unterschiede des DM-Solitons im Vergleich zur üblichen Solitonenlösung der NLS heraus [79]:

- Aufgrund des variierenden Dispersionsprofils unterliegen die Pulsbreite und die Amplitude sehr starken Oszillationen. Im Gegensatz dazu führt der Einfluss von mittlerer Dispersion und Nichtlinearität auf eine langsame Dynamik.

- Im Bereich positiver mittlerer Dispersion variiert die Gestalt des DM-Solitons mit zunehmender Stärke der Dispersionsabbildung  $y$  (*map strength*) von einem Secans-Hyperbolicus-Profil über ein Gauß-Profil zu einer sehr flachen Form [21]. Zur Definition von  $y$  vgl. Definition 1.2.3.
- Das DM-Soliton existiert im Gegensatz zum Soliton der NLS auch im Bereich negativer oder verschwindender mittlerer Dispersion.
- Die Energie des DM-Solitons ist höher als die des korrespondierenden Solitons bei gleicher mittlerer Dispersion und Pulsbreite.

Das typische Verhalten des DM-Solitons innerhalb einer Kompensationsperiode kann Abbildung 1.2 entnommen werden.

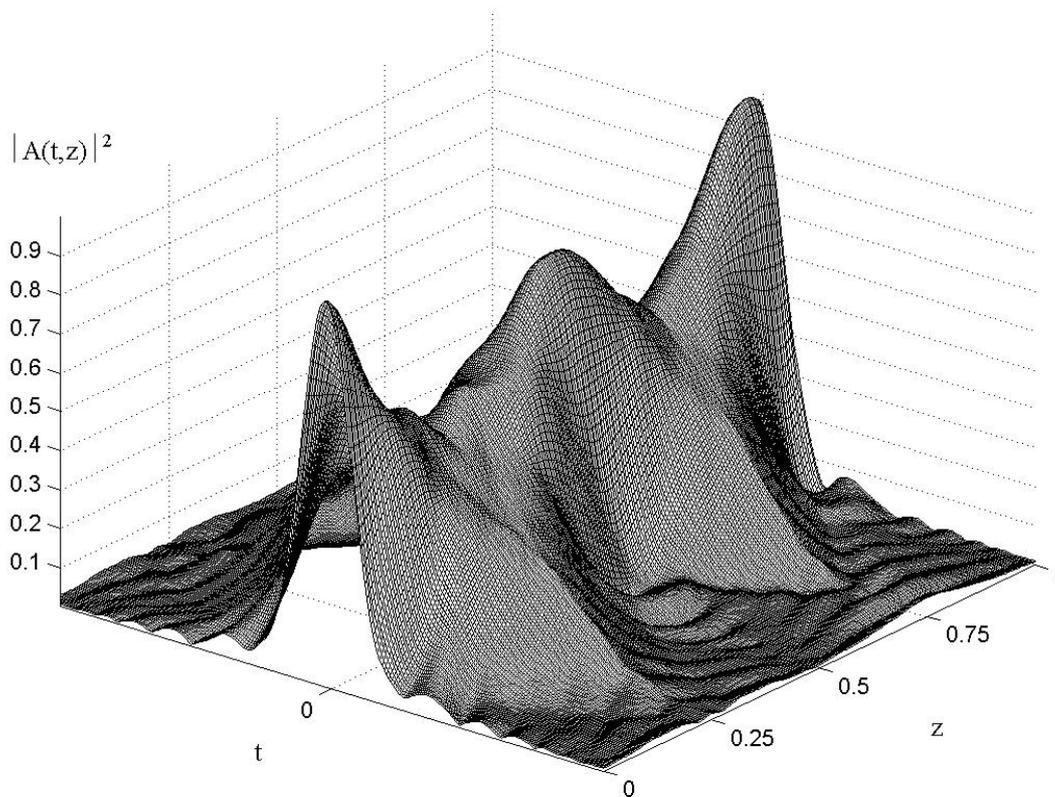


Abbildung 1.2.: Typisches Verhalten des DM-Solitons während einer Kompensationsperiode.

Dabei ist nur die Amplitude des DM-Solitons dargestellt. Man erkennt deutlich das periodische Verhalten während der Ausbreitung in der Faser. Pulsbreite und Amplitude ändern sich stark während einer Periode, dieses Verhalten wird in der Literatur als Atmen des Solitons (*breathing solitons*) bezeichnet. Im Gegensatz dazu bleibt die Pulsform nahezu unverändert. Dabei scheint der Puls Kern, also der Bereich kleiner Werte von  $t$ , einer Gaußverteilung zu ähneln; für größere Werte von  $t$ , also am Rand des Impulses, liegt dagegen ein oszillierendes Verhalten vor, welches erst in der logarithmischen

Darstellung 1.3 erkennbar wird.

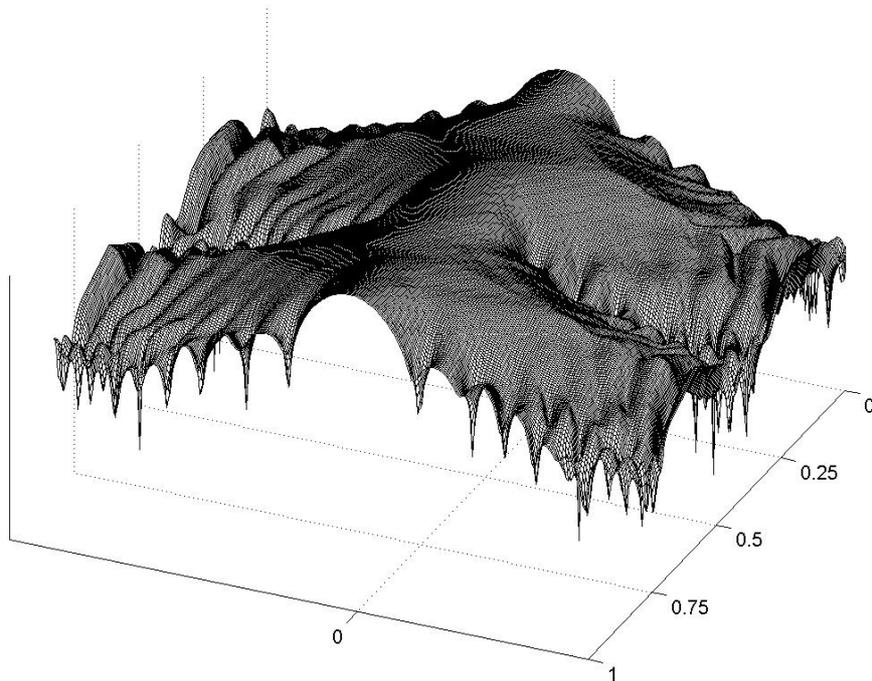


Abbildung 1.3.: Skizze des DM-Solitons in logarithmischer Darstellung.

In dieser Arbeit werden wir nun versuchen, diese Unterschiede mit Hilfe der Linsentransformation theoretisch zu erklären. Dabei wird zunächst die Ordnung der Nichtlinearität untersucht, um ein korrektes Modell herzuleiten. Des Weiteren werden analytische Bedingungen hergeleitet, die Aufschluss über die Gestalt des Pulses im Fall positiver mittlerer Dispersion geben. Dies ist ein bisher unbekanntes Resultat und kann dazu dienen, die Signalübertragung zu optimieren. Im Fall verschwindender oder negativer mittlerer Dispersion lassen sich ebenfalls Bedingungen für die Existenz des DM-Solitons angeben. Im nächsten Abschnitt werden kurz die bisher bekannten theoretischen Ergebnisse dargelegt, die sich mit der Existenz von DM-Solitonen beschäftigen.

### 1.3. Bisherige Resultate

Die Gestalt der DM-NLS im Fall des starken Dispersionsmanagements sowie die Tatsache, dass sich in diesem Fall mittlere Dispersion und Nichtlinearität erst auf größeren Skalen auswirken, legen es nahe, auf Gleichung (1.17) ein Mittelungsverfahren anzuwenden. Wie bereits erwähnt, gibt es keinen Beweis für die Existenz periodischer Lösungen. Für eine gemittelte Version der Gleichung (1.17) und positive mittlere Dispersion gelang es jedoch simultan Kunze [41] und Zharnitsky et al. [83], dies nachzuweisen.

Dabei betrachtet Kunze die sogenannte *Gabitov-Turitsyn Gleichung*, die nach einer der Fouriertransformation ähnlichen Transformation aus einem Mittelungsverfahren hervor-

geht. Formal ist diese Gleichung eine Integro-Differentialgleichung; die Suche nach stehenden Wellen führt auf ein Verzweigungsproblem. Die zugehörige Linearisierung besitzt nur wesentliches Spektrum, von dessen kleinstem Punkt aus Lösungen verzweigen. Im Sinne des Mittelungsverfahrens sollten diese stehenden Wellen dann nahe an dem DM-Soliton sein. Die DM-NLS besitzt demnach Lösungen, die nahe an einer periodischen Lösung im Sinne von Definition 1.2.1 liegen.

Das Ergebnis von Zharnitsky et al. [83] erlaubt die gleichen Schlussfolgerungen, zusätzlich wird das Mittelungsverfahren mathematisch gerechtfertigt. Da wir die dort entwickelte Methode auf die DM-NLS nach Linsentransformation anwenden werden, soll diese hier kurz dargestellt werden. Dazu betrachten wir zunächst das zu (1.17) gehörige ungestörte ( $\epsilon = 0$ ) Problem

$$iA_z(z, t) + D_{\text{loc}}(z)A_{tt}(z, t) = 0. \quad (1.18)$$

Sei nun  $U(z)$  die durch  $iA_z + A_{tt} = 0$  erzeugte Halbgruppe. Setzen wir dann

$$T(z) := U(R(z)) \quad \text{mit} \quad R(z) = \int_0^z D_{\text{loc}}(z') dz', \quad (1.19)$$

so können wir die Lösung von (1.18) mit Anfangsdaten  $A(0, t) = A_0(t)$  angeben als  $A(z, t) = T(z)A_0(t)$ . Man beachte, dass  $T$  und damit  $A$  wegen  $R(1) = \langle D_{\text{loc}} \rangle = 0 = R(0)$  periodisch in  $z$  sind. Damit können wir nun in Anlehnung an die Methode der Variation der Konstanten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die Transformation  $A(t, z) = T(z)Q(t, z)$  durchführen und erhalten als Gleichung für  $Q$ :

$$iQ_z(z, t) + \epsilon \left( \alpha Q_{tt}(z, t) + T^{-1}(z) \left( |T(z)Q(z, t)|^2 T(z)Q(z, t) \right) \right) = 0. \quad (1.20)$$

Die schnellen Oszillationen, die durch  $D_{\text{loc}}$  hervorgerufen wurden, sind mit Hilfe dieser Methode aus der Gleichung heraustransformiert worden, so dass wir nun mitteln können. Die resultierende Gleichung lautet

$$iu_z(z, t) + \epsilon \left( \alpha u_{tt}(z, t) + \int_0^1 T^{-1}(z') \left( |T(z')u(z, t)|^2 T(z')u(z, t) \right) dz' \right) = 0, \quad (1.21)$$

formal gleicht sie der kubischen NLS, allerdings mit einer komplizierteren, nicht-lokalen Nichtlinearität. Trotzdem gelingt es, Grundzustände des zugehörigen Energiefunktional zu finden; die entsprechenden Lösungen liegen in  $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$

Man beachte, dass beide Resultate keine Aussage über die Eindeutigkeit des Grundzustands bei fester Energie liefern.

Erstaunlicherweise existiert das DM-Soliton auch für verschwindende mittlere Dispersion. Das Hauptproblem ist in diesem Fall, dass man keine Kontrolle über die Ableitungsterme bekommt. Das von Zharnitsky et al. erhaltene Energiefunktional ist in diesem Fall nach unten beschränkt, Kunze gelang es, die Existenz eines Minimierers in  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  zu beweisen [40].

Im Fall negativer mittlerer Dispersion wird das von Zharnitsky et al. erhaltene Energiefunktional in [32] mit numerischen Methoden untersucht. Dabei gibt es zwar keine lokalen Minima, jedoch für kleine Werte negativer Dispersion zwei kritische Punkte, die Sattelpunkten entsprechen.

In dieser Arbeit werden wir zeigen, dass sich die DM-NLS (1.17) mit Hilfe geeigneter Transformationen und einem Mittelungsverfahren auf die Gestalt

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0, \quad z \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

bringen lässt, wobei  $S(z)$  der Lösungsoperator des harmonischen Oszillators ist und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dabei sind im Fall positiver mittlerer Dispersion und nicht zu großer Energie die Parameter  $a$  und  $b$  positiv, wodurch das Spektrum der Linearisierung diskret wird. Es wird sich herausstellen, dass in jedem Eigenwert ein unbeschränkter Ast von Lösungen verzweigt, der zu verschiedenen Moden der Gleichung korrespondiert. Die im ersten Eigenwert verzweigenden Lösungen sind als Grundzustand eines Energiefunktional stabil, dies sind die DM-Solitonen. Die Moden höherer Ordnung sind Sattelpunkte des Energiefunktional. Zusätzlich lassen sich Aussagen über die Gestalt des DM-Solitons herleiten, die den Gauß-artigen Kern sowie das oszillierende Verhalten an den Rändern erklären.

## 2. Linsentransformation und nichtlineare $TM$ -Gleichungen

In diesem Kapitel wird die von Turitsyn et al. in mehreren Arbeiten [75, 77, 78, 79, 80] vorgeschlagene Linsentransformation behandelt, die durch eine Arbeit von Talanov [72] motiviert ist. Im Kontext der Linsentransformation tauchen ebenfalls die sogenannten *nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen* auf, die bei den weiteren Untersuchungen der DM-NLS eine entscheidende Rolle spielen werden. Der hier diskutierte Weg der Linsentransformation der DM-NLS wurde mit leichten Abänderungen ebenfalls von Hasegawa et al., cf. [23, 27], sowie Kutz et al. [39] untersucht. Im ersten Abschnitt des Kapitels werden wir die Transformation durchführen und erläutern sowie die dahinterstehende Motivation näher erklären. Das Lösungsverhalten der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels diskutiert.

### 2.1. Linsentransformation der DM-NLS

Die von Turitsyn und Gabitov vorgeschlagene Linsentransformation der DM-NLS lautet

$$A(t, z) = N \frac{Q(t/T(z), z)}{\sqrt{T(z)}} \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right). \quad (2.1)$$

Dabei sind  $T$  und  $M$  1-periodische Lösungen der sogenannten nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen

$$T_z(z) = 4D(z)M(z), \quad T(0) = T_0 > 0 \quad (2.2)$$

$$M_z(z) = \frac{D(z)}{T^3(z)} - \frac{N^2}{T^2(z)}, \quad M(0) = 0. \quad (2.3)$$

Hier ist zu gegebenen  $T_0 > 0$  die Konstante  $N^2$  so zu bestimmen, dass die zu diesem Parametersatz gehörige Lösung 1-periodisch ist (oder vice versa). Die Periodizität ist insofern notwendig, da der Puls nach einer Kompensationsperiode seine Gestalt zurück erhalten soll.

Es sei bemerkt, dass in obiger Transformation noch ein Freiheitsgrad herrscht, nämlich die Wahl von  $T_0$ . Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sich herausstellen, dass die resultierende Gleichung, und damit die Eigenschaften des DM-Solitons, stark von dieser Wahl abhängen. Die Funktionen  $T(z)$  und  $M(z)$  beschreiben die Pulsbreite bzw. die zeitabhängige Phase des Signals, den sogenannten *Chirp*. Die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen werfen einige Fragen auf:

- Existieren immer periodische Lösungen?
- Wie hängt  $N^2$  von den anderen Parametern ab? Gibt es Näherungsformeln?
- Gibt es im Fall verschwindender mittlerer Dispersion andere Lösungen neben  $N^2 = 0$ ?
- Was passiert für negative mittlere Dispersion?

Die Frage der Existenz periodischer Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen wurde von Kunze [42] für das Standarddispersionsprofil (1.8) beantwortet. Es gilt

**Satz 2.1.1.**

Für alle positiven Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  und alle Dispersionsprofile  $D$  der Form (1.8) mit positiver mittlerer Dispersion besitzt das System

$$\begin{aligned} T_z(z) &= 4D(z)M(z), \\ M_z(z) &= C_1 \frac{D(z)}{T^3(z)} - \frac{C_2}{T^2(z)} \end{aligned}$$

eine 1-periodische Lösung.

Die Existenz periodischer Lösungen für ein zu den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen äquivalentes System wurde auch von Holmes et al. [31] mit Hilfe der Poincaré-Abbildung gezeigt. Dort werden ebenfalls die Symmetrien des Systems untersucht. Man kann für das  $TM$ -System folgern, dass  $T$  punktsymmetrisch zu  $1/2$  ist. Die wichtigsten Eigenschaften der periodischen Lösungen sind dann:

- $T(z) > 0$
- $M(0) = M(1/2) = M(1) = 0$ .
- $T(1/2 - z) = T(1/2 + z)$
- $M(1/2 - z) = -M(1/2 + z)$

Die typische Gestalt der Pulsbreite  $T$  und des Chirps  $M$  in einer Kompensationsperiode wird in Abbildung 2.1 dargestellt. Im Gegensatz zu den Betrachtungen, die wir in dieser Arbeit anstellen werden, wird in dem Beweis von Kunze zu gegebenen Koeffizienten (im hier untersuchten Fall  $C_1 = 1$  und  $C_2 = N^2$ ) ein Anfangswert  $(T_0, 0)$  bestimmt, der auf eine periodische Lösung führt. Für die Störungsrechnung im nächsten Kapitel und die Interpretation der Ergebnisse ist es allerdings von Vorteil, die Anfangspulsbreite  $T_0$  als freien Parameter anzusehen. Fassen wir das Vorgehen noch einmal zusammen:

- (i) Fixiere bei gegebenem Dispersionsprofil  $D$  den Parameter  $T_0$ .
- (ii) Bestimme den Parameter  $N^2(T_0)$  derart, dass die zugehörige Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen 1-periodisch ist.
- (iii) Führe mit Hilfe der in (ii) bestimmten Funktionen  $T$  und  $M$  sowie des Parameters  $N^2$  die Linsentransformation durch.

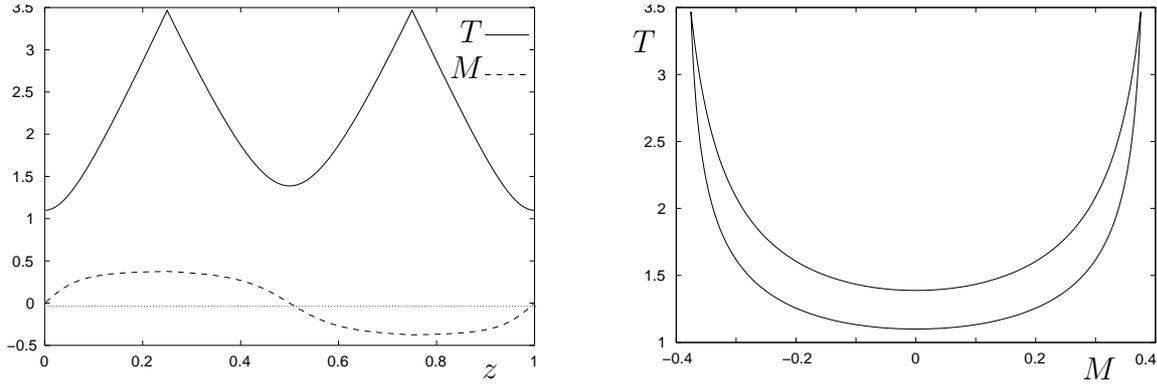


Abbildung 2.1.: Typische Gestalt von  $T$  und  $M$  als periodische Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen innerhalb einer Kompensationsperiode und als periodischer Orbit in der  $MT$ -Ebene

Das Ergebnis dieser Transformation ist eine neue Gleichung für die Funktion  $Q(x, z)$ . Nach einigen Rechnungen [45] erhalten wir mit  $x = t/T(z)$

$$iQ_z(z, x) + \frac{D(z)}{T^2(z)} \left( Q_{xx}(z, x) - x^2 Q(z, x) \right) + \frac{N^2}{T(z)} \left( x^2 Q(z, x) + |Q(z, x)|^2 Q(z, x) \right) = 0. \quad (2.4)$$

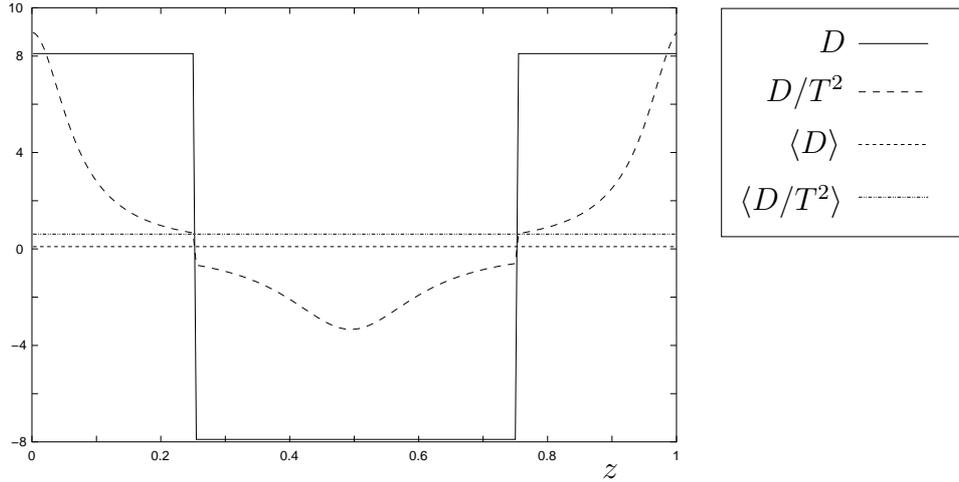
Obige Gleichung ist die DM-NLS nach Linsentransformation. Obwohl sie auf den ersten Blick komplizierter aussieht als die DM-NLS, ist sie für die mathematische Analyse besser geeignet, wie sich im weiteren Verlauf dieser Arbeit herausstellen wird. Man beachte, dass die Funktionen  $T$  und  $M$  sowie der Parameter  $N^2$  von der Wahl des Dispersionsprofils und des Parameters  $T_0$  abhängen. Die Hauptunterschiede zur DM-NLS sind:

- Der lineare Teil der Gleichung besitzt als zusätzlichen Term ein quadratisches Potential.
- Im Gegensatz zum Dispersionsprofil  $D$  ist die sogenannte *effektive Dispersion*  $D/T^2$  nicht explizit bekannt. Allerdings weist sie dasselbe charakteristische Verhalten auf, nämlich einen, im Vergleich zu den hohen lokalen Oszillationen, kleinen Mittelwert, vgl. Abbildung 2.2.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Gleichung (2.4) mittels des von Zharnitsky et al. [83] benutzten Verfahrens gemittelt. Von entscheidender Bedeutung wird dann das Vorzeichen des quadratischen Potentials in der gemittelten Gleichung sein. Es wird sich herausstellen, dass das Potential für einen großen Parameterbereich attraktiv ist. In diesem Fall ist der lineare Anteil der Gleichung der harmonische Oszillator, dessen Eigenschaften wohlbekannt sind. Insbesondere besteht sein Spektrum aus isolierten, einfachen Eigenwerten, die zugehörigen Eigenfunktionen klingen dabei ab wie ein Gaußkern.

### Bemerkung 2.1.2.

Die DM-NLS nach Linsentransformation wurde in der Literatur von mehreren Autoren behandelt (z.B. Turitsyn et al. [78, 79], Hasegawa et al. [27]). Beide mitteln die Gleichung

Abbildung 2.2.: Effektive Dispersion  $D/T^2$  vs. Dispersion  $D$ 

in obiger Form direkt und erhalten

$$iu_z + \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle u_{xx} - \left( \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle - \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle \right) x^2 u + \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle |u|^2 u = 0 \quad (2.5)$$

Numerische Untersuchungen zeigen, dass für die Mittelwerte gilt:

$$\left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle > 0, \quad \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle - \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle < 0.$$

In diesem Fall ist das Potential also abstoßend; die zugehörigen Lösungen sind nicht lokalisiert, also für Zwecke der Signalübertragung ungeeignet.

Um die Gleichung korrekt mitteln zu können, ist es von großer Wichtigkeit, einen tieferen Einblick darin zu erhalten, wie sich die Skalen des Ursprungsproblems unter der Linsentransformation verhalten. Dies wird mit einem störungstheoretischen Ansatz im nächsten Kapitel untersucht.

### 2.1.1. Motivation der Linsentransformation

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels soll kurz auf die Hintergründe der Linsentransformation eingegangen werden. Insbesondere die linearen  $TM$ -Gleichungen und deren Analyse sind als ungestörte Version der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen für die Störungsrechnung im nächsten Kapitel unerlässlich.

#### Lineare $TM$ -Gleichungen

Wie im letzten Kapitel erläutert, werden im Fall des starken Dispersionsmanagements die mittlere Dispersion sowie der Einfluss der Nichtlinearität als klein gegenüber der lokalen Dispersion angesehen. Es liegt daher nahe, diese als Störungen gegenüber der ungestörten Gleichung

$$iA_z(z, t) + D_{\text{loc}}(z)A_{tt}(z, t) = 0 \quad (2.6)$$

zu betrachten. Sei nun die zugehörige Anfangsbedingung am Anfang der Faser in Form einer Gaußschen Glockenkurve

$$A(z = 0, t) = A_0(t) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x = \frac{t}{T_0} \quad (2.7)$$

mit Parametern  $T_0, N > 0$  gegeben. Dabei ist  $N$  die Amplitude und  $T_0$  die Pulsbreite des Eingangssignals  $A_0$ . Zusammen mit dieser Anfangsbedingung lässt sich die lineare Schrödingergleichung (2.6) explizit lösen, die zugehörige Lösung lautet

$$A(t, z) = N \frac{Q(t/T_{\text{lin}}(z), z)}{\sqrt{T_{\text{lin}}(z)}} \exp\left(it^2 \frac{M_{\text{lin}}(z)}{T_{\text{lin}}(z)}\right), \quad (2.8)$$

wobei

$$\begin{aligned} R(z) &:= \int_0^z D_{\text{loc}}(z') dz' \\ T_{\text{lin}}(z) &:= \sqrt{T_0^2 + 4R^2(z)/T_0^2} \\ M_{\text{lin}}(z) &:= \frac{1}{T_0^2} \frac{R(z)}{T_{\text{lin}}(z)} \\ Q(x, z) &:= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \arctan(R(z))\right), \quad x = t/T_{\text{lin}}(z). \end{aligned}$$

Hierbei ist  $R(z)$  die akkumulierte Dispersion und wegen  $R(1) = \langle D_{\text{loc}} \rangle = 0 = R(0)$  ist  $R(z)$  ebenfalls 1-periodisch. Die Funktionen  $T_{\text{lin}}(z)$  und  $M_{\text{lin}}(z)$  beschreiben die Pulsbreite bzw. den Chirp der Lösung des ungestörten Problems; mit  $R$  sind auch sie 1-periodisch. In diesem Fall besitzt also die ungestörte Gleichung (2.6) eine in der Ausbreitungsvariable  $z$  1-periodische Lösung, für deren Amplitude gilt

$$|A(t, z)|^2 = N^2 \frac{\exp(-x^2)}{T_{\text{lin}}(z)}, \quad x = \frac{t}{T_{\text{lin}}(z)}.$$

Das Abklingverhalten des Eingangssignals ändert sich während der Ausbreitung in der Faser nicht, lediglich Amplitude und Phase variieren periodisch. Am Ende der Kompensationsperiode erhält der Puls seine Gestalt zurück; dieses Verhalten sollte auch bei der Lösung der DM-NLS vorliegen.

### Bemerkung 2.1.3.

*Heuristisch liegt nun die Vermutung nahe, dass die Lösung der DM-NLS (1.9) zu den gleichen Anfangsdaten (2.7) nahe an der Lösung (2.8) der ungestörten Gleichung (2.6) liegt. Mathematisch gesprochen sollte also (2.8) eine erste Näherung für die Lösung des kompletten nichtlinearen Problems sein. In nächster Ordnung sollte dann eine Balance zwischen mittlerer Dispersion und Nichtlinearität in Analogie zum Konzept der Solitonen zu einer stabilen, periodischen Lösung führen, dem DM-Soliton.*

Differenzieren wir  $T_{\text{lin}}$  und  $M_{\text{lin}}$  nach  $z$ , so erhalten wir wegen  $R'(z) = D_{\text{loc}}(z)$ :

$$T'_{\text{lin}}(z) = 4D_{\text{loc}}(z)M_{\text{lin}}(z), \quad T_{\text{lin}}(0) = T_0 > 0 \quad (2.9)$$

$$M'_{\text{lin}}(z) = \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^3}(z), \quad M_{\text{lin}}(0) = 0. \quad (2.10)$$

Die obigen Gleichungen sind eine ungestörte Version der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen; sie werden daher in der Literatur lineare  $TM$ -Gleichungen genannt und sind, wie gesehen, explizit lösbar.

### Nichtlineare $TM$ -Gleichungen

Die Linsentransformation lautet bekanntlich

$$A(t, z) = N \frac{Q(t/T(z), z)}{\sqrt{T(z)}} \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right), \quad (2.11)$$

wobei  $T$  und  $M$  Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen

$$\begin{aligned} T_z(z) &= 4D(z)M(z), & T(0) &= T_0 > 0, \\ M_z(z) &= \frac{D(z)}{T^3(z)} - \frac{N^2}{T^2(z)}, & M(0) &= 0 \end{aligned}$$

sind. Wir sind nur an 1-periodischen Lösungen interessiert; denn da  $A(t, z)$  von der Form  $A(t, z) = \exp(ikz)F(t, z)$  mit in  $z$  1-periodischem  $F$  sein soll, müssen insbesondere die Pulsbreite und der Chirp, also  $T$  und  $M$ , 1-periodisch sein. Ist die Anfangspulsbreite  $T_0$  vorgegeben, so muss  $N^2$  so bestimmt werden, dass die zugehörige Lösung periodisch ist.

#### Bemerkung 2.1.4.

- (i) *Vernachlässigen wir in den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen die Effekte erster Ordnung, also mittlere Dispersion und Nichtlinearität, so erhalten wir die linearen  $TM$ -Gleichungen. Daher wird die Lösung der gestörten Gleichungen (2.2), (2.3) in der Nähe der des linearen Problems liegen.*
- (ii) *Für einen gegebenen Parametersatz  $(T_0, N^2)$  sind  $T$  und  $M$  eindeutig bestimmt, demnach können wir aus einer Lösung der DM-NLS nach Linsentransformation (2.4) eine Lösung der Originalgleichung (1.9) berechnen und umgekehrt.*
- (iii) *Mit Hilfe eines störungstheoretischen Ansatzes lassen sich Näherungsformeln für  $N^2$  finden. Die entsprechende Störungsrechnung wird im nächsten Kapitel durchgeführt.*

Die Frage, warum die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen gerade so gewählt wurden, beantwortet folgende Bemerkung:

#### Bemerkung 2.1.5.

*Turitsyn et al. (cf. [75, 77, 78, 79, 80]) nehmen an, dass die Lösung der DM-NLS eine ähnliche Struktur hat wie die des linearen Problems, also*

$$A(t, z) = N \frac{Q(t/T(z), z)}{\sqrt{T(z)}} \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right) \quad (2.12)$$

*mit noch unbekanntenen Funktionen  $T$  und  $M$ . Gibt man nun die Funktion  $Q$  vor, so kann man mit Hilfe eines reduzierten Variationsarguments, welches den Ursprung in einer*

Arbeit von Anderson und Lisak [2] hat, herleiten, dass  $T$  und  $M$  folgender Gleichung genügen:

$$T_z(z) = 4D(z)M(z), \quad M_z(z) = C_1 \frac{D(z)}{T^3(z)} - C_2 \frac{N^2}{T^2(z)}. \quad (2.13)$$

Dabei lassen sich  $C_1$  und  $C_2$  berechnen als

$$C_1 = \frac{\int |Q_x(x, z)|^2 dx}{\int x^2 |Q(x, z)|^2 dx}, \quad C_2 = \frac{\int |Q(x, z)|^4 dx}{4 \int x^2 |Q(x, z)|^2 dx}.$$

Unter der Annahme, dass in erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x} \arg(Q(x, z)) = 0$$

gilt, kann man zeigen, dass  $C_1$  und  $C_2$  in von  $z$  unabhängige Konstanten sind. Durch eine geeignete Umskalierung lässt sich das System (2.13) nun in Form der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen (2.2), (2.3) schreiben. Es sei noch erwähnt, dass die Gleichungen auch mit der Momentenmethode hergeleitet werden können [79].

Die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen werden im Sinne obiger Bemerkung auch oft dazu benutzt, die Pulsbreite und den Chirp des DM-Solitons zu approximieren. Numerische Simulationen zeigen dabei eine sehr gute Übereinstimmung [79]. Im nächsten Abschnitt werden wir einige weitere Ähnlichkeiten zwischen dem ODE-Modell ( $TM$ -Gleichungen) und dem PDE-Modell (DM-NLS) aufzeigen.

### Bemerkung 2.1.6.

Die Linsentransformation ist abhängig vom Parameter  $T_0$ . Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, dass das Lösungsverhalten der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen und damit die Skalen in der DM-NLS nach Linsentransformation stark von der Wahl von  $T_0$  abhängen.

In der Literatur wurden in der Vergangenheit zwei unterschiedliche Wege beschritten: Einerseits wurden die  $TM$ -Gleichungen für ein gegebenes Pulsprofil (und daraus resultierenden Parametern  $C_1$  und  $C_2$ ) benutzt, um Aussagen über die Ausbreitung dieses Pulses zu treffen. Andererseits wurde die Linsentransformation für gegebenes  $T$  und  $M$  als periodische Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen durchgeführt, um die resultierende Gleichung zu untersuchen. Dieser Weg wurde allerdings in den letzten Jahren wieder verworfen, da die Lösungen der durch naives Mitteln erhaltenen Gleichung (2.5) nicht lokalisiert sind, d.h. nicht quadratintegabel. In der vorliegenden Arbeit werden wir durch ein genaueres Mittelungsverfahren zeigen, dass die resultierende Gleichung nach Linsentransformation sogar sehr schnell abfallende Lösungen besitzt.

## 2.2. Verzweigung in den nichtlinearen $TM$ -Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen im Falle des starken Dispersionsmanagements untersuchen und Näherungen für den Parameter  $N^2$  herleiten. Die Tatsache, dass in diesem Fall die gemittelte Dispersion klein ist, legt eine Störungsrechnung nahe. Dies ist einerseits wichtig, um zu verstehen, von welcher Ordnung die Nichtlinearität in der DM-NLS nach Linsentransformation ist, andererseits lassen sich für den Fall negativer oder verschwindender mittlerer Dispersion Bedingungen für die Existenz des DM-Solitons herleiten.

### 2.2.1. Störungsrechnung

Das Problem lautet also, zu gegebenem  $T_0$  den Parameter  $N^2 = N^2(\langle D \rangle, T_0)$  so zu bestimmen, dass die Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen periodisch ist. Dazu entwickeln wir die mittlere Dispersion gemäß

$$\langle D \rangle = \epsilon\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

und schreiben die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen in der Form

$$T_z(z; \epsilon) = 4D_{\text{loc}}(z)M(z; \epsilon) + 4\epsilon\alpha M(z; \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad T(0) = T_0 \quad (2.14)$$

$$M_z(z; \epsilon) = \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T^3(z; \epsilon)} - \frac{N^2(\epsilon, T_0)}{T^2(z; \epsilon)} + \frac{\epsilon\alpha}{T^3(z; \epsilon)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad M(0) = 0. \quad (2.15)$$

Zunächst betrachten wir die Ordnung  $\epsilon^0$ , also

$$\begin{aligned} T_z(z; 0) &= 4D_{\text{loc}}(z)M(z; 0), & T(0) &= T_0, \\ M_z(z; 0) &= \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T^3(z; 0)} - \frac{N^2(0, T_0)}{T^2(z; 0)}, & M(0) &= 0. \end{aligned}$$

und erkennen, dass

$$T(z; 0) = T_{\text{lin}}(z), \quad M(z; 0) = M_{\text{lin}}(z), \quad N^2(0, T_0) = 0$$

eine periodische Lösung ist.

#### Bemerkung 2.2.1.

*Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird sich herausstellen, dass  $N^2 = 0$  für gewisse Werte von  $T_0$  nicht die einzige Wahl ist. Zunächst folgen wir aber dem Weg von Schäfer [66, 67], der davon ausgeht, dass  $N^2$  und mittlere Dispersion  $\langle D \rangle$  von gleicher Ordnung sind. Wie bereits erwähnt, ist dies aber nur in gewissen Parameterbereichen zwingend.*

Nachdem das Problem in nullter Ordnung nun gelöst ist, entwickeln wir

$$\begin{aligned} T(z; \epsilon) &= T_{\text{lin}}(z) + \epsilon T_1(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ M(z; \epsilon) &= M_{\text{lin}}(z) + \epsilon M_1(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ N^2(\epsilon, T_0) &= \epsilon C + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

und untersuchen das Problem in erster Ordnung. Nach aufwendigen Rechnungen [67] ergibt sich dabei folgende Näherungsformel für  $N^2$

$$N^2(\epsilon, T_0) = \epsilon \frac{\alpha}{T_0 F(y)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.16)$$

$$\text{mit } y = \frac{d}{2T_0^2} \text{ und } F(y) = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \quad (2.17)$$

Hier ist  $y$  die bereits erwähnte Stärke der Dispersionsabbildung (*map strength*). Wie man Abbildung 2.3 entnehmen kann, ist  $F$  und für  $\alpha > 0$  somit auch  $N^2$  für kleine Werte von  $y$  positiv. Allerdings gibt es einen kritischen Wert  $\bar{y} \sim 3.319$  für den  $F(\bar{y}) = 0$  gilt. Wird die Stärke des Dispersionsprofil über diesen Wert erhöht, so wird  $F$  negativ. Dies be-

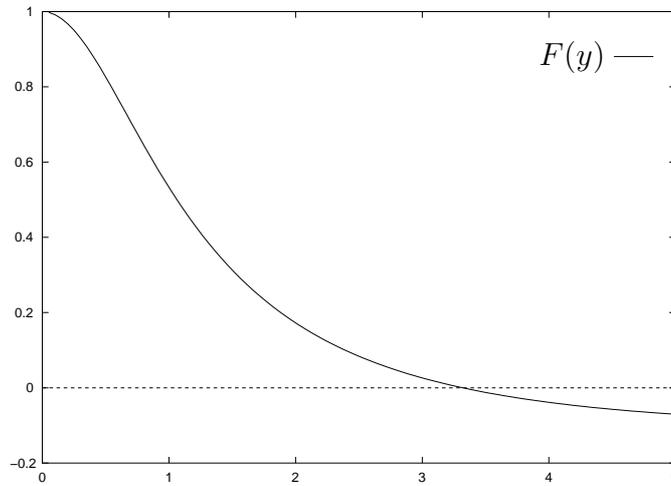


Abbildung 2.3.: Graph der Funktion  $F(y)$

deutet natürlich, dass die Näherungsformel (2.16) im Fall positiver mittlerer Dispersion nur für kleine Werte von  $y$  eine gute Näherung liefert. Bei gegebenem Dispersionsprofil korrespondiert dies zu großen Werten der Anfangspulsbreite  $T_0$ . Für negative mittlere Dispersion lässt sich die Beziehung (2.16) hingegen im Bereich großer Werte von  $T_0$  anwenden.

Definieren wir zu einem gegebenen Dispersionsprofil die kritische Pulsbreite

$$\bar{T}_0 = \sqrt{\frac{d}{2\bar{y}}}, \quad (2.18)$$

so ist klar, dass obige Beziehung für  $T_0 = \bar{T}_0$  ihre Gültigkeit verliert. Offenbar verändert das Problem dort fundamental seine Struktur. Um eine gute Näherung in einer Umgebung dieses kritischen Wertes zu finden, muss man in der Störungsrechnung nun zusätzlich auch  $|T_0 - \bar{T}_0|$  als kleinen Parameter auffassen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \epsilon \alpha_1 + \epsilon^2 \alpha_2, \\ T_0 - \bar{T}_0 &= \epsilon \beta_1 + \epsilon^2 \beta_2 \end{aligned}$$

und erkennen, dass in nullter Ordnung gilt:

$$T(z; 0) = T_{\text{lin}}(z) \text{ mit } T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0} \quad M(z; 0) = M_{\text{lin}}(z), \quad N^2(0) = 0$$

Nach sehr umfangreichen Rechnungen gelangt man mithilfe von MAPLE [51] zum Hauptresultat dieses Abschnitts (vgl. Anhang):

**Satz 2.2.2.**

Es ist  $N^2(\epsilon) = \epsilon C + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , wobei  $C$  eine Lösung von

$$aC^2 + b\beta_1 C + c\alpha_2 = 0$$

ist. Die Konstanten  $a, b$  und  $c$  hängen dabei wie folgt von  $\bar{y}$  ab:

$$\begin{aligned} a &:= 4(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}^3 + (\sqrt{1 + \bar{y}^2} - 1)(\bar{y}^2 - \bar{y} + 1)}{(1 + \bar{y}^2)^{5/2}(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})} \sim 0.684 \\ b &:= 8(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}}{(1 + \bar{y}^2)^{3/2}} \sim 6.386 \\ c &:= -4\bar{y} \frac{\bar{y}^2 + \bar{y}\sqrt{1 + \bar{y}^2} + 1}{(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})\sqrt{1 + \bar{y}^2}} \sim -13.28. \end{aligned}$$

Löst man die quadratische Gleichung aus Satz 2.2.2 für  $C$ , so erhält man

$$\begin{aligned} N_{1,2}^2 &= N_{1,2}^2(T_0, \langle D \rangle) \sim -\frac{b(T_0 - \overline{T_0})}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2(T_0 - \overline{T_0})^2 - 4ac\langle D \rangle}}{2a} \\ &\sim -4.665(T_0 - \overline{T_0}) \pm \sqrt{21.766(T_0 - \overline{T_0})^2 + 19.404\langle D \rangle}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Auf den ersten Blick scheint es so, dass das Ergebnis unabhängig von der lokalen Dispersion  $d$  ist. Dies ist jedoch nicht der Fall; man beachte, dass  $d$  in  $\overline{T_0}$  enthalten ist.

Anhand obiger Formel wird der Zusammenhang zwischen  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  deutlich. Im Gegensatz zur bisher vorherrschenden Meinung, dass im Falle des starken Dispersionsmanagements  $N^2 = \mathcal{O}(\langle D \rangle)$  ist, gilt für  $T_0 = \overline{T_0}$  nun  $N^2 = \mathcal{O}(\sqrt{\langle D \rangle})$ . Eine Gleichung, die dieses Verhalten berücksichtigt, wurde bisher nicht untersucht.

**Bemerkung 2.2.3.**

- (i) *Im Fall des starken Dispersionsmanagements, den wir hier ausschließlich betrachten, galt (1.17) bisher als die richtige Gleichung unabhängig von der Parameterkonstellation. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir zeigen, dass die beschreibende Gleichung, also die gemittelte DM-NLS nach Linsentransformation, im Bereich moderater Stärke des Dispersionsprofils ( $y \sim \bar{y}$  bzw.  $T_0 \sim \overline{T_0}$ ) im Gegensatz zum kontinuierlichen Spektrum von (1.17) ein diskretes Spektrum besitzt.*
- (ii) *Die bisher in der Literatur benutzte lineare Näherungsformel (2.16) liefert nur für  $T_0 \gg \overline{T_0}$  eine gute Approximation. Dieser Bereich korrespondiert zu Lösungen mit sehr kleiner Energie, die wiederum nahe an den klassischen Solitonen liegen. Die DM-Solitonen, die in der Praxis verwendet werden, zeichnen sich jedoch durch wesentlich höhere Energien im Gegensatz zu den klassischen Solitonen aus. Insofern ist der Bereich, in dem (2.19) gilt, von großem praktischen Interesse.*

### 2.2.2. Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir die hergeleitete Näherungsformel in den einzelnen Bereichen der mittleren Dispersion untersuchen. Selbstverständlich gelten die analytischen Aussagen nur in der Nähe der kritischen Pulsbreite  $\overline{T}_0$  und für kleine mittlere Dispersion. Um einen Überblick über das Verhalten von  $N^2$  in Abhängigkeit von  $T_0$  und  $\langle D \rangle$  zu erhalten, dient folgendes Diagramm:

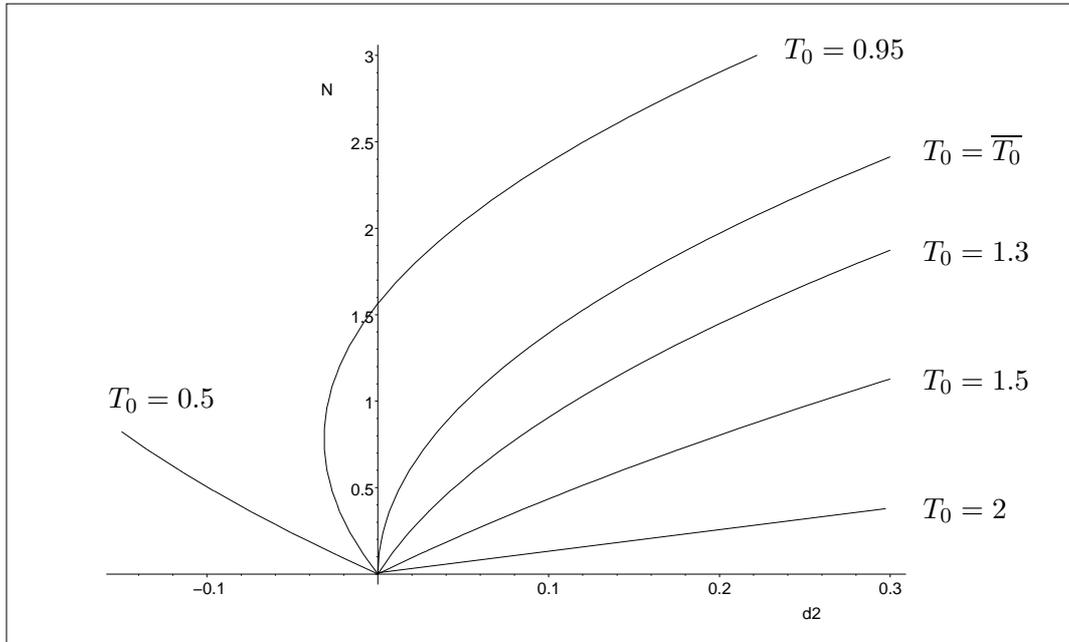


Abbildung 2.4.: Der Parameter  $N^2$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für verschiedene Werte von  $T_0$  und  $d = 8$  ( $\Rightarrow \overline{T}_0 \sim 1.09767$ ). Analytische Werte.

#### Der Fall $\langle D \rangle > 0$

Für positive mittlere Dispersion existiert immer genau eine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen, denn mit  $\langle D \rangle > 0$  folgt  $ac\langle D \rangle < 0$  und

$$N_1^2 > -\frac{b(T_0 - \overline{T}_0)}{2a} + \frac{\sqrt{b^2(T_0 - \overline{T}_0)^2}}{2a} \geq 0$$

$$N_2^2 < -\frac{b(T_0 - \overline{T}_0)}{2a} - \frac{\sqrt{b^2(T_0 - \overline{T}_0)^2}}{2a} \leq 0.$$

Also folgt aus Satz 2.2.2

#### Korollar 2.2.4.

Seien  $\langle D \rangle > 0$  und  $T_0$  gegeben. Dann existiert genau eine Lösung  $N^2(\langle D \rangle, T_0)$ .

Abbildung 2.5 vergleicht die numerisch errechneten Werte von  $N^2$  mit der analytischen Formel. Zur numerischen Bestimmung von  $N^2$  vgl. Kapitel 4. Man erkennt, dass für

kleine Werte von  $T_0$  die Energie  $N^2$  groß ist, verglichen mit der zu  $T_0 \gg \overline{T_0}$  gehörigen. Aufgrund der bijektiven Beziehung zwischen  $N^2$  und  $T_0$  könnten wir alle Ergebnisse auch in Abhängigkeit von  $N^2$  angeben, wie dies in Kapitel 6 der Fall sein wird. Selbstverständ-

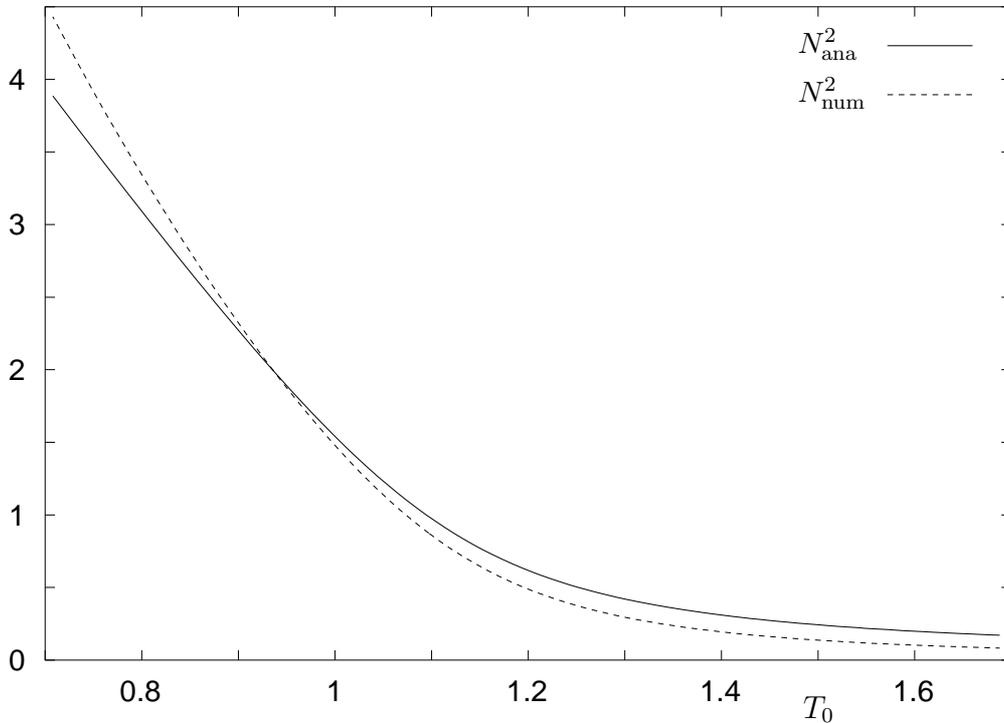


Abbildung 2.5.: Der Parameter  $N^2$  in Abhängigkeit von  $T_0$  für  $\langle D \rangle = 0.05$  und  $d = 8$  ( $\Rightarrow \overline{T_0} \sim 1.09767$ ). Exakte Werte  $N_{\text{num}}^2$  vs. Näherungswerte  $N_{\text{ana}}^2$ .

lich liefert die Beziehung (2.19) im Bereich großer Werte von  $T_0$  keine gute Näherung mehr. In diesem Bereich ist die lineare Beziehung (2.16) gültig, und mit ihr auch die Modellgleichung (1.17) eine gute Beschreibung des Problems.

### Der Fall $\langle D \rangle < 0$

Im Fall normaler mittlerer Dispersion tritt ein Verzweigungsphänomen auf:

#### Korollar 2.2.5.

Seien  $\langle D \rangle < 0$  und  $T_0$  gegeben. Definieren wir

$$T_0^* = \overline{T_0} - 2 \frac{\sqrt{ac\langle D \rangle}}{b} \sim \overline{T_0} - 0.944 \sqrt{-\langle D \rangle},$$

so gilt:

- Im Fall  $T_0 < T_0^*$  existieren zwei Lösungen.
- Im Fall  $T_0 > T_0^*$  existiert keine Lösung.

In Abbildung 2.6 werden wieder die analytischen mit den numerisch errechneten Werten für  $N^2$  verglichen.

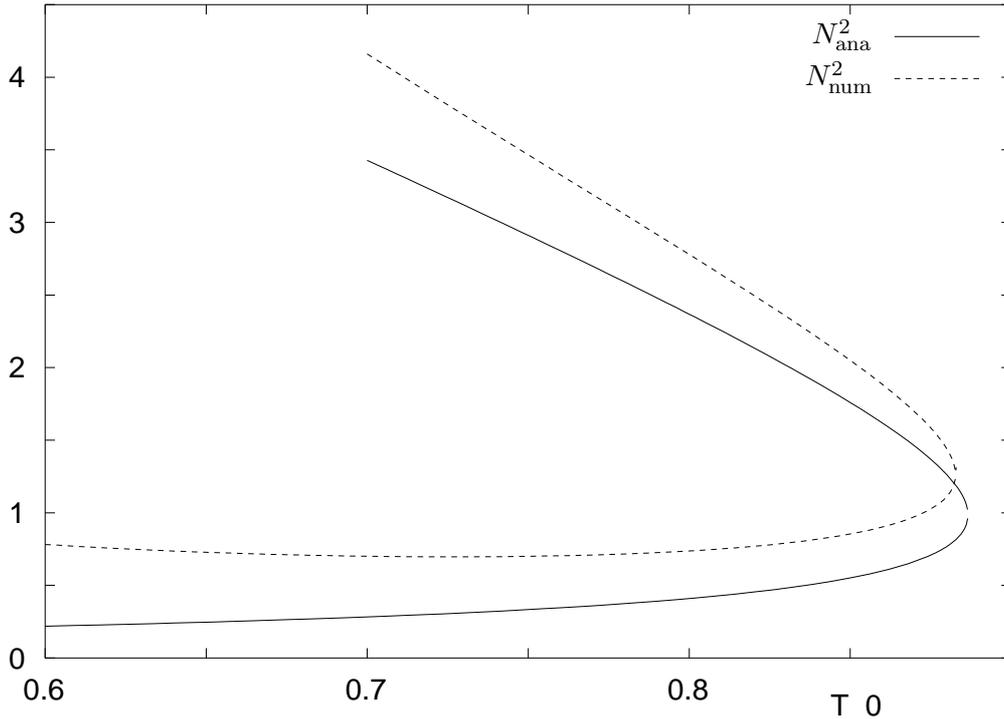


Abbildung 2.6.: Verzweigung in den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen für  $\langle D \rangle = -0.05$  und  $d = 8$ . ( $\Rightarrow \bar{T}_0 \sim 1.09767, T_0^* = 0.887$ ). Exakte Werte  $N_{\text{num}}^2$  vs. Näherungswerte  $N_{\text{ana}}^2$ .

### Bemerkung 2.2.6.

Damit spiegeln die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen also die Tatsache wider, dass im Fall negativer mittlerer Dispersion zwei verschiedene Lösungen der DM-NLS existieren. Ähnliche Untersuchungen haben Kutz et al. [39] sowie Lushnikov [49] angestellt. Berntson [3] behauptet, dass die zu der niedrigeren Energie gehörigen Lösungen instabil sind, da sie numerisch nicht aufzufinden waren.

Im Bereich sehr kleiner Werte von  $T_0$  liefert auch im Fall negativer mittlerer Dispersion Formel (2.16) eine gute Näherung.

### Der Fall $\langle D \rangle = 0$

Im Fall verschwindender mittlerer Dispersion tritt eine Verzweigung von der trivialen Lösung auf:

### Korollar 2.2.7.

In der kritischen Pulsbreite  $\bar{T}_0$  verzweigt ein Ast nichttrivialer ( $N^2 \neq 0$ ) Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen mit  $\langle D \rangle = 0$ . Dieser wird in erster Näherung beschrieben durch

$$\begin{aligned} N^2 &= -\frac{b}{a}(T_0 - \bar{T}_0) + \mathcal{O}(|T_0 - \bar{T}_0|^2) \\ &\sim -9.33 (T_0 - \bar{T}_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Für  $T_0 < \overline{T}_0$  oder  $y > \overline{y}$  existieren also neben den bekannten Lösungen  $T_{\text{lin}}$  und  $M_{\text{lin}}$  weitere nichttriviale Lösungen. Das Verzweigungsdiagramm findet man in Abbildung 2.7. Dort werden numerisch errechnete Werte von  $N^2$  mit der analytischen Formel verglichen.

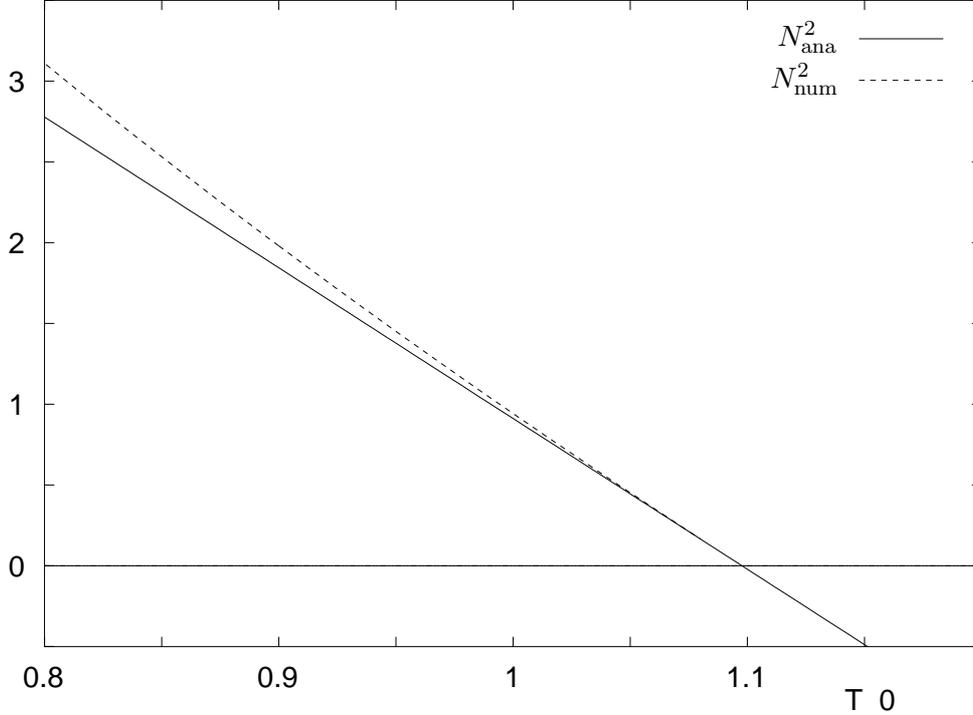


Abbildung 2.7.: Verzweigung in den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen für  $\langle D \rangle = 0$  und  $d = 8$  ( $\Rightarrow \overline{T}_0 \sim 1.09767$ ). Exakte Werte  $N_{\text{num}}^2$  vs. Näherungswerte  $N_{\text{ana}}^2$ .

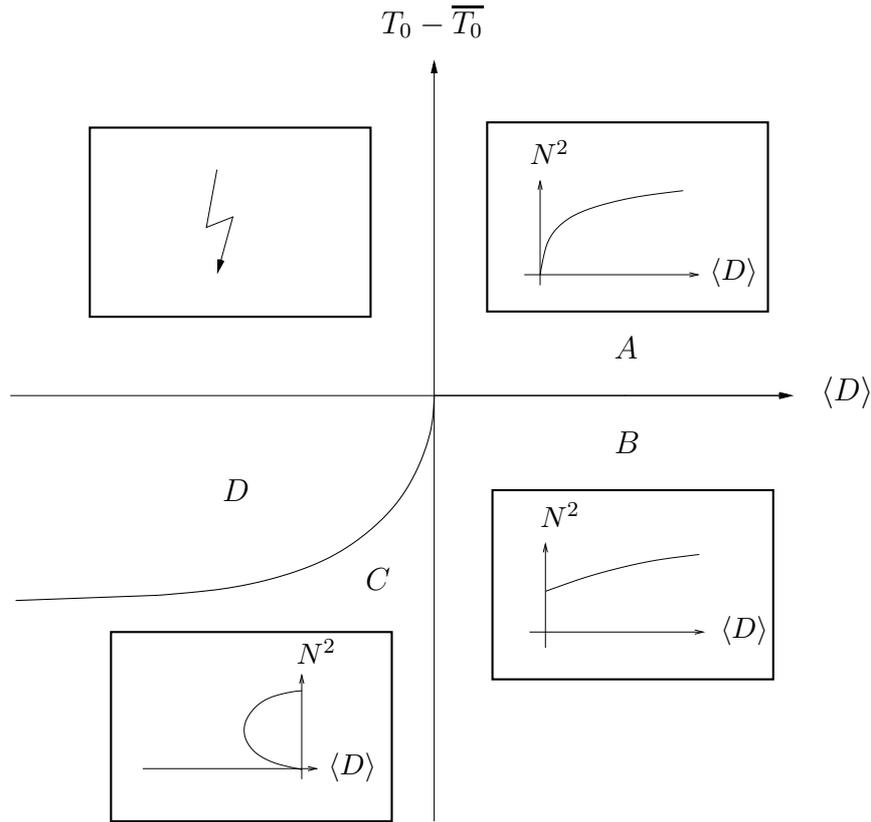
### Bemerkung 2.2.8.

Die Existenz von DM-Solitonen im Fall verschwindender mittlerer Dispersion wurde experimentell zuerst von Grigoryan et al. [19] gezeigt. Berntson et al. [3] haben numerisch die Existenz eines kritischen Wertes von  $y$  gezeigt. Offenbar spiegelt sich hier ebenfalls das Lösungsverhalten der DM-NLS in den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen wider.

### 2.2.3. Zusammenfassung

In Anlehnung an die üblichen Verzweigungsdiagramme für Kodimension 2 zeigt Diagramm 2.8 das Verhalten von  $N^2$  in Abhängigkeit der Parameter  $T_0 - \overline{T}_0$  und  $\langle D \rangle$  in der Umgebung von  $(0, 0)$ . Die  $(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T}_0)$ -Ebene wird dabei in 4 Gebiete aufgeteilt:

- $A := \{(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T}_0) | \langle D \rangle > 0, T_0 > \overline{T}_0\}$
- $B := \{(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T}_0) | \langle D \rangle \geq 0, T_0 < \overline{T}_0\}$
- $C := \{(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T}_0) | \langle D \rangle < 0, T_0^* < T_0 < \overline{T}_0\}$
- $D := \{(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T}_0) | \langle D \rangle \leq 0, T_0 < T_0^*\}$

Abbildung 2.8.: Verzweigungsdiagramm in der  $(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T_0})$ -Ebene.

Dabei ist  $\overline{T_0} = \sqrt{\frac{d}{2y}}$  abhängig vom lokalen Dispersionsparameter und  $T_0^* = \overline{T_0} - 2\sqrt{ac\langle D \rangle}$  zusätzlich von der gemittelten Dispersion.

In Gebiet  $A$  existiert genau eine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen; für diese gilt  $N^2(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T_0}) = \mathcal{O}(\langle D \rangle)$ . In Gebiet  $B$  gibt es ebenfalls genau eine Lösung, für die allerdings  $N^2(0, T_0 - \overline{T_0}) \neq 0$  gilt. Genau zwei Lösungen existieren in Gebiet  $C$ , nämlich  $N_1^2$  und  $N_2^2$  mit  $N_1^2 < N_2^2$ . Für diese gilt  $N_1^2(\langle D \rangle, T_0 - \overline{T_0}) = \mathcal{O}(\langle D \rangle)$  und  $N_2^2(0, T_0 - \overline{T_0}) \neq 0$ . Im Gebiet  $D$  gibt es hingegen gar keine Lösung.

Dabei zeigt Abbildung 2.8 das Lösungsverhalten der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  und  $T_0$ . Hier ist der Parameter  $T_0$  ein Ausdruck, der die Anfangspulsbreite beschreibt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir die einzelnen Gebiete anhand der zugehörigen Stärke  $y$  des Dispersionsprofils charakterisieren, da dies physikalisch sinnvoller ist. Hält man den lokalen Dispersionsparameter  $d$  fest, so gibt Abbildung 2.8 wegen  $y = d/(2T_0^2)$  weiterhin Aufschluss über das Lösungsverhalten der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen sowie die zugehörigen Skalen. Insbesondere erkennt man deren fundamental unterschiedliches Verhalten für  $T_0 > \overline{T_0}$  bzw.  $T_0 < \overline{T_0}$ .

### 3. Mittelung der DM-NLS nach Linsentransformation

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie die DM-NLS nach Linsentransformation gemittelt werden kann. Das zugrunde liegende Verfahren geht auf die Arbeit von Zharnitsky et al. [83] zurück. Allerdings ist in der DM-NLS nach Linsentransformation nicht klar, wie die ungestörte Gleichung lautet.

Die resultierende Gleichung nach Linsentransformation ist gegeben durch (2.4)

$$iQ_z(z, x) + \frac{D(z)}{T^2(z)} \left( Q_{xx}(z, x) - x^2 Q(z, x) \right) + \frac{N^2}{T(z)} \left( x^2 Q(z, x) + |Q(z, x)|^2 Q(z, x) \right) = 0.$$

Um diese Gleichung mitteln zu können, ist es von grundlegender Bedeutung, zu verstehen, wie sich die Skalen und charakteristischen Längen des Problems unter der Linsentransformation verändern. Dazu wird die Analyse der nichtlinearen *TM*-Gleichungen benötigt, die einerseits eine exakte Transformation liefern, andererseits die Dynamik des vollen Systems widerspiegeln.

Dabei unterscheidet sich das Verhalten in Abhängigkeit von den zugrunde liegenden Parameterkonstellationen. Die Frage, nach welchen Parametern man diese Bereiche unterscheidet, lässt sich kontrovers diskutieren. In diesem Kapitel wird dazu die Stärke des Dispersionsprofils  $y = d/(2T_0^2)$  benutzt, da dieser Weg mit dem bisher in der Literatur üblichen, in Kapitel 1 beschriebenen, Verfahren am konsistenten erscheint und für die Anwendung von Bedeutung ist.

Es sei bemerkt, dass die Transformation noch den künstlichen Parameter  $T_0$  enthält. Die Bedeutung der Ergebnisse des Mittelungsverfahrens für die Ursprungsgleichung (1.9) wird in Kapitel 6 diskutiert. Dort wird auch die Abhängigkeit vom Parameter  $T_0$  überwunden und durch den Parameter  $N^2$ , also durch die Energie des Eingangssignals, ersetzt. Dies geschieht erst dort, da aus der hier gewählten Darstellung die Skalen deutlicher hervorgehen.

In dieser Arbeit werden wir stets in Anlehnung an [83] ein Mittelungsverfahren erster Ordnung durchführen. Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist die Theorie weit entwickelt, vgl. [22, 65]; für partielle Differentialgleichungen hingegen sind noch viele Fragen offen [81]. Für die DM-NLS ist kürzlich von Pelinovsky und Zharnitsky [60] ein Mittelungsverfahren vorgeschlagen worden, dass auf Normalformtransformationen beruht. Es sei noch angemerkt, dass wir aufgrund der komplexen Struktur der Gleichung auf die Herleitung von Fehlerabschätzungen verzichten.

Im Verlauf dieses Kapitels wird sich herausstellen, dass in jeder Parameterkonstellation

die gemittelte Gleichung vom Typ

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0.$$

ist; lediglich der Wert, und damit das Vorzeichen von  $a$  und  $b$ , ändert sich. Die Werte von  $a$  und  $b$  lassen sich dabei meist nur mit numerischen Methoden berechnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit geschieht dies nicht hier, sondern ist Gegenstand von Kapitel 4.

Dabei wird sich zeigen, dass das quadratische Potential in gewissen, in der Praxis relevanten, Parameterbereichen anziehend ist, in anderen Bereichen hingegen abstoßend. Für  $\langle D \rangle > 0$  und nicht zu große Stärke des Dispersionsprofils gilt  $a > 0$  und  $b > 0$ . In diesem Fall ist eine eingehende Analyse der Gleichung möglich, welche in Kapitel 5 durchgeführt wird.

### 3.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$

Nach Durchführung des Mittelungsverfahrens wird sich herausstellen, dass das quadratische Potential in der Gleichung für sehr kleine Stärke des Dispersionsprofils keine Rolle spielt, mit wachsendem  $y$  aber stark an Bedeutung gewinnt und anziehend ist. Heuristisch steht dieses Ergebnis in Einklang mit den numerischen Ergebnissen und Simulationen, die die Gestalt des DM-Solitons in Abhängigkeit von  $y$  beschreiben. Mit wachsender Stärke des Dispersionsprofils ähnelt der Impuls nicht länger der bekannten Solitonenlösung der NLS, sondern erhält die in Kapitel 1 beschriebene Struktur des DM-Solitons. Zunächst betrachten wir den Fall sehr kleiner Stärke des Dispersionsprofils:

#### 3.1.1. Der Fall $y \ll \bar{y}$

Im Fall sehr kleiner Stärke des Dispersionsprofils gilt  $T_0 \gg \bar{T}_0$  und für den Parameter der Nichtlinearität die Beziehung (2.16). Ist die mittlere Dispersion gegeben durch  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$ , also abermals  $D(z; \epsilon) = D_{\text{loc}}(z) + \epsilon\alpha$ , so gilt:

$$N^2(\epsilon, T_0) = \epsilon \frac{\alpha}{T_0 F(y)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{mit } y = \frac{d}{2T_0^2} \quad \text{und} \quad F(y) = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Führen wir diese Formel in der DM-NLS nach Linsentransformation ein, so erhalten wir folgende Gleichung in Abhängigkeit von  $\epsilon$ :

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z) + \epsilon\alpha}{T^2(z; \epsilon)} (Q_{xx} - x^2Q) + \epsilon \left( \frac{\alpha/(T_0 F(y))}{T(z; \epsilon)} (x^2Q + |Q|^2Q) \right) = 0.$$

Um ein Mittelungsverfahren wie in [83] anwenden zu können, muss man Aufschluss über die ungestörte Version obiger Gleichung erhalten. Dies ist nicht so offensichtlich wie bei der DM-NLS, da nun auch  $T$  eine Abhängigkeit von  $\epsilon$  aufweist. Schicken wir  $\epsilon$  gegen 0, so folgt  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = T_{\text{lin}}$ , da  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N^2(\epsilon) = 0$ . Für  $\epsilon \rightarrow 0$  gehen also die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen in die linearen über. Demnach lautet die Gleichung (2.4) in nullter Ordnung

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)} (Q_{xx} - x^2Q) = 0 \quad \text{mit} \quad T_{\text{lin}}(0) = T_0. \quad (3.1)$$

Obige Gleichung ist der lineare harmonische Oszillator mit einem zusätzlichen  $z$ -abhängigen Faktor, also eine lineare Schrödingergleichung mit quadratischem Potential  $V(x) = x^2$ . Wie in [7] definieren wir den Operator  $A$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \{u \in H^1(\mathbb{R}); Vu^2 \in L^1(\mathbb{R}) \text{ und } u_{xx} - Vu \in L^2(\mathbb{R})\} \\ Au &= u_{xx} - Vu \text{ für } u \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass  $iA$  auf dem Hilbertraum  $(\mathcal{D}(A))'$  eine Gruppe  $U(z)$  generiert [7]; diese ist in der Literatur eingehend untersucht worden. Man schreibt oft  $U(z) = \exp(iAz)$  [73]. Einige wichtige Ergebnisse über  $U(z)$  findet man auch bei Oh [56]:

- $U(z)$  ist ein beschränkter Operator von  $L^p(\mathbb{R})$  nach  $L^q(\mathbb{R})$ , wobei  $1/p + 1/q = 1$ .
- $U(z)$  ist ein unitärer Operator in  $L^2(\mathbb{R})$ , also gilt  $\|U(z)v\|_2 = \|v\|_2$ .
- Für  $v \in \mathcal{D}(A)$  gilt der Erhaltungssatz  $\|(U(z)v)_x\|_2 + \|xU(z)v\|_2 = \|v_x\|_2 + \|xv\|_2$ .

Mit Hilfe von  $U(z)$  können wir nun den Lösungsoperator für (3.1) angeben. Sei dazu die akkumulierte, effektive Dispersion als

$$R^{\text{eff}}(z) := \int_0^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{T_{\text{lin}}^2(z')} dz' \quad (3.2)$$

definiert. Dann ist

$$S(z) := U(R^{\text{eff}}(z)) \quad (3.3)$$

der gesuchte Lösungsoperator der linearen Gleichung. Eine Adaption des Verfahrens aus [83] macht nur Sinn, falls  $S(z)$  periodisch ist. Dies ist Gegenstand von

**Lemma 3.1.1.**

*Der Operator  $S(z)$  ist 1-periodisch.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus der Tatsache

$$\left\langle \frac{D_{\text{loc}}}{T_{\text{lin}}^2} \right\rangle = 0, \quad (3.4)$$

welche im Anhang bewiesen wird. □

Nun sind wir in der Lage, eine dem Vorgehen von Zharnitsky et al. [83] entsprechende Transformation durchzuführen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir die erste Ordnung in  $\epsilon$  nicht explizit auf, sondern splitten Gleichung (2.4) wie folgt:

$$\begin{aligned} iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)}(Q_{xx} - x^2Q) \\ + \left( \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)} \right) (Q_{xx} - x^2Q) + \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} (x^2Q + |Q|^2Q) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit Hilfe der kanonischen Transformation

$$Q(z, x) = S(z)v(z, x), \quad (3.6)$$

die auch als van der Pol-Transformation bekannt ist, lassen sich nun die schnellen, durch  $D_{\text{loc}}/T_{\text{lin}}^2$  hervorgerufenen, Variationen wie in [83] heraustransformieren. Nach Durchführung der Transformation (3.6) und Anwendung von  $S^{-1}(z) = U(-R^{\text{eff}}(z))$  folgt

$$\begin{aligned} iv_z(z, x) + \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)} \right) S^{-1}(z) \left( (S(z)v(z, x))_{xx} - x^2 S(z)v(z, x) \right) \\ + S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} (x^2 S(z)v(z, x) + |S(z)v|^2 S(z)v(z, x)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Tatsache, dass eine Halbgruppe und ihr Erzeuger kommutieren [73]:

$$\begin{aligned} S^{-1}(z) \left( (S(z)v)_{xx} - VS(z)v \right) &= S^{-1}(z) (AS(z)v) = U(-R^{\text{eff}}(z)) (AU(R^{\text{eff}}(z))v) \\ &= AU(-R^{\text{eff}}(z))U(R^{\text{eff}}(z))v = AU(0)v = Av = v_{xx} - Vv. \end{aligned}$$

Als Gleichung für  $v$  ergibt sich dann

$$iv_z + \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)} \right) (v_{xx} - x^2 v) + S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} (x^2 S(z)v + |S(z)v|^2 S(z)v) \right) = 0. \quad (3.7)$$

Man beachte, dass wegen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z)} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} = 0$$

die Faktoren  $D/T^2 - D_{\text{loc}}/T_{\text{lin}}^2$  und  $N^2/T$  jetzt beide von der Ordnung  $\epsilon$  sind. In der transformierten Gleichung ist  $v$  formal langsam variierend. Daher macht ein Mittelungsverfahren für Gleichung (3.7) nun Sinn. Formales Mitteln über die Periode liefert wegen  $\langle D_{\text{loc}}/T_{\text{lin}}^2 \rangle = 0$  die Gleichung

$$iu_z + \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} \right\rangle (u_{xx} - x^2 u) + \int_0^1 S^{-1}(z') \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z'; \epsilon)} (x^2 S(z')u + |S(z')u|^2 S(z')u) \right) dz' = 0. \quad (3.8)$$

Dabei sollte  $u$  als Lösung der gemittelten Gleichung nahe an der Lösung  $v$  der transformierten Gleichung liegen. An dieser Stelle verzichten wir auf die sehr technische Rechtfertigung des Mittelungsverfahrens und verweisen auf [83].

Selbstverständlich ist das Vorzeichen des quadratischen Potentials von zentraler Bedeutung. In der Literatur wurde bisher behauptet, das Potential sei abstoßend (vgl. Bemerkung 2.1.2). Um über das Vorzeichen des quadratischen Potentials Aufschluss zu erhalten, müssen wir den Term  $S^{-1}(z')(x^2 S(z')u/T(z'))$  vereinfachen. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas:

**Lemma 3.1.2.**

Die folgende Beziehung gilt für  $u \in X := \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx < \infty\}$ :

$$\begin{aligned} & S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} x^2 S(z) u \right) \\ &= \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \left( \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z; \epsilon)) - 1}{2} u_{xx} + \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z; \epsilon)) + 1}{2} x^2 u + i \frac{\sin(4R^{\text{eff}}(z; \epsilon))}{2} (u + 2xu_x) \right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe Anhang.  $\square$

Setzen wir dies nun in Gleichung (3.8) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & iu_z + \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \frac{1 - \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle u_{xx} + \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \frac{1 + \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle x^2 u \\ & + i \frac{N^2(\epsilon)}{2} \left\langle \frac{\sin(4R^{\text{eff}}(z))}{T(z; \epsilon)} \right\rangle (u + 2xu_x) + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0. \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick erscheint die Gleichung komplizierter, da diese einen zusätzlichen Term  $xu_x$  enthält. Es gilt jedoch

**Lemma 3.1.3.**

Die Funktion  $\sin(4R^{\text{eff}})$  ist punktsymmetrisch zu  $z = 1/2$ . Daher folgt  $\langle \sin(4R^{\text{eff}})/T \rangle = 0$ .

*Beweis.* Es gilt  $T(1/2 - z) = T(1/2 + z)$  und  $D_{\text{loc}}(1/2 - z) = D_{\text{loc}}(1/2 + z)$ . Zusammen mit  $R^{\text{eff}}(1/2) = 0$  folgt dann  $R^{\text{eff}}(1/2 - z) = -R^{\text{eff}}(1/2 + z)$ .  $\square$

Damit mittelt sich also der zusätzliche Term heraus. Die gemittelte DM-NLS nach Lin-sentransformation und Transformation (3.6) lautet dann

$$iu_z + a(\epsilon)u_{xx} - b(\epsilon)x^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0, \quad (3.9)$$

wobei

$$\begin{aligned} a(\epsilon) &:= \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \frac{1 - \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle \\ b(\epsilon) &:= \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} - \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \frac{1 + \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir sehen, dass die gemittelte Gleichung in allen Parameterbereichen vom obigen Typ ist. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass  $a$  und  $b$  teils leicht modifiziert definiert werden. Die Gleichung (3.9) besitzt ein Energiefunktional ähnlich dem der kubischem NLS mit quadratischem Potential:

$$H = a \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx + b \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx - \int_0^1 \frac{N^2}{2T(z)} \int_{\mathbb{R}} |S(z)u|^4 dx dz. \quad (3.10)$$

Man erkennt daran die Bedeutung des Vorzeichens von  $a$  und  $b$  für die Art und Existenz der Lösung. Auf den ersten Blick würde man Grundzustände erwarten für  $a > 0$  und  $b \geq 0$ .

**Bemerkung 3.1.4.**

Wie bereits in Bemerkung 2.1.2 erwähnt, galt bisher die Gleichung

$$iu_z + \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle u_{xx} - \left( \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle - \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle \right) x^2 u + \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle |u|^2 u = 0$$

als der korrekte Ausdruck nach Linsentransformation und Mittelung.

In dem in diesem Abschnitt betrachteten Fall sehr kleiner Stärke des Dispersionsprofils lassen sich Näherungsformeln für  $a$  und  $b$  herleiten:

**Lemma 3.1.5.**

Für  $y \ll \bar{y}$  gilt  $a(\epsilon) = \epsilon\alpha/T_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $b(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

*Beweis.* Mit Hilfe einer Störungsrechnung wurde von Schäfer in [67] (vgl. auch [75]) gezeigt, dass in erster Ordnung

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon)} \right\rangle &= \frac{\epsilon\alpha}{T_0^2} - \frac{N^2(\epsilon)}{T_0} \left( \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - y^{-1} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \text{und } \left\langle \frac{N^2(\epsilon)}{T(z; \epsilon)} \right\rangle &= \frac{N^2(\epsilon)}{T_0} y^{-1} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

gilt. Analog folgt nach längeren, aber einfachen Rechnungen (siehe Anhang),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{N^2(\epsilon) \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{T(z; \epsilon)} \right\rangle &= \left\langle \frac{N^2(\epsilon) \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{T_{\text{lin}}(z)} \right\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{N^2(\epsilon)}{T_0} \left( \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - y^{-1} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.11) \\ &= \frac{N^2(\epsilon)}{T_0} F(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Damit haben wir also Näherungsformeln für  $a$  und  $b$  gefunden. Es gilt

$$\begin{aligned} a(\epsilon) &= \frac{\epsilon\alpha}{T_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ b(\epsilon) &= \frac{\epsilon\alpha}{T_0^2} - \frac{N^2(\epsilon)}{T_0} F(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

In dem hier betrachteten Fall  $y \ll \bar{y}$  gilt  $N^2(\epsilon) = \epsilon\alpha/(T_0 F(y)) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  nach (2.16), woraus  $b(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  folgt, was zu zeigen war.  $\square$

Im Bereich kleiner Stärke des Dispersionsprofils ist also das quadratische Potential von höherer Ordnung. Das Ergebnis fassen wir in folgendem Satz zusammen:

**Satz 3.1.6.**

Für  $y \ll \bar{y}$  und  $\langle D \rangle > 0$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung

$$iu_z + au_{xx} + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0.$$

Dabei ist  $a = \langle D \rangle / T_0^2 > 0$ .

### 3.1.2. Der Fall $y < \bar{y}$

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem Fall mittlerer Werte der Stärke des Dispersionsprofils  $y < \bar{y}$ , also dem Fall  $T_0 > \bar{T}_0$ , zu. Es wird sich herausstellen, dass das quadratische Potential in der gemittelten Gleichung in diesem Parameterbereich anziehend ist.

Nach den Überlegungen des letzten Kapitels gilt näherungsweise (2.19)

$$N^2(\delta, \epsilon) \sim -\frac{b\delta}{2a} + \frac{\sqrt{b^2\delta^2 - 4ac\epsilon\alpha}}{2a} = \mathcal{O}(\epsilon) \text{ für } \delta > 0,$$

wobei wir  $T_0 - \bar{T}_0 = \delta$  und  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$  gesetzt haben. Dabei haben wir gesehen, dass sich in Abhängigkeit von  $\epsilon$  und  $\delta$  das Lösungsverhalten der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen ändert. Die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation lautet, wenn man die Abhängigkeit von  $\delta$  berücksichtigt,

$$\begin{aligned} iQ_z(z, x) + \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} \left( Q_{xx}(z, x) - x^2 Q(z, x) \right) \\ + \frac{N^2(\delta, \epsilon)}{T(z; \epsilon, \delta)} \left( x^2 Q(z, x) + |Q(z, x)|^2 Q(z, x) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei  $T(z; \epsilon, \delta)$  die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen mit  $D = D_{\text{loc}} + \epsilon\alpha$  und  $T(0) = T_0 = \bar{T}_0 + \delta$  erfüllt. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt besitzen die Näherungsformeln für die Mittelwerte aus [66] hier keine Gültigkeit, da dort nur der Fall  $y \ll \bar{y}$  betrachtet wurde. Daher müssen wir uns im gesamten Abschnitt mit numerischen Berechnungen der jeweiligen Werte von  $a$  und  $b$  zufrieden geben; dies wird in Kapitel 4 durchgeführt.

Um eine ähnliche Transformation wie im letzten Abschnitt durchführen zu können, ist es notwendig, die zugrunde liegenden Skalen zu untersuchen. Für  $\delta > 0$  gilt  $N^2(0, \delta) = 0$ . Demnach lässt sich formal das gleiche Verfahren wie im vorigen Abschnitt anwenden: wir schicken in der DM-NLS nach Linsentransformation (3.12) den Kleinheitsparameter  $\epsilon$  bei festem  $\delta > 0$  gegen 0. Wegen  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon, \delta) = T_{\text{lin}}(\delta)$  lautet die Gleichung (3.12) in nullter Ordnung

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z; \delta)} (Q_{xx} - x^2 Q) = 0 \text{ mit } T_{\text{lin}}(0; \delta) = T_0 = \bar{T}_0 + \delta. \quad (3.13)$$

Analog zum Verfahren im letzten Abschnitt schreiben wir daher

$$\begin{aligned} iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z; \delta)} (Q_{xx} - x^2 Q) \\ + \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z; \delta)} \right) (Q_{xx} - x^2 Q) + \frac{N^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} (x^2 Q + |Q|^2 Q) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$Q(z, x) = S(z; \delta)v(z, x), \quad (3.15)$$

wobei  $S(z; \delta)$  der zu (3.13) gehörige Lösungsoperator sei, folgt dann als Gleichung für  $v$

$$\begin{aligned} iv_z + \left( \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} - \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T_{\text{lin}}^2(z; \delta)} \right) (v_{xx} - x^2 v) \\ + S^{-1}(z) \left( \frac{N^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} (x^2 S(z; \delta)v + |S(z; \delta)v|^2 S(z; \delta)v) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Obige Gleichung kann nun genau wie im letzten Abschnitt gemittelt werden. Es ergibt sich

$$iu_z + a(\epsilon, \delta)u_{xx} - b(\epsilon, \delta)x^2u + \int_0^1 S^{-1}(z; \delta) \left( \frac{N^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} |S(z; \delta)u|^2 S(z; \delta)u \right) dz = 0, \quad (3.17)$$

wobei

$$a(\epsilon, \delta) := \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} - \frac{N^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} \frac{1 - \cos(4R^{\text{eff}}(z; \delta))}{2} \right\rangle$$

und

$$b(\epsilon, \delta) := \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} - \frac{N^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} \frac{1 + \cos(4R^{\text{eff}}(z; \delta))}{2} \right\rangle.$$

Wie bereits erwähnt, werden die analytischen Formeln im Bereich  $\delta \sim 0$  singulär und liefern sehr schlechte Näherungen.

### Bemerkung 3.1.7.

*Um dieses Problem zu umgehen, schlagen Pelinovsky und Zharnitsky in [60] einen geeigneten Parameterraum vor, in dem die Näherungsformeln erster Ordnung eine gute Approximation liefern. Allerdings werden die Untersuchungen nur für reduzierte Modelle wie die Approximation des Pulses durch einen Gauß-Kern vorgenommen, und sind daher in dieser Form für das hier dargestellte Verfahren nicht anwendbar.*

Da die analytischen Formeln nicht weiterhelfen, müssen wir also  $a$  und  $b$  numerisch berechnen. Dies ist Gegenstand von Kapitel 4, in dem sich herausstellen wird, dass stets  $a(\epsilon, \delta) > 0$  und  $b(\epsilon, \delta) > 0$  gilt. In der in diesem Abschnitt untersuchten Parameterkonstellation spielt das quadratische Potential eine wichtige Rolle. Im Gegensatz zu der bisher in der Literatur vertretenen Meinung, dass das Potential in der gemittelten Gleichung abstoßend ist, zeigt das hier vorgestellte Mittelungsverfahren das Gegenteil.

### Bemerkung 3.1.8.

*Die bisher in der Literatur im Zusammenhang mit der Linsentransformation angestellten Untersuchungen fanden ausnahmslos in dem Parameterbereich  $y < \bar{y}$  statt. Insofern ist das hier hergeleitete Ergebnis von hoher Relevanz und liefert eine echte Verallgemeinerung der bekannten Ergebnisse.*

Das Ergebnis des Mittelungsverfahrens fassen wir in folgendem Satz zusammen, der das Hauptresultat dieses Kapitels ist:

### Satz 3.1.9.

*Für  $y < \bar{y}$  und  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$  mit  $\alpha > 0$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung*

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0 \quad (3.18)$$

*mit  $a > 0$  und  $b > 0$ . Dabei sind  $a$ ,  $b$  und  $N^2$  von der Ordnung  $\epsilon$ .*

Der lineare Teil von Gleichung (3.18) ist der wohlbekannte harmonische Oszillator mit einer kubischen, nicht-lokalen Nichtlinearität, die der aus [83] ähnelt. In Kapitel 5 werden wir das Lösungsverhalten der Gleichung untersuchen, die Existenz von Grundzuständen des zugehörigen Energiefunktionals beweisen sowie das Verzweigungsverhalten untersuchen. Dabei spielt das quadratische Potential vom mathematischen Gesichtspunkt aus eine entscheidende Rolle; mit dessen Hilfe wird es gelingen, viele aus Simulationen bekannte Eigenschaften des DM-Solitons analytisch nachzuweisen.

**Bemerkung 3.1.10.**

*Satz 3.1.9 enthält den Fall  $y \ll \bar{y}$  als Grenzfall: Für  $y \rightarrow 0$  verschwindet auch  $b$ .*

**3.1.3. Der Fall  $y > \bar{y}$**

Im Fall großer Stärke des Dispersionsprofils, also  $T_0 < \bar{T}_0$ , der in diesem Abschnitt betrachtet wird, findet das bisher verwendete Mittelungsverfahren keine Anwendung mehr. Wie aus der Analyse der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen bekannt ist, unterscheiden sich die Skalen erheblich von den bisher betrachteten Fällen. Daher muss das Mittelungsverfahren modifiziert werden.

Für  $\delta = T_0 - \bar{T}_0 \leq 0$  gilt näherungsweise

$$N_2^2(\langle D \rangle, \delta) = -\frac{b\delta}{2a} + \frac{\sqrt{b^2\delta^2 - 4ac\langle D \rangle}}{2a} \sim -4.665\delta + \sqrt{21.766\delta^2 + 19.404\langle D \rangle}.$$

Schickt man  $\langle D \rangle \rightarrow 0$ , so folgt  $N_2^2(0, \delta) \sim -9.33 \delta > 0$ . In dieser Situation gilt also im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen nicht mehr  $N^2(\langle D \rangle, \delta) = \mathcal{O}(\langle D \rangle)$ , somit versagt auch das bisher verwendete Verfahren. Um dieses Problem zu umgehen, bietet es sich an, nicht nur wie bisher die mittlere Dispersion  $\langle D \rangle$  und  $N^2$  als Störung anzusehen, sondern auch  $\delta = T_0 - \bar{T}_0$ . Formal handelt es sich dann um zwei verschiedene Skalen und es stellt sich die Frage nach einem geeignetem Mittelungsverfahren. Naiv würde man das ungestörte Problem wie folgt formulieren:

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}}{T_{\text{lin}}^2}(Q_{xx} - x^2Q) = 0 \text{ mit } T_{\text{lin}}(0) = \bar{T}_0. \quad (3.19)$$

Im Folgenden werden wir darstellen, dass sich diese Gleichung auch auf einem formalen Weg herleiten lässt. Wie bereits bemerkt, sind die Skalen im Fall  $y > \bar{y}$  fundamental anders. Setzen wir daher  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $\langle D \rangle = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Dann ist auch  $\delta = \mathcal{O}(\epsilon)$ , wie die folgende Argumentation zeigt: Aus der bekannten Näherungsformel

$$N_2^2 = -\frac{b\delta}{2a} + \frac{\sqrt{b^2\delta^2 - 4ac\langle D \rangle}}{2a}$$

folgt wegen  $\delta < 0$ :

$$T_0 = \bar{T}_0 - \frac{b^2 \langle D \rangle}{2a N^2} + \frac{N^2}{2a},$$

und im hier betrachteten Fall ist

$$\frac{\langle D \rangle}{N^2} = \mathcal{O}(\epsilon) \text{ und } N^2 = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Also folgt für  $\epsilon \rightarrow 0$ , dass  $\delta \rightarrow 0$  und damit  $T_0$  sich an den Wert  $\overline{T_0}$  annähert (vgl. dazu auch die numerischen Untersuchungen im nächsten Kapitel). Folglich ist also das auf diesem formalen Weg hergeleitete ungestörte Problem genau (3.19).

Durch diese Skalierung ist also die Gleichung in nullter Ordnung wieder der harmonische Oszillator. Mit Hilfe des zugehörigen Lösungsoperators lassen sich die schnellen Oszillationen heraustrennen, und die resultierende Gleichung kann formal gemittelt werden.

**Bemerkung 3.1.11.**

*Streng genommen besitzt die Gleichung Terme der Ordnung  $\epsilon$  und  $\epsilon^2$ , was ein Mittelungsverfahren höherer Ordnung nahe legen würde. Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist dieses beispielsweise bei Sanders und Verhulst [65] dargestellt, für das hier vorliegende System könnte man stattdessen das von Pelinovsky und Zharnitsky [60] vorgeschlagene Verfahren verwenden. Dabei hat sich für das in dieser Arbeit untersuchte symmetrische Dispersionsprofil gezeigt, dass die gemittelte Gleichung formal sogar bis zur Ordnung  $\epsilon^2$  durch das Mittelungsverfahren erster Ordnung gegeben ist. Insofern ist es durchaus sinnvoll, die Terme zweiter Ordnung miteinzubeziehen und die Gleichung formal zu mitteln.*

Es ergibt sich durch ein formales Mittelungsverfahren erster Ordnung die Gleichung

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N_2^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0,$$

wobei

$$a, b := \left\langle \frac{D(z; \epsilon)}{T^2(z; \epsilon, \delta)} - \frac{N_2^2(\epsilon, \delta)}{T(z; \epsilon, \delta)} \frac{1 \mp \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle$$

und  $R^{\text{eff}}(z) := \int_0^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{T_{\text{lin}}^2(z')} dz'$  mit  $T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0}$

leicht modifiziert definiert sind. Die numerische Berechnung von  $a$  und  $b$  liefert nun  $a > 0$  sowie die Existenz eines kritischen Parameters  $\tilde{T}_0$ , wo  $b$  sein Vorzeichen wechselt. Allerdings sind  $a$  und  $b$  von der Ordnung der gemittelten Dispersion, also Effekte höherer Ordnung. Mit  $\tilde{y}_+ = d/(2\tilde{T}_0^2)$  gilt dann

**Satz 3.1.12.**

*Für  $y > \bar{y}$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $\alpha > 0$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung*

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0$$

mit  $a > 0$  und

- $b > 0$  für  $y < \tilde{y}_+$
- $b < 0$  für  $y > \tilde{y}_+$

Dabei sind  $a, b = \mathcal{O}(\langle D \rangle) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

Demzufolge existiert also eine kritische Stärke des Dispersionsprofils, für die das Potential von anziehend zu abstoßend wechselt.

**Bemerkung 3.1.13.**

*Im Sinne des Mittelungsverfahrens lässt sich formal die Existenz des DM-Solitons für große Stärken des Dispersionsprofils beweisen. Über diesen Fall ist in der Literatur bisher nichts bekannt, er ist jedoch von großem praktischen Interesse.*

## 3.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall negativer mittlerer Dispersion. Für mittlere Stärken des Dispersionsprofils existieren bekanntlich jeweils zwei Lösungen. Dabei lässt sich für die Lösung mit der kleinen Energie das ursprüngliche Mittelungsverfahren durchführen. Für diejenige mit der höheren Energie ist das Verfahren nicht länger sinnvoll; in diesem Fall findet das modifizierte Mittelungsverfahren Anwendung.

### 3.2.1. Der Fall $y \gg \bar{y}$

Im Bereich sehr großer Stärke des Dispersionsprofils, also  $T_0 \ll \bar{T}_0$ , liefert die lineare Näherungsformel (2.16) eine gute Approximation. Mit  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha < 0$  gilt

$$N^2(\epsilon) = \epsilon \frac{\alpha}{T_0 F(y)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \text{ mit } y = \frac{d}{2T_0^2} \text{ und } F(y) = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

In diesem Parameterbereich gelten auch die Näherungsformeln für  $a(\epsilon)$  und  $b(\epsilon)$  aus Lemma 3.1.5, also

$$a(\epsilon) = \epsilon\alpha/T_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \text{ und } b(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dabei ist im Unterschied zum Fall positiver mittlerer Dispersion hier  $a(\epsilon) < 0$ . Führt man nun ein analoges Verfahren zu dem in Kapitel 3 durch, so ergibt sich folgendes Ergebnis:

**Satz 3.2.1.**

*Für  $y \gg \bar{y}$  und  $\langle D \rangle < 0$  lautet die beschreibende Gleichung für die Lösung kleinerer Energie nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung*

$$iu_z + au_{xx} + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N_1^2}{2T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0 \quad (3.20)$$

mit  $a = \langle D \rangle / T_0^2 < 0$ .

Formal spielt das quadratische Potential also in diesem Parameterbereich keine Rolle; der Typ der DM-NLS nach Linsentransformation und Mittelung ist derselbe wie in der von Zharnitsky et al. [83] untersuchten Gleichung.

**Bemerkung 3.2.2.**

In vielen Arbeiten (c.f. [75, 77]) wird behauptet, dass der Koeffizient  $a$  auch für negative mittlere Dispersion positiv ist und daher die Hoffnung besteht, die Existenz von Grundzuständen beweisen zu können. Dies bezieht sich allerdings auf die naiv gemittelte Gleichung (vgl. Bemerkung 2.1.2), in der  $a = \langle D/T^2 \rangle$  gilt. Ein korrektes Mittelungsverfahren liefert aber, wie in diesem Abschnitt gezeigt, eine Gleichung vom Typ der NLS mit negativer mittlerer Dispersion.

**3.2.2. Der Fall  $y > \bar{y}$** 

Der Bereich mittlerer Stärke des Dispersionsprofils korrespondiert zu dem Bereich, in dem  $T_0 < \bar{T}_0$  gilt. Nach Korollar 2.2.5 existieren nur Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen falls  $T_0 < T_0^*$  ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so existieren stets zwei Lösungen  $N_1^2$  und  $N_2^2$  mit  $N_1^2 < N_2^2$ . Es sei  $y^*$  die zu  $T_0^*$  gehörige Stärke des Dispersionsprofils. Wir betrachten den Fall  $y > y^*$  und bemerken, dass  $T_0^*$  und damit ebenfalls  $y^*$  von  $\langle D \rangle$  abhängen.

**Unterer Ast**

In diesem Abschnitt betrachten wir den unteren Ast von Lösungen, also diejenigen mit der kleineren Energie  $N_1^2$ . Dabei wird sich herausstellen, dass das gleiche Verfahren wie im Fall positiver mittlerer Dispersion und  $T_0 > \bar{T}_0$  anwendbar ist.

Für den Parameter  $N_1^2$  gilt in dieser Situation  $N_1^2(\epsilon, \delta) = \mathcal{O}(\epsilon)$ , jedoch verlieren für kleine Werte von  $\delta$  die analytischen Näherungsformeln für  $a(\epsilon, \delta)$  und  $b(\epsilon, \delta)$  ihre Gültigkeit, so dass wir uns wieder mit numerischen Berechnungen begnügen müssen. Diese liefern, dass  $a$  negativ und  $b$  positiv ist. Damit gilt dann

**Satz 3.2.3.**

Für  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$  mit  $\alpha < 0$  und  $y > y^* = y^*(\langle D \rangle)$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N_1^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0 \quad (3.21)$$

mit  $a < 0$  und  $b > 0$ . Dabei sind  $a$ ,  $b$  und  $N^2$  von der Ordnung  $\epsilon$

In der Modellgleichung (3.21) besitzt der lineare Teil ein abstoßendes harmonisches Potential. Die Nichtlinearität ist ebenfalls abstoßend bzw. defokussierend. Es sei noch bemerkt, dass der Fall  $y \gg \bar{y}$  des letzten Abschnitts auch hier als Grenzfall interpretiert werden kann, da  $b$  mit fallendem  $T_0$ , also steigendem  $y$ , gegen Null läuft.

**Bemerkung 3.2.4.**

Experimentelle und numerische Untersuchungen haben die Vermutung nahe gelegt, dass DM-Solitonen auch im Bereich negativer mittlerer Dispersion existieren. Dabei sind die Lösungen mit niedrigerer Energie stabil [59]. Inwieweit das quadratische Potential in (3.21) hilft, ein solches Verhalten analytisch zu zeigen ist nicht klar; die bisherigen Stabilitätsuntersuchungen haben jeweils reduzierte Modelle verwendet.

### Oberer Ast

Der zu den Lösungen größerer Energie korrespondierende Ast existiert bekanntlich für  $y > y^*$ . Da in diesem Fall  $N_2^2$  für  $\langle D \rangle \rightarrow 0$  nicht mehr verschwindet, also von höherer Ordnung ist, findet hier das modifizierte Verfahren Anwendung. Dazu wird  $N_2^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  gesetzt. Auch hier läuft  $T_0$  bei gegebenen Werten von  $\alpha$  und  $C$  gegen  $\overline{T_0}$ . Im ungestörten Problem wird daher  $T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0}$  gesetzt.

Die numerische Berechnung von  $a$  und  $b$  liefert nun  $b < 0$  sowie die Existenz eines kritischen Parameters  $\widetilde{T_0}$ , an dem  $a$  sein Vorzeichen wechselt. Allerdings sind  $a$  und  $b$  von der Ordnung der gemittelten Dispersion, also Effekte höherer Ordnung.

Mit  $\widetilde{y}_- = d/(2\widetilde{T_0}^2)$  gilt dann

#### Satz 3.2.5.

Für  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $\alpha < 0$  und  $y > y^* = y^*(\langle D \rangle)$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N_2^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0$$

mit  $b < 0$  und

- $a < 0$  für  $y < \widetilde{y}_-$
- $a > 0$  für  $y > \widetilde{y}_-$

Dabei sind  $a, b = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

Für  $y < \widetilde{y}_-$  ist der lineare Teil der Gleichung also wieder der harmonische Oszillator, allerdings ist die Nichtlinearität hier abstoßend. Dies hat zur Folge, dass die zugehörigen Lösungen instabil sind.

### 3.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$

Im Fall verschwindender mittlerer Dispersion existieren periodische Lösungen der nicht-linearen  $TM$ -Gleichungen nur für  $T_0 < \overline{T_0}$  bzw.  $y > \overline{y}$ . In diesem Fall gilt für den Parameter  $N^2$  näherungsweise die Beziehung (2.20), also  $N^2(\delta) \sim -9.33 (T_0 - \overline{T_0}) = -9.33 \delta$ . In den bisherigen Betrachtungen war der Kleinheitsparameter stets  $\langle D \rangle$ , dieser existiert in der DM-NLS nach Linsentransformation für verschwindende mittlere Dispersion nicht mehr:

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}(z)}{T^2(z; \delta)} (Q_{xx} - x^2 Q) + \frac{N^2(\delta)}{T(z; \delta)} (x^2 Q + |Q|^2 Q) = 0.$$

Es gibt nun zwei verschiedene Zugänge zu dem Problem:

Einerseits ist der Parameter  $N^2$  der einzige Kleinheitsparameter in der transformierten Gleichung. Setzen wir also  $N^2 = \epsilon C$  und bestimmen den Parameter  $T_0$  derart, dass die

zugehörige Lösung periodisch wird. Für  $\epsilon \rightarrow 0$  läuft dann  $T_0$  gegen  $\overline{T_0}$ . Das ungestörte Problem lautet also

$$iQ_z + \frac{D_{\text{loc}}}{T_{\text{lin}}^2}(Q_{xx} - x^2Q) = 0 \text{ mit } T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0}.$$

In Analogie zu dem modifizierten Verfahren wird also in diesem Fall der Anfangswert von  $T_{\text{lin}}$  als  $\overline{T_0}$  festgelegt. Formal können wir nun wieder die DM-NLS nach Linsentransformation in ungestörten Anteil und Effekte höherer Ordnung aufspalten und mitteln. Um Aufschluss über das Vorzeichen von  $a$  und  $b$  zu erhalten, sind wir wieder auf numerische Untersuchungen angewiesen. Diese zeigen, dass  $a$  positiv und  $b$  negativ ist, allerdings sind beide von höherer Ordnung.

Andererseits lässt sich der Fall verschwindender mittlerer Dispersion als stetiger Übergang zwischen positiver und negativer mittlerer Dispersion auffassen. Für  $y > \overline{y}$  sind die richtigen Skalen als  $N^2 = \epsilon$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2\alpha$  gefunden worden. Die Untersuchungen in Kapitel 4 zeigen, dass in diesem Bereich für  $a$  und  $b$  die folgenden Näherungsformeln gelten:

$$\begin{aligned} a &= C_1\alpha\epsilon^2 - C_2\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \text{mit } C_1, C_2 > 0 \\ b &= -C_3\alpha\epsilon^2 + C_4\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \text{mit } C_3, C_4 > 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für  $\alpha \rightarrow 0$  die Tatsache, dass  $a$  und  $b$  von der Ordnung  $\epsilon^3$  sind; dies wird durch die numerischen Untersuchungen im nächsten Abschnitt bestätigt.

**Satz 3.3.1.**

*Für  $\langle D \rangle = 0$  lautet die beschreibende Gleichung nach Linsentransformation, Transformation (3.6) und Mittelung*

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0.$$

*mit  $a > 0$  und  $b < 0$ . Dabei sind  $a, b = \mathcal{O}(\epsilon^3)$  und  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$ .*

Für verschwindende mittlere Dispersion sind  $a$  und  $b$  also von der Ordnung  $\epsilon^3$ , was eine Einbeziehung der Terme sehr fragwürdig erscheinen lässt. Verwendet man das Verfahren von Pelinovsky und Zharnitsky [60], so treten in dieser Ordnung zusätzlich Korrekturterme auf, die von der Nichtlinearität stammen. Insofern liefert

$$iu_z + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0$$

für verschwindende mittlere Dispersion ein gutes Modell, welches formal der von Kunze [40] untersuchten Situation entspricht.

## 4. Numerische Berechnung von $a$ und $b$

In diesem Kapitel berechnen wir  $a$  und  $b$  mit Hilfe numerischer Verfahren. Dabei wird in einem ersten Schritt mit einem Bisektionsverfahren zu gegebenem Wert von  $T_0$  der Parameter  $N^2$  so bestimmt, dass die zugehörige Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen periodisch ist.<sup>1</sup> In einem zweiten Schritt werden dann die benötigten Mittelwerte berechnet. Bei den Berechnungen haben wir den Wert der lokalen Dispersion als  $d = 8$  gewählt, was  $\overline{T_0} \sim 1.09767$  zur Folge hat.

### 4.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$

#### 4.1.1. Der Fall $y < \overline{y}$

In Abbildung 4.1 sind  $a$  und  $b$  für einen festen Wert von  $\langle D \rangle$  als Funktionen von  $T_0$  aufgetragen. Im Bereich großer Werte von  $T_0$  gelten die analytischen Näherungsformeln aus Lemma 3.1.5. Dort ist  $a(\epsilon, \delta) = \epsilon/(\overline{T_0} + \delta)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  und  $b(\epsilon, \delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Verkleinert man  $T_0$ , so verlieren die Näherungsformeln ihre Gültigkeit und  $b$  wächst. In diesem Bereich spielt also das quadratische Potential in der gemittelten Gleichung (3.17) eine wichtige Rolle.

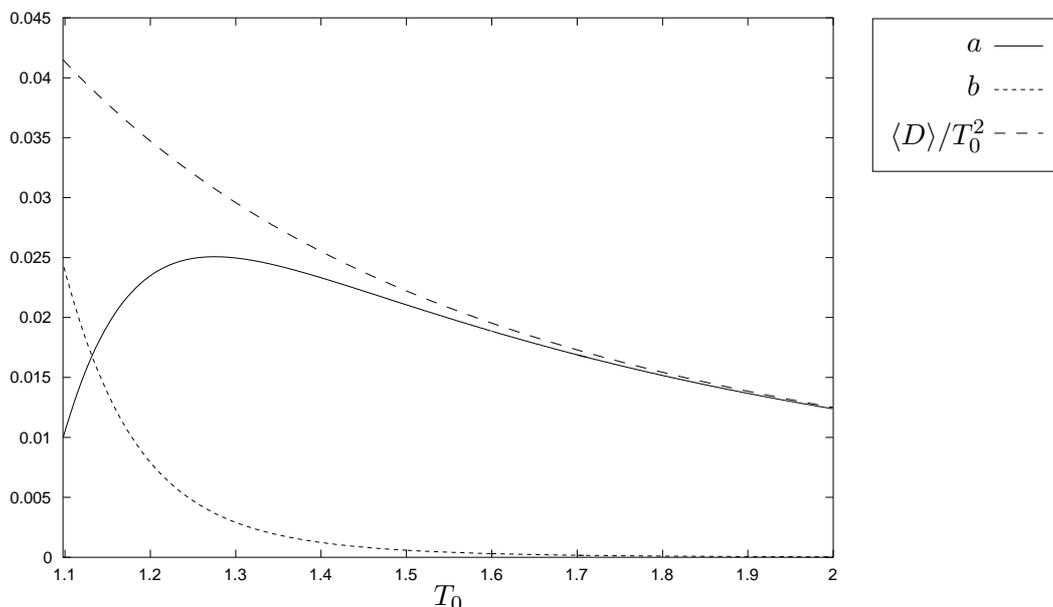


Abbildung 4.1.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $T_0$  für  $\langle D \rangle = 0.05$ .

<sup>1</sup>Das Verfahren wurde in C implementiert und nutzt Symmetrieeigenschaften der Lösungen aus. Der Code zur Berechnung der periodischen Lösung wurde uns dabei von T.Schäfer zur Verfügung gestellt.

In den numerischen Berechnungen zeigt sich einerseits eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Formeln für  $T_0 \gg \overline{T_0}$ , andererseits die wichtige Tatsache, dass  $a$  und  $b$  im Fall  $T_0 > \overline{T_0}$  und  $\langle D \rangle > 0$  immer positiv sind.

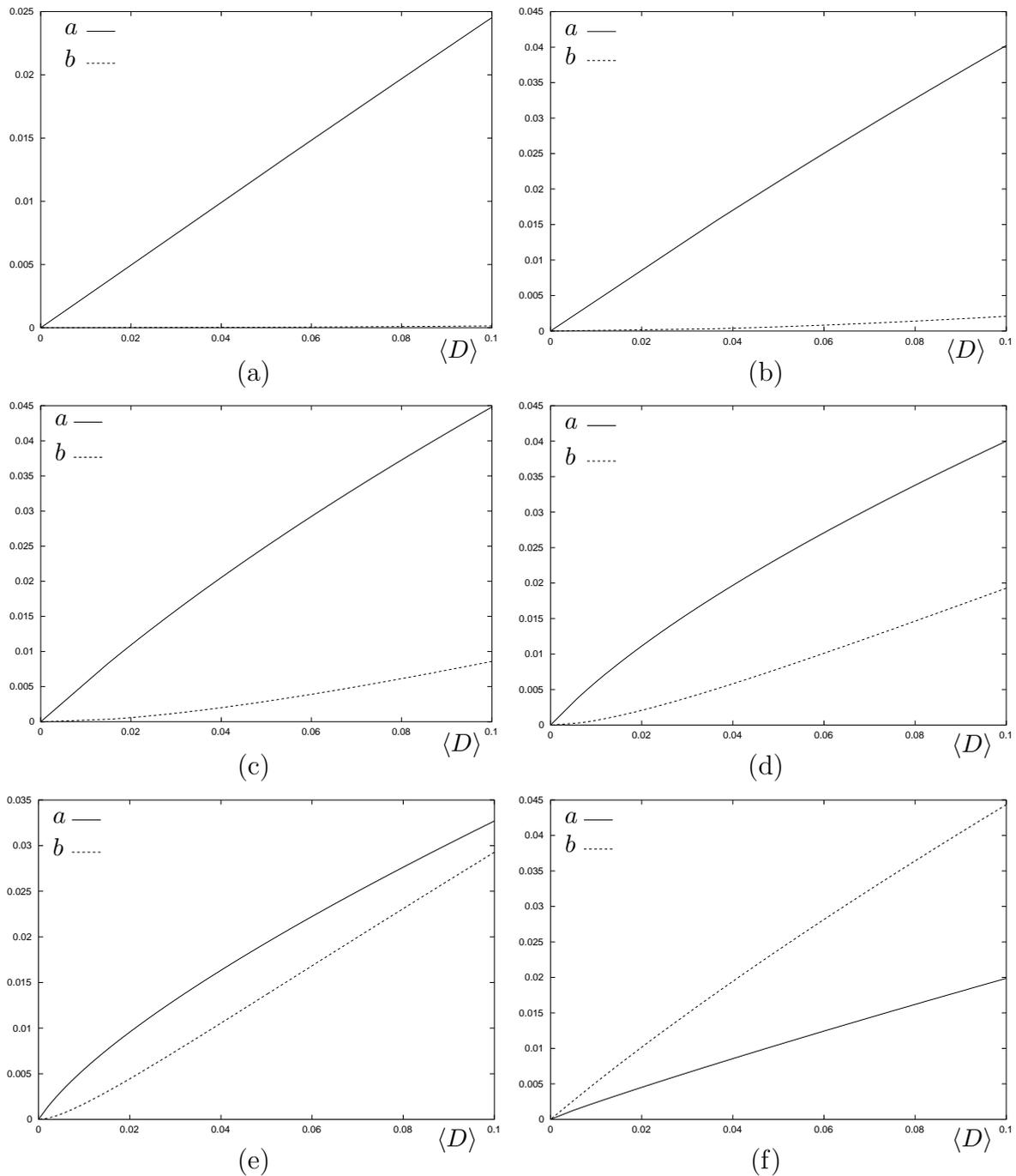


Abbildung 4.2.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für (a)  $T_0 = 2$ , (b)  $T_0 = 1.5$ , (c)  $T_0 = 1.3$ , (d)  $T_0 = 1.2$ , (e)  $T_0 = 1.15$ , (f)  $T_0 = 1.1$ .

In Abbildung 4.2 sind  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für verschiedene Werte von  $T_0$  aufgetragen. Man erkennt, dass für große Werte von  $T_0$  (Abbildung 4.2 (a),(b)) der Koeffizient  $a$  positiv ist und  $b$  sehr nahe bei Null ist. Mit abnehmendem  $T_0$  wächst dann

$b$  relativ zu  $a$ , bis sogar  $b > a$  gilt. Insbesondere fällt auf, dass für kleine, feste Werte von  $T_0$  die Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  näherungsweise linear in  $\langle D \rangle$  ist. Demnach lassen sich die Koeffizienten gut approximieren durch  $a = a_1(\delta)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  bzw.  $b = b_1(\delta)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  mit  $a_1(\delta) > 0$  und  $b_1(\delta) > 0$ . Das im letzten Abschnitt durchgeführte Mittelungsverfahren führt also tatsächlich auf Gleichung (3.17) mit  $a > 0$  und  $b > 0$ .

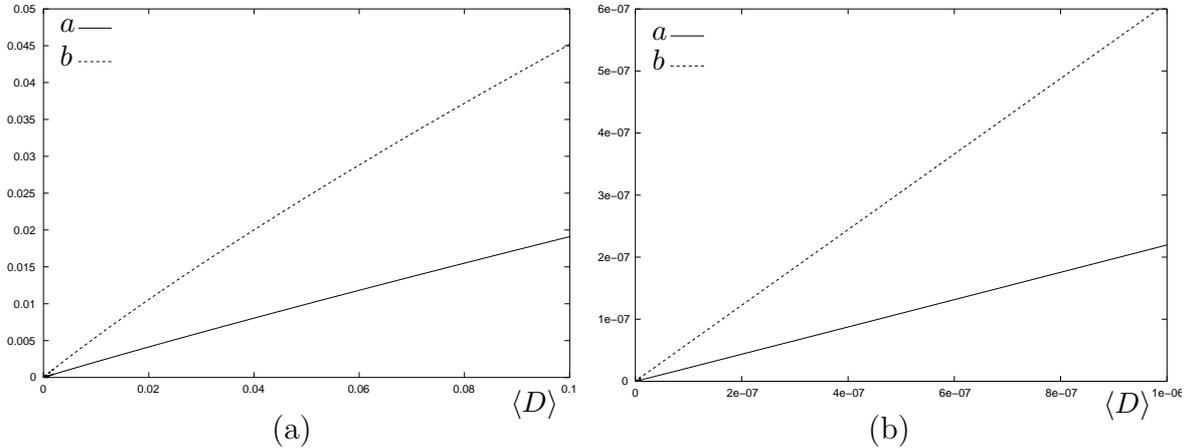


Abbildung 4.3.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für  $T_0 = 1.1$  zwischen (a)  $\langle D \rangle = 0$  und  $\langle D \rangle = 0.1$  bzw. (b)  $\langle D \rangle = 0$  und  $\langle D \rangle = 10^{-6}$ .

In Abbildung 4.3 sind erneut  $a$  und  $b$  als Funktionen von  $\langle D \rangle$  für  $T_0 = 1.1 > \overline{T_0}$  dargestellt. Dabei ist (b) eine Vergrößerung von (a) in der Nähe von 0, die abermals zeigt, dass  $a$  und  $b$  von der Ordnung  $\epsilon$  sind.

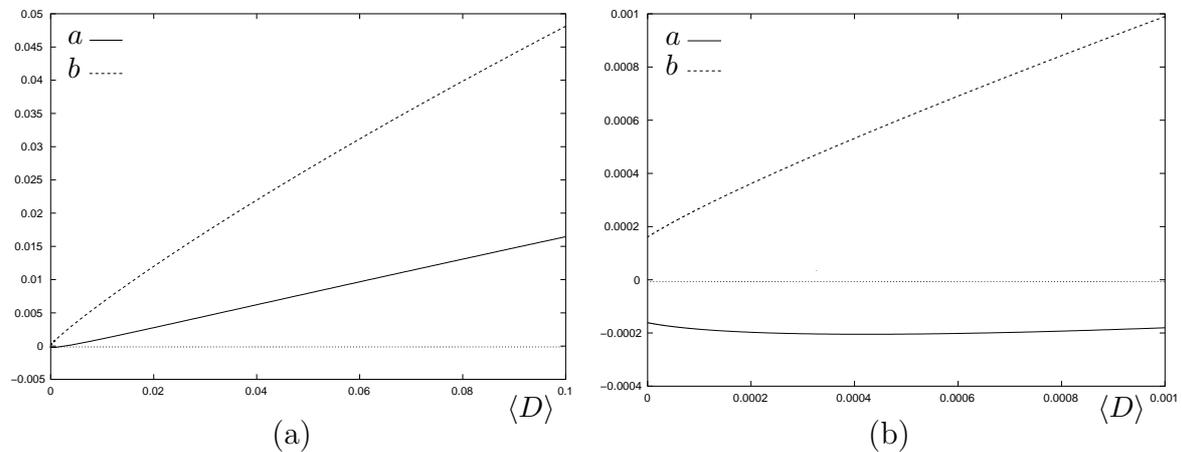


Abbildung 4.4.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für  $T_0 = 1.09$  zwischen (a)  $\langle D \rangle = 0$  und  $\langle D \rangle = 0.1$  (b) bzw.  $\langle D \rangle = 0$  und  $\langle D \rangle = 0.001$ .

Im Gegensatz zu Abbildung 4.3 ist in Abbildung 4.4 der Wert von  $T_0$  kleiner als  $\overline{T_0}$ . Obwohl auf den ersten Blick kein Unterschied zwischen Abbildung 4.3 (a) und Abbildung 4.4 (a) besteht, zeigt sich in Abbildung 4.4 (b), dass  $a$  für kleine Werte von  $\langle D \rangle$  negativ ist. Entscheidend ist aber, dass  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  für  $\langle D \rangle = 0$ , also nicht mehr von höherer Ordnung sind, wodurch die theoretischen Überlegungen aus Kapitel 3 bestätigt werden.

### 4.1.2. Der Fall $y > \bar{y}$

Für  $T_0 < \bar{T}_0$  kommt das modifizierte Verfahren zur Anwendung: Bei der Berechnung von  $a$  und  $b$  wird der Wert  $T_{\text{lin}}(0) = \bar{T}_0$  festgesetzt. An Abbildung 4.5 erkennt man, wieso das Verfahren sinnvoll ist. Für  $\epsilon = \langle D \rangle / N^2 \rightarrow 0$  läuft  $T_0(N^2, \langle D \rangle)$  gegen  $\bar{T}_0$ . Im ungestörten System ist also  $T_{\text{lin}}(0) = \bar{T}_0$  zu wählen.

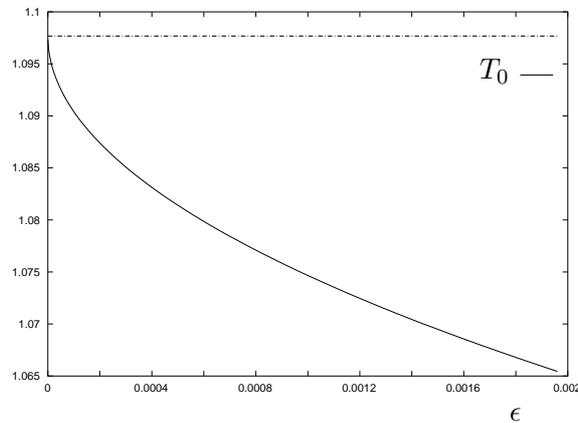


Abbildung 4.5.: Die Werte von  $T_0$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$ . Hier ist  $N^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $C = 4$  und  $\alpha = 0.2$ . Es ist  $\bar{T}_0 = 1.09767$ .

Die Existenz eines kritischen Wertes  $\tilde{T}_0$ , an dem der Parameter  $b$  sein Vorzeichen wechselt, kann Abbildung 4.6 entnommen werden.

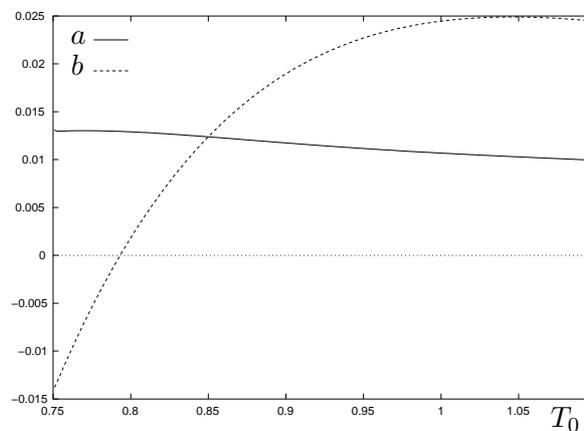
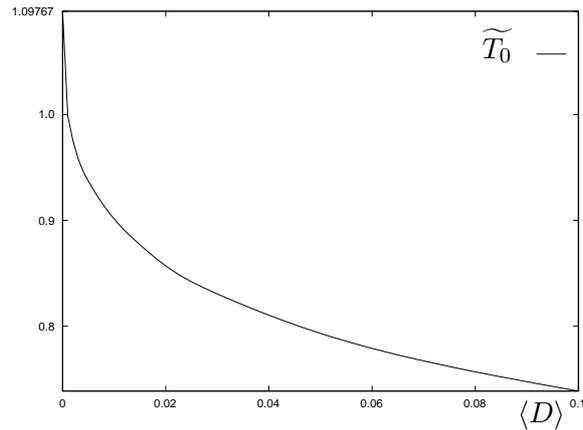


Abbildung 4.6.: Die Werte von  $a$  und  $b$  für  $\langle D \rangle = 0.05$  zwischen  $T_0 = 0.75$  und  $T_0 = \bar{T}_0$ . Hier  $\tilde{T}_0 \sim 0.793$

Selbstverständlich hängt dieser kritische Wert  $\tilde{T}_0$  von den Parametern der Faser, also von lokaler und mittlerer Dispersion ab. Die Beziehung zwischen  $\langle D \rangle$  und  $\tilde{T}_0$  ist Gegenstand von Abbildung 4.7. Es ist klar, dass für  $\langle D \rangle \rightarrow 0$  auch  $\tilde{T}_0 \rightarrow \bar{T}_0$  laufen muss.

Abbildung 4.7.: Die Werte von  $\widetilde{T}_0$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$ .

Dabei sind  $a$  und  $b$  stets von der Ordnung der mittleren Dispersion, also von der Ordnung  $\epsilon^2$ , wie Abbildung 4.8 verdeutlicht. Zusätzlich erkennt man abermals, dass  $b$  sein Vorzeichen wechselt.

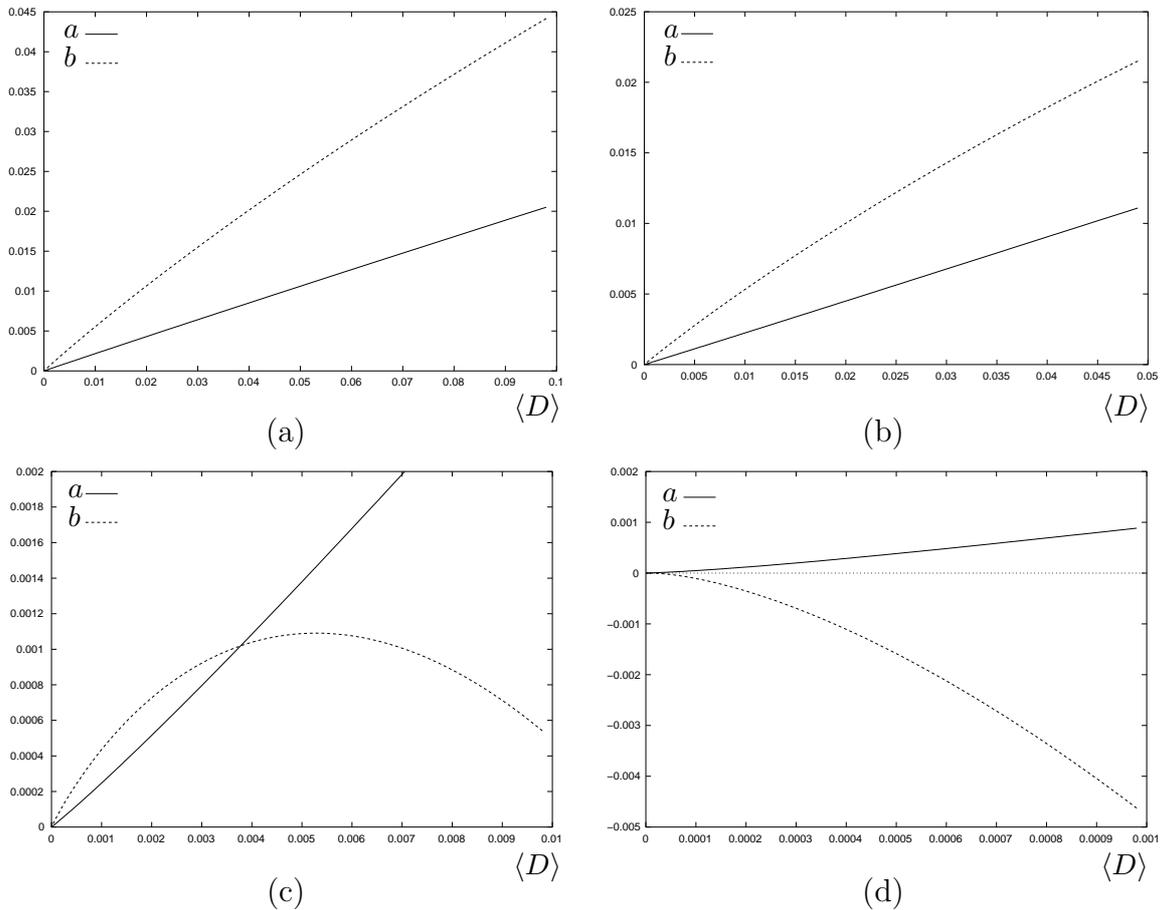


Abbildung 4.8.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für  $N^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $C = 20$  und (a)  $\alpha = 1$ , (b)  $\alpha = 0.5$ , (c)  $\alpha = 0.1$ , (d)  $\alpha = 0.01$ .

Abbildung 4.9 stellt eine Vergrößerung von Abbildung 4.8 (d) dar. Man erkennt, dass

$b$  für sehr kleine Werte von  $\langle D \rangle$  positiv ist. Offenbar gilt  $b \sim b_1(\alpha)\epsilon^2 - b_2\epsilon^3$  mit  $b_1(\alpha), b_2(\alpha) > 0$  für  $\alpha > 0$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} b_1(\alpha) = 0$ .

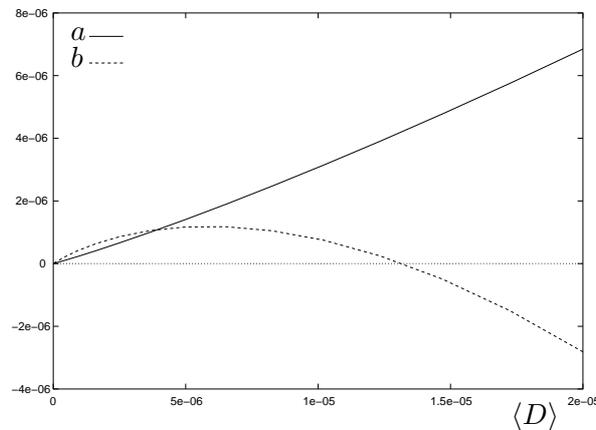


Abbildung 4.9.: Vergrößerung von Abbildung 4.8 (d).

## 4.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$

Aus Korollar 2.2.5 ist bekannt, dass bei gegebener mittlerer Dispersion Lösungen nur für  $T_0 < T_0^*(\langle D \rangle)$  existieren, wobei nach Definition stets  $T_0^*(\langle D \rangle) < \overline{T_0}$  gilt. Umgekehrt existieren Lösungen bei gegebenem  $T_0 < \overline{T_0}$  nur für  $-1.22(\overline{T_0} - T_0)^2 =: \overline{D} < \langle D \rangle < 0$ , was ebenfalls aus Korollar 2.2.5 folgt.

### 4.2.1. Unterer Ast

Für die Lösungen mit der kleineren Energie im Fall negativer mittlerer Dispersion kommt das ursprüngliche Mittelungsverfahren zum Einsatz: Ist  $T_0 < \overline{T_0}$ , so ist  $N^2 = \mathcal{O}(\langle D \rangle)$ .

Abbildung 4.10 zeigt das Verhalten von  $a$  und  $b$  bei fester negativer mittlerer Dispersion in Abhängigkeit von  $T_0$ . Man erkennt, dass stets  $a < 0$  und  $b > 0$  ist.

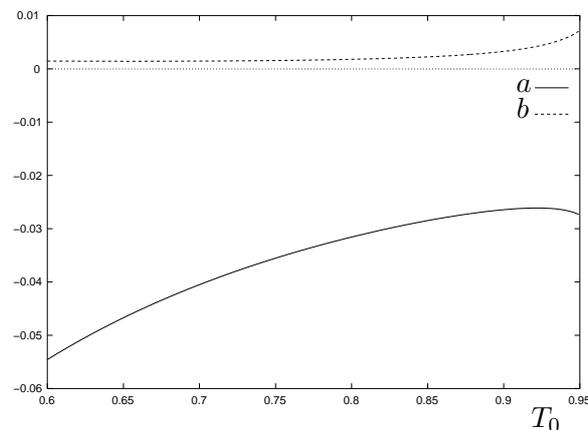


Abbildung 4.10.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $T_0$  für  $\langle D \rangle = -0.02$ . Es gilt  $T_0^*(\langle D \rangle) = 0.96417$ .

In Abbildung 4.11 sind  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für verschiedene Werte von  $T_0$  aufgetragen. Man erkennt auch hier, dass stets  $a < 0$  und  $b > 0$  gilt. Dies verdeutlicht auch Abbildung 4.10, in der  $a$  und  $b$  für einen festen Wert von  $\langle D \rangle$  in Abhängigkeit von  $T_0$  aufgetragen sind. Für sehr kleine Werte von  $T_0$  ist  $b$  nahe bei Null. Mit wachsendem  $T_0$  nimmt auch  $b$  immer mehr zu und somit gewinnt das quadratische Potential in der gemittelten Gleichung an Bedeutung.

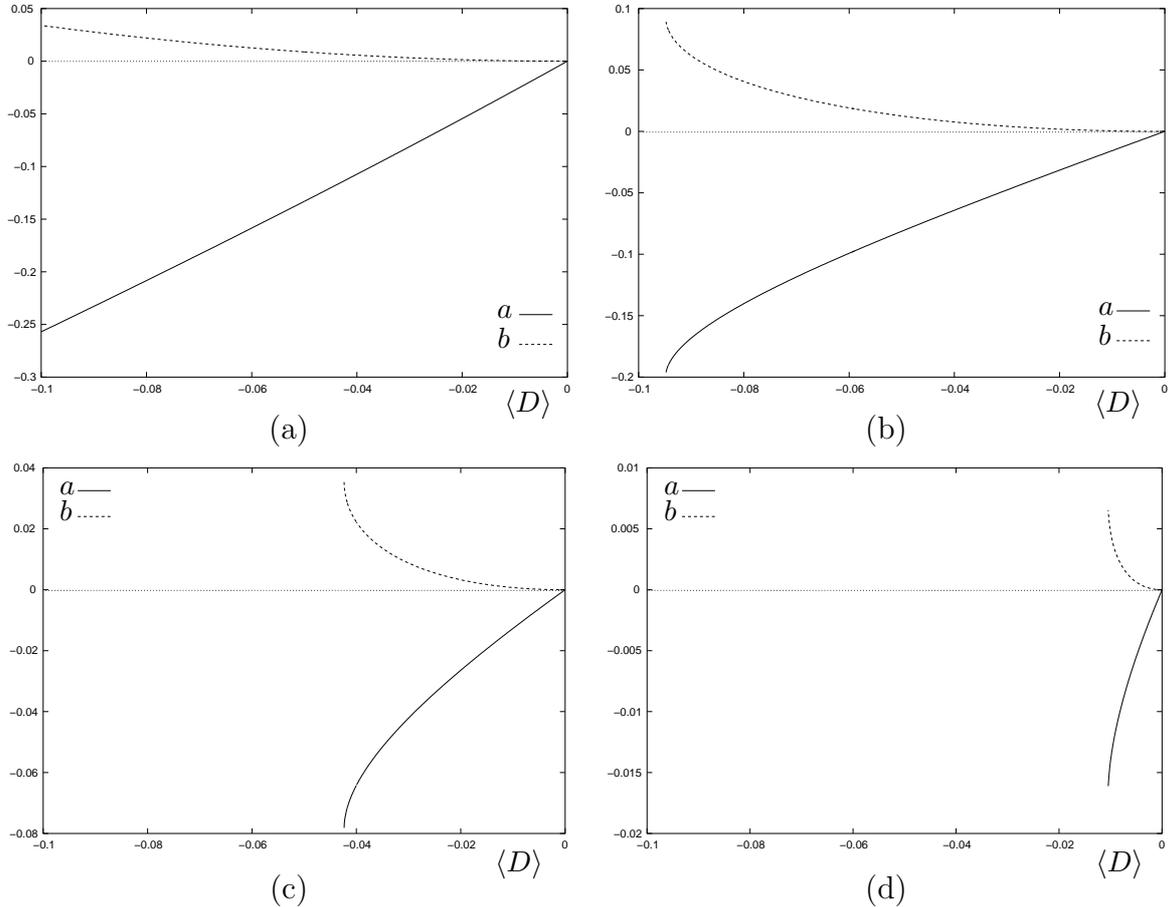


Abbildung 4.11.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für (a)  $T_0 = 0.6 \Rightarrow \overline{D} \sim -0.278$ , (b)  $T_0 = 0.8 \Rightarrow \overline{D} \sim -0.08$ , (c)  $T_0 = 0.9 \Rightarrow \overline{D} \sim -0.044$ , (d)  $T_0 = 1 \Rightarrow \overline{D} \sim -0.01$ .

### 4.2.2. Oberer Ast

Bei der Berechnung von  $a$  und  $b$  für die Lösungen höherer Energie kommt das modifizierte Verfahren zur Anwendung. Dazu wird der Wert  $T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0}$  festgesetzt. Dass dieses Verfahren auch für negative mittlere Dispersion sinnvoll ist, zeigt Abbildung 4.12. Setzen wir  $N^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $\alpha < 0$  und bestimmen  $T_0$  derart, dass die zugehörige Lösung periodisch ist, so läuft der Wert von  $T_0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen  $\overline{T_0}$ .

In Abbildung 4.13 erkennt man, dass  $b$  stets negativ ist. Der Parameter  $a$  ist zunächst ebenfalls negativ, für kleine Werte von  $\alpha$  wechselt der Parameter jedoch sein Vorzeichen. Analog zum Fall positiver mittlerer Dispersion existiert zu gegebener mittlerer Dispersion auch hier ein Parameter  $\tilde{T}_0$ , an dem  $a$  sein Vorzeichen wechselt.

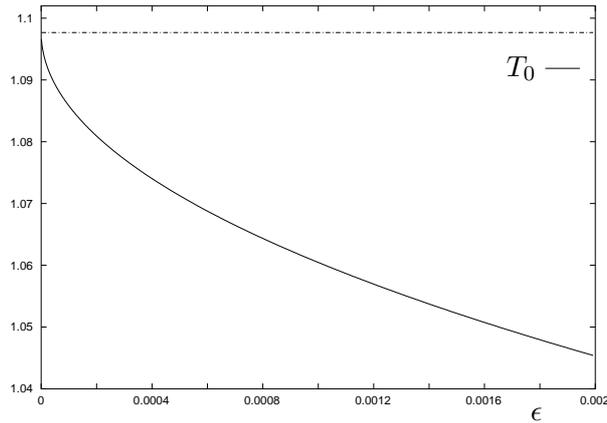


Abbildung 4.12.: Die Werte von  $T_0$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$ . Hier  $N^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $C = 4$  und  $\alpha = -0.2$ . Es ist  $\overline{T_0} = 1.09767$

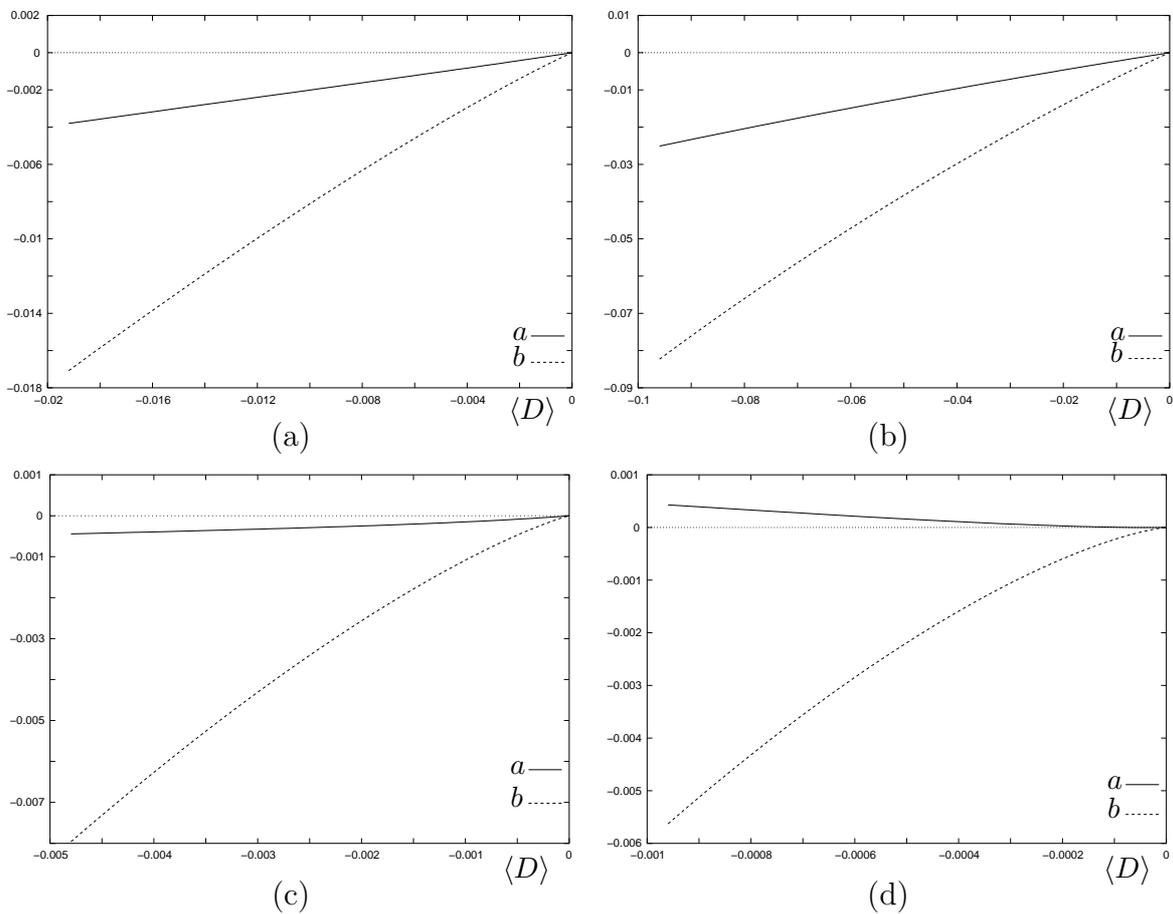


Abbildung 4.13.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für  $N^2 = \epsilon C$  und  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  mit  $C = 20$  und Abhängigkeit von  $\langle D \rangle$  für (a)  $\alpha = -0.2$ , (b)  $\alpha = -0.1$ , (c)  $\alpha = -0.05$ , (d)  $\alpha = -0.01$ .

Betrachtet man die Vergrößerung von Abbildung 4.13 (d), so wird klar, dass ein analoges Verhalten zu dem von  $b$  für  $y > \bar{y}$  vorliegt.

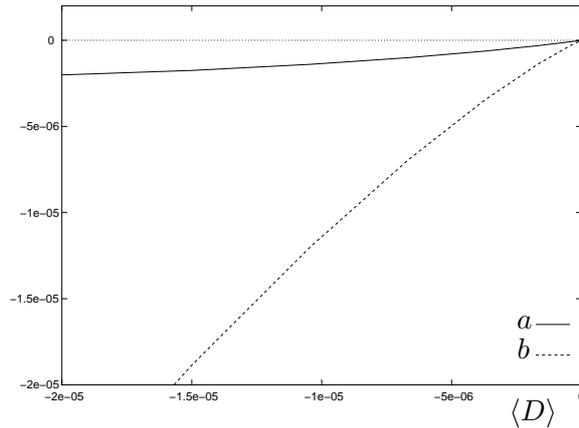


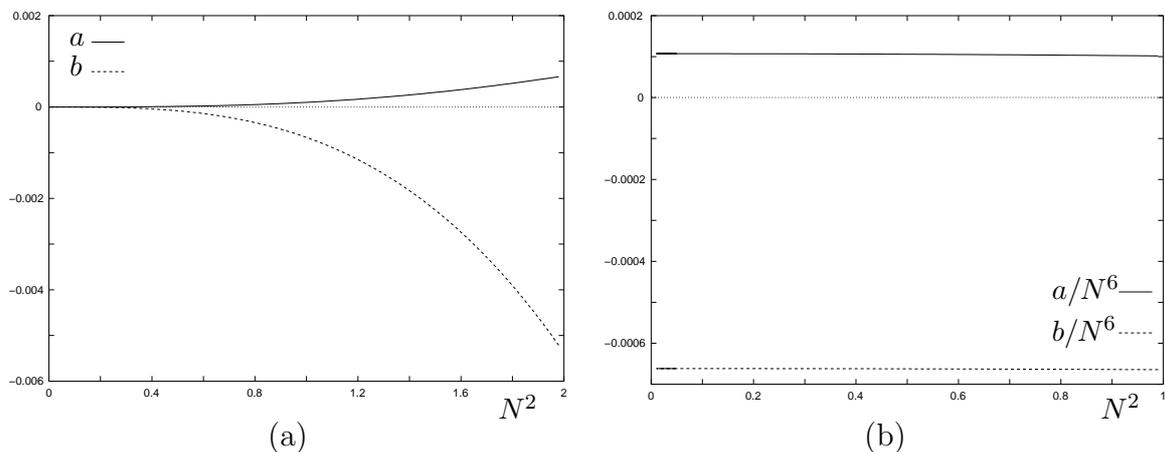
Abbildung 4.14.: Vergrößerung von Abbildung 4.13 (d).

Aus Abbildung 4.14 kann entnommen werden, dass  $a$  und  $b$  von der Ordnung der mittleren Dispersion sind, also  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Genauer gilt offenbar  $a = -a_1(\alpha)\epsilon^2 + a_2\epsilon^3$  mit  $a_1(\alpha), a_2(\alpha) > 0$  für  $\alpha < 0$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a_1 = 0$ .

### 4.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$

Für verschwindende mittlere Dispersion kommt formal ebenfalls das modifizierte Mittelungsverfahren zur Anwendung. Setzt man  $N^2 = \epsilon$  und bestimmt ein zugehöriges  $T_0$ , so läuft dieses für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen  $\overline{T_0}$ . Daher muss  $T_{\text{lin}}(0) = \overline{T_0}$  festgelegt werden.

Das Verhalten von  $a$  und  $b$  kann Abbildung 4.15 entnommen werden. Es gilt  $a < 0$  und  $b > 0$ , beide sind offenbar von der Ordnung  $\epsilon^3$ , wie Abbildung 4.15 (b) zeigt.

Abbildung 4.15.: (a) Die Werte von  $a$  und  $b$  zwischen  $N^2 = 0$  und  $N^2 = 2$ .

(b) Die Werte von  $a/N^6$  und  $b/N^6$  zwischen  $N^2 = 0$  und  $N^2 = 1$ .

# 5. Analyse der gemittelten Gleichung

In diesem Kapitel wollen wir die in Kapitel 3 hergeleitete Gleichung mit analytischen Mitteln untersuchen. Nach Linsentransformation und Mittelung wird die Pulsausbreitung in einer Faser mit starkem Dispersionsmanagement beschrieben durch

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0, \quad z \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dabei beschäftigen wir uns in diesem Kapitel ausschließlich mit dem Bereich nicht zu großer Stärke des Dispersionsprofils und positiver mittlerer Dispersion; dort gilt nach den Untersuchungen in Kapitel 4 bekanntlich  $a, b > 0$ .

Zunächst transformieren wir die Gleichung auf ein Standardverzweigungsproblem. Dazu betrachten wir Lösungen in Form einer stehenden Welle, genauer

$$u(x, z) = \phi(\gamma x) \exp(-i\sqrt{ab}\lambda z), \quad \text{mit } \gamma = \left( \frac{b}{a} \right)^{1/4}. \quad (5.1)$$

In der neuen Variable  $\xi = \gamma x$  gilt  $-\phi_{\xi\xi} + \xi^2\phi + F(\phi) = \lambda\phi$ , wobei

$$F(\phi) := -\frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)\phi|^2 S(z)\phi \right) dz \quad (5.2)$$

ist. Schreiben wir nun wieder  $u$  statt  $\phi$  und  $x$  statt  $\xi$ , so erhalten wir das Standardverzweigungsproblem

$$-u_{xx} + x^2u + F(u) = \lambda u. \quad (5.3)$$

Der lineare Teil obiger Gleichung ist der harmonische Oszillator. Bekanntlich besitzt dieser ein diskretes Spektrum; die Eigenfunktionen sind die Gauß-Hermite-Funktionen. Die Nichtlinearität  $F(u)$  ist kubisch, im Fall  $F(u) = \pm|u|^{p-1}u$  ist das Problem bereits eingehend untersucht worden. In diesem Fall beschreibt die Gleichung das Bose-Einstein Kondensat mit magnetischem Ableiter. In der Literatur ist sie in diesem Zusammenhang als Gross-Pitaevskii-Gleichung bekannt. Existenz und Stabilität von Lösungen wurden von Fukuizumi [14] und Zhang [84] untersucht. Kishvar et al. [36] bemerken, dass eine Basis aus nichtlinearen Moden dieser Gleichung existiert, geben aber keinen Beweis. Die nichtlineare Schrödingergleichung mit quadratischem Potential wird auch bei Cazenave betrachtet (Abschnitt 9.3. in [7]). Globale und lokale Verzweigungsuntersuchungen findet man in der Arbeit von Kunze et al. [44]. Das zugehörige Verzweigungsdiagramm ist in Abbildung 5.1 skizziert. Kavian und Weissler zeigen in [35] die Existenz unendlich vieler

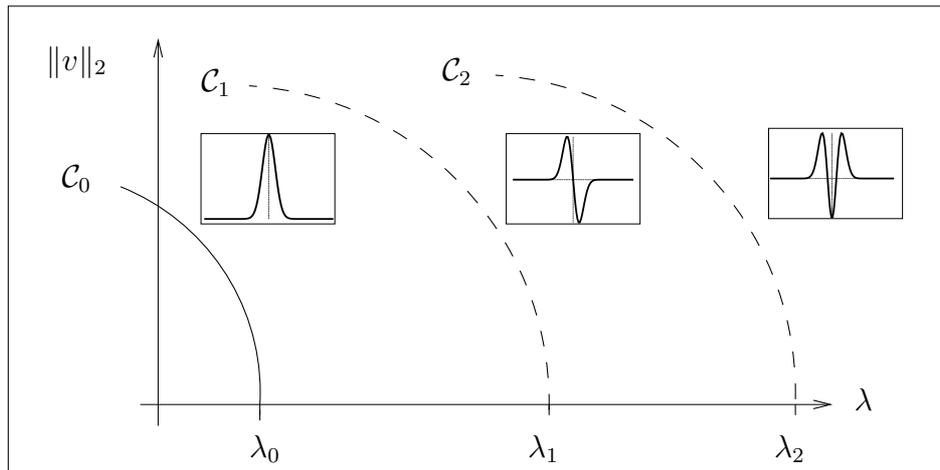


Abbildung 5.1.: Verzweigungsdiagramm von  $-u_{xx} + x^2u - \lambda u = |u|^2u$ .

Lösungen für ein gegebenes  $\lambda$  für  $F(u) = -|u|^{p-1}$  und untersuchen deren Abklingverhalten. Die Struktur der Lösungen wird ebenfalls von Hirose und Ohta in [30] untersucht.

Im Gegensatz zu den zitierten Arbeiten besitzt die hier untersuchte Gleichung eine nicht-lokale Nichtlinearität, deren Struktur man mittels des Schrödingerkerns  $k(z, x, y)$  angeben kann, der sich aus Mehlers Formel ergibt [11]. Es gilt

$$S(z)u(x) = \int_{\mathbb{R}} k(R^{\text{eff}}(z), x, y)u(y)dy,$$

für eine explizite Darstellung von  $k$  vgl. [56]. In die Nichtlinearität fließen also die Werte von  $u$  auf ganz  $\mathbb{R}$  ein, was beispielsweise die Untersuchung der nodalen Eigenschaften der Lösungen, also Aussagen über deren Nullstellen und Extrema, erschwert. Allerdings kann sie ohne Einschränkung als reellwertig angesehen werden, wie sich zeigen wird.

Im Kontext dieser Arbeit sind wir an normierten Lösungen interessiert, vgl. Kapitel 6. Da Gleichung (5.3) mit nicht-lokaler Nichtlinearität auch in anderen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt, wollen wir uns bei den Untersuchungen jedoch nicht auf normierte Lösungen beschränken, sondern versuchen, das komplette Lösungsverhalten zu analysieren. Damit gelingt es auch, einen analytischen Beweis für die Existenz der nichtlinearen Moden aus [36] zu erbringen. Es sei bemerkt, dass die meisten Argumente für eine allgemeine kubische nicht-lokale Nichtlinearität gültig bleiben.

Das Hauptergebnis dieses Kapitels für die Anwendung im Kontext dieser Arbeit lässt sich wie folgt zusammenfassen: Es existiert eine Folge  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , von Lösungen der Gleichung (5.3) mit  $\|u_n\|_2^2 = 1$  und folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion  $u_0$  ist als Grundzustand des zu (5.3) gehörigen Energiefunktionals orbital stabil und kann gerade gewählt werden.
- Die Funktionen  $u_n$  mit  $n \geq 1$  korrespondieren zu Sattelpunkten des Energiefunktionals und liegen auf einem Ast, der im  $n$ -ten Eigenwert des harmonischen Oszillators verzweigt.
- Die Funktionen  $u_n$  klingen exponentiell ab.

Im Fall  $a < 0$  und  $b < 0$ , der zu Lösungen großer Energie im Fall negativer mittlerer Dispersion korrespondiert, sind die zugehörigen Lösungen instabil und daher für die Anwendung von nachrangigem Interesse, was im folgenden kurz dargestellt wird:

Sind  $a$  und  $b$  beide negativ, so folgt mit der Transformation

$$u(x, z) = \phi(\gamma x) \exp(i\sqrt{ab}\lambda z), \text{ mit } \gamma = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4}$$

die Gleichung

$$-u_{xx} + x^2u - F(u) = \lambda u, \quad (5.4)$$

wenn wir auch hier wieder  $u$  statt  $\phi$  und  $x$  statt  $\xi$  schreiben. Damit unterscheidet sich Gleichung (5.4) von (5.3) nur durch das Vorzeichen der Nichtlinearität. Es ist direkt klar, dass die Verzweigungsergebnisse, die in diesem Kapitel hergeleitet werden, bis auf die Verzweigungsrichtung gültig bleiben. Die lokale Analyse zeigt, dass die verzweigenden Lösungen instabil sind. Mit Hilfe von Variationsargumenten lässt sich analog zu [35] zeigen, dass (5.4) keine Lösungen besitzt für  $\lambda < \lambda_0$ , während für  $\lambda > \lambda_k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  mindestens  $k + 1$  verschiedene kritische Werte des Energiefunktional existieren. Dabei bezeichnet  $\lambda_k$  den  $k$ -ten Eigenwert des harmonischen Oszillators.

Bei der Analyse von Gleichung (5.3) gehen wir nun wie folgt vor:

Im ersten Abschnitt des Kapitels werden wir verzweigungstheoretische Methoden anwenden. Nachdem zunächst die wohlbekannteren Ergebnisse über das zu (5.3) gehörige lineare Problem dargestellt werden, wird sich herausstellen, dass in jedem Eigenwert der linearisierten Gleichung ein Ast von nichttrivialen Lösungen verzweigt; dieser lässt sich lokal parametrisieren. Allerdings kann hier aufgrund der nicht-lokalen Nichtlinearität die Rückverzweigung nicht ausgeschlossen werden.

Mit Hilfe von Variationsmethoden, die im zweiten Abschnitt des Kapitels dargestellt werden, gelingt es dann, globale Aussagen zu beweisen. Insbesondere existieren unendlich viele Lösungen zu vorgegebener  $L^2$ -Norm; diese korrespondieren zu einem orbital stabilen Grundzustand sowie zu Sattelpunkten des zugehörigen Energiefunktional. Darüber hinaus lässt sich mit diesen Mitteln der Nachweis erbringen, dass alle Äste unbeschränkt sind.

Das Abklingverhalten der Lösungen wird im dritten Abschnitt untersucht. Dort wird sich zeigen, dass die DM-Solitonen exponentiell abfallen. Das Gauß-artige Verhalten, das für die Standard-Nichtlinearität vorliegt, geht offenbar aufgrund der nicht-lokalen Struktur der hier betrachteten Nichtlinearität verloren. Aus dem gleichen Grund lassen sich auch keine Aussagen über die Nullstellen der Lösungen treffen, und somit die Existenz einer positiven Lösung nicht nachweisen. Dies sowie das Gauß-artige Abklingen der Lösungen ist jedoch in der Realität auch nicht gegeben, wie numerische Untersuchungen belegen.

## 5.1. Verzweigungsuntersuchungen

### 5.1.1. Untersuchung des linearen Problems

In diesem Abschnitt wollen wir das zu (5.3) gehörige linearisierte Problem untersuchen, also

$$-u_{xx} + x^2u - \lambda u = 0. \quad (5.5)$$

Der natürliche Raum, in dem das Problem untersucht wird, ist [35, 44]

$$X := \{u \in H^1(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx < \infty\}. \quad (5.6)$$

Dieser Raum ist ein Hilbertraum, wenn er mit dem inneren Produkt

$$(u, v)_X := \langle u_x, v_x \rangle + \langle xu, xv \rangle \quad (5.7)$$

versehen wird. Dabei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt in  $L^2(\mathbb{R})$ . Die induzierte Norm

$$\|u\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}} u_x^2 + x^2 u^2 dx = \|u_x\|_2^2 + \|xu\|_2^2 \quad (5.8)$$

ist äquivalent zu [35]

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} u_x^2 + (1 + x^2)u^2 dx. \quad (5.9)$$

Der Raum  $X$  zeichnet sich dadurch aus, dass er wie folgt eingebettet werden kann [84]:

#### Lemma 5.1.1.

Die Einbettung  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$  ist kompakt für  $2 \leq q < \infty$ .

In obigem Lemma liegt ein Hauptvorteil der NLS mit quadratischen Potential gegenüber der NLS ohne dieses Potential. Diese wurde im Raum  $H^1(\mathbb{R})$  untersucht, der eine solche Einbettung nicht besitzt. Ein weiterer Unterschied ist, dass das Spektrum nun eine sehr einfache, wohlbekanntere Struktur hat [13]:

#### Lemma 5.1.2.

Sei  $\lambda_n = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und

$$u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \exp(-x^2/2) H_n(x),$$

wobei  $H_n$  das  $n$ -te Hermite-Polynom

$$H_n(x) := (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$$

ist. Dann gilt

- (i) Die Werte  $\lambda_n$  sind genau die Eigenwerte von (5.5). Sie sind einfach und  $u_n \in X$  sind die zugehörigen Eigenfunktionen.
- (ii) Die Eigenfunktionen  $u_n$  von (5.5) bilden ein vollständiges Orthonormalsystem des Raumes  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 5.1.2. Globales Verzweigungsverhalten

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Rabinowitz-Alternative auf Gleichung (5.3) angewendet werden kann. Der Beweis ist dem von Kunze et al. [44] sehr ähnlich; wir werden daher nur einen kurzen Überblick geben. Es wird sich herausstellen, dass alle in [44] verwendeten Abschätzungen auch für die hier untersuchte Nichtlinearität (5.2) gültig sind. Allerdings ist  $F$  aus (5.2) eine nicht-lokale Nichtlinearität. Daher lassen sich Standardargumente, die eine Rückverzweigung ausschließen, hier nicht anwenden. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird sich durch Variationsargumente zeigen, dass die Äste unbeschränkt sind. In diesem Abschnitt ist in Anlehnung an [44] und im Gegensatz zum Rest des Kapitels mit  $\|\cdot\|_X$  stets die Norm (5.9) gemeint und mit  $(\cdot, \cdot)_X$  das zugehörige Skalarprodukt auf  $X$ .

Mit Hilfe von Symmetrieargumenten wurde in [76] begründet, dass das DM-Soliton in der Form  $A(z, t) = F(z, t) \exp(ikz)$  mit reellwertigem  $F$  gewählt werden kann. Auch in der hier untersuchten Situation lässt es sich rechtfertigen, nach reellen Lösungen zu suchen:

**Lemma 5.1.3.**

*Ist  $u$  reellwertig, so auch  $F \circ u$ .*

*Beweis.* Siehe Anhang. □

Um das Ergebnis dieses Abschnittes formulieren zu können, definieren wir zunächst die Menge aller nichttrivialen Lösungen als

$$S_0 := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0 \text{ ist schwache Lösung von } -u_{xx} + x^2u + F(u) = \lambda u\}$$

und  $S = \overline{S_0}^{\mathbb{R} \times X}$  als ihren Abschluss. Dabei ist  $u \in X$  eine schwache Lösung, falls

$$\int_{\mathbb{R}} u_x \phi_x + x^2 u \phi + F(u) \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda u \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Des Weiteren folgt aus  $X \subset H^1(\mathbb{R})$  die Tatsache, dass  $u$  auch in  $C_0^0(\mathbb{R})$  liegt, der Menge stetiger Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , die für  $x \pm \infty$  verschwinden. Mit einem Standardargument (*bootstrapping argument*) folgt dann durch wiederholtes Ausnutzen der Gleichung, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ , vgl. [83].

Mit obigen Bezeichnungen gilt nun folgender Satz, der Auskunft über das globale Verzweigungsverhalten gibt:

**Satz 5.1.4.**

*Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $(0, \lambda_n)$  ein Verzweigungspunkt. Mit  $\mathcal{C}_n$  sei die Komponente von  $\mathcal{S}$  mit  $(0, \lambda_n) \in \mathcal{C}_n$  bezeichnet. Dann gilt die folgende Alternative: Entweder*

*(i)  $\mathcal{C}_n$  ist unbeschränkt in  $\mathbb{R} \times X$  oder*

*(ii)  $\mathcal{C}_n$  ist kompakt, und es existiert ein  $m \neq n$ , so dass  $(0, \lambda_m) \in \mathcal{C}_n$ .*

Um Satz 5.1.4 zu beweisen, benötigen wir noch folgende Abschätzung für die Nichtlinearität

**Lemma 5.1.5.**

Für  $u, v \in X$  gilt

$$\|F(u) - F(v)\|_2^2 \leq C (\|u\|_X^4 + \|v\|_X^4) \|u - v\|_X^2. \quad (5.10)$$

*Beweis.* Für  $u, v \in X$  gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_2^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 |S^{-1}(z) (|S(z)u|^2 S(z)u - |S(z)v|^2 S(z)v)| dz \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 |S^{-1}(z) (|S(z)u|^2 S(z)u - |S(z)v|^2 S(z)v)|^2 dz \right) dx, \end{aligned}$$

da  $\|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)}$ . Wir haben also gezeigt, dass

$$\|F(u) - F(v)\|_2^2 \leq \int_0^1 \|S^{-1}(z) (|S(z)u|^2 S(z)u - |S(z)v|^2 S(z)v)\|_2^2 dz.$$

Benutzen wir die Ungleichung  $\|a^2 - b^2\| \leq \frac{3}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2)\|a - b\|$  für  $a, b \in \mathbb{C}$ , so folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\|S^{-1}(z) (|S(z)u|^2 S(z)u - |S(z)v|^2 S(z)v)\|_2^2 \\ &= \| |S(z)u|^2 S(z)u - |S(z)v|^2 S(z)v \|_2^2 \\ &\leq C \| (|S(z)u|^2 + |S(z)v|^2) |S(z)u - S(z)v| \|_2^2 \\ &\leq C \| (|S(z)u|^2 + |S(z)v|^2)^2 \|_2 \| |S(z)(u - v)|^2 \|_2 \\ &\leq C (\| |S(z)u|^4 \|_2 + \| |S(z)v|^4 \|_2) \| |S(z)(u - v)|^2 \|_2 \\ &= C (\|S(z)u\|_8^4 + \|S(z)v\|_8^4) \|S(z)(u - v)\|_4^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 5.1.1 und  $\|S(z)u\|_X = \|u\|_X$  folgt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Eine direkte Konsequenz aus Lemma 5.1.5 ist das folgende

**Korollar 5.1.6.**

Es gilt  $F : X \rightarrow L^2$  mit  $\|F(u)\|_2 \leq C \|u\|_X^3$ .

In diesem Sinne erfüllt die Nichtlinearität die schärfste in [44] geforderte Bedingung. Jetzt sind wir in der Lage, den Satz zu beweisen:

*Beweis von Satz 5.1.4.* Um das globale Verzweigungstheorem von Rabinowitz [61] anzuwenden, muss die Nichtlinearität kompakt sein. Um dies sicherzustellen, muss die Gleichung in eine Integralgleichung umgewandelt werden. Im Folgenden skizzieren wir kurz den Beweis aus [44].

Um der Notation aus [44] zu folgen, verschieben wir die Gleichung gemäß

$$-u_{xx} + (1 + x^2)u + F(u) = \mu u, \quad (5.11)$$

wobei  $\mu = 1 + \lambda$  gesetzt wurde. Sei nun

$$(Au)(x) = \int g(x, \xi)u(\xi)d\xi \quad \text{für } u \in L^2(\mathbb{R}), \quad (5.12)$$

wobei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die zu (5.5) gehörige Greensche Funktion ist:

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{2}(x^2+\xi^2)} \left( \int_{-\infty}^{\xi} e^{-y^2} dy \right) \left( \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy \right), & \xi \leq x \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{2}(x^2+\xi^2)} \left( \int_{-\infty}^x e^{-y^2} dy \right) \left( \int_{\xi}^{\infty} e^{-y^2} dy \right), & x \leq \xi \end{cases}. \quad (5.13)$$

Dann ist  $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow X$  wohldefiniert, linear und stetig. Des Weiteren ist  $A : X \rightarrow X$  kompakt und  $(Au, v)_X = (u, v)_{L^2}$ . Demnach existiert  $A^{1/2}$  mit einer stetigen Fortsetzung  $S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow X$ . Es gilt  $S = A^{1/2}$  in  $X$  und  $\|Sv\|_X = \|v\|_2$  für  $v \in L^2(\mathbb{R})$ . Setzt man nun  $u = A^{1/2}v$ , so transformiert sich (5.11) in das folgende nichtlineare Eigenwertproblem im Raum  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$v = \mu Av - SF(Sv), \quad \text{wobei } u = A^{1/2}v. \quad (5.14)$$

Die charakteristischen Werte von  $A$  sind nun genau  $\mu_n = \lambda_n + 1$ , diese sind einfach. Also genügt es zu zeigen, dass  $N : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  mit  $N(v) := SF(Sv)$  kompakt ist. Mit Korollar 5.1.6 gilt

$$\|N(v)\|_X = \|SF(Sv)\|_X = \|F(Sv)\|_2 \leq C \|Sv\|_X^3 = C \|v\|_2^3.$$

Also bildet  $N$  beschränkte Teilmengen von  $L^2(\mathbb{R})$  in beschränkte Teilmengen von  $X$  ab. Die Kompaktheit von  $N$  folgt dann aus der Kompaktheit der Einbettung  $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$ . Damit lässt sich die Rabinowitz-Alternative anwenden, und Zurückführung auf das ursprüngliche Problem liefert die Behauptung.  $\square$

In [44] wird gezeigt, dass die zweite Alternative des Satzes nicht eintreten kann. Die üblichen Argumente benutzen nodale Eigenschaften der Lösungen; diese finden bei einer nicht-lokalen Nichtlinearität jedoch keine Anwendung. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird sich jedoch durch eine weitere Charakterisierung der einzelnen Zweige herausstellen, dass diese unbeschränkt sind.

### 5.1.3. Lokales Verzweigungsverhalten

In diesem Abschnitt werden wir das lokale Verzweigungsverhalten von Gleichung (5.3) untersuchen. Auch hier muss der Beweis von Kunze et al. [44] nur leicht modifiziert werden. Wie üblich lassen sich die verzweigenden Lösungen lokal mit Hilfe der Methode von Lyapunov und Schmidt [18] lokal parametrisieren.

#### Lemma 5.1.7.

*Es existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass gilt: Falls  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}_n \cap U_\epsilon(\lambda_n, 0)$ , so folgt*

$$\lambda = \lambda_n + \lambda(s), \quad u = su_n + sv_n(s)$$

*wobei  $0 < |s| < \epsilon$  und  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda'(0) = 0$  und  $\lambda''(0) < 0$ . Weiter ist  $v_n(0) = 0$  und es gilt*

$$(v_n(s), u_n)_X = 0.$$

*Beweis.* Siehe Anhang. □

Demnach ist also die Verzweigungsrichtung bekannt; es lässt sich zeigen, dass die verzweigenden Lösungen stabil sind (vgl. Bemerkung 5.2.9). Zusätzlich liefert die Formel für  $z$  eine Abschätzung darüber, wie nahe die Lösung an der entsprechenden Eigenfunktion liegt. Es sei noch bemerkt, dass mit [14] sogar  $\|v_0(s)\|_X = \mathcal{O}(s^2)$  gilt.

## 5.2. Variationsmethoden

### 5.2.1. Existenz von Grundzuständen

Im diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz von Grundzuständen  $u \in X$ , also von Minimierern des zu Gleichung (5.3) gehörigen Energiefunktional. Sei dazu

$$J(u) := \|u\|_X^2 - G(u) = \|u\|_X^2 - \frac{N^2}{2\sqrt{ab}} \int_0^1 \frac{1}{T(z)} \|S(z)u\|_4^4 dz,$$

dann gilt

#### Satz 5.2.1.

*Das Minimierungsproblem*

$$J^\omega = \min\{J(u) \mid u \in X, \|u\|_2^2 = \omega\} \quad (5.15)$$

hat für alle  $\omega > 0$  mindestens eine nichttriviale Lösung  $u \in X$ . Diese Grundzustände sind schwache Lösungen von Gleichung (5.3).

Bevor wir die Existenz von Grundzuständen beweisen, diskutieren wir zunächst einige verwandte Fragestellungen:

#### Bemerkung 5.2.2.

- (i) Üblicherweise lässt sich mittels Katos Ungleichung und  $G(u) = G(|u|)$  die Existenz eines positiven Minimierers nachweisen. Dies ist jedoch aufgrund der nicht-lokalen Eigenschaften von  $G$  hier nicht möglich.
- (ii) Es ist nicht klar, ob der Grundzustand eindeutig bis auf Translation der Phase ist. Die üblichen Argumente benutzen die Positivität der Lösung, welche aufgrund der nicht-lokalen Nichtlinearität hier nicht gegeben ist. Allerdings ist durch das Verzweigungsergebnis klar, dass die Grundzustände kleiner Energie eindeutig sind, wie sich im Verlauf dieses Abschnitts zeigen wird. Es ist jedoch möglich, dass der Lösungszweig eine weitere Verzweigung durchläuft. Die Eindeutigkeit der Grundzustände wurde im  $\mathbb{R}^3$  für die Nichtlinearität  $F(u) = -|u|^{p-1}u$  von Hirose und Ohta [30] bewiesen. Im eindimensionalen Fall ist uns aber ein solches Ergebnis bisher auch für diese Nichtlinearität unbekannt.

Sei  $\Gamma u$  definiert als  $\Gamma u(x) = u(-x)$ . Aufgrund der Symmetrie in Gleichung (5.3) ist klar, dass mit  $u$  auch  $\Gamma u$  Lösung ist. Die Frage nach der Existenz gerader Lösungen  $u \in X_\Gamma := \{u \in X \mid \Gamma u = u\}$  beantwortet das folgende Lemma:

**Lemma 5.2.3.**

*Das Minimierungsproblem*

$$J_\Gamma^\omega = \min\{J(u) \mid u \in X_\Gamma, \|u\|_2^2 = \omega\} \quad (5.16)$$

hat für alle  $\omega > 0$  mindestens eine nichttriviale Lösung  $u \in X_\Gamma$ , dieses  $u$  ist schwache Lösung von Gleichung (5.3). Für kleine Werte von  $\omega$  ist  $u$  eindeutig bestimmt bis auf Translation der Phase und es gilt  $J_\Gamma^\omega = J(u) = J^\omega$ .

Der Beweis beruht auf der Invarianz von  $J$  unter  $\Gamma$  sowie dem Prinzip der symmetrischen Kritizität und wird am Ende des Abschnitts erbracht.

**Bemerkung 5.2.4.**

Die letzte Aussage des Lemmas bedeutet, dass die Grundzustände aus Satz 5.2.1 für kleine Werte von  $\omega$  eindeutig und gerade sind. Zusätzlich liegen sie auf dem Ast, der im ersten Eigenwert verzweigt, wie sich im weiteren Verlauf dieses Abschnitts herausstellen wird. Die Eindeutigkeitsaussage und damit der Beweis der Symmetrie der Grundzustände für beliebiges  $\omega$  steht im direkten Zusammenhang mit der Frage nach einer weiteren (symmetriebrechenden) Verzweigung.

*Beweis von Satz 5.2.1.* Zunächst zeigen wir, dass  $J$  nach unten beschränkt ist. Dies ist Gegenstand von

**Lemma 5.2.5.**

Für alle  $\omega > 0$  gilt  $J^\omega > -\infty$ .

*Beweis.* Sei  $u \in X$  mit  $\|u\|_2^2 = \omega$ . Zur Vereinfachung der Notation definieren wir  $v(x, z) := S(z)u(x)$ . Mit der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung [1] kann man wie folgt abschätzen:

$$\|v\|_4^4 \leq C \|v_x\|_2 \|v\|_2^3 = C \|v_x\|_2 \omega^{3/2}.$$

Weiter gilt

$$\|v_x\|_2^2 \leq \|v_x\|_2^2 + \|xv\|_2^2 = \|S(z)u\|_X^2 = \|u\|_X^2,$$

da die Energie im linearen harmonischen Oszillator eine Erhaltungsgröße ist.

**Bemerkung 5.2.6.**

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass mit der Energie optischer Solitonen stets die  $L^2$ -Norm gemeint ist; im Kontext dieses Kapitels ist Energie stets im Sinne des Energiefunktional zu verstehen.

Damit gilt

$$|G(u)| \leq C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |S(z)u(x)|^4 dx dz \leq C \|u\|_X \omega^{3/2},$$

also

$$J(u) \geq \|u\|_X^2 - C \|u\|_X \omega^{3/2}.$$

Demnach ist  $J$  durch ein quadratisches Polynom in  $\|u\|_X$  beschränkt, das sein Minimum für  $\|u\|_X = C\omega^{3/2}/2$  annimmt. Schließlich folgt  $J^\omega > -C\omega^3/2$ .  $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass jede Minimalfolge in  $X$  beschränkt ist:

**Lemma 5.2.7.**

Sei  $u_n$  eine Folge in  $X$  mit  $\|u_n\|_2^2 = \omega$  und  $J(u_n) \rightarrow J^\omega$ . Dann existiert ein  $M > 0$  mit  $\|u_n\|_X \leq M$

*Beweis.* Da  $J(u_n)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert, existiert ein  $M > 0$ , unabhängig von  $n$ , mit  $J(u_n) \leq M$ . Mit Hilfe der Ungleichung aus Lemma 5.2.5 folgt  $M \geq J(u_n) \geq \|u_n\|_X^2 - C \|u_n\|_X \omega^{3/2}$ , was nur richtig sein kann, falls  $\|u_n\|_X$  beschränkt ist.  $\square$

Nun sind wir in der Lage, die Existenz eines Minimierers zu beweisen, also eines  $u \in X$  mit  $\|u\|_2^2 = \omega$  und  $J(u) = J^\omega$ :

Sei  $u_n$  eine Minimalfolge. Nach Lemma 5.2.5 ist  $u_n$  beschränkt im Hilbertraum  $X$ , wir können also eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. Es gelte also  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  in  $X$  für ein  $u \in X$ . Ohne Einschränkung können wir nun annehmen, dass  $u_{n_k} = u_n$ . Wegen der Kompaktheit der Einbettung  $X \subset\subset L^2(\mathbb{R})$  folgt die starke Konvergenz  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\mathbb{R})$  und demzufolge  $\|u\|_2^2 = \omega$ . Da  $\|\cdot\|_X$  schwach unterhalbstetig auf  $X$  ist, folgt die Ungleichung

$$\|u\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X.$$

Der Beweis ist also komplett, falls wir  $G(u_n) \rightarrow G(u)$  zeigen können. Um dies zu sehen, lässt sich analog zum Beweis von Lemma 5.2.5 die folgende Abschätzung zeigen:

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |S(z)(u_n(x) - u(x))|^4 dx dz \leq C \|u_n - u\|_X \left( \int_{\mathbb{R}} |u_n - u|^2 dx \right)^{3/2}$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist beschränkt wegen der schwachen Konvergenz  $u_n \rightharpoonup u$  in  $X$ , der zweite Faktor konvergiert gegen Null aufgrund der starken Konvergenz in  $L^2(\mathbb{R})$ . Wir haben also gezeigt, dass

$$J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n),$$

was zusammen mit  $\|u\|_2^2 = \omega$  den Beweis vervollständigt. Man beachte, dass die schwache Konvergenz  $u_n \rightharpoonup u$  in  $X$  zusammen mit  $\|u_n\|_X \rightarrow \|u\|_X$  die starke Konvergenz  $u_n \rightarrow u$  in  $X$  sicherstellt.  $\square$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass der in  $\lambda_0$  verzweigende Ast von Lösungen im Sinne der Rabinowitz-Alternative aus den in diesem Abschnitt gefundenen Grundzuständen besteht. Diese Tatsache beruht auf der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Rabinowitz: In einer Umgebung von  $(0, \lambda_0)$  existiert außer der Lösung in  $\mathcal{C}_0$  keine weitere nichttriviale Lösung [62], vgl. Lemma 5.1.7.

Aufgrund von Satz 5.2.1 existiert zu jedem  $\omega > 0$  ein  $u^\omega$  mit  $\|u^\omega\|_2^2 = \omega$  und ein Lagranger Multiplikator  $\lambda^\omega$  derart, dass

$$-u_{xx}^\omega + x^2 u^\omega + F(u^\omega) = \lambda^\omega u. \quad (5.17)$$

Wir werden nun zeigen, dass  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda^\omega = \lambda_0$  gilt, wobei  $\lambda_0$  der zu  $u_0$  gehörige erste Eigenwert des harmonischen Oszillators ist.

Dazu bilden wir das  $L^2$ -Skalarprodukt der Euler-Lagrange-Gleichung (5.17) mit  $u^\omega$  und erhalten

$$\|u^\omega\|_X^2 - 2G(u^\omega) = \lambda^\omega \omega, \text{ also } \lambda^\omega = \frac{\|u^\omega\|_X^2}{\omega} - 2\frac{G(u^\omega)}{\omega}.$$

Demnach gilt einerseits wegen der Charakterisierung von  $\lambda_0$  mittels des Rayleigh-Quotienten,

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} \mid u \in X, u \neq 0 \right\},$$

vgl. Lemma 5.2.10, die Abschätzung

$$\lambda^\omega > \lambda_0 - \frac{2G(u^\omega)}{\omega} \rightarrow \lambda_0 \text{ für } \omega \rightarrow 0,$$

und andererseits nach Definition von  $J^\omega$

$$\lambda^\omega < \frac{J(\sqrt{\omega}u_0)}{\omega} = \|u_0\|_X^2 - \omega G(u_0) = \lambda_0 - \omega G(u_0) \rightarrow \lambda_0 \text{ für } \omega \rightarrow 0. \quad (5.18)$$

Damit folgt  $\lambda^\omega \rightarrow \lambda_0$  für  $\omega \rightarrow 0$ .

Demnach verzweigen die Grundzustände  $u^\omega$  ebenso wie der Lösungsweig aus Satz 5.1.4 in  $(0, \lambda_0)$ . Da der Satz von Rabinowitz Eindeutigkeit in der Nähe des Verzweigungspunktes liefert, muss der Zweig demnach aus den Grundzuständen bestehen.

Damit ist weiter gezeigt, dass das Kontinuum von Lösungen in  $L^2(\mathbb{R})$  unbeschränkt ist und wegen der kompakten Einbettung  $X \subset\subset L^2(\mathbb{R})$  damit auch in  $X$ . Zusätzlich folgt aus der Abschätzung (5.18), dass mit  $\|u\|_2^2 = \omega$  gegen  $\infty$  auch  $\lambda$  unbeschränkt ist.

Wegen  $\lambda^\omega \leq \lambda_0$  lässt sich ebenfalls die Verzweigungsrichtung ablesen.

Mit ähnlichen Argumenten sind wir nun in der Lage, Lemma 5.2.3 zu beweisen:

*Beweis von Lemma 5.2.3.* Sei  $\Gamma u$  definiert als  $\Gamma u(x) = u(-x)$ . Dann ist  $J$  invariant unter  $\Gamma$ , denn  $\Gamma$  ist Isometrie in  $X$  und für den nichtlinearen Term gilt ebenfalls  $G(u) = G(\Gamma u)$ , letzteres da  $S(z)$  und  $\Gamma$  kommutieren: Sei dazu

$$v(z) := \Gamma S(z)u,$$

dann folgt  $v(0) = \Gamma u$  und mit  $Au = u_{xx} - x^2v$  gilt

$$\begin{aligned} iv_z &= i\Gamma (iR^{\text{eff}}(z)AS(z)u) \\ &= -R^{\text{eff}}(z)A\Gamma S(z)u, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Dann lässt sich mit dem Prinzip der symmetrischen Kritizität [57] die Suche nach Grundzuständen auf  $X_\Gamma = \{u \in X \mid \Gamma u = u\}$  einschränken, was zusammen mit der Invarianz von  $J$  unter  $\Gamma$  die Existenz von geraden Grundzuständen liefert.

Da die zum ersten Eigenwert  $\lambda_0$  gehörige Eigenfunktion ebenfalls gerade ist, kann mit analogen Argumenten wie oben gezeigt werden, dass der Ast der geraden Grundzustände ebenfalls in  $\lambda_0$  verzweigt. Wegen der Eindeutigkeit in der Nähe des Verzweigungspunktes folgt dann die Behauptung.  $\square$

### 5.2.2. Stabilität der Grundzustände

In diesem Abschnitt werden wir die orbitale Stabilität der Lösungen beweisen, die im ersten Eigenwert verzweigen. Die allgemeine Theorie der orbitalen Stabilität für Lösungen von Gleichungen vom Typ der NLS in Form von stehenden Wellen geht auf Arbeiten von Cazenave und Lions [8] bzw. Rose und Weinstein [63] zurück. Für den hier betrachteten Fall des quadratischen Potentials wurde die orbitale Stabilität von Fukuizumi [14] und Zhang [84] bewiesen. Im Folgenden werden wir sehen, dass die Argumente auch für die hier betrachtete Nichtlinearität Gültigkeit besitzen.

Ist  $u^\omega$  Grundzustand, so existiert ein  $\lambda = \lambda(\omega)$  derart, dass  $v = \exp(i\lambda z)u^\omega$  Lösung von

$$iv_z + v_{xx} - x^2v - F(v) = 0 \quad (5.19)$$

ist, dann ist aber wegen der Invarianz von  $F$  gegenüber Translationen der Phase, d.h.  $F(\exp(i\theta)v) = \exp(i\theta)F(v)$  für  $\theta \in \mathbb{R}$ , auch  $\exp(i\theta)v$  eine Lösung. Aufgrund des quadratischen Potentials ist die Gleichung allerdings nicht invariant gegenüber Translation bezüglich  $x$ .

Sei  $S_\omega$  die Menge aller Grundzustände, also

$$S_\omega = \{u \in X \mid J(u) = J^\omega, \|u\|_2^2 = \omega\}.$$

Dann gilt

#### Satz 5.2.8.

*Die Grundzustände sind orbital stabil; genauer: Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $u \in X$  gilt:*

$$\inf_{u^\omega \in S_\omega} \|\phi - u^\omega\|_X < \delta \Rightarrow \inf_{u^\omega \in S_\omega} \|u(z, \cdot) - u^\omega(z, \cdot)\|_X < \epsilon \quad \forall z > 0$$

*Dabei bezeichnet  $u(z, \cdot)$  die Lösung von (5.19) mit  $u(0, \cdot) = \phi$ .*

Die Bedeutung der Stabilitätsaussage klärt

#### Bemerkung 5.2.9.

- (i) *Falls die Menge der Grundzustände  $S_\omega \neq \{\exp(i\theta)u^\omega \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  ist, also falls keine Eindeutigkeit des Grundzustands vorliegt, so bedeutet die Stabilitätsaussage, dass die Menge  $S_\omega$  stabil ist unter dem Fluss der von der Gleichung (5.3) generiert wird.*
- (ii) *Mit dem Argument von Rose und Weinstein [63] ergibt sich die orbitale Stabilität lokal in der Nähe des Verzweigungspunktes  $(\lambda_0, 0)$  aus der Verzweigungsrichtung zusammen mit der Tatsache, dass die Grundzustände lokal eindeutig bis auf Translation der Phase sind. In der Originalarbeit wurde dies aber nicht für unbeschränkte Potentiale gezeigt, dies ist jedoch Gegenstand von Abschnitt 4 in [14]. Die dort erzielten Ergebnisse besitzen auch für die hier untersuchte Nichtlinearität Gültigkeit, wie man leicht sieht.*

*Beweis von Satz 5.2.8.* Der Beweis verläuft analog zu den Argumenten von Zhang [84] und benutzt die Erhaltung von  $\|u\|_2^2$  und  $J(u)$ . Letzteres gilt wegen der Glattheit von  $u$  und

$$\frac{\partial}{\partial t} J(u(t)) = 2\Re \left( J'(u(t)) \overline{u_t(t)} \right) = 2\Re \left( i \|u_t(t)\|_2^2 \right) = 0,$$

falls  $u$  Lösung von (5.19) ist. Obwohl das weitere Vorgehen analog läuft, geben wir den Beweis zur Vollständigkeit an:

Angenommen, die Behauptung des Satzes ist falsch. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  und eine Folge  $u_n \in X$  und eine Folge  $z_n > 0$  mit

$$\inf_{u^\omega \in S_\omega} \|u_n(0, \cdot) - u^\omega\|_X < \frac{1}{n}$$

und

$$\inf_{u^\omega \in S_\omega} \|u_n(z_n, \cdot) - u^\omega(z, \cdot)\|_X \geq \epsilon.$$

Insbesondere ist  $u_n(0, \cdot)$  als beschränkte Folge in  $X$  in  $L^2(\mathbb{R})$  stark konvergent gegen ein  $u \in S_\omega$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n(0, \cdot)) = J^\omega.$$

Damit gilt für die Folge  $v_n = u_n(z_n)$  aufgrund des Erhaltungssatzes für  $J$ :

$$J(v_n) = J(u_n(z_n)) = J(u_n(0))$$

und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_2^2 = \omega \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = J^\omega.$$

Damit ist  $v_n$  Minimalfolge, diese konvergieren, wie in Abschnitt 5.2.1 gesehen, stark in  $X$  gegen einen Grundzustand. Also existiert  $u^\omega \in S_\omega$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u^\omega\|_X = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. □

### 5.2.3. Existenz von Sattelpunkten

Im letzten Abschnitt haben wir die Lösungen, die im ersten Eigenwert verzweigen, charakterisiert. In diesem Abschnitt werden wir die Lösungen, die aus den anderen Eigenwerten verzweigen, genauer untersuchen. Diese korrespondieren zu Sattelpunkten des Energiefunktionals. Um diese Sattelpunkte in Verbindung mit den Ästen zu bringen, ist folgende Charakterisierung mit dem Minmax-Prinzip hilfreich [13],

**Lemma 5.2.10.**

Der  $n$ -te Eigenwert und die  $n$ -te Eigenfunktion des harmonischen Oszillators sind gegeben durch die Formel

$$\lambda_n = E(u_n) = \inf \left\{ E(u) = \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} \mid u \in F_n \right\}. \quad (5.20)$$

Dabei ist

$$F_n = \{u \in X \mid (u, u_i)_{L^2} = 0 \ \forall \ i = 0, \dots, n-1\}.$$

Weiter gilt

$$\lambda_n = \max_{X_{n-1} \subset X} \min_{u \in X_{n-1}^\perp} E(u),$$

wobei das Maximum über alle  $n-1$ -dimensionalen Unterräume von  $X$  genommen wird.

Der folgende Satz sichert die Existenz unendlich vieler Lösungen mit vorgegebener  $L^2$ -Norm:

**Satz 5.2.11.**

Sei  $\omega > 0$ . Dann existieren unendlich viele Lösungen  $u_n \in X \cap C^\infty(\mathbb{R})$  der Gleichung (5.3) mit  $\|u\|_2^2 = \omega$ .

Der entscheidende Punkt im Beweis ist zu zeigen, dass die zugehörigen Funktionale eine Bedingung vom Palais-Smale-Typ erfüllen.

**Definition 5.2.12.**

$I$  genügt der Palais-Smale-Bedingung auf  $S = \{u \in X \mid K(u) = 0\}$  genau dann wenn jede Folge  $(u_n, \lambda_n)$  mit

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ in } \mathbb{R}, \quad I'(u_n) - \lambda_n K'(u_n) \rightarrow 0 \text{ in } X'$$

eine konvergente Teilfolge besitzt.

Zum Beweis von Satz 5.2.11 benötigen wir folgendes Theorem [34], das eine Verallgemeinerung des Satzes von Ljusternik-Schnirelmann auf unendlich-dimensionale Hilberträume darstellt :

**Theorem 5.2.13.**

Sei  $X$  ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum,  $I, G \in C^1(X, \mathbb{R})$  mit  $G'(v) \neq 0 \ \forall v \in X - \{0\}$  und  $S := \{v \in X : G(v) = 0\}$ . Falls  $I|_S$  gerade, nach unten beschränkt und der Palais-Smale-Bedingung auf  $S$  genügt, dann existieren unendlich viele kritische Werte auf  $S$ , d.h..  $c_k \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein Paar  $(v_k, \mu_k) \in S \times \mathbb{R}$  mit  $I(v_k) = c_k$  und  $I'(v_k) - \mu_k G'(u_k) = 0$ .

*Beweis von Satz 5.2.11.* Definiere die Funktionale

$$J(u) := \|u\|_X^2 - G(u), \text{ und } K(u) = \|u\|_2^2$$

Nach Theorem 5.2.13 genügt es zu zeigen, dass  $J$  einer Palais-Smale-Bedingung auf  $S := \{u \in X : \tilde{G}(u) := K(u) - \omega = 0\}$  genügt:

Sei dazu  $(u_n, \lambda_n)$  eine Palais-Smale Folge auf  $S$ , dann gilt insbesondere

$$(J'(u_n) - \lambda_n K'(u_n), u_n)_{L^2} \rightarrow 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich schreiben als

$$(J'(u_n)u_n - \lambda_n u_n, u_n)_{L^2} = J(u_n) - \lambda_n K(u_n) = J(u_n) - \lambda_n \omega.$$

Demnach folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{c}{\omega}.$$

Jetzt zeigen wir, dass  $u_n$  beschränkt in  $X$  ist. Wie im Beweis von Lemma 5.2.5 gilt

$$\begin{aligned} \|u_n\|_X^2 = J(u_n) - G(u_n) &\leq J(u_n) + C|G(u_n)| \\ &\leq C + C \|u_n\|_X \|u_n\|_2^3 \\ &\leq C(1 + \|u_n\|_X)\omega^{3/2} \end{aligned}$$

Demnach ist  $\|u_n\|_X^2$  beschränkt und besitzt eine in  $X$  schwach konvergente Teilfolge. Aufgrund der kompakten Einbettung  $X \subset\subset L^q$  gilt (für eine weitere Teilfolge)  $u_n \rightarrow u$  stark in  $L^q$  für alle  $q \geq 2$  und  $u_n \hookrightarrow u$  in  $X$ . Die starke Konvergenz  $u_n \rightarrow u$  in  $X$  folgt dann aus der Tatsache, dass ein  $L^q$ -Raum stetig in  $X'$ , dem Dualraum von  $X$ , eingebettet werden kann, und dass der Operator des harmonischen Oszillators einen Isomorphismus zwischen  $X$  und  $X'$  induziert, vgl. [35].

Aus Theorem 5.2.13 folgt nun, dass  $J$  auf  $S$  eine Folge von kritischen Werten mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  besitzt. Die zugehörigen kritischen Punkte  $u_n$  erfüllen dann die Gleichung

$$-u_{xx} + x^2 u + F(u) = \lambda u$$

im schwachen Sinne. Somit existieren zu vorgegebenem  $\|u\|_2$  unendlich viele Lösungen.  $\square$

#### **Bemerkung 5.2.14.**

*Es sei noch darauf hingewiesen, dass auch für die Einschränkung von  $J$  auf den Raum  $X_\Gamma = \{u \in X, \Gamma u = u\}$  die Existenz einer unbeschränkten Folge von kritischen Werten gezeigt werden kann, welche zu Lösungen korrespondieren, die gerade sind. Die gleichen Argumente lassen sich auf die Symmetrie  $\Gamma_2$  mit  $\Gamma_2 u(x) = -u(-x)$  anwenden, diese liefert unendlich viele ungerade Lösungen. In diesem Sinne minimiert  $u_1$  aus Satz 5.2.11 offenbar das Energiefunktional auf  $X_{\Gamma_2}$ .*

Die gefundenen Lösungen korrespondieren analog zu den Grundzuständen zu den Ästen, die an den anderen Eigenwerten verzweigen. Dies soll im Folgenden kurz erläutert werden:

Die kritischen Werte  $c_n$  aus Satz 5.2.13 lassen sich charakterisieren als

$$c_n^\omega = \inf_{A \in \mathcal{B}_n} \max_{u \in A} \frac{J(u)}{\omega},$$

wobei wir hier auf die dort vorgenommene Normierung auf die Einheitssphäre verzichten. Dabei bezeichnet  $\mathcal{B}_n$  eine Familie von Mengen  $A$  mit den folgenden Eigenschaften

- $A \subset X \setminus \{0\}$
- $A$  ist abgeschlossen und nichtleer
- $A$  ist symmetrisch zum Ursprung, d.h.  $x \in A \Rightarrow -x \in A$
- Der Genus von  $A$  ist mindestens  $n$ . Dabei benutzen wir hier nicht die Ursprungsdefinition von Krasnoelskii, sondern eine äquivalente Formulierung von Coffman [10]  $\gamma(A) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \phi \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \text{ ungerade}\} \geq n$ . In der Literatur findet man auch oft  $\text{cat}(A)$  statt  $\gamma(A)$  [82].

Zu jedem dieser kritischen Werte  $c_n$  und zu jedem  $\omega > 0$  gehört nun ein Lagrangscher Multiplikator  $\lambda_n^\omega$  und eine Lösung  $v_n^\omega$ . Unter Benutzung der Gleichung 5.17 folgt

$$\lambda_n^\omega = \frac{J(u_n)}{\omega} = c_n^\omega.$$

Zunächst gilt

$$c_n^\omega = \inf_{A \in \mathcal{B}_n} \max_{u \in A} \frac{J(u)}{\omega} < \inf_{A \in \mathcal{B}_n} \max_{v \in A} \frac{\|u\|_X^2}{\omega}.$$

Aus [34] in Verbindung mit Lemma 5.2.10 ist weiter bekannt, dass

$$\inf_{A \in \mathcal{B}_n} \max_{v \in A} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} = \min_{X_{n-1} \subset X} \max_{u \in X_{n-1}} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} = \max_{X_{n-1} \subset X} \min_{u \in X_{n-1}^\perp} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} = \lambda_n$$

gilt. Also ist

$$\lambda_n^\omega < \lambda_n.$$

Um  $\lambda_n^\omega$  nach unten abzuschätzen, benutzen wir die Abschätzung aus dem Beweis von Lemma 5.2.5 und erhalten

$$\lambda_n^\omega > -C\omega^3/2.$$

Durch Grenzübergang folgt  $0 \leq \lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_n^\omega \leq \lambda_n$ . Es ist bekannt, dass  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_0^\omega = \lambda_0$  und der in  $\lambda_0$  verzweigende Ast eindeutig ist. Weiter ist klar, dass  $\lambda_1^\omega$  gegen einen Eigenwert kleiner oder gleich  $\lambda_1$  konvergiert. Wäre dies  $\lambda_0$ , so gäbe es wegen  $\lambda_0^\omega = c_0^\omega < c_1^\omega = \lambda_1^\omega$  zwei Lösungen, die in  $\lambda_0$  verzweigen, was der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Rabinowitz [62] widerspräche. Insofern muss  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_1^\omega = \lambda_1$  gelten. Die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt nun induktiv.

Damit bilden die Lösungen, die zum kritischen Wert  $c_n$  gehören, den Zweig, der im Eigenwert  $\lambda_n$  verzweigt. Dieser Zweig ist in der  $L^2$ -Norm unbeschränkt, demnach also auch in  $X$ .

### 5.2.4. Existenz unendlich vieler Lösungen für jedes $\lambda$

In diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz unendlich vieler Lösungen  $u_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X = \infty$  für ein gegebenes  $\lambda$ .

#### Satz 5.2.15.

Für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  besitzt die Gleichung (5.3) eine unbeschränkte Folge von Lösungen  $u_n \in X$ .

Dieser Satz wurde für die Nichtlinearität  $F(u) = -|u|^{p-1}u$  mit  $p > 2$  von Kavian und Weissler [35] bewiesen. Der Beweis von Satz 5.2.15 lässt sich analog zu dem in [35] durchführen. Der einzige Unterschied ist zu zeigen, dass für die Nichtlinearität (5.2) eine analoge Ungleichung wie (6.3) aus [35] genügt. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas:

#### Lemma 5.2.16.

Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $C_\epsilon$ , so dass für alle  $u \in X$  gilt:

$$\|u\|_2^2 \leq C_\epsilon \int_0^1 \|S(z)u\|_4^4 + \epsilon \|u\|_X^2.$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben und  $R^2 > 1/\epsilon$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |S(z)u|^2 dx dz = \int_0^1 \left( \int_{|x| \geq R} |S(z)u|^2 dx + \int_{|x| < R} |S(z)u|^2 dx \right) dz \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{R^2} \int_{|x| \geq R} R^2 |S(z)u|^2 dx + \int_{|x| < R} |S(z)u|^2 dx \right) dz \\ &\leq \int_0^1 \left( \epsilon \int_{\mathbb{R}} x^2 |S(z)u|^2 dx + C_\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}} |S(z)u|^4 dx \right)^2 \right) dz, \end{aligned}$$

wobei  $\|v\|_{L^2(B_R(0))} \leq C \|v\|_{L^4(B_R(0))}$  in der letzten Ungleichung benutzt wurde. Die Behauptung des Lemmas folgt dann aus  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |S(z)u|^2 \leq \|S(z)u\|_X^2 = \|u\|_X^2$ .  $\square$

In diesem Abschnitt wenden wir Theorem 5.2.13 auf das für  $u \in X$  definierte Funktional

$$I(u) := \|u\|_X^2 - \lambda \|u\|_2^2$$

unter der Nebenbedingung  $G(u) = 1$  an. Die Beschränktheit der Palais-Smale Folge in  $X$  folgt hier mittels Lemma 5.2.16 für  $\epsilon > 0$  mit  $\epsilon|\lambda| < 1/2$

$$\begin{aligned} \|u_n\|_X^2 &= I(u_n) - \lambda \|u_n\|_2^2 \leq I(u_n) + |\lambda| \|u_n\|_2^2 \\ &\leq C + |\lambda| (\epsilon \|u_n\|_X^2 + C_\epsilon G(u_n)) \leq C + \frac{1}{2} \|u_n\|_X^2 + |\lambda| C_\epsilon, \end{aligned}$$

was  $\|u_n\|_X^2/2 \leq C + |\lambda| C_\epsilon$  impliziert. Damit folgt analog zum letzten Abschnitt die Existenz unendlich vieler kritischer Punkte von  $I$  auf  $S = \{u \in X | G(u) = 1\}$ . Es bleibt, die Existenz unendlich vieler Lösungen der Gleichung

$$-u_{xx} + x^2 u + F(u) = \lambda u$$

zu zeigen; dies ist Standard: Sei  $u_n$  ein kritischer Punkt, so dass  $I(u_n) = c_n > 0$ . Man beachte, dass aus der Unbeschränktheit von  $c_n$  die Existenz eines  $k \in \mathbb{N}$  mit  $c_n > 0$  für alle  $k > n$  folgt. Damit ist  $u_n$  schwache Lösung von

$$-u_{xx} + x^2 u + \mu F(u) = \lambda u$$

für ein  $\mu = \mu_n$ . Durch skalare Multiplikation mit  $u$  folgt, dass  $\mu_n = c_n > 0$  ist. Setzt man nun  $v_n = \sqrt{\mu_n} u_n$ , so erhält man eine Lösung der Originalgleichung. Da  $I(u_n) = c_n \rightarrow \infty$  erfüllt die Folge  $v_n$  die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_X = \infty$ . Die Lösungen korrespondieren dabei zu den kritischen Werten

$$c_n = \inf_{A \in \mathcal{B}_n} \max_{u \in A} \frac{\|u\|_X^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\omega},$$

wobei hier für  $A \in \mathcal{B}_n$  gelten muss:  $A \subset S = \{u \in X \mid G(u) = 1\}$ .

Es sei noch bemerkt, dass man die Aussage ebenfalls mit Hilfe des Mountain-Pass-Lemma in der symmetrischen Form hätte zeigen können. Dies hat zum Vorteil, dass die Darstellung der kritischen Werte ein besseres Verständnis über die Art der Lösungen auf den einzelnen Zweigen zulässt. Daher wollen wir diesen alternativen Beweis im Folgenden kurz darstellen. Dazu benötigen wir das folgende Theorem [69]

**Theorem 5.2.17.**

Das Funktional  $E \in C^1(X)$  sei gerade und erfülle die Palais-Smale Bedingung sowie  $E(0) = 0$ .  $X^+$  und  $X^-$  seien abgeschlossene Unterräume mit  $X = X^- \oplus X^+$ , wobei  $X^-$  endlich-dimensional ist. Weiter gelte

- (i)  $\exists \alpha > 0, \rho > 0 : \|u\|_X = \rho, u \in X^+ \Rightarrow E(u) \geq \alpha$
- (ii) Für jeden endlichdimensionalen Unterraum  $Y \subset X$  existiert ein  $R_Y$  so dass  $E(u) \leq 0$  für  $u \in Y$  mit  $\|u\|_X \geq R_Y$ .

Dann besitzt  $E$  eine unbeschränkte Folge kritischer Werte  $\beta_n$ .

Um das Theorem auf

$$E(u) = \|u\|_X^2 - \lambda \|u\|_2^2 - G(u)$$

anzuwenden, sei  $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Zunächst definieren wir  $X^- = \langle u_0, \dots, u_k \rangle$  und  $X^+ = \langle u_0, \dots, u_k \rangle^\perp$ . In der gegebenen Situation sind die kritischen Werte  $\beta_n$  dabei durch

$$\beta_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \sup_{u \in Y_n} H(\gamma(u))$$

für  $n > k$  gegeben. Dabei gilt  $Y_n = \langle u_0, \dots, u_n \rangle$  und

$$\Gamma_n = \{\gamma \in C^0(X, X) \mid \gamma \text{ ungerade}, \forall j \leq n, u \in Y_n : \|u\|_X \geq R(Y_n) \Rightarrow \gamma(u) = u\}.$$

Anhand dieser Charakterisierung der kritischen Werte lassen sich die einzelnen Äste wie folgt beschreiben: Die Lösungen, die in  $\lambda_k$  verzweigen, sind Sattelpunkte des Energiefunktionals. Dabei sind die instabilen, absteigenden Richtungen gegeben durch die ersten Eigenfunktionen  $u_0, \dots, u_{k-1}$ . In diesem Sinne wird von Ast zu Ast eine instabile Richtung hinzugewonnen.

### 5.3. Abklingverhalten

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass die Lösungen exponentiell abfallen. Die üblichen Argumente, mit denen das Gauß-artige Abklingverhalten der Lösungen für die Nichtlinearität  $F(u) = -|u|^p u$  nachgewiesen werden kann, stützen sich auf nodale Eigenschaften der Lösung [30] oder Maximumprinzipien [35]. Diese Argumente finden hier allerdings aufgrund der nicht-lokalen Nichtlinearität keine Anwendung.

**Satz 5.3.1.**

Sei  $u$  eine Lösung der Gleichung (5.3). Dann existiert ein  $C > 0$  so dass

$$|u(x)| + |u_x(x)| < C \exp(-|x|/3).$$

Der Beweis lehnt sich dabei an Theorem 8.1.1 in [7] an, wo allerdings kein Potential betrachtet wird. Es sei noch bemerkt, dass keine Restriktion an  $\lambda$  besteht. Satz 5.3.1 bleibt selbstverständlich auch für die Nichtlinearität  $F(u) = -|u|^p u$  gültig und stellt daher eine Verallgemeinerung des Resultats aus [14] dar, welches nur für  $\lambda > 0$  gilt.

*Beweis von Satz 5.3.1.* Wir definieren für  $\epsilon > 0$  die Funktion

$$f^\epsilon(x) := \exp\left(\frac{x}{1 + \epsilon x}\right).$$

Dabei benötigen wir folgende Eigenschaften [7]

- $f^\epsilon$  ist beschränkt  $\forall \epsilon > 0$
- $f_x^\epsilon(x) \leq f^\epsilon(x)$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f^\epsilon(x) = \exp(x)$

Die Idee des Beweis besteht darin, zu zeigen, dass  $\|f^\epsilon u\|_2$  durch einen in  $\epsilon$  beschränkten Term nach oben abgeschätzt werden kann. Die Behauptung folgt dann durch Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Multiplikation von Gleichung (5.3) mit  $f^\epsilon \bar{u}$  und Integration liefert im Realteil

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx &= \Re \left( \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz f^\epsilon \bar{u} dx \right) \\ &\quad - \Re \left( \int_{\mathbb{R}} u_x (f^\epsilon \bar{u})_x dx \right). \end{aligned}$$

Zunächst schätzen wir die linke Seite nach unten ab. Es gilt für  $R_1 := \sqrt{|\lambda| + 1}$ , wobei  $B_R := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx &= \int_{B_{R_1}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx + \int_{x > R_1} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx \\ &\geq \int_{B_{R_1}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx + (R_1^2 - \lambda) \int_{x > R_1} f^\epsilon |u|^2 dx, \end{aligned}$$

was wegen  $R_1^2 - \lambda \geq 1$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{x>R_1} f^\epsilon |u|^2 dx &\leq - \int_{B_{R_1}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx - \Re \left( \int_{\mathbb{R}} u_x (f^\epsilon \bar{u})_x dx \right) \\ &\quad + \Re \left( \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz f^\epsilon \bar{u} dx \right) \end{aligned}$$

impliziert. Nun schätzen wir die rechte Seite nach oben ab, der erste Term ist beschränkt in  $\epsilon$ , also gutartig. Für den zweiten Term gilt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $f_x^\epsilon \leq f^\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \Re \left( \int_{\mathbb{R}} u_x (f^\epsilon u)_x dx \right) &= \Re \left( \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 + f_x^\epsilon u_x \bar{u} dx \right) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 - f^\epsilon |u| |u_x| dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx - \left( \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx - \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{B_{R_1}} f^\epsilon |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x>R_1} f^\epsilon |u|^2 dx \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x>R_1} f^\epsilon |u|^2 dx \\ &\leq - \int_{B_{R_1}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_{R_1}} f^\epsilon |u|^2 dx \\ &\quad + \Re \left( \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz f^\epsilon \bar{u} dx \right), \end{aligned}$$

und es bleibt, die Nichtlinearität abzuschätzen. Dazu spalten wir sie in ein Integral über  $x \leq R$  und über  $x > R$  mit noch zu bestimmendem  $R > R_1$  auf. Für das zweite Integral gilt wegen  $f^\epsilon u \in X$  für alle  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{x>R} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) f^\epsilon \bar{u} dx dz \right| \\ &= \left| \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{x>R} \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \overline{S(z)(f^\epsilon u)} dx dz \right| \\ &\leq \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \max_{z \in [0,1]} \left( \left\| \frac{1}{T(z)} S(z)u \right\|_{L^\infty(x>R)}^2 \right) \left| \int_0^1 \int_{x>R} S(z)u \overline{S(z)(f^\epsilon u)} dx dz \right| \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \max_{z \in [0,1]} \left( \frac{1}{T(z)} \|S(z)u\|_{L^\infty(x>R)}^2 \right) \left| \int_0^1 \int_{x>R} u (f^\epsilon \bar{u}) dx dz \right| \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \max_{z \in [0,1]} \left( \frac{1}{T(z)} \|S(z)u\|_{L^\infty(x>R)}^2 \right) \int_{x>R} f^\epsilon |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Da  $S(z)u \in L^2(\mathbb{R})$ , gilt insbesondere  $S(z)u(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ . Folglich existiert ein  $R_2 > R_1$  mit der Eigenschaft

$$\frac{N^2}{\sqrt{ab}} \max_{z \in [0,1]} \left( \frac{1}{T(z)} \|S(z)u\|_{L^\infty(x>R_2)}^2 \right) < \frac{1}{4}.$$

Daher gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^\epsilon |u_x|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{x>R_2} f^\epsilon |u|^2 dx &\leq - \int_{B_{R_1}} (x^2 - \lambda) f^\epsilon |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_{R_1}} f^\epsilon |u|^2 dx \\ &+ \left| \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \int_{B_{R_2}} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz f^\epsilon \bar{u} dx \right| \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite existiert aufgrund der Beschränktheit der Integrationsgrenzen der Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$ , was zur Folge hat, dass

$$\int_{x>R_2} \exp(|x|) |u(x)|^2 dx < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(|x|) |u_x|^2 dx < \infty$$

gilt. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(|x|) (|u(x)|^2 + |u_x(x)|^2) dx < \infty. \quad (5.21)$$

Mittels den Argumenten aus [7] folgt nun die Existenz eines  $C > 0$  mit

$$\exp(|x|) (|u(x)|^2 + |u_x(x)|^2) < C \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

was die Behauptung liefert.

Zur Vollständigkeit wollen wir die fehlenden Argumente hier reproduzieren: Da  $u(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ , folgt die Existenz eines  $R > 0$  mit  $|u(x)| < 1$  für  $|x| > R$  und

$$\exp(|x|/3) |u(x)| \leq \exp(R/3) \|u\|_\infty \quad \text{für } |x| < R. \quad (5.22)$$

Aus der Lipschitzstetigkeit der Lösung folgt die Existenz eines  $L > 0$  mit

$$|u(x)| \leq |u(y)| + L|x - y| \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

und folglich

$$|u(x)|^2 \leq (|u(y)| + L|x - y|)^2 \leq 2|u(y)|^2 + L^2|x - y|^2.$$

Ist nun  $x > R$  und  $|x - y| \leq \frac{1}{2L}|u(y)|$ , so folgt

$$|u(x)|^2 \leq 2|u(y)|^2 + \frac{1}{4}|u(y)|^2 = C|u(y)|^2.$$

Definieren wir nun die Menge

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \frac{1}{2L}|u(x)|\}.$$

Das Maß von  $B(x)$  berechnet sich zu  $\mu(B(x)) = |u(x)|/L$  und damit gilt

$$\mu(B(x))|u(x)|^2 = \int_{B(x)} |u(x)|^2 dy \leq C \int_{B(x)} |u(y)|^2 dy.$$

Benutzen wir noch die Abschätzung

$$\exp(|x|) \leq C \exp(|y|) \text{ für } y \in B(x)$$

mit einer von  $x$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$ , so erhalten wir die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} \exp(x)|u(x)|^3 &= L\mu(B(x)) \exp(|x|)|u(x)|^2 = L \int_{B(x)} \exp(|x|)|u(x)|^2 dy \\ &\leq C \int_{B(x)} \exp(|y|)|u(y)|^2 dy \leq C \int_{\mathbb{R}} \exp(|y|)|u(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (5.21) insbesondere

$$\exp\left(\frac{|x|}{3}\right)|u(x)| \leq C \text{ für } |x| > R$$

und zusammen mit (5.21) dann die Behauptung. □

## 6. Anwendung der Ergebnisse auf die DM-NLS

In diesem Kapitel übertragen wir die erzielten Resultate auf die Ursprungsgleichung, die DM-NLS (1.9)

$$iA_z(z, t) + D(z)A_{tt}(z, t) + c|A(z, t)|^2A(z, t) = 0.$$

Durch die Betrachtungen in dieser Arbeit hat sich gezeigt, dass sich die DM-NLS nach Linsentransformation, van der Pol-Transformation (3.6) und Mittelung stets in die Form

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + F(u) = 0, \quad z \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

bringen lässt. Dabei ist  $F$  eine kubische, nicht-lokale Nichtlinearität, genauer

$$F(u) := \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz.$$

Bisher haben wir die einzelnen Gebiete stets nach dem Parameter  $T_0$  bzw. der Stärke  $y$  des Dispersionsprofils unterschieden. Vom mathematischen Gesichtspunkt aus ist es sinnvoller, die Energie als festen Parameter zu betrachten (vgl. [44, 66, 67]), wie dies in der Theorie der nichtlinearen Schrödingergleichungen üblich ist. Es ist bekannt, dass die Größe

$$E(z) = \int_{\mathbb{R}} |A(z, t)|^2 dt$$

eine Erhaltungsgröße der DM-NLS, also unabhängig von  $z$ , ist. Daher liegt es nahe, die Lösungen in Abhängigkeit der Energie zu parametrisieren. Ist die Energie  $E$  vorgegeben, so gilt unter der Linsentransformation

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{R}} |A(z, t)|^2 dt = \frac{N^2}{T(z)} \int_{\mathbb{R}} \left| Q(t/T(z), z) \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right) \right|^2 dt \\ &= N^2 \int_{\mathbb{R}} |Q(x, z)|^2 dx, \quad \text{mit } x = t/T(z). \end{aligned}$$

Um die DM-NLS nach Linsentransformation mitteln zu können, wurde im weiteren Verlauf die Transformation  $Q(x, z) = S(z)v(x, z)$  sowie der Ansatz  $v(x, z) = \exp(i\lambda z)u(x)$  durchgeführt. Damit folgt dann, da sich die Energie unter  $S(z)$  nicht verändert:

$$E = N^2 \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx. \tag{6.1}$$

Insofern kann der Parameter  $N$  in der Linsentransformation als Normierung der Energie angesehen werden. Für festes  $N$  sucht man dann in der transformierten Gleichung nach normierten Lösungen. Das starke Dispersionsmanagement zeichnet sich bekanntlich dadurch aus, dass nichtlineare Effekte sowie mittlere Dispersion klein sind. Durch Ansatz (6.1) ist es uns also gelungen, die korrekten Skalen für den Fall des starken Dispersionsmanagements in die DM-NLS nach Linsentransformation einzubringen, vgl. dazu untenstehende Bemerkung 6.0.2. Fixiert man  $N$ , so muss in den nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen der Parameter  $T_0 = T_0(\langle D \rangle, N^2)$  so bestimmt werden, dass die zugehörige Lösung periodisch ist. Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen, sind wir nicht an einem Grenzwert interessiert, sondern wollen für gegebene mittlere Dispersion und Energie angeben, ob ein DM-Soliton existiert und welche Gestalt sie hat.

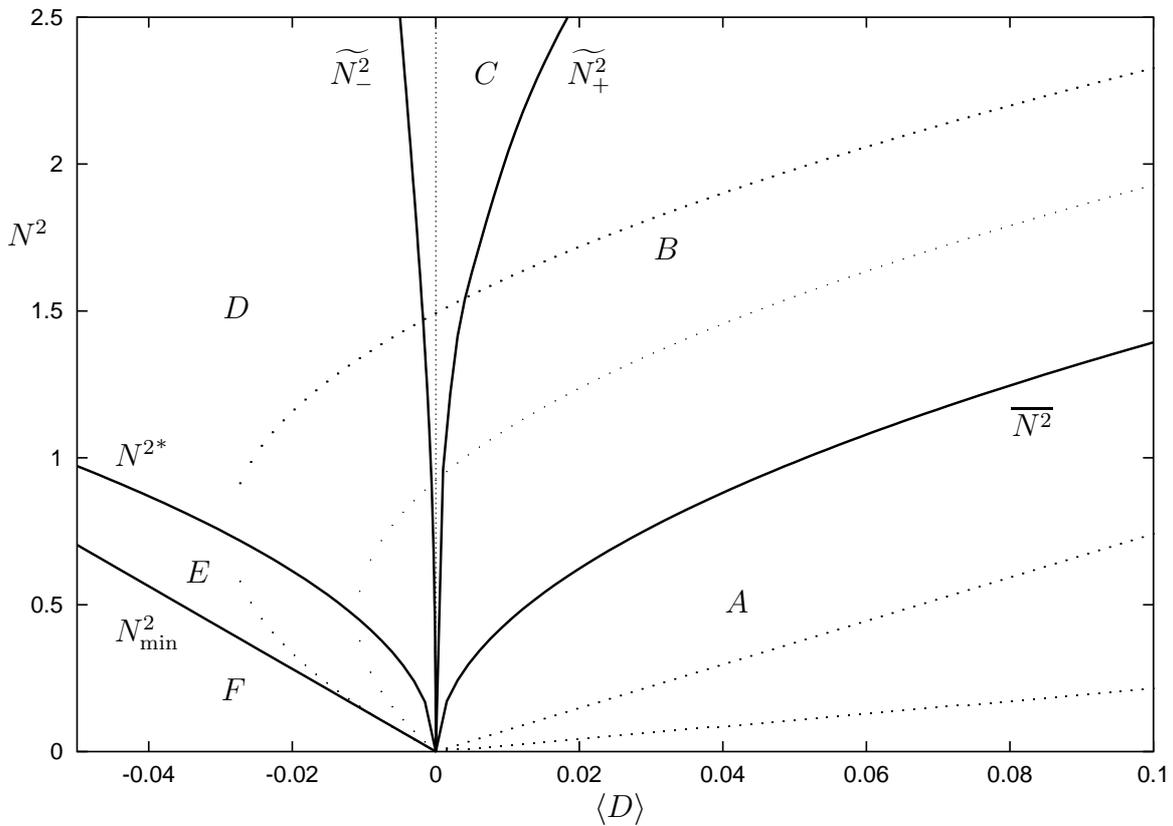


Abbildung 6.1.: Aufteilung der  $(\langle D \rangle, N^2)$ -Ebene in Gebiete mit konstantem Vorzeichen von  $a$  und  $b$ .

Mit Hilfe von Abbildung 6.1 kann man erkennen, welcher Gleichung ein Eingangssignal der Energie  $N^2$  bei gegebener mittlerer Dispersion genügt und damit Rückschlüsse über die Gestalt des DM-Solitons zu dieser Energie gewinnen. Die  $(\langle D \rangle, N^2)$ -Ebene wird dabei in sechs verschiedene Gebiete unterteilt.

- $A := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle > 0, 0 < N^2 < \overline{N}^2\}$
- $B := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle > 0, \overline{N}^2 < N^2 < \widetilde{N}^2\}$
- $C := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle > 0, \widetilde{N}_+^2 < N^2 \text{ oder } \langle D \rangle = 0 \text{ oder } \langle D \rangle < 0, \widetilde{N}_-^2 < N^2\}$

- $D := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle < 0, N^{2*} < N^2\}$
- $E := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle < 0, N_{\min}^2 < N^2 < N^{2*}\}$
- $F := \{(N^2, \langle D \rangle) | \langle D \rangle < 0, 0 < N^2 < N_{\min}^2\}$

Dabei werden die Definitionen der verschiedenen Werte von  $N^2$ , durch die die einzelnen Gebiete geteilt werden, im weiteren Verlauf dieses Kapitels angegeben. In jedem dieser Gebiete bleibt das Vorzeichen von  $a$  und von  $b$  konstant. Es wird sich dabei herausstellen, dass gilt

- in Gebiet  $A$ :  $a > 0, b > 0$  mit  $a, b$  von erster Ordnung,
- in Gebiet  $B$ :  $a > 0, b > 0$  mit  $a, b$  von höherer Ordnung,
- in Gebiet  $C$ :  $a > 0, b < 0$  mit  $a, b$  von höherer Ordnung,
- in Gebiet  $D$ :  $a < 0, b < 0$  mit  $a, b$  von höherer Ordnung,
- in Gebiet  $E$ :  $a < 0, b > 0$  mit  $a, b$  von erster Ordnung,
- in Gebiet  $F$ : keine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen.

In Abbildung 6.1 sind zusätzlich für verschiedene Werte von  $T_0$  die aus Kapitel 2 näherungsweise bekannten Werte von  $N^2(T_0)$  eingezeichnet. Man erkennt, dass in jedem der Gebiete  $A$  bis  $E$  zu gegebenem  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  ein eindeutiger Wert von  $T_0$  bestimmt werden kann; die einzelnen Kurven  $N^2(T_0)$  überdecken also das Gebiet, das aus der Vereinigung von  $A$  bis  $E$  entsteht. Im Gegensatz dazu existiert in Gebiet  $F$  keine periodische Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen.

### Bemerkung 6.0.2.

*Die bisher bekannten theoretischen Untersuchungen haben sich mit dem Fall beschäftigt, wo  $\langle D \rangle$  und  $N^2$  von gleicher Ordnung sind. Dies ist genau in den Gebieten  $A$  und  $E$  der Fall, dort ist das Mittelungsverfahren anwendbar und  $a$  und  $b$  sind ebenfalls von dieser Ordnung. Das modifizierte Mittelungsverfahren findet in den übrigen Gebieten Anwendung. Dort ist nicht mehr  $Z_{\text{rd}} \sim Z_{\text{nl}}$ , sondern  $Z_{\text{disp}} \ll Z_{\text{nl}} \ll Z_{\text{rd}}$ . Eine entsprechende Situation wurde bisher in der Literatur nicht untersucht; insofern sind die hier vorgeschlagenen Gleichungen als erster Schritt zur Untersuchung von  $DM$ -Solitonen mit großer Energie zu sehen.*

## 6.1. Der Fall $\langle D \rangle > 0$

Aus der Analyse der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen ist bekannt, dass im Fall positiver mittlerer Dispersion ein bijektiver Zusammenhang zwischen  $N^2$  und  $T_0$  besteht (vgl. Abbildung 6.2). Insofern existiert eine zu  $T_0 = \overline{T_0}$  äquivalente Parameterkonstellation. Um diese zu bestimmen, müssen wir zunächst die Beziehung zwischen  $N^2$  und  $T_0$  näherungsweise errechnen. Dazu benötigen wir abermals Beziehung (2.19):

$$N^2 = N^2(T_0, \langle D \rangle) \sim -\frac{b(T_0 - \overline{T_0})}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2(T_0 - \overline{T_0})^2 - 4ac\langle D \rangle}}{2a}.$$

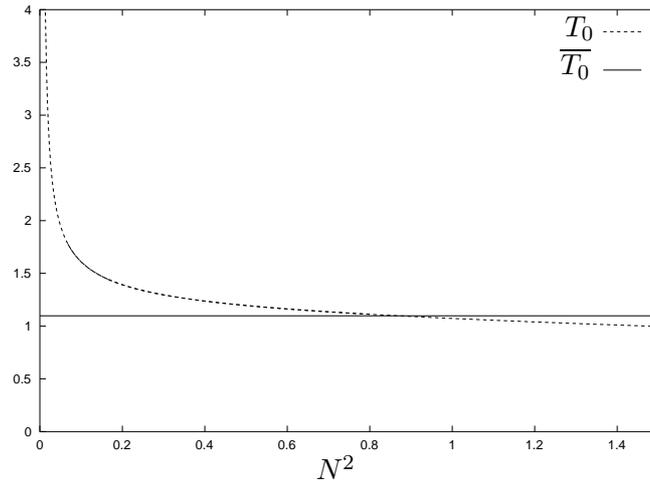


Abbildung 6.2.: Der Parameter  $T_0$  als Funktion von  $N^2$  für  $\langle D \rangle = 0.05$ , also  $\overline{N^2} \sim 0.985$ .

Setzen wir nun  $T_0 = \overline{T_0}$ , so ergibt sich

$$N^2 = \overline{N^2} := \frac{\sqrt{-4ac\langle D \rangle}}{2a} \sim 4.406\sqrt{\langle D \rangle}.$$

Dabei korrespondiert der Fall  $T_0 > \overline{T_0}$  zu  $N^2 < \overline{N^2}$ . Selbstverständlich ist auch  $\overline{N^2}$  nur ein Näherungswert.

### 6.1.1. Der Fall $N^2 < \overline{N^2}$

Für  $N^2 < \overline{N^2}$  befinden wir uns in Gebiet A aus Abbildung 6.1. Die Analyse in Kapitel 3 hat gezeigt, dass dort  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  von der gleichen Ordnung sind. Auch  $a$  und  $b$  sind beide von dieser Ordnung und positiv. Daher sind in diesem Gebiet die analytischen Aussagen aus Kapitel 5 gültig; die hier erzielten Ergebnisse sind das Hauptresultat dieser Arbeit. Es sei darauf hingewiesen, dass die Literatur aus dem Kontext der Linsentransformation sich bisher ausschließlich mit dieser Situation beschäftigt hat. Auch die Ergebnisse von Zharnitsky et al. [83] bzw. Kunze [40] befassen sich mit der hier vorliegenden Parameterkonstellation, da dort  $N^2 = \langle D \rangle = \mathcal{O}(\epsilon)$  angenommen wurde.

#### Bemerkung 6.1.1.

*Es ist auffallend, dass der Wert von  $\overline{N^2}$  unabhängig von der lokalen Dispersion  $d$  ist (vgl. Abbildung 6.3). Das qualitative Verhalten der DM-Solitonen wird also nur durch das Verhältnis von Anfangsenergie des Pulses und mittlerer Dispersion bestimmt. Selbstverständlich hängen die Werte von  $a$  und  $b$ , und damit das DM-Soliton, trotzdem von  $d$  ab. Um allerdings das Gebiet A zu definieren, und damit das qualitative Verhalten zu beschreiben, wird  $d$  nicht benötigt.*

Mit Hilfe der Ergebnisse des letzten Kapitels sind wir in der Lage, die Existenz von Lösungen der DM-NLS in Abhängigkeit von  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  anzugeben. Dabei sind wir, wie bereits erwähnt, an normierten Lösungen interessiert.

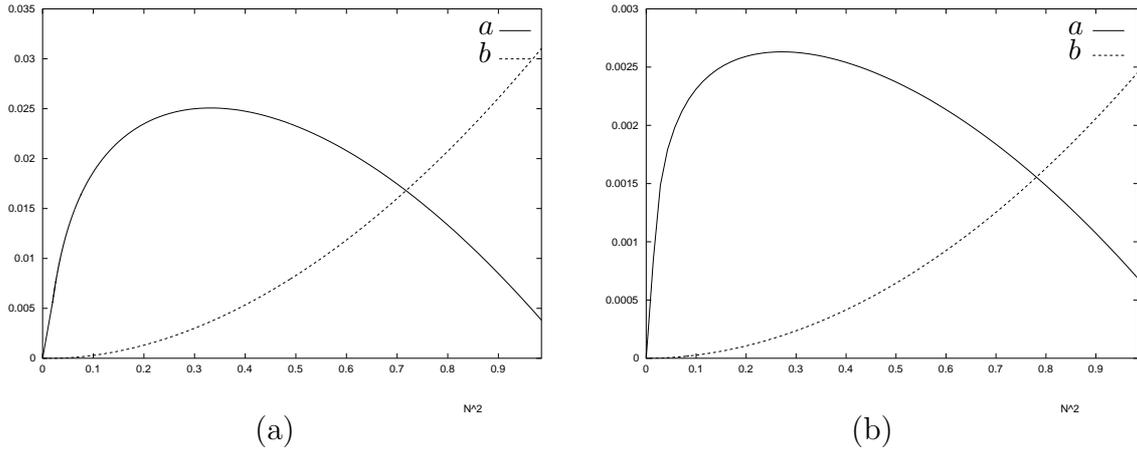


Abbildung 6.3.: Die Werte von  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $N^2$  für  $\langle D \rangle = 0.05$  und (a)  $d = 8$  sowie (b)  $d = 100$  zwischen  $N^2 = 0$  und  $\overline{N^2} = 0.985$

### Satz 6.1.2.

Für  $N^2 < \overline{N^2}$  existieren unendlich viele Lösungen  $u_n$  der gemittelten DM-NLS mit  $\|u_n\|_2 = 1$ . Weiter gilt

- $u_0$  ist stabil als Grundzustand des zur gemittelten DM-NLS gehörigen Energiefunktionals  $H$ , dies ist das DM-Soliton.
- Die  $u_n$  mit  $n \geq 1$  sind Sattelpunkte von  $H$ , diese Lösungen sind Moden höherer Ordnung.
- Die  $u_n$  klingen exponentiell ab, genauer

$$|u_n(x)| \leq C \exp\left(-\gamma(N^2) \frac{|x|}{3}\right) \quad \text{mit } \gamma(N^2) = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} > 0$$

Satz 6.1.2 ist das Hauptergebnis dieser Arbeit. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden wir die Bedeutung dieser theoretischen Ergebnisse für die Ursprungsgleichung und deren Relevanz für die Praxis diskutieren.

### Bemerkung 6.1.3.

- Die Gestalt von  $\gamma(N^2)$  kann Abbildung 6.4 entnommen werden. Kleine Energien korrespondieren zu großen Werten von  $T_0$ . Dort spielt das quadratische Potential keine Rolle und die zugehörigen Lösungen sind den klassischen Solitonen sehr ähnlich. Mit zunehmender Energie gewinnt das quadratische Potential an Bedeutung; die zugehörigen Lösungen sind die DM-Solitonen. Dabei nimmt  $\gamma$  sein Maximum bei  $\overline{N^2}$  an. Insofern existiert also eine optimale Anfangsenergie des DM-Solitons.
- Die Lösungen  $u_n$  liegen auf Ästen, die im  $n$ -ten Eigenwert von  $-av_{xx} + bx^2v$  verzweigen und sind daher in der Nähe der  $n$ -ten Eigenfunktion. In diesem Sinne ist die Gestalt des DM-Solitons in der Nähe der ersten Eigenfunktion des harmonischen Oszillators und daher nahe an einem Gauß-Kern. Man vergleiche dazu auch das Näherungsverfahren, welches im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

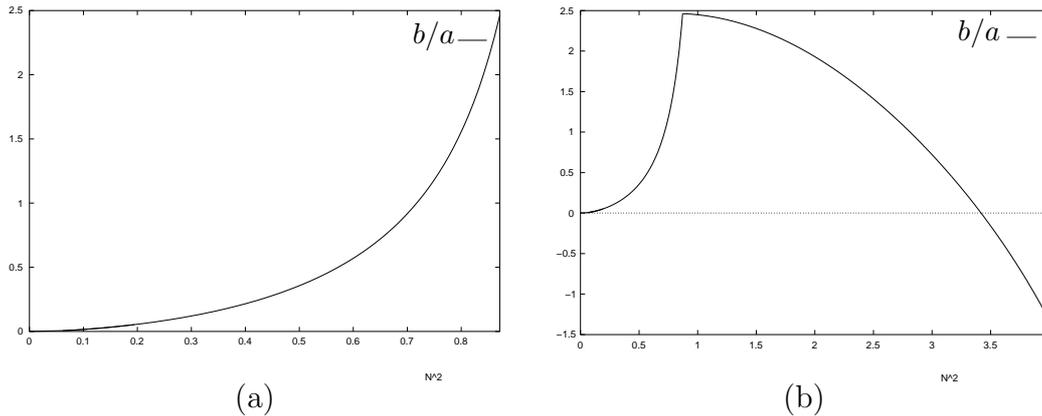


Abbildung 6.4.: Die Werte von  $b/a$  in Abhängigkeit von  $N^2$  bei fester mittlerer Dispersion  $\langle D \rangle = 0.05$  zwischen  $N^2 = 0$  und (a)  $N^2 = \overline{N^2}$  bzw. (b)  $N^2 = 4$ .

Die Eindeutigkeit des DM-Solitons bei gegebener Energie ist eine offene Frage. In den einschlägigen Arbeiten von Zharnitsky et al. [83] bzw. Kunze [41] konnte dies nicht gezeigt werden, da dort aufgrund des kontinuierlichen Spektrums ausschließlich mit Variationsmethoden gearbeitet werden konnte. Mit Hilfe des in dieser Arbeit beschriebenen Verfahrens ist es auch nicht gelungen, die Eindeutigkeit streng im ganzen Gebiet  $A$  nachzuweisen. Allerdings liegt das DM-Soliton auf einem Ast, der lokal in der Nähe des Verzweigungspunktes aus eindeutigen Grundzuständen besteht, was zumindest nicht gegen die Eindeutigkeit spricht.

Nachdem man mit Hilfe der Analyse der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen Aufschluss über die Skalen des Problems gewonnen hat, könnte man die Problemstellung mathematisch auch wie folgt formulieren: Fixiere  $N^2 = \epsilon$  und  $\langle D \rangle = \epsilon\alpha$ . Dabei ist  $N^2$  nicht mehr als Normierung der Energie anzusehen, sondern nur als Festlegung der Ordnung. Dieses Verfahren ist nur in Gebiet  $A$  sinnvoll, was einer Forderung der Form  $\alpha > \bar{\alpha}$  entspricht. Das Lösungsverhalten der Gleichung wird dann durch das komplette Verzweigungsdiagramm wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Insbesondere gilt dann mit dieser Interpretation nach Lemma 5.2.3 der folgende Satz:

**Satz 6.1.4.**

*Für kleine Energien  $N^2/\langle D \rangle \ll 1$  ist das DM-Soliton eindeutig und gerade.*

Die Aussage des Satzes beruht auf der Eindeutigkeit in der Nähe des Verzweigungspunktes und der Symmetrie der Gleichung. Es sei darauf hingewiesen, dass dort aufgrund der Parametrisierung der Lösungen auch eine Näherungsformel für das DM-Soliton gegeben ist.

Die Eindeutigkeit des DM-Solitons bedeutet, dass Pulsbreite, Energie und Quasimomentum durch Vorgabe eines Parameters vorgeschrieben sind. Die Existenz einer einparametrischen Familie von Lösungen konnte bisher nur durch numerische Betrachtungen sowie Analyse reduzierter Modelle (vgl. nächsten Abschnitt) gezeigt werden.

Im Folgenden wollen wir einen Überblick über die Bedeutung der theoretischen Resultate für die Ursprungsgleichung geben.

- Die  $u_n$  aus Satz 6.1.2 liefern Lösungen der ursprünglichen DM-NLS, die (im Sinne des Mittelungsverfahrens) in der Nähe der periodischen Funktion

$$A(t, z) = N \frac{U(R^{\text{eff}}(z)) \{\exp(i\lambda z) u_n(t/T(z))\}}{\sqrt{T(z)}} \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right)$$

liegt. Dabei sind  $T$  und  $M$  periodische Lösungen der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen mit  $T(0) = T_0(N^2)$  und  $M(0) = 0$ ,  $R^{\text{eff}}(z) = \int_0^z D_{\text{loc}}(z')/T_{\text{lin}}^2(z') dz'$  und  $U(z)$  ist die Halbgruppe des harmonischen Oszillators.

- Natürlich ist das Abklingverhalten der Lösungen von großem Interesse. Um die Übertragungsrate in optischen Übertragungssystemen zu erhöhen, versucht man, die einzelnen Signale möglichst dicht in die Faser zu geben. Ein Puls mit schnellem Abklingen ist daher von großem Nutzen in praktischen Problemstellungen und trägt dazu bei, die Kapazität des Systems zu erhöhen. Mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Theorie kann man nun eine optimale Eingangsenergie bestimmen. Für  $N^2 < \overline{N^2}$  fällt das DM-Soliton exponentiell ab, wobei das schnellste Abklingen für  $N^2 = \overline{N^2}$  bewiesen werden kann. Für das DM-Soliton war bisher nur bekannt, dass es in  $H^1(\mathbb{R})$  liegt [83].
- Im Gegensatz zu dem traditionellen Soliton, welches exponentiell abklingt, ist aus Arbeiten von Hasegawa [23] bekannt, dass das DM-Soliton im Kern wie ein Gauß-Kern abklingt, in den Rändern hingegen nur exponentiell. Wegen der nicht-lokalen Nichtlinearität geht offenbar das Gauß-artige Abklingen bei dem DM-Soliton verloren. Diese besitzt auch Nullstellen im Gegensatz zum Fall der Standardnichtlinearität, wo die Existenz einer positiven Lösung nachgewiesen werden kann.
- Ein theoretisches Ergebnis, welches den Gauß-artigen Kern erklärt, war bisher nicht bekannt, obwohl einige erfolgreiche numerische Verfahren auf dieser Tatsache basieren (vgl. dazu den nächsten Abschnitt). Aufgrund der Verzweigungsuntersuchung ist nun klar, dass  $u$  in der Nähe der ersten Eigenfunktion  $u_0$  liegt und somit dem Gauß-Kern ähnelt.
- Zusätzlich legen die Verzweigungsergebnisse nahe, dass pulsartige Lösungen in der Nähe jeder Eigenfunktion des harmonischen Oszillators existieren. Die Gestalt der ersten Eigenfunktionen kann Abbildung 6.5 entnommen werden. Dies ist ein theoretisches Resultat, welches bisher in der Literatur unbekannt ist. Für das von Zharnitsky et al. [83] betrachtete Energiefunktional hat Kunze [43] die Existenz unendlich vieler kritischer Werte bewiesen, allerdings nur für den hier nicht relevanten, zweidimensionalen Fall. Insofern war die Existenz multipler Lösungen bisher eine offene Frage. Die Existenz eines asymmetrischen Solitons, das der zweiten Eigenfunktion zu entsprechen scheint, wurde mit Hilfe numerischer Simulationen und reduzierter Variationsmethoden von Paré und Belanger [58] sowie Jackson und Zharnitsky [32] gefunden. Auch Maruta [52] berichtet über die Existenz so genannter Bi-Solitonen. Über DM-Solitonen höherer Ordnung, die zu den anderen Eigenfunktionen korrespondieren, ist bisher nichts bekannt. In einem gewissen Sinne scheint daher analog zu den Gauß-Hermite Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators eine Basis des Raumes  $L^2(\mathbb{R})$  bestehend aus den nichtlinearen Moden der gemittelten DM-NLS nach Linsentransformation zu existieren.

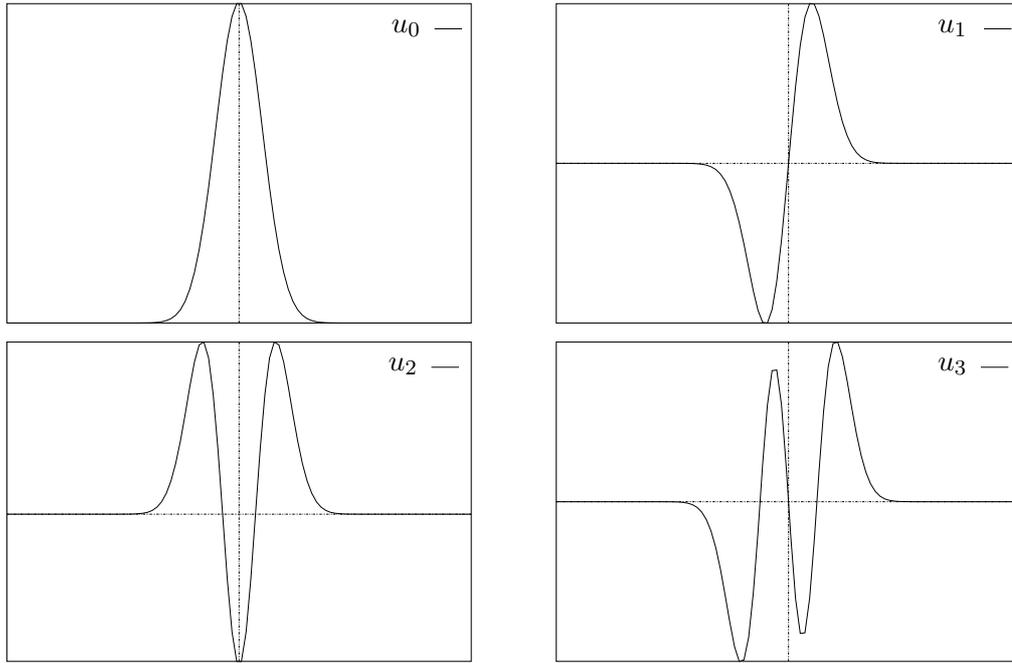


Abbildung 6.5.: Die ersten Gauß-Hermite Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

**Bemerkung 6.1.5.**

In den Arbeiten von Zharnitsky et al. [83] sowie von Kunze [41] wurde der Fall  $N^2 = \langle D \rangle = \mathcal{O}(\epsilon)$  betrachtet. Dies entspricht für positive Dispersion genau dem Gebiet A aus Abbildung 6.1. Insofern ist das hier hergeleitete Ergebnis eine echte Verallgemeinerung.

**6.1.2. Näherungsverfahren zur Berechnung des DM-Solitons**

In diesem Abschnitt wollen wir ein an das Galerkinverfahren angelehntes Näherungsverfahren zur Berechnung des DM-Solitons darstellen. Dabei wird uns die Tatsache behilflich sein, dass eine Hilbertbasis aus Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators existiert.

Die gemittelte DM-NLS nach Linsentransformation und van der Pol-Transformation lautet (3.17)

$$iu_z + au_{xx} - bx^2u + \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz = 0,$$

wobei

$$a := \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{T(z)} \frac{1 - \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle$$

und

$$b := \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{T(z)} \frac{1 + \cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2} \right\rangle.$$

Es liegt nun nahe, durch einen Gauß-Hermite-Ansatz die zugehörige Lösung näherungsweise zu bestimmen. Dieser Ansatz wurde ebenfalls von Schäfer und Turitsyn (cf. [66, 80]) sowie anderen Autoren [12, 46, 74] verfolgt. All diesen Arbeiten ist gemein, dass sie a

priori davon ausgehen, dass das DM-Soliton durch die ersten Moden gut approximiert werden kann, und dann dieses reduzierte Modell mitteln. Im Gegensatz dazu betrachten wir hier eine bereits gemittelte Gleichung, für die klar ist, dass Lösungen in der Nähe jeder (also auch der ersten) Eigenmode existieren. Insofern sind die analytischen Resultate eine Rechtfertigung für das weitere Vorgehen:

Da die Gauß-Hermite Eigenfunktionen  $u_n$  des harmonischen Oszillators eine Basis des Raumes  $L^2(\mathbb{R})$  bilden, lässt sich  $u$  darstellen als

$$u(z, x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z) u_m(x). \quad (6.2)$$

Hier und im Folgenden gelte im Gegensatz zu den Untersuchungen in Kapitel 5, um die Ergebnisse mit den bekannten Arbeiten vergleichbar zu machen,

$$(u_m)_{xx} - x^2 u_m = \lambda_m u_m \text{ mit } \lambda_m = -(2m + 1).$$

Setzen wir nun den Ansatz (6.2) in die Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{db_m(z)}{dz} u_m(x) + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle b_m(z) ((u_m)_{xx} - x^2 u_m) \\ + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{T(z)} \right\rangle b_m(z) ((u_m)_{xx} + x^2 u_m) + F(u) = 0, \end{aligned}$$

wobei mit  $S(z)u_n = \exp(i\lambda_n R^{\text{eff}}(z))u_n$  und  $u_n(x) \in \mathbb{R}$  für die Nichtlinearität gilt

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} (S(z)b_k(z)u_k(x)) \overline{(S(z)b_l(z)u_l(x))} (S(z)b_m(z)u_m(x)) \right) dz \\ &= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} (\exp(i(\lambda_k - \lambda_l + \lambda_m)R^{\text{eff}}(z))) b_k(z) \overline{b_l(z)} b_m(z) u_k(x) u_l(x) u_m(x) \right) dz. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir das  $L^2$ -Skalarprodukt der Gleichung mit  $u_n$ , also  $(\cdot, u_n)_{L^2}$  und erhalten

$$\begin{aligned} i \frac{dB_n(z)}{dz} + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n B_n(z) + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2T(z)} \right\rangle \sum_{m=0}^{\infty} (S_{n,m}^{(1)} + S_{n,m}^{(2)}) B_m(z) \\ + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} (\exp(i(\lambda_k - \lambda_l + \lambda_m - \lambda_n)R^{\text{eff}}(z))) B_k(z) \overline{B_l(z)} B_m(z) dz V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass die Funktionen  $u_n, n \in \mathbb{N}_0$  ein Orthonormalsystem von  $L^2(\mathbb{R})$  bilden und dass  $(S^{-1}(z)u, v)_{L^2} = (u, S(z)v)_{L^2}$  gilt. Man beachte, dass  $(u, v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} u \bar{v} dx$  ist. Des Weiteren haben wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} S_{n,m}^{(1)} &= \int_{\mathbb{R}} (u_m(x))_{xx} u_n(x) dx \\ S_{n,m}^{(2)} &= \int_{\mathbb{R}} x^2 u_m(x) u_n(x) dx \\ V_{n,m,l,k} &= \int_{\mathbb{R}} u_m(x) u_k(x) u_l(x) u_n(x) dx \end{aligned}$$

gesetzt. Da Integrale der Form  $\int x^n \exp(-ax^2)dx$  analytisch berechnet werden können, ist es möglich, alle Werte von  $S_{n,m}^{(1)}$ ,  $S_{n,m}^{(2)}$  und  $V_{n,m,l,k}$  explizit zu errechnen [80]. Es gilt

- $S_{n,m}^{(k)} = S_{m,n}^{(k)}$  für  $k = 1, 2$
- $S_{n,m}^{(2)} = 0$  für  $|n - m| \notin \{0, 2\}$
- $S_{n,n}^{(2)} = n + 1/2$  und  $S_{n,n+2}^{(2)} = \sqrt{(n+1)(n+2)}/2$
- $S_{n,m}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} (u_m)_{xx} u_n dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 u_m u_n dx + \lambda_m \int_{\mathbb{R}} u_m u_n dx = S_{n,m}^{(2)} + \lambda_m \delta_{n,m}$

Dabei bezeichnet  $\delta_{n,m}$  das Kronecker-Symbol. Mit obigen Formeln folgt dann

$$S_{n,m}^{(1)} + S_{n,m}^{(2)} = \begin{cases} 2(n + 1/2) + \lambda_n = 0, & \text{für } m = n \\ \sqrt{(n+1)(n+2)}, & \text{für } m = n + 2 \\ \sqrt{n(n-1)}, & \text{für } m = n - 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir dies in die Gleichung für  $b_n$  ein, so folgt

$$\begin{aligned} i \frac{db_n(z)}{dz} + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n b_n(z) \\ + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2T(z)} \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} b_{n+2}(z) + \sqrt{n(n-1)} b_{n-2}(z) \right) \\ + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(i(\lambda_k - \lambda_l + \lambda_m - \lambda_n) R^{\text{eff}}(z)) b_k(z) \overline{b_l(z)} b_m(z) dz V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von  $\lambda_n = -2n - 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} i \frac{db_n(z)}{dz} + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n b_n(z) \\ + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2T(z)} \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} b_{n+2}(z) + \sqrt{n(n-1)} b_{n-2}(z) \right) \quad (6.3) \\ + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(k-l+m-n)(R^{\text{eff}}(z))) b_k(z) \overline{b_l(z)} b_m(z) dz V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist es uns also gelungen, die partielle Differentialgleichung in unendlich viele gewöhnliche zu überführen. In Kapitel 5 haben wir die Existenz von Lösungen der gemittelten DM-NLS in Form einer stehenden Welle bewiesen. Es ist daher sinnvoll, in Gleichung (6.3) nach Lösungen der Form  $b_n(z) = F_n \exp(ikz)$  mit  $F_n$  unabhängig von  $z$  zu suchen. Dieser Ansatz liefert das unendlich-dimensionale algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -kF_n + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n F_n \\ + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{2T(z)} \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} F_{n+2} + \sqrt{n(n-1)} F_{n-2} \right) \quad (6.4) \\ + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(k-l+m-n)R^{\text{eff}}(z)) dz F_k \overline{F_l} F_m V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.1.6.**

An System (6.4) erkennt man gut, wieso die Nichtlinearität für reelle Funktionen reellwertig ist (vgl. Lemma 5.1.3). Ist  $F_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ , so besteht der Imaginärteil der Nichtlinearität aus Termen, die einen Faktor  $\sin(kR^{\text{eff}})$  enthalten. Bildet man den Mittelwert, so verschwindet dieser aus Symmetriegründen und das Gleichungssystem (6.4) ist reell.

In diesem Sinne ist also die Suche nach dem DM-Soliton auf ein algebraisches Problem reduziert worden. Ist die Lösung  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , bekannt, so gilt in den Variablen des ursprünglichen Problems:

$$A(t, z) = \frac{N}{\sqrt{T(z)}} \exp(ikz) \sum_{n=0}^{\infty} F_n \exp(i\lambda_n R^{\text{eff}}(z)) u_n(x) \exp\left(it^2 \frac{M(z)}{T(z)}\right), \quad x = t/T(z) \quad (6.5)$$

Die Energieverteilung des DM-Solitons lässt sich damit darstellen als

$$|A(t, z)|^2 = \frac{N^2}{T(z)} \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 u_n^2(x) + \frac{N^2}{T(z)} \sum_{n \neq m} F_n \overline{F_m} u_n(x) u_m(x) \exp(2i(n-m)R^{\text{eff}}(z))$$

Für die Anfangsenergie des DM-Solitons ergibt sich dann aus der Tatsache, dass die  $u_n$  ein Orthonormalsystem des Raumes  $L^2(\mathbb{R})$  bilden:

$$E = \int_{\mathbb{R}} |A(t, 0)|^2 dt = N^2 \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2.$$

Die Forderung nach der Normierung der Energie nach Linsentransformation überträgt sich also auf die Suche nach einer normierten Lösung des algebraischen Systems (6.4).

**Bemerkung 6.1.7.**

Mit der in [80] dargestellten Methode gelangt man zu derselben Darstellung, wenn man  $R^{\text{eff}}(z)$  durch  $R(z)$  mit

$$R'(z) = \frac{D(z)}{T^2(z)} - \left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle \quad (6.6)$$

ersetzt. Strikt gesprochen hängt  $R$  immer noch von  $\epsilon$  ab; das Mittelungsverfahren in [80] ist also in diesem Sinne unpräzise. Allerdings werden dort die Skalen auch nicht genauer betrachtet, sondern mittels Lie-Transformation die schnellen durch  $D/T^2$  hervorgerufenen Oszillationen heraustransformiert. Der Unterschied zwischen  $R$  und  $R^{\text{eff}}$  ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Auch die Bestimmungsgleichung für  $F_n$  weist leichte Unterschiede zu den hier hergeleiteten auf:

$$\begin{aligned} -kF_n + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} \right\rangle \lambda_n F_n + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(n-m)R(z)) dz S_{n,m}^{(2)} F_m \\ + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(k-l+m-n)R(z)) dz F_k \overline{F_l} F_m V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

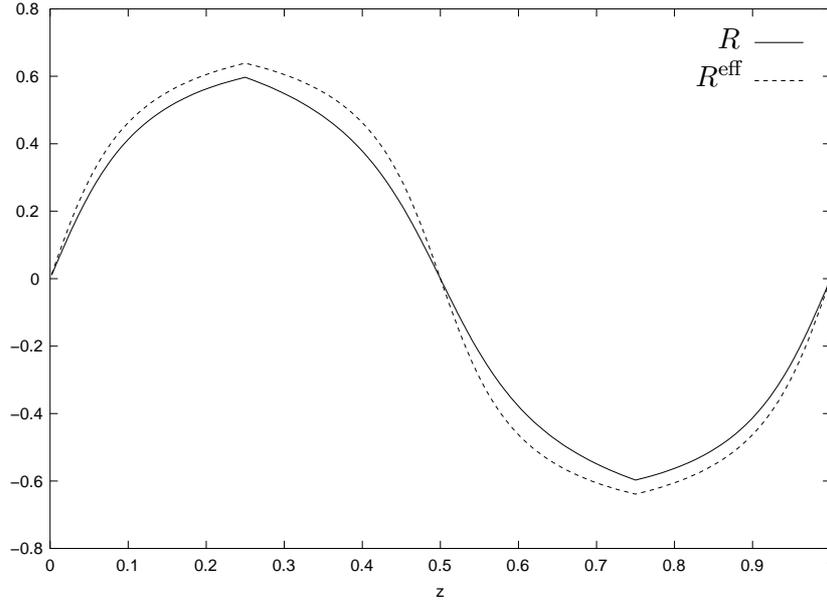


Abbildung 6.6.: Die Funktionen  $R$  und  $R^{\text{eff}}$  für  $d = 8$ ,  $\langle D \rangle = 0.05$  und  $T_0 = 1.2$

Benutzen wir die Formeln für  $S_{n,m}$ , so gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(n-m)R(z)) dz S_{n,m} F_m \\ &= \left\langle \frac{N^2}{2T(z)} \exp(4iR(z)) \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} F_{n+2} + \sqrt{n(n-1)} F_{n-2} \right) + \left\langle \frac{N^2}{T(z)} \right\rangle \left( n + \frac{1}{2} \right) F_n. \end{aligned}$$

Zusammen mit  $\exp(4iR(z)) = \cos(4R(z)) + i \sin(4R(z))$  und  $\langle \sin(4R(z))/T(z) \rangle = 0$  (vgl. Anhang) folgt dann

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(n-m)R(z)) dz S_{n,m} F_m \\ &= N^2 \left\langle \frac{\cos(4R(z))}{2T(z)} \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} F_{n+2} + \sqrt{n(n-1)} F_{n-2} \right) - \left\langle \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n F_n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & -kF_n + \left\langle \frac{D(z)}{T^2(z)} - \frac{N^2}{2T(z)} \right\rangle \lambda_n F_n \\ & + N^2 \left\langle \frac{\cos(4R(z))}{2T(z)} \right\rangle \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} F_{n+2} + \sqrt{n(n-1)} F_{n-2} \right) \quad (6.7) \\ & + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{N^2}{T(z)} \exp(2i(k-l+m-n)R(z)) dz F_k \bar{F}_l F_m V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in obiger Gleichung nun  $R^{\text{eff}}$  anstelle von  $R$ , so ergibt sich das System (6.4). Ein weiterer Vorteil des Systems (6.4) im Vergleich zu (6.7) ist, dass die Integrale  $\cos(2(k-l+m-n)R^{\text{eff}}(z))/T_{\text{lin}}$  explizit berechnet werden können.

In den oben zitierten Arbeiten wird nun üblicherweise eine Näherung des DM-Solitons berechnet, indem man das unendlich-dimensionale System (6.7) durch ein endlich-dimensionales ersetzt. Dabei zeigen die numerischen Simulationen bereits eine gute Übereinstimmung, falls nur die nullte und zweite Mode betrachtet werden. Da das DM-Soliton gerade ist, ist man dabei nur an geraden Moden interessiert.

Aufgrund der theoretischen Ergebnisse aus Kapitel 5 ist nun klar, wieso dieses Verfahren zum Erfolg führt. Dort ist bewiesen worden, dass das DM-Soliton in der Nähe der ersten Eigenfunktion liegt. Insofern liefert das Abbrechen der Entwicklung nach ein paar Moden eine gute Approximation des DM-Solitons, da der Fehler, der durch das Weglassen unendlich vieler Moden entsteht, klein ist.

Im Folgenden werden wir kurz die Ergebnisse aus [80] an das System (6.4) anpassen, um die wichtigsten Eigenschaften des DM-Solitons erläutern zu können. Die typische Gestalt eines DM-Solitons findet man in Abbildung 6.7, man beachte, dass es sich um eine logarithmische Skalierung handelt. Die Lösungen, die im Eigenwert  $\lambda_0$  verzweigen,

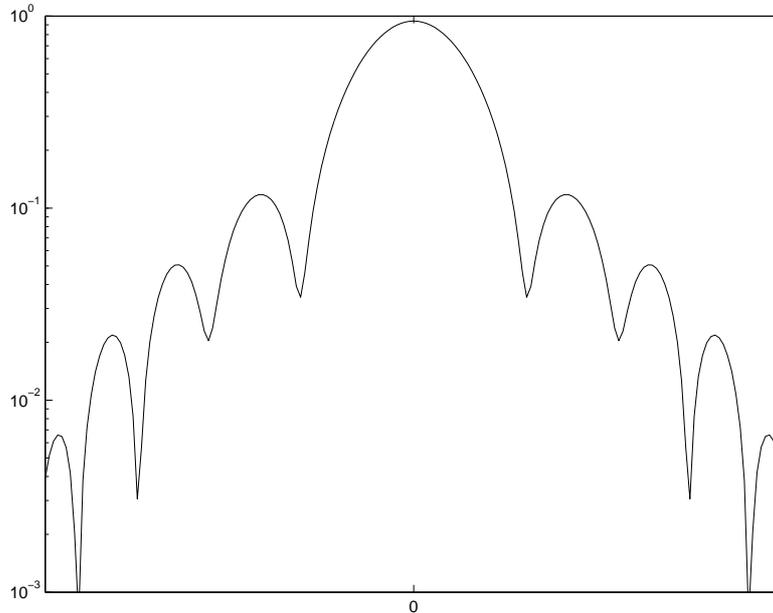


Abbildung 6.7.: Typische Gestalt des DM-Solitons, logarithmische Darstellung

liegen in der Nähe der Eigenfunktion  $u_0 = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\sqrt{\pi}}$ . In der Darstellung (6.5) bedeutet dies, dass  $|F_0| \gg |F_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten muss. Beschränken wir uns aus Symmetriegründen auf die Suche nach den geraden Moden und setzen daher  $\epsilon = F_2/F_0$ ,  $F_{2n+1} = 0$  sowie  $F_{2n} = \epsilon |\tilde{F}_{2n}| \exp(-2i\theta_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$|A(t, z)|^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{N^2}{T(z)} |F_0|^2 \exp\left(-\frac{t^2}{T^2(z)}\right) + \epsilon \frac{2N^2 F_0}{T(z)} \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{F}_{2n}| u_0(t/T(z)) u_{2n}(t/T(z)) \cos(4inR^{\text{eff}}(z) + \theta_{2n}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Aus numerischen Simulationen ist bekannt, dass der Kern des DM-Solitons ein Gauß-Kern ist, während sie in den Randbereichen (den sogenannten *tails*) eine stark oszillierende Gestalt hat. Dieses Verhalten kann man an obiger Darstellung ablesen: Im Zentrum der Verteilung ist  $A(z, t)$  ein Gauß-Kern. Dort wo  $u_0(x)$  fast verschwindet, gewinnen die Terme der Ordnung  $\epsilon$  und damit der Einfluss der höheren Moden an Bedeutung. Weiterhin ist aus der Numerik bekannt, dass die Einhüllende des DM-Solitons exponentiell abzufallen scheint. Dies zeigt, dass die Reihenentwicklung nicht abbricht und jede Eigenmode Einfluss auf die Gestalt der Lösung nimmt. Für die Anfangsenergie des DM-Solitons gilt  $E = N^2 F_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ . Dies ist die analytische Beschreibung für die bekannte Tatsache, dass der Teil des DM-Solitons, der die meiste Energie enthält, ein Gauß-Kern ist.

### Bemerkung 6.1.8.

*Eine weitere Analyse des Gleichungssystems (6.4) wollen wir hier nicht vornehmen, sondern auf die einschlägige Literatur verweisen, in der das System (6.7) analysiert wird. Es sei noch erwähnt, dass die Approximation durch die Moden  $F_0$  und  $F_2$  die Beziehungen*

$$|F_0|^2 = 2\sqrt{2\pi} \text{ und } k = -\left\langle \frac{D}{T^2} \right\rangle + \frac{5}{2} \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle$$

*liefert, wenn man  $F_2 = 0$  fordert.*

Mit dem in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahren, zusammen mit den analytischen Ergebnissen aus Kapitel 5, ist es nun auch möglich, näherungsweise die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Lösungen der DM-NLS höherer Ordnung zu berechnen. Sucht man zum Beispiel nach der zweiten Mode, also des antisymmetrischen Solitons oder Bi-Solitons, muss man selbstverständlich die ungeraden Moden in die Rechnung mit einbeziehen. Die jeweiligen Näherungslösungen können dann als gute Startdaten dienen, um die Existenz der Lösungen höherer Ordnung auch für die DM-NLS numerisch zu verifizieren.

### 6.1.3. Der Fall $N^2 > \overline{N^2}$

Übersteigt die Energie  $N^2$  den kritischen Wert  $\overline{N^2}$ , so verändert, wie in Kapitel 3 erklärt, das Problem fundamental seine Struktur. In diesem Fall sind  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  nicht mehr von gleicher Ordnung; genauer ist für  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$  die mittlere Dispersion von der Ordnung  $\epsilon^2$ . Da die Gleichung in diesem Fall einem formalen Mittelungsverfahren unterzogen wurde, sind die folgenden Argumente nicht streng mathematisch zu verstehen. Dass die Größen zweiter Ordnung jedoch zu berücksichtigen sind, ist mit dem Argument von Pelinovsky und Zharnitsky [60] klar. Dort wurde gezeigt, dass die Korrekturterme zweiter Ordnung aufgrund der Symmetrie des Dispersionsprofils verschwinden. Es sei noch darauf hingewiesen, dass Pulse mit höherer Energie für die Anwendung eine wichtige Rolle spielen, da diese ein geringeres Signal-Rauschverhältnis haben. Für die Lösung mit hoher Energie ist in der Literatur noch nicht viel bekannt, eine Beziehung zwischen Energie, Stärke des Dispersionsprofils und effektiver Dispersion wurde von Kalisch und Pelinovsky [33] hergeleitet.

In Kapitel 3 hat sich die Existenz eines kritischen Parameters  $\widetilde{T}_0 > \overline{T}_0$  gezeigt, an dem  $b$  sein Vorzeichen wechselt. Da keine Näherungsformel für  $b$  zur Verfügung steht, lässt sich der Wert von  $\widetilde{T}_0$  nur numerisch berechnen. Zu diesem  $\widetilde{T}_0$  korrespondiert aufgrund des bijektiven Zusammenhangs zwischen  $T_0$  und  $N^2$  im Fall positiver mittlerer Dispersion ein kritischer Wert von  $N^2$ . Dieser sei mit  $\widetilde{N}_+^2$  bezeichnet und begrenzt die Gebiete  $B$  und  $C$  aus Abbildung 6.1. Liegt der Wert von  $N^2$  unter dem kritischen Wert  $\widetilde{N}_+^2$ , so finden die Verzweigungsergebnisse aus Kapitel 5 Anwendung.

**Bemerkung 6.1.9.**

*Im Gegensatz zu  $\overline{N}^2$  weist der Wert von  $\widetilde{N}_+^2$  eine starke Abhängigkeit vom lokalen Dispersionsparameter  $d$  auf, vgl. Abbildung 6.8. Das Gebiet  $A \cup B$  ist das, in dem  $a$  und  $b$  positiv sind, also dort, wo das DM-Soliton im Sinne der Untersuchungen aus Kapitel 5 existiert. Dieses Gebiet wird durch  $\widetilde{N}_+^2$  begrenzt und ist somit ebenfalls von  $d$  abhängig.*

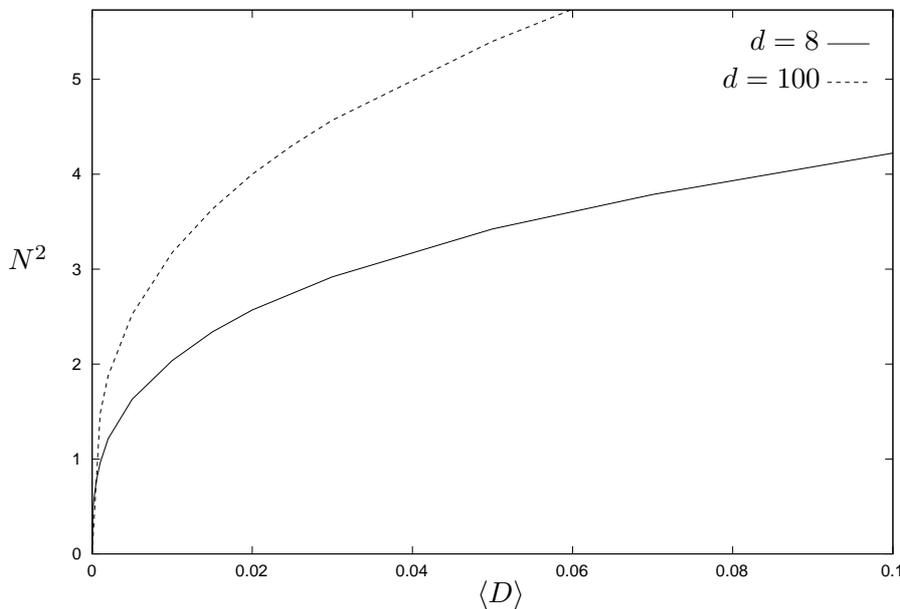


Abbildung 6.8.: Die Werte von  $\widetilde{N}_+^2$  für  $d = 8$  und  $d = 100$ .

Bei Überschreiten der Energie  $\widetilde{N}_+^2$  wird der Parameter  $b$  negativ und das DM-Soliton verliert ihre in Kapitel 5 beschriebene Gestalt. Dieser Bereich korrespondiert zu den Lösungen, die in der Literatur als Solitonen mit flachem Profil bezeichnet werden. In Abbildung 6.9 wird der Zusammenhang zwischen  $\widetilde{N}_+^2$  und mittlerer Dispersion noch einmal verdeutlicht. Die Werte von  $\widetilde{N}_+^2$  korrespondieren zu  $b = 0$ , für kleinere Werte von  $N^2$  haben die Betrachtungen aus Kapitel 5 Bestand.

Auch im Fall  $N^2 > \widetilde{N}_+^2$  lässt sich eine Aussage über die Gestalt des DM-Solitons treffen: In diesem Fall existieren keine pulsartigen Lösungen der DM-NLS, d.h. keine Lösungen in  $L^2(\mathbb{R})$ . Die zugehörigen Lösungen fallen stattdessen ab wie  $1/\sqrt{r}$ . Dies soll im Folgenden kurz begründet werden:

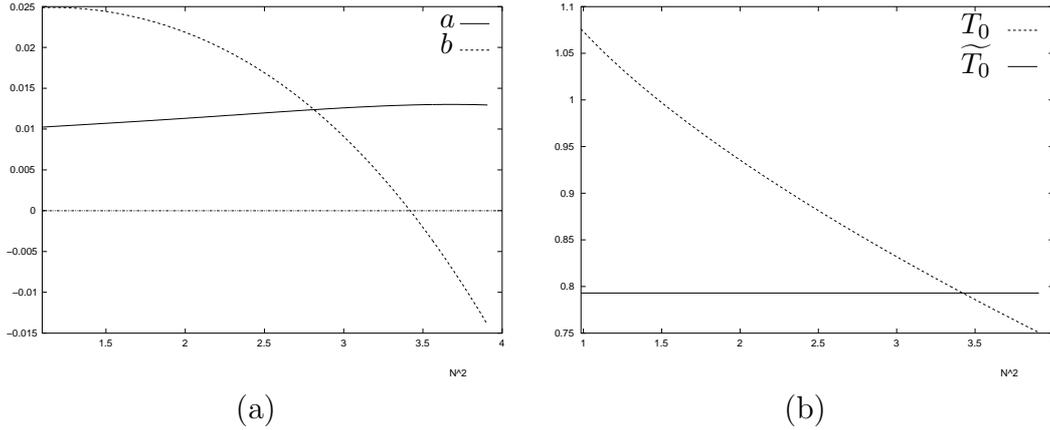


Abbildung 6.9.: Die Werte von (a)  $a$  und  $b$  sowie (b)  $T_0$  in Abhängigkeit von  $N^2$  für  $\langle D \rangle = 0.05$ . Hier  $\widetilde{N}_+^2 \sim 3.423$

Für  $N^2 > \widetilde{N}_+^2$  gilt  $a > 0$  und  $b < 0$ . Nach dem Ansatz  $u(z, x) = \exp(i\omega t)\phi(x)$  und Umskalierung gelangt man zu

$$\phi_{xx} + \frac{x^2}{16}\phi + F(\phi) = \omega\phi$$

Kavian und Weissler [35] haben für die im  $\mathbb{R}^1$  kritische Nichtlinearität  $F(\phi) = |\phi|^4\phi$  bewiesen, dass

$$\phi(r) = C_1 r^{-1/2} \sin\left(\frac{r^2}{2} - C_2 \omega \ln(r) + C_3\right) + \mathcal{O}(r^{5/2}) \text{ für } r \rightarrow \infty \quad (6.8)$$

erfüllt. Es ist allerdings nicht klar, wie der Beweis auf die hier betrachtete nicht-lokale, kubische Nichtlinearität übertragen werden kann. Dies soll hier auch nicht weiter untersucht werden, da das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren nur für quadratintegrale Funktionen hergeleitet wurde. Durch Betrachten der Gauß-Hermite Funktionen ist weiter klar, dass das zugehörige Energiefunktional

$$H = - \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx - \frac{N^2}{2\sqrt{-ab}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^4 dz dx$$

nach unten unbeschränkt ist.

Anhand der asymptotischen Formel (6.8) erkennt man zusätzlich, dass in diesem Parameterbereich tatsächlich das aus Simulationen bekannte sinc-Profil vorliegt ( $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ ). Es sei noch bemerkt, dass die NLS mit abstoßendem harmonischen Potential ebenfalls von Carles in [4, 5] untersucht wurde.

## 6.2. Der Fall $\langle D \rangle < 0$

Aus den Betrachtungen in Kapitel 2 ist bekannt, dass im Fall negativer mittlerer Dispersion zu gegebenem Wert von  $T_0 > T_0^*$  genau zwei verschiedene Lösungen der nicht-linearen  $TM$ -Gleichungen existieren. Die Stabilität der Äste wurde in der Literatur mit

unterschiedlichen Methoden untersucht. Grigoryan und Menyuk [20] behaupteten, dass beide Lösungen stabil sind, während Berntson et al. [3] die Instabilität einer der Äste vermutete. Dabei ist nach Pelinovsky [59] die Lösung mit der kleineren Energie stabil.

Zum Parameter  $T_0^* = \overline{T_0} - 0.944\sqrt{-\langle D \rangle}$  korrespondiert ein eindeutiger Wert von  $N^2$ , den wir mit  $N^{2*}$  bezeichnen. Um diesen zu berechnen, sei daran erinnert, dass näherungsweise

$$N_{1,2}^2 = -4.665(T_0 - \overline{T_0}) \pm \sqrt{21.766(T_0 - \overline{T_0})^2 + 19.404\langle D \rangle}$$

gilt. Setzt man dort  $T_0^*$  für  $T_0$  ein, so folgt

$$N^{2*} \sim 4.347\sqrt{-\langle D \rangle}.$$

Man prüft leicht nach, dass zu gegebenem  $\langle D \rangle < 0$  der Wert von  $N_1$  als Funktion von  $T_0 < \overline{T_0}$  streng monoton wächst und für  $T_0 \rightarrow \overline{T_0}$  gegen  $N^{2*}$  läuft. Also gibt es zu gegebenem  $T_0$  ein eindeutiges  $N_1^2 < N^{2*}$ . Umgekehrt ist  $N_2^2$  für festes  $\langle D \rangle$  streng monoton fallend in  $T_0$ , was eine eindeutige Beziehung zwischen  $N_2^2$  und  $T_0$  liefert.

### 6.2.1. Der Fall $N^2 < N^{2*}$

Falls die Energie  $N^2$  kleiner als  $N^{2*}$  ist, so befinden wir uns in der Situation, wo  $N^2$  und mittlere Dispersion von gleicher Ordnung sind. Auch  $a$  und  $b$  sind von dieser Ordnung, wobei  $a < 0$  und  $b > 0$  ist. Allerdings existiert für negative mittlere Dispersion nicht für alle Werte von  $N^2$  eine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen. Ist  $N^2$  kleiner als ein kritischer Wert  $N_{\min}^2$ , so lässt sich kein zugehöriges  $T_0 > 0$  mehr finden. Für  $T_0 \ll \overline{T_0}$  haben wir gesehen, dass der lineare Zusammenhang (2.16) zwischen  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  gültig ist. Es gilt

#### Lemma 6.2.1.

Für negative mittlere Dispersion  $\langle D \rangle$  und

$$N^2 < N_{\min}^2 = \frac{-39.806}{\sqrt{d}}\langle D \rangle$$

existiert keine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen.

*Beweis.* Siehe Anhang. □

In der in diesem Abschnitt betrachteten Parameterkonstellation ist die beschreibende Gleichung vom Typ der NLS mit abstoßendem Potential und abstoßender Nichtlinearität. Für eine Gleichung von diesem Typ wurde die globale Existenz von Lösungen von Carles bewiesen [4]. Das zugehörige Energiefunktional hat in diesem Fall die Gestalt

$$H = - \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx - \frac{N^2}{2\sqrt{-ab}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^4 dz dx$$

Mit Hilfe der Gauß-Hermite Eigenfunktionen lässt sich leicht zeigen, dass  $H$  nach unten unbeschränkt ist. Dies gilt auch für das von Zharnitsky et al. [83] untersuchte Energiefunktional. Weiter wurde dort gezeigt, dass alle kritischen Punkte zu Sattelpunkten oder

Maxima korrespondieren. Es ist nicht klar, ob dies auch hier gilt, unter Umständen kann das quadratische Potential bei der Analyse weiterhelfen.

Das im letzten Abschnitt vorgestellte Näherungsverfahren kann formal natürlich auch im Bereich negativer mittlerer Dispersion angewendet werden. Allerdings liefert die Theorie hier keine Erklärung, warum die Lösung durch die ersten Moden gut approximiert wird. Jackson und Zharnitsky benutzen in [32] ein Galerkinverfahren, das die Gauß-Hermite Funktionen aber nicht die Linsentransformation verwendet. Dort stellt sich heraus, dass die ersten Moden eine sehr gute Näherung liefern.

### 6.2.2. Der Fall $N^2 > N^{2*}$

In Analogie zum Fall positiver mittlerer Dispersion existiert auch hier ein kritischer Wert von  $N^2$ , an dem der Parameter  $a$  sein Vorzeichen wechselt. Dieser sei mit  $\widetilde{N}_-^2$  bezeichnet und hängt natürlich von mittlerer Dispersion sowie vom lokalen Dispersionsparameter ab.

Ist nun  $N^2 < \widetilde{N}_-^2$ , so befinden wir uns in Gebiet  $D$  aus Abbildung 6.1 welches zum oberen Ast von Lösungen korrespondiert. Dort sind nach Kapitel 3 die Parameter  $N^2$  und  $\langle D \rangle$  nicht mehr von gleicher Ordnung. Ist  $N^2$  von der Ordnung  $\epsilon$ , so sind  $\langle D \rangle$  sowie  $a$  und  $b$  von der Ordnung  $\epsilon^2$ . Dabei gilt für die Parameter  $a < 0$  und  $b < 0$ .

In diesem Fall ist der lineare Teil der Gleichung wieder der harmonische Oszillator. Nach den Vorbemerkungen in Kapitel 5 ist bekannt, dass für  $\lambda > \lambda_k$  mindestens  $k + 1$  verschiedene Lösungen existieren, diese sind jedoch alle instabil. Diese Aussage steht in Einklang mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen, dass die Lösungen auf dem oberen Ast instabil sind, was auch ein Blick auf das zugehörige Energiefunktional zeigt:

$$H = - \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx - \frac{N^2}{2\sqrt{ab}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^4 dz dx.$$

Es ist klar, dass  $H$  nach unten unbeschränkt ist, und dass alle kritische Punkte Maxima oder Sattelpunkten entsprechen und daher instabil sind.

Der Fall  $N^2 > \widetilde{N}_-^2$  korrespondiert zu dem Fall  $N^2 > \widetilde{N}_-^2$  für positive mittlerer Dispersion, die beschreibende Gleichung besitzt keine pulsartige Lösungen. Interessanterweise gilt dies jedoch für den Grenzfalle verschwindender mittlerer Dispersion, wie der nächste Abschnitt zeigt.

## 6.3. Der Fall $\langle D \rangle = 0$

Für verschwindende mittlerer Dispersion existiert zu gegebener Energie  $N^2$  genau eine Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen, wobei für die zugehörige Pulsbreite stets  $T_0 < \overline{T_0}$  gilt. In diesem Fall ist also  $N^2$  der einzige Kleinheitsparameter. Ist dieser von der Ordnung  $\epsilon$ , so sind  $a$  und  $b$  von der Ordnung  $\epsilon^3$ , wobei  $a > 0$  und  $b < 0$  sind. Dieses Ergebnis lässt sich auch durch stetigen Übergang aus dem Gebiet positiver oder negativer mittlerer Dispersion herleiten. Für hinreichend kleine Werte von  $\langle D \rangle$  befindet man sich bei gegebener Energie stets im Gebiet C aus Abbildung 6.1. Dort gilt nach

den Untersuchungen aus Kapitel 3 stets  $N^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $\langle D \rangle = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Dabei sind mit  $\langle D \rangle = \epsilon^2 \alpha$  und  $\alpha \neq 0$  die Parameter  $a$  und  $b$  ebenfalls von der Ordnung  $\epsilon^2$ . Ist hingegen  $\alpha = 0$ , so verschwinden die jeweiligen Koeffizienten zweiter Ordnung.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass die beschreibende Gleichung im Fall verschwindender mittlerer Dispersion vom Typ

$$iu_z + \epsilon F(u) = \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

ist. Dies entspricht bis zur Ordnung  $\epsilon^2$  genau der von Kunze [40] bzw. Zharnitsky [83] untersuchten Situation.

Würde man den Einfluss von  $a$  und  $b$  in die Gleichung mit einbeziehen, so würde sich einerseits ein Vorteil ergeben, da der Ableitungsterm in die Rechnung mit einbezogen wird und der zugehörige Faktor positiv ist. Dafür ist jedoch das quadratische Potential in diesem Fall abstoßend, was zur Folge hat, dass die zugehörigen Lösungen offenbar nicht mehr quadratintegrabel sind.

Viel wichtiger ist jedoch, dass mit dem Argument von Pelinovsky und Zharnitsky [60] die gemittelte DM-NLS bis zur Ordnung  $\epsilon^2$  korrekt ist, in der dritten Ordnung jedoch weitere Korrekturterme auftauchen und daher in eine Analyse miteinbezogen werden müssen. Es sei noch bemerkt, dass für verschwindende mittlere Dispersion der Effekt der Dispersion dritter Ordnung (*third order dispersion*) eine wichtige Rolle spielt. Daher erscheint es wenig sinnvoll, in diesem Fall lediglich den Einfluss von  $a$  und  $b$  in der Gleichung zu berücksichtigen, stattdessen ist das zugehörige Energiefunktional formal hier von der in Kunze [40] untersuchten Gestalt, also

$$H = - \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \frac{N^2}{2T(z)} |S(z)u|^4 dz dx.$$

wobei hier allerdings die Halbgruppe  $S(z)$  des harmonischen Oszillators involviert ist. Dieses Funktional soll hier nicht weiter untersucht werden. Es sei noch bemerkt dass für  $S(z) = \exp(iR(z)\Delta)$  ein Minimierer in  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  existiert [40].

# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir ein Verfahren vorgestellt, das zu einer neuen Klasse von Modellgleichungen zur Beschreibung der mittleren Ausbreitung von Signalen in optischen Übertragungssystemen mit starkem Dispersionsmanagement führt. Dazu wurde die bisher in der Literatur betrachtete Modellgleichung durch die Linsentransformation und ein anschließendes Mittelungsverfahren in eine Gleichung vom Typ der NLS mit zusätzlichem quadratischem Potential überführt, eine ähnliche Gleichung spielt dabei auch in der Theorie von Bose-Einstein Kondensaten eine wichtige Rolle. Falls der lineare Anteil der Gleichung der harmonischen Oszillator ist, so wurde mit verzweigungstheoretischen Mitteln sowie Variationsargumenten eine weitgehende Beschreibung des Lösungsverhaltens hergeleitet.

Im bisher in der Literatur bevorzugt betrachteten Fall positiver mittlerer Dispersion und nicht zu großer Energie des Signals ist das Potential anziehend. Mit dessen Hilfe konnten dann einige offene theoretische Probleme, wie die Frage nach der Eindeutigkeit des DM-Solitons bei gegebener Energie, der Existenz unendlich vieler symmetrischer Lösungen oder aus Simulationen bekannte Aussagen über die Gestalt des DM-Solitons positiv beantwortet oder besser verstanden werden. Für die Anwendung von Interesse scheint insbesondere die Existenz einer optimalen Energie des Eingangssignals zu sein sowie die Tatsache, dass tatsächlich Moden höherer Ordnung wie das Bi-Soliton existieren.

Für Signale mit höherer Energie gibt die bisher in der Literatur untersuchte Gleichung nicht länger die zugrundeliegenden Skalen an. Obwohl diese Signale von großem praktischen Interesse sind, da sie ein geringeres Signal-Rausch-Verhältnis aufweisen, sind sie mathematisch bisher offenbar nicht näher untersucht worden. In diesem Fall haben wir ein alternatives Modell hergeleitet, welches die aus Simulationen bekannten Eigenschaften heuristisch bestätigt. Auch hier lassen sich unterhalb einer Schranke für die Energie die oben genannten Resultate nachweisen. In den anderen Situationen lassen sich anhand der Gestalt der Modellgleichung ebenfalls neue Charakterisierungen des Lösungsverhaltens treffen.

Um eine realistischere Modellierung realer Übertragungstrecken zu erreichen, müssen in Zukunft andere praxisrelevante Effekte in das Modell einbezogen werden. Insbesondere können zufällige Änderungen im Dispersionsprofil nicht vernachlässigt werden, diese resultieren beispielsweise aus Störungen in der Geometrie der Faser. Es ist bekannt, dass diese Effekte tatsächlich signifikanten Einfluß auf die Stabilität der Signale haben, die sich auf kleinen Skalen abspielen [9]. Daher beschäftigt sich die Forschung derzeit stark mit den Auswirkungen von zufälliger Dispersion. Dazu wird dann zu dem Dispersionsprofil ein kleiner stochastischer Term addiert, der üblicherweise durch

weißes Rauschen modelliert wird. Die beschreibende Gleichung ist dann die NLS mit periodischen und stochastischen Koeffizienten. Neben grundlegenden mathematischen Fragestellungen aus dem Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen taucht hier auch das Problem auf, einen geeigneten Mehrskalenformalismus zu entwickeln.

Versucht man, das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zu übertragen, so ist zu bemerken, dass in diesem Fall die nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen ebenfalls stochastischer Natur sind. Diese wurden kürzlich von Garnier untersucht [17], allerdings nur als reduziertes Modell, d.h. die zugehörige DM-NLS nach einer der Linsentransformation entsprechenden Transformation wurde nicht betrachtet.

Vom mathematischen Standpunkt bleiben für die in dieser Arbeit hergeleitete gemittelte Gleichung noch einige Fragen offen. Insbesondere konnte die Frage nach der Existenz des DM-Solitons als einer stabilen, lokalisierten Lösung für negative mittlere Dispersion nicht beantwortet werden. Für verschwindende mittlere Dispersion ist weiter unklar, warum das DM-Soliton glatt und lokalisiert ist. Eine genaue Rechtfertigung des Mittelungsverfahrens und die Herleitung von Fehlerabschätzungen insbesondere im Fall höherer Energie wären ebenfalls von Interesse. Nicht zuletzt konnte in dieser Arbeit die Existenz einer weiteren, symmetriebrechenden Verzweigung auf den Lösungszweigen nicht ausgeschlossen werden.

Die größte Herausforderung an die Mathematik ist sicherlich der Existenzbeweis des DM-Solitons als periodische Lösung der NLS mit periodischen Koeffizienten.

# A. Beweis einiger Lemmata

## Beweis von Lemma 3.1.2

In diesem Abschnitt beweisen wir das zur Bestimmung der Vorzeichen von  $a$  und  $b$  zentrale

### Lemma 3.1.2

Die folgende Beziehung gilt für  $u \in X := \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 dx < \infty\}$ :

$$\begin{aligned} & S^{-1}(z) \left( \frac{N^2}{T(z)} x^2 S(z) u \right) \\ &= \frac{N^2}{T(z)} \left( \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} u_{xx} + \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) + 1}{2} x^2 u + i \frac{\sin(4R^{\text{eff}}(z))}{2} (u + 2xu_x) \right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass die Gauß-Hermite Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators eine Hilbertbasis des Raumes  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  bilden. Daher können wir  $u$  darstellen als

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \text{ mit } a_n \in \mathbb{C}.$$

Jetzt nutzen wir aus, dass  $S(z)u_n$  explizit berechenbar ist. Es gilt

$$S(z)u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S(z)u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n R^{\text{eff}}(z)) u_n.$$

Dabei ist  $\lambda_n = 2n + 1$  der zu  $u_n$  gehörige Eigenwert. Weiter ist bekannt, dass für die Gauß-Hermite-Funktionen folgende Beziehung gilt [70]:

$$xu_n(x) = nu_{n-1}(x) + \frac{1}{2}u_{n+1}(x).$$

Zweimaliges Anwenden dieser Formel liefert

$$x^2 u_n(x) = n(n-1)u_{n-2}(x) + \frac{1}{2}(2n+1)u_n(x) + \frac{1}{4}u_{n+2}(x),$$

also

$$\begin{aligned} x^2 S(z)u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n R^{\text{eff}}(z)) x^2 u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n R^{\text{eff}}(z)) \left( n(n-1)u_{n-2}(x) + \frac{1}{2}(2n+1)u_n(x) + \frac{1}{4}u_{n+2}(x) \right). \end{aligned}$$

Jetzt sind wir in der Lage,  $S^{-1}(z)$  auf die Formel anzuwenden. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& S^{-1}(z) (x^2 S(z) u(x)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n R^{\text{eff}}(z)} \left( n(n-1) S^{-1}(z) u_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2} S^{-1}(z) u_n(x) + \frac{1}{4} S^{-1}(z) u_{n+2}(x) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( n(n-1) e^{i(\lambda_n - \lambda_{n-2}) R^{\text{eff}}(z)} u_{n-2}(x) + \frac{(2n+1)}{2} u_n(x) + \frac{1}{4} e^{i(\lambda_n - \lambda_{n+2}) R^{\text{eff}}(z)} u_{n+2}(x) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( n(n-1) \exp(4i R^{\text{eff}}(z)) u_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2} u_n(x) + \frac{1}{4} \exp(-4i R^{\text{eff}}(z)) u_{n+2}(x) \right),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Formel  $\lambda_n - \lambda_{n\pm 2} = \mp 4$  eingeht. Nun wenden wir uns der rechten Seite zu. Unter Verwendung der Entwicklung von  $u$  lautet diese

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} u_n''(x) + \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) + 1}{2} x^2 u_n(x) + i \frac{\sin(4R^{\text{eff}}(z))}{2} (u(x) + 2xu'(x)) \right).$$

Wegen  $-u_n''(x) + x^2 u_n(x) = \lambda_n u_n(x)$  folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} u_n''(x) + \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) + 1}{2} x^2 u_n(x) \\
&= \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} (x^2 u_n(x) - \lambda_n u_n(x)) + \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) + 1}{2} x^2 u_n(x) \\
&= \cos(4R^{\text{eff}}(z)) x^2 u_n(x) - \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} \lambda_n u_n(x) \\
&= \cos(4R^{\text{eff}}(z)) \left( n(n-1) u_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2} u_n(x) + \frac{1}{4} u_{n+2}(x) \right) - \frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z)) - 1}{2} \lambda_n u_n(x) \\
&= n(n-1) \cos(4R^{\text{eff}}(z)) u_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2} u_n(x) + \frac{1}{4} \cos(4R^{\text{eff}}(z)) u_{n+2}(x).
\end{aligned}$$

Um den Term, der  $xu_n'(x)$  enthält, in den Griff zu bekommen, benutzen wir die Beziehung  $u_n' = nu_{n-1} - u_{n+1}/2$ , vgl. [70], woraus sich

$$xu_n'(x) = n(n-1)u_{n-2}(x) - \frac{1}{2}u_n(x) - \frac{1}{4}u_{n+2}(x)$$

folgern lässt. Damit gilt also

$$\frac{\sin(4R^{\text{eff}}(z))}{2} (u_n(x) + 2xu_n'(x)) = \sin(4R^{\text{eff}}(z)) \left( n(n-1)u_{n-2}(x) - \frac{1}{4}u_{n+2}(x) \right).$$

Insgesamt berechnet sich wegen  $\exp(4iR^{\text{eff}}(z)) = \cos(4R^{\text{eff}}(z)) + i\sin(4R^{\text{eff}}(z))$  die rechte Seite zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( n(n-1) \exp(4iR^{\text{eff}}(z)) u_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2} u_n(x) + \frac{1}{4} \exp(-4iR^{\text{eff}}(z)) u_{n+2}(x) \right),$$

was zu beweisen war.  $\square$

## Berechnung der Mittelwerte

### Herleitung der Beziehung (3.4)

Zunächst sei an die Definition der akkumulierten, effektiven Dispersion erinnert:

$$R^{\text{eff}}(z) = \int_0^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{T_{\text{lin}}^2(z')} dz'.$$

Unter Benutzung von  $T_{\text{lin}}(z) = T_0 \sqrt{1 + 4R^2(z)/T_0^4}$  folgt

$$R^{\text{eff}}(z) = \frac{1}{T_0^2} \int_0^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{1 + 4R^2(z')/T_0^4} dz'.$$

Substituiert man nun im Integral  $\xi = 2R(z')/T_0^2$  für  $0 \leq z \leq 1/4$ , so folgt wegen  $R'(z) = D_{\text{loc}}(z) = d > 0$  in  $[0, 1/4]$  die Beziehung

$$R^{\text{eff}}(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2R(z)/T_0^2} \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{R(z)}{T_0^2}\right).$$

Für  $z \in [1/4, 1/2]$  folgt wegen der Symmetrien  $R(1/2 - z) = R(z)$  und  $D_{\text{loc}}(1/2 - z) = -D_{\text{loc}}(z)$ :

$$\begin{aligned} R^{\text{eff}}(z) &= R^{\text{eff}}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{T_0^2} \int_{1/4}^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{1 + 4R^2(z')/T_0^4} dz' \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{R(1/4)}{T_0^2}\right) - \int_{1/4}^z \frac{D_{\text{loc}}(1/2 - z')}{1 + 4R^2(1/2 - z')/T_0^4} dz' \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{R(1/4)}{T_0^2}\right) + \int_{1/4}^{1/2-z} \frac{D_{\text{loc}}(\xi)}{1 + 4R^2(\xi)/T_0^4} d\xi \quad \text{mit } \xi = \frac{1}{2} - z' \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{R(1/2 - z)}{T_0^2}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{R(z)}{T_0^2}\right). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also  $R^{\text{eff}}(1/2) = 0$ . Ein abermaliges Symmetrieargument im Intervall  $[1/2, 1]$  der Form  $R(z) = -R(z - 1/2)$  und  $D(z) = -D(z - 1/2)$  liefert dann

$$\begin{aligned} R^{\text{eff}}(z) &= \frac{1}{T_0^2} \int_{1/2}^z \frac{D_{\text{loc}}(z')}{1 + 4R^2(z')/T_0^4} dz' = -\frac{1}{T_0^2} \int_{1/2}^z \frac{D_{\text{loc}}(z' - 1/2)}{1 + 4R^2(z' - 1/2)/T_0^4} dz' \\ &= -\frac{1}{T_0^2} \int_0^{z-1/2} \frac{D_{\text{loc}}(\xi)}{1 + 4R^2(\xi)/T_0^4} d\xi = -R^{\text{eff}}(z - 1/2) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2}{T_0^2} R(z)\right). \end{aligned}$$

Somit haben wir einen geschlossenen Ausdruck für  $R^{\text{eff}}(z)$  gefunden und insbesondere gilt  $R^{\text{eff}}(1) = \langle D_{\text{loc}}/T_{\text{lin}}^2 \rangle = 0$ , also die Formel (3.4).

### Herleitung der Beziehung (3.11)

In diesem Abschnitt wird der Mittelwert  $\langle \cos(4R^{\text{eff}})/T_{\text{lin}} \rangle$  explizit berechnet. Mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Abschnitt gilt

$$\cos(4R^{\text{eff}}(z)) = \cos\left(2 \arctan\left(\frac{2}{T_0^2} R(z)\right)\right).$$

Verwenden wir nun noch, dass die Beziehung

$$\cos(2 \arctan(x)) = \frac{2}{1+x^2} - 1$$

gilt, so folgt mit Hilfe der Definition von  $T_{\text{lin}}$

$$\frac{\cos(4R^{\text{eff}}(z))}{T_{\text{lin}}(z)} = \frac{1}{T_{\text{lin}}(z)} \left( \frac{2}{1+4R^2(z)/T_0^4} - 1 \right) = \frac{2T_0^2}{T_{\text{lin}}^3(z)} - \frac{1}{T_{\text{lin}}(z)}$$

und damit

$$\left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}})}{T_{\text{lin}}} \right\rangle = 2T_0^2 \left\langle \frac{1}{T_{\text{lin}}^3} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{T_{\text{lin}}} \right\rangle.$$

Die in obiger Formel auftauchenden Integrale sind bereits von Schäfer [67] berechnet worden. Es gilt

$$\left\langle \frac{1}{T_{\text{lin}}^3} \right\rangle = \frac{1}{T_0^3} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{1}{T_{\text{lin}}} \right\rangle = \frac{1}{T_0} y^{-1} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Somit folgt insgesamt

$$\left\langle \frac{\cos(4R^{\text{eff}})}{T_{\text{lin}}} \right\rangle = \frac{1}{T_0} \left( \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - y^{-1} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \right) = \frac{F(y)}{T_0},$$

was zu beweisen war.

## Beweis von Lemma 5.1.3

Zu zeigen ist in diesem Abschnitt

### Lemma 5.1.3

Ist  $u(x)$  reellwertig, so auch  $F(u(x))$ .

*Beweis.* Es gilt bekanntlich  $S(z) = U(R^{\text{eff}}(z))$ , wobei  $U(t)$  die Halbgruppe des harmonischen Oszillators ist. Für diese gilt

$$\overline{U(-t)u} = U(t)\bar{u}.$$

Damit folgt mit  $-R^{\text{eff}}(z) = R^{\text{eff}}(z + 1/2)$

$$S(z)\bar{u} = U(R^{\text{eff}}(z))\bar{u} = \overline{U(-R^{\text{eff}}(z))u} = \overline{U(R^{\text{eff}}(z + 1/2))u}$$

und daher wegen  $S^{-1}(z) = U(-R^{\text{eff}}(z))$ :

$$\begin{aligned} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)\bar{u}|^2 S(z)\bar{u} \right) &= S^{-1}(z) \overline{\left( \frac{1}{T(z)} |S(z + 1/2)u|^2 S(z + 1/2)u \right)} \\ &= S^{-1}(z + 1/2) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z + 1/2)u|^2 S(z + 1/2)u \right). \end{aligned}$$

Wegen  $T(z) = T(z + 1/2)$  folgt nun

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) &= -\frac{N^2}{2\sqrt{ab}} \int_0^1 \overline{S^{-1}(z + 1/2) \left( \frac{1}{T(z + 1/2)} |S(z + 1/2)u|^2 S(z + 1/2)u \right)} dz \\ &= -\frac{N^2}{2\sqrt{ab}} \int_{1/2}^{3/2} S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u|^2 S(z)u \right) dz \\ &= \overline{F(u)}, \end{aligned}$$

da  $S$  und  $T$  1-periodisch in  $z$  sind und für allgemeines 1-periodisches  $g$  die Beziehung

$$\int_1^{3/2} g(z) dz = \int_0^{1/2} g(z) dz$$

gültig ist.

Ist nun  $u$  reellwertig, so gilt  $F(u) = \overline{F(u)}$ , was zu beweisen war.  $\square$

## Beweis von Lemma 5.1.7

Zu zeigen ist hier

### Lemma 5.1.7

*Es existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass gilt: Falls  $(\lambda, u) \in \mathcal{C}_n \cap U_\epsilon(\lambda_n, 0)$ , so folgt*

$$\lambda = \lambda_n + \lambda(s), \quad u = su_n + s^2 z_n(s)$$

*wobei  $0 < |s| < \epsilon$  und  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda'(0) = 0$  und  $\lambda''(0) < 0$ . Weiter ist  $z_n(0) = 0$  und es gilt*

$$(z_n(s), u_0)_X = 0.$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\lambda'(0) = 0$  und  $\lambda''(0) = -2 \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \langle \frac{1}{T} \rangle \|u_n\|_4^4$  gilt.

Es ist leicht zu sehen, dass  $F \in C^3(X, L^2)$  ist mit  $\delta F(0)[u_n] = 0$ ,  $\delta^2 F(0)[u_n]^2 = 0$  und

$$\delta^3 F(0)[u_n]^3 = -6 \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u_n|^2 S(z)u_n \right) dz. \quad (\text{A.1})$$

Für eine normierte Eigenfunktion ( $\|u_n\|_2 = 1$ ) liefert eine Standardformel  $\lambda'(0) = 0$  und  $\lambda''(0) = \frac{1}{3} (\delta^3 F(0)[u_n]^3, u_n)_{L^2}$ . Mit (A.1) folgt dann

$$\begin{aligned} (\delta^3 F(0)[u_n]^3, u_n)_{L^2} &= -6 \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \left( S^{-1}(z) \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u_n|^2 S(z)u_n \right), u_n \right)_{L^2} dz \\ &= -6 \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \left( \frac{1}{T(z)} |S(z)u_n|^2 S(z)u_n, S(z)u_n \right)_{L^2} dz \\ &= -6 \frac{N^2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \frac{1}{T(z)} \|S(z)u_n\|_4^4 dz \end{aligned}$$

Für die Eigenfunktion  $u_n$  gilt bekanntlich  $|S(z)u_n| = |u_n|$ , und somit folgt die Behauptung.  $\square$

## Beweis von Lemma 6.2.1

In diesem Abschnitt werden wir Lemma 6.2.1 beweisen:

### Lemma 6.2.1

Für negative mittlere Dispersion  $\langle D \rangle$  und  $N^2 < N_{\min}^2 = -39.806\langle D \rangle/\sqrt{d}$  existiert keine Lösung der nichtlinearen TM-Gleichungen.

*Beweis.* In erster Ordnung gilt nach (2.16)

$$N^2 = \frac{\langle D \rangle}{T_0 F(y)} \text{ mit } y = \frac{d}{2T_0^2} \text{ und } F(y) = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Im Fall negativer mittlerer Dispersion ist  $N^2$  nur dann positiv, falls  $T_0 < \bar{T}_0$ , was  $F(y) < 0$  zur Folge hat. Betrachten wir  $N^2$  als Funktion von  $\langle D \rangle < 0$ , so ist  $N^2$  linear mit negativer Steigung

$$\frac{1}{T_0 F(y)} = \frac{1}{\sqrt{d/2y} F(y)} =: \sqrt{\frac{2}{d}} \frac{1}{G(y)}.$$

Die maximale (negative) Steigung von  $N^2$  korrespondiert also zu einem Minimum von  $G$ . In Abbildung A.1 kann man erkennen, dass ein eindeutiges Minimum im Bereich  $y > \bar{y}$  existiert.

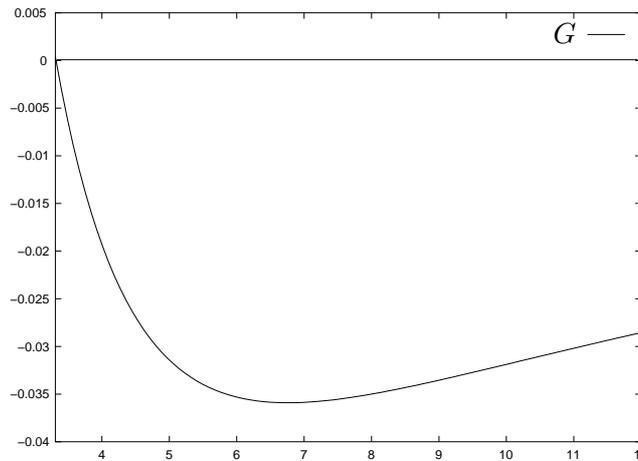


Abbildung A.1.: Die Funktion  $G(y)$  zwischen  $y = \bar{y}$  und  $y = 12$

Zu dessen Berechnung benötigen wir die erste Ableitung von  $G$ , es gilt

$$G'(y) = \frac{1}{2} \frac{3(1+y^2)^{3/2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - 4y(1+2y^2)}{y^{5/2}(1+y^2)^{3/2}}.$$

Ein Kandidat für ein Minimum ist eine Nullstelle der ersten Ableitung, diese verschwindet bei  $y = 6.7609$ , was zu  $T_0 = 0.27195\sqrt{d}$  korrespondiert. Daher gilt

$$N_{\min}^2 = \frac{\langle D \rangle}{0.271\sqrt{d}F(6.7609)} = \frac{-39.806}{\sqrt{d}} \langle D \rangle,$$

was zu beweisen war. □

## B. Störungsrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die Störungsrechnung angeben, die zu Satz 2.2.2 führt. Zu zeigen ist

### Satz 2.2.2

Es ist  $N^2(\epsilon) = \epsilon C + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , wobei  $C$  eine Lösung von

$$aC^2 + b\beta_1 C + c\alpha_2 = 0$$

ist. Die Konstanten  $a, b$  und  $c$  hängen dabei wie folgt von  $\bar{y}$  ab:

$$\begin{aligned} a &:= 4(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}^3 + (\sqrt{1 + \bar{y}^2} - 1)(\bar{y}^2 - \bar{y} + 1)}{(1 + \bar{y}^2)^{5/2}(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})} \sim 0.684 \\ b &:= 8(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}}{(1 + \bar{y}^2)^{3/2}} \sim 6.386 \\ c &:= -4\bar{y} \frac{\bar{y}^2 + \bar{y}\sqrt{1 + \bar{y}^2} + 1}{(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})\sqrt{1 + \bar{y}^2}} \sim -13.28. \end{aligned}$$

*Beweis.* Um Satz 2.2.2 zu beweisen, machen wir uns die Ergebnisse von Schäfer [66, 67] zu Nutze: Die periodische Lösung der nichtlinearen  $TM$ -Gleichungen erfüllt

$$4d_1 \tilde{T} \tilde{M} - c_1 \ln\left(\frac{4\sqrt{a_1}d_1 \tilde{T} \tilde{M} + 2a_1 \tilde{T} + c_1}{\sqrt{c_1^2 + 4a_1 b_1}}\right) \frac{1}{\sqrt{a_1}} - a_1 = 0 \quad (\text{B.1})$$

und

$$-4d_2 \tilde{T} \tilde{M} - c_2 \ln\left(\frac{-4\sqrt{a_2}d_2 \tilde{T} \tilde{M} + a_2 \tilde{T} + c_2}{\sqrt{c_2^2 + 4a_2 b_2}}\right) \frac{1}{\sqrt{a_2}} - a_2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

wobei die Parameter wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1}{\tilde{T}^2} + 4d_1^2 \tilde{M}^2 - \frac{c_1}{\tilde{T}}, & a_2 &= \frac{b_2}{\tilde{T}^2} + 4d_2^2 \tilde{M}^2 - \frac{c_2}{\tilde{T}}, \\ b_k &= d_k^2, & c_k &= 2N^2 d_k, \\ d_1 &= d + \langle D \rangle, & d_2 &= -d + \langle D \rangle. \end{aligned}$$

Die Herleitung des Gleichungssystems beruht auf den Symmetrien des Systems, genauer: Die periodische Lösung erfüllt  $T'(1/2) = 0$ . Dabei sind in (B.1) und (B.2) die Parameter  $\tilde{T}$  und  $\tilde{M}$  als  $T$  bzw.  $M$  an der Sprungstelle  $z = 1/4$  des Dispersionsprofils definiert.

Nun sind wir in der Lage, die Störungsrechnung durchzuführen, sei dazu

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \tilde{T}_{\text{lin}}(T_0) + \epsilon \tilde{T}_1 + \epsilon^2 \tilde{T}_2 \\ \tilde{M} &= \tilde{M}_{\text{lin}}(T_0) + \epsilon \tilde{M}_1 + \epsilon^2 \tilde{M}_2 \\ \langle D \rangle &= \epsilon d_1 + \epsilon^2 d_2 \\ N^2 &= \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass wir uns in der Nähe von  $T_0$  befinden, wird wie folgt in der Störungsrechnung berücksichtigt:

$$T_0 = \overline{T_0} + \epsilon t_1 + \epsilon^2 t_2$$

Setzen wir dies in (B.1) und (B.2) ein, subtrahieren die eine von der anderen Gleichung und entwickeln die Gleichungen nach  $\epsilon$ , so folgt in erster Ordnung  $d_1 = 0$  und

$$\tilde{T}_1 = -1/2 \frac{C_1 - C_1 \bar{y}^2 - C_1 \sqrt{1 + \bar{y}^2} + \bar{y}^2 C_1 \sqrt{1 + \bar{y}^2} - 2 t_1 \bar{y} \sqrt{1 + \bar{y}^2} + 2 \bar{y}^3 t_1 \sqrt{1 + \bar{y}^2}}{\bar{y} (1 + \bar{y}^2)}.$$

In zweiter Ordnung gilt dann unter Verwendung von MAPLE [51]

$$aC_1^2 + bt_1C_1 + cd_2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $C_1$  mit

$$\begin{aligned}a &:= 4(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}^3 + (\sqrt{1 + \bar{y}^2} - 1)(\bar{y}^2 - \bar{y} + 1)}{(1 + \bar{y}^2)^{5/2}(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})}, \\ b &:= 8(\bar{y}^2 - 1) \frac{\bar{y}}{(1 + \bar{y}^2)^{3/2}}, \\ c &:= -4\bar{y} \frac{\bar{y}^2 + \bar{y}\sqrt{1 + \bar{y}^2} + 1}{(\bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2})\sqrt{1 + \bar{y}^2}},\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

# Literaturverzeichnis

- [1] R. A. ADAMS; Sobolev Spaces, *Academic Press, New York-London* (1975)
- [2] D. ANDERSON, M. LISAK; Nonlinear asymmetric self-phase modulation and self-steepening of pulses in long optical waveguides, *Physical Reviews A* **27** (1983), pp. 1393-1398
- [3] A.BERNTSON, N.J.DORAN, W.FORYSIAK, J.H.B.NIJHOF; Power dependence of dispersion-managed solitons for anomalous, zero and normal path-average dispersion, *Optics Letters* **23** (1998), pp. 900-902
- [4] R.CARLES; Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications, *preprint* (2002)
- [5] R.CARLES; Remarks on the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential, *Annales Henri Poincaré* **3** (2002), pp. 757-772
- [6] V.CAUTAERTS,A.MARUTA,Y.KODAMA; On the dispersion managed soliton, *Chaos* **10** (2000), pp. 515-528
- [7] T. CAZENAVE; An introduction to nonlinear Schrödinger equations, *Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, Rio de Janeiro* **26**, (1993)
- [8] T. CAZENAVE,P.L.LIONS; Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), pp. 549-561
- [9] M. CHERTKOV, I. GABITOV, P. M. LUSHNIKOV, J. MOESER, Z. TOROCZKAI, Pinning method of pulse confinement in optical fiber with random dispersion, *Journal of the Optical Society of America B* **19** (2002), pp. 2538-2550
- [10] C.V.COFFMAN; A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equations, *J. Analyse Math.* **22** (1969), pp. 391-419
- [11] H.L. CYCON, R.G. FROESE, W. KIRSCH, B. SIMON; Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry, *Springer* (1987)
- [12] P.DINDA, K.NAKKEERAN, A.B. MOUBISSI; Optimized Hermite-gaussian ansatz function for dispersion managed solitons, *Optics Communications* **187** (2001), pp. 427-433
- [13] R.DUTRAY, J.-L.LIONS; Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 3: Spectral theory and applications, *Springer Verlag* (1990) Kapitel 9

- 
- [14] R.FUKUIZUMI; Stability and instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **7** (2001), pp. 525-544
- [15] I.GABITOV, S.K.TURITSYN; Breathing solitons in optical fiber links, *JETP Letters* **63** (1996), pp. 861-866
- [16] I. GABITOV, S.K. TURITSYN; Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation, *Optics Letters* **21** (1996), pp. 327-329
- [17] J.GARNIER; Stabilization of dispersion-managed solitons in random optical fibers by strong dispersion management, *Optics Communications* **206** (2002), pp. 411-438
- [18] M. GOLUBITSKY, D.G. SCHAEFFER; Singularities and Groups in Bifurcation Theory I, *Springer Verlag* (1985)
- [19] V.S.GRIGORYAN, R.-M. MU, G.M. CARTER, C.R.MENYUK; Experimental demonstration of long-distance dispersion-managed soliton propagation at zero average dispersion, *IEEE Photonics Technology Letters* **12** (2000), pp. 45-46
- [20] V. S. GRIGORYAN, C. R. MENYUK; Dispersion-managed solitons at normal average dispersion, *Optics Letters* **23** (1998), pp. 609-611
- [21] V.S.GRIGORYAN, T.YU, E.A.GOLOVCHENKO, C.R.MENYUK, A.N.PILIPETSKII; Dispersion-managed soliton dynamics, *Optics Letters* **22** (1997), pp. 1609-1611
- [22] J.GUCKENHEIMER, P.HOLMES; Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, *Applied Mathematical Sciences* **42** (1985), Springer Verlag
- [23] A.HASEGAWA; An historical review of application of optical solitons for high speed communications, *Chaos* **10** (2000), pp. 475-485
- [24] A.HASEGAWA; Optical Solitons in Fibers, *Springer Tracts in Modern Physics* **116**
- [25] A.HASEGAWA, Y.KODAMA; Solitons in Optical Communications, *Oxford Series in Optical and Imaging Science* **7** (1995)
- [26] A.HASEGAWA, Y.KODAMA; Guiding-Center soliton in fibers with periodically varying dispersion, *Optics Letters* **15** (1991), pp. 1385-1387
- [27] A.HASEGAWA, Y.KODAMA, A.MARUTA; Recent Progress in Dispersion-Managed Soliton Transmission Technologies, *Optical Fiber Technology* **3** (1997), pp. 197-213
- [28] A.HASEGAWA, S.KUMAR, Y.KODAMA; Reduction of collision-induced timing jitters in dispersion-managed soliton transmission systems, *Optics Letters* **21** (1996), pp. 39-41
- [29] A.HASEGAWA, F.TAPPERT; Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion, *Applied Physical Letters* **23** (1973), pp. 142-144

- 
- [30] M.HIROSE, M.OHTA; Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential, *Journal of Differential Equations* **178** (2002), pp. 519-540
- [31] P.HOLMES, J.N.KUTZ; Dynamics and bifurcations of a planar map modeling dispersion managed breathers, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **59** (1999), pp. 1288–1302
- [32] R.K.JACKSON, C.K.R.T.JONES, V.ZHARNITSKY; Dispersion-managed solitons via an averaged variational principle, *preprint*
- [33] H.KALISCH, D.PELINOVSKY; Dispersion-managed solitons in the limit of large energy, *preprint*
- [34] O.KAVIAN; Introduction à la théorie des points critiques, *Mathématiques & Applications* **13**, Springer Verlag, Theorem 4.5.5
- [35] O.KAVIAN, F.B.WEISSLER; Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation, *Michigan Math. Journal* **41** (1994), pp. 151-173.
- [36] Y. S. KISHVAR, T. J. ALEXANDER, S. K. TURITSYN; Nonlinear modes of a macroscopic quantum oscillator, *Phys. Lett. A* **278** (2001), pp. 225-230
- [37] Y.KODAMA; Optical Solitons in a Monomode Fiber, *Journal of Statistical Physics* **39** (1985), pp. 597–614
- [38] J.N.KUTZ, S.G. EVANGELIDES; Dispersion-managed breathers with average normal dispersion, *Optics Letters* **23** (1998), pp. 685-687
- [39] J.N.KUTZ, P.HOLMES, S.G. EVANGELIDES, J.P. GORDON; Hamiltonian dynamics of dispersion-managed breathers, *Journal of the Optical Society of America B* **15** (1998), pp. 87–96
- [40] M.KUNZE; A variational problem with lack of compactness related to the nonlinear Schrödinger equation, *preprint*
- [41] M. KUNZE; Bifurcation from the continuous spectrum without sign condition on the nonlinearity, *Proceedings of the Royal Society Edinburgh, A* **131** (2001), pp. 927-943
- [42] M.KUNZE; Periodic solutions of a singular Lagrangian system related to dispersion-managed fiber communication systems, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **1** (2001), pp. 159–167
- [43] M.KUNZE; Infinitely many radial solutions of a variational problem related to dispersion-managed optical fibers, erscheint in *Proceedings of the American Mathematical Society*
- [44] M.KUNZE, T.KÜPPER, V.K.MEZENTSEV, E.G.SHAPIRO, S.K.TURITSYN; Nonlinear Solitary Waves with Gaussian Tails, *Physica D* **128** (1999), pp. 273-295

- 
- [45] M.KURTH; Nichtlineare Schrödingergleichungen in der Faseroptik, *Diplomarbeit, Köln* (1999)
- [46] T.I.LAKOBA, D.J.KAUP; Hermite-Gaussian expansion for pulse propagation in strongly dispersion managed fibers, *Physical Review E* **58** (1998), pp. 6728-6741
- [47] T.I.LAKOBA, G.P.AGRAWAL; Effects of third-order dispersion on dispersion-managed solitons, *Journal of the Optical Society of America B* **16**, pp. 1332-1343
- [48] C.LIN, H. KOGELNIK, L. G. COHEN; Optical Pulse Equalization and Low Dispersion Transmission in Single-Mode Fibers in the 1.3-1.7  $\mu\text{m}$  Spectral Region, *Optics Letters* **5** (1980), pp. 476-478
- [49] P.M.LUSHNIKOV; On the boundary of the dispersion-managed soliton existence, *JETP Letters* **72** (2000), pp. 163-167
- [50] P.M.LUSHNIKOV; Dispersion-managed soliton in optical fibers with zero average dispersion, *Optics Letters* **25** (2000), pp. 1144-1146
- [51] MAPLE V; *Waterloo Software*
- [52] A. MARUTA, Y. NONAKA, T. INOUE; Symmetric Bi-Soliton Solution in a Dispersion-Managed System, *postdeadline poster PD4, Topical Meeting on Nonlinear Guided Waves and Their Applications 2001, Clearwater, Florida* (2001)
- [53] A.MECOZZI, E.IANNONE, F.MATERA, M.SETTEMBRE; Nonlinear Optical Communication Networks, *Wiley Series in Microwave and Optical Engineering* (1998)
- [54] F.MOLLENAUER, R.H.STOLEN, J.P. GORDON; Experimental observation of pico-second pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Physical Review Letters* **45** (1980), pp. 1095-1098
- [55] A.NEWELL, J.MOLONEY; Nonlinear Optics, *Addison-Wesley* (1992)
- [56] Y.-G.OH; Cauchy problem and Ehrenfest's law of nonlinear Schrödinger equations with potentials, *Journal of Differential Equations* **81** (1989), pp. 255-274
- [57] R.S. PALAIS; The principle of symmetric criticality, *Communications in Mathematical Physics* **69** (1979), pp. 19-30
- [58] C.PARÉ, P.A.BÉLANGER; Antisymmetric soliton in a dispersion-managed system, *Optics Communications* **168**, (1999), pp. 103-109
- [59] D.E. PELINOVSKY; Instabilities of dispersion-managed solitons in the normal dispersion regime, *Phys. Rev. E* **62** (2000), pp. 4 283-4293
- [60] D.E. PELINOVSKY, V. ZHARNITSKY; Averaging of dispersion-managed pulses: existence and stability, erscheint in *SIAM Journal of Applied Mathematics*
- [61] P.H.RABINOWITZ; Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *Journal of Functional Analysis* **7** (1971), pp. 487-513

- [62] P.H.RABINOWITZ; Bifurcation from simple eigenvalues, *Journal of Functional Analysis* **8** (1971), pp. 321–340
- [63] H.A.ROSE,M.WEINSTEIN; On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, *Physica D* **30** (1988), pp. 207-218
- [64] M.REMOISSENET; Waves called solitons, *Springer* (1994), Kapitel 8
- [65] J. A. SANDERS, F. VERHULST; Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, *Springer* (1985)
- [66] T.SCHÄFER, V.K.MEZENTSEV, K.H.SPATSCHEK, S.K.TURITSYN; The dispersion-managed soliton as a ground state of a macroscopic nonlinear quantum oscillator, *Proceedings of the Royal Society London, A* **457** (2001), pp. 273-282
- [67] T.SCHÄFER; Der Einfluss von Dispersionskompensation auf Solitonen in optischen Übertragungsstrecken, *Dissertation, Düsseldorf*, (2000)
- [68] N.J. SMITH, N.J. DORAN, W. FORYSIAK, F.M. KNOX; Soliton transmission using periodic dispersion compensation, *Journal of Lightwave Technology* **15** (1997), pp. 1808-1822
- [69] M.STRUWE; Variational Methods: Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, *Springer* (1990)
- [70] I.N.SNEDDON; Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, *Longman* (1980)
- [71] M. SUZUKI, I. MORITA, N. EDAGAWA, S. YAMAMOTO, S. AKIBA; Reduction of Gordon-Haus timing jitter by periodic dispersion compensation in soliton transmission, *Electronic Letters* **31** (1995), pp. 2025-2027
- [72] V.TALANOV; Focusing of light in cubic media, *JETP Letters* **11** (1970), pp. 199–201
- [73] H.TANABE; Equations of Evolution, *Pitman Verlag, London* (1979)
- [74] A.TONELLO; Slow dynamics of Gaussian pulses in fibre links with dispersion management, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **2** (2000), pp. 338-343
- [75] S.K.TURITSYN, I.GABITOV, E.W.LAEDKE, V.K.MEZENTSEV, S.L.MUSHER, E.G.SHAPIRO, T.SCHÄFER, K.H.SPATSCHEK; Variational approach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems, *Optics Communications* **151** (1998), pp. 117-135
- [76] S.K.TURITSYN, J.H.B.NIJHOF, V.K.MEZENTSEV, N.J.DORAN; Symmetries, chirp-free points and bistability in dispersion-managed fiber links, *Optics Letters* **24** (1999), pp. 1871–1873
- [77] S.K.TURITSYN, V.K.MEZENTSEV; Solitons with Gaussian tails in dispersion-managed communication systems using gratings, *Physics Letters A* **237** (1997), pp. 37-42

- 
- [78] S.K.TURITSYN, V.K.MEZENTSEV, E.G.SHAPIRO; Dispersion-Managed Solitons and Optimization of the Dispersion Management, *Optical Fiber Technology* **4** (1998), pp. 384-452
- [79] S.K.TURITSYN, T.SCHÄFER, K.H.SPATSCHEK, V.K.MEZENTSEV; Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines, *Optics Communications* **163** (1999), pp. 122-158
- [80] S.K.TURITSYN, E.G.SHAPIRO; Variational Approach to the Design of Optical Communication Systems with Dispersion Management, *Optical Fiber Technology* **4** (1998), pp. 151-188
- [81] F.VERHULST; On averaging methods for partial differential equations, *Symmetry and perturbation theory (Rome, 1998)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999, pp. 79–95
- [82] M.WILLEM; Minimax Theorems, *Birkhäuser* (1996)
- [83] V.ZHARNITSKY, E.GRENIER, S.K.TURITSYN, C.K.R.T.JONES, J.S.HESTHAVEN; Stabilizing effects of dispersion management, *Physica D* **152-153** (2001), pp. 794-817.
- [84] J.ZHANG; Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **51** (2000), pp. 498-503

# Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Tassilo Küpper betreut worden.

Köln, 21. Februar 2003

## **Teilpublikationen:**

Optical Solitons as Ground States of NLS in the Regime of Strong Dispersion Management, eingereicht bei *Physica D*

# Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Küpper für seine Unterstützung während der vergangenen Jahre. Auch Prof. Dr. Jones gebührt großer Dank für zahlreiche Diskussionen und Anregungen sowie die Gastfreundschaft bei meinen Aufenthalten an der Brown University. Besonders bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Dr. Vadim Zharnitsky, der mich speziell in den Anfängen der Promotion begleitet und mit der Thematik vertraut gemacht hat. Für die fruchtbare Zusammenarbeit und seine vielen Anregungen sei Dr. Tobias Schäfer ebenfalls besonders gedankt.

Ganz besonderer Dank an Frau Marion Adam, Frau Silke Neubarth und Dr. Michael Welter für das Korrekturlesen der Arbeit.

Nicht zuletzt meinen Freunden und Kollegen sowie meinen Eltern und Großeltern möchte ich für die Unterstützung, Geduld und Aufmunterung danken, die mir in den letzten Jahren entgegengebracht wurden.

# Lebenslauf

## Persönliche Angaben

---

Name	Michael Kurth
Geburtsdatum	12. September 1974
Geburtsort	Köln
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig
Eltern	Wolfgang Kurth und Margret Kurth, geb. Klein

## Wehrersatzdienst

---

seit Mai 1993	Mitarbeit beim Deutschen Roten Kreuz im Rahmen des Katastrophenschutzes
---------------	---

## Schulausbildung

---

1980-1984	Grundschule Overbeckstraße in Köln
1984-1993	Albertus-Magnus-Gymnasium in Köln, Abschluss Abitur

## Studium

---

ab Oktober 1993	Studium der Mathematik mit Nebenfach Versicherungswissenschaften an der Universität zu Köln
Januar 1996	Vordiplom mit der Note <i>gut</i>
September 1999	Diplom mit der Note <i>sehr gut</i>
seit Oktober 1999	Promotionsstudium an der Universität zu Köln

## Berufliche Tätigkeit

---

Okt.1996 - Sep.1999	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
Okt.1999 - Sep.2000	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität zu Köln, Lehrstuhl Prof. Dr. Küpper
seit Oktober 2000	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität zu Köln, Lehrstuhl Prof. Dr. Küpper