

**Der Anharmonische Quartische Oszillator:
Wohldefiniertheit, spektrale Eigenschaften
und Kontrollierbarkeitsaspekte**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Nadia Kollakowski

aus Haan

Köln, 2017

Berichterstatter: Prof. Dr. Bernd Kawohl, Universität zu Köln
Prof. Dr. Markus Kunze, Universität zu Köln
Prof. Dr. Holger Teismann, Acadia University, Wolfville,
Nova Scotia, Canada

Tag der mündlichen Prüfung: 25.04.2017

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir ein bilineares Schrödinger-Kontrollproblem, welches die Dynamik eines quantenmechanischen Teilchens in einem anharmonischen Potential modelliert, das durch ein von einer Laserkonstellation induziertes, zeitabhängiges elektrisches Feld beeinflusst wird.

Wir zeigen für quadratintegrierbare Kontrollfunktionen die Existenz einer milden Lösung dieses Systems im Definitionsbereich des Hamiltonoperators und stellen fest, dass es sich, im Falle einer stetigen Kontrollfunktion, bei dieser milden Lösung sogar um eine klassische Lösung handelt. Wir untersuchen die Spektraleigenschaften des Systems in Abwesenheit des zeitabhängigen elektrischen Feldes und leiten, neben asymptotischen Formeln für große Energielevel (Eigenwerte) sowie für die spektralen Lücken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten, diverse Abschätzungen der Eigenfunktionen her, mittels derer wir zu der Erkenntnis gelangen, dass im Falle einer Positivität des inneren Hamilton-Operators sämtliche Eigenfunktionen Elemente des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ sind, welchen wir als eine Vereinigung abstrakter Gevrey-Räume für den inneren Hamilton-Operator charakterisieren. Unter Verwendung der nachgewiesenen Spektraleigenschaften, leiten wir im Falle eines nicht-symmetrischen anharmonischen Potentials positive Kontrollierbarkeitsergebnisse für das um die Grundzustandstrajektorie linearisierte System her. Im Falle eines symmetrischen Potentials erkennen wir, dass die resultierende Symmetrie der Eigenfunktionen einer Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems im Wege steht. Im nicht-symmetrischen Fall identifizieren wir die Menge der erreichbaren Zustände als einen Teilraum eines abstrakten Gevrey-Raumes für den inneren Hamilton-Operator, und folglich von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. Eine numerische Analyse legt nahe, dass die Menge der erreichbaren Zustände einem solchen abstrakten Gevrey-Raum in einigen Fällen möglicherweise exakt entspricht. Schließlich zeigen wir unter der Annahme einer Invarianzeigenschaft für die Lösung des bilinearen Systems in den Funktionenräumen, in denen das linearisierte System kontrollierbar ist, mittels des Linearisierungsprinzips, die lokale exakte Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems in der Nähe des Grundzustandes.

Abstract

In this thesis we consider a bilinear Schrödinger control problem modelling the dynamics of a quantum mechanical particle in an anharmonic potential, controlled by a time-dependent electric field induced by a laser constellation. We show the well-posedness of this system, for square-integrable control functions, in the domain of the Hamiltonian, in the sense that there exists a mild solution to this problem which turns out to be even a classical one when assuming the control function to be continuous. As for the spectral properties of the system in the absence of the time-dependent electric field, we find asymptotic formulae for high energy levels (eigenvalues) as well as for the gaps between two such consecutive eigenvalues. Based on several estimates of the corresponding eigenfunctions, we come to realize that, in the case of a positive (uncontrolled) Hamiltonian, these eigenfunctions are all elements of the Gelfand-Shilov space $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ which, as we show, can be interpreted as the union of abstract Gevrey spaces for this Hamiltonian. Making use of the established spectral properties, we derive positive exact controllability results for the linearized system around the ground state trajectory in the case of a non-symmetric anharmonic potential, while we see that in the case of a symmetric potential the resulting symmetry of the eigenfunctions is an obstacle to controlling the linearized system. In the non-symmetric case we identify the set of the reachable states as a subspace of an abstract Gevrey space for the Hamiltonian, and consequently of $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. A numerical analysis suggests that the set of the reachable states might in some cases even coincide with such an abstract Gevrey space. Finally assuming an invariance property for the solution of the bilinear system in the function spaces where the linearized system is controllable, we deduce the local exact controllability of the bilinear system in the vicinity of the ground state by the linearization principle.

Danksagung

Ich bedanke mich von ganzem Herzen bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Horst Lange für die Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit. Vielen herzlichen Dank für die Auswahl dieses herausfordernden und hochspannenden Themas, für Ihre wertvollen fachlichen Hinweise, für unsere Treffen in Freiburg, Köln und Düsseldorf, für Ihre unzähligen E-Mails, für Ihre Geduld sowie für Ihren Zuspruch während der langen schwierigen Phasen bei der Entstehung dieser Arbeit. Ich bin Ihnen sehr dankbar, dass Sie es mir ermöglicht haben, diese Arbeit anzufertigen.

Mein ganz besonderer Dank gebührt zudem Herrn Prof. Dr. Bernd Kawohl für die Übernahme der offiziellen Betreuung dieser Arbeit sowie für sein überaus großes Engagement hinsichtlich der formalen Abwicklung des Promotionsverfahrens.

Herrn Prof. Dr. Markus Kunze sei vielmals ausdrücklich und herzlichst gedankt für seine Bereitschaft, meine Arbeit als Zweitgutachter zu bewerten.

Mein tiefer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Holger Teismann für seine hilfreichen Hinweise und aufbauenden Worte, unser nettes Treffen in Köln und für seine Bereitschaft, als externer Gutachter meiner Arbeit zu fungieren.

Ich danke meinen lieben Eltern für ihre bedingungslose Liebe, ihr grenzenloses Vertrauen in mich, ihre unendliche Geduld und ihre Unterstützung in den vergangenen Jahren.

Mein außerordentlicher Dank gilt darüber hinaus meinem großherzigen Bruder Tobias, der immer für mich da ist, meiner lieben Oma Herta sowie all den anderen lieben Menschen, die mir während dieser langen, schwierigen Zeit zur Seite gestanden haben, die sich aufrichtig für mein Wohlergehen interessiert haben, mich stets ermutigt und wieder aufgerichtet haben und mir schöne Momente geschenkt haben.

Wuppertal, im Dezember 2016

Nadia Kollakowski

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Grundlagen und Motivation	5
1 Allgemeine Definitionen und Notationen	7
1.1 Funktionenräume	7
1.1.1 Räume differenzierbarer Funktionen	7
1.1.2 Lebesgue-Räume	8
1.1.3 Sobolev-Räume	8
1.1.4 Räume vom Typ \mathcal{S}	9
1.1.5 Zeitabhängige Funktionenräume	12
1.1.6 Sonstige Funktionenräume	13
1.2 Kommutator, Lie-Klammern und Lie-Algebren	13
1.3 Gammafunktion und Betafunktion	14
1.4 Asymptotik und Landau-Notationen	15
2 Das quantenmechanische Modell	16
2.1 Wellenfunktionen und der Zustandsraum	16
2.2 Wellendynamik: Die Schrödinger-Gleichung	17
2.3 Stationäre Zustände	18
2.4 Manipulation von Quantensystemen: Ein Schrödinger-Kontrollproblem	19
3 Kontrolltheorie	21
3.1 Terminologie	21
3.2 Literaturrückblick: Kontrollierbarkeit bilinearer Schrödinger- Gleichungen	24
3.2.1 Negative Resultate	24
3.2.2 Positive Resultate	26
4 Problemstellung, Motivation und Aufbau	34
4.1 Das Kontrollproblem für den Anharmonischen Oszillator	34
4.2 Iterierte Lie-Klammern	36
4.3 Aufbau der Arbeit und verwendete Methoden	39
4.3.1 Das Linearisierungsprinzip	39
4.3.2 Die Momentenmethode für lineare Kontrollsysteme	40

II	Wohldefiniertheit	45
5	Existenz klassischer Lösungen	47
5.1	Ein geeigneter Funktionenraum	47
5.2	Selbst-Adjungiertheit in $L^2(\mathbb{R})$	49
5.3	Klassische Lösungen in $D(A)$	50
6	Existenz milder Lösungen	54
6.1	Das bilineare System	54
6.2	Linearisierte Systeme	59
III	Spektraleigenschaften	63
7	Das Spektrum des Hamilton-Operators	65
7.1	Diskretheit, Einfachheit und Positivität	65
7.2	Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte	69
7.2.1	Der Fall $\beta = \gamma = 0$	69
7.2.2	Der allgemeine Fall	71
7.3	Spektrale Lücken	73
8	Die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators	79
8.1	Qualitative Eigenschaften	80
8.2	Spezielle Eigenschaften im Fall $\gamma = 0$	81
8.3	Analytizität in der Nähe von $\gamma = 0$	83
8.4	Die Größenordnung für $k \rightarrow \infty$	88
8.5	Abschätzungen der Eigenfunktionen in \mathbb{R}	89
8.5.1	Abschätzung der Supremumsnorm	89
8.5.2	Abschätzung in Abhängigkeit von x	91
8.5.3	Abschätzung der ersten Ableitung	93
8.5.4	Abschätzung höherer Ableitungen	95
8.6	Die Eigenfunktionen als ganze Funktionen	97
8.6.1	Abschätzung der Eigenfunktionen in \mathbb{C}	97
8.6.2	Ordnung und Typ	99
8.7	Elemente des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$	101
IV	Kontrollierbarkeitsaspekte	103
9	Nicht-Kontrollierbarkeit mittels distributiver Kontrolle	105
9.1	Kontrollierbarkeit und Observabilität	105
9.2	Eine Observabilitäts-Ungleichung kann nicht gelten	106
10	Abstrakte Gevrey-Räume	108
10.1	Definitionen	108
10.2	Der Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ als Vereinigung abstrakter Gevrey-Räume für den Hamilton-Operator	110
10.2.1	$D(\exp(\tau A^{3/4}))$: Teilräume von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$	110

10.2.2 Die Fourierkoeffizienten von Funktionen aus $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ bezüglich der Basis der Eigenfunktionen von A	111
11 Linearisierte Systeme	117
11.1 Das Momentenproblem für die Kontrollfunktion	119
11.2 Nicht-Kontrollierbarkeit falls $\gamma = 0$	121
11.3 Die Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($\gamma \neq 0$)	122
11.4 Wohldefiniertheit in $\mathcal{H}_{(0)}$ und $\mathcal{H}_{(1)}$	125
11.5 Exakte Kontrollierbarkeit im Fall $\gamma \neq 0$	127
11.5.1 Kontrollierbarkeit mittels L^2 -Kontrollfunktionen	127
11.5.2 Kontrollierbarkeit mittels H^1 -Kontrollfunktionen	128
11.6 Numerische Auswertungen der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$	131
12 Lokale Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems bei gegebener Invarianzeigenschaft	135
12.1 Regularisierungseffekt	137
12.2 Wohldefiniertheit in $\mathcal{H}_{(0)}$ und $\mathcal{H}_{(1)}$	138
12.3 C^1 -Regularität der Endpunkt-Abbildung	140
12.4 Lokale Kontrollierbarkeit in der Nähe von $\psi_{1,\gamma}$	143
Zusammenfassung und Ausblick	146
Anhang	154
A Hilfsmittel	155
B Numerische Berechnungen	158
B.1 Eigenwerte	159
B.2 Fourier-Koeffizienten $b_{k,\gamma}$	159
Literaturverzeichnis	165
Erklärung	173

Einleitung

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens durch eine Wellenfunktion beschrieben, deren Dynamik durch eine Schrödingergleichung gegeben ist. Wir betrachten in dieser Arbeit ein solches quantenmechanisches Teilchen in einem anharmonischen quartischen Potential und untersuchen, ob eine gezielte Beeinflussung der Wellendynamik möglich ist: Lässt sich die Bewegung des Teilchens kontrollieren, indem man mit Hilfe von Lasern äußere Energiefelder an das System anlegt? Wäre dies möglich, so ließen sich z.B. chemische Reaktionen auf mikroskopischem Niveau steuern, indem man das System in einen, für die jeweils gewünschte Reaktion, vorteilhaften Zustand versetzt.

Mathematisch können wir das Problem so formulieren: Lässt sich die lineare Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) + V(x) \psi(t, x) \quad (t \in [0, T], x \in \mathbb{R}), \quad (1)$$

mit einem anharmonischen quartischen Potential

$$V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

durch das Hinzufügen eines (zeitabhängigen) Kontroll-Potentialtermes so kontrollieren, dass das System, ausgehend von einem gegebenen Anfangszustand $\psi_0(x)$, zu einem vorgegebenen Zeitpunkt einen gewünschten, vorgegebenen Zielzustand $\psi_f(x)$ einnimmt oder sich diesem zumindest gut annähert?

Wir fügen der obigen Gleichung den physikalisch relevanten bilinearen Kontrollterm $-u(t)\mu(x)\psi(t, x)$ zu, der ein zeitabhängiges elektrisches Feld mit der Intensität $u(t)$ und dem fixen räumlichen Profil $\mu(x) = x$ modelliert.

Im Falle eines harmonischen Potentials $V(x) = \beta x^2$ ($\beta > 0$) haben M. Mirrahimi und P. Rouchon in [68] gezeigt, dass mittels eines solchartigen bilinearen Kontrollterms eine Kontrolle der Wellenfunktion ψ nicht möglich ist.

Nachdem wir in den Kapiteln 1 bis 3 zunächst allgemeine Definitionen geben, das quantenmechanische Modell erläutern, die in der Arbeit benötigten Begrifflichkeiten aus der Kontrolltheorie klären sowie auf weitere bekannte Ergebnisse bezüglich der Kontrollierbarkeit bilinearer Schrödingergleichungen eingehen, formulieren wir in § 4.1 zuerst das von uns im folgenden behandelte konkrete Kontrollproblem, bevor wir in § 4.2 zeigen, dass der von

M. Mirrahimi und P. Rouchon für den Nachweis der Nicht-Kontrollierbarkeit des Harmonischen Oszillators verwendete Ansatz in dem Fall eines anharmonischen Potentials zu einem anderen Ergebnis führt. Wir erhalten mittels des geometrischen Verfahrens der iterierten Lie-Klammern einen ersten Hinweis auf eine mögliche Kontrollierbarkeit des Anharmonischen Quartischen Oszillators: Die von Hamilton- und Kontrolloperator erzeugte Lie-Algebra erweist sich, anders als beim Harmonischen Oszillator, als unendlichdimensional. Durch sukzessive Anpassungen des Definitionsbereiches erkennen wir gleichzeitig, dass die Kontrollierbarkeit auf eine Teilmenge schnell-fallender C^∞ -Funktionen beschränkt sein wird. Konkretere Aussagen über die Menge der erreichbaren Zustände lassen sich mittels dieser Methode allerdings nicht treffen, weshalb wir im weiteren Verlauf der Arbeit auf andere (analytische) Beweismethoden setzen, welche wir in § 4.3 erläutern.

In Kapitel 5 zeigen wir mit Hilfe eines Satzes von T. Kato zunächst die Existenz einer klassischen Lösung $\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ des Anfangswertproblems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x) \psi(t, x), \quad (3)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (4)$$

wobei $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}, u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ und wir mit $D(A)$ den Definitionsbereich des Hamilton-Operators $A := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ bezeichnen. Über eine zweifache Transformation des Systems (3),(4), zeigen wir in Kapitel 6, dass das System auch unter der schwächeren Regularitätsforderung $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ noch eine sogenannte milde Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$ hat, welche der zu (3),(4) gehörigen Integralgleichung genügt. Gleichzeitig erkennen wir, dass die Differenzierbarkeit der Kontrollfunktion u für die Existenz einer klassischen Lösung von (3),(4) nicht zwingend erforderlich ist, sondern dass die Stetigkeit ausreicht. Überdies zeigen wir die Existenz milder Lösungen in $D(A)$ auch für die im Laufe der Arbeit zu betrachtenden linearisierten Systeme.

Die Kapitel 7 und 8 sind der Untersuchung der spektralen Eigenschaften des inneren (unkontrollierten) Hamilton-Operators gewidmet.

In Kapitel 7 befassen wir uns zunächst mit seinem Spektrum: Dieses erweist sich in § 7.1 als rein diskret, reell, nicht entartet, und - im Falle betragslich kleiner Werte γ - positiv. In § 7.2 leiten wir asymptotische Formeln für die Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$), zunächst im Falle eines rein quartischen Potentials, dann für ein allgemeines anharmonisches Potential der Gestalt (2) her. Außerdem schätzen wir in § 7.3 die Abstände $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten durch Ausdrücke in Abhängigkeit von λ_k nach oben und unten ab, und erkennen anhand der zuvor gewonnenen asymptotischen Formeln für die Eigenwerte, dass diese "Gaps", wie auch die Eigenwerte, für $k \rightarrow \infty$ unendlich groß werden.

Für die zu λ_k ($k \in \mathbb{N}$) gehörigen Eigenfunktionen φ_k gehen wir in Kapitel 8 zunächst auf qualitative Eigenschaften ein (§ 8.1), insbesondere auch im

Spezialfall einer symmetrischen Potentialfunktion $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$ (§ 8.2), bevor wir in § 8.3 die Analytizität der Funktionen φ_k in der Nähe von $\gamma = 0$ zeigen. In § 8.4 bestimmen wir die Größenordnung der Funktionen φ_k für große Werte $k \in \mathbb{N}$, während wir in den §§ 8.5 und 8.6 reelle wie komplexe Abschätzungen der Eigenfunktionen sowie ihrer Ableitungen vornehmen um dank dieser in § 8.7 festzustellen, dass sämtliche Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) Elemente des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$, bzw. genauer seines Teilraumes $\mathcal{S}_{1/3, e^{-1/3}\alpha^{-1/6}} \cap \mathcal{S}^{2/3, e^{-2/3}\alpha^{1/6}}$ sind, sofern der innere Hamilton-Operator positiv ist.

In Kapitel 9 notieren wir ein Kontrollierbarkeitsresultat für die Gleichung (1) mit einer anderen Art von Kontrolle als der bisher betrachteten, welches wir als Beiprodukt unserer detaillierten Untersuchungen der Eigenfunktionen erhalten haben: Die Gleichung lässt sich mittels distributiver Kontrollen in $L^2(\mathbb{R})$ nicht exakt kontrollieren. Für den Beweis nutzen wir die Dualität zwischen Kontrollierbarkeit und Observabilität und zeigen, dass eine für die Kontrollierbarkeit erforderliche Observabilitäts-Ungleichung aufgrund der Größenordnung der Eigenfunktionen φ_k des inneren Hamilton-Operators für $k \rightarrow \infty$ nicht für alle Zustände $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt sein kann.

In Kapitel 10 führen wir den Begriff abstrakter Gevrey-Räume ein und zeigen, dass der Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ eine Vereinigung abstrakter Gevrey-Räume der Ordnung $4/3$ für den Hamilton-Operator ist, falls dieser positiv ist. Insbesondere bestimmen wir hier die Größenordnung der Fourierkoeffizienten von Elementen aus $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ in der Basis der Eigenfunktionen des Hamilton-Operators.

Wir untersuchen in Kapitel 11 das um den Grundzustand linearisierte System, dessen Lösungs existenz im Definitionsbereich des Hamilton-Operators wir bereits in Kapitel 6 nachgewiesen haben. Wir stellen dabei fest, dass dieses nicht in allen Fällen kontrollierbar ist: Im Falle $\gamma = 0$ scheitert die Kontrollierbarkeit an den Paritätseigenschaften der Eigenfunktionen, die aufgrund der Symmetrie des Potentials $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$ entweder gerade oder ungerade sind (§ 11.2). Ist γ von Null verschieden, so weisen die Eigenfunktionen keine Paritätseigenschaften auf und wir können das lineare Kontrollsystem, für betraglich kleine Werte γ , in ein äquivalentes Momentenproblem für die Kontrollfunktion überführen, dessen Lösbarkeit (und damit die exakte Kontrollierbarkeit des Systems) wir in bestimmten gewichteten Lebesgue-Räumen in § 11.5 mit Hilfe eines Satzes vom Ingham-Typ nachweisen. Da die Gewichte dieser Lebesgue-Räume von den Fourierkoeffizienten der Funktion $x\varphi_1$ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) abhängen, analysieren wir diese Koeffizienten in § 11.3 um den Raum einordnen zu können. Neben der Eigenschaft, dass die Koeffizienten für betraglich kleine Werte γ generisch von Null verschieden sind, finden wir eine Abschätzung nach oben, die den Raum als Teilraum eines abstrakten Gevrey-Raumes der Ordnung $4/3$ für den Hamilton-Operator (und gemäß Kapitel 10 von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$) klassifiziert. In § 11.4 zeigen wir mittels eines nachgewiesenen Regularisierungseffektes, dass die im

folgenden Abschnitt auf Kontrollierbarkeit untersuchten Systeme auch in den entsprechenden Räumen wohldefiniert sind. Da sich die Fourierkoeffizienten der Funktion $x\varphi_1$, aufgrund des oszillierenden Charakters der Eigenfunktionen auf dem relevanten Intervall und des Nicht-Bekanntseins einer analytischen Formel für diese, nicht exakt analytisch bestimmen oder nach unten abschätzen lassen, ergänzen wir unsere Analysen aus § 11.3 um numerische Analysen in § 11.6. Für die betrachteten Parameterwerte α, β, γ zeigt sich, dass die relevanten gewichteten Lebesgue-Räume Interpolationsräume für abstrakte Gevrey-Räume der Ordnung $4/3$ bezüglich des Hamilton-Operators sind, oder einem solchen sogar exakt entsprechen.

Kapitel 12 ist schließlich der lokalen exakten Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems, in der Nähe des Grundzustandes, in den in Kapitel 11 identifizierten gewichteten Lebesgue-Räumen, gewidmet. Um die Wohldefiniertheit des bilinearen Systems in diesen Räumen zu garantieren, benötigt man einen Regularisierungseffekt für das in der entsprechenden Integralgleichung auftretende Integral. Dieses oszillierende Integral muss in den betrachteten Räumen liegen, obwohl der Integrand möglicherweise nicht darin liegt. Dank der nachgewiesenen Existenz einer milden Lösung im Definitionsbereich des Hamilton-Operators, wissen wir, dass hier beispielsweise ein solcher Effekt gegeben ist. Wir nehmen in § 12.1 an, dass ein solcher Effekt auch in den hier betrachteten gewichteten Lebesgue-Räumen gegeben sei, und zeigen unter dieser Voraussetzung in § 12.2 die Existenz milder Lösungen sowie in § 12.3 die C^1 -Regularität der Endpunktabbildung, die einer Kontrollfunktion einen Zielzustand aus dem Raum zuordnet. Durch die Anwendung des klassischen lokalen Umkehrsatzes erhalten wir in § 12.4, dank der exakten Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems, unter der Voraussetzung des Regularisierungseffektes aus § 12.1, die lokale Kontrollierbarkeit in der Nähe des Grundzustandes.

Teil I

Grundlagen und Motivation

Kapitel 1

Allgemeine Definitionen und Notationen

1.1 Funktionenräume

1.1.1 Räume differenzierbarer Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Dann bezeichnen wir mit $C^k(\Omega)$ den Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Für eine Funktion $u \in C^k(\Omega)$ existiert also für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ die partielle Ableitung $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u$ der Ordnung $|\alpha|$ und ist stetig.

Der Raum $C^k(\Omega)$ ist, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

ein Banachraum.

Der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen in Ω wird definiert durch

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega),$$

der Raum der in Ω unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger durch

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } u \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\},$$

wobei

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

1.1.2 Lebesgue-Räume

Unter $L^p(\Omega)$ verstehen wir den Raum der p -integrierbaren Funktionen, d.h. den Raum der messbaren Funktionen $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, für die gilt $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, wobei

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

bzw.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ ist ein Banachraum, der im Falle $p < \infty$ separabel und im Falle $1 < p < \infty$ reflexiv ist.

Im Falle $p = 2$ hat man sogar einen separablen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Für $1 \leq p < \infty$ liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$. (vgl. Lemma V.1.9 in [100])

Den Raum der lokal p -integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit

$$L_{loc}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid u \in L^p(K) \quad \forall K \subset\subset \Omega\}.$$

1.1.3 Sobolev-Räume

Wir benötigen ferner die Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ derjenigen p -integrierbaren Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, für die die verallgemeinerte (schwache) Ableitung $D^\alpha u$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ existiert und zu $L^p(\Omega)$ gehört.

Falls $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ist, definieren wir seine Norm durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Im Falle $p = 2$ schreiben wir

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Die Räume $H^k(\Omega)$ sind separable Hilberträume mit dem inneren Produkt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.4 Räume vom Typ \mathcal{S}

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell-fallend*, falls

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k \varphi(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(q)}(x)| < \infty \forall k, q \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt *Schwartzraum*, seine Elemente *Schwartzfunktionen*.

In [38], Kapitel IV, führen I. M. Gelfand und G. E. Shilov die folgenden Teilräume von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein:

Definition 1.1 (Räume vom Typ \mathcal{S}). *Seien $\alpha, \beta \geq 0$. Eine unendlich oft differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) ist genau dann ein Element des Raumes*

- \mathcal{S}_α , wenn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_q A^k k^{k\alpha} \quad (k, q \in \mathbb{N}_0), \quad (1.2)$$

- \mathcal{S}^β , wenn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_k B^q q^{q\beta} \quad (k, q \in \mathbb{N}_0), \quad (1.3)$$

- \mathcal{S}_α^β , wenn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C A^k B^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \quad (k, q \in \mathbb{N}_0), \quad (1.4)$$

wobei die Konstanten A, B, C_k, C_q und C von der Funktion φ abhängen.

Teilt man beide Seiten in Ungleichung (1.2) durch $|x|^k$ und berechnet dann das Minimum bezüglich k der rechten Seite, so erhält man eine Funktion, die für $|x| \rightarrow \infty$ schneller fällt als jede Funktion der Art $1/|x|^k$ und umso schneller, je kleiner α ist. Dies bedeutet, dass Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}_\alpha$ in ihrer Abnahme für $|x| \rightarrow \infty$ einer gewissen Schranke unterworfen sind. I. M. Gelfand und G. E. Shilov leiten in Kapitel IV, Abschnitt 2.1. in [38] die folgende äquivalente Definition des Raumes \mathcal{S}_α her:

Definition 1.2. *Sei $\alpha > 0$. Dann besteht der Raum \mathcal{S}_α aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$), welche Ungleichungen der Form*

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C_q \exp(-a |x|^{1/\alpha}) \quad (q \in \mathbb{N}_0) \quad (1.5)$$

genügen, wobei die Konstanten C_q und a von der Funktion φ abhängen.

Es gilt

$$a = \frac{\alpha}{e A^{1/\alpha}}, \quad (1.6)$$

mit A wie in (1.2).

Elemente des Raumes \mathcal{S}^β hängen sich dadurch aus, dass sie einer Schranke bezüglich des Wachstums der Ableitungen unterworfen sind. Diese Beschränkungen sind umso strenger, je kleiner β ist. Für $\beta < 1$ hat man außerdem das folgende Resultat (vgl. Kapitel IV, §§ 2.2. und 7 in [38]):

Lemma 1.3. *Sei $\beta < 1$. Dann erfüllt eine Funktion $\varphi(x)$ genau dann die Ungleichungen*

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_k B^q q^{q\beta} \quad (k, q \in \mathbb{N}_0), \quad (1.7)$$

wenn sie sich in der komplexen Ebene analytisch fortsetzen lässt zu einer ganzen Funktion der Größenordnung $1/(1-\beta)$ und die Ungleichungen

$$|x^k \varphi(x + iy)| \leq C_k \exp(b|y|^{1/(1-\beta)}) \quad (k \in \mathbb{N}_0), \quad (1.8)$$

erfüllt, wobei b eine Konstante ist, die größer ist als $\frac{1-\beta}{e} (Be)^{1/(1-\beta)}$.

Offensichtlich ist $\mathcal{S}_\alpha^\beta \subset \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}^\beta$ (es gilt sogar $\mathcal{S}_\alpha^\beta = \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}^\beta$, vgl. [53]) und der Raum \mathcal{S}_α^β vereinigt die Eigenschaften der Räume \mathcal{S}_α und \mathcal{S}^β : Ein Element $\varphi(x)$ dieses Raumes genügt sowohl einer Schranke bezüglich der Abnahme für $|x| \rightarrow \infty$, als auch einer Schranke bezüglich des Wachstums der Ableitungen, welche umso kleiner sind, je kleiner die Zahlen α und β sind:

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C B^q q^{q\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}), \quad (1.9)$$

$$|x^k \varphi(x + iy)| \leq C A^k k^{k\alpha} \exp(b|y|^{1/(1-\beta)}) \quad (\beta < 1). \quad (1.10)$$

Aus (1.10) erhält man die Ungleichung

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}), \quad (1.11)$$

welche dann und nur dann für eine ganze Funktion $\varphi(x + iy)$ erfüllt ist, wenn $\varphi(x)$ ein Element des Raumes \mathcal{S}_α^β ist (vgl. Ch.IV, §§ 2.3. und 7.1. in [38]). Falls α und β so klein sind, dass $\alpha + \beta < 1$ ist, ist der Raum \mathcal{S}_α^β bereits trivial, d.h. er enthält nur die Funktion $\varphi(x) \equiv 0$:

Theorem 1.4. *Der Raum \mathcal{S}_α^β mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ist dann und nur dann nichttrivial, wenn $\alpha + \beta \geq 1$. Die Räume \mathcal{S}_α^0 und \mathcal{S}_0^β sind genau dann nichttrivial, wenn $\alpha > 1$ bzw. $\beta > 1$.*

Beweis. vgl. § 8.1. und § 8.2. in [38].

I. M. Gelfand und G. E. Shilov stellen in [38] das folgende Kriterium auf, mit dem sich für ganze Funktionen verifizieren lässt, ob diese Elemente eines Raumes der Art $\mathcal{S}_{1/p}^{1-1/p}$ ($p > 1$) sind:

Lemma 1.5. *Sei $f(z)$ eine ganze Funktion, die für ein $p > 1$ die Ungleichungen*

$$|f(z)| \leq C \exp(b|z|^p) \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (1.12)$$

$$|f(x)| \leq C_1 \exp(-a|x|^p) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (1.13)$$

erfüllt. Dann gehört die Funktion $f(z)$ zu dem Raum $\mathcal{S}_{1/p}^{1-1/p}$.

Umgekehrt gilt für jede Funktion $\varphi(x) \in \mathcal{S}_{1/p}^{1-1/p}$ die Ungleichung

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp(b|y|^p - a|x|^p), \quad (1.14)$$

so dass auch die Gleichungen (1.12), (1.13) erfüllt sind.

Beweis. vgl. S. 220 in [38].

Wir definieren nun abzählbar-normierte Räume vom Typ \mathcal{S} :

Definition 1.6 (Abzählbar-normierte Räume vom Typ \mathcal{S}). Seien $\alpha, \beta \geq 0$, $A, B > 0$.

- $\mathcal{S}_{\alpha, A} := \{\varphi(x) \in \mathcal{S}_\alpha : |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{q, \delta} (A + \delta)^k k^{k\alpha} \ (\forall k, q \in \mathbb{N}_0, \delta > 0)\}$,
- $\mathcal{S}^{\beta, B} := \{\varphi(x) \in \mathcal{S}^\beta : |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{k, \rho} (B + \rho)^q q^{q\beta} \ (\forall k, q \in \mathbb{N}_0, \rho > 0)\}$,
- $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B} := \{\varphi(x) \in \mathcal{S}_\alpha^\beta : |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{\delta, \rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \ (\forall k, q \in \mathbb{N}_0, \delta > 0, \rho > 0)\}$.

Wie oben hat man für $\mathcal{S}_{\alpha, A}$ die äquivalente

Definition 1.7. Der Raum $\mathcal{S}_{\alpha, A}$ ($\alpha > 0$) besteht aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$), welche Ungleichungen der Form

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C'_{q, \delta} \exp(-(a - \delta)|x|^{1/\alpha}) \quad (q \in \mathbb{N}_0) \quad (1.15)$$

genügen, wobei $\delta > 0$ beliebig und

$$a = \frac{\alpha}{e A^{1/\alpha}}.$$

Lemma 1.8. Sei $f(z)$ eine ganze Funktion, die für ein $p > 1$ die Ungleichungen (1.12) und (1.13) erfüllt, so gehört diese Funktion zu dem Raum $\mathcal{S}^{1-1/p, B}$ mit

$$B = \frac{1}{e} (bep)^{1/p}.$$

Beweis. folgt mit Lemma 1.3.

Bemerkung 1.9. Offensichtlich gilt:

1. Für $A_1 < A_2$ ist $\mathcal{S}_{\alpha, A_1} \subset \mathcal{S}_{\alpha, A_2}$.
2. Für $B_1 < B_2$ ist $\mathcal{S}^{\beta, B_1} \subset \mathcal{S}^{\beta, B_2}$.
3. Für $A_1 < A_2, B_1 < B_2$ ist $\mathcal{S}_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1} \subset \mathcal{S}_{\alpha, A_2}^{\beta, B_2}$.
4. $\mathcal{S}_\alpha = \bigcup_{A \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{\alpha, A}$.
5. $\mathcal{S}^\beta = \bigcup_{B \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^{\beta, B}$.

$$6. \mathcal{S}_\alpha^\beta = \bigcup_{A, B \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B}.$$

Die Abgeschlossenheit der Räume $\mathcal{S}_{\alpha, A}$ und $\mathcal{S}^{\beta, B}$ bezüglich der Multiplikation mit x sowie der Differentiation $\frac{d}{dx}$ wurde in [38], Ch.IV, §§ 4.1. und 5.1. gezeigt, sowie auf die Analogie der Vorgehensweise für den Nachweis der beiden Eigenschaften für die Räume $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B}$ hingewiesen. In Anbetracht von Bemerkung 1.9 hat man diese Eigenschaften dann auch in den Räumen $\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}^\beta$ sowie \mathcal{S}_α^β .

Lemma 1.10. *Die Räume vom Typ \mathcal{S} sind abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit x sowie der Differentiation $\frac{d}{dx}$. Darüber hinaus sind in diesen Räumen alle linearen Differentialoperatoren endlicher Ordnung mit konstanten oder polynomialen Koeffizienten beschränkt (und stetig).*

1.1.5 Zeitabhängige Funktionenräume

Es sei X mit Norm $\|\cdot\|_X$ ein Banachraum und $T > 0$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnet $C^k([0, T], X)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ den Banachraum der auf dem Intervall $[0, T]$ k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X . Die zugehörige Norm ist

$$\|u\|_{C^k([0, T], X)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{t \in [0, T]} \|D^\alpha u(t)\|_X.$$

Für den Raum der auf $[0, T]$ stetigen Funktionen mit Werten in X schreiben wir wie üblich $C([0, T], X)$ anstatt $C^0([0, T], X)$.

Unter $L^p(0, T; X)$ verstehen wir den Raum der messbaren Abbildungen u , definiert auf dem Intervall $[0, T]$, mit Werten in X , für die gilt

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} < \infty,$$

wobei

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X & (p = \infty). \end{cases}$$

Häufig werden wir abkürzend einfach $L^p(0, T)$ schreiben.

Der Sobolev-Raum $W^{1,p}(0, T; X)$ besteht aus all denjenigen Funktionen $u \in L^p(0, T; X)$, so dass u' im schwachen Sinne existiert und zu $L^p(0, T; X)$ gehört. Es ist

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) & (p = \infty). \end{cases}$$

Wir schreiben

$$H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$$

und

$$H_0^1(0, T; X) = \{u \in H^1(0, T; X) \mid u(0) = u(T) = 0\}.$$

1.1.6 Sonstige Funktionenräume

Für zwei normierte Räume X, Y bezeichnet $B(X, Y)$ den Raum der beschränkten Operatoren von X nach Y mit der zugehörigen Norm

$$\|A\|_{B(X, Y)} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_Y < \infty.$$

Im Falle $X = Y$ schreiben wir abkürzend $B(X)$.

Wir benötigen schließlich noch die Folgenräume l^p ($1 \leq p < \infty$) über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Man setzt

$$l^p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

sowie für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Es handelt sich hierbei um Banachräume.

1.2 Kommutator, Lie-Klammern und Lie-Algebren

Für zwei lineare Operatoren A, B bezeichnet

$$[A, B] := AB - BA$$

den *Kommutator* von A und B .

Bei den eckigen Klammern handelt es sich um sogenannte *Lie-Klammern*, die sich durch die folgenden Eigenschaften definieren:

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$
3. $[A, \alpha B] = \alpha[A, B] \quad (\alpha \in \mathbb{C})$
4. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}).$

Eine Lie-Klammer ist also eine schiefsymmetrische, bilineare Abbildung, welche die Jacobi-Identität erfüllt.

Eine *Lie-Algebra* ist eine algebraische Struktur, welche stabil ist unter der Lie-Klammer-Operation $[\cdot, \cdot]$: Für zwei Elemente A, B aus der Lie-Algebra liegt auch deren Lie-Klammer $[A, B]$ wieder in der Lie-Algebra.

Man spricht von der durch H_1, \dots, H_r erzeugten Lie-Algebra, wenn man die Menge der Operatoren H_1, \dots, H_r zusammen mit allen ihren Kommutatoren und iterierten Kommutatoren meint.

Eine Lie-Algebra hat die *Dimension* d , wenn d Elemente aus der Algebra existieren, so dass jedes Element aus der Algebra als reelle Linearkombination dieser Elemente geschrieben werden kann.

1.3 Gammafunktion und Betafunktion

Die *Gammafunktion* Γ wird nach Gauß folgendermaßen definiert:

$$\Gamma(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Die Eulersche Integraldarstellung für $x > 0$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sie erfüllt die Identitäten

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (x-1)! && \text{für } x \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x) && \text{(Funktionalgleichung),} \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} && \text{(Euler).} \end{aligned}$$

Die *Betafunktion* B wird für $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$B(x, y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

und besitzt die Integraldarstellung

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

1.4 Asymptotik und Landau-Notationen

Es seien zwei Funktionen $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben.

Wir schreiben

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \quad (z \in \Omega),$$

wenn eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass

$$|f(z)| \leq K|g(z)| \quad \forall z \in \Omega.$$

Wir schreiben

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \quad \text{für } z \rightarrow \infty,$$

falls eine Zahl $M > 0$ existiert, so dass

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \quad \text{für } z \in \Omega \text{ mit } |z| > M.$$

Es ist

$$f(z) = o(g(z)) \quad \text{für } z \rightarrow \infty,$$

falls

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 0.$$

Wir nennen die Funktionen f und g *asymptotisch gleich*, in Zeichen:

$$f(z) \sim g(z) \quad \text{für } z \rightarrow \infty,$$

falls

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Kapitel 2

Das quantenmechanische Modell

2.1 Wellenfunktionen und der Zustandsraum

In der Quantenmechanik wird der (physikalische) Zustand eines einzelnen Teilchens (z.B. eines Protons oder eines Elektrons) in einem n -dimensionalen Raum durch eine komplexwertige Wellenfunktion

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\mapsto \psi(t, x)\end{aligned}$$

beschrieben, wobei x einem Punkt im Raum \mathbb{R}^n entspricht und t die Zeitvariable darstellt.

Wir nehmen an, dass die Intensität der einem Teilchen zugeordneten Welle in einem bestimmten Raumzeitpunkt der Wahrscheinlichkeit entspricht, das Teilchen zu diesem Zeitpunkt an dieser Stelle zu finden. Dementsprechend drückt die Zahl

$$\int_{\Omega} |\psi(t, x)|^2 dx$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass das Teilchen sich zum Zeitpunkt t innerhalb einer (meßbaren) Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aufhält. Da die Ortskoordinaten mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwelche Werte im Raum \mathbb{R}^n annehmen, muß gelten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t, x)|^2 dx = \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})}^2 = 1 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2.1)$$

d.h. die Wellenfunktionen ψ sind quadratintegrierbare Funktionen, welche der Normierungsbedingung (2.1) genügen, und damit Einheitsvektoren in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Wir werden sie im folgenden auch als *Zustände* bezeichnen. Die Einheits-Sphäre des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S} := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})} = 1\}.$$

2.2 Wellendynamik: Die Schrödinger-Gleichung

Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion wird durch die folgende (zeitabhängige) Schrödingergleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = A\psi(t, x),$$

wobei die Konstante \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet und A für den Hamiltonoperator steht, der auf $\psi(t, x)$ als Funktion von x wirkt und die Gesamtenergie des quantenmechanischen Systems beschreibt. Die Schrödinger-Gleichung besagt demnach, dass die zeitliche Veränderung eines Zustands durch seine Energie bestimmt ist.

Im Falle eines sich frei im Raum bewegenden Teilchens der Masse $m \in (0, \infty)$, entspricht A dem linearen partiellen Differentialoperator der *kinetischen Energie*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right).$$

Ist das Teilchen einem externen Kraftfeld unterworfen, so hat der Hamiltonoperator die Gestalt $A = A(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$ mit dem Multiplikationsoperator $V = V(t, x)$, der sogenannten *Potentialfunktion* (kurz: *Potential*), die die potentielle Energie verkörpert. V muß daher reellwertig sein.

Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir im folgenden die Konstante $\hbar = 1$ und nehmen an, das betrachtete Teilchen habe die Masse $m = 1/2$.

Die Schrödingergleichung lautet dann:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\Delta \psi(t, x) + V(t, x) \psi(t, x). \quad (2.2)$$

Ist ein vernünftiger (Anfangs-)Zustand der Wellenfunktion bekannt, d.h. es gelte für ein $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\psi(t_0, x) = \psi_0(x), \quad (2.3)$$

für eine gegebene Funktion ψ_0 aus einem dichten Teilraum X von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, welche der Normierungsbedingung (2.1) genügt, und der Hamilton-Operator $A(t, x)$ erfüllt geeignete Bedingungen¹, so ist die Lösung von (2.2) gegeben durch:

$$\psi(t) = U(t, t_0) \psi_0, \quad (2.4)$$

mit einem eindeutigen unitären Evolutionsoperator, dem *Propagator* $U(t, t_0)$.

Im einfachsten Fall ist der Hamilton-Operator zeitunabhängig und sofern A selbstadjungiert ist in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, gilt

$$U(t, t_0) = \exp[-i(t - t_0) A].$$

¹ $A(t, x)$ muß für alle $t \in \mathbb{R}$ selbstadjungiert sein in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ sowie gewisse Glattheitsbedingungen erfüllen (vgl. z.B. das Theorem von Kato in [51])

2.3 Stationäre Zustände

Für Hamilton-Operatoren A , die nicht explizit von der Zeit abhängen, kann man nach speziellen Lösungen suchen, die einen (Teilchen-)Zustand mit einer bestimmten (festen) Energie beschreiben. Solche Zustände haben die Form

$$\psi(t, x) = \varphi(x) e^{-i\lambda t}. \quad (2.5)$$

Da sich ihre Wellenintensität - welche bekanntlich der Wahrscheinlichkeit entspricht, ein Teilchen an einem vorgegebenen Ort zu finden - mit der Zeit nicht ändert, bezeichnet man sie als *stationäre Zustände*.

Geht man mit dem Ansatz (2.5) in die zeitabhängige Schrödingergleichung (2.2) ein, wobei $V = V(x)$ unabhängig von t sei, so erhält man die zeitunabhängige (stationäre) Schrödingergleichung

$$(-\Delta + V(x)) \varphi(x) = \lambda \varphi(x), \quad (2.6)$$

wobei der Eigenwert λ der *Energie* des Teilchens im (Eigen-)Zustand ψ entspricht.

φ werden wir, wie üblich, als *Eigenfunktion* oder *Eigenvektor* bezeichnen.

Der obigen physikalischen Interpretation entsprechend, beschränkt uns die Normierungsbedingung (2.1) auf rein reelle Eigenwerte² und sichert zudem den Aufenthalt der Teilchen in einem endlichen Bereich³. Man sagt daher, die Teilchen befinden sich in einem *gebundenen Zustand*.

(2.1) ist für stationäre Lösungen der Form (2.5) äquivalent zu

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})} = 1. \quad (2.7)$$

Falls Eigenwerte für $A = -\Delta + V(x)$ existieren, so heißt der kleinste Eigenwert die *Grundzustandsenergie*, und der zugehörige Eigenzustand der Form (2.5) - genannt *Grundzustand* - ist diejenige Konfiguration des Systems mit der kleinsten Gesamtenergie. Andere Eigenwerte entsprechen diskreten (quantisierten) Anreicherungen des Systems. Die zugehörigen Eigenzustände bezeichnet man als *angeregte Zustände*.

Für lokal integrierbare Potentiale $V(x)$, die von unten beschränkt sind und für die $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, bilden die Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ zu den Eigenwerten λ_k ($k \in \mathbb{N}$) von A ein vollständiges Orthonormalsystem des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

Theorem. Sei $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von unten beschränkt und es gelte $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Dann ist $A = -\Delta + V$, definiert als eine Summe quadratischer Formen, ein Operator mit kompakter Resolvente. Insbesondere hat A ein rein diskretes Spektrum und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

²Ein nicht rein-reeller Eigenwert hätte gemäß Formel (2.5) eine nicht-beschränkte Zeit-Evolution zur Folge.

³Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Unendlichen ist gemäß (2.1) gleich Null.

Beweis. vgl. Theorem XIII.67 in [78].

Dementsprechend lässt sich für diese (zeitunabhängigen) Potentiale jede Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung (2.2) durch die Eigenzustände $\psi_k(t, x) = e^{-i\lambda_k t} \varphi_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) ausdrücken als

$$\psi(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \psi_k(t, x), \quad (2.8)$$

mit (komplexen) Koeffizienten $c_k = \langle \psi(0), \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. $|c_k|^2$ sind die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das System im Eigenzustand $\psi_k(x)$ befindet und die Energie λ_k hat. Es gilt daher: $\sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k|^2 = 1$.

2.4 Manipulation von Quantensystemen: Ein Schrödinger-Kontrollproblem

Eine interessante Fragestellung ist, ob eine gezielte Beeinflussung der Wellendynamik möglich ist, indem man (mit Hilfe von Lasern) äußere Felder an ein System anlegt: Lässt sich die Wellenfunktion des Teilchens durch ein geeignet geformtes externes elektromagnetisches Feld so manipulieren, dass sie zu einem vorgegebenen Zeitpunkt einen gewünschten Zustand annimmt oder sich diesem gut annähert?

Um dies zu untersuchen, fügt man in das Modell eine Kontrolle ein, die den externen Einfluss auf das System modelliert und eine Zeitabhängigkeit der potentiellen Energie zur Folge hat. Es ist zweckmäßig, den entstehenden Hamilton-Operator in einen zeitunabhängigen Teil und einen zeitabhängigen Teil, abhängig von dem externen Feld, aufzusplitten, d.h. wir schreiben den Hamilton-Operator als

$$A = A_0 + A_{int}(t).$$

A_0 stellt hier die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie in Abwesenheit des externen Feldes dar und wird der *innere Hamilton-Operator* genannt, während A_{int} die Wechselwirkung zwischen dem System und dem externen Feld beschreibt und *Interaktions-Operator* genannt wird.

Die Schrödinger-Gleichung lautet nun

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (A_0 + A_{int}(t)) \psi(t, x), \quad (2.9)$$

wobei der Interaktions-Operator A_{int} gegeben ist durch

$$A_{int}(t) \psi = \sum_{j=1}^r u_j(t) A_j \psi,$$

mit Funktionen $u_j(t)$, die die externen Felder darstellen, durch die das Quantensystem beeinflusst wird. Die Operatoren A_j sind in der Regel lineare Hamilton-Operatoren.

Im dreidimensionalen Fall ist der Interaktions-Operator in der Dipol-Approximation durch den Operator $-E(t) \cdot x$ gegeben, d.h. $u_j(t) = -E_j(t)$ und $A_j = x_j$, wobei $E(t) = (E_1(t), E_2(t), E_3(t))$ das (klassische) elektrische Feld eines Lasers bezeichnet.

Im eindimensionalen Fall, wo man versucht, die Bewegung des Teilchens lediglich in eine x_j -Richtung zu steuern, bezeichnet $E(t) = E_j(t)$ dann die Stärke des elektrischen Feldes in dieser Richtung.

Kapitel 3

Kontrolltheorie

3.1 Terminologie

Wir klären in diesem Abschnitt zunächst die in dieser Arbeit verwendeten Begrifflichkeiten aus der Kontrolltheorie.

Ein allgemeines Schrödinger-Kontrollsystem für die komplexwertige Zustandsfunktion (Wellenfunktion) $\psi = \psi(t, x)$ hat die Gestalt

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A\psi - N(\psi) + B(u, \psi), \quad (3.1)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x). \quad (3.2)$$

Man kann dieses als ein Ganzraum-Problem auffassen, indem man für x sämtliche Werte aus \mathbb{R}^n zulässt, oder aber als ein Teilraum-Problem mit $x \in \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen). Im zweiten Fall muss man zusätzlich noch eine Randbedingung fordern, wie etwa $\psi|_{\partial\Omega} = 0$.

Die Zeitvariable t durchläuft ein Intervall $[0, T]$.

A ist der lineare Operator $A = -\Delta + V(x)$ mit einer zeitunabhängigen Potentialfunktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnet eine nichtlineare Funktion und B ist der Kontrolloperator, der von einer meist reellwertigen Kontrollfunktion $u = u(t, x)$ abhängt, und möglicherweise auch von ψ selbst.

Den Anfangswert ψ_0 wählen wir stets aus einem Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $L^2(\Omega)$).

Meist betrachtet man ein solches System für $n = 1, 2$ oder 3 .

Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit der Kontrollierbarkeit von linearen Schrödinger-Gleichungen beschäftigen, für die der Term $N(\psi) \equiv 0$ ist¹.

Gleichwohl werden wir es durch die Wahl des physikalisch relevanten Kontrollterms

$$B(u, \psi) = -u(t) \cdot x \psi \quad (3.3)$$

¹In nichtlinearen Schrödinger-Gleichungen hat man häufig $N(\psi) = -f(|\psi|^2)\psi$. Wichtige Beispiele sind etwa die kubische Nichtlinearität $N(\psi) = \pm\psi|\psi|^2$ oder die Hartree-Nichtlinearität $N(\psi) = \alpha(|\psi|^2 * \frac{1}{|x|})\psi$.

mit einer nichtlinearen, genauer einer *bilinearen* Gleichung zu tun haben.

Alternativ kann man auch andere Kontrollterme verwenden.

Eine weitere wichtige Klasse von Kontrolloperatoren ist die sogenannte *additive Kontrolle*: In diesem Fall ist der Operator B unabhängig von der Zustandsfunktion ψ und hat die Gestalt

$$B(u) = u(t)h(x), \quad (3.4)$$

mit einer gegebenen Funktion h . Meistens ist $h(x) = \chi_\omega(x)$ die charakteristische Funktion einer offenen Menge $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Man bezeichnet diesen Spezialfall als *distributive Kontrolle* (im Gegensatz zur sogenannten *Randkontrolle*, wo der Kontrolloperator B ausschließlich auf den Rand $\partial\Omega$ wirkt).

Vorausgesetzt, das Kontrollproblem ist korrekt gestellt und es existieren (klassische oder milde) Lösungen für das System (3.1), (3.2) auf dem gegebenen Zeitintervall $[0, T]$, dann bezeichnen wir die vom Anfangswert ψ_0 aus durch die Kontrolle u gelenkte Zustandsfunktion mit

$$\psi(t) = \psi(t; \psi_0, u). \quad (3.5)$$

Die Funktion $t \mapsto \psi(t)$ ist stetig auf $[0, T]$ und nimmt Werte in einem komplexen Hilbertraum \mathcal{H} an, der ein Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ sein muss (Zustandsraum).

Von der Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow X$ (X ein geeigneter Hilbertraum) fordert man meistens $u \in L^2(0, T; X)$, gegebenenfalls auch eine stärkere Regularität.

Ist ψ eine (klassische oder milde) Lösung des Anfangswertproblems (3.1), (3.2) für eine bestimmte, gegebene Kontrollfunktion u , so nennt man das Paar (ψ, u) eine *Trajektorie* dieses Kontrollsystems.

Das Ziel ist, eine Kontrollfunktion u zu finden, die es ermöglicht, die Zustandsfunktion von dem Anfangszustand ψ_0 aus, in der Zeit $T > 0$, zu einem vorgegebenen *Zielzustand* ψ_f zu lenken, d.h. für einen Zeitpunkt \tilde{T} mit $0 < \tilde{T} \leq T$ soll gelten:

$$\psi(\tilde{T}; \psi_0, u) = \psi_f. \quad (3.6)$$

Wir bezeichnen die Menge aller in der Zeit $T > 0$ von ψ_0 aus, mittels Kontrollen $u \in L^2(0, T; X)$, *erreichbaren Zustände* mit

$$R_T(\psi_0) := \{\psi(\tilde{T}; \psi_0, u) \mid u \in L^2(0, \tilde{T}; X), 0 < \tilde{T} \leq T\}. \quad (3.7)$$

Die Menge aller erreichbaren Zustände ist dementsprechend wie folgt definiert:

$$R(\psi_0) := \bigcup_{T>0} R_T(\psi_0). \quad (3.8)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Kontrollierbarkeitsbegriffe:

Definition 3.1. Das System (3.1),(3.2) heißt **exakt kontrollierbar** in \mathcal{H} , wenn für alle $\psi_0 \in \mathcal{H}$

$$R(\psi_0) = \mathcal{H}. \quad (3.9)$$

Es heißt (in \mathcal{H}) **exakt kontrollierbar in der Zeit** $T > 0$, wenn für alle $\psi_0 \in \mathcal{H}$

$$R_T(\psi_0) = \mathcal{H}. \quad (3.10)$$

Definition 3.2. Das System (3.1),(3.2) heißt **approximativ kontrollierbar** in \mathcal{H} , wenn für alle $\psi_0 \in \mathcal{H}$

$$\overline{R(\psi_0)} = \mathcal{H}. \quad (3.11)$$

Es heißt (in \mathcal{H}) **approximativ kontrollierbar in der Zeit** $T > 0$, wenn für alle $\psi_0 \in \mathcal{H}$

$$\overline{R_T(\psi_0)} = \mathcal{H}. \quad (3.12)$$

Offensichtlich ist der Begriff der *approximativen* Kontrollierbarkeit etwas schwächer als derjenige der *exakten* Kontrollierbarkeit. Dies bedeutet, dass sich ein in \mathcal{H} nicht exakt kontrollierbares System manchmal zumindest approximativ kontrollieren lässt. Selbst wenn für alle Anfangszustände $\psi_0 \in \mathcal{H}$ die Menge der nicht-erreichbaren Zustände $\mathcal{H} \setminus R(\psi_0)$ dicht in \mathcal{H} liegt, ist manchmal noch eine approximative Kontrollierbarkeit möglich.

Oft gelingt eine exakte Kontrollierbarkeit zwar nicht in dem gesamten Raum, aber immerhin lokal, in der Nähe einer vorgegebenen Trajektorie $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$.

Definition 3.3 (Lokale Kontrollierbarkeit). Sei $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ eine Trajektorie des Kontrollsystems (3.1),(3.2). Man nennt das System (3.1),(3.2) **kontrollierbar in der Nähe der Trajektorie** $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ (in $\mathcal{H} \times L^2(0, T; X)$), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Anfangs- und Zielzustände $\psi_0, \psi_f \in \mathcal{H}$ mit

$$\|\psi_0 - \tilde{\psi}(0)\|_{\mathcal{H}} + \|\psi_f - \tilde{\psi}(T)\|_{\mathcal{H}} < \delta \quad (3.13)$$

eine Trajektorie (ψ, u) existiert, für die gilt

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \psi(T) = \psi_f, \quad \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0, T; X)} \leq \varepsilon. \quad (3.14)$$

Wir werden in dieser Arbeit auch **linearisierte Kontrollsysteme** betrachten. Bezeichnen wir die rechte Seite von Gleichung (3.1) mit

$$f(\psi, u) := A\psi - N(\psi) + B(u, \psi), \quad (3.15)$$

so definieren wir diese Systeme wie folgt:

Definition 3.4. Für das Kontrollsystem (3.1),(3.2) ist das **linearisierte Kontrollsystem entlang der Trajektorie** $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ das lineare Kontrollsystem

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\partial f}{\partial \psi}(\tilde{\psi}, \tilde{u}) \Psi + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{\psi}, \tilde{u}) w, \quad (3.16)$$

$$\Psi(0, x) = \Psi_0, \quad (3.17)$$

mit der Kontrollfunktion $w \in L^2(0, T; X)$ und der Zustandsfunktion $\Psi = \Psi(t, x)$.

Ergänzend erwähnen wir noch den Begriff der **optimalen Kontrollierbarkeit**, wenngleich wir bei unseren Untersuchungen das ehrgeizigere Ziel der (lokalen) exakten Kontrollierbarkeit verfolgen.

Ein *optimales* Schrödinger-Kontrollproblem kann wie folgt formuliert werden: Seien eine Menge von Zustandsfunktionen ψ , sowie eine Menge von Kontrollfunktionen u gegeben. Finde diejenige Trajektorie (ψ, u) des gegebenen Kontrollsystems (3.1), (3.2), so dass ein gewisses Kostenfunktional des Zustands ψ und der Kontrolle u minimiert wird.

Dieses Kostenfunktional hat beispielsweise die Gestalt

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \|\psi(T) - \psi_f\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2} \|u\|_{L^2}^2,$$

wobei $T > 0$ die vorgegebene Zeit, ψ_f der vorgegebene Zielzustand und $k > 0$ eine positive Zahl ist, die bei der Suche nach demjenigen $u_k \in L^2(0, T; X)$, für das

$$J_k(u_k) = \min_{u \in L^2(0, T; X)} J_k(u),$$

reguliert, wie groß die verwendete Kontrolle u sein darf, bzw. wie gut die Approximation von $\psi(T)$ an den Zielzustand ψ_f sein muss. Wählt man k sehr klein, so ist eine gute Approximation, auch auf Kosten einer großen Kontrollfunktion u , gewünscht. Wird k groß gewählt, ist es wichtig, dass die Kontrollfunktion möglichst klein bleibt - auf Kosten einer ungenaueren Approximation des Zustandes $\psi(T)$ an den Zielzustand ψ_f .

3.2 Literaturrückblick: Kontrollierbarkeit bilinearer Schrödinger-Gleichungen

Wir geben im folgenden einen kurzen Überblick über existierende negative sowie positive Ergebnisse bezüglich der Kontrollierbarkeit bilinearer Schrödinger-Gleichungen.

3.2.1 Negative Resultate

Für unendlichdimensionale bilineare Kontrollsysteme mit beschränkten Kontrolloperatoren haben J. M. Ball, J. E. Marsden und M. Slemrod in [3] das folgende allgemeine Nicht-Kontrollierbarkeits-Theorem aufgestellt:

Theorem 3.5 (Ball-Marsden-Slemrod). *Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum, A der Erzeuger einer C^0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X und $B : X \rightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator. Sei $\psi_0 \in X$ fest gewählt und $\psi(t; u; \psi_0)$ die eindeutige (milde) Lösung von*

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = A\psi(t) + u(t)B\psi(t), \quad (3.18)$$

$$\psi(0) = \psi_0, \quad (3.19)$$

mit $u \in L^1_{loc}([0, \infty), \mathbb{R})$. Dann ist die Menge $R(\psi_0)$ der von ψ_0 aus erreichbaren Zustände

$$R(\psi_0) := \{\psi(t, u, \psi_0) : t \geq 0, r > 1, u \in L^r_{loc}([0, \infty), \mathbb{R})\}$$

in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Teilmengen von X enthalten und hat insbesondere ein dichtes Komplement in X .

G. Turinici zeigt in [97] durch Anwendung des obigen Theorems auf die lineare Schrödingergleichung mit bilinearem Kontrollterm (mit $X := H^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{S}$ und den Operatoren $-iA$ und $-iB$), dass sofern $-iB$ beschränkt ist, die Gleichung mittels L^2 -Kontrollen nicht exakt kontrollierbar ist: Für jeden Zustand $\psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{S}$ ist die Menge der von ψ_0 aus nicht-erreichbaren Zustände eine dichte Teilmenge von $H^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{S}$.

Für *nichtlineare* Schrödingergleichungen existiert ein analoges negatives Resultat von R. Illner, H. Lange und H. Teismann für die Hartree-Gleichung mit dem *unbeschränkten* Dipol-Kontrollterm in $H^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{S}$ (vgl. Theorem 5 in [49]).

Ein weiteres fundamentales Ergebnis bezüglich der Kontrollierbarkeit unendlichdimensionaler Quantensysteme ist das sogenannte HTC-Theorem von G. M. Huang, T. J. Tarn und J. W. Clark [48] und insbesondere das hieraus folgende No-Go Theorem (vgl. HTC Corollary 2 in [24]):

Theorem 3.6 (Huang-Tarn-Clark). *Es sei das folgende Schrödinger-Kontrollsystem in einem unendlichdimensionalen Zustandsraum \mathcal{H} gegeben:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_0 \psi(t) + \sum_{j=1}^r u_j(t) H_j \psi(t), \quad (3.20)$$

$$\psi(0) = \psi_0, \quad (3.21)$$

mit linearen, zeitunabhängigen, schieferhermiteschen Operatoren H_0, H_1, \dots, H_r und reellwertigen Kontrollfunktionen $u_j(t)$.

Falls die von den Operatoren H_0, H_1, \dots, H_r erzeugte Lie-Algebra endlichdimensional ist und einen analytischen Definitionsbereich $D \subset \mathcal{H}$ zulässt, dann ist das Quantensystem (3.20), (3.21) nicht analytisch kontrollierbar auf der Einheitssphäre \mathbb{S} , d.h. für $\psi_0 \in \mathbb{S} \cap D$ ist $R(\psi_0) \neq \mathbb{S} \cap D$.

Bemerkung. Eine Teilmenge $D \subset \mathcal{H}$ von Zustandsvektoren wird ein *analytischer Definitionsbereich* genannt, wenn D dicht ist im Hilbertraum \mathcal{H} ,

invariant ist unter den Operatoren H_0, H_1, \dots, H_r und die Lösung von (3.20), (3.21) auf diesem global in Exponential-Form ausgedrückt werden kann.

Eine Anwendung findet Theorem 3.6 beispielsweise in [68], wo M. Mirrahimi und P. Rouchon die Nicht-Kontrollierbarkeit des eindimensionalen Harmonischen Oszillators mittels eines bilinearen Kontrollterms der Form $-u(t)x\psi$ nachweisen.

Sie berechnen dazu, für den inneren Hamilton-Operator $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ und $H_1 = -q$, die von iH_0 und iH_1 erzeugte Lie-Algebra ($p = -i\nabla$ ist hier der Momentenoperator, q der Ortsoperator):

Es handelt sich hierbei um den \mathbb{R} -linearen Raum, der von

$$iH_0, \quad iH_1, \quad [iH_0, iH_1], \quad iId$$

aufgespannt wird, und daher von Dimension 4 ist. Der Harmonische Oszillator ist gemäß Theorem 3.6 also nicht kontrollierbar.

H. Teismann zeigt in [89], dass die Existenz kohärenter Zustände, wie beim Harmonischen Oszillator, den Grad der Kontrollierbarkeit von Quantensystemen extrem einschränkt.

3.2.2 Positive Resultate

Entsprechend der obigen negativen Ergebnisse, galten bilineare Schrödinger-Gleichungen lange Zeit als nicht (exakt) kontrollierbar. Mittlerweile hat man aber herausgefunden, dass eine Nicht-Kontrollierbarkeit oftmals nur auf eine unvorteilhafte Wahl der Funktionsräume, einerseits für die Zustandsfunktion und andererseits für die zugelassenen Kontrollen, zurückzuführen ist. So kann ein System, welches nach Theorem 3.5 in X mittels einer Kontrolle $u \in L_{loc}^r([0, \infty), \mathbb{R})$ nicht exakt kontrollierbar ist, durchaus in einem Teilraum $Y \subset X$ exakt kontrollierbar sein. Ebenso könnte eine exakte Kontrollierbarkeit in ganz X möglich sein, wenn man eine größere Menge an Kontrollfunktionen als $\bigcup_{r>0} L_{loc}^r([0, \infty), \mathbb{R})$ in Erwägung zieht. Eine approximative Kontrollierbarkeit des entsprechenden Systems in X (mittels L_{loc}^r -Kontrollen) ist natürlich ebenfalls nicht ausgeschlossen.

Für verschiedene eindimensionale Modelle konnte inzwischen, neben diversen approximativen Ergebnissen, tatsächlich auch eine exakte Kontrollierbarkeit in Sobolevräumen nachgewiesen werden (in endlicher oder unendlicher Zeit, lokal, fast global, oder sogar global). Darüber hinaus haben sich auch einige Autoren mit der optimalen Kontrollierbarkeit der bilinearen Schrödinger-Gleichung befasst.

Exakte Kontrollierbarkeit Der Nachweis lokaler exakter Kontrollierbarkeit eines Systems in der Nähe einer Trajektorie erfolgt in der Literatur üblicherweise auf Basis des Linearisierungsprinzips: Man erhält die lokale exakte

Kontrollierbarkeit, dank eines lokalen Umkehrsatzes, aus der globalen exakten Kontrollierbarkeit eines linearisierten Systems. In Verbindung mit gewissen Kompaktheitsargumenten sowie approximativen Kontrolleigenschaften, führt dies in einigen Fällen sogar zu (fast) globalen Ergebnissen.

Das bislang am besten untersuchte Modell ist dasjenige des Quantenteilchens in einem unendlich tiefen Potentialtopf: Auf einem Intervall I ist das Potential V identisch Null, während es außerhalb dieses Intervalles den Wert $+\infty$ hat.

K. Beauchard zeigt in [8], dass die eindimensionale lineare Schrödingergleichung mit einem solchen unendlichen Kastenpotential mittels eines bilinearen Kontrolltermes in der Nähe des Grundzustandes, zwar nicht in $H^2 \cap H_0^1(I, \mathbb{C})$, aber zumindest in $H_{(0)}^7((I, \mathbb{C}) := D((-\frac{1}{2}\Delta)^{7/2}))$ lokal exakt kontrollierbar ist. Da das Intervall I hier so gewählt ist, dass die Eigenfunktionen auf diesem Intervall Symmetrieeigenschaften aufweisen, die der Kontrollierbarkeit des um den Grundzustand linearisierten Systemes im Wege stehen, nutzt sie für den Beweis die Return-Methode von J.-M. Coron. Die lokale Umkehrbarkeit zeigt sie, aufgrund einer scheinbar fehlenden Regularität des nichtlinearen Systems in Bezug auf das linearisierte System, mit einer Variante eines Satzes von Nash-Moser anstelle des klassischen lokalen Umkehrsatzes. Hierfür benötigt sie die Konstruktion von Inversen der Linearisierung in verschiedenen Räumen sowie in verschiedenen Punkten, was zu einem sehr komplexen Beweis führt. Außerdem liefert die Anwendung des Satzes von Nash-Moser mit $H_{(0)}^7(I, \mathbb{C})$ nicht den optimalen Raum für eine lokale exakte Kontrollierbarkeit: Der Exponent 7 ist rein technischer Natur und eine lokale exakte Kontrollierbarkeit sogar möglich in $H_{(0)}^3(I, \mathbb{C}) := D((-\frac{1}{2}\Delta)^{3/2})$.

Dies zeigen K. Beauchard und C. Laurent in [12] mit deutlich vereinfachten Beweismethoden: Durch den Nachweis eines versteckten Regularisierungseffektes, lässt sich nun doch der klassische lokale Umkehrsatz verwenden, und man erhält die lokale Kontrollierbarkeit in dem bestmöglichen Raum $H_{(0)}^3(I, \mathbb{C})$. Überdies ist diese lokale Kontrollierbarkeit, dank einer geeigneten Nichtentartungs-Bedingung, in beliebig kleiner Zeit $T > 0$ möglich, während in [8] noch eine Minimalzeit $T > 4/\pi$ gefordert werden muss. Die neue Methode wird in [12] noch auf weitere Situationen angewandt: eine Verallgemeinerung auf den Fall der dreidimensionalen Einheitskugel, eine nichtlineare Schrödingergleichung, sowie eine nichtlineare Wellengleichung auf einem endlichen Intervall.

In [69] zeigt M. Morancey mit Hilfe der Return-Methode von J.-M. Coron, dass sich das lokale exakte Kontrollierbarkeitsergebnis für ein einzelnes Teilchen aus [12] nicht auf ein System mehrerer unabhängiger gleichartiger Teilchen unter dem Einfluss einer einzigen (bilinearen) Kontrolle verallgemeinern lässt: Für ein Zwei-Teilchen-System ist eine lokale Kontrollierbarkeit in der Nähe von Eigenzuständen in beliebiger Zeit lediglich bis auf einen globalen Phasenfaktor möglich, eine exakte Kontrollierbarkeit kann nur in großer Zeit

erfolgen. Bei drei oder mehr Teilchen kann in kleiner Zeit überhaupt kein lokales Kontrollresultat erzielt werden: Die Kontrolle eines solchen Systems lokal in der Nähe von (ψ_1, ψ_2, ψ_3) (ψ_i sei der i -te Eigenzustand) ist nur mit zeitlicher Verzögerung und bis auf einen globalen Phasenfaktor möglich.

Fast-globale Kontrollierbarkeits-Resultate in endlicher Zeit erhalten K. Beauchard in [7], bei der Untersuchung eines Teilchens in einem unendlichen Potentialtopf variabler Länge, und K. Beauchard/ J.-M. Coron in [9], für ein Teilchen in einem sich bewegenden unendlichen Potentialtopf: In den von ihnen untersuchten Modellen lässt sich die Wellenfunktion in geeigneten Sobolevräumen in endlicher Zeit aus der Umgebung eines beliebigen Eigenzustandes in die Umgebung jedes anderen Eigenzustandes bewegen (d.h. ein kontrollierter Wechsel des Energie-Levels ist möglich). Als Kontrolle dient in [7] die zeitabhängige Länge des Potentialtopfes $L(t)$, während die Kontrolle in [9] die Beschleunigung des sich bewegenden Potentialtopfes ist. Neben der Wellenfunktion lassen sich in [9] damit gleichzeitig die Position sowie die Geschwindigkeit des Potentialtopfes kontrollieren.

In beiden Arbeiten basiert der Beweis auf Kompaktheitsargumenten, verbunden mit lokalen Kontrollierbarkeitsergebnissen in der Nähe verschiedener periodischer Trajektorien. Die lokalen Ergebnisse werden auch hier mittels des Linearisierungsprinzips, in Verbindung mit momententheoretischen Methoden für die linearisierten Systeme, sowie einem Satz über implizite Funktionen von Nash-Moser gezeigt. Auftretende Schwierigkeiten bezüglich nicht-kontrollierbarer Richtungen für manche linearisierte Systeme werden mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen 2. Ordnung (für endlich viele nicht-kontrollierbare Richtungen) sowie mit der Return-Methode und quasi-statischen Deformationen (für unendlich viele nicht-kontrollierbare Richtungen) (in [9]) gelöst.

Ergänzend zu dem Artikel [9], zeigt J.-M. Coron in [27], dass trotz der unendlichen Propagationsgeschwindigkeit der Wellenfunktion, für die lokale Kontrollierbarkeit eine positive Minimalzeit erforderlich ist, d.h. das betrachtete System ist nicht für jedes beliebig kleine $T > 0$ lokal exakt kontrollierbar. Er vermutet, dass dies auf die, für den Beweis verwendeten, quasi-statischen Deformationen zurückzuführen ist.

In [14] untersuchen K. Beauchard und M. Morancey die Thematik einer positiven Minimalzeit weiter und erkennen, dass die Existenz einer solchen Minimalzeit entscheidend von dem Verhalten des Termes zweiter Ordnung der Potenzreihenentwicklung der Lösung abhängt.

Eine nichtlineare Variante des Problemes aus [7], wo die Kontrolle die Länge der Box ist, behandeln K. Beauchard, H. Lange und H. Teismann in [11] : Sie zeigen die lokale exakte Kontrollierbarkeit eines eindimensionalen Bose-Einstein-Kondensates in einem unendlich tiefen Potentialtopf variabler Länge in der Nähe des Grundzustandes (für eine feste Länge) in $H_{(0)}^3(I)$. Der Beweis beruht auch hier auf dem Linearisierungsprinzip, dem klassischen lokalen

Umkehrsatz sowie Argumenten aus der analytischen Störungstheorie.

In [73] und [74] zeigen V. Nersesyan und H. Nersisyan die globale exakte Kontrollierbarkeit der Schrödinger-Gleichung in unendlicher Zeit auf einem Quader $D \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) (unter bestimmten Voraussetzungen an die Potentialfunktionen) im Sobolevraum $H^{3d}(D)$. Die Betrachtung des Problems in unendlicher Zeit ermöglicht den Beweis der Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems auch ohne eine Gap-Bedingung für die Eigenwerte (welche z.B. im Falle des Dirichlet-Laplace-Operators für $d \geq 3$ nicht gegeben ist). Die Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems wird in [73] für Dimension 1 mit einem Umkehrsatz für mehrwertige Funktionen von K. Nachi und J.-P. Penot gezeigt, für höhere Dimensionen wird in [74] aufgrund eines Regularitätsverlustes des nichtlinearen Systems gegenüber dem linearisierten System zunächst ein Funktionenraum $\mathcal{H} \supset H^{3d}$ bestimmt, in dem das nichtlineare Problem wohldefiniert ist und das linearisierte System kontrollierbar. Eine Anwendung des klassischen lokalen Umkehrsatzes zeigt die lokale exakte Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems in der Nähe sämtlicher Punkte, die sich als endliche Linearkombination von Eigenfunktionen des Schrödinger-Operators darstellen lassen, in \mathcal{H} , und damit auch in $H^{3d}(D)$. Das globale Resultat folgt dann mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments.

In [70] betrachten M. Morancey und V. Nersesyan ein System von beliebig vielen 1D linearen Schrödinger-Gleichungen mit einem beliebigen Potential $V(x)$ sowie einer bilinearen Kontrolle auf einem beschränkten Intervall und weisen nach, dass diese Gleichungen in großer Zeit mit einer einzigen reellwertigen Kontrollfunktion, unter generischen Annahmen für das Dipol-Moment der betrachteten Teilchen, simultan global exakt in $H^4_{(V)} := D((-\partial_{xx}^2 + V(x))^2)$ kontrollierbar sind.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten: In einem ersten Schritt wird mit Hilfe einer Lyapunov-Strategie gezeigt, dass jeder Anfangszustand beliebig nahe an eine endliche Linearkombination von Eigenfunktionen herangeführt werden kann. Im zweiten Schritt wird dann mittels der Return-Methode von J.-M. Coron die lokale exakte Kontrollierbarkeit in der Nähe spezifischer endlicher Linearkombinationen von Eigenfunktionen gezeigt (wesentlich ist hierbei die Konstruktion einer geeigneten Referenz-Trajektorie, so dass das um diese Trajektorie linearisierte System exakt kontrollierbar ist). Eine Kombination der nachgewiesenen Eigenschaften (globaler) approximativer Kontrollierbarkeit und lokaler exakter Kontrollierbarkeit führt schließlich auf die globale exakte Kontrollierbarkeit.

Es ist zu erwähnen, dass sich viele der obigen positiven Ergebnisse unter Verwendung von Kontrollfunktionen mit höherer Regularität auch auf Sobolevräume höherer Regularität übertragen lassen.

Approximative Kontrollierbarkeit Es wurden verschiedene Methoden entwickelt, um ein Schrödinger-System auf approximative Kontrollierbarkeit zu untersuchen.

Die Strategie von T. Chambrión, P. Mason, M. Sigalotti und U. Boscain in [23] basiert auf endlich-dimensionalen geometrischen Techniken, welche auf die Galerkin-Approximationen eines äquivalenten Systems angewandt werden. Die Kontrolleigenschaften für die Galerkin-Approximationen werden sodann auf höhere Dimensionen übertragen, um schließlich eine Verbindung zwischen endlich- und unendlichdimensionalen Kontrolleigenschaften herzustellen. Die Autoren erhalten mit dieser Methode, unter generischen Bedingungen an den inneren Hamilton-Operator sowie den Interaktions-Operator, ein allgemeines Resultat über approximative Kontrollierbarkeit von bilinearen Schrödingergleichungen auf der L^2 -Einheitssphäre \mathbb{S} , in den Fällen, wo der innere (unkontrollierte) Hamilton-Operator ein rein diskretes Spektrum aufweist. Für den inneren Hamilton-Operator A wird eine Nicht-Resonanz-Bedingung an sein Spektrum gestellt: Für die Eigenwerte λ_n ($n \in \mathbb{N}$) müssen die Elemente der Folge $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathbb{Q} -linear unabhängig sein. Von dem Interaktionsoperator B wird gefordert, dass dieser jedes Paar verschiedener Eigenzustände von A verbindet: Die Eigenschaft $\langle B\varphi_n, \varphi_{n+1} \rangle \neq 0$ für die zu λ_n gehörigen Eigenfunktionen φ_n impliziert dies. Die Generizität dieser hinreichenden Bedingungen an die beiden Operatoren wird von P. Mason und M. Sigalotti in [64] gezeigt: Sie zeigen, dass die Schrödingergleichung in \mathbb{S} generisch approximativ kontrollierbar ist, einerseits bzgl. des Kontrollpotentials, bei einem fixen unkontrollierten Potential, und umgekehrt ebenso bzgl. des unkontrollierten Potentials, wenn das Kontrollpotential fix und nichtkonstant ist. Sie erhalten diese Ergebnisse dank Argumenten aus der analytischen Störungstheorie sowie der Studie asymptotischer Eigenschaften der Eigenfunktionen. U. Boscain, M. Caponigro, T. Chambrión und M. Sigalotti verbessern das Resultat aus [23] in [18], indem sie die Nicht-Resonanz-Bedingungen an das Spektrum des unkontrollierten Hamilton-Operators leicht abschwächen. In dem jüngeren Paper [19] dieses Teams wird das Resultat weiter verallgemeinert, so dass es erlaubt, auch Situationen zu behandeln, in denen das Spektrum des unkontrollierten Operators entartet ist (d.h. es existieren mehrfache Eigenwerte oder bei unterschiedlichen Eigenwertpaaren sind die Gaps zwischen aufeinanderfolgenden Eigenwerten identisch). Durch die Verwendung mehr als einer Kontrollfunktion wird überdies eine approximative simultane Kontrollierbarkeit in Sobolevräumen für eine beliebige Anzahl von Gleichungen gezeigt.

K. Beauchard, J.-M. Coron und H. Teismann zeigen in [10], dass das Ergebnis von U. Boscain et al. in [18] optimal ist hinsichtlich der betrachteten Kontrollzeit T , indem sie nachweisen, dass das Ergebnis im Falle einer kleinen Kontrollzeit nicht richtig ist.

Der Spezialfall schwach-gekoppelter Systeme als einer Klasse von bilinearen Kontrollsystemen mit diskretem Spektrum, die sich präzise durch endlichdimensionale Galerkin-Approximationen annähern lassen, wird in der Arbeit [20] von N. Boussaid, M. Caponigro und T. Chambrión erörtert: Sie liefern eine hinreichende Bedingung dafür, wann ein unendlichdimensionales Quanten-Kontrollsystem schwach-gekoppelt ist, und liefern einige Beispiele. Schließlich sei ergänzend noch der Survey [17] des Teams U. Boscain, T. Chambrión und M. Sigalotti erwähnt: Neben Details zu den geometrischen

Techniken, beinhaltet er auch Informationen zu anderen Kontrolltechniken, einige Beispiele sowie zahlreiche Referenzen.

Eine zweite Methode zum Nachweis approximativer Kontrollierbarkeit für die bilineare Schrödingergleichung ist die Lyapunov-Methode, die der Stabilisierung eines Kontrollsystems dient: Mit Hilfe einer geeigneten differenzierbaren Kontroll-Lyapunov-Funktion, werden explizite Feedback-Kontrollfunktionen² konstruiert, die das System um einen bestimmten Zustand stabilisieren. Dies bedeutet, die Feedback-Kontrollfunktionen lenken die zugehörigen Lösungen des Systems für $t \rightarrow \infty$ in die Nähe dieses Zustandes.

Mit dieser Methode zeigen K. Beauchard und M. Mirrahimi in [13], für ein Teilchen in einem unendlichen Potentialtopf, die praktische Stabilisierung des entsprechenden Systems um die Eigenzustände: Durch eine Lyapunov-Analyse werden Feedback-Kontrollfunktionen gefunden, so dass die Lösung des Systems in der L^2 -Norm für $t \rightarrow \infty$ beliebig nahe an jeden Eigenzustand herankommt. M. Mirrahimi verwendet in [67] dieselbe Methode für ein System, wo das Spektrum des Hamilton-Operators nur endlich viele diskrete Eigenwerte aufweist (gemischtes Spektrum).

Für den Fall eines beschränkten Definitionsbereiches, kommt V. Nersesyan in [71], ebenfalls dank dieser Methode, unter generischen Bedingungen an die Potentiale, zu ähnlichen Ergebnissen wie denjenigen aus [23]: Er weist zunächst, mit Hilfe von Feedback-Kontrollfunktionen, die Stabilität des Systems um den Grundzustand nach. Eine Anwendung dieses Stabilisierungsergebnisses, unter Ausnutzung der Zeitreversibilität der Schrödingergleichung sowie der Linearität der Gleichung (welche zur Folge hat, dass der L^2 -Abstand zweier verschiedener Lösungen mit der gleichen Kontrollfunktion konstant ist), führt auf die (globale) L^2 -approximative Kontrollierbarkeit des Systems. Im Vergleich zu dem Ergebnis aus [23], sind die Forderungen an das diskrete Spektrum hier weniger restriktiv, während diejenigen an den Kontrolloperator restriktiver sind: Dieser darf nicht unbeschränkt sein.

Die Ergebnisse werden in [72] weiter verbessert: Hier wird die approximative Kontrollierbarkeit bezüglich H^s -Sobolev-Normen gezeigt ($s > 0$), anstatt der schwächeren L^2 -Norm. Eine Kombination dieses neuen Ergebnisses mit der von K. Beauchard in [8] nachgewiesenen lokalen exakten Kontrollierbarkeitseigenschaft führt auf die globale exakte Kontrollierbarkeit des Systems in höheren Sobolevräumen ($\mathbb{S} \cap H^{5+\varepsilon}$).

R. Adami und U. Boscain zeigen in [1], unter Verwendung von mindestens zwei Kontrollfunktionen, die approximative Kontrollierbarkeit in endlicher Zeit für zwei spezielle Modelle unendlichdimensionaler Quantenkontrollprobleme, in denen der unkontrollierte Hamiltonoperator ein rein diskretes Spektrum hat, welches für einige Werte der Kontrollfunktion degeneriert: Für jedes Paar von Eigenzuständen des unkontrollierten Systems wird ein Pfad im Kontrollraum konstruiert, der das System approximativ von dem einen Eigenzustand zu dem anderen bringt. Die Beweismethode beruht auf dem

²Eine Feedback-Kontrollfunktion ist eine Kontrollfunktion, die zum Zeitpunkt t von dem Zustand $\psi(t)$ abhängt, d.h. $u(t) = u(t, \psi(t))$.

Adiabatischen Theorem der Quantenmechanik. Sie liefert explizite Kontrollausdrücke sowie explizite Fehlerabschätzungen und ist zudem sehr robust: Ähnliche Kontrollen bewirken auch einen ähnlichen Populationstransfer, was für Anwendungen sehr wichtig ist. Ein Nachteil dieser Methode ist allerdings, dass eine genaue Kenntnis der Eigenwerte vorausgesetzt wird und für die Anwendung des Adiabatischen Theorems eine lange Zeit benötigt wird.

Einen Ansatz basierend auf der Kontrollierbarkeit eines approximierten endlichdimensionalen Systems von Schrödingergleichungen, für das man explizite exakte Kontrollen konstruieren kann, wählen S. Ervedoza und J.-P. Puel in [33]. Da auch hier auf endlichdimensionale Approximationen zurückgegriffen wird, ähnelt der Ansatz demjenigen der ersten beschriebenen Methode. Hier werden allerdings keine Spektralbedingungen gestellt und es werden mehrere Kontrollfunktionen verwendet, während in [23] lediglich eine einzige Kontrolle verwendet wird. Auch die Gestalt der Kontrolle ist unterschiedlich: T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti und U. Boscain nutzen stückweise konstante Kontrollen, während in dieser Arbeit stark oszillierende Kontrollen gewählt werden. Das Ergebnis ist die approximative Kontrollierbarkeit des betrachteten Systems in endlicher Zeit im Raum $(L^2(\mathbb{R}))^2$ sowie in stärkeren Räumen der Art $D(A^k)$ ($k \in \mathbb{N}$), wobei A der in den Gleichungen auftretende Hamilton-Operator ist.

Optimale Kontrollierbarkeit Mit der optimalen Kontrollierbarkeit bilinearer Schrödingergleichungen haben sich beispielsweise E. Cancès, C. Le Bris und M. Pilot in [22] beschäftigt. Sie zeigen hier die Existenz einer optimalen Kontrolle für die nichtlineare Hartree-Schrödingergleichung, unter Verwendung des elektrischen Kontrollpotentials $E(t) \cdot x$. Hierfür transformieren sie das vorliegende System in ein äquivalentes System, in dem der bilineare Kontrollterm nicht mehr auftritt, das ursprünglich zeitunabhängige Coulomb-Potential nun allerdings von der Kontrollfunktion abhängt. Unter Ausnutzung der Äquivalenz der beiden Systeme, zeigen sie für das Ausgangssystem sowohl die Wohldefiniertheit als auch die Existenz einer optimalen Kontrollfunktion.

Unter Verwendung allgemeinerer elektrischer (Kontroll-)Potentiale, zeigen L. Baudouin, O. Kavian und J.-P. Puel in [5] die Existenz einer optimalen Kontrolle für die lineare Schrödingergleichung mit einem Coulombpotential. Die für den Beweis entscheidende Existenz einer Lösung der Differentialgleichung wird schrittweise nachgewiesen, indem man zunächst von reguläreren Potentialen ausgeht. Dem Nachweis der Konvergenz einer Minimierungsfolge für das Kostenfunktional dient ein Kompaktheitslemma von T. Aubin.

In [4] werden die Ergebnisse von L. Baudouin zunächst auf den nichtlinearen Fall mit einer Hartree-Nichtlinearität erweitert, anschließend auch auf ein gekoppeltes System, das neben dem durch die Hartree-Gleichung beschriebenen Verhalten der Elektronen eines Heliumatoms auch dasjenige des Atomkerns berücksichtigt.

B. Feng, J. Liu und J. Zheng befassen sich in [35] ebenfalls mit der nichtlinearen Hartree-Gleichung in \mathbb{R}^3 und zeigen die Wohldefiniertheit sowie die Existenz einer optimalen Kontrolle $\phi \in H^1(0, T; \mathbb{R})$ für ein externes Kontrollpotential $\phi(t)V(x)$ mit $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$.

Für ein solches Kontrollpotential zeigen M. Hintermüller et al. in [45] die Wohldefiniertheit und Existenz einer optimalen Kontrollfunktion aus dem Raum $H^1(0, T; \mathbb{R})$ für die bilineare Gross-Pitaevskii-Gleichung.

In numerischen Simulationen zur Kontrolle von Quantensystemen haben sich unter anderem die sogenannten monotonen Algorithmen von Krotov bewährt (vgl. z.B. [88], [62], [106]). In [6] zeigen L. Baudouin und J. Salomon für die Schrödingergleichung mit reellwertigen Potentialen aus $W^{2,\infty}$ die Konvergenz einer, durch einen solchen Algorithmus iterativ definierten, Optimierungsfolge zu einem kritischen Punkt des betrachteten Kostenfunktional in $L^2(0, T)$ und liefern somit eine konstruktive Methode zur Berechnung solcher kritischer Punkte. Die Autoren ergänzen damit die Arbeiten [79] und [80] von J. Salomon sowie [52] von K. Ito und K. Kunisch.

Kapitel 4

Problemstellung, Motivation und Aufbau

4.1 Das Kontrollproblem für den Anharmonischen Oszillator

Wir werden in dieser Arbeit untersuchen, ob es möglich ist, ein quantenmechanisches Teilchen in einem anharmonischen quartischen Potential, mittels eines, durch eine Laserkonstellation induzierten, zeitabhängigen elektrischen Feldes, so zu kontrollieren, dass seine Wellenfunktion, ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand ψ_0 , zu einem gegebenen Zeitpunkt $T > 0$ einen gewünschten Zielzustand ψ_f annimmt. Zu diesem Zweck betrachten wir ein eindimensionales Modell, d.h. wir interessieren uns hier für die Möglichkeit der Steuerung der Wellenfunktion in eine bestimmte Richtung.

Wir bezeichnen den Hamilton-Operator, der auf die Wellenfunktion $\psi(t, x)$ ($t \in [0, T], x \in \mathbb{R}$) des betrachteten Teilchens wirkt, mit

$$A := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

wobei

$$V(x) := \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R})$$

für die quartische Potentialfunktion steht. Das Kontrollproblem lautet hiermit

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = A\psi(t, x) - u(t) \cdot x \psi(t, x), \quad (4.1)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (4.2)$$

$$\psi(T, x) = \psi_f(x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (4.3)$$

wobei die Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Stärke des elektrischen Feldes in der betrachteten x -Richtung bezeichnet. Es handelt sich hierbei um ein bilineares Kontrollsystem, in dem der Kontrollterm $u(t) \cdot x \psi$ in multiplikativer Weise bilinear von den beiden unbekanntem Variablen ψ (Zustandsfunktion) und u (Kontrollfunktion) abhängt.

Bezeichnen wir die Eigenzustände der nicht-kontrollierten Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = A\psi(t, x) \quad (4.4)$$

mit

$$\psi_k(t, x) := e^{-i\lambda_k t} \varphi_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (4.5)$$

wobei λ_k die Eigenwerte des Operators A und φ_k die zugehörigen Eigenfunktionen seien, so werden wir zeigen, dass im Falle $\gamma \neq 0$ und betraglich klein, ein in $L^2(\mathbb{R})$ dichter Funktionenraum \mathcal{H} existiert, in dem sich das System, unter der Voraussetzung einer gegebenen Invarianzbedingung für die Funktion ψ in \mathcal{H} , in der Nähe der Grundzustandstrajektorie ($\psi_1, u \equiv 0$) lokal exakt kontrollieren lässt. Ausgehend von einem Anfangszustand $\psi_0 \in \mathcal{H} \cap \mathbb{S}$ in der Nähe des Grundzustandes zum Zeitpunkt $t = 0$, lässt sich die Wellenfunktion ψ in der Zeit $T > 0$ mittels einer Kontrollfunktion $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ in jeden beliebigen Zielzustand $\psi_f \in \mathcal{H} \cap \mathbb{S}$ in der Nähe von $\psi_1(T)$ überführen:

Für jeden Zeitpunkt $T > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Anfangs- und Zielzustände $\psi_0, \psi_f \in \mathcal{H} \cap \mathbb{S}$ mit

$$\|\psi_0 - \varphi_1\|_{\mathcal{H}} + \|\psi_f - \psi_1(T)\|_{\mathcal{H}} < \delta,$$

Kontrollfunktionen $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ existieren, so dass die Lösung ψ des Anfangswertproblems (4.1),(4.2) der Gleichung (4.3) genügt.

Wir werden in den Kapiteln 5 und 6 zeigen, dass das Kontrollsystem (4.1),(4.2), (4.3) wohlgestellt ist im Raum

$$D(A) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4 \psi \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Entsprechend wird für den Raum \mathcal{H} , in dem sich das System kontrollieren lässt, gelten:

$$\mathcal{H} \subset D(A).$$

Im nächsten Abschnitt untermauern wir zunächst unsere Vermutung, dass das System (4.1),(4.2),(4.3) kontrollierbar ist, mit Hilfe des Verfahrens der iterierten Lie-Klammern. Leider gibt dieses Verfahren für unendlichdimensionale Systeme, wie das von uns betrachtete, keinen hinreichenden Aufschluss darüber, wie genau der Raum \mathcal{H} aussieht. Allerdings lässt sich hier bereits erkennen, dass es sich bei \mathcal{H} um einen echten Teilraum von $D(A)$ handeln wird.

4.2 Iterierte Lie-Klammern

Wenngleich geometrische Methoden basierend auf iterierten Lie-Klammern im unendlichdimensionalen Fall weniger aussagekräftig sind als im endlichdimensionalen¹, so zeigt das Beispiel des Harmonischen Oszillators, dass die Methode manchmal auch für partielle Differentialgleichungssysteme hilfreich sein kann.

Wir werden in diesem Abschnitt kurz skizzieren, dass der Lie-Klammern-Ansatz, mit dem M. Mirrahimi und P. Rouchon die Nicht-Kontrollierbarkeit des eindimensionalen Harmonischen Oszillators gezeigt haben, im Falle des eindimensionalen Anharmonischen Quartischen Oszillators keinen Aufschluss über eine Nicht-Kontrollierbarkeit gibt. Die entsprechende Lie-Algebra ist in diesem Fall unendlichdimensional, was Anlass zur Hoffnung gibt, dass eine (lokale) exakte Kontrollierbarkeit des Anharmonischen Quartischen Oszillators in einem Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ möglich sein könnte.

Wir stellen zunächst zwei allgemeine Formeln auf, mit deren Hilfe wir alle im folgenden auftretenden Lie-Klammern berechnen können:

Lemma 4.1. *Für zwei Operatoren A, B sei die Lie-Klammer $[A, B](\psi) := (AB - BA)\psi$ definiert. Es sei $p = -i\nabla$ der Momentenoperator und q der Ortsoperator. Es seien außerdem $s, w \in \mathbb{N}_0$ sowie $r, t, u, v \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt für alle Funktionen ψ aus dem jeweiligen Definitionsbereich*

$$[q^r, q^s p^t](\psi) = \sum_{k=0}^{t-1} (-i)^{t+2-k} \binom{t}{k} (q^r)^{(t-k)} q^s p^k \psi, \quad (4.6)$$

$$[p^u, q^v p^w](\psi) = \sum_{k=0}^{u-1} (-i)^{u-k} \binom{u}{k} (q^v)^{(u-k)} p^{w+k} \psi. \quad (4.7)$$

Bemerkung. Man könnte die Formeln auch in einer einzigen Formel zusammenfassen. Da dies aber unübersichtlich wird und wir eine solch allgemeine Formel nicht benötigen, haben wir uns für die obige Lösung entschieden.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} [q^r, q^s p^t](\psi) &= (q^{r+s} p^t - q^s p^t q^r)(\psi) \\ &= (-i)^t (q^{r+s} \nabla^t \psi - q^s \nabla^t (q^r \psi)) \\ &= (-i)^t \left(q^{r+s} \psi^{(t)} - q^s \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (q^r)^{(t-k)} \psi^{(k)} \right) \\ &= -(-i)^t \left(q^s \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t}{k} (q^r)^{(t-k)} i^k p^k \psi \right) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} (-i)^{t+2-k} \binom{t}{k} (q^r)^{(t-k)} q^s p^k \psi, \end{aligned}$$

¹vgl. z.B. [25]

und analog

$$\begin{aligned}
[p^u, q^v p^w](\psi) &= (p^u q^v p^w - q^v p^{u+w})(\psi) \\
&= (-i)^{u+w} (\nabla^u (q^v \nabla^w \psi) - q^v \nabla^{u+w} \psi) \\
&= (-i)^{u+w} \left(\sum_{k=0}^u \binom{u}{k} (q^v)^{(u-k)} \psi^{(w+k)} - q^v \psi^{(u+w)} \right) \\
&= (-i)^{u+w} \left(\sum_{k=0}^{u-1} \binom{u}{k} (q^v)^{(u-k)} i^{w+k} p^{w+k} \psi \right) \\
&= \sum_{k=0}^{u-1} (-i)^{u-k} \binom{u}{k} (q^v)^{(u-k)} p^{w+k} \psi. \square
\end{aligned}$$

Wir definieren nun die Operatoren

$$\begin{aligned}
D(A) &:= \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid q^4 \psi \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad A(\psi) := -i(p^2 + \alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q)\psi, \\
D(B) &:= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid q\psi \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad B(\psi) := iq\psi,
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ reelle Zahlen seien.

Offensichtlich ist $D(A) \subset D(B)$ und wir können für alle $\psi \in D(A)$ die Lie-Klammer

$$\begin{aligned}
[A, B](\psi) &= [-i(p^2 + \alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q), iq](\psi) \\
&= [-ip^2, iq](\psi) = [p^2, q](\psi) = -2ip\psi
\end{aligned}$$

berechnen. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}
[A, [A, B]](\psi) &= [-i(p^2 + \alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q), -2ip](\psi) \\
&= -2[\alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q, p](\psi) \\
&= -2i(4\alpha q^3 + 2\beta q - \gamma)(\psi) \\
&= -8i\alpha q^3 \psi - 4i\beta q \psi + 2i\gamma \psi,
\end{aligned}$$

$$[B, [A, B]](\psi) = [iq, -2ip](\psi) = 2[q, p](\psi) = 2i\psi,$$

$$\begin{aligned}
[A, [A, [A, B]]](\psi) &= [-i(p^2 + \alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q), -8i\alpha q^3 - 4i\beta q + 2i\gamma](\psi) \\
&= -[p^2, 8\alpha q^3 + 4\beta q](\psi) \\
&= -8\alpha [p^2, q^3](\psi) - 4\beta [p^2, q](\psi) \\
&= 48\alpha q \psi + 48i\alpha q^2 p \psi + 8i\beta p \psi.
\end{aligned}$$

Bei der letzten berechneten Lie-Klammer fällt auf, dass ψ möglicherweise nicht im Definitionsbereich der Klammer liegt. Wir müssen den Definitionsbereich daher so einschränken, dass auch $q^2 p \psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist.

Der Term $q^2 p \psi$ ist auch derjenige, der dafür verantwortlich ist, dass bei der Berechnung weiterer iterierter Lie-Klammern der Form

$$[A, [A, \dots, [A, [A, B]] \dots]] \quad (4.8)$$

Terme immer höherer Ordnung auftreten, die dafür sorgen, dass wir den Definitionsbereich sukzessive weiter einschränken müssen, die aber auch darauf hindeuten, dass die von A und B erzeugte Lie-Algebra von unendlicher Dimension ist.

So treten bei der Berechnung der vierten iterierten Klammer der Art (4.8) unter anderem die Terme

$$[q^4, q^2 p](\psi) = 4iq^5 \psi$$

sowie

$$[p^2, q^2 p](\psi) = -2p\psi - 4iqp^2 \psi$$

auf.

Weitere Iterationen führen einerseits auf Klammern der Gestalt

$$[p^2, [q^4, q^2 p]], [q^4, [p^2, [q^4, q^2 p]]], [p^2, [q^4, [p^2, [q^4, q^2 p]]]], \dots,$$

wo wechselweise der Kommutator mit p^2 und q^4 gebildet wird, und damit auf immer größere Terme der Gestalt $q^{2m} p \psi$ und $q^{2m+1} \psi$ ($m \in \mathbb{N}$).

Andererseits ergeben sich aus den iterierten Klammern

$$[p^2, q^3], [p^2, [p^2, q^3]], [p^2, [p^2, [p^2, q^3]]], [q^4, [p^2, [p^2, [p^2, q^3]]]], \\ [p^2, [q^4, [p^2, [p^2, [p^2, q^3]]]]], [p^2, [p^2, [q^4, [p^2, [p^2, [p^2, q^3]]]]]], \dots,$$

bei denen jeweils dreimal in Folge der Kommutator mit p^2 berechnet wird, um für den sich ergebenden Term der Art $p^{2m+1} \psi$ ($m \in \mathbb{N}$), den Kommutator mit q^4 zu berechnen, bevor für entstehende Terme wieder dreimal der Kommutator mit p^2 berechnet wird, usw. ..., wachsende Terme der Art $q^{3-i} p^{i+2m} \psi$ für $i = 0, 1, 2, 3$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

Dies bedeutet, dass wir es bei der von A und B erzeugten Lie-Algebra offenbar mit einer unendlichdimensionalen Lie-Algebra zu tun haben. Gleichzeitig wird der Definitionsbereich der Lie-Algebra durch diese Klammern auf eine Teilmenge der schnell-fallenden C^∞ -Funktionen eingeschränkt.

Wir erwarten dementsprechend, dass es möglich ist, in einem dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$, bestehend aus schnell-fallenden C^∞ -Funktionen, (lokale) positive Kontrollierbarkeitsergebnisse für den eindimensionalen Anharmonischen Quartischen Oszillator zu erhalten. Um einen solchen dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ exakt zu identifizieren, bedarf es allerdings anderer Methoden: Wir werden daher im folgenden auf analytische Methoden zurückgreifen.

4.3 Aufbau der Arbeit und verwendete Methoden

Zunächst zeigen wir in Kapitel 5 für stetig differenzierbare Kontrollfunktionen die Existenz eines Funktionenraumes, in dem das Anfangswertproblem (4.1),(4.2) wohlgestellt ist und eine eindeutige Lösung ψ besitzt. In Kapitel 6 zeigen wir, dass auch im Falle weniger regulärer Kontrollfunktionen immer noch eine (milde) Lösung für (4.1),(4.2) existiert. Überdies zeigen wir die Existenz milder Lösungen auch für später betrachtete linearisierte Systeme.

In den beiden folgenden Kapiteln 7 und 8 widmen wir uns genauen Untersuchungen der Eigenwerte λ_k , der Energie-Lücken $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ und der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Hamilton-Operators $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ für den Anharmonischen Quartischen Oszillator. Insbesondere das asymptotische Verhalten der spektralen Lücken $|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$ für große Werte $k \in \mathbb{N}$, sowie dasjenige von $\varphi_k(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ und für $k \rightarrow \infty$ sind für Kontrollierbarkeitsaspekte von entscheidender Bedeutung.

So zeigen wir dank des, in Proposition 8.9 nachgewiesenen, asymptotischen Verhaltens der Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ für $k \rightarrow \infty$ in Kapitel 9, dass sich der Anharmonische Quartische Oszillator mittels *distributiver* Kontrollen in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ nicht kontrollieren lässt.

Das asymptotische Verhalten der Energie-Lücken, die für $k \rightarrow \infty$ gegen Unendlich tendieren, ist hingegen, neben den iterierten Lie-Klammern, als ein weiterer Indikator für die Möglichkeit einer Kontrollierbarkeit mittels *bilinear*er Kontrollen zu deuten. Diese Eigenschaft ist nämlich eine wichtige Bedingung für die Anwendbarkeit eines Satzes von Ingham, der üblicherweise für Kontrollierbarkeitsnachweise linearer Systeme genutzt wird.

4.3.1 Das Linearisierungsprinzip

Nach dem sogenannten **Linearisierungsprinzip** weist man die lokale exakte Kontrollierbarkeit eines nichtlinearen Systems nach, indem man zunächst die (globale) exakte Kontrollierbarkeit eines linearisierten Systems zeigt, um dann die lokale Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems mit Hilfe eines Satzes über lokale Umkehrbarkeit² abzuleiten.

Genauer schließt man für die nichtlineare Abbildung

$$\Theta : (\psi_0, u) \mapsto (\psi_0, \psi(T; \psi_0, u)),$$

von der Surjektivität ihres Differentials $d\Theta$ auf die lokale Surjektivität von Θ . Man bezeichnet diese Abbildung häufig auch als **Endpunkt-Abbildung**, da eine Kontrollfunktion u hier einem (durch sie von einem Anfangszustand ψ_0 aus) erreichten Zielzustand (Endpunkt) zum Zeitpunkt $T > 0$ zugeordnet wird.

Bei endlichdimensionalen Problemen folgt aus der exakten Kontrollierbarkeit

²vgl. Lemma 11.1

des linearisierten Systems sofort die lokale Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems³.

Bei unendlichdimensionalen Problemen wie dem Schrödinger-Kontrollproblem, muss jede einzelne Bedingung des verwendeten Umkehrsatzes verifiziert werden.

Nachdem wir in Kapitel 10 als Vorarbeit für die beiden folgenden Kapitel abstrakte Gevrey-Räume für den Hamilton-Operator einführen und diese als Teilräume des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ klassifizieren, nutzen wir in Kapitel 11 für den Nachweis der Kontrollierbarkeit des um die Grundzustandstrajektorie ($\psi_1, u \equiv 0$) linearisierten Systems

4.3.2 Die Momentenmethode für lineare Kontrollsysteme

Die **Momentenmethode** besteht darin, ein Kontrollproblem für ein lineares System in ein Momentenproblem für die Kontrolle zu transformieren.

Es sei X ein (separabler) Hilbertraum über \mathbb{R} , $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sei ein linearer, abgeschlossener Operator, definiert auf einem dichten Teilraum $D(A)$ von X , und der infinitesimale Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $S(t) = e^{-itA}$ ($t \geq 0$). Der Operator A habe ein diskretes, nicht-entartetes Spektrum aus Eigenwerten λ_j ($j \in \mathbb{N}$), und die zugehörigen Eigenfunktionen φ_j bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum X . $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ sei ein weiterer linearer Operator.

Wir betrachten ein lineares Schrödinger-Kontrollsystem der Art

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A\psi + u(t)B\phi \quad (t \in (0, T]), \quad (4.9)$$

$$\psi(0) = \psi_0. \quad (4.10)$$

Der Anfangszustand ψ_0 sei aus $D(A)$ gewählt und für die Zustandsfunktion gelte $\psi(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0, T]$. Die Kontrollfunktion erfülle $u \in L^1(0, T; \mathbb{R})$, außerdem gelte $\phi \in C([0, T], D(B))$ mit $B\phi(t) \in D(A)$ für alle $t \in (0, T]$.

Das Anfangswertproblem (4.9), (4.10) besitzt dann eine eindeutige (milde) Lösung⁴ $\psi \in C([0, T], D(A))$, welche gegeben ist durch

$$\psi(t) = e^{-iAt}\psi_0 + i \int_0^t e^{-iA(t-s)} (u(s)B(\phi(s))) ds \quad (t \in [0, T]). \quad (4.11)$$

Das Kontrollproblem besteht nun darin, für einen gegebenen Zeitpunkt $T > 0$ und einen gegebenen Zielzustand $\psi_f \in D(A)$ eine Kontrollfunktion u zu finden, so dass die durch (4.11) gegebene (milde) Lösung ψ die Zielbedingung

$$\psi(T) = \psi_f \quad (4.12)$$

³vgl. z.B. Theorem 3.6. in [25]

⁴vgl. z.B. §4.2. in [75]

erfüllt.

Wir entwickeln die Lösung ψ nach den Eigenfunktionen φ_j ($j \in \mathbb{N}$) des Operators A :

$$\psi(t, \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi(t), \varphi_j \rangle \varphi_j. \quad (4.13)$$

In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich Fälle, in denen es sich bei ϕ um einen Eigenzustand

$$\phi = \psi_l(t, x) = e^{-i\lambda_l t} \varphi_l(x) \quad (l \in \mathbb{N}) \quad (4.14)$$

des Hamilton-Operators A handelt.

Für die Fourier-Koeffizienten in (4.13) folgt mit (4.11) und (4.14)

$$\langle \psi(t), \varphi_j \rangle = e^{-i\lambda_j t} \left(\langle \psi_0, \varphi_j \rangle - i \langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle \int_0^t u(s) e^{i(\lambda_j - \lambda_l)s} ds \right) \quad (4.15)$$

Mit der Zielbedingung (4.12) hat man für alle $j \in \mathbb{N}$

$$e^{i\lambda_j T} \langle \psi_f, \varphi_j \rangle - \langle \psi_0, \varphi_j \rangle = -i \langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle \int_0^T u(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_l)t} dt. \quad (4.16)$$

Ist $\langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so haben wir ein trigonometrisches Momentenproblem für die Kontrolle u :

$$\int_0^T u(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_l)t} dt = \frac{e^{i\lambda_j T} \langle \psi_f, \varphi_j \rangle - \langle \psi_0, \varphi_j \rangle}{-i \langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle}. \quad (4.17)$$

Mit der folgenden Version des Satzes von Ingham (bewiesen von A. Haraux in [44]) und zwei daraus abgeleiteten Korollaren, lässt sich die Existenz von Lösungen für die in dieser Arbeit auftretenden trigonometrischen Momentenprobleme zeigen:

Theorem 4.2. *Seien $\rho, \tilde{\rho}$ positive Konstanten, $N \in \mathbb{N}$, $(\mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, so dass*

$$\mu_{k+1} - \mu_k \geq \rho > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

sowie

$$\mu_{k+1} - \mu_k \geq \tilde{\rho} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ mit } |k| \geq N, \quad (4.19)$$

und $T > 2\pi/\tilde{\rho}$. Dann existieren positive Konstanten c, C (abhängig von $\rho, \tilde{\rho}, N$ und T), so dass für jede Folge komplexer Zahlen $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit endlichem Träger

$$c \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2, \quad (4.20)$$

wobei f definiert ist durch

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\mu_k t}. \quad (4.21)$$

Beweis. vgl. Théorème 4 in [44].

Mit der Einführung des Raumes

$$l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \{(d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \mid d_1 \in \mathbb{R}\}$$

lassen sich die beiden folgenden Korollare formulieren.

Korollar 4.3. Sei $T > 0$ und $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $[0, +\infty)$, so dass $\mu_1 = 0$ und

$$\mu_{k+1} - \mu_k \rightarrow +\infty \quad \text{für } k \rightarrow +\infty.$$

Dann existiert eine stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L : l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) &\rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}) \\ d &\mapsto L(d), \end{aligned}$$

so dass die Funktion $v := L(d)$, für jedes $d = (d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, der Gleichung

$$\int_0^T v(t) e^{i\mu_k t} dt = d_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

genügt.

Beweis. vgl. B.0.3, Corollary 1 in [12].

Korollar 4.4. Sei $T > 0$ und $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $[0, +\infty]$, so dass $\mu_1 = 0$ und

$$\mu_{k+1} - \mu_k \rightarrow +\infty \quad \text{für } k \rightarrow +\infty.$$

Dann existiert eine stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) &\rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}) \\ (\tilde{d}, d) &\mapsto L(\tilde{d}, d), \end{aligned}$$

so dass die Funktion $v := L(\tilde{d}, d)$, für jedes $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ und $d = (d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^T v(t) e^{i\mu_k t} dt &= d_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \int_0^T t v(t) dt &= \tilde{d}, \end{aligned}$$

erfüllt.

Beweis. vgl. B.0.3, Corollary 2 in [12].

Damit die rechte Seite von (4.17), wie gewünscht, zu $l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gehört, müssen wir Regularitätsforderungen an ψ_0 sowie ψ_f stellen, die von dem Verhalten der Koeffizienten $\langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle$ abhängen. Dies bedeutet für das Kontrollproblem:

Das Verhalten der Koeffizienten $\langle B\varphi_l, \varphi_j \rangle$ bestimmt den Raum \mathcal{H} , in dem eine exakte Kontrollierbarkeit des Problems (4.9),(4.10) möglich ist.

Dank der in Kapitel 11 für bestimmte Parameterwerte nachgewiesenen exakten Kontrollierbarkeit des um die Grundzustandstrajektorie linearisierten Systems in einem Raum \mathcal{H} , zeigen wir in Kapitel 12 unter der Annahme einer Invarianzeigenschaft für die Lösung des bilinearen Systems im Raum \mathcal{H} die lokale exakte Kontrollierbarkeit in \mathcal{H} durch die Anwendung eines Satzes über lokale Umkehrbarkeit in Banachräumen.

Teil II

Wohldefiniertheit

Kapitel 5

Existenz klassischer Lösungen

In diesem Kapitel weisen wir nach, dass das Kontrollproblem (4.1), (4.2), (4.3) korrekt gestellt ist, sofern man den Anfangswert ψ_0 aus dem Funktionenraum $D(A) := \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4\psi \in L^2(\mathbb{R})\}$ wählt. Unter der Voraussetzung, dass die Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, zeigen wir, dass das Anfangswertproblem (4.1), (4.2) eine eindeutige klassische Lösung $\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ besitzt. Genauer weisen wir mit Hilfe eines Theorems von Kato die Existenz einer Familie von eindeutigen, unitären Evolutions-Operatoren $U(t, t_0)$ nach, welche die zeitliche Entwicklung des Systems vom Zeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t bestimmen. In § 5.1 identifizieren wir $D(A)$ als den größtmöglichen Raum, in dem das System wohlgestellt ist. In § 5.2 zeigen wir dann zunächst die Selbstadjungiertheit des Operators $\tilde{A}(t) := -\Delta + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) in $L^2(\mathbb{R})$, die eine wichtige Voraussetzung für die Existenz einer Familie von Evolutions-Operatoren ist und für die Anwendung des Katoschen Theorems in § 5.3 benötigt wird.

5.1 Ein geeigneter Funktionenraum

Wir zeigen zunächst, dass die Zugehörigkeit von ψ sowie von $x^4\psi$ zu $L^2(\mathbb{R})$ auch diejenige von $x^2\psi$ und von $x\psi$ impliziert. Die entsprechende Ungleichung werden wir ebenfalls für den Beweis von Proposition 5.7 benötigen:

Lemma 5.1. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $x^{2m}\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $x^m\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt die folgende Ungleichung:*

$$\|x^m\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|x^{2m}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.1)$$

Beweis. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung sowie einer weiteren

einfachen Abschätzung erhält man

$$\begin{aligned}
\|x^m \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} |\psi|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \| |x|^{2m} |\psi|^2 \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \|x^{2m} \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \left(\|x^{2m} \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&= \|x^{2m} \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty. \square
\end{aligned}$$

Korollar 5.2. *Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\psi \in H^2(\mathbb{R})$ und $x^4 \psi \in L^2(\mathbb{R})$. C sei eine positive Konstante und $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|u(t)| \leq C$. Dann ist auch $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x\right) \psi \in L^2(\mathbb{R})$.*

Wir definieren nun für $t \in [0, T]$ den linearen Operator $\tilde{A}(t)$ in $L^2(\mathbb{R})$ durch

$$\begin{aligned}
D(\tilde{A}(t)) &= D(A) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4 \psi \in L^2(\mathbb{R})\} \\
\tilde{A}(t)\psi &= -\Delta\psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x) \psi - u(t)x \psi, \quad \text{für } \psi \in D(A).
\end{aligned}$$

Für $\psi \in D(A)$ ist die Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \tilde{A}(t)\psi \quad (5.2)$$

daher wohldefiniert im Raum $L^2(\mathbb{R})$.

Der Raum $D(A)$ wird, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{D(A)} := \langle \psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle \Delta\psi, \Delta\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle x^4 \psi, x^4 \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|\psi\|_{D(A)} := \left(\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|x^4 \psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

zu einem Hilbertraum.

Die folgende Eigenschaft von $D(A)$ benötigen wir bei der Anwendung des Katoschen Theorems in § 5.3.:

Lemma 5.3. *Der Hilbertraum $D(A)$ ist stetig und dicht eingebettet in $L^2(\mathbb{R})$.*

Beweis. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset D(A) \subset L^2(\mathbb{R})$, folgt aufgrund der Dichtheit von $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ (vgl. **A.2**) sofort, dass $D(A)$ ebenfalls dicht in $L^2(\mathbb{R})$ eingebettet ist.

Der Einbettungsoperator $T : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \psi \mapsto \psi$, ist zudem stetig, da für alle $\psi \in D(A)$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\psi\|_{D(A)} \quad (5.4)$$

(d.h. der Operator ist beschränkt). \square

5.2 Selbst-Adjungiertheit in $L^2(\mathbb{R})$

In diesem Abschnitt zeigen wir die Selbstadjungiertheit des Hamilton-Operators $\tilde{A}(t)$ in $L^2(\mathbb{R})$. Sie ist eine Voraussetzung für die Existenz einer Familie von Evolutions-Operatoren.

Lemma 5.4. *Sei $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $V \geq 0$ punktweise. Dann ist $-\Delta + V$ wesentlich selbstadjungiert in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Siehe Theorem X.28 in [77].

Das Potential $V(t, x) := \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x$ ($t \in [0, T], x \in \mathbb{R}$) ist für $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ offensichtlich von unten beschränkt, da $u(t)$ beschränkt ist.

Sei $d \geq 0$ und $-d$ eine untere Schranke für $V(t, x)$, d.h. es gelte für alle $t \in [0, T]$

$$\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x \geq -d \quad (\forall x \in \mathbb{R}). \quad (5.5)$$

Dann ist $V(t, x) + d$ nicht negativ und lokal L^2 -integrierbar und man erhält dank Lemma 5.4 die wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators $P(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x + d$ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Die wesentliche Selbstadjungiertheit des Hamilton-Operators $\tilde{A}(t) := P(t) - d$ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ergibt sich nun aus dem folgenden Lemma von Rellich:

Lemma 5.5 (Rellich). *Sei P ein wesentlich selbstadjungierter Operator und Q ein symmetrischer Operator mit $D(Q) \supset D(P)$. Es existiere ein $b < 1$, so dass für alle $\psi \in D(P)$ und ein $a \in \mathbb{R}$*

$$\|Q\psi\| \leq a \|\psi\| + b \|P\psi\|.$$

Dann ist $P + Q$ wesentlich selbstadjungiert auf $D(P)$ und sein Abschluß entspricht $\overline{P + Q}$.

Insbesondere gilt dies, wenn Q symmetrisch und beschränkt ist mit $D(Q) \supset D(P)$.

Beweis. Siehe Theorem 4.4. in [55].

Wir wählen als Operator Q den Multiplikationsoperator $-d$. Dieser ist symmetrisch (da reellwertig) und beschränkt:

$$\| -d\psi \| \leq d \|\psi\| \quad (\forall \psi \in D(P(t))).$$

Lemma 5.5 liefert dann die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\tilde{A}(t) = P(t) + Q$ in $D(P(t)) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

Lemma 5.6. *Seien $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ und die Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann ist der Operator $\tilde{A}(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x$ wesentlich selbstadjungiert in $C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Bemerkung. Mit **A.1** erhält man die Existenz einer eindeutigen selbstadjungierten Fortsetzung des Operators $\tilde{A}(t)$ auf $L^2(\mathbb{R})$. Im folgenden sei mit $\tilde{A}(t)$ immer diese Fortsetzung gemeint.

5.3 Klassische Lösungen in $D(A)$

Wir weisen nun, mit Hilfe eines Satzes von Kato¹, die Existenz eines Evolutions-Systems für den (zeitabhängigen) Operator $\tilde{A}(t)$ nach, d.h. eines unitären Zeitentwicklungsoperators $U(t, s)$ für $t, s \in [0, T]$, so dass die Lösung ψ der Gleichung

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \tilde{A}(t) \psi$$

für $t \in [0, T]$ in $D(A)$ existiert und die folgende Eigenschaft hat:

$$\psi(t) = U(t, s) \psi(s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Die Lösung des entsprechenden Cauchy-Problems mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_0 \in D(A)$ lautet daher:

$$\psi(t) = U(t, 0) \psi_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.6)$$

Proposition 5.7. *Es seien $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ und $u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$.*

Wir definieren die Familie der Hamilton-Operatoren $\{\tilde{A}(t), t \in [0, T]\}$ durch $\tilde{A}(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x$.

Dann existiert eine eindeutige Familie von Evolutions-Operatoren $\{U(t, s), s, t \in [0, T]\}$ (den sogenannten Propagatoren für $\tilde{A}(t)$), so dass gilt:

(i) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(L^2(\mathbb{R}))$;

(ii) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ für alle $t, s, r \in [0, T]$;

(iii) $U(t, s)D(A) \subseteq D(A)$ für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$;

(iv) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(D(A))$;

(v) $i \frac{dU(t, s)}{dt} = \tilde{A}(t)U(t, s), i \frac{dU(t, s)}{ds} = -U(t, s)\tilde{A}(s)$ gelten stark als Gleichungen zwischen Operatoren von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$;

(vi) $U(t, s)$ ist unitär für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.

Beweis.

Wir zeigen, dass die Voraussetzungen (V1) und (V2) des Satzes von Kato (vgl. **A.4**) erfüllt sind:

(V1): Der Hilbertraum $D(A)$ ist laut Lemma 5.3 stetig und dicht in $L^2(\mathbb{R})$ eingebettet.

Aufgrund der Selbstadjungiertheit des Operators $\tilde{A}(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x$ in $L^2(\mathbb{R})$, folgt mit dem Satz **A.3**, dass der Operator

$$S(t) := \tilde{A}(t) + i$$

¹vgl. **A.4**

ein Isomorphismus von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$ ist.

Man hat

$$\begin{aligned} S(t)\tilde{A}(t)S(t)^{-1} &= (\tilde{A}(t) + i) \tilde{A}(t) (\tilde{A}(t) + i)^{-1} \\ &= \tilde{A}(t) (\tilde{A}(t) + i) (\tilde{A}(t) + i)^{-1} \\ &= \tilde{A}(t). \end{aligned}$$

Wählen wir also $Q(t) \equiv 0$, so ist $Q(t) \in B(L^2(\mathbb{R}))$ und die Abbildung $t \in [0, T] \mapsto Q(t)$ ist stark stetig in $L^2(\mathbb{R})$.

Die starke Differenzierbarkeit von $t \in [0, T] \mapsto S(t)$ von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$ ist ebenfalls offensichtlich.

(V2): Es ist $Y = D(A) = D(\tilde{A}(t))$ für alle $t \in [0, T]$.

Wir zeigen nun zunächst die Beschränktheit des Operators $\tilde{A}(t)$ in $B(D(A), L^2(\mathbb{R}))$. Für alle $\psi \in D(\tilde{A}(t)) = D(A)$ gilt aufgrund der Minkowskischen Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{A}(t)\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x) \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi \right\|_{L^2} + \alpha \|x^4\psi\|_{L^2} + \beta \|x^2\psi\|_{L^2} + (|\gamma| + |u(t)|) \|x\psi\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nun ist gemäß Lemma 5.1

$$(|\gamma| + |u(t)|) \|x\psi\|_{L^2} \leq (|\gamma| + |u(t)|) \|x^2\psi\|_{L^2} + \frac{|\gamma| + |u(t)|}{2} \|\psi\|_{L^2},$$

und dank der Beschränktheit $|u(t)| \leq C$ ($\forall t \in [0, T]$), aufgrund der Stetigkeit von u , erhält man

$$\begin{aligned} \beta \|x^2\psi\|_{L^2} + (|\gamma| + |u(t)|) \|x\psi\|_{L^2} &\leq (\beta + |\gamma| + C) \|x^2\psi\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{|\gamma| + C}{2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq (\beta + |\gamma| + C) \|x^4\psi\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{\beta + 2|\gamma| + 2C}{2} \|\psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist somit

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{A}(t)\psi \right\|_{L^2} \\ &\leq \|-\Delta\psi\|_{L^2} + (\alpha + \beta + |\gamma| + C) \|x^4\psi\|_{L^2} + \frac{\beta + 2|\gamma| + 2C}{2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq \|\psi\|_{D(A)} + (\alpha + \beta + |\gamma| + C) \|\psi\|_{D(A)} + \frac{\beta + 2|\gamma| + 2C}{2} \|\psi\|_{D(A)} \\ &= \left(1 + \alpha + \frac{3\beta}{2} + 2|\gamma| + 2C \right) \|\psi\|_{D(A)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dies impliziert

$$\|\tilde{A}(t)\|_{B(D(A), L^2)} = \sup_{\|\psi\|_{D(A)} \leq 1} \|\tilde{A}(t)\psi\|_{L^2} < \infty, \quad (5.9)$$

also die Beschränktheit von $\tilde{A}(t)$ in $B(D(A), L^2(\mathbb{R}))$.

Für die Norm-Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \tilde{A}(t)$ ($t \in [0, T]$) in $B(D(A), L^2(\mathbb{R}))$ zeigen wir, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)\|_{B(D(A), L^2)} < \varepsilon. \quad (5.10)$$

Für ein beliebiges gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass $|t - s| < \delta$ impliziert, dass für die (stetige) Funktion u gilt: $|u(t) - u(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt für alle $\psi \in D(A)$ mit zweifacher Anwendung der Ungleichung aus Lemma 5.1:

$$\begin{aligned} \|(\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s))\psi\|_{L^2} &\leq |u(t) - u(s)| \|x\psi\|_{L^2} \\ &\leq |u(t) - u(s)| \left(\|x^4\psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \right) \\ &\leq |u(t) - u(s)| 2 \|\psi\|_{D(A)} \\ &< \varepsilon \|\psi\|_{D(A)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\|\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)\|_{B(D(A), L^2(\mathbb{R}))} < \varepsilon. \square$$

Bemerkung. Für den zeitunabhängigen Hamilton-Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$), ist der Propagator $U(t, s)$ gegeben durch $U(t, s) = e^{-i(t-s)A}$.

Aus Proposition 5.7 folgt unmittelbar

Theorem 5.8. *Es seien $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}, u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ und $\psi_0 \in D(A)$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x) \psi(t, x), \quad (5.11)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (5.12)$$

eine eindeutige (klassische) Lösung $\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$.

Unabhängig von der Wahl der (reellwertigen, stetig differenzierbaren) Kontrollfunktion u , bestimmt der Anfangszustand ψ_0 die Sphäre in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, auf der sich die Lösung ψ für alle $t \in [0, T]$ befindet:

Lemma 5.9 (Massenerhaltung). *Für die eindeutige (klassische) Lösung $\psi(t, x)$ des Anfangswertproblems (5.11), (5.12) gilt für alle $t \in [0, T]$*

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})}. \quad (5.13)$$

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_t \bar{\psi} + \psi \bar{\psi}_t dx = 2\Re \int_{-\infty}^{\infty} \psi_t \bar{\psi} dx = 2\Im \int_{-\infty}^{\infty} i\psi_t \bar{\psi} dx.$$

Mit Gleichung (5.11) erhalten wir

$$2\Im \int_{-\infty}^{\infty} i\psi_t \bar{\psi} dx = 2\Im \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi|^2 + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - u(t)x) |\psi|^2 dx = 0. \square$$

Da der Anfangszustand ψ_0 gemäß § 2.1 auf der L^2 -Einheitssphäre \mathbb{S} liegen muss, gilt dies wegen (5.13) auch für alle vermöge des Systems (5.11), (5.12) erreichbaren Zustände ψ_f .

Kapitel 6

Existenz milder Lösungen

6.1 Das bilineare System

In § 5.3 haben wir gezeigt, dass das Anfangswertproblem (5.11),(5.12) unter der Voraussetzung $u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ eine eindeutige klassische Lösung $\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ besitzt. Wir zeigen nun, dass dies sogar für $u \in C([0, T], \mathbb{R})$ der Fall ist und dass für das System auch unter der noch schwächeren Voraussetzung $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ immerhin eine eindeutige Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$ existiert. Diese sogenannte *milde Lösung* erfüllt die zu (5.11),(5.12) gehörige Integralgleichung

$$\psi(t) = e^{-itA}\psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A} (u(s)x\psi) ds. \quad (6.1)$$

Lösungen dieser Art sind für die von uns im folgenden angewendeten kontrolltheoretischen Methoden hinreichend regulär.

Nehmen wir nun an, für die Kontrollfunktion gelte $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$. Dann folgt aufgrund der Endlichkeit des Intervalles $[0, T]$ mit der Hölderschen Ungleichung

$$\|u\|_{L^1(0, T; \mathbb{R})} \leq \sqrt{T} \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} < \infty.$$

Wir können daher (wie in [51], [21] und [22])

$$h(t) := \int_0^t u(s)ds, \quad G(t) := \int_0^t h(s)ds, \quad k'(t) := h^2(t) \quad (6.2)$$

definieren und das System (5.11),(5.12) mit Hilfe dieser Ausdrücke so transformieren, dass der bilineare Term $-u(t) \cdot x\psi$ aus der Gleichung verschwindet. So setzen wir zunächst

$$\varphi(t, x) = e^{-ih(t)x} \psi(t, x). \quad (6.3)$$

Aus (5.11) ergibt sich dann die folgende Gleichung für φ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) + V(x)\varphi(t, x) - 2ih(t) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} + h^2(t)\varphi(t, x), \quad (6.4)$$

wobei $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$.

Nun setzen wir

$$\chi(t, x) = e^{ik(t)} \varphi(t, x + 2G(t)), \quad (6.5)$$

und erhalten aus (6.4)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, x) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi(t, x) + V(x + 2G(t)) \chi(t, x). \quad (6.6)$$

Falls das bilineare Anfangswertproblem (5.11), (5.12) für $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ also eine (milde) Lösung hat, so gilt für diese, entsprechend der Transformationen (6.3) und (6.5):

$$\psi(t, x) = e^{i[h(t)x - k(t)]} \chi(t, x - 2G(t)). \quad (6.7)$$

Wir zeigen nun die Existenz eines eindeutigen Evolutions-Operators für die Gleichung (6.6) und damit die Existenz einer eindeutigen klassischen Lösung

$$\chi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$$

für das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangswert $\chi(0, x) = \psi_0(x)$:

Proposition 6.1. *Es seien $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $G \in C^1([0, T], \mathbb{R})$.*

Wir definieren die Familie der Hamilton-Operatoren $\{F(t), t \in [0, T]\}$ durch $F(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha(x + 2G(t))^4 + \beta(x + 2G(t))^2 - \gamma(x + 2G(t))$.

Dann existiert eine eindeutige Familie von Evolutions-Operatoren $\{U(t, s), s, t \in [0, T]\}$, so dass gilt:

(i) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(L^2(\mathbb{R}))$;

(ii) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ für alle $t, s, r \in [0, T]$;

(iii) $U(t, s)D(A) \subseteq D(A)$ für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$;

(iv) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(D(A))$;

(v) $i \frac{dU(t, s)}{dt} = F(t)U(t, s)$, $i \frac{dU(t, s)}{ds} = -U(t, s)F(s)$ gelten stark als Gleichungen zwischen Operatoren von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$;

(vi) $U(t, s)$ ist unitär für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Proposition 5.7 vor und zeigen, dass die Voraussetzungen des Satzes von Kato (A.4) erfüllt sind:

Gemäß Lemma 5.3 ist der Raum $D(A)$ stetig und dicht in $L^2(\mathbb{R})$ eingebettet. Das Potential

$$\begin{aligned} V(x + 2G(t)) &= \alpha(x + 2G(t))^4 + \beta(x + 2G(t))^2 - \gamma(x + 2G(t)) \\ &= \alpha x^4 + 8\alpha G(t)x^3 + (24\alpha G^2(t) + \beta)x^2 \\ &\quad + (32\alpha G^3(t) + 4\beta G(t) - \gamma)x + 16\alpha G^4(t) + 4\beta G^2(t) \\ &\quad - 2\gamma G(t) \end{aligned}$$

ist für $\alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $G \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ durch eine Zahl $d_0 \in \mathbb{R}$ von unten beschränkt. Setzen wir $d_1 := \max(0, -d_0)$, so ist $V(x + 2G(t)) + d_1 \geq 0$, lokal L^2 -integrierbar, und der Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x + 2G(t)) + d_1$ ist gemäß Lemma 5.4 wesentlich selbstadjungiert in $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Mit Lemma 5.5 folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit von $F(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x + 2G(t))$ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ und **A.1** liefert die Existenz einer eindeutigen selbstadjungierten Forsetzung dieses Operators auf $L^2(\mathbb{R})$, welche wir wieder mit $F(t)$ bezeichnen. Dank des Satzes **A.3** wissen wir, dass der Operator

$$S(t) := F(t) + i$$

ein Isomorphismus von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$ ist.

Man hat

$$\begin{aligned} S(t)F(t)S(t)^{-1} &= (F(t) + i) F(t) (F(t) + i)^{-1} \\ &= F(t) (F(t) + i) (F(t) + i)^{-1} \\ &= F(t). \end{aligned}$$

Wählen wir $Q(t) \equiv 0$, so ist $Q(t) \in B(L^2(\mathbb{R}))$ und die Abbildung $t \in [0, T] \mapsto Q(t)$ ist stark stetig in $L^2(\mathbb{R})$, während $t \in [0, T] \mapsto S(t)$ stark differenzierbar ist von $D(A)$ nach $L^2(\mathbb{R})$.

Dank Lemma 5.1 wissen wir bereits, dass die Zugehörigkeit von ψ sowie $x^4\psi$ zu $L^2(\mathbb{R})$ impliziert, dass $x^2\psi$ und $x\psi$ ebenfalls zu $L^2(\mathbb{R})$ gehören. Gleiches gilt für die Terme $x^3\psi$, wie man mittels der Ungleichung von Hölder sowie Lemma 5.1 erkennt:

$$\begin{aligned} \|x^3\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^6 |\psi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|x^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \\ &\leq \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \left\{ \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\}^{1/2} \\ &\leq \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Daher ist $Y = D(A) = D(F(t))$ für alle $t \in [0, T]$.

Für den Nachweis von Voraussetzung (A.1e) des Satzes von Kato zeigen wir wieder zunächst die Beschränktheit des Operators $F(t)$ in $B(D(A), L^2(\mathbb{R}))$: Für alle $\psi \in D(F(t)) = D(A)$ ist

$$\begin{aligned} \|F(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi + V(x + 2G(t)) \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \alpha \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + 8\alpha |G(t)| \|x^3\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + (24\alpha G^2(t) + \beta) \|x^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + |32\alpha G^3(t) + 4\beta G(t) - \gamma| \|x\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + |16\alpha G^4(t) + 4\beta G^2(t) - 2\gamma G(t)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{6.9}$$

und man erhält mit der Ungleichung aus Lemma 5.1 sowie (6.8)

$$\begin{aligned} \|F(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left(32\alpha|G^3(t)| + 24\alpha G^2(t) \right. \\ &\quad \left. + (8\alpha + 4\beta)|G(t)| + \alpha + \beta + |\gamma| \right) \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \left(16\alpha G^4(t) + 32\alpha|G^3(t)| + (12\alpha + 4\beta)G^2(t) \right. \\ &\quad \left. + (4\alpha + 4\beta + 2|\gamma|)|G(t)| + \frac{\beta}{2} + |\gamma| \right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

und dank der Beschränktheit $|G(t)| \leq C$ ($\forall t \in [0, T]$), aufgrund der Stetigkeit von G , erhält man

$$\begin{aligned} \|F(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \left\| -\frac{d^2}{dx^2}\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left(32\alpha C^3 + 24\alpha C^2 + (8\alpha + 4\beta)C \right. \\ &\quad \left. + \alpha + \beta + |\gamma| \right) \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \left(16\alpha C^4 + 32\alpha C^3 + (12\alpha + 4\beta)C^2 \right. \\ &\quad \left. + (4\alpha + 4\beta + 2|\gamma|)C + \frac{\beta}{2} + |\gamma| \right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \left(16\alpha C^4 + 64\alpha C^3 + (36\alpha + 4\beta)C^2 \right. \\ &\quad \left. + (12\alpha + 8\beta + 2|\gamma|)C + \alpha + \frac{3\beta}{2} + 2|\gamma| + 1 \right) \|\psi\|_{D(A)}. \end{aligned}$$

Dies impliziert die Beschränktheit von $F(t)$ in $B(D(A), L^2(\mathbb{R}))$:

$$\|F(t)\|_{B(D(A), L^2(\mathbb{R}))} = \sup_{\|\psi\|_{D(A)} \leq 1} \|F(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \quad (6.10)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so gewählt, dass für $|t - s| < \delta$ gilt:

$$\max(|G(t) - G(s)|, |G^3(t) - G^3(s)|) < \frac{\varepsilon}{C(\alpha, \beta, \gamma, G)},$$

mit $C(\alpha, \beta, \gamma, G) := 76\alpha + 8\beta + 2|\gamma| + (136\alpha + 8\beta) \max_{t \in [0, T]} (|G(t)|, |G^3(t)|)$.

Dann folgt für alle $\psi \in D(A)$ mit der Ungleichung aus Lemma 5.1 und (6.8):

$$\begin{aligned}
& \|(F(t) - F(s))\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq & 8\alpha |G(t) - G(s)| \|x^3\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + 24\alpha |G^2(t) - G^2(s)| \|x^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
& + (32\alpha |G^3(t) - G^3(s)| + 4\beta |G(t) - G(s)|) \|x\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
& + \left(16\alpha |G^4(t) - G^4(s)| + 4\beta |G^2(t) - G^2(s)| \right. \\
& \left. + 2|\gamma| |G(t) - G(s)|\right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq & 8\alpha |G(t) - G(s)| \left(\|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\
& + 48\alpha |G(t) - G(s)| \max_{t \in [0, T]} |G(t)| \left(\|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\
& + (32\alpha + 4\beta) \max(|G^3(t) - G^3(s)|, |G(t) - G(s)|) \\
& (\|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}) \\
& + \left(64\alpha \max_{t \in [0, T]} |G(t)|^3 + 8\beta \max_{t \in [0, T]} |G(t)| + 2|\gamma|\right) |G(t) - G(s)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq & \left(76\alpha + 8\beta + 2|\gamma| + (136\alpha + 8\beta) \max_{t \in [0, T]} (|G(t)|, |G^3(t)|)\right) \\
& \max(|G^3(t) - G^3(s)|, |G(t) - G(s)|) \|\psi\|_{D(A)} \\
< & \varepsilon \|\psi\|_{D(A)},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|F(t) - F(s)\|_{B(D(A), L^2(\mathbb{R}))} = \sup_{\|\psi\|_{D(A)} \leq 1} \|(F(t) - F(s))\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon. \square$$

Nun ist der Operator $\exp(i[h(t) \cdot x - k(t)])$ offensichtlich für jedes fixe $t \in \mathbb{R}$ unitär in $L^2(\mathbb{R})$. Außerdem ist für ein beliebiges Element $f \in D(A)$, wegen

$$\Delta (e^{i[h(t)x - k(t)]} f) = e^{i[h(t)x - k(t)]} (-h^2(t)f + 2ih(t)\nabla f + \Delta f),$$

auch $e^{i[h(t)x - k(t)]} f$ ein Element von $D(A)$:

$$\begin{aligned}
& \|e^{i[h(t)x - k(t)]} f\|_{D(A)} \\
&= \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|-h^2(t)f + 2ih(t)\nabla f + \Delta f\|_{L^2}^2 + \|x^4 f\|_{L^2}^2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun das folgende Lemma aus der Arbeit [21] von E. Cancès und C. LeBris:

Lemma 6.2. *Sei $\phi \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ und $a, b, f, g \in C([0, T], \mathbb{R})$. Definieren wir*

$$\zeta(t, x) = f(t)e^{i[a(t)+b(t)x]}\phi(t, x + g(t)).$$

Dann ist $\zeta \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$.

Beweis. vgl. Lemma 13 in [21].

Mit Formel (6.7), Lemma 6.2, Proposition 6.1 sowie der soeben nachgewiesenen Invarianzeigenschaft des Operators $e^{i[h(t)x-k(t)]}$ folgt unter der Voraussetzung $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ die Existenz einer eindeutigen Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$ des bilinearen Anfangswertproblems (5.11), (5.12). Man hat für diese überdies, aufgrund der Unitarität des Operators $e^{i[h(t)x-k(t)]}$ in $L^2(\mathbb{R})$ und derjenigen des Propagators aus Proposition 6.1, die Massenerhaltungseigenschaft

$$\begin{aligned} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|e^{i[h(t) \cdot -k(t)]} \chi(t, \cdot - 2G(t))\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\chi(t, \cdot - 2G(t))\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\chi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\chi(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\psi(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ für alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Gilt für die Kontrollfunktion sogar $u \in C([0, T], \mathbb{R})$, so gilt für die Ableitung von ψ gemäß Formel (6.7)

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = e^{i[h(t)x-k(t)]} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\chi(t, x - 2G(t))) + (iu(t)x - h^2(t))\chi(t, x - 2G(t)) \right),$$

d.h. $\frac{\partial}{\partial t} \psi$ ist nach Proposition 6.1 und Lemma 6.2 aus $C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$, und ψ daher eine klassische Lösung mit

$$\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R})).$$

Wir haben damit die Voraussetzungen für Proposition 5.7 an die Kontrollfunktion noch abschwächen können.

Insgesamt haben wir gezeigt:

Theorem 6.3. *Es seien $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$. Der Anfangswert ψ_0 sei aus $D(A)$ gewählt. Dann hat das Anfangswertproblem (5.11), (5.12) eine eindeutige (milde) Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$, für die gilt:*

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (6.12)$$

Ist $u \in C([0, T], \mathbb{R})$, so ist diese Lösung klassisch und erfüllt $\psi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$.

6.2 Linearisierte Systeme

Auch die um die Eigenzustandstrajektorien $(\psi_l, u \equiv 0)$ ($l \in \mathbb{N}$) linearisierten Systeme

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x) \Psi - w(t) x \psi_l \quad , (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \quad (6.13)$$

$$\Psi(0) = \Psi_0 \in D(A), \quad (6.14)$$

die wir in Kapitel 11 untersuchen werden, haben für Kontrollfunktionen $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ milde Lösungen $\Psi \in C([0, T], D(A))$:

Theorem 6.4. *Es seien $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ beliebig, $T > 0, \psi_0 \in D(A)$ und $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$. Dann existiert eine eindeutige milde Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$ von (6.13), (6.14), d.h. für alle $t \in [0, T]$ gilt in $D(A)$*

$$\Psi(t) = e^{-itA}\Psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A} (w(s)x\psi_1(s)) ds. \quad (6.15)$$

Beweis. Gemäß Proposition 5.7 (und der anschließenden Bemerkung) existiert für $t \in [0, T]$ der Propagator e^{-itA} für die zu (6.13) gehörige homogene Gleichung. Für Elemente $\varphi \in D(A)$ gilt

$$\|e^{-itA}\varphi\|_{D(A)} = \sqrt{\|e^{-itA}\varphi\|_{L^2}^2 + \|\Delta(e^{-itA}\varphi)\|_{L^2}^2 + \|x^4(e^{-itA}\varphi)\|_{L^2}^2}$$

und mit Hilfe der Ungleichung

$$\|\Delta\psi\|_{L^2}^2 + \alpha^2\|x^4\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|A\psi\|_{L^2}^2 + d_0\|\psi\|_{L^2}^2 \quad (d_0 > 0),$$

die wir im Beweis zu Proposition 8.4 herleiten werden, und der Unitarität des Operators e^{-itA} in $L^2(\mathbb{R})$, folgt

$$\|e^{-itA}\varphi\|_{D(A)} \leq \sqrt{\left(1 + d_0 + \frac{d_0}{\alpha^2}\right) \|\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{2\alpha^2 + 2}{\alpha^2} \|A(e^{-itA}\varphi)\|_{L^2}^2}.$$

Nun ist gemäß der Parsevalschen Gleichung (vgl. **A.6**)

$$\begin{aligned} \|A(e^{-itA}\varphi)\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle A(e^{-itA}\varphi), \varphi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi, \varphi_k \rangle|^2 \lambda_k^2 \underbrace{|e^{-it\lambda_k}|^2}_{=1} \\ &= \|A\varphi\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

und dank (5.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\|e^{-itA}\varphi\|_{D(A)} \\ &\leq \sqrt{\left(1 + d_0 + \frac{d_0}{\alpha^2}\right) \|\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{2\alpha^2 + 2}{\alpha^2} \left(1 + \alpha + \frac{3\beta}{2} + 2|\gamma|\right)^2 \|\varphi\|_{D(A)}^2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

d.h. der Operator e^{-itA} bildet Elemente aus $D(A)$ wieder in den Raum $D(A)$ ab.

Aufgrund der Zugehörigkeit der Eigenfunktionen $\varphi_k (k \in \mathbb{N})$ des Operators A zum Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3} \subset D(A)$ (vgl. Kapitel 8) und der Abgeschlossenheit der Multiplikation mit x in diesem Raum (vgl. Lemma 1.10), gehört

mit $\psi_l(s) = e^{-i\lambda_l s} \varphi_l \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3} \subset D(A)$ auch der Term $x\psi_l(s)$ zu $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3} \subset D(A)$. Es ist daher $f(s) := w(s)x\psi_l(s) \in L^1(0, T; D(A))$. Gemäß §4.2 in [75] hat das Problem (6.13), (6.14) daher die eindeutige milde Lösung (6.15). \square

Bemerkung. Im Verlauf der Arbeit benötigen wir noch die Existenz milder Lösungen in gewichteten Lebesgue-Räumen, welche Teilräume abstrakter Gevrey-Räume sind. Zugunsten einer besseren Lesbarkeit werden wir diese Eigenschaft allerdings erst in Kapitel 11 nachweisen.

Teil III

Spektraleigenschaften

Kapitel 7

Das Spektrum des Hamilton-Operators

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Spektrum des Schrödingeroperators

$$A = A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}), \quad (7.1)$$

definiert auf $D(A) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4\psi \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Bei $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ handelt es sich um den Hamilton-Operator eines Teilchens in einem anharmonischen quartischen (zeitunabhängigen) Potential.

Ist $\beta = \gamma = 0$, so spricht man von einem *rein quartischen Oszillator*, andernfalls allgemeiner von einem *anharmonischen (quartischen) Oszillator*.

In § 7.1 zeigen wir zunächst, dass der Operator $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ für positive Werte α und nichtnegative Werte β ein rein diskretes, reelles, nicht entartetes Spektrum besitzt, welches für betragsmäßig kleine Werte γ lediglich aus positiven Eigenwerten λ_k ($k \in \mathbb{N}$) besteht. In § 7.2 untersuchen wir das asymptotische Verhalten dieser Eigenwerte: Wir beginnen in § 7.2.1 mit dem rein quartischen Fall ($\beta = \gamma = 0$), um die erhaltenen Ergebnisse in § 7.2.2 auf den allgemeinen Fall $\beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ zu erweitern. Schließlich zeigen wir in § 7.3 wie sich die spektralen Lücken, d.h. die Abstände $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten, für große Werte $k \in \mathbb{N}$ entwickeln.

7.1 Diskretheit, Einfachheit und Positivität

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, gilt das folgende

Lemma 7.1. *Sei $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von unten beschränkt und es gelte $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Dann ist $A = -\Delta + V$, definiert als eine Summe quadratischer Formen, ein Operator mit kompakter Resolvente. Insbesondere hat A ein rein diskretes Spektrum und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.*

Beweis. vgl. Theorem XIII.67 in [78].

Die für $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ konvexe Potentialfunktion $V(x) := \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ist offensichtlich lokal integrierbar sowie von unten beschränkt, und es gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Entsprechend folgt für den Operator $A = A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$:

Lemma 7.2. *Das Spektrum des Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ ist rein diskret und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.*

Lemma 7.3. *Die Eigenwerte $\lambda_k = \lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A = A(\alpha, \beta, -\gamma)$ sind reell und durch das Minimum der Potentialfunktion $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) auf $(-\infty, \infty)$ nach unten beschränkt. Insbesondere sind sie im Falle $\gamma = 0$ allesamt positiv.*

Beweis. Aufgrund der Reellwertigkeit des Potentials $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$, ist der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ symmetrisch in $L^2(\mathbb{R})$.

Sei λ_k ($k \in \mathbb{N}$) nun ein beliebiger Eigenwert von A und φ_k eine zugehörige Eigenfunktion. Man hat dann

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \langle \lambda_k \varphi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle A\varphi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle \varphi_k, A\varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle \varphi_k, \lambda_k \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \bar{\lambda}_k \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \tag{7.2}$$

d.h. λ_k ist reell.

Sei $M := \min_{x \in (-\infty, \infty)} V(x)$ das globale Minimum der konvexen Potentialfunktion $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$). Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \langle A\varphi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle -\Delta\varphi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle V(x)\varphi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} V(x)|\varphi_k(x)|^2 dx \\ &\geq \|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + M \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

und aufgrund der Normierung der Eigenfunktionen φ_k ist

$$\lambda_k \geq \|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + M. \tag{7.3}$$

Da $\|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})} > 0$ ist, folgt $\lambda_k > M$. Ist $\gamma = 0$, so ist $M = 0$ und λ_k entsprechend positiv. \square

Bemerkung 7.4. *Falls $|\gamma| \leq 8\alpha$ ist, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x \geq -|\gamma|^1.$$

¹vgl. Ungleichung (7.21) mit $d = |\gamma|$

Für die Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) von $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ gilt in diesem Fall gemäß (7.3):

$$\lambda_k \geq \|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - |\gamma|. \quad (7.4)$$

Für betragslich sehr kleine Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte $\lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$), wegen $\|\nabla\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$, offenbar ebenfalls alle positiv. Sie unterscheiden sich nur unwesentlich von den Eigenwerten $\lambda_k(\alpha, \beta, 0)$.

Beispielhaft zeigt die folgende Tabelle² einige Eigenwerte $\lambda_k(1, 1, \gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$) für $\gamma \in \{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}\}$:

k	$\lambda_k(0)$	$\lambda_k(0.1)$	$\lambda_k(0.5)$	$ \lambda_k(0) - \lambda_k(0.1) $	$ \lambda_k(0) - \lambda_k(0.5) $
1	1.3924	1.3914	1.3689	9.3795e-004	0.0234079
2	4.6488	4.6485	4.6413	2.9892e-004	0.0075058
3	8.6550	8.6548	8.6493	2.2926e-004	0.0057346
4	13.1568	13.1566	13.1523	1.8164e-004	0.0045427
5	18.0576	18.0574	18.0537	1.5271e-004	0.0038186
6	23.2974	23.2973	23.2941	1.3285e-004	0.0033218
7	28.8353	28.8352	28.8324	1.1828e-004	0.0029574
8	34.6408	34.6407	34.6382	1.0708e-004	0.0026773
9	40.6904	40.6903	40.6879	9.8163e-005	0.0024542
10	46.9650	46.9649	46.9627	9.0868e-005	0.0022718
11	53.4491	53.4490	53.4470	8.4775e-005	0.0021195
12	60.1295	60.1294	60.1275	7.9597e-005	0.0019900
13	66.9950	66.9950	66.9932	7.5134e-005	0.0018784
14	74.0359	74.0358	74.0341	7.1241e-005	0.0017811
15	81.2435	81.2434	81.2418	6.7810e-005	0.0016953
16	88.6103	88.6103	88.6087	6.4760e-005	0.0016190
17	96.1296	96.1296	96.1281	6.2028e-005	0.0015507
18	103.7953	103.7952	103.7938	5.9564e-005	0.0014891
19	111.6018	111.6018	111.6004	5.7329e-005	0.0014332
20	119.5442	119.5441	119.5428	5.5290e-005	0.0013823
21	127.6178	127.6177	127.6164	5.3422e-005	0.0013356
22	135.8184	135.8184	135.8171	5.1703e-005	0.0012926
23	144.1422	144.1421	144.1409	5.0114e-005	0.0012529
24	152.5855	152.5855	152.5843	4.8642e-005	0.0012161
25	161.1450	161.1449	161.1438	4.7272e-005	0.0011818
50	406.20	406.20	406.20	2.9255e-005	7.3138e-004
100	1021.9	1021.9	1021.9	1.8234e-005	4.5584e-004
200	2570.2	2570.2	2570.2	1.1413e-005	2.8532e-004
				$\leq \frac{0.1^2}{8} = 0.001250$	$\leq \frac{0.5^2}{8} = 0.031250$

Tabelle 7.1: Eigenwerte $\lambda_k(\gamma)$ von $-\frac{d^2}{dx^2} + x^4 + x^2 - \gamma x$ (für $\gamma = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$)

²Die Werte wurden in GNU Octave 3.8.0 mittels des Codes in Anhang B.1 ermittelt

Im Fall eines harmonischen Potentials (wenn $\alpha = 0$), lässt sich zeigen³:

$$|\lambda_k(0, \beta, -\gamma) - \lambda_k(0, \beta, 0)| = \frac{\gamma^2}{4\beta} \quad (\forall k \in \mathbb{N}). \quad (7.5)$$

Wir vermuten, dass die Differenzen $|\lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma) - \lambda_k(\alpha, \beta, 0)|$ für $\alpha > 0$, wie im harmonischen Fall, durch eine von α, β, γ abhängige, aber von k unabhängige Konstante, beschränkt sind. Wegen

$$\alpha x^4 + \beta x^2 \geq (\alpha + \beta)x^2 - \frac{\alpha}{4} \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

sollte die Auswirkung des Terms $-\gamma x$ auf den Operator $A(\alpha, \beta, 0)$ und seine Eigenwerte maximal so groß sein, wie seine Auswirkung auf $A(0, \alpha + \beta, 0) - \frac{\alpha}{4}$. Dementsprechend gehen wir davon aus, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma) - \lambda_k(\alpha, \beta, 0)| \leq \frac{\gamma^2}{4(\alpha + \beta)}.$$

Lemma 7.5. Sei (a, b) ein endliches oder unendliches Intervall und $V : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Potentialfunktion. Dann sind die Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) der auf (a, b) definierten Gleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi_k(x) + V(x)\varphi_k(x) = \lambda_k\varphi_k(x), \quad (7.6)$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi_k(x) \rightarrow 0 \quad f. x \rightarrow a, \quad \varphi_k(x) \rightarrow 0 \quad f. x \rightarrow b,$$

nicht entartet (d.h. sie sind alle einfach).

Beweis. Seien λ_m, λ_n zwei Eigenwerte von (7.6) mit zugehörigen Eigenfunktionen φ_m bzw. φ_n , d.h.

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_n(x) + (\lambda_n - V(x))\varphi_n(x) = 0, \quad (7.7)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_m(x) + (\lambda_m - V(x))\varphi_m(x) = 0. \quad (7.8)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (7.7) mit $\varphi_m(x)$ und die Gleichung (7.8) mit $\varphi_n(x)$, ziehen die resultierenden Gleichungen voneinander ab, und erhalten:

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\varphi_m(x) - \frac{d^2\varphi_m(x)}{dx^2}\varphi_n(x) = (\lambda_m - \lambda_n)\varphi_m(x)\varphi_n(x),$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\varphi_m(x) - \frac{d\varphi_m(x)}{dx}\varphi_n(x) \right) = (\lambda_m - \lambda_n)\varphi_m(x)\varphi_n(x).$$

³siehe Anhang A.6

Angenommen, es handle sich bei φ_m und φ_n um Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert $\lambda_m = \lambda_n =: \lambda$. Dann folgt

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\varphi_m(x) - \frac{d\varphi_m(x)}{dx}\varphi_n(x) = C,$$

mit einer Konstanten C , und da sowohl $\varphi_m(x) \rightarrow 0$ (für $x \rightarrow a$ und für $x \rightarrow b$), als auch $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ (für $x \rightarrow a$ und für $x \rightarrow b$), ist $C = 0$.

Die Wronski-Determinante

$$W(\varphi_m, \varphi_n) := \det \begin{pmatrix} \varphi_m & \varphi_n \\ \varphi'_m & \varphi'_n \end{pmatrix}$$

der Lösungen φ_m, φ_n der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + (\lambda - V(x))\varphi(x) = 0$$

verschwindet also, d.h. die beiden Lösungen φ_m, φ_n sind linear abhängig: Es existiert eine Konstante C^* , so dass

$$\varphi_n(x) = C^* \varphi_m(x).$$

Der Eigenwert λ ist folglich nicht entartet. \square

7.2 Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte

Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten der Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$). Wir möchten also wissen, wie sich die Eigenwerte λ_k für große Werte $k \in \mathbb{N}$ verhalten.

Zunächst bestimmen wir in § 7.2.1 anhand einer Formel von E. C. Titchmarsh das asymptotische Verhalten der Eigenwerte des rein quartischen Oszillators (wenn $\beta = \gamma = 0$). In § 7.2.2 lassen wir beliebige Werte $\beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ zu, setzen die Eigenwerte des Anharmonischen Oszillators in diesem allgemeinen Fall in Relation zu Eigenwerten rein quartischer Oszillatoren und bestimmen schließlich, mit Hilfe der zuvor gewonnenen Formel für die Eigenwerte rein quartischer Oszillatoren, das asymptotische Verhalten der Eigenwerte im allgemeinen anharmonischen Fall.

7.2.1 Der Fall $\beta = \gamma = 0$

Lemma 7.6 (Titchmarsh). *Sei $V(x)$ eine auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte konvexe Funktion mit $V(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Dann erfüllen die Eigenwerte $\lambda = \lambda_k$ ($k \in \mathbb{N}$) der Differentialgleichung*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \tag{7.9}$$

die folgende Identität:

$$\frac{1}{\pi} \int_{X'_k}^{X_k} (\lambda_k - V(x))^{1/2} dx = k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right), \quad (7.10)$$

wobei X_k und X'_k die beiden reellen Lösungen von $V(x) = \lambda_k$ sind.

Beweis. vgl. (7.7.4) in [91].

Wir berechnen nun mittels Formel (7.10) die Eigenwerte des rein quartischen Oszillators mit dem Potential $V(x) = \alpha x^4$ ($\alpha > 0$).

Proposition 7.7. *Für die Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Hamilton-Operators $A(\alpha, 0, 0) := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4$ des (rein) quartischen Oszillators gilt*

$$\lambda_k = \frac{\alpha^{1/3} 3^{4/3} 4^{1/3} \pi^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{8/3}} \left(k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{4/3}. \quad (7.11)$$

Beweis.

Im Falle des Potentials $V(x) = \alpha x^4$ berechnet sich das Integral auf der linken Seite von (7.10) zu

$$\begin{aligned} \int_{-(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}}^{(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}} \sqrt{\lambda_k - \alpha x^4} dx &= 2 \int_0^{(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}} \sqrt{\lambda_k - \alpha x^4} dx \\ &= 2 \int_0^{(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}} \sqrt{\lambda_k \left(1 - \frac{\alpha x^4}{\lambda_k}\right)} dx \\ &= 2\sqrt{\lambda_k} \int_0^1 \sqrt{1-t} \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right)^{1/4} t^{-3/4} dt, \end{aligned}$$

wobei wir $t := \frac{\alpha x^4}{\lambda_k}$ substituiert haben. Unter Verwendung der Identitäten aus

§ 1.3 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int_{-(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}}^{(\frac{\lambda_k}{\alpha})^{1/4}} \sqrt{\lambda_k - \alpha x^4} dx &= \frac{1}{2} \lambda_k^{3/4} \alpha^{-1/4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\lambda_k^{3/4}}{2 \alpha^{1/4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \\
&= \frac{\lambda_k^{3/4}}{2 \alpha^{1/4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{\frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{\lambda_k^{3/4} \sqrt{\pi}}{3 \alpha^{1/4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{\lambda_k^{3/4} \sqrt{\pi}}{3 \alpha^{1/4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \sin \frac{\pi}{4}}{\pi} \\
&= \frac{\lambda_k^{3/4}}{3 \sqrt{2} \sqrt{\pi} \alpha^{1/4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2. \tag{7.12}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in Titchmarsh's Formel (7.10) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda_k^{3/4}}{3 \sqrt{2} \pi^{3/2} \alpha^{1/4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right),$$

und daraus

$$\lambda_k = \frac{\alpha^{1/3} 3^{4/3} 4^{1/3} \pi^2}{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^{8/3}} \left(k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{4/3}. \square$$

7.2.2 Der allgemeine Fall

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall des Hamilton-Operators für den Anharmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) und zeigen, dass sich dessen Eigenwerte durch diejenigen von bestimmten rein quartischen Oszillatoren nach oben und nach unten abschätzen lassen. Entsprechend können wir auch das asymptotische Verhalten der Eigenwerte im allgemeinen Fall mittels der soeben nachgewiesenen Proposition 7.7 über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte rein quartischer Oszillatoren ableiten.

Wir nutzen das folgende

Lemma 7.8 (Titchmarsh). *Es seien die beiden folgenden Gleichungen gegeben:*

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + (\lambda - q(x)) \psi(x) = 0, \tag{7.13}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + (\mu - Q(x)) \varphi(x) = 0, \tag{7.14}$$

wobei $q(x)$ nach unten beschränkt sei und $Q(x) \geq q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Spektren seien jeweils diskret mit zugehörigen quadratintegrierbaren Eigenfunktionen und die Eigenwerte seien jeweils in aufsteigender Reihenfolge geordnet, d.h. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ bzw. $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$. Dann gilt

$$\lambda_k \leq \mu_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7.15)$$

Beweis. vgl. 14.4. und 14.8. in [93].

Proposition 7.9. Für die Eigenwerte $\lambda_k = \lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Hamilton-Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) des Anharmonischen Oszillators gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\lambda_k \left(\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}, 0, 0 \right) - d \leq \lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma) \leq \lambda_k \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma^4}{8d^3}, 0, 0 \right) + \frac{\beta}{4} + d, \quad (7.16)$$

mit einer beliebigen Konstanten $d > \frac{|\gamma|^{4/3}}{2\alpha^{1/3}}$.

Beweis. Sei $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ mit $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$. Dann hat man für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha x^4 - |\gamma x| \leq V(x) \leq \alpha x^4 + \beta x^2 + |\gamma x|. \quad (7.17)$$

Für eine beliebige Zahl $y \in \mathbb{R}$ und zwei beliebige positive Konstanten c_1, c_2 gilt die Ungleichung

$$c_1 y \leq \frac{c_1^2 y^2}{2c_2^2} + \frac{c_2^2}{2}. \quad (7.18)$$

Man erhält hiermit für alle $x \in \mathbb{R}$ und beliebige positive Konstanten a, b, c :

$$|\gamma x| \leq \frac{\gamma^2}{2a^2} x^2 + \frac{a^2}{2} \leq \frac{\gamma^4}{8a^4 b^2} x^4 + \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (7.19)$$

sowie

$$\beta x^2 \leq \frac{\beta^2}{2c^2} x^4 + \frac{c^2}{2}. \quad (7.20)$$

Wir setzen nun $a^2 = b^2 = d$ und $c = \sqrt{\beta/2}$, und erhalten aus Ungleichung (7.17)

$$\left(\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3} \right) x^4 - d \leq V(x) \leq \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma^4}{8d^3} \right) x^4 + \frac{\beta}{4} + d. \quad (7.21)$$

Wählen wir

$$d > \frac{|\gamma|^{4/3}}{2\alpha^{1/3}},$$

so ist

$$-d \leq \left(\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3} \right) x^4 - d =: q(x),$$

und wir erhalten für diese Werte d mittels Lemma 7.8 die Ungleichung (7.16). \square

Proposition 7.10. Für die Eigenwerte $\lambda_k = \lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$), existiert eine positive Konstante $C(\alpha, \gamma)$, so dass für große $k \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\lambda_k \geq C(\alpha, \gamma) k^{4/3}. \quad (7.22)$$

Beweis. Offenbar existiert für den Term $T(k) := \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ ($k \in \mathbb{N}$) eine Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < T(k) < 1$ ($\forall k \geq k_0$) und folglich $k + T(k) > k$ ($\forall k \geq k_0$). Dementsprechend folgt aus Proposition 7.9, unter Verwendung der Formel (7.11), für alle $k \geq k_0$ und $d > \frac{|\gamma|^{4/3}}{2\alpha^{1/3}}$:

$$\lambda_k \geq \left(\frac{(\alpha - \gamma^4/8d^3)^{1/3} 3^{4/3} 4^{1/3} \pi^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{8/3}} - \frac{d}{k^{4/3}} \right) k^{4/3}. \quad (7.23)$$

Wir wählen nun $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 > \max\left(k_0, \frac{d^{3/4}(\Gamma(1/4))^2}{3\sqrt{2}\pi^3(\alpha - \gamma^4/8d^3)^{1/4}}\right)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_1$:

$$\lambda_k \geq \underbrace{\left(\frac{(\alpha - \gamma^4/8d^3)^{1/3} 3^{4/3} 4^{1/3} \pi^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{8/3}} - \frac{d}{k_1^{4/3}} \right)}_{=: C(\alpha, \gamma)} k^{4/3}, \quad (7.24)$$

wobei $C(\alpha, \gamma) > 0$. \square

7.3 Spektrale Lücken

Wir nutzen nun die Ergebnisse bezüglich des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte des Hamilton-Operators des Anharmonischen Oszillators, um das asymptotische Verhalten der spektralen Lücken, d.h. der Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Energie-Niveaus (Eigenwerte) des Anharmonischen Oszillators, zu bestimmen.

Wir zeigen zunächst, dass allgemein bei zweimal stetig-differenzierbaren Potentialfunktionen $V(x)$ mit $V(x) \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$, die außerhalb eines Intervalles $(-R, R)$ ($R > 0$) gewisse weitere Bedingungen erfüllen, der Abstand zwischen zwei benachbarten Eigenwerten $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ für $k \rightarrow \infty$ mit λ_k wächst.

Lemma 7.11. Sei $V \in C^2(\mathbb{R})$ ein reellwertiges Potential mit $V(x) \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Außerdem existiere eine Konstante $R > 0$, so dass $V(x)$ für alle $|x| \geq R$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.

$$V''(x) > 0 \quad \text{und} \quad xV'(x) \geq 2cV(x) > 0 \quad \text{für ein } c > 1. \quad (7.25)$$

2. Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_1|x|^{2n} \leq V(x) \leq c_2|x|^{2n} \quad (0 < c_1 \leq c_2 < \infty). \quad (7.26)$$

Dann existieren von k abhängige positive Konstanten C_1, C_2 , so dass benachbarte Eigenwerte λ_k, λ_{k+1} ($k \in \mathbb{N}$) der Gleichung $-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda \varphi(x)$ für große k die folgende Ungleichung erfüllen:

$$C_1 \lambda_k^{1/2-1/2n} \leq |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \leq C_2 \lambda_k^{1/2-1/2n}. \quad (7.27)$$

Der Beweis erfolgt in Analogie zum Beweis von K. Yajimas Lemma 3.3. in [101]:

Beweis. Da für betragslich große x -Werte einerseits $V''(x) > 0$ gilt, und andererseits die Ungleichung (7.26) Gültigkeit hat, wissen wir, dass die Gleichung $V(x) = \lambda_k$ für große Werte λ_k zwei reelle Wurzeln $X'_k < 0 < X_k$ hat. Vergleicht man diese mit denjenigen der Gleichung $V(x) = \lambda_{k+1}$, wobei λ_{k+1} der nächstgrößere Eigenwert sei, dann gilt natürlich

$$X_k < X_{k+1} \quad \text{sowie} \quad X'_k > X'_{k+1}.$$

Außerdem folgt aus (7.26) für $X_k - X'_k = |X_k| + |X'_k|$:

$$2 c_2^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n} \leq X_k - X'_k \leq 2 c_1^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n}. \quad (7.28)$$

Wir verwenden nun die asymptotische Formel (7.10) von E.C. Titchmarsh:

$$\frac{1}{\pi} \int_{X'_k}^{X_k} (\lambda_k - V(x))^{1/2} dx = k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right). \quad (7.29)$$

Indem wir in (7.29) k durch $k+1$ ersetzen, und von der so erhaltenen Gleichung die Gleichung (7.29) subtrahieren, erhalten wir

$$\underbrace{\left[\int_{X'_{k+1}}^{X_{k+1}} (\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} dx - \int_{X'_k}^{X_k} (\lambda_k - V(x))^{1/2} dx \right]}_{I:=} = \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right). \quad (7.30)$$

Wir schreiben die linke Seite um und erhalten

$$\begin{aligned} I &= \int_{X'_k}^{X_k} ((\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} - (\lambda_k - V(x))^{1/2}) dx \\ &\quad + \int_{X'_{k+1}}^{X'_k} (\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} dx + \int_{X_k}^{X_{k+1}} (\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} dx \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Für große Werte $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2, 3$ gilt dann: $0 \leq I_i \leq 2\pi$.

Die auf \mathbb{R} zweimal stetig-differenzierbare Potentialfunktion $V(x)$ ist, aufgrund der Eigenschaft $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, von unten beschränkt durch eine Konstante $d \in \mathbb{R}$.

Man hat daher

$$\begin{aligned} 2\pi \geq I_1 &= \int_{X'_k}^{X_k} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{(\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} + (\lambda_k - V(x))^{1/2}} dx \\ &\geq |X_k - X'_k| \frac{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{2\sqrt{\lambda_{k+1} - d}}. \end{aligned}$$

Mittels Ungleichung (7.28) ergibt sich daraus

$$0 \leq \lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2\pi c_2^{1/2n} \lambda_k^{-1/2n} \lambda_{k+1}^{1/2} \left(1 - \frac{d}{\lambda_{k+1}}\right)^{1/2}. \quad (7.32)$$

Wir dividieren nun durch λ_{k+1} und sehen, dass für $k \rightarrow \infty$

$$0 \leq 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \leq 2\pi c_2^{1/2n} \lambda_k^{-1/2n} \lambda_{k+1}^{-1/2} \left(1 - \frac{d}{\lambda_{k+1}}\right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 1$.

Es existiert daher eine Konstante $C_2 = C_2(k)$, so dass für große k

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C_2 \lambda_k^{1/2-1/2n}. \quad (7.33)$$

Wir werden nun im folgenden die Differenz $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ nach unten abschätzen. Seien $Y'_k < 0 < Y_k$ die beiden reellen Wurzeln von $V(x) = \lambda_k/2$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} &\leq \int_{X'_k}^{Y'_k} \frac{dx}{2(\lambda_k - V(x))^{1/2}} + \int_{Y'_k}^{Y_k} \frac{dx}{\sqrt{2\lambda_k}} + \int_{Y_k}^{X_k} \frac{dx}{2(\lambda_k - V(x))^{1/2}} \\ &= \int_{X'_k}^{Y'_k} \frac{xV'(x) dx}{2xV'(x)(\lambda_k - V(x))^{1/2}} + \frac{Y_k - Y'_k}{\sqrt{2\lambda_k}} \\ &\quad + \int_{Y_k}^{X_k} \frac{xV'(x) dx}{2xV'(x)(\lambda_k - V(x))^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Für $x \in [Y_k, X_k]$ sowie für $x \in [X'_k, Y'_k]$ ist $\lambda_k \geq V(x) \geq \lambda_k/2$, und wir erhalten für diese x mit (7.25) die Ungleichung $xV'(x) \geq c\lambda_k$ und mit (7.26)

die Ungleichung $|x| \leq c_1^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n}$.
Damit folgt aus (7.34)

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} &\leq \frac{Y_k - Y'_k}{\sqrt{2\lambda_k}} + \frac{c_1^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n}}{c\lambda_k} \left[- \int_{X'_k}^{Y'_k} \frac{V'(x) dx}{2(\lambda_k - V(x))^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{Y_k}^{X_k} \frac{V'(x) dx}{2(\lambda_k - V(x))^{1/2}} \right] \\ &\leq \frac{Y_k - Y'_k}{\sqrt{2\lambda_k}} + \frac{c_1^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n}}{c\lambda_k} \sqrt{2\lambda_k}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Nun ist wegen (7.26)

$$Y_k - Y'_k \leq 2^{\frac{2n-1}{2n}} c_1^{-1/2n} \lambda_k^{1/2n},$$

und damit

$$I_1 \leq \left[2^{\frac{n-1}{2n}} + \frac{\sqrt{2}}{c} \right] c_1^{-1/2n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \lambda_k^{1/2n-1/2}. \quad (7.36)$$

Die Abschätzung der Integrale I_2 und I_3 erfolgt auf ähnliche Art und Weise. Für $x \in [X'_{k+1}, X'_k] \cup [X_k, X_{k+1}]$ gilt wegen (7.25) $xV'(x) \geq 2cV(x) \geq 2cV(X_k) = 2cV(X'_k) = 2c\lambda_k$ und wegen (7.26) $|x| \leq c_1^{-1/2n} \lambda_{k+1}^{1/2n}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{X_k}^{X_{k+1}} (\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} dx \\ &= \int_{X_k}^{X_{k+1}} \frac{(\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} x V'(x)}{x V'(x)} dx \\ &\leq \frac{c_1^{-1/2n} \lambda_{k+1}^{1/2n}}{2c\lambda_k} \int_{X_k}^{X_{k+1}} (\lambda_{k+1} - V(x))^{1/2} V'(x) dx \\ &= \frac{c_1^{-1/2n} \lambda_{k+1}^{1/2n}}{3c\lambda_k} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{3/2} \\ &= \frac{c_1^{-1/2n}}{3c} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - 1 \right)^{1/2} \frac{\lambda_{k+1}^{1/2n}}{\lambda_k^{1/2}} (\lambda_{k+1} - \lambda_k). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Für große k ist dann

$$I_3 \leq K_k \lambda_k^{1/2n-1/2} (\lambda_{k+1} - \lambda_k), \quad (7.38)$$

mit einer Konstanten K_k , die den Faktor $\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - 1\right)^{1/2}$ enthält, und daher für $k \rightarrow \infty$ gegen Null läuft.

Da wir für I_2 eine identische Abschätzung erhalten, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &\leq \left(\left[2^{\frac{n-1}{2n}} + \frac{\sqrt{2}}{c} \right] c_1^{-1/2n} + 2K_k \right) \lambda_k^{1/2n-1/2} (\lambda_{k+1} - \lambda_k), \end{aligned}$$

bzw.

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C_1 \lambda_k^{1/2-1/2n}. \quad (7.39)$$

mit einer von k abhängigen Konstanten $C_1 = C_1(k) := \frac{\pi + \tilde{C}(k)}{\left[2^{\frac{n-1}{2n}} + \frac{\sqrt{2}}{c} \right] c_1^{-1/2n} + 2K_k}$,

wobei $\tilde{C}(k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$. \square

Proposition 7.12. *Seien $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. λ_k ($k \in \mathbb{N}$) seien die Eigenwerte des Hamilton-Operators des Anharmonischen Oszillators $A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$. Dann existiert eine Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ zwei positive Konstanten c und C existieren, dass benachbarte Eigenwerte λ_k, λ_{k+1} der folgenden Ungleichung genügen:*

$$c \lambda_k^{1/4} \leq |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \leq C \lambda_k^{1/4}. \quad (7.40)$$

Beweis. Die Potentialfunktion $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ist offenbar reellwertig, für alle $x \in \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Außerdem ist $V''(x) = 12\alpha x^2 + 2\beta > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > \max\left(\left(\frac{\sqrt{4\alpha + (\beta + \gamma^2)^2 + \beta + \gamma^2}}{2\alpha}\right)^{1/2}, \left(\frac{|\gamma|}{\alpha}\right)^{1/3}\right)$ gilt

$$\begin{aligned} xV'(x) &= 4\alpha x^4 + 2\beta x^2 - \gamma x \\ &= 3V(x) + \alpha x^4 - \beta x^2 + 2\gamma x \\ &\geq 3V(x) + \alpha x^4 - \beta x^2 - 2|\gamma x| \\ &\geq 3V(x) + \alpha x^4 - (\beta + \gamma^2)x^2 - 1 \\ &\geq 3V(x) \geq 3\alpha x^4 - 3|\gamma x| > 0. \end{aligned}$$

Sei $d > 0$ mit $d < \alpha$ beliebig gewählt. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq \max\left(1, \left(\frac{|\gamma|}{d}\right)^{1/3}\right)$

$$(\alpha - d)|x|^4 \leq \alpha|x|^4 - |\gamma x| \leq V(x) \leq (\alpha + \beta + |\gamma|) |x|^4,$$

d.h. (7.26) gilt mit $n = 2$, $c_1 = \alpha - d$, sowie $c_2 = \alpha + \beta + |\gamma|$.

Die Bedingungen (7.25) und (7.26) aus Lemma 7.11 sind also für $n = 2$ und

$$R := \max \left(1, \left(\frac{|\gamma|}{d} \right)^{1/3}, \left(\frac{\sqrt{4\alpha + (\beta + \gamma^2)^2} + \beta + \gamma^2}{2\alpha} \right)^{1/2} \right) \text{ erfüllt.}$$

Mit Lemma 7.11 folgt die Existenz einer Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$ sowie zweier positiver Konstanten $C > c > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt:

$$c \lambda_k^{1/4} \leq |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \leq C \lambda_k^{1/4}. \square$$

Mit Proposition 7.10 erhält man

Korollar 7.13. *Für die Eigenwerte $\lambda_k = \lambda_k(\alpha, \beta, -\gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) existiert eine positive Konstante $\tilde{C}(\alpha, \gamma)$, so dass für große $k \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \geq \tilde{C}(\alpha, \gamma) k^{1/3}. \quad (7.41)$$

Kapitel 8

Die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Eigenfunktionen des Anharmonischen Quartischen Oszillators in $L^2(\mathbb{R})$, d.h. mit den Lösungen $\varphi_k(x)$ der Gleichung

$$A\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), \quad (8.1)$$

für den Operator $A = A(\alpha, \beta, -\gamma) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ und seine Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$). Die Zugehörigkeit zu $L^2(\mathbb{R})$ impliziert für die Funktionen eine Nullrandbedingung:

$$\varphi_k(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit qualitativen Aussagen über die Eigenschaften der Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$). Anschließend gehen wir auf Besonderheiten im Fall $\gamma = 0$ ein, die wie wir später sehen werden, einen entscheidenden Unterschied für Kontrollierbarkeitsfragen darstellen. Wir zeigen, dass die Eigenfunktionen φ_k sowie die Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) analytische Funktionen von γ in der Nähe von Null sind. Wir bestimmen für Eigenfunktionen zu großen Energie-Eigenwerten die Größenordnung in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$, schätzen für alle $k \in \mathbb{N}$ und betraglich kleine Parameterwerte γ die Supremumsnorm der Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ über \mathbb{R} durch die jeweiligen Eigenwerte ab, verallgemeinern ein Resultat von E. C. Titchmarsh aus [91] und nutzen die beiden letztgenannten Ergebnisse für eine Abschätzung des asymptotischen Verhaltens von $\varphi_k(x)$ für betraglich große Werte von x . Im Anschluß erhalten wir ähnliche Resultate zunächst für die erste Ableitung, dann auch für höhere Ableitungen. Die folgenden Abschätzungen in \mathbb{C} sind notwendig, um im letzten Abschnitt zu zeigen, dass die Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$), für betraglich kleine Werte $\gamma \in \mathbb{R}$, allesamt Elemente des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ sind und insbesondere zu dessen Teilraum $\mathcal{S}_{1/3,A} \cap \mathcal{S}^{2/3,B}$ mit $A := e^{-1/3}\alpha^{-1/6}$, $B := e^{-2/3}\alpha^{1/6}$ gehören.

8.1 Qualitative Eigenschaften

Sei $V(x)$ eine stetige und konvexe Funktion auf $(-\infty, \infty)$ mit $\min_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -M$ ($M \geq 0$) und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Für jede positive Zahl λ existieren dann zwei reelle Zahlen X^-, X^+ mit $X^- < X^+$, so dass $V(X^-) = V(X^+) = \lambda$.

Im Falle der stetigen, konvexen Funktion $V_\gamma(x) := \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) ist $X^- < 0 < X^+$. ($V_0(x)$ ist eine gerade Funktion und es gilt sogar $X^- = -X^+$.) Mit der für alle $x \in \mathbb{R}$ und $d > \frac{|\gamma|^{4/3}}{2\alpha^{1/3}}$ geltenden Abschätzung

$$-d \leq \left(\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3} \right) x^4 - d \leq V_\gamma(x), \quad (8.3)$$

erhalten wir

$$\max(|X^-|, |X^+|) \leq \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{1/4} (\lambda + d)^{1/4}. \quad (8.4)$$

Sei $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R})$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_k(x) + (\lambda_k - V_\gamma(x)) \varphi_k(x) = 0, \quad (8.5)$$

für den Eigenwert $\lambda_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$), und $X_k^- < X_k^+$ seien die beiden reellen Nullstellen von $V_\gamma(x) - \lambda_k$. Dann können wir differenzieren zwischen dem Verhalten von $\varphi_k(x)$ auf dem Intervall (X_k^-, X_k^+) und dem Verhalten außerhalb dieses Intervalles:

Auf (X_k^-, X_k^+) hat $\varphi_k(x)$ einen oszillatorischen Charakter, denn $\varphi_k''(x)$ und $\varphi_k(x)$ haben hier entgegengesetzte Vorzeichen, so dass $\varphi_k(x)$ konkav ist, wo es positiv ist, und konvex ist, wo es negativ ist. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen liegt demnach immer nur ein Maximum oder ein Minimum. Die Funktion φ_k hat exakt $k - 1$ reelle Nullstellen, die alle in (X_k^-, X_k^+) liegen¹.

Außerhalb des Intervalles (X_k^-, X_k^+) ist φ_k konvex, wo es positiv ist, und konkav, wo es negativ ist. $\varphi_k(x)$ und $\varphi_k'(x)$ streben für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null, wobei die Funktionen $\varphi_k(x)$ und $\varphi_k'(x)$ für $x < X_k^-$ dasselbe Vorzeichen haben und für $x > X_k^+$ entgegengesetzte Vorzeichen.

¹vgl. § 5.4. in [91]

8.2 Spezielle Eigenschaften im Fall $\gamma = 0$

Ist $\gamma = 0$, so gilt

$$V_0(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 = V_0(-x),$$

d.h. das Potential ist gerade und der Hamilton-Operator $A_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x)$ daher invariant gegenüber einer Spiegelung am Ursprung. In diesem Fall folgt für eine Eigenfunktion φ zum Eigenwert λ aus

$$A_0 \varphi(x) = \lambda \varphi(x)$$

auch

$$A_0 \varphi(-x) = \lambda \varphi(-x).$$

Ebenso sind die gerade Funktion $\varphi(x) + \varphi(-x)$ sowie die ungerade Funktion $\varphi(x) - \varphi(-x)$ offenbar Eigenfunktionen zum Eigenwert λ .

Wir haben in Lemma 7.5 bereits festgestellt, dass die zu Eigenfunktionen aus $L^2(\mathbb{R})$ gehörigen Eigenwerte von Operatoren der Art $A = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ nicht entartet sind. Die vier Funktionen sind daher Vielfache voneinander, d.h. $\varphi(x)$ ist insbesondere ein Vielfaches derjenigen der beiden Funktionen $\varphi(x) + \varphi(-x)$ oder $\varphi(x) - \varphi(-x)$, die nicht identisch Null ist, und daher gerade oder ungerade. Da die k -te Eigenfunktion $\varphi_{k,0}$ des Operators A_0 , wie oben bereits erwähnt, exakt $k - 1$ reelle Nullstellen hat, wissen wir, dass die nach wachsenden Energieeigenwerten $\lambda_{k,0}$ geordneten Eigenfunktionen $\varphi_{k,0}$ ausgehend vom Grundzustand $\varphi_{1,0}$, der gerade ist, abwechselnd ungerade und gerade sind² (s. Abbildung 8.1).

Im Fall $\gamma = 0$ hat man außerdem das folgende

Lemma 8.1 (Eremenko/Gabrielov/Shapiro). *Sei P ein reelles, gerades Polynom vom Grad 4 mit positivem Leitkoeffizienten. Dann haben die Eigenfunktionen φ des Problems*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi + P(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0,$$

unendlich viele nicht-reelle Nullstellen, die alle auf der imaginären Achse liegen.

Beweis. vgl. Theorem 1 in [32].

Diese Eigenschaft impliziert, dass die Eigenfunktionen $\varphi_{k,0}(x)$ ($k \in \mathbb{N}$), anders als beim Harmonischen Oszillator, nicht das Produkt eines Polynomes mit einem Exponentialterm sind.

²vgl. § 3.2.7 in [65]

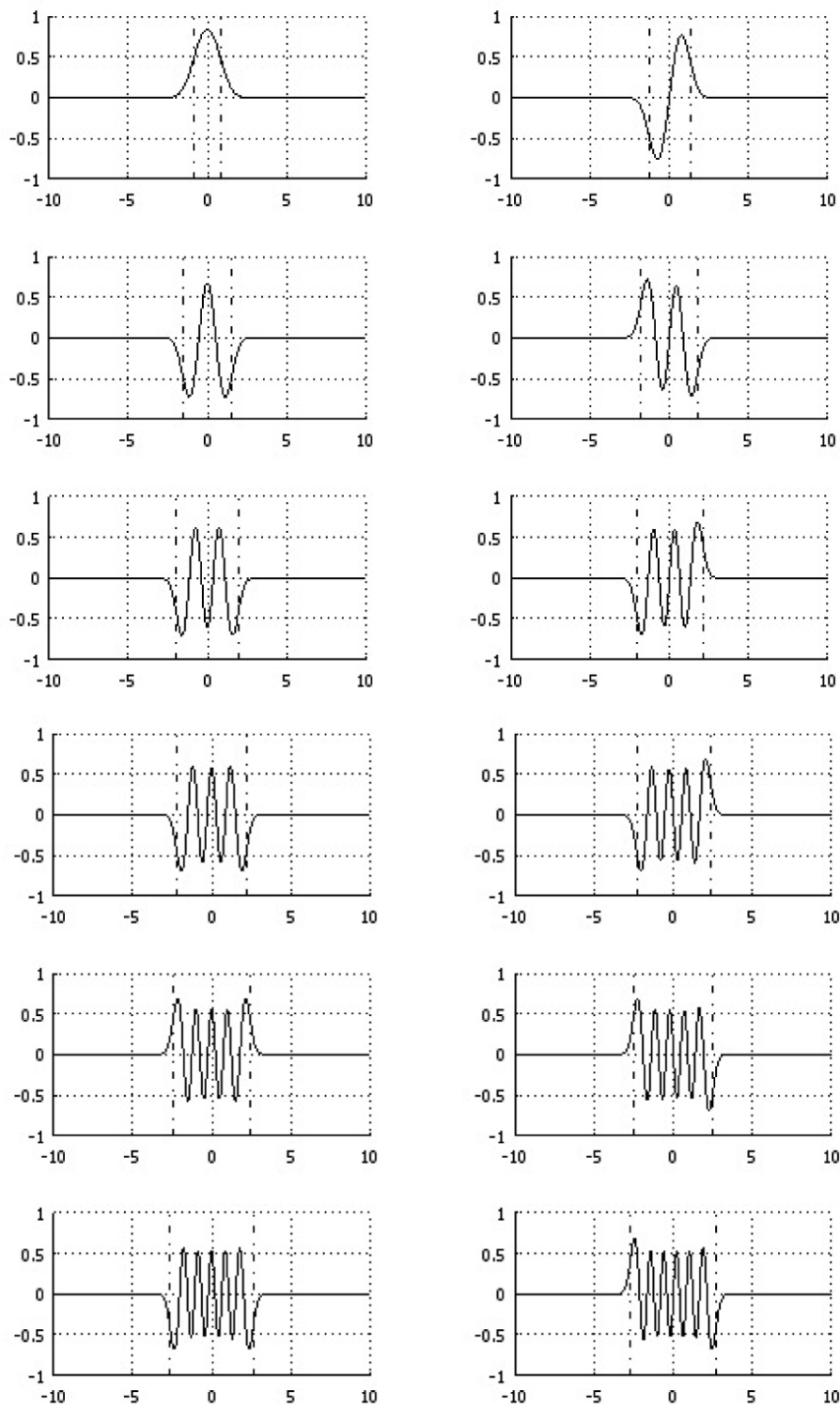


Abbildung 8.1: Die Eigenfunktionen $\varphi_{k,0}$ des Anharmonischen Oszillators für $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$ und $k = 1, \dots, 12$

G. G. Gundersen hat in [42] die folgende Eigenschaft der Eigenfunktionen nachgewiesen:

Lemma 8.2 (Gundersen). *Sei $P(z) = a_{2m}z^{2m} + a_{2m-2}z^{2m-2} + \dots + a_2z^2$ ein Polynom mit $m \in \mathbb{N}$ gerade, $a_i \geq 0 \forall i \in \mathbb{N}$, sowie $a_{2m} > 0$, und $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R})$ eine beliebige Eigenfunktion der Gleichung*

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(z) + (\lambda - P(z))\varphi(z) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Dann lässt sich $g \varphi_k^{(i)}$ für ein beliebiges Polynom $g \not\equiv 0$ (mit $\text{grad}(g) \geq 1$ wenn $i = 0$) nicht als eine endliche Linearkombination der Eigenfunktionen $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ darstellen.

Beweis. vgl. Theorem 6 in [42].

Dies bedeutet, dass im Gegensatz zum Harmonischen Oszillator, wo die Eigenfunktionen der Gleichung

$$x\varphi_k = c_1(k)\varphi_{k+1} + c_2(k)\varphi_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (8.6)$$

mit von k abhängigen Konstanten $c_1(k), c_2(k)$, genügen³, die Eigenfunktionen des Anharmonischen Quartischen Oszillators keine vergleichbare Rekursionsgleichung erfüllen.

Wir werden in Kapitel 11 sehen, dass dieser Unterschied für Kontrollierbarkeitsfragen mittels Kontrollpotentialen der Gestalt $u(t) \cdot \mu(x)$, wobei $\mu(x)$ ein Polynom ist (und $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$), wesentlich ist.

8.3 Analytizität in der Nähe von $\gamma = 0$

Lemma 8.3. *Sei P ein abgeschlossener Operator mit nichtleerer Resolventenmenge. Definiere $P + \gamma Q$ auf $D(P) \cap D(Q)$. Dann ist $P + \gamma Q$ genau dann eine analytische Familie vom Typ (A) in der Nähe von $\gamma = 0$, wenn*

(a) $D(Q) \supset D(P)$,

(b) *Es existieren positive Zahlen a und b , so dass für alle $\psi \in D(P)$*

$$\|Q\psi\| \leq a\|P\psi\| + b\|\psi\|. \quad (8.7)$$

Dies bedeutet, $P + \gamma Q$ ist vom Typ (A) genau dann, wenn Q P -beschränkt ist.

Beweis. vgl. S.16, Lemma, in [78].

Offensichtlich gilt für den Definitionsbereich $D(B)$ des Multiplikationsoperators $B\psi := x\psi$:

$$D(B) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) | x\psi \in L^2(\mathbb{R})\} \supset \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) | x^4\psi \in L^2(\mathbb{R})\} = D(A).$$

Wir zeigen nun die **A-Beschränktheit** des Multiplikationsoperators B :

³vgl. z.B. § 6.1.1 in [58]

Proposition 8.4. *Seien $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ und $A := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$. Dann existiert eine positive Konstante d_0 , so dass für alle $\psi \in D(A)$*

$$\|x\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \|A\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left(1 + \frac{\sqrt{d_0}}{\alpha}\right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Beweis. Sei p der Impulsoperator $p := -i\nabla$, $V_\gamma(x) := \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ und $[P, Q] := PQ - QP$ bezeichne den Kommutator zweier Operatoren P und Q . Dann gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= (p^2 + V_\gamma(x))^2 \\ &= p^4 + V_\gamma(x)^2 + p^2 V_\gamma(x) + V_\gamma(x) p^2 \\ &= p^4 + V_\gamma(x)^2 + [p, [p, V_\gamma(x)]] + 2pV_\gamma(x)p \end{aligned}$$

mit

$$V_\gamma(x)^2 = \alpha^2 x^8 + 2\alpha\beta x^6 - 2\alpha\gamma x^5 + \beta^2 x^4 - 2\beta\gamma x^3 + \gamma^2 x^2$$

und

$$[p, [p, V_\gamma(x)]] = -12\alpha x^2 - 2\beta.$$

Da aufgrund der Konvexität der Potentialfunktion $V_\gamma(x)$ eine Zahl $M \in \mathbb{R}_0^+$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$V_\gamma(x) \geq -M,$$

ist der Operator $p(V_\gamma(x) + M)p$ nichtnegativ, und wenn wir $d_0 > 0$ so wählen, dass

$$V_\gamma(x)^2 + [p, [p, V_\gamma(x)]] - \frac{1}{2}\alpha^2 x^8 - 2M^2 + \frac{1}{2}d_0 \geq 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} &A^2 + \frac{1}{2}d_0 \\ &= \frac{1}{2}(p^4 + \alpha^2 x^8) + \left(V_\gamma(x)^2 + [p, [p, V_\gamma(x)]] - \frac{1}{2}\alpha^2 x^8 - 2M^2 + \frac{1}{2}d_0\right) \\ &\quad + (2p(V_\gamma(x) + M)p - 2Mp^2) + \frac{1}{2}p^4 + 2M^2 \\ &= \frac{1}{2}(p^4 + \alpha^2 x^8) + \left(V_\gamma(x)^2 + [p, [p, V_\gamma(x)]] - \frac{1}{2}\alpha^2 x^8 - 2M^2 + \frac{1}{2}d_0\right) \\ &\quad + 2p(V_\gamma(x) + M)p + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}p^2 - \sqrt{2}M\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(p^4 + \alpha^2 x^8). \end{aligned}$$

Wir nehmen nun die entsprechenden Erwartungswerte und erhalten

$$\|p^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \alpha^2\|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2\|A\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + d_0\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

und damit

$$\|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \|A\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\sqrt{d_0}}{\alpha} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Da laut Lemma 5.1

$$\|x\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|x^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|x^4\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

folgt

$$\|x\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \|A\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left(1 + \frac{\sqrt{d_0}}{\alpha}\right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \square$$

Entsprechend erhalten wir:

Lemma 8.5. *Die Operatoren $A(\alpha, \beta, -\gamma)$, definiert durch*

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta, -\gamma) &: \{ \psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4\psi \in L^2(\mathbb{R}) \} \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ A(\alpha, \beta, -\gamma)\psi &= -\frac{d^2}{dx^2}\psi + \alpha x^4\psi + \beta x^2\psi - \gamma x\psi \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

bilden eine analytische Familie vom Typ (A) in der Nähe von $\gamma = 0$.

Aufgrund der Selbstadjungiertheit der Operatoren $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ (vgl. §5.2), ist die folgende Eigenschaft der Eigenfunktionen und Eigenwerte von $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ eine direkte Konsequenz aus Lemma 8.5 (vgl. VII.§3 in [55]):

Proposition 8.6. *Sei $\gamma_1 > 0$ klein und $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1]$. Dann sind die Eigenfunktionen φ_k sowie die Eigenwerte λ_k der in Lemma 8.5 definierten Operatoren $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ analytische Funktionen von γ .*

Um zwischen den Fällen $\gamma = 0$ und $\gamma \neq 0$ unterscheiden zu können, bezeichnen wir die Eigenwerte λ_k von $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ im folgenden, wann immer es von Vorteil ist, mit $\lambda_{k,\gamma}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen φ_k mit $\varphi_{k,\gamma}$. Für $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ schreiben wir abkürzend A_γ .

Damit hat man

$$\lambda_{k,\gamma} = \lambda_k^{(0)} + \gamma\lambda_k^{(1)} + \gamma^2\lambda_k^{(2)} + \dots \quad (8.8)$$

sowie

$$\varphi_{k,\gamma} = \varphi_k^{(0)} + \gamma\varphi_k^{(1)} + \gamma^2\varphi_k^{(2)} + \dots \quad (8.9)$$

Setzen wir (8.8) und (8.9) in die Gleichung

$$A_\gamma \varphi_{k,\gamma} = \lambda_{k,\gamma} \varphi_{k,\gamma} \quad (8.10)$$

ein, so erhalten wir mit $A_\gamma = A_0 - \gamma x$:

$$(A_0 - \gamma x) \left(\varphi_k^{(0)} + \gamma\varphi_k^{(1)} + \dots \right) = \left(\lambda_k^{(0)} + \gamma\lambda_k^{(1)} + \dots \right) \left(\varphi_k^{(0)} + \gamma\varphi_k^{(1)} + \dots \right).$$

Ein Vergleich der Koeffizienten vor gleichen Potenzen von γ liefert⁴

$$\begin{aligned}
A_0 \varphi_k^{(0)} &= \lambda_k^{(0)} \varphi_k^{(0)} \\
(A_0 - \lambda_k^{(0)}) \varphi_k^{(1)} &= (\lambda_k^{(1)} + x) \varphi_k^{(0)} \\
(A_0 - \lambda_k^{(0)}) \varphi_k^{(2)} &= (\lambda_k^{(1)} + x) \varphi_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} \varphi_k^{(0)} \\
&\vdots \\
(A_0 - \lambda_k^{(0)}) \varphi_k^{(n)} &= (\lambda_k^{(1)} + x) \varphi_k^{(n-1)} + \lambda_k^{(2)} \varphi_k^{(n-2)} + \dots + \lambda_k^{(n)} \varphi_k^{(0)} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Es ist offenbar $\lambda_k^{(0)} = \lambda_{k,0}$ und $\varphi_k^{(0)} = \varphi_{k,0}$.

Wie in [34] wählen wir die Normierungsbedingung

$$\langle \varphi_{k,\gamma}, \varphi_k^{(0)} \rangle = \langle \varphi_{k,\gamma}, \varphi_{k,0} \rangle = 1, \tag{8.12}$$

welche aufgrund der Normiertheit von $\varphi_{k,0}$ ($\|\varphi_{k,0}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$), entsprechend Gleichung (8.9), für die Korrekturen $\varphi_k^{(n)}$ ($n \geq 1$) zur Folge hat, dass diese alle in dem orthogonalen Komplement von $\varphi_{k,0}$ in $L^2(\mathbb{R})$ zu finden sind:

$$\langle \varphi_k^{(n)}, \varphi_{k,0} \rangle = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{8.13}$$

Wir bilden nun für die zweite Gleichung von (8.11) das Skalarprodukt mit der Funktion $\varphi_{l,0}$ und erhalten

$$\langle (A_0 - \lambda_{k,0}) \varphi_k^{(1)}, \varphi_{l,0} \rangle = \langle (\lambda_k^{(1)} + x) \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle,$$

bzw.

$$\langle \varphi_k^{(1)}, A_0 \varphi_{l,0} \rangle - \lambda_{k,0} \langle \varphi_k^{(1)}, \varphi_{l,0} \rangle = \lambda_k^{(1)} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle + \langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle.$$

Dies entspricht

$$(\lambda_{l,0} - \lambda_{k,0}) \langle \varphi_k^{(1)}, \varphi_{l,0} \rangle = \lambda_k^{(1)} \delta_{kl} + \langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle. \tag{8.14}$$

Setzen wir in (8.14) $l = k$, so erhalten wir

$$\lambda_k^{(1)} = - \langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{k,0} \rangle,$$

und aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktionen $\varphi_{k,0}$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\lambda_k^{(1)} = 0. \tag{8.15}$$

Für $l \neq k$ folgt aus (8.14)

$$\langle \varphi_k^{(1)}, \varphi_{l,0} \rangle = \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle}{\lambda_{l,0} - \lambda_{k,0}}. \tag{8.16}$$

⁴vgl. auch §33 in [34]

(Da das Spektrum von A_0 nicht entartet ist, ist die Differenz $\lambda_{l,0} - \lambda_{k,0}$ für $l \neq k$ ungleich Null.)

Aus (8.13), (8.16) und aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktionen $\varphi_{l,0}$ ($l \in \mathbb{N}$) folgt

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)} &= \sum_{l=1}^{\infty} \langle \varphi_k^{(1)}, \varphi_{l,0} \rangle \varphi_{l,0} \\ &= \sum_{l \neq k} \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{l,0} \rangle}{\lambda_{l,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{l,0} \\ &= \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m-1,0} & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m,0} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Wir berechnen nun noch den Korrekturterm $\lambda_k^{(2)}$: Mit der dritten Gleichung von (8.11) und (8.15) folgt

$$\langle A_0 \varphi_k^{(2)}, \varphi_{k,0} \rangle - \lambda_{k,0} \langle \varphi_k^{(2)}, \varphi_{k,0} \rangle = \langle x \varphi_k^{(1)}, \varphi_{k,0} \rangle + \lambda_k^{(2)} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{k,0} \rangle,$$

und wegen (8.13) und $\|\varphi_{k,0}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ ist daher

$$\lambda_k^{(2)} = - \langle x \varphi_k^{(1)}, \varphi_{k,0} \rangle.$$

Die Formel (8.17) liefert nun

$$\lambda_k^{(2)} = \begin{cases} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle|^2}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle|^2}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (8.18)$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt

Lemma 8.7. *Sei $\gamma_1 > 0$ klein und $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1]$. Dann gilt für die Eigenwerte $\lambda_{k,\gamma}$ des Operators A_γ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$:*

$$\lambda_{k,\gamma} = \begin{cases} \lambda_{k,0} - \gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle|^2}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} + o(\gamma^2) \text{ (für } \gamma \rightarrow 0) & \text{f. } k \text{ gerade,} \\ \lambda_{k,0} - \gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle|^2}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} + o(\gamma^2) \text{ (für } \gamma \rightarrow 0) & \text{f. } k \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (8.19)$$

sowie

$$\varphi_{k,\gamma} = \begin{cases} \varphi_{k,0} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m-1,0} + \dots & \text{f. } k \text{ gerade,} \\ \varphi_{k,0} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x \varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m,0} + \dots & \text{f. } k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (8.20)$$

8.4 Die Größenordnung für $k \rightarrow \infty$

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Größenordnung der Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ des Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ für große Werte $k \in \mathbb{N}$.

Wir nutzen hierfür wieder ein Resultat von E. C. Titchmarsh:

Lemma 8.8 (Titchmarsh). *Sei $V(x)$ stetig und konvex in $(-\infty, +\infty)$ mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Dann gilt für die Lösungen $\varphi_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Eigenwertproblems*

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_k(x) + (\lambda_k - V(x)) \varphi_k(x) = 0,$$

unter Nullrandbedingungen, für jedes fixe x und $k \rightarrow \infty$

$$\varphi_k(x) = \mathcal{O}\left((X_k^+)^{-1/2}\right), \quad \varphi_k'(x) = \mathcal{O}\left(\lambda_k^{1/2} (X_k^+)^{-1/2}\right), \quad (8.21)$$

wobei X_k^+ die positive Nullstelle von $V(x) - \lambda_k$ bezeichne.

Beweis. vgl. Theorem 8.4. in [91].

Proposition 8.9. *Es seien $\alpha > 0, \beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann erfüllen die Lösungen $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) des Eigenwertproblems*

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_k(x) + (\lambda_k - (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x)) \varphi_k(x) = 0, \quad (8.22)$$

für jedes fixe $x \in \mathbb{R}$ und $k \rightarrow \infty$

$$\varphi_k(x) = \mathcal{O}(k^{-1/6}). \quad (8.23)$$

Beweis.

Es seien $V_\gamma(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ und $\tilde{V}(x) = \alpha x^4$.

Dann gilt $V_\gamma(x) \sim \tilde{V}(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{V_\gamma(x)}{\tilde{V}(x)} = 1 \quad (\text{asymptotische Gleichheit}).$$

Wir wissen aus Kapitel 7, dass ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ die Eigenwerte λ_k positiv sind. Sei also $k \geq k_0$ und X_k^+ derjenige positive Wert, für den gilt

$$V_\gamma(X_k^+) = \alpha (X_k^+)^4 + \beta (X_k^+)^2 - \gamma X_k^+ = \lambda_k. \quad (8.24)$$

Dann ist für $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k \sim \alpha (X_k^+)^4,$$

und damit

$$X_k^+ \sim \left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right)^{1/4},$$

bzw.

$$(X_k^+)^{-1/2} = \left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right)^{-1/8} (1 + o(1)). \quad (8.25)$$

Die Anwendung von Lemma 8.8 liefert uns somit für $k \rightarrow \infty$

$$\varphi_k(x) = \mathcal{O}\left((X_k^+)^{-1/2}\right) = \mathcal{O}\left(\lambda_k^{-1/8}\right). \quad (8.26)$$

Nun können wir die Eigenwerte λ_k für große $k \in \mathbb{N}$ gemäß (7.24) nach unten abschätzen:

$$\lambda_k \geq C(\alpha, \gamma) k^{4/3}.$$

Dann ist für $k \rightarrow \infty$

$$\varphi_k(x) = \mathcal{O}\left(\lambda_k^{-1/8}\right) = \mathcal{O}\left(k^{-1/6}\right). \square$$

8.5 Abschätzungen der Eigenfunktionen in \mathbb{R}

8.5.1 Abschätzung der Supremumsnorm

Proposition 8.10. *Ist der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) positiv, dann existieren positive Konstanten D_0, D_1 , so dass*

$$\|\varphi_k\|_\infty \leq D_0 \lambda_k^{11/8} \quad \text{und} \quad \|\varphi_k'\|_\infty \leq D_1 \lambda_k^{21/8} \quad (8.27)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei zunächst $k \geq 2$, $x_1 \in (X_k^-, X_k^+)$ eine Nullstelle der Funktion $\varphi_k(x)$ und $x_2 > x_1$ die nächste Extremstelle für φ_k . Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\varphi_k(x_2) > 0$ sei. Wir wählen einen Punkt $\xi \in (x_1, x_2)$ und integrieren die Gleichung (8.5) von ξ bis x_2 :

$$\varphi_k'(\xi) = \int_{\xi}^{x_2} (\lambda_k - V_\gamma(x)) \varphi_k(x) dx.$$

Eine erneute Integration, diesmal von x_1 bis x_2 , liefert

$$\varphi_k(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi}^{x_2} (\lambda_k - V_\gamma(x)) \varphi_k(x) dx d\xi,$$

und da die Potentialfunktion $V_\gamma(x)$ gemäß Ungleichung (8.3) für alle $x \in \mathbb{R}$ und $d > \frac{|\gamma|^{4/3}}{2\alpha^{1/3}}$ durch $-d$ von unten beschränkt ist, folgt mit der Hölderschen Ungleichung sowie der Normiertheit der Eigenfunktionen ($\|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$)

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_2) &\leq (\lambda_k + d) \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi}^{x_2} \varphi_k(x) dx d\xi \\ &\leq (\lambda_k + d) \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{\xi}^{x_2} dx \int_{\xi}^{x_2} \varphi_k^2(x) dx \right\}^{1/2} d\xi \\ &\leq (\lambda_k + d) \frac{2}{3} \{x_2 - x_1\}^{3/2}. \end{aligned}$$

Laut Ungleichung (8.4) hat man

$$|x_1|, |x_2| \leq \max(|X_k^-, |X_k^+|) \leq \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{1/4} (\lambda_k + d)^{1/4}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x)| &\leq \frac{2^{5/2}}{3} \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{3/8} (\lambda_k + d)^{11/8} \\ &\leq \frac{2^{5/2}}{3} \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{3/8} \left(1 + \frac{d}{\lambda_1} \right)^{11/8} \lambda_k^{11/8}. \end{aligned}$$

Für $k = 1$ hat φ_k keine Nullstellen. Wir wählen in diesem Fall $x_1 \in [X_1^-, x_2)$, so dass $\varphi_1(x_1) = \frac{1}{C_1} \varphi_1(x_2)$ mit einer Konstanten $C_1 > 1$. Analog zu den obigen Berechnungen ergibt sich

$$|\varphi_k(x)| \leq \underbrace{\frac{C_1}{C_1 - 1} \frac{2^{5/2}}{3} \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{3/8} \left(1 + \frac{d}{\lambda_1} \right)^{11/8}}_{D_0 :=} \lambda_k^{11/8}.$$

Diese Abschätzung gilt offensichtlich für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Für die Abschätzung von $\|\varphi'_k\|_\infty$ sei zunächst $x \in [X_k^-, X_k^+]$ und $x_3 \in (X_k^-, X_k^+)$ die nächstgelegene Extremalstelle von φ_k . Dann ist

$$\begin{aligned} |\varphi'_k(x)| &= \left| \int_{x_3}^x \varphi''_k(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{x_3}^x (V_\gamma(x) - \lambda_k) \varphi_k(y) dy \right| \\ &\leq (\lambda_k + d) |x - x_3| \|\varphi_k\|_\infty \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{1/4} (\lambda_k + d)^{5/4} D_0 \lambda_k^{11/8} \\ &\leq 2 \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha - \frac{\gamma^4}{8d^3}} \right)^{1/4} \left(1 + \frac{d}{\lambda_1} \right)^{5/4}}_{D_1 :=} D_0 \lambda_k^{21/8}. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus [X_k^-, X_k^+]$ ist

$$|\varphi'_k(x)| < \max(|\varphi'_k(X_k^-)|, |\varphi'_k(X_k^+)|) \leq D_1 \lambda_k^{21/8}. \square$$

8.5.2 Abschätzung in Abhängigkeit von x

Lemma 8.11. Sei $V(x)$ eine auf \mathbb{R} stetige, konvexe Funktion mit $\min_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -d$ ($d \geq 0$) und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Die Funktion $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sei die Eigenfunktion der Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi_k(x) = (V(x) - \lambda_k) \varphi_k(x)$$

mit $\lambda_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$) und $x_0 \in \mathbb{R}$ sei ein Punkt, so dass $V(x_0) - \lambda_k > 0$. Ist $x_0 > 0$, so gilt für alle $x \geq x_0$

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_k(x_0)| \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \sqrt{V(y) - \lambda_k} dy \right\}. \quad (8.28)$$

Ist $x_0 < 0$, so gilt für alle $x \leq x_0$

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_k(x_0)| \exp \left\{ - \int_x^{x_0} \sqrt{V(y) - \lambda_k} dy \right\}. \quad (8.29)$$

Beweis. Die Herleitung der Ungleichung (8.28) findet sich in §8.2. in [91]. Wir zeigen daher nur (8.29):

Sei $x_0 < 0$ und o.B.d.A. $\varphi_k(x) > 0$ für $x \leq x_0$. Dann ist $\varphi_k'(x) > 0$ für $x \leq x_0$. Wir wählen ein $x_1 < x_0$ und erhalten für alle $x \in [x_1, x_0]$

$$\varphi_k'(x) \varphi_k''(x) = (V(x) - \lambda_k) \varphi_k(x) \varphi_k'(x) \geq (V(x_0) - \lambda_k) \varphi_k(x) \varphi_k'(x).$$

Integrieren wir über (x_1, x_0) , so folgt

$$\varphi_k'^2(x_0) - \varphi_k'^2(x_1) \geq (V(x_0) - \lambda_k) (\varphi_k^2(x_0) - \varphi_k^2(x_1)).$$

Wir können nun den Index 0 weglassen und erhalten für $x_1 \rightarrow -\infty$

$$\frac{\varphi_k'(x)}{\varphi_k(x)} \geq \sqrt{V(x) - \lambda_k}.$$

Durch Integration von x bis x_0 ergibt sich

$$\ln(\varphi_k(x_0)) - \ln(\varphi_k(x)) \geq \int_x^{x_0} \sqrt{V(y) - \lambda_k} dy.$$

Man hat folglich

$$\ln(\varphi_k(x)) - \ln(\varphi_k(x_0)) \leq - \int_x^{x_0} \sqrt{V(y) - \lambda_k} dy$$

und daher

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_k(x_0) \exp \left\{ - \int_x^{x_0} \sqrt{V(y) - \lambda_k} dy \right\}. \quad \square$$

Proposition 8.12. *Der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) sei positiv. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$*

$$|\varphi_k(x)| \leq C_0(\alpha, \gamma, \delta, \lambda_k) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}, \quad (8.30)$$

mit

$$C_0(\alpha, \gamma, \delta, \lambda_k) := \begin{cases} D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ \frac{2^{5/2} \alpha^{7/4} \lambda_k^{3/4}}{3 (2\alpha^{3/2} - \delta)^{3/4} \delta^{7/4} \left(\delta_1 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \right) \right)^{3/4}} \right\} & f. \alpha > 1 \\ D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ \frac{2^{7/4} \lambda_k^{3/4}}{3 (\alpha^{3/2} - \frac{\alpha\delta}{2})^{3/4} \delta^{7/4} \left(\delta_1 \left(\frac{\sqrt{\alpha}\delta}{2} \right) \right)^{3/4}} \right\} & f. 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

wobei D_0 wie in Proposition 8.10 und $\delta_1(\varepsilon) := \frac{16\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon(16\lambda_1+8\gamma^2)}$.

Beweis. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und beliebige positive Konstanten a, b :

$$|\gamma x| \leq \frac{\gamma^2 x^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2} \leq \frac{\gamma^4 x^4}{8a^4 b^2} + \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (8.31)$$

Wählen wir nun $a = \gamma$ und $b = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}}$ für ein $\varepsilon > 0$, so erhalten wir

$$|\gamma x| \leq \varepsilon x^4 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{16\varepsilon},$$

und damit

$$\begin{aligned} V_\gamma(x) - \lambda_k &= \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x - \lambda_k \\ &\geq (\alpha - \varepsilon)x^4 - \left(\lambda_k + \frac{1 + 8\varepsilon\gamma^2}{16\varepsilon} \right) \\ &= (\alpha - \varepsilon)x^4 - \lambda_k \left(1 + \frac{1 + 8\varepsilon\gamma^2}{16\varepsilon\lambda_k} \right) \\ &\geq (\alpha - \varepsilon)x^4 - \frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

wobei $\delta_1(\varepsilon) := \frac{16\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon(16\lambda_1+8\gamma^2)}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ nun ein Punkt mit $|x_0| \geq \max(|X_k^-|, |X_k^+|)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq |x_0|$

$$\begin{aligned} \sqrt{V_\gamma(x) - \lambda_k} &\geq \sqrt{\alpha - \varepsilon} x^2 \sqrt{1 - \frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)x^4}} \\ &\geq \sqrt{\alpha - \varepsilon} x^2 \sqrt{1 - \frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)x_0^4}}. \end{aligned}$$

Wir wählen $x_0 := \left(\frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)\varepsilon} \right)^{1/4}$ und erhalten für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_0$

$$\sqrt{V_\gamma(x) - \lambda_k} \geq \sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon} x^2,$$

und mittels Lemma 8.11

$$\begin{aligned} & |\varphi_k(x)| \\ & \leq |\varphi_k(x_0)| \exp \left\{ - \left(\frac{\sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}}{3} |x|^3 - \frac{\sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}}{3} x_0^3 \right) \right\} \\ & = |\varphi_k(x_0)| \exp \left\{ - (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}}{3} |x|^3 \right\} \\ & \quad \exp \left\{ -\varepsilon \frac{\sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}}{3} |x|^3 + \frac{\sqrt{\alpha - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}}{3} x_0^3 \right\}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_1 := \frac{x_0}{\varepsilon^{1/3}}$ gilt dann

$$|\varphi_k(x)| \leq \|\varphi_k\|_\infty \exp \left\{ - \frac{(1 - \varepsilon)^{3/2} \sqrt{\alpha - \varepsilon}}{3} |x|^3 \right\}.$$

Es ist

$$\sqrt{(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^3} \geq \begin{cases} \sqrt{\alpha}(1 - \varepsilon)^2 \geq \sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha}\varepsilon & \text{f. } \alpha > 1 \\ \sqrt{\alpha}(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha})^2 \geq \sqrt{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon & \text{f. } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

daher setzen wir

$$\delta := \begin{cases} 2\sqrt{\alpha}\varepsilon & \text{f. } \alpha > 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon & \text{f. } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

und erhalten für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_1$

$$|\varphi_k(x)| \leq \|\varphi_k\|_\infty \exp \left\{ - \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}. \quad (8.33)$$

Proposition 8.10 liefert nun für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_k(x)| \leq D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}}{3} x_1^3 \right\} \exp \left\{ - \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\},$$

d.h.

$$|\varphi_k(x)| \leq C_0 \exp \left\{ - \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}$$

mit $C_0 = C_0(\alpha, \gamma, \delta, \lambda_k)$ definiert durch

$$C_0 := \begin{cases} D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ \frac{2^{5/2} \alpha^{7/4}}{3 (2 \alpha^{3/2} - \delta)^{3/4} \delta^{7/4} \left(\delta_1 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \right) \right)^{3/4}} \lambda_k^{3/4} \right\} & \text{f. } \alpha > 1 \\ D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ \frac{2^{7/4}}{3 (\alpha^{3/2} - \frac{\alpha\delta}{2})^{3/4} \delta^{7/4} \left(\delta_1 \left(\frac{\sqrt{\alpha\delta}}{2} \right) \right)^{3/4}} \lambda_k^{3/4} \right\} & \text{f. } 0 < \alpha \leq 1. \square \end{cases}$$

8.5.3 Abschätzung der ersten Ableitung

Die Beweise in diesem und dem folgenden Abschnitt werden in Anlehnung an die Beweise von Theorem 2.6 und Theorem 2.8 in [43] geführt.

Proposition 8.13. *Ist der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) positiv, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$:*

$$|\varphi'_k(x)| \leq C_1 \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}, \quad (8.34)$$

mit

$$C_1 = C_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_k) := \max \left(E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) D_0 \lambda_k^{11/8}, D_1 \lambda_k^{21/8} \right) \exp \left\{ M_1 \delta^{-5/2} \lambda_k^{3/4} \right\},$$

wobei M_1 eine positive Konstante, D_0 und D_1 wie in Proposition 8.10 und

$$E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (2 + V_\gamma(|x| + 1) + 2\gamma(|x| + 1)) \exp \left\{ -\frac{\delta}{6} |x|^3 \right\}.$$

Beweis. Sei zunächst $x > X_k^+$. Dank des Mittelwertsatzes wissen wir, dass ein $y_1 \in (x, x + 1)$ existiert, so dass

$$|\varphi'_k(y_1)| = |\varphi_k(x) - \varphi_k(x + 1)|,$$

und wir erhalten wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\varphi_k(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\varphi'_k(x)| = 0$

$$\begin{aligned} |\varphi'_k(x + 1)| < |\varphi'_k(y_1)| &= |\varphi_k(x) - \varphi_k(x + 1)| \\ &\leq |\varphi_k(x)| + |\varphi_k(x + 1)| \\ &\leq 2 |\varphi_k(x)|. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Der Mittelwertsatz liefert uns ebenfalls die Existenz einer Zahl $y_2 \in (x, x + 1)$ mit

$$|\varphi''_k(y_2)| = |\varphi'_k(x) - \varphi'_k(x + 1)|,$$

und es folgt mit (8.35)

$$\begin{aligned} |\varphi'_k(x)| &\leq |\varphi'_k(x + 1)| + |\varphi''_k(y_2)| \\ &< 2 |\varphi_k(x)| + |(V_\gamma(y_2) - \lambda_k) \varphi_k(y_2)| \\ &< (2 + V_\gamma(x + 1)) |\varphi_k(x)|. \end{aligned}$$

Für $x < X_k^-$ erhält man auf analoge Weise

$$|\varphi'_k(x)| < (2 + V_\gamma(x - 1)) |\varphi_k(x)|,$$

und es folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [X_k^-, X_k^+]$

$$|\varphi'_k(x)| < (2 + V_\gamma(|x| + 1) + 2\gamma(|x| + 1)) |\varphi_k(x)|. \quad (8.36)$$

Wir wenden nun Proposition 8.12 an und haben folglich für $x \in \mathbb{R} \setminus [X_k^-, X_k^+]$:

$$\begin{aligned} &|\varphi'_k(x)| \\ &< (2 + V_\gamma(|x| + 1) + 2\gamma(|x| + 1)) C_0 \left(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k \right) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \frac{\delta}{2}}{3} |x|^3 \right\} \\ &\leq E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) C_0 \left(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k \right) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\} \\ &\leq E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) D_0 \lambda_k^{11/8} \exp \left\{ M \delta^{-5/2} \lambda_k^{3/4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

wobei

$$E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (2 + V_\gamma(|x| + 1) + 2\gamma(|x| + 1)) \exp \left\{ -\frac{\delta}{6} |x|^3 \right\}$$

und M eine geeignete positive Konstante ist.

Für $x \in [X_k^-, X_k^+]$ folgt mit Proposition 8.10 und Ungleichung (8.32)

$$\begin{aligned} & |\varphi'_k(x)| \exp \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\} \\ & \leq \|\varphi'_k\|_\infty \exp \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}}{3} (\max(|X_k^-|, |X_k^+|))^3 \right\} \\ & \leq D_1 \lambda_k^{21/8} \exp \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} \left(\frac{1}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} \right)^{3/4} \lambda_k^{3/4} \right\}, \end{aligned}$$

mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$. Wir setzen nun $\varepsilon := \delta^2$ und erhalten

$$\begin{aligned} & |\varphi'_k(x)| \exp \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\} \\ & \leq D_1 \lambda_k^{21/8} \exp \left\{ \frac{(\sqrt{\alpha} - \delta)^{1/4}}{3} \frac{\lambda_k^{3/4}}{(\delta_1(\delta^2))^{3/4} (\sqrt{\alpha} + \delta)^{3/4}} \right\} \\ & \leq D_1 \lambda_k^{21/8} \exp \left\{ \frac{\lambda_k^{3/4}}{3 (\delta_1(\delta^2))^{3/4} \alpha^{1/4}} \right\}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Mit (8.37) und (8.38) haben wir für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi'_k(x)| \leq C_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_k) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\} \quad (8.39)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_k) & := \max \left(E(\alpha, \beta, \gamma, \delta) D_0 \lambda_k^{11/8}, D_1 \lambda_k^{21/8} \right) \\ & \quad \exp \left\{ M_1 \delta^{-5/2} \lambda_k^{3/4} \right\}, \end{aligned}$$

und einem geeigneten $M_1 > 0$. \square

8.5.4 Abschätzung höherer Ableitungen

Das folgende Lemma aus [43] hat Gültigkeit für die L^2 -Lösungen der Gleichung $\varphi_k''(x) = (V(x) - \lambda_k)\varphi_k(x)$ mit einem beliebigen polynomialen Potential $V(x) = a_{2m}x^{2m} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \dots + a_1x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{R}$):

Lemma 8.14 (Gundersen). *Für alle $q \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Konstante $K_q > 0$, so dass*

$$|\varphi_k^{(q+2)}(x)| \leq K_q (H_k(x))^{d_q} (|\varphi_k(x)| + |\varphi'_k(x)|) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (8.40)$$

wobei

$$H_k(x) = M (\lambda_k + |x| + |x|^{2m}),$$

mit einer Konstanten $M > 0$, und

$$d_q = \begin{cases} q/2 + 1 & \text{f. } q \text{ gerade,} \\ (q+1)/2 & \text{f. } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. vgl. Lemma 2.7. in [43].

Proposition 8.15. *Ist der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) positiv, so gilt für alle $q \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$*

$$|\varphi_k^{(q)}(x)| \leq C_q \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\}, \quad (8.41)$$

wobei

$$C_q = C_q(\lambda_k, \delta) := T(\delta, q) \lambda_k^{d_{q-2} + \frac{21}{8}} \exp \left\{ b \delta^{-5/2} \lambda_k^{3/4} \right\},$$

mit $T(\delta, q) > 0, d_q$ wie in Lemma 8.14 und einem $b > 0$.

Beweis. Der Fall $q = 0$ wurde in Proposition 8.12 behandelt, der Fall $q = 1$ in Proposition 8.13.

Sei nun $q \geq 2$. Dann gilt gemäß Lemma 8.14, Proposition 8.12 sowie Proposition 8.13 für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\varphi_k^{(q)}(x)| &\leq K_{q-2} (H_k(x))^{d_{q-2}} (|\varphi_k(x)| + |\varphi_k'(x)|) \\ &\leq K_{q-2} M^{d_{q-2}} (\lambda_k + |x| + |x|^4)^{d_{q-2}} \\ &\quad \left(C_0(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) + C_1(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) \right) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \frac{\delta}{2}}{3} |x|^3 \right\}. \end{aligned}$$

Sei $R \geq 1$, so dass $R \lambda_1 \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\varphi_k^{(q)}(x)| &\leq K_{q-2} M^{d_{q-2}} (R \lambda_k)^{d_{q-2}} (1 + |x| + |x|^4)^{d_{q-2}} \\ &\quad \left(C_0(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) + C_1(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) \right) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \frac{\delta}{2}}{3} |x|^3 \right\} \\ &\leq \tilde{K} \lambda_k^{d_{q-2}} \left(C_0(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) + C_1(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k) \right) \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\} \end{aligned} \quad (8.42)$$

mit

$$\tilde{K} = \tilde{K}(\delta, q) := K_{q-2} (M R)^{d_{q-2}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ (1 + |x| + |x|^4)^{d_{q-2}} \exp \left\{ -\frac{\delta}{6} |x|^3 \right\} \right\}.$$

Nun existieren gemäß den Propositionen 8.12 und 8.13 Konstanten $C(\delta)$ und $b > 0$, so dass

$$C_0 \left(\alpha, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k \right) + C_1 \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\delta}{2}, \lambda_k \right) \leq C(\delta) R^{21/8} \lambda_k^{21/8} \exp \left\{ \frac{b \lambda_k^{3/4}}{\delta^{5/2}} \right\},$$

so dass insgesamt folgt:

$$|\varphi_k^{(q)}(x)| \leq T(\delta, q) \lambda_k^{d_q - 2 + \frac{21}{8}} \exp \left\{ \frac{b \lambda_k^{3/4}}{\delta^{5/2}} \right\} \exp \left\{ - \frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3} |x|^3 \right\},$$

mit einer positiven Zahl $T(\delta, q)$. \square

8.6 Die Eigenfunktionen als ganze Funktionen

8.6.1 Abschätzung der Eigenfunktionen in \mathbb{C}

Wenn man im Existenztheorem aus §1.5 in [91] die reelle Variable x durch eine komplexe Variable z ersetzt, so erhält man für Potentiale $V(z)$, die ganze Funktionen von z sind, die Existenz einer Lösung $\varphi(z)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\lambda - V(z))\varphi = 0,$$

so dass $\varphi(0)$ und $\varphi'(0)$ vorgegebene Werte haben und φ eine ganze Funktion von z ist (vgl. §8.7 in [91]).

Da $V(z) = \alpha z^4 + \beta z^2 - \gamma z$ als Polynom eine ganze Funktion von z ist, sind demnach die Eigenfunktionen $\varphi_k(z)$ ($k \in \mathbb{N}$) des Operators A ebenfalls ganze Funktionen von z und es lässt sich wie in §1.5 in [91] zeigen, dass

$$\varphi_k(z) = y_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(z) - y_{n-1}(z)) \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (8.43)$$

wobei

$$y_0(z) = \varphi_k(0) + z \varphi_k'(0), \quad (8.44)$$

und für $n \geq 1$

$$y_n(z) = y_0(z) + \int_0^z (V(s) - \lambda_k) y_{n-1}(s) (z - s) ds. \quad (8.45)$$

Mit Hilfe von Proposition 8.10 erhalten wir eine Abschätzung von $y_0(z)$:

$$\begin{aligned} |y_0(z)| &\leq D_0 \lambda_k^{11/8} + |z| D_1 \lambda_k^{21/8} \\ &\leq C \lambda_k^{21/8} (D_0 + |z| D_1) \\ &=: K_k(|z|). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Da für alle $\delta > 0$

$$|\gamma z| \leq \frac{\delta}{2} |z|^4 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{8\delta}$$

sowie

$$\beta |z|^2 \leq \frac{\delta}{2} |z|^4 + \frac{\beta^2}{2\delta},$$

folgt

$$|V(z)| \leq (\alpha + \delta)|z|^4 + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta}, \quad (8.47)$$

und man erhält wie in [91], §1.5:

$$|y_n(z) - y_{n-1}(z)| \leq K_k(|z|) \left((\alpha + \delta)|z|^4 + \lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^n \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}, \quad (8.48)$$

und damit

$$\begin{aligned} & |\varphi_k(z)| \\ & \leq K_k(|z|) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\alpha + \delta)|z|^4 + \lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^n \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \right) \\ & \leq K_k(|z|) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\alpha + \delta}|z|^3 + \sqrt{\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta}}|z| \right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} \right) \\ & \leq K_k(|z|) \exp \left(\sqrt{\alpha + \delta}|z|^3 + \sqrt{\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta}}|z| \right). \end{aligned} \quad (8.49)$$

Sei nun $d > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \exp \left(\sqrt{\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta}} |z| \right) \\ & \leq \begin{cases} \exp(d^{-2}|z|^3) & \text{für } |z| \geq d \left(\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^{1/4}, \\ \exp \left(d \left(\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^{3/4} \right) & \text{für } |z| \leq d \left(\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^{1/4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & |\varphi_k(z)| \\ & \leq K_k(|z|) \exp \left(d \left(\lambda_k + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta} \right)^{3/4} \right) \exp \left(\left(\sqrt{\alpha + \delta} + d^{-2} \right) |z|^3 \right) \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ K_k(|z|) \exp \{ -d^{-2}|z|^3 \} \} \exp \left(d \left(1 + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta\lambda_1} \right)^{3/4} \lambda_k^{3/4} \right) \\ & \quad \exp \left(\left(\sqrt{\alpha + \delta} + 2d^{-2} \right) |z|^3 \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

Proposition 8.16. *Ist der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) positiv, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ und $d > 0$*

$$|\varphi_k(z)| \leq \tilde{C}_0 \exp \left(\left(\sqrt{\alpha + \delta} + 2d^{-2} \right) |z|^3 \right) \quad (8.50)$$

mit

$$\tilde{C}_0 := C \lambda_k^{21/8} \sup_{z \in \mathbb{C}} \{(D_0 + |z| D_1) \exp \{-d^{-2}|z|^3\}\} \\ \exp \left(d \left(1 + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta\lambda_1} \right)^{3/4} \lambda_k^{3/4} \right).$$

8.6.2 Ordnung und Typ

Wir geben nun die Definition zweier Maßzahlen, die das Wachstum einer ganzen Funktion f beschreiben. Dazu sei

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

der Maximalbetrag von $f(z)$ auf der Kreisscheibe $|z| \leq r$. Nach dem Maximumprinzip und dem Satz von Liouville ist $M(r)$ eine monoton wachsende Funktion von r mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty.$$

Definition 8.17. Falls für hinreichend große $r > 0$ eine positive Zahl μ existiert, so dass

$$M(r) < \exp(r^\mu), \quad (8.51)$$

sagt man, dass die Funktion $f(z)$ von **endlicher Ordnung** ist, und man nennt die größte untere Schranke

$$\rho = \inf \mu \geq 0$$

derjenigen Werte μ , für die (8.51) gilt, die **Ordnung** von $f(z)$.

Entsprechend hat die Funktion $f(z)$ die (endliche) Ordnung ρ , wenn

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} = \rho.$$

Dies ist dann und nur dann der Fall (vgl. 2.1. in [16]), wenn für jedes positive ε , aber für kein negatives ε

$$M(r) = \mathcal{O}(\exp(r^{\rho+\varepsilon})) \quad (r \rightarrow \infty). \quad (8.52)$$

Nun können wir die Klasse der ganzen Funktionen der Ordnung ρ weiter unterteilen:

Definition 8.18. Eine ganze Funktion $f(z)$ der Ordnung $\rho < \infty$ heißt von **endlichem Typ**, wenn eine positive Zahl K existiert, so dass für hinreichend große $r > 0$

$$M(r) < \exp(Kr^\rho). \quad (8.53)$$

Die größte untere Schranke

$$\sigma = \inf K \geq 0$$

derjenigen Werte K , für die (8.53) gilt, ausgehend von einem hinreichend großen $r = r(K)$ heißt der **Typ** von $f(z)$.

Offenbar ist eine ganze Funktion $f(z)$ der Ordnung ρ vom (endlichen) Typ σ , wenn

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M(r) = \sigma. \quad (8.54)$$

Entsprechend ist $f(z)$ vom Typ σ dann und nur dann, wenn für jedes positive ε , aber für kein negatives ε

$$M(r) = \mathcal{O}(\exp((\sigma + \varepsilon)r^\rho)) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (8.55)$$

(vgl. 2.1. in [16]).

Für die Bestimmung des Typs einer ganzen Funktion $f(z)$ ist die **Phragmén-Lindelöf-Indikatorfunktion**

$$h(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

hilfreich, die das Wachstum von $|f(z)|$ entlang der Halbgeraden misst, die mit der positiven reellen Achse den Winkel θ bildet.

Wegen (8.54) ist

$$h(\theta) \leq \sigma.$$

Für Funktionen der Ordnung $\rho > 1/2$ hat man überdies das folgende

Lemma 8.19 (Markushevich). *Für eine ganze Funktion der Ordnung $\rho > 1/2$ und des Typs σ , genügt die Phragmén-Lindelöf-Indikatorfunktion der Ungleichung*

$$-\sigma \leq h(\theta) \leq \sigma. \quad (8.56)$$

Beweis. vgl. Theorem 9.18. in [63].

Wir bestimmen nun zunächst die Ordnung der Eigenfunktionen φ_k . Dafür benötigen wir noch ein Resultat über den Minimalbetrag $m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$:

Lemma 8.20 (Boas). *Falls $f(z)$ von der Ordnung ρ ist, dann ist für jedes positive ε*

$$m(r) \neq o(\exp(-r^{\rho+\varepsilon})).$$

Beweis. vgl. Theorem 2.7.4 in [16].

Proposition 8.21. *Die Eigenfunktionen $\varphi_k(z)$ haben die Ordnung 3.*

Beweis. Aus der Abschätzung (8.50) ergibt sich, dass $\varphi_k(z)$ ganze Funktionen der Ordnung $\rho \leq 3$ sind. Mit Lemma 8.20 und (8.30) erhält man $\rho \geq 3$, d.h. $\rho = 3$. \square

Mit Proposition 8.12 erhalten wir für die Phragmén-Lindelöf-Indikatorfunktion der Eigenfunktionen φ_k :

$$h(0) = h(\theta) \leq -\frac{\sqrt{\alpha}}{3},$$

und mit Lemma 8.19 folgt für den Typ von φ_k :

$$\sigma \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}.$$

Wir möchten nun zeigen, dass auch gilt: $\sigma \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$.

E. C. Titchmarsh zeigt in [92] (vgl. §§ 5.4., 8.3., 8.8.), dass die Lösung $\psi(z)$ der Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (\lambda - V(z))\psi = 0$$

mit einem reellen, positiven λ und einer ganzen Funktion $V(z)$ die Eigenschaft

$$\psi(z) = \mathcal{O}(|V(z)|^{-1/4} \exp(|\Im(\xi(z))|))$$

besitzt, wobei

$$\xi(z) = -i \int_0^z (V(w) - \lambda)^{1/2} dw.$$

Für $V(z) = \alpha z^4 + \beta z^2 - \gamma z$ ist

$$\begin{aligned} \xi(z) &= -i \int_0^z (\alpha w^4 + \beta w^2 - \gamma w - \lambda)^{1/2} dw \\ &= -i \int_{z_0}^z \sqrt{\alpha} w^2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha w^2} - \frac{\gamma}{\alpha w^3} - \frac{\lambda}{\alpha w^4} \right)^{1/2} dw + \mathcal{O}(1) \\ &= -i \int_{z_0}^z \left(\sqrt{\alpha} w^2 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha} w} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha} w^2} + \dots \right) dw + \mathcal{O}(1) \\ &= -i \frac{\sqrt{\alpha}}{3} z^3 - i \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} z + i \frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha}} \log z + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

und daher

$$\psi(z) = \mathcal{O} \left(|V(z)|^{-1/4} |z|^{\gamma/2\sqrt{\alpha}} \exp \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{3} |z|^3 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} |z| \right) \right). \quad (8.57)$$

Entsprechend ist $\sigma \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$ und wir haben gezeigt:

Proposition 8.22. *Die Eigenfunktionen $\varphi_k(z)$ sind vom Typ $\sqrt{\alpha}/3$.*

8.7 Elemente des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$

Gemäß Theorem 1.4 ist der Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ nichttrivial, d.h. er enthält neben der Funktion $\varphi(x) \equiv 0$ weitere Elemente. Mit Lemma 1.5 folgt aus den soeben nachgewiesenen reellen und komplexen Abschätzungen der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$), sofern dieser positiv ist, dass diese Elemente von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ sind:

Theorem 8.23. *Die Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) eines positiven Operators $A := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) sind Elemente des Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$.*

Beweis. Da φ_k ganze Funktionen sind und die Abschätzungen (8.30) und (8.50) erfüllen, folgt die Behauptung mit Lemma 1.5. \square

Im Falle symmetrischer polynomialer Potentiale mit nichtnegativen Koeffizienten wurde diese Eigenschaft von G. G. Gundersen in [43] gezeigt.

Mittels der Abschätzungen aus den letzten beiden Paragraphen erhalten wir außerdem (vgl. die Definition 1.6 abzählbar-normierter Räume):

Theorem 8.24. *Die Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) eines positiven Operators $A := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) sind Elemente des Raumes $\mathcal{S}_{1/3,A} \cap \mathcal{S}^{2/3,B}$ mit $A := e^{-1/3}\alpha^{-1/6}$ und $B := e^{-2/3}\alpha^{1/6}$.*

Beweis. Mit Proposition 8.15 und Definition 1.7 erhalten wir $\varphi_k \in \mathcal{S}_{1/3,A}$ mit $A = (e\sqrt{\alpha})^{-1/3}$. Mit Abschätzung (8.30) sowie den Propositionen 8.21 und 8.22 erhalten wir dank Lemma 1.8 außerdem: $\varphi_k \in \mathcal{S}^{2/3,B}$ mit $B = \frac{1}{e}(e\sqrt{\alpha})^{1/3}$. \square

Bemerkung. A. I. Kashpirovskii zeigt in [53] für beliebige $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$ die Gleichheit

$$\mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}^\beta = \mathcal{S}_\alpha^\beta.$$

Daher ist jeder Raum der Art $\mathcal{S}_{1/3,A} \cap \mathcal{S}^{2/3,B}$ ($A, B > 0$) ein Teilraum von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$.

Teil IV

Kontrollierbarkeitsaspekte

Kapitel 9

Nicht-Kontrollierbarkeit mittels distributiver Kontrolle

In diesem kurzen Kapitel zeigen wir, dass eine Kontrollierbarkeit der Schrödinger-Gleichung mit einem anharmonischen quartischen Potential mittels interner distributiver linearer Kontrollen in $L^2(\mathbb{R})$ nicht möglich ist.

Wir werden sehen, dass die in Proposition 8.9 nachgewiesene Größenordnung der Eigenfunktionen φ_k für $k \rightarrow \infty$ die Kontrollierbarkeit mittels distributiver Kontrollen verhindert.

Für den Harmonischen Oszillator haben R. Illner, H. Lange und H. Teismann dies bereits in [50] gezeigt.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe eines klassischen Theorems, nach dem die Kontrollierbarkeit eines Systems mit additiver Kontrolle und einem beschränkten Kontrolloperator äquivalent ist zur Gültigkeit einer gewissen Observabilitäts-Ungleichung.

9.1 Kontrollierbarkeit und Observabilität

Die vielleicht beliebteste Methode um die Kontrollierbarkeit linearer partieller Differentialgleichungen zu zeigen, ist die Ausnutzung der *Dualität* zwischen Kontrollierbarkeit und Observabilität:

Die Kontrollierbarkeit eines linearen Kontroll-Systems ist äquivalent zur Surjektivität einer gewissen linearen Abbildung $F : H_1 \rightarrow H_2$ zwischen zwei (verschiedenen) Hilberträumen H_1, H_2 . Diese Surjektivität ist wiederum äquivalent zur Existenz einer Konstante $c > 0$, so dass

$$\|F^*(\psi)\|_{H_1} \geq c\|\psi\|_{H_2} \quad \forall \psi \in H_2, \quad (9.1)$$

wobei $F^* : H_2 \rightarrow H_1$ die Adjungierte zu F ist. Man bestimmt also zunächst F^* und zeigt dann eine Ungleichung obiger Art, genannt *Observabilitäts-Ungleichung*.

Es sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ein linearer Operator und Erzeuger einer stetigen Halbgruppe $S(t), t \geq 0$ auf H . Ferner sei $u \in L^2(0, T; X)$ eine Kontrollfunktion und $B : X \rightarrow H$ ein beschränkter linearer (Kontroll-)Operator, wobei X ein weiterer Hilbertraum sei. Dann gilt für additive Kontrollsysteme der Art

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = A\psi(t, x) + Bu(t), \tag{9.2}$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \tag{9.3}$$

in denen der beschränkte Kontrolloperator B unabhängig ist von der zu kontrollierenden Funktion ψ , das folgende

Lemma 9.1. *Das System (9.2), (9.3) ist zur Zeit $T > 0$ exakt kontrollierbar, dann und nur dann wenn der beschränkte lineare Operator $B^*S(t)^* : H \rightarrow L^2(0, T; X)$ positiv definit ist. Das heißt, es existiert eine Konstante $C_T > 0$, so dass für alle $\psi \in H$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*\psi\|^2 dt \geq C_T \|\psi\|^2. \tag{9.4}$$

Das System (9.2), (9.3) ist genau dann exakt kontrollierbar, wenn diese Eigenschaft für alle Zeitpunkte $T > 0$ erfüllt ist.

Desweiteren ist (9.2), (9.3) approximativ kontrollierbar zur Zeit $T > 0$, dann und nur dann, wenn die Identität $B^*S(t)^*\psi = 0$ für fast alle $t \in [0, T]$ impliziert, dass $\psi \equiv 0$. (9.2), (9.3) ist genau dann approximativ kontrollierbar, wenn dies für alle $T > 0$ gilt.

Beweis. vgl. J. Zabczyk, [103], Part IV, Theorem 2.4. und Theorem 2.5.

9.2 Eine Observabilitäts-Ungleichung kann nicht gelten

Wir zeigen nun, dass eine exakte interne distributive Kontrolle des eindimensionalen Anharmonischen Quartischen Oszillators nicht möglich ist:

Theorem 9.2. *Es sei $\psi_0 \in D(A) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid x^4\psi \in L^2(\mathbb{R})\}$, $\omega \subset \mathbb{R}$ eine offene, beschränkte Teilmenge und $u \in L^1(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$ eine Kontrollfunktion. Dann ist für $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ das folgende System*

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x)\psi + \chi_\omega u, \tag{9.5}$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \tag{9.6}$$

nicht exakt kontrollierbar in $L^2(\mathbb{R})$: Es existiert keine Konstante C , so dass eine Observabilitäts-Ungleichung der Art

$$\int_0^T \|\chi_\omega S(t)^*\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \geq C \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \tag{9.7}$$

für alle Zeitpunkte $T > 0$ und alle $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt wird.

Beweis. Es seien der Schrödingeroperator $A := -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$) mit $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, sowie die von ihm erzeugte Halbgruppe $S(t), t \geq 0$ gegeben. λ_k ($k \in \mathbb{N}$) seien die Eigenwerte des Operators A und φ_k die dazugehörigen Eigenfunktionen, die bekanntlich eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R})$ bilden. Für jedes beliebige Element $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt dann

$$(S(t)\psi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-i\lambda_k t} \langle \psi, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \varphi_k(x).$$

Nun ist $S(t)^* = S(-t)$ und daher

$$(S(t)^* \varphi_n)(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{+i\lambda_k t} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \varphi_k(x) = e^{i\lambda_n t} \varphi_n(x).$$

Folglich ist

$$\int_0^T \|\chi_\omega S(t)^* \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\chi_\omega e^{i\lambda_n t} \varphi_n(x)|^2 dx dt = T \int_{\omega} |\varphi_n(x)|^2 dx.$$

Nun existiert gemäß Proposition 8.9 eine Konstante C , so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\varphi_n(x)| \leq C n^{-1/6} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dementsprechend ist

$$T \int_{\omega} |\varphi_n(x)|^2 dx = o(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und daher ist wegen $\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ die Observabilitäts-Ungleichung (9.7) für $\psi = \varphi_n$ und große Werte $n \in \mathbb{N}$ nicht erfüllt. Das System (9.5), (9.6) ist daher nicht exakt kontrollierbar in $L^2(\mathbb{R})$. \square

Kapitel 10

Abstrakte Gevrey-Räume

Wir geben an dieser Stelle die Definition abstrakter Gevrey-Räume, als durch einen Operator erzeugte Hilberträume, und liefern damit die Vorarbeit für das nächste Kapitel, in dem Räume dieser Art eine Rolle spielen werden. Wir stellen in diesem Kapitel außerdem Zusammenhänge her zwischen diesen Räumen und Räumen vom Typ \mathcal{S} , die in § 1.1.4 vorgestellt wurden und bereits in Kapitel 8 zum Einsatz kamen. Genauer zeigen wir, dass der Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ einer Vereinigung von abstrakten Gevrey-Räumen der Ordnung $4/3$ für den Hamiltonoperator $A = A(\alpha, \beta, -\gamma)$ entspricht, sofern A positiv ist (d.h. γ ist betragsmäßig klein). Dies bedeutet insbesondere, dass die Fourierkoeffizienten $\langle \psi, \varphi_k \rangle$ von Funktionen $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Operators A die Ordnung $\mathcal{O}\left(\exp\left(-\tau\lambda_k^{3/4}\right)\right)$ für ein $\tau > 0$ haben. Diese Eigenschaft wird uns im nächsten Kapitel hilfreich sein. Für den Spezialfall $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ haben S. J. L. van Eijndhoven, J. de Graaf und R. S. Pathak dies bereits in [31] nachgewiesen.

10.1 Definitionen

Sei $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ein selbstadjungierter Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(A)$ und $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(\mathbb{R}^n)$, bestehend aus den Eigenfunktionen φ_k des Operators A . Dann lässt sich bekanntlich jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eindeutig als Linearkombination

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

darstellen.

Ist A positiv, so ist für jedes $s \geq 0$ die Potenz A^s in einem geeigneten Definitionsbereich $D(A^s) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert und man hat

$$A^s \psi := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

so dass man

$$\|\psi\|_{D(A^s)}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s} |\langle \psi, \varphi_k \rangle|^2$$

definieren kann und die Räume $D(A^s)$ and $D(A^\infty)$ wie folgt charakterisieren kann

$$D(A^s) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|\psi\|_{D(A^s)}^2 < +\infty\}, \quad D(A^\infty) := \bigcap_{s>0} D(A^s).$$

Sei nun $m : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ eine beliebige Funktion. Wir definieren für $\tau > 0$ und $s \geq 0$ die *abstrakten Gevrey-Räume*¹ als

$$D(A^s \exp(\tau m(A))) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|\psi\|_{D(A^s \exp(\tau m(A)))}^2 < +\infty\}, \quad (10.1)$$

mit

$$\|\psi\|_{D(A^s \exp(\tau m(A)))}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s} \exp(2\tau m(\lambda_k)) |\langle \psi, \varphi_k \rangle|^2. \quad (10.2)$$

Diese Räume sind eine Verallgemeinerung der üblichen Sobolev- und Gevrey-Räume (wo A der Differential-Operator $\frac{d}{dx}$ ist). Es handelt sich um Hilbert-Räume versehen mit der Norm $(\|\psi\|_2^2 + \|\psi\|_{D(A^s \exp(\tau m(A)))}^2)^{1/2}$, welche eine Skala von Hilbert-Räumen bezüglich des Parameters τ bilden.

Falls zwei stetige Funktionen $m_1(x)$ und $m_2(x)$ für hinreichend große x identisch sind, dann ist

$$D(A^s \exp(\tau m_1(A))) = D(A^s \exp(\tau m_2(A))).$$

Daher können wir die obigen Räume auch betrachten, wenn die auf $[0, \infty)$ definierte, stetige Funktion $m(x)$ lediglich für große x -Werte größer als Eins ist.

Wir betrachten in dieser Arbeit lediglich den Fall, dass $m(x) = x^{1/\sigma}$ mit einem $\sigma \geq 1$ und bezeichnen die Räume

$$D(\exp(\tau A^{1/\sigma})) \quad (\tau > 0)$$

als *Gevrey-Räume der Ordnung σ für den Operator A* . Für $\sigma = 1$ sind dies gerade die analytischen Vektoren für den Operator A .

¹Wir definieren abstrakte Gevrey-Räume wie in den Arbeiten [39] und [40] von M. Ghisi und M. Gobino.

10.2 Der Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ als Vereinigung abstrakter Gevrey-Räume für den Hamilton-Operator

10.2.1 $D(\exp(\tau A^{3/4}))$: Teilräume von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$

Wir zeigen im folgenden, dass jeder Raum der Art

$$D(\exp(\tau A^{3/4})) \quad (\tau > 0)$$

für den **positiven Operator** $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ betraglich klein) ein Teilraum des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ ist. Wie üblich, bezeichnen wir mit λ_k und φ_k ($k \in \mathbb{N}$) die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Operators A .

Proposition 10.1. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

und es existiere ein $\tau > 0$, so dass

$$c_k = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\tau \lambda_k^{3/4}\right)\right).$$

Dann ist $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$.

Beweis. Mit (8.33) und Proposition 8.10 erhalten wir für $0 < a \leq \frac{\sqrt{\alpha-\delta}}{3}$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_k(x)| \leq D_0 \lambda_k^{11/8} \exp(ax_1^3) \exp(-a|x|^3),$$

wobei $x_1 = \frac{1}{\varepsilon^{1/3}} \left(\frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)\varepsilon} \right)^{1/4}$ mit $\delta_1(\varepsilon) = \frac{16\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon(16\lambda_1+8\gamma^2)}$ und

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\delta & \text{f. } \alpha > 1 \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\delta & \text{f. } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Daher ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $C > 0$

$$\begin{aligned} & |\psi(x)| \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\varphi_k(x)| \\ & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} D_0 \lambda_k^{11/8} \exp\left\{-\left(\tau - \frac{a}{\varepsilon^{7/4} \delta_1(\varepsilon)^{3/4} (\alpha-\varepsilon)^{3/4}}\right) \lambda_k^{3/4}\right\} \exp(-a|x|^3). \end{aligned}$$

Wählen wir nun $a > 0$ so klein, dass $\tau > \frac{a}{\varepsilon^{7/4} \delta_1(\varepsilon)^{3/4} (\alpha-\varepsilon)^{3/4}}$. Dann ist offenbar

$$|\psi(x)| \leq C' \exp(-a|x|^3), \quad (10.3)$$

für ein $C' > 0$.

Außerdem ist gemäß (8.50) für $z \in \mathbb{C}$ und mit $K_k(|z|)$ wie in (8.46)

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\varphi_k(z)| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ K_k(|z|) \exp \{ -d^{-2} |z|^3 \} \} \\ &\quad \exp \left\{ - \left(\tau - d \left(1 + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta\lambda_1} \right)^{3/4} \right) \lambda_k^{3/4} \right\} \\ &\quad \exp \left(\left(\sqrt{\alpha + \delta} + 2d^{-2} \right) |z|^3 \right), \end{aligned}$$

und wir können $d > 0$ so klein wählen, dass $\tau > d \left(1 + \frac{1 + 4(\beta^2 + \delta\gamma^2)}{8\delta\lambda_1} \right)^{3/4}$, und damit

$$|\psi(z)| \leq C'' \exp \left(\left(\sqrt{\alpha + \delta} + 2d^{-2} \right) |z|^3 \right), \quad (10.4)$$

für eine positive Konstante C'' . Gemäß Lemma 1.5 folgt aus den Ungleichungen (10.3) und (10.4), dass $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. \square

Korollar 10.2. *Sei $\tau > 0$. Dann ist*

$$D(\exp(\tau A^{3/4})) \subset \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}.$$

10.2.2 Die Fourierkoeffizienten von Funktionen aus $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ bezüglich der Basis der Eigenfunktionen von A

Wir zeigen nun, dass die Fourierkoeffizienten $\langle \psi, \varphi_k \rangle$ von Funktionen ψ aus $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k eines positiven Operators $A(\alpha, \beta, -\gamma)$ die Größenordnung $\mathcal{O} \left(\exp \left(-\tau^* \lambda_k^{3/4} \right) \right)$ haben (für ein $\tau^* > 0$), wobei λ_k die zugehörigen Eigenwerte sind. Dies impliziert insbesondere die Zugehörigkeit der Funktionen ψ zu einem abstrakten Gevrey-Raum der Ordnung $4/3$ bezüglich des Operators A und, in Verbindung mit Korollar 10.2, die Identität

$$\bigcup_{\tau > 0} D(\exp(\tau A^{3/4})) = \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}.$$

Lemma 10.3. *Es seien $\alpha > 0, \beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ sei betragsmäßig klein, so dass der Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ positiv ist. Ist $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$, so existieren von ψ abhängige, positive Konstanten K und N , so dass*

$$|(-A)^p \psi(x)| \leq KN^p p^{4p/3}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (10.5)$$

Für den Beweis benutzen wir ein Resultat aus [31]:

Lemma 10.4 (van Eijndhoven/de Graaf/Pathak). *Sei ψ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die für fixe Konstanten $a, b, c > 0$ und $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta \geq 1$ die folgenden Ungleichungen erfüllt:*

$$|(x^k \mathbf{D}^l \psi)(x)| \leq c a^k b^l k^{\alpha k} l^{\beta l}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.6)$$

wobei \mathbf{D} der Differential-Operator $\frac{d}{dx}$ ist. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \mathbb{N}^n$

$$|(\mathbf{D}^{i_1} x^{j_1} \dots \mathbf{D}^{i_n} x^{j_n} \psi)(x)| \leq C_1 A_1^{|j|} B_1^{|i|} |j|^{\alpha|j|} |i|^{\beta|i|}, \quad (10.7)$$

wobei $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$, $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$, $C_1 = c$, $A_1 = 2^{\sigma\beta+1} e^{\sigma\alpha} a$, $B_1 = 2^{\sigma\alpha} e^{\sigma\beta} b$ und $\sigma = (\alpha + \beta)^{-1}$.

Beweis. vgl. Lemma 2 in [31].

Beweis von Lemma 10.3. Sei $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. Dann existieren positive Konstanten a, b, c , so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|(x^k \mathbf{D}^l \psi)(x)| \leq c a^k b^l k^{k/3} l^{2l/3}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (10.8)$$

Nun gilt für $p \in \mathbb{N}$

$$(-A)^p = (\mathbf{D}^2 - V(x))^p = \sum_{s=0}^p F_s(\mathbf{D}^2, V(x)),$$

wobei $F_s(\mathbf{D}^2, V(x))$ aus einer Summe von $\binom{p}{s}$ Kombinationen der Form

$$(\mathbf{D}^2)^{i_1} (V(x))^{j_1} \dots (\mathbf{D}^2)^{i_n} (V(x))^{j_n}$$

besteht, mit $\sum_{m=1}^n i_m = |i| = s$ und $\sum_{m=1}^n j_m = |j| = p - s$.

Mit $V_0(x) := \alpha x^4 + \beta x^2$ ist $V(x) = V_0(x) - \gamma x$, und es gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$(V(x))^{j_m} = (V_0(x) - \gamma x)^{j_m} = \sum_{h=0}^{j_m} \binom{j_m}{h} (V_0(x))^{j_m-h} (-\gamma x)^h$$

sowie

$$(V_0(x))^k = (\alpha x^4 + \beta x^2)^k = \sum_{g=0}^k \binom{k}{g} (\alpha x^4)^{k-g} (\beta x^2)^g,$$

und daher

$$(V(x))^{j_m} = \sum_{h=0}^{j_m} \sum_{g=0}^{j_m-h} \binom{j_m}{h} \binom{j_m-h}{g} \alpha^{j_m-h-g} \beta^g (-\gamma)^h x^{4j_m-3h-2g}.$$

Folglich ist

$$(\mathbf{D}^2)^{i_m} (V(x))^{j_m} = \sum_{k_m=0}^{3j_m} c_{k_m} (\mathbf{D}^2)^{i_m} x^{j_m+k_m},$$

mit Koeffizienten c_{k_m} , die von α, β und γ abhängen, und für die gilt:

$$|c_{k_m}| \leq \tilde{c}_{k_m} M^{j_m}$$

mit $\tilde{c}_{k_m} \in \mathbb{N}$ und $M := \max(\alpha, \beta, |\gamma|)$. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{D}^2)^{i_1} (V(x))^{j_1} \dots (\mathbf{D}^2)^{i_n} (V(x))^{j_n} \psi \right) (x) \\ &= \sum_{k_1=0}^{3j_1} \dots \sum_{k_n=0}^{3j_n} c_{k_1, \dots, k_n} \left((\mathbf{D}^2)^{i_1} x^{j_1+k_1} \dots (\mathbf{D}^2)^{i_n} x^{j_n+k_n} \psi \right) (x), \end{aligned}$$

wobei

$$|c_{k_1, \dots, k_n}| \leq \tilde{c}_{k_1, \dots, k_n} M^{|j|}$$

mit $\tilde{c}_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{N}$. Mit (10.8) und Lemma 10.4 folgt

$$\begin{aligned} & \left| \left((\mathbf{D}^2)^{i_1} (V(x))^{j_1} \dots (\mathbf{D}^2)^{i_n} (V(x))^{j_n} \psi \right) (x) \right| \\ & \leq \sum_{k_1=0}^{3j_1} \dots \sum_{k_n=0}^{3j_n} \tilde{c}_{k_1, \dots, k_n} M^{|j|} C A_1^{|j|+|k|} B_1^{2|i|} (|j| + |k|)^{(|j|+|k|)/3} (2|i|)^{4|i|/3} \\ & \leq \tilde{C} M^{|j|} A_1^{E|j|} B_1^{2|i|} (4|j|)^{4|j|/3} (2|i|)^{4|i|/3}, \end{aligned}$$

mit $\tilde{C} := C \left(\sum_{k_1=0}^{3j_1} \dots \sum_{k_n=0}^{3j_n} \tilde{c}_{k_1, \dots, k_n} \right)$, $A_1 = 2^{5/3} e^{1/3} a$, $B_1 = 2^{1/3} e^{2/3} b$ und

$$E = \begin{cases} 4 & \text{für } A_1 \geq 1 \\ 1 & \text{für } A_1 < 1 \end{cases}.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} |(-A)^p \psi(x)| & \leq \tilde{C} \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} M^{p-s} A_1^{E(p-s)} B_1^{2s} (4(p-s))^{4(p-s)/3} (2s)^{4s/3} \\ & \leq \tilde{C} \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (4^{4/3} M A_1^E)^{p-s} (2^{4/3} B_1^2)^s (p^{4/3})^{p-s} (p^{4/3})^s \\ & = \tilde{C} (4^{4/3} M A_1^E p^{4/3} + 2^{4/3} B_1^2 p^{4/3})^p \\ & = K N^p p^{4p/3}, \end{aligned}$$

wobei $K = \tilde{C}$ und $N = 4^{4/3} M A_1^E + 2^{4/3} B_1^2$. \square

Proposition 10.5. *Sei $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. Dann existiert ein $\tau^* > 0$, so dass die Fourierkoeffizienten von ψ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des positiven Operators $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ ($\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ betraglich klein) der Abschätzung*

$$\langle \psi, \varphi_k \rangle = \mathcal{O} \left(\exp \left(-\tau^* \lambda_k^{3/4} \right) \right) \quad (10.9)$$

genügen, wobei λ_k die Eigenwerte von A sind.

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ mit $\psi = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \varphi_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann ist für jedes fest gewählte $p \in \mathbb{N}$

$$c_k = \langle \psi, \varphi_k \rangle = \lambda_k^{-p} \langle A^p \psi, \varphi_k \rangle$$

und es folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$|c_k| \leq \lambda_k^{-p} \|A^p \psi\|_\infty \|\varphi_k\|_1. \quad (10.10)$$

Nun existieren einerseits nach Lemma 10.3 positive Konstanten K und N , so dass

$$\|A^p \psi\|_\infty \leq K N^p p^{4p/3}.$$

Andererseits gilt mit $x_1 = \frac{1}{\varepsilon^{1/3}} \left(\frac{\lambda_k}{\delta_1(\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} \right)^{1/4}$, $\delta_1(\varepsilon) = \frac{16\varepsilon\lambda_1}{1 + \varepsilon(16\lambda_1 + 8\gamma^2)}$ und

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\delta & \text{f. } \alpha > 1 \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\delta & \text{f. } \alpha \leq 1 \end{cases}, \text{ wegen (8.33),}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(x)| dx \\ &= \int_{|x| \leq x_1} |\varphi_k(x)| dx + \int_{|x| > x_1} |\varphi_k(x)| dx \\ &\leq 2x_1 \|\varphi_k\|_\infty + \|\varphi_k\|_\infty \int_{|x| > x_1} \exp\left\{-\frac{\sqrt{\alpha} - \delta}{3}|x|^3\right\} dx \\ &\leq 2x_1 \|\varphi_k\|_\infty + C \|\varphi_k\|_\infty, \end{aligned}$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten C , und es folgt mit Proposition 8.10:

$$\|\varphi_k\|_1 \leq D_0 \lambda_k^{11/8} (C + 2x_1) \leq D_0 \lambda_k^{11/8} (C + 2C_1 \lambda_k^{1/4}) \leq C_2 \lambda_k^{13/8},$$

wobei auch C_1 und C_2 (von k unabhängige) geeignete Konstanten sind. Für c_k ergibt sich daher aus (10.10) für alle $p \in \mathbb{N}$

$$|c_k| \leq C_2 \lambda_k^{13/8} \lambda_k^{-p} K N^p p^{4p/3}.$$

Wir berechnen nun das Infimum der rechten Seite bezüglich p . Sei $g(p) := \left(\frac{N}{\lambda_k}\right)^p p^{4p/3}$ und $p \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist

$$\frac{dg}{dp} = \left(\frac{N}{\lambda_k}\right)^p p^{4p/3} \left(\frac{4}{3} \ln p + \frac{4}{3} + \ln\left(\frac{N}{\lambda_k}\right)\right) \quad (10.11)$$

und

$$p_0 := e^{-1} \left(\frac{\lambda_k}{N}\right)^{3/4}$$

eine Extremalstelle von g . Da

$$\frac{d^2 g}{dp^2} = \left(\frac{N}{\lambda_k}\right)^p p^{4p/3} \left[\frac{4}{3p} + \left(\frac{4}{3} \ln p + \frac{4}{3} + \ln \left(\frac{N}{\lambda_k} \right) \right)^2 \right] > 0 \quad (\forall p \in \mathbb{R}_+^*),$$

ist

$$g(p_0) = \exp \left(- \left(\frac{4}{3} e^{-1} N^{-3/4} \right) \lambda_k^{3/4} \right) = \min_{p \in \mathbb{R}_+^*} g(p).$$

Das Minimum von $g(p)$ für natürliche Zahlen p ist vermutlich etwas größer. Wir schätzen dieses nach oben ab: Dazu sei $p_1 = \min_{n \in \mathbb{N}, n \geq p_0} n$. Dann ist

$$\ln g(p_1) = \ln g(p_0) + \underbrace{(\ln g)'(p_0)}_{=0} (p_1 - p_0) + R_2(p_1),$$

und es existiert ein $p_2 \in (p_0, p_1)$, so dass

$$\ln g(p_1) = \ln g(p_0) + \frac{(\ln g)''(p_2)}{2} (p_1 - p_0)^2$$

(Lagrange-Form für das Restglied R_2). Mit (10.11) erhalten wir

$$(\ln g)''(p) = \frac{4}{3p},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{N}} \ln g(p) \leq \ln g(p_1) &= \ln g(p_0) + \frac{2}{3p_2} (p_1 - p_0)^2 \\ &\leq \ln g(p_0) + \frac{2}{3p_2} \leq \ln g(p_0) + \frac{2}{3p_0}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{N}} g(p) &\leq \exp \left(\frac{2}{3p_0} \right) g(p_0) \\ &= \exp \left(\frac{2eN^{3/4}}{3 \lambda_k^{3/4}} \right) \exp \left(- \left(\frac{4}{3} e^{-1} N^{-3/4} \right) \lambda_k^{3/4} \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{2eN^{3/4}}{3 \lambda_1^{3/4}} \right) \exp \left(- \left(\frac{4}{3} e^{-1} N^{-3/4} \right) \lambda_k^{3/4} \right) \end{aligned}$$

und folglich

$$|c_k| \leq C_2 K \exp \left(\frac{2eN^{3/4}}{3 \lambda_1^{3/4}} \right) \lambda_k^{13/8} \exp \left(- \left(\frac{4}{3} e^{-1} N^{-3/4} \right) \lambda_k^{3/4} \right).$$

Setzen wir $\tau = \frac{4}{3} e^{-1} N^{-3/4}$, so ist für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$|c_k| \leq C_2 K \exp \left(\frac{2eN^{3/4}}{3 \lambda_1^{3/4}} \right) \frac{\lambda_k^{13/8}}{\exp \left(\varepsilon \lambda_k^{3/4} \right)} \exp \left(- (\tau - \varepsilon) \lambda_k^{3/4} \right),$$

und es folgt die Existenz einer Konstanten $C = C(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|c_k| \leq C \exp\left(-(\tau - \varepsilon) \lambda_k^{3/4}\right). \square$$

Korollar 10.2 und Proposition 10.5 implizieren für den positiven Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ mit $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ betraglich klein:

Theorem 10.6.

$$\bigcup_{\tau > 0} D(\exp(\tau A^{3/4})) = \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}. \quad (10.12)$$

Kapitel 11

Linearisierte Systeme

Es ist meist einfacher, mit einem linearen als mit einem nichtlinearen System zu arbeiten. Ein klassischer Ansatz um die lokale Kontrollierbarkeit eines nichtlinearen Systems in der Nähe einer Trajektorie zu zeigen, besteht darin, zunächst die globale Kontrollierbarkeit des (um diese Trajektorie) linearisierten Systems festzustellen. Man versucht dann, mittels eines Satzes über lokale Umkehrbarkeit, die lokale Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems abzuleiten.

Genauer betrachtet man für ein abstraktes nichtlineares Kontrollproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = f(\psi(t, x), u(t)), \quad (11.1)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (11.2)$$

mit einer Zustandsfunktion ψ und einer Kontrollfunktion u , die nichtlineare Abbildung

$$\Theta : \quad F \times E \rightarrow F \times F \\ (\psi_0, u) \mapsto (\psi_0, \psi(T; \psi_0, u)),$$

wobei E und F geeignete Banachräume seien.

Die vollständige (globale) exakte Kontrollierbarkeit des Systems (11.1),(11.2) im Raum F mittels Kontrollfunktionen $u \in E$ entspricht der Surjektivität der Abbildung Θ . Die lokale exakte Kontrollierbarkeit von (11.1),(11.2) in der Nähe einer Trajektorie $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ in F mittels Kontrollfunktionen $u \in E$ entspricht der lokalen Surjektivität von Θ : Für $\psi_0 \in U_\delta(\tilde{\psi}(0)) \subset F$ und $\psi_f \in U_\delta(\tilde{\psi}(T)) \subset F$ existiert eine Kontrollfunktion $u \in U_\varepsilon(\tilde{u}) \subset E$ so dass $\psi(T; \psi_0, u) = \psi_f$.

Ist die Abbildung Θ stetig Fréchet-differenzierbar in einer Umgebung von $(\tilde{\psi}(0), \tilde{u})$, dann entspricht die Surjektivität des Differential von Θ im Punkt $(\tilde{\psi}(0), \tilde{u})$

$$d\Theta(\tilde{\psi}(0), \tilde{u}) : F \times E \rightarrow F \times F \\ (\Psi_0, w) \mapsto (\Psi_0, \Psi(T; \Psi_0, w))$$

der globalen exakten Kontrollierbarkeit des um $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ linearisierten Systems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= \frac{\partial f}{\partial \psi}(\tilde{\psi}, \tilde{u})\cdot\Psi + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{\psi}, \tilde{u})\cdot w, \\ \Psi(0) &= \Psi_0\end{aligned}$$

im Raum F mittels Kontrollfunktionen $w \in E$.

Ist diese gegeben, so folgt mit dem folgenden Satz über lokale Umkehrbarkeit in Banachräumen die lokale Surjektivität von Θ , d.h. die lokale exakte Kontrollierbarkeit des nichtlinearen Systems in der Nähe der Trajektorie $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$:

Lemma 11.1 (Lokale Umkehrbarkeit). *Es sei Θ eine stetig Fréchet-differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge D in einem Banachraum X in einen Banachraum Y . Es sei $x_0 \in D$ und $\Theta'(x_0)$ bilde X surjektiv auf Y ab. Dann existiert für $y_0 = \Theta(x_0)$ eine Umgebung $U(y_0)$ und eine Konstante $K > 0$, so dass die Gleichung $\Theta(x) = y$ für jedes $y \in U(y_0)$ eine Lösung x hat, für die gilt $\|x - x_0\|_X \leq K\|y - y_0\|_Y$.*

Beweis. vgl. § 9.2, Theorem 1 in [61].

Gemäß des soeben beschriebenen Ansatzes, stellt die Untersuchung der entsprechenden linearisierten Systeme einen entscheidenden Schritt auf dem Weg zur Beantwortung der Frage nach der lokalen Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{d^2}{dx^2}\psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x)\psi - u(t)x\psi, \quad (11.3)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (11.4)$$

mit $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$, $\psi(t, x) \in \mathbb{S}$, $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in [0, T]$, $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$, dar.

Wir interessieren uns für die Kontrollierbarkeit in der Nähe des Grundzustandes und linearisieren das System (11.3),(11.4) in § 11.1 zunächst um die Trajektorie eines beliebigen Eigenzustandes $(\psi_{l,\gamma}, u \equiv 0)$ ($l \in \mathbb{N}$), um das Kontrollproblem für dieses linearisierte System in ein Momentenproblem für die Kontrollfunktion zu überführen.

(Wie bereits in § 8.3 bezeichnen wir in diesem und in dem folgenden Kapitel den üblichen Hamilton-Operator, wo es hilfreich ist, mit A_γ anstatt mit A und seine Eigenwerte und Eigenfunktionen mit $\lambda_{k,\gamma}$ bzw. $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) um zwischen den Fällen $\gamma = 0$ und $\gamma \neq 0$ unterscheiden zu können.)

Wir stellen dann in § 11.2 fest, dass der Fall $\gamma = 0$ einen Spezialfall darstellt: Die bereits in § 8.2 erwähnte Parität der Eigenfunktionen im Fall $\gamma = 0$ hat zur Folge, dass sich für eine Lösung Ψ des linearisierten Systems die Hälfte aller Projektionen $\langle \Psi, \varphi_{k,0} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) nicht kontrollieren lässt.

In § 11.3 untersuchen wir die Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma} := \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}, \gamma \neq 0$) um sicherzustellen, dass diese **von Null verschieden** sind und wir es daher im Fall $\gamma \neq 0, l = 1$ tatsächlich mit einem Momentenproblem für die Kontrolle zu tun haben. Da die Regularität, die von Anfangs- und

Zielzuständen für eine exakte Kontrollierbarkeit zu fordern ist, entscheidend von dem Verhalten der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) abhängt (die Fourierkoeffizienten der Anfangs- und Zielzustände dürfen betraglich nicht größer sein als die Referenzkoeffizienten $b_{k,\gamma}$), analysieren wir die Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$ noch genauer: Mit Hilfe der Ergebnisse aus früheren Kapiteln schätzen wir die Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ nach oben ab und stellen fest, dass sie die Größenordnung $\mathcal{O}\left(\exp\left(-\tau^* \lambda_{k,\gamma}^{3/4}\right)\right)$ für ein $\tau^* > 0$ haben.

Unter Verwendung der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($\gamma \neq 0$) definieren wir in § 11.4 die gewichteten Lebesgue-Räume $\mathcal{H}_{(s)}$ ($s \in \mathbb{R}$) und zeigen die Wohldefiniertheit des um den Grundzustand linearisierten Systems in $\mathcal{H}_{(0)}$ für eine Kontrollfunktion $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ (bzw. in $\mathcal{H}_{(1)}$ falls $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$).

In § 11.5 zeigen wir dann die exakte Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems im Fall $\gamma \neq 0$, in beliebiger Zeit $T > 0$, im Raum $\mathcal{H}_{(0)}$, falls $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$, sowie in dem etwas kleineren Raum $\mathcal{H}_{(1)}$, falls $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$. Wir zeigen ebenfalls, dass eine exakte Kontrollierbarkeit des Systems in $\mathcal{H}_{(0)}$ mittels H^1 -Kontrollen nicht möglich ist.

Aufgrund der Abschätzung der Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$ in § 11.3 wissen wir bereits, dass die Räume $\mathcal{H}_{(s)}$ Teilräume eines abstrakten Gevrey-Raumes für den Hamiltonoperator A und daher, gemäß Kapitel 10, auch des Gelfand-Shilov-Raumes $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ sind. Dank einer numerischen Abschätzung der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ nach unten, erkennen wir schließlich in § 11.6, dass es sich bei den gewichteten Lebesgueräumen $\mathcal{H}_{(s)}$ um Interpolationsräume für abstrakte Gevrey-Räume bezüglich des Hamilton-Operators handelt, bzw. dass sie einem solchen in einigen Fällen wahrscheinlich sogar exakt entsprechen.

11.1 Das Momentenproblem für die Kontrollfunktion

Sei $\psi_{l,\gamma}(t, x) = e^{-i\lambda_{l,\gamma}t} \varphi_{l,\gamma}(x)$ ($l \in \mathbb{N}$) der zum Eigenwert $\lambda_{l,\gamma}$ gehörige Eigenzustand der Gleichung (11.3) mit $u \equiv 0$, wobei

$$-\frac{d^2 \varphi_{l,\gamma}(x)}{dx^2} + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x) \varphi_{l,\gamma}(x) = \lambda_{l,\gamma} \varphi_{l,\gamma}(x), \quad (11.5)$$

und $\varphi_{l,\gamma}(x) \in \mathbb{S}$.

Wir linearisieren das Kontrollsystem (11.3),(11.4) um die Trajektorie $(\psi_{l,\gamma}, u \equiv 0)$ und erhalten das Kontrollsystem

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{d^2}{dx^2} \Psi + (\alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x) \Psi - w(t) x \psi_{l,\gamma}, \quad (11.6)$$

$$\Psi(0, x) = \Psi_0(x), \quad (11.7)$$

mit $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$, der Zustandsfunktion $\Psi(t, x)$ und der reellwertigen Kontrollfunktion $t \mapsto w(t)$.

Wir definieren für einen Zustand $\phi \in \mathbb{S}$ den *Tangentenraum* an die L^2 -Einheitssphäre \mathbb{S} im Punkt ϕ :

$$T_{\mathbb{S}}(\phi) := \{\Phi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mid \Re \langle \Phi, \phi \rangle = 0\}. \quad (11.8)$$

In Anbetracht der Tatsache, dass alle Lösungen ψ des bilinearen Kontrollproblems (11.3),(11.4) auf \mathbb{S} liegen, ist es natürlich, dass für alle Zeitpunkte $t \in [0, T]$ die Lösungen $\Psi(t, \cdot)$ des linearisierten Systems (11.6),(11.7) im Tangentenraum $T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(t, \cdot))$ liegen.

In der Tat garantiert die Gleichung (11.6) aufgrund der Reellwertigkeit des Potentials $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ sowie des Kontrollterms $w(t)x$ für einen Anfangszustand $\Psi_0 \in T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(0)) = T_{\mathbb{S}}(\varphi_{l,\gamma})$ die Zugehörigkeit der Lösung $\Psi(t)$ zu $T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(t))$ für alle $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\Re \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, x) \overline{\psi_{l,\gamma}(t, x)} dx \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\Psi \bar{\psi}_{l,\gamma} + \bar{\Psi} \psi_{l,\gamma}) dx = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi}{dt} \bar{\psi}_{l,\gamma} + \bar{\Psi} \frac{d\psi_{l,\gamma}}{dt} dx \\ &= \Re \int_{-\infty}^{\infty} i (\Psi'' \bar{\psi}_{l,\gamma} - V(x) \Psi \bar{\psi}_{l,\gamma} + w(t)x |\psi_{l,\gamma}|^2 + \bar{\Psi} \psi_{l,\gamma}'' - V(x) \bar{\Psi} \psi_{l,\gamma}) dx \\ &= \Re \int_{-\infty}^{\infty} i \left(-2\Re(\Psi' \bar{\psi}'_{l,\gamma}) - V(x) 2\Re(\Psi \bar{\psi}_{l,\gamma}) + w(t)x |\psi_{l,\gamma}|^2 \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Alle zum Zeitpunkt $T > 0$ erreichbaren Zustände Ψ_f müssen demnach auch die Eigenschaft $\Psi_f \in T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(T))$ erfüllen.

Die exakte Kontrollierbarkeit des linearen Systems (11.6),(11.7) ist äquivalent zu der Lösbarkeit eines trigonometrischen Momentenproblems für die Kontrollfunktion:

Sei $\Psi(t)$ die eindeutige (milde) Lösung

$$\Psi(t) = e^{-itA_{\gamma}} \Psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_{\gamma}} (w(s)x \psi_{l,\gamma}(s)) ds \quad (11.10)$$

des Cauchyproblems (11.6), (11.7) mit einem Anfangswert $\Psi_0 \in D(A) \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(0))$ und $t \in [0, T]$. Wir entwickeln Ψ nach den Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) des Operators $A_{\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$, die bekanntlich ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ darstellen:

$$\Psi(t, \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \Psi(t), \varphi_{k,\gamma} \rangle \varphi_{k,\gamma}. \quad (11.11)$$

Für die Fourier-Koeffizienten in (11.11) folgt mit (11.10):

$$\begin{aligned}
& \langle \Psi(t), \varphi_{k,\gamma} \rangle \\
&= \langle e^{-itA_\gamma} \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle + i \int_0^t w(s) \langle e^{-i(t-s)A_\gamma} (x\psi_{l,\gamma}(s)), \varphi_{k,\gamma} \rangle ds \\
&= \langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle e^{-i\lambda_{k,\gamma}t} + i \int_0^t w(s) e^{-i\lambda_{k,\gamma}t + i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{l,\gamma})s} \langle x\varphi_{l,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle ds \\
&= e^{-i\lambda_{k,\gamma}t} \left(\langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle + i \langle x\varphi_{l,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle \int_0^t w(s) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{l,\gamma})s} ds \right).
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Angenommen, das System (11.6), (11.7) wäre kontrollierbar und $\Psi_f \in D(A) \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(T))$ ein beliebiger Zielzustand mit $\Psi(T) = \Psi_f$. Dann erhalten wir aus (11.12) für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& \langle x\varphi_{l,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle \int_0^T w(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{l,\gamma})t} dt \\
&= i \left(\langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle - \langle \Psi_f, \varphi_{k,\gamma} \rangle e^{i\lambda_{k,\gamma}T} \right).
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Falls $\langle x\varphi_{l,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, handelt es sich hierbei um ein trigonometrisches Momentenproblem in $L^2(0, T; \mathbb{R})$:

$$\int_0^T w(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{l,\gamma})t} dt = d_{k,\gamma} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{11.14}$$

wobei

$$d_{k,\gamma} := \frac{e^{i\lambda_{k,\gamma}T} \langle \Psi_f, \varphi_{k,\gamma} \rangle - \langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle}{i \langle x\varphi_{l,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle}. \tag{11.15}$$

11.2 Nicht-Kontrollierbarkeit falls $\gamma = 0$

Wir haben in § 8.2 gezeigt, dass der Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4 + \beta x^2$ aufgrund der Symmetrie des Potentials nur Eigenfunktionen von wohlbestimmter Parität zulässt: Die Eigenfunktionen $\varphi_{k,0}$ sind gerade, falls k ungerade ist, und ungerade, falls k gerade ist. Aufgrund der Tatsache, dass das L^2 -Skalarprodukt zweier Funktionen von unterschiedlicher Parität auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ verschwindet, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit gleicher Parität wie l :

$$\langle x\varphi_{l,0}, \varphi_{k,0} \rangle = 0. \tag{11.16}$$

Für diese k folgt nun aus Gleichung (11.13)

$$\langle \Psi_f, \varphi_{k,0} \rangle = e^{-i\lambda_{k,0}T} \langle \Psi_0, \varphi_{k,0} \rangle. \quad (11.17)$$

Diese Gleichung ist aber nicht für beliebige Anfangszustände $\Psi_0 \in D(A) \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,0}(0))$ und Zielzustände $\Psi_f \in D(A) \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,0}(T))$ erfüllt. Man hat daher:

Theorem 11.2. *Sei $T > 0$, $\gamma = 0$, $w \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ und $\Psi_0 \in D(A) \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,0}(0))$. Dann ist das lineare System (11.6), (11.7) nicht kontrollierbar.*

Die Kontrollierbarkeit scheitert also an der Parität der Eigenfunktionen gepaart mit der Parität der im Kontrollterm auftretenden Funktion $x \mapsto x$ und der Betrachtung auf dem symmetrischen Intervall $(-\infty, \infty)$: Keine der Projektionen $\langle \Psi, \varphi_{k,0} \rangle$ lässt sich kontrollieren, wenn k dieselbe Parität hat wie l .

Bemerkung 11.3. *Auch die Wahl eines anderen Kontrollterms der Art $u(t)\mu(x)$ verschafft keine Abhilfe, solange die Funktion $\mu(x)$ eine Parität bezüglich des Nullpunktes aufweist. Um die Möglichkeit einer Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems zu haben, müsste man daher entweder die Funktion $\mu(x)$ so wählen, dass eine Symmetrie bzgl. des Nullpunktes nicht mehr gegeben ist, oder aber das betrachtete Intervall so ändern, dass eine Symmetrie bzgl. des Nullpunktes nicht mehr stört.*

Bemerkung 11.4. *Im Falle des Harmonischen Oszillators ($\alpha = \gamma = 0$) sind sogar noch weniger Projektionen kontrollierbar: Gemäß der Rekursionsgleichung (8.6) für die Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) ist hier*

$$\langle x\varphi_l, \varphi_k \rangle = c_1(l) \langle \varphi_{l+1}, \varphi_k \rangle + c_2(l) \langle \varphi_{l-1}, \varphi_k \rangle,$$

und aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen sind lediglich die beiden Projektionen $\langle x\varphi_l, \varphi_{l+1} \rangle$ und $\langle x\varphi_l, \varphi_{l-1} \rangle$ von Null verschieden. Entsprechend sind auch bei der Wahl einer anderen Polynomfunktion $\mu(x)$ im Kontrollterm nur endlich viele Projektionen $\langle \mu(x)\varphi_l, \varphi_k \rangle$ ungleich Null.

Wir werden gleich feststellen, dass das lineare System (11.6), (11.7) auch im Fall $\gamma \neq 0$ nicht für beliebige Anfangs- und Zielzustände aus $D(A)$ und dem entsprechenden Tangentialraum $T_{\mathbb{S}}(\psi_{l,\gamma}(t))$ kontrollierbar ist. Anders als für $\gamma = 0$, ist die Kontrolle aber in einem dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ möglich.

11.3 Die Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($\gamma \neq 0$)

Da uns speziell die Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems in der Nähe des Grundzustandes $\psi_{1,\gamma}$ interessiert, setzen wir in Gleichung (11.13) $l = 1$ und

$$b_{k,\gamma} := \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle. \quad (11.18)$$

Wir müssen nun nachweisen, dass die Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$ für $\gamma \neq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ von Null verschieden sind, um tatsächlich ein Momentenproblem für die Kontrollfunktion $w(t)$ vorliegen zu haben. Ist dies der Fall, so möchten wir die Existenz einer Lösung für dieses Problem mit einer Version des Satzes von Ingham (Theorem 4.2) zeigen. Für dessen Anwendung benötigen wir unter anderem die Zugehörigkeit der Folge $(d_{k,\gamma})_{k \in \mathbb{N}}$ aus (11.15) zu $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, die einerseits von den Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) und andererseits von den Fourierkoeffizienten der Anfangs- und Zielzustände abhängt. Um also den Funktionenraum zu identifizieren, in dem eine exakte Kontrollierbarkeit möglich ist, müssen wir das genaue Verhalten der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) kennen.

Für betragsmäßig kleine Parameterwerte γ (so dass der Operator A positiv ist), wissen wir bereits, dass die Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) sehr klein sind: Aufgrund der Abgeschlossenheit der Räume vom Typ \mathcal{S} bezüglich der Multiplikation mit x (vgl. Ch. IV, §§ 4.1. und 5.1. in [38]), sind mit den Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ auch die Funktionen $x^n \varphi_{k,\gamma}$ ($k, n \in \mathbb{N}$) Elemente des Raumes $\mathcal{S}_{1/3, (e\sqrt{\alpha})^{-1/3}} \cap \mathcal{S}^{2/3, (\frac{\sqrt{\alpha}}{e^2})^{1/3}} \subset \mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$. Dementsprechend gilt für die Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) gemäß Proposition 10.5:

Lemma 11.5. *Es existiert ein $\tau^* > 0$, so dass*

$$b_{k,\gamma} = \mathcal{O} \left(\exp \left(-\tau^* \lambda_{k,\gamma}^{3/4} \right) \right). \quad (11.19)$$

Wir müssen nun sicherstellen, dass sie nicht verschwinden. Wir nutzen dafür die Analytizität der Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) in der Nähe von $\gamma = 0$ (vgl. § 8.3).

Lemma 11.6. *Es existiert eine Zahl $\gamma_1 > 0$, so dass die Koeffizienten $b_{k,\gamma} := \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) für $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$ generisch (bis auf pathologische Sonderfälle) von Null verschieden sind.*

Beweis.

Für die Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) als analytische Funktionen von γ , gilt gemäß §8.3

$$\varphi_{k,\gamma} = \varphi_{k,0} + \gamma \varphi_k^{(1)} + \gamma^2 \varphi_k^{(2)} + \dots, \quad (11.20)$$

$$\varphi_{1,\gamma} = \varphi_{1,0} + \gamma \varphi_1^{(1)} + \gamma^2 \varphi_1^{(2)} + \dots, \quad (11.21)$$

wobei

$$\varphi_k^{(1)} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x\varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m-1,0} & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x\varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} \varphi_{2m,0} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} b_{k,\gamma} &= \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle \\ &= \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{k,0} \rangle + \gamma \left(\langle x\varphi_1^{(1)}, \varphi_{k,0} \rangle + \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_k^{(1)} \rangle \right) \\ &\quad + \gamma^2 \left(\langle x\varphi_1^{(2)}, \varphi_{k,0} \rangle + \langle x\varphi_1^{(1)}, \varphi_k^{(1)} \rangle + \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_k^{(2)} \rangle \right) + \dots \end{aligned}$$

Wegen der wohlbestimmten Parität der Eigenfunktionen $\varphi_{j,0}$ ($j \in \mathbb{N}$) (vgl. § 8.2), die ausgehend von dem Grundzustand $\varphi_{1,0}$, der gerade ist, immer abwechselnd ungerade und gerade ist, sowie der Tatsache, dass $\varphi_k^{(1)}$ je nach Parität von k entweder eine Linearkombination gerader oder ungerader Eigenfunktionen ist, unterscheiden wir die Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ nach geraden und ungeraden Werten für k :

Falls k **ungerade** ist, so verschwindet der Term $\langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{k,0} \rangle$. Man hat dann

$$\begin{aligned} b_{k,\gamma} &= \gamma \left(\langle x\varphi_1^{(1)}, \varphi_{k,0} \rangle + \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_k^{(1)} \rangle \right) + \dots \\ &= \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{2m,0} \rangle \left(\frac{\langle x\varphi_{2m,0}, \varphi_{k,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{1,0}} + \frac{\langle x\varphi_{k,0}, \varphi_{2m,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{k,0}} \right) \\ &\quad + o(\gamma) \quad (\text{für } \gamma \rightarrow 0). \end{aligned} \tag{11.22}$$

Für **gerade** k ist

$$\langle x\varphi_1^{(1)}, \varphi_{k,0} \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{2m,0} \rangle}{\lambda_{2m,0} - \lambda_{1,0}} \langle x\varphi_{2m,0}, \varphi_{k,0} \rangle = 0$$

sowie

$$\langle x\varphi_{1,0}, \varphi_k^{(1)} \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle x\varphi_{k,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle}{\lambda_{2m-1,0} - \lambda_{k,0}} \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{2m-1,0} \rangle = 0.$$

In diesem Fall ist

$$b_{k,\gamma} = \langle x\varphi_{1,0}, \varphi_{k,0} \rangle + o(\gamma) \quad (\text{für } \gamma \rightarrow 0). \tag{11.23}$$

Dank des Theorems von Gundersen (vgl. Lemma 8.2), wissen wir, dass die Terme $\langle x\varphi_{i,0}, \varphi_{j,0} \rangle$ ($i, j \in \mathbb{N}$), welche nicht aufgrund von Paritäts-Eigenschaften verschwinden, generisch von Null verschieden sind.

Wenn wir nun $\gamma_1 > 0$ entsprechend klein wählen, erhalten wir mit (11.22) und (11.23) für alle $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$|b_{k,\gamma}| > 0. \square$$

11.4 Wohldefiniertheit in $\mathcal{H}_{(0)}$ und $\mathcal{H}_{(1)}$

Wir haben soeben gesehen, dass die Koeffizienten $b_{k,\gamma} = \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) für $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$ von Null verschieden sind, und können daher für diese γ -Werte und $s \in \mathbb{R}$ die folgenden gewichteten L^2 -Räume definieren:

$$\mathcal{H}_{(s)} = \mathcal{H}_{(s)}(\alpha, \beta, \gamma) := \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \varphi, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2}{|\langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2} \lambda_{k,\gamma}^{2s} < \infty \right\}, \quad (11.24)$$

mit der Norm

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{(s)}} := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \varphi, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2}{|\langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2} \lambda_{k,\gamma}^{2s} \right\}^{1/2}. \quad (11.25)$$

Durch die Einführung des Standard-Skalarproduktes werden diese Räume zu Hilberträumen.

Wir werden im folgenden zeigen, dass die milde Lösung

$$\Psi(t) = e^{-itA_\gamma} \Psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} (w(s)x\psi_{1,\gamma}(s)) ds \quad (11.26)$$

des um die Grundzustandstrajektorie ($\psi_{1,\gamma}, u \equiv 0$) linearisierten Systems mit einem Anfangswert $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)}$ ($\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(1)}$) und einer Kontrollfunktion $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ ($w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$) zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ in dem Raum $\mathcal{H}_{(0)}$ ($\mathcal{H}_{(1)}$) bleibt.

Eine solche Invarianzeigenschaft für die Lösung $\Psi(t)$ setzt einen Regularisierungseffekt für das Integral in (11.26) voraus: Offensichtlich ist der Integrand kein Element des Raumes $\mathcal{H}_{(0)}$ (und daher auch nicht von $\mathcal{H}_{(1)}$).

Wir werden nun zeigen, dass das Integral

$$G_1(t) := \int_0^t e^{iA_\gamma s} w(s)x\psi_{1,\gamma}(s) ds$$

dennoch für $t \in [0, T]$ und $w \in L^2(0, t; \mathbb{R})$ im Raum $\mathcal{H}_{(0)}$ liegt. (Für $w \in H_0^1(0, t; \mathbb{R})$ ist $G_1(t)$ sogar in $\mathcal{H}_{(1)}$.)

Wir nutzen für den Nachweis dieses Regularisierungseffektes das folgende Lemma von K. Beauchard/ C. Laurent:

Lemma 11.7. *Sei $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $[0, +\infty)$, so dass $\omega_1 = 0$ und*

$$\omega_{k+1} - \omega_k > \gamma > 0.$$

Dann existiert eine nichtfallende Funktion

$$\begin{aligned} C : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ T &\mapsto C(T), \end{aligned}$$

so dass für jedes $T > 0$ und für jedes $g \in L^2(0, T)$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^T g(t) e^{i\omega_k t} dt \right|^2 \right)^{1/2} \leq C(T) \|g\|_{L^2(0, T)}.$$

Beweis. vgl. Corollary 4 in [12].

Lemma 11.8. Sei $t > 0$ und $w \in L^2(0, t; \mathbb{R})$ ($w \in H_0^1(0, t; \mathbb{R})$). Dann ist

$$G_1(t) := \int_0^t e^{iA_\gamma s} w(s) x \psi_{1, \gamma}(s) ds$$

ein Element des Raumes $\mathcal{H}_{(0)}$ ($\mathcal{H}_{(1)}$).

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \langle e^{iA_\gamma s} w(s) x \psi_{1, \gamma}(s), \varphi_{k, \gamma} \rangle ds \right) \varphi_{k, \gamma} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t w(s) e^{i(\lambda_{k, \gamma} - \lambda_{1, \gamma})s} ds \langle x \varphi_{1, \gamma}, \varphi_{k, \gamma} \rangle \right) \varphi_{k, \gamma}, \end{aligned}$$

und gemäß Lemma 11.7 existiert eine nichtfallende Funktion $C : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, so dass

$$\begin{aligned} \|G_1(t)\|_{\mathcal{H}_{(0)}}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t w(s) e^{i(\lambda_{k, \gamma} - \lambda_{1, \gamma})s} ds \right|^2 \frac{|\langle x \varphi_{1, \gamma}, \varphi_{k, \gamma} \rangle|^2}{|\langle x \varphi_{1, \gamma}, \varphi_{k, \gamma} \rangle|^2} \\ &\leq C(t)^2 \|w\|_{L^2(0, t)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Für $w \in H_0^1(0, t; \mathbb{R})$ hat man

$$\int_0^t w(s) e^{i(\lambda_{k, \gamma} - \lambda_{1, \gamma})s} ds = \begin{cases} - \int_0^t \dot{w}(s) s ds & \text{falls } k = 1 \\ - \int_0^t \dot{w}(s) \frac{e^{i(\lambda_{k, \gamma} - \lambda_{1, \gamma})s}}{i(\lambda_{k, \gamma} - \lambda_{1, \gamma})} ds & \text{falls } k \geq 2, \end{cases} \quad (11.27)$$

und es existiert eine nichtfallende Funktion $\tilde{C} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, so dass

$$\begin{aligned}
\|G_1(t)\|_{\mathcal{H}(1)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t w(s) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})s} ds \right|^2 \frac{|\langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2}{|\langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle|^2} \lambda_{k,\gamma}^2 \\
&= \left| \int_0^t \dot{w}(s) s ds \right|^2 \lambda_{1,\gamma}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \int_0^t \dot{w}(s) \frac{e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})s}}{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})} ds \right|^2 \lambda_{k,\gamma}^2 \\
&\leq \lambda_{1,\gamma}^2 t^2 \left(\int_0^t |\dot{w}(s)| ds \right)^2 \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \int_0^t \dot{w}(s) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})s} ds \right|^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_{1,\gamma}}{\lambda_{k,\gamma}}\right)^2} \\
&\leq \left(\lambda_{1,\gamma}^2 t^3 + \frac{\lambda_{2,\gamma}^2}{(\lambda_{2,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})^2} \tilde{C}(t)^2 \right) \|\dot{w}\|_{L^2(0,t)}^2 \\
&< \infty. \square
\end{aligned}$$

Dementsprechend gilt aufgrund der Isometrie des Operators e^{-itA_γ} in gewichteten L^2 -Räumen:

Lemma 11.9. *Sei $T > 0$, $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ ($w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$) und $\Psi_0 \in \mathcal{H}(0)$ ($\Psi_0 \in \mathcal{H}(1)$). Dann gehört die durch*

$$\Psi(t) = e^{-itA_\gamma} \Psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} (w(s)x\psi_{1,\gamma}(s)) ds \quad (11.28)$$

gegebene Funktion Ψ zu $C([0, T], \mathcal{H}(0))$ ($C([0, T], \mathcal{H}(1))$).

11.5 Exakte Kontrollierbarkeit im Fall $\gamma \neq 0$

11.5.1 Kontrollierbarkeit mittels L^2 -Kontrollfunktionen

Wir zeigen nun, dass jeder beliebige Zielzustand $\Psi_f \in \mathcal{H}(0)$ mit der Eigenschaft $\Re \langle \Psi_f(T), \psi_{1,\gamma}(T) \rangle = 0$, in einer beliebigen Zeit $T > 0$, von jedem beliebigen Anfangszustand $\Psi_0 \in \mathcal{H}(0)$ mit $\Re \langle \Psi_0, \psi_{1,\gamma}(0) \rangle = 0$, vermöge der Gleichung (11.6) mit $l = 1$ (Grundzustand) mittels einer Kontrollfunktion $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ erreichbar ist, d.h. das linearisierte System (11.6), (11.7) ist (im Fall $l = 1$) exakt kontrollierbar. Äquivalent dazu ist, gemäß § 11.1, die Existenz einer Lösung $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ für das Momentenproblem (11.14), welche wir mit Korollar 4.3 zeigen werden.

Theorem 11.10. *Sei γ_1 wie in Lemma 11.6 und $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$. Dann hat das Momentenproblem (11.14) (mit $l = 1$), für jeden beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ und beliebige Werte $\Psi_0, \Psi_f \in \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}(0)(\alpha, \beta, \gamma)$ mit*

$$\Re \langle \Psi_0, \psi_{1,\gamma}(0) \rangle_{L^2} = \Re \langle \Psi_f, \psi_{1,\gamma}(T) \rangle_{L^2} = 0, \quad (11.29)$$

eine Lösung $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$.

Beweis.

Es seien $\Psi_0, \Psi_f \in \mathcal{H}_{(0)}$ und erfüllen die Eigenschaft (11.29).

Da für alle $\Psi \in \mathcal{H}_{(0)}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle \Psi, \varphi_{k,\gamma} \rangle}{b_{k,\gamma}} \right|^2 < \infty,$$

ist die Folge $\left(\frac{\langle \Psi, \varphi_{k,\gamma} \rangle}{b_{k,\gamma}} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, und somit gilt dies auch für die Folge $(d_{k,\gamma})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$d_{k,\gamma} = \frac{e^{i\lambda_{k,\gamma}T} \langle \Psi_f, \varphi_{k,\gamma} \rangle - \langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle}{i b_{k,\gamma}}.$$

Aufgrund der Reellwertigkeit des Ausdrucks $b_{1,\gamma} = \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{1,\gamma} \rangle$ und der Eigenschaft (11.29), ist außerdem $d_{1,\gamma} \in \mathbb{R}$.

Außerdem existiert gemäß (7.41) eine Konstante $C > 0$, so dass für $\mu_{k,\gamma} := \lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma}$ und große Werte $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu_{k+1,\gamma} - \mu_{k,\gamma} = \lambda_{k+1,\gamma} - \lambda_{k,\gamma} \geq C k^{1/3}.$$

Es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_{k+1,\gamma} - \mu_{k,\gamma}) = +\infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Korollars 4.3 erfüllt und die Existenz einer Lösung $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ für (11.14) ist gezeigt. \square

Der Raum $\mathcal{H}_{(0)}$ ist so definiert, dass er der größtmögliche Raum ist, in dem das System (11.6), (11.7) im Falle $l = 1$ mittels L^2 -Kontrollfunktionen kontrollierbar ist.

11.5.2 Kontrollierbarkeit mittels H^1 -Kontrollfunktionen

Wir haben in § 11.1 gezeigt, dass die Gleichung $\Psi(T) = \psi_f$ für die Lösung Ψ des linearen Kontrollsystems (11.6), (11.7), mit $l = 1$, äquivalent ist zu dem trigonometrischen Momentenproblem

$$\int_0^T w(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t} dt = d_{k,\gamma} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (11.30)$$

mit

$$d_{k,\gamma} := \frac{e^{i\lambda_{k,\gamma}T} \langle \Psi_f, \varphi_{k,\gamma} \rangle - \langle \Psi_0, \varphi_{k,\gamma} \rangle}{i \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle}. \quad (11.31)$$

Nehmen wir nun an, die Kontrollfunktion $w(t)$ in (11.6) (und folglich auch in (11.30)) habe eine höhere Regularität als bisher angenommen: Sei etwa

$w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$.

Dann ist dank partieller Integration im Falle $k \neq 1$

$$\int_0^T w(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t} dt = - \int_0^T \dot{w}(t) \frac{e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t}}{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})} dt,$$

und im Falle $k = 1$

$$\int_0^T w(t) dt = - \int_0^T \dot{w}(t) t dt.$$

Das Momentenproblem (11.30) ist daher für $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ äquivalent zu

$$\int_0^T \dot{w}(t) dt = 0, \quad (11.32)$$

$$\int_0^T \dot{w}(t) t dt = -d_{1,\gamma}, \quad (11.33)$$

$$\int_0^T \dot{w}(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t} dt = -i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})d_{k,\gamma} \quad (k \geq 2). \quad (11.34)$$

Wir zeigen nun mit Hilfe von Korollar 4.4 die exakte Kontrollierbarkeit des linearen Systems (11.6), (11.7), mit $l = 1$ und Kontrollfunktionen $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$, in beliebiger Zeit $T > 0$, für Anfangszustände aus dem Raum $\mathcal{H}_{(1)} \cap T_{\mathbb{S}}(\varphi_{1,\gamma})$ und Zielzustände aus $\mathcal{H}_{(1)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$:

Theorem 11.11. *Sei $\gamma \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$. Dann hat das Momentenproblem (11.30) für jeden beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ und beliebige Werte $\Psi_0, \Psi_f \in \mathcal{H}_{(1)} = \mathcal{H}_{(1)}(\alpha, \beta, \gamma)$ mit*

$$\Re \langle \Psi_0, \psi_{1,\gamma}(0) \rangle_{L^2} = \Re \langle \Psi_f, \psi_{1,\gamma}(T) \rangle_{L^2} = 0 \quad (11.35)$$

eine Lösung $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$.

Beweis. Wir haben im Beweis zu Theorem 11.10 bereits nachgewiesen, dass für $\mu_{k,\gamma} := \lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_{k+1,\gamma} - \mu_{k,\gamma}) = +\infty,$$

und dass für Ψ_0, Ψ_f , die die Eigenschaft (11.35) erfüllen, $\tilde{d} := -d_{1,\gamma} \in \mathbb{R}$.

Für $\Psi_0, \Psi_f \in \mathcal{H}_{(1)}$ ist die Folge $(d'_{k,\gamma})_{k \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$d'_{k,\gamma} := -i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})d_{k,\gamma},$$

zudem in $l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Daher hat das zu (11.30) äquivalente System (11.32), (11.33), (11.34) gemäß Korollar 4.4 eine Lösung $v(t) := \dot{w}(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ und (11.30) daher eine Lösung $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$. \square

Offenbar genügt die Zugehörigkeit der Anfangs- und Zielzustände Ψ_0 bzw. Ψ_f zu $\mathcal{H}_{(0)}$ nicht, damit die Folge $(d'_{k,\gamma})_{k \in \mathbb{N}}$ in $l_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ liegt. Nicht jeder Zielzustand $\Psi_f \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$ lässt sich daher vermöge (11.6), (11.7) (mit $l = 1$) und einer Kontrollfunktion $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$, ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\varphi_{1,\gamma})$, erreichen.

Wir werden nun zeigen, dass dies noch nicht einmal mittels solcher H^1 -Kontrollfunktionen gelingt, für die keine Nullrandbedingungen gefordert werden:

Theorem 11.12. *Sei $T > 0$. Nicht jeder Zielzustand $\Psi_f \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$ lässt sich vermöge (11.6), (11.7) (mit $l = 1$) mit einer Kontrollfunktion $w \in H^1(0, T; \mathbb{R})$, von einem beliebigen Anfangszustand $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\varphi_{1,\gamma})$ aus, erreichen.*

Beweis. Wir nehmen an, jeder beliebige Zielzustand $\Psi_f \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$ ließe sich mittels einer Kontrollfunktion $w \in H^1(0, T; \mathbb{R})$, zu einem beliebigen Zeitpunkt $T > 0$, von einem beliebigen Anfangszustand $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\varphi_{1,\gamma})$ aus, vermöge des Systems (11.6), (11.7) (mit $l = 1$) erreichen. Dann existierte für eine beliebige Folge $d = (d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ eine Funktion $w \in H^1(0, T; \mathbb{R})$, so dass

$$\int_0^T w(t) e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t} dt = d_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (11.36)$$

Da $H^1(0, T; \mathbb{R}) \subset W^{1,1}((0, T), \mathbb{R}) \subset C([0, T], \mathbb{R})$, existiert eine Konstante $M > 0$ mit

$$|w(t)| \leq M \quad \forall t \in [0, T].$$

Mittels partieller Integration und dank der Hölderschen Ungleichung erhalten wir für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} |d_k| &\leq \left| \frac{1}{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})} \right| \left(|w(T)e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})T}| + |w(0)| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^T \dot{w}(t)e^{i(\lambda_{k,\gamma} - \lambda_{1,\gamma})t} dt \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k,\gamma} \left(1 - \frac{\lambda_{1,\gamma}}{\lambda_{k,\gamma}}\right)} \left(|w(T)| + |w(0)| + \|\dot{w}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \sqrt{T} \right) \\ &\leq \frac{2M + \sqrt{T} \|w\|_{H^1(0,T;\mathbb{R})}}{\lambda_{k,\gamma} \left(1 - \frac{\lambda_{1,\gamma}}{\lambda_{2,\gamma}}\right)}, \end{aligned}$$

und für $k \rightarrow \infty$ existiert laut (7.22) ein $C > 0$, so dass

$$|d_k| \leq C \frac{1}{k^{4/3}}. \quad (11.37)$$

Diese Ungleichung gilt aber beispielsweise nicht für die Folge $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} := (1/k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$: Ein Widerspruch zur Annahme! \square

Offenbar existieren Zustände $\Psi_f \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$, die sich nur mittels Kontrollfunktionen $w \in L^2(0, T; \mathbb{R}) \setminus H^1(0, T; \mathbb{R})$ von einem Zustand $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\varphi_{1,\gamma})$ aus erreichen lassen, d.h. eine exakte Kontrollierbarkeit des linearen Systems (11.6), (11.7) in $\mathcal{H}_{(0)}$ ist mittels H^1 -Kontrollen nicht möglich. Damit ist unser Ergebnis aus Theorem 11.10 optimal.

11.6 Numerische Auswertungen der Koeffizienten $b_{k,\gamma}$

Da keine explizite Formel für die Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) bekannt ist, ist es aufgrund des oszillatorischen Charakters der Funktionen $\varphi_{k,\gamma}$ auf dem für die Größenordnung von

$$b_{k,\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_{1,\gamma} \bar{\varphi}_{k,\gamma} dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

maßgeblichen Intervall $(X_{k,\gamma}^-, X_{k,\gamma}^+)^1$ schwierig, auf rein analytischem Weg eine Abschätzung von $|b_{k,\gamma}|$ nach unten vorzunehmen. Wir behelfen uns daher mit numerischen Analysen.

Für die ersten Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ lässt sich numerisch verifizieren, dass diese von unten beschränkt sind.

So gilt etwa für alle $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ und $0 < \gamma \leq \alpha/2$

$$|b_{k,\gamma}| > \frac{\gamma}{2} e^{-\alpha^{-1/4} \lambda_{k,\gamma}^{3/4}}. \quad (11.38)$$

Diese untere Schranke ist so gewählt, dass die Ungleichung (11.38) trotz etwaiger kleiner numerischer Rundungsfehler Gültigkeit haben sollte. Beispielfhaft sind in Tabelle 11.1 die Ergebnisse numerischer Auswertungen für die ersten Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ im Falle $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0,0005$ dargestellt².

Wie zu erwarten war, sind die Werte $|b_{k,\gamma}|$ für ungerade k besonders klein: Schließlich gilt für diese k , wie bereits erläutert, aufgrund von Symmetrieeigenschaften $b_{k,0} = 0$. Man sieht, dass $s_k := \frac{\gamma}{2} e^{-\alpha^{-1/4} \lambda_{k,\gamma}^{3/4}}$ für alle Werte von k kleiner als $|b_{k,\gamma}|$ ist. Entsprechend sind die Quotienten q_k aus s_k und $|b_{k,\gamma}|$ kleiner als Eins. Außerdem scheinen die Folgen $(q_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend zu sein. Wir gehen daher davon aus, dass die untere Schranke s_k auch für große $k \in \mathbb{N}$ ihre Gültigkeit behält.

Definieren wir

$$\tilde{b}_{k,\gamma} := \begin{cases} \frac{|b_{k,\gamma}|}{\gamma} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ |b_{k,\gamma}| & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad (11.39)$$

¹vgl. Kapitel 8: Außerhalb dieses Intervalls hat man für die Funktionen $\varphi_{k,\gamma}(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) ein exponentielles Abklingen gegen Null.

²Diese Ergebnisse wurden in GNU Octave 3.8.0 mittels des Programmcodes in Anhang B.2 ermittelt (Tabelle A).

k	$\lambda_{k,\gamma}$	$ b_{k,\gamma} $	$s_k := \frac{\gamma}{2} e^{-\alpha^{-1/4} \lambda_{k,\gamma}^{3/4}}$	$q_k := \frac{s_k}{ b_{k,\gamma} }$
1	1.3924	9.3802e-005	6.9386e-005	7.3971e-001
2	4.6488	5.5257e-001	1.0543e-005	1.9081e-005
3	8.6550	1.3917e-005	1.6087e-006	1.1559e-001
4	13.1568	2.1995e-002	2.4990e-007	1.1362e-005
5	18.0576	7.3595e-007	3.9229e-008	5.3304e-002
6	23.2974	8.6062e-004	6.2024e-009	7.2069e-006
7	28.8353	3.3964e-008	9.8578e-010	2.9024e-002
8	34.6408	3.4133e-005	1.5730e-010	4.6085e-006
9	40.6904	1.5002e-009	2.5181e-011	1.6786e-002
10	46.9650	1.3672e-006	4.0415e-012	2.9560e-006
11	53.4491	6.4982e-011	6.5006e-013	1.0004e-002
12	60.1295	5.5173e-008	1.0475e-013	1.8986e-006
13	66.9950	2.7870e-012	1.6906e-014	6.0662e-003
14	74.0359	2.2390e-009	2.7324e-015	1.2203e-006
15	81.2435	1.0820e-013	4.4214e-016	4.0862e-003

Tabelle 11.1: Die Beträge der ersten 15 Koeffizienten $b_{k,\gamma}$ mit einer unteren Schranke s_k im Fall $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0.0005$

so lassen sich die Werte $\tilde{b}_{k,\gamma}$ für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, beispielsweise für $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0,0005$ durch

$$\tilde{b}_{k,\gamma} \approx 5,3586 \exp\left(-0,8709 \lambda_{k,\gamma}^{3/4}\right)$$

sehr gut approximieren. Abbildung 11.1 zeigt die 14 Wertepaare $(\lambda_{k,\gamma}^{3/4}, \tilde{b}_{k,\gamma})$ für $k = 2, \dots, 15$, nebst der passenden exponentiellen Ausgleichsfunktion $f(x) = 5,3586 \exp(-0,8709 x)$, die über die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wurde³. Tabelle 11.2 enthält neben $\lambda_{k,\gamma}^{3/4}$ die zugehörigen exakten Werte $\tilde{b}_{k,\gamma}$, die durch f approximierten Werte sowie die quadrierten Differenzen δ^2 zwischen den exakten und den approximierten Werten. Der hohe Wert des Bestimmtheitsmaßes $R^2 = 0,9945$ (s. Abb. 11.1) in Verbindung mit der fallenden Tendenz der Fehlerquadrate spricht für eine gute Qualität der Approximation.

Es folgt die Existenz positiver Konstanten C_1, C_2 , so dass

$$C_1 \exp(-\tau \lambda_{k,\gamma}^{3/4}) \leq \tilde{b}_{k,\gamma} \leq C_2 \exp(-\tau \lambda_{k,\gamma}^{3/4})$$

für $\tau := 0,8709$ und folglich

$$C_1 \gamma \exp(-\tau \lambda_{k,\gamma}^{3/4}) \leq |b_{k,\gamma}| \leq C_2 \exp(-\tau \lambda_{k,\gamma}^{3/4}). \quad (11.40)$$

Auch für andere Parameterwerte α, β, γ existieren positive Konstanten C_0 und τ , so dass

$$\tilde{b}_{k,\gamma} \approx C_0 \exp\left(-\tau \lambda_{k,\gamma}^{3/4}\right).$$

³mittels des Programmcodes in Anhang B.2

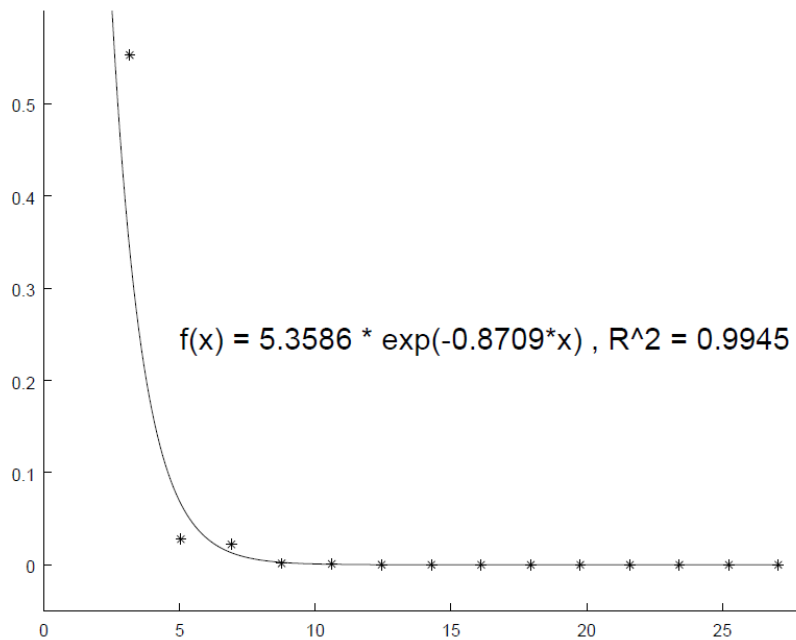


Abbildung 11.1: Die Koeffizienten $\tilde{b}_{k,\gamma}$ in Abhängigkeit von $\lambda_{k,\gamma}^{3/4}$ ($k = 2, 3, \dots$) für $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0,0005$

k	$\lambda_{k,\gamma}^{3/4}$	$\tilde{b}_{k,\gamma}$	$5,3586 \exp(-0,8709 \lambda_{k,\gamma}^{3/4})$	δ^2
1	1.2818	1.8760e-001	1.7549	2.4565
2	3.1660	5.5257e-001	3.4011e-001	4.5136e-002
3	5.0461	2.7834e-002	6.6151e-002	1.4683e-003
4	6.9082	2.1995e-002	1.3069e-002	7.9663e-005
5	8.7598	1.4719e-003	2.6057e-003	1.2856e-006
6	10.6043	8.6062e-004	5.2277e-004	1.1414e-007
7	12.4435	6.7928e-005	1.0536e-004	1.4011e-009
8	14.2788	3.4133e-005	2.1308e-005	1.6449e-010
9	16.1109	3.0003e-006	4.3214e-006	1.7452e-012
10	17.9403	1.3672e-006	8.7837e-007	2.3899e-013
11	19.7677	1.2996e-007	1.7888e-007	2.3923e-015
12	21.5931	5.5173e-008	3.6485e-008	3.4923e-016
13	23.4170	5.5739e-009	7.4523e-009	3.5282e-018
14	25.2396	2.2390e-009	1.5240e-009	5.1133e-019
15	27.0609	2.1640e-010	3.1198e-010	9.1348e-021

Tabelle 11.2: Eine Approximation der Werte $\tilde{b}_{k,\gamma}$ mit Fehlerquadraten δ^2 im Fall $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0.0005$

In Tabelle 11.3 finden sich die Parameterwerte C_0 und τ und die zugehörigen R^2 -Werte für die Regressionsfunktionen $f(x) = C_0 \exp(\tau x)$ der Wertepaare

$(\lambda_{k,\gamma}^{3/4}, \tilde{b}_{k,\gamma})$ für verschiedene Parameterwerte α, β, γ . Wie im Fall $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0,0005$ sind dies Ergebnisse numerischer Auswertungen mittels des Programmcodes in Anhang **B.2**. Aufgrund des durchweg hohen Wertes für R^2 , gehen wir davon aus, dass man für sämtliche Parameterkombinationen α, β, γ mit $0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq \alpha$ und $0 < \gamma \leq \alpha/2$, Abschätzungen der Art (11.40) erhalten kann.

α	β	γ	C_0	τ	R^2
1	1	0.5	5.2313	0.8688	0.9944
1	0.5	0.5	4.8403	0.8599	0.9954
1	0	0.5	4.4948	0.8499	0.9964
1	0	0.0005	4.5333	0.8502	0.9966
0.5	0.5	0.1	6.5241	1.0261	0.9979
0.5	0	0.1	5.8172	1.0080	0.9989
0.5	0	0.0001	5.8313	1.0082	0.9989
0.2	0.2	0.1	8.7368	1.2788	0.9996
0.2	0	0.1	8.0432	1.2615	0.9996
0.2	0	0.00003	8.0075	1.2607	0.9996

Tabelle 11.3: Parameterwerte C_0 und τ für die Regressionsfunktionen $f(x) = C_0 \exp(-\tau x)$ der Wertepaare $(\lambda_{k,\gamma}^{3/4}, \tilde{b}_{k,\gamma})$ für diverse Werte α, β, γ

Wegen (11.19) und (11.38) gilt für die Gewichte $\omega_{k,\gamma} = \frac{1}{|b_{k,\gamma}|^2}$ von $\mathcal{H}_{(0)}(\alpha, \beta, \gamma)$ mit $0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq \alpha, 0 < \gamma \leq \alpha/2$ und für ein $\tau^* \leq \alpha^{1/4}$:

$$C_1 \exp\left(2\tau^* \lambda_{k,\gamma}^{3/4}\right) \leq \omega_{k,\gamma} \leq C_2 \exp\left(2\alpha^{1/4} \lambda_{k,\gamma}^{3/4}\right),$$

und wir können den Raum $\mathcal{H}_{(0)}$ für diese Parameterwerte nun gemäß der Definition (10.1),(10.2) einordnen als einen Interpolationsraum zwischen zwei abstrakten Gevrey-Räumen der Ordnung $4/3$ für den Operator A_γ :

$$D\left(\exp\left(\alpha^{-1/4} A_\gamma^{3/4}\right)\right) \subset \mathcal{H}_{(0)} \subset D\left(\exp\left(\tau^* A_\gamma^{3/4}\right)\right).$$

Im Falle $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0,0005$ haben wir dank (11.40) sogar

$$\mathcal{H}_{(0)} = D\left(\exp\left(\tau A_\gamma^{3/4}\right)\right), \quad (11.41)$$

mit $\tau = 0,8709$. Da wir aufgrund der Ergebnisse in Tabelle 11.3 und weiterer getesteter Wertekombinationen für das Parametertripel (α, β, γ) mit ähnlichen Ergebnissen, davon ausgehen, dass für beliebige Parametertripel (α, β, γ) , die die Bedingungen

$$0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq \alpha, 0 < \gamma \leq \alpha/2 \quad (11.42)$$

erfüllen, ein $\tau > 0$ existiert, so dass eine Abschätzung der Art (11.40) gilt, entspricht $\mathcal{H}_{(0)}$ vermutlich in allen diesen Fällen einem Gevrey-Raum der Art (11.41).

Kapitel 12

Lokale Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems bei gegebener Invarianzeigenschaft

Gemäß des Linearisierungsprinzips, können wir anhand der Ergebnisse für das linearisierte System (im Fall $\gamma \neq 0$) maximal eine lokale exakte Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems in der Nähe der Grundzustandstrajektorie ($\psi_{1,\gamma}, u \equiv 0$) mittels L^2 -Kontrollen in dem Raum $\mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S}$ erwarten (bzw. in $\mathcal{H}_{(1)} \cap \mathbb{S}$ mittels H_0^1 -Kontrollen).

Da der Operator $iB : \varphi \mapsto ix\varphi$ nicht beschränkt ist von $\mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S}$ (beispielsweise ist $\varphi_{1,\gamma} \in \mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S}$, aber $ix\varphi_{1,\gamma}$ ist offensichtlich kein Element von $\mathcal{H}_{(0)}$), findet das Theorem 3.5 von J.M. Ball, J.E. Marsden und M. Slemrod für das bilineare Kontrollproblem mit Anfangszuständen aus $\mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S}$ keine Anwendung. Dementsprechend können wir also auf eine (lokale) exakte Kontrollierbarkeit des Systems in $\mathcal{H}_{(0)} \cap \mathbb{S}$ mittels L^2 -Kontrollen hoffen.

Die aus kontrolltheoretischer Hinsicht positive Nicht-Beschränktheit des Operators iB in den Räumen $\mathcal{H}_{(s)}$ ($s = 0, 1$) stellt uns allerdings vor ein Problem bezüglich der Wohldefiniertheit des Cauchy-Problems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A_\gamma \psi - u(t)x\psi - f(t, x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (12.1)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x) \quad (12.2)$$

in diesen Räumen¹.

Sofern eine milde Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(s)})$ für dieses Problem existiert, genügt sie für jedes $t \in [0, T]$ der Integralgleichung

$$\psi(t) = e^{-itA_\gamma} \psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} (u(s)x\psi(s) + f(s)) ds, \quad (12.3)$$

¹Ist $f(t, x) \equiv 0$, so ist (12.1),(12.2) unser bilineares Ausgangssystem, im Falle $u(t) \equiv 0$ ($t \in [0, T]$) und $f(t, x) = w(t)x\psi_{1,\gamma}$ handelt es sich hierbei um das um den Grundzustand $\psi_{1,\gamma}(t, x) = e^{-i\lambda_{1,\gamma}t}\varphi_{1,\gamma}(x)$ für $u \equiv 0$ linearisierte System.

und die rechte Seite gehört zu $\mathcal{H}_{(s)}$.

Da der Operator e^{-itA_γ} isometrisch ist in gewichteten L^2 -Räumen, ist offensichtlich, dass der Term $e^{-itA_\gamma}\psi_0$ für Anfangszustände $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(s)}$ ebenfalls in diesem Raum liegt.

Dass das Integral

$$i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} (u(s)x\psi(s) + f(s)) ds \quad (12.4)$$

zu $\mathcal{H}_{(s)}$ gehört, ist hingegen nicht direkt erkennbar: Schließlich ist aufgrund der Nicht-Beschränktheit des Operators iB nicht klar, ob der Term $iu(s)x\psi$ in dem Raum liegt. Und auch falls $f(s) \notin \mathcal{H}_{(s)}$, gehört das Integral (12.4) möglicherweise nicht zu $\mathcal{H}_{(s)}$.

In § 11.4 haben wir einen Regularisierungseffekt für das Integral

$$G_1(t) := \int_0^t e^{iA_\gamma s} w(s)x\psi_{1,\gamma}(s) ds$$

nachweisen können: Obwohl der Term $x\psi_{1,\gamma}(s)$ für kein $s \in [0, t]$ im Raum $\mathcal{H}_{(0)}$ liegt (und erst recht nicht in $\mathcal{H}_{(1)}$), ist $G_1(t) \in \mathcal{H}_{(0)} \forall t \in [0, T]$, sofern $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ ist ($G_1(t) \in \mathcal{H}_{(1)} \forall t \in [0, T]$, falls $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$).

Wir gehen davon aus, dass ein solcher Regularisierungseffekt nicht nur für $\psi_{1,\gamma}$, sondern auch für beliebige Funktionen aus dem Raum $C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ gegeben ist.

Im Definitionsbereich $D(A)$ des Hamilton-Operators impliziert die in Kapitel 6 nachgewiesene Existenz einer milden Lösung $\psi \in C([0, T], D(A))$ beispielsweise ebenfalls einen solchen Effekt: Obwohl der Operator $B : \varphi \mapsto x\varphi$ nicht beschränkt ist in $D(A)$, gehört das Integral

$$G(t) := \int_0^t e^{iAs} u(s)x\psi(s) ds$$

für $t \in [0, T]$ und $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ offensichtlich zu $D(A)$.

12.1 Regularisierungseffekt

Wir benötigen für die weiteren Untersuchungen den folgenden Regularisierungseffekt für beliebige Funktionen $\varphi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$:

Lemma 12.1. *Sei $T > 0$, $w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ und $\varphi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$. Dann gehört die Funktion*

$$G : t \mapsto \int_0^t e^{isA_\gamma} w(s) x \varphi(s) ds \quad (12.5)$$

zu $C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ und für jedes $t \in [0, T]$ existiert eine Konstante $c_1 = c_1(t) > 0$, so dass

$$\|G\|_{C([0, t], \mathcal{H}_{(0)})} \leq c_1(t) \|w\|_{L^2(0, t; \mathbb{R})} \|\varphi\|_{C([0, t], \mathcal{H}_{(0)})}. \quad (12.6)$$

Die Konstanten $c_1(t)$ sind gleichmäßig beschränkt für t aus einem beschränkten Intervall.

In dem speziellen Fall, wenn $w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ und $\varphi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$, ist $G \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$ und es existiert für jedes $t \in [0, T]$ eine Konstante $c_2 = c_2(t) > 0$, so dass

$$\|G(t)\|_{C([0, t], \mathcal{H}_{(1)})} \leq c_2(t) \|w\|_{H_0^1(0, t; \mathbb{R})} \|\varphi\|_{C([0, t], \mathcal{H}_{(1)})}, \quad (12.7)$$

mit gleichmäßig beschränkten Konstanten $c_2(t)$, für t aus einem beschränkten Intervall.

Bemerkung 12.2. *Im Spezialfall $\varphi(s) = \psi_{1, \gamma}(s) = e^{-i\lambda_{1, \gamma}s} \varphi_{1, \gamma}$ ist dies die Aussage von Lemma 11.8. Die Ungleichungen (12.6) und (12.7) ergeben sich in diesem Fall aus dem Beweis von Lemma 11.8 und der Tatsache, dass*

$$1 = \|\varphi_{1, \gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\varphi_{1, \gamma}\|_{\mathcal{H}_{(0)}} \leq \|\varphi_{1, \gamma}\|_{\mathcal{H}_{(1)}}.$$

12.2 Wohldefiniertheit in $\mathcal{H}_{(0)}$ und $\mathcal{H}_{(1)}$

Ist der Regularisierungseffekt aus Lemma 12.1 gegeben, so impliziert dieser die Existenz einer eindeutigen milden Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ für das bilineare Anfangswertproblem

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A_\gamma \psi - u(t)x\psi - \sum_{i=1}^n w_i(t)x\sigma_i \quad (x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (12.8)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (12.9)$$

falls $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)}$, $u, w_i \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ und $\sigma_i \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ ($i = 1, \dots, n$) (ebenso wie diejenige einer milden Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$, im Falle $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(1)}$, $u, w_i \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ und $\sigma_i \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$ ($i = 1, \dots, n$)).

Gilt Lemma 12.1, so hat man

Proposition 12.3. *Es sei $T > 0$, $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(0)}$, $u, w_i \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ und $\sigma_i \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ ($i = 1, \dots, n$). Dann hat das Anfangswertproblem (12.8), (12.9) eine eindeutige (milde) Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$, die für alle $t \in [0, T]$ die folgende Integralgleichung in $\mathcal{H}_{(0)}$ erfüllt:*

$$\psi(t) = e^{-itA_\gamma} \psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} \left[u(s)x\psi(s) + \sum_{i=1}^n w_i(s)x\sigma_i(s) \right] ds. \quad (12.10)$$

Außerdem existiert für jedes $R > 0$ ein $C = C(T, R) > 0$, so dass für diese milde Lösung, unter der Voraussetzung $\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} < R$, die folgende Ungleichung gilt:

$$\|\psi\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})} \leq C \left(\|\psi_0\|_{\mathcal{H}_{(0)}} + \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} \|\sigma_i\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})} \right). \quad (12.11)$$

Beweis. Wir zeigen für $T > 0$ die Existenz einer eindeutigen milden Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ für (12.8), (12.9), mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, und betrachten hierfür die Abbildung

$$\begin{aligned} F : C([0, T], \mathcal{H}_{(0)}) &\rightarrow C([0, T], \mathcal{H}_{(0)}) \\ \psi &\mapsto F(\psi) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (F(\psi))(t) := e^{-itA_\gamma} \psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} \left[u(s)x\psi(s) + \sum_{i=1}^n w_i(s)x\sigma_i(s) \right] ds \\ , \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Der Anfangszustand ψ_0 sei ein Element von $\mathcal{H}_{(0)}$. Wenn $u, w_i \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ und $\psi, \sigma_i \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$, dann folgt aufgrund der Isometrie des Operators e^{-itA_γ} in $\mathcal{H}_{(0)}$ und mit Lemma 12.1, dass F tatsächlich in den Raum

$C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ abbildet.

Nun ist für jedes $t \in [0, T]$ und $\psi_1, \psi_2 \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$

$$F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t) = ie^{-itA_\gamma} \int_0^t e^{isA_\gamma} u(s)x(\psi_1 - \psi_2)(s)ds,$$

und man erhält mit (12.6) für eine Konstante $c_1(T) > 0$:

$$\|F(\psi_1) - F(\psi_2)\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})} \leq c_1(T) \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} \|\psi_1 - \psi_2\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})}.$$

Ist $\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} < 1/c_1(T)$, dann ist F offenbar eine Kontraktionsabbildung, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein eindeutiges $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ mit $F(\psi) = \psi$. Für diesen Fixpunkt erhält man dank der Isometrie des Operators e^{-itA_γ} und Ungleichung (12.6):

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})} &\leq \|\psi_0\|_{\mathcal{H}_{(0)}} + \tilde{c}_1(T) \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} \|\psi\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(T) \|w_i\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} \|\sigma_i\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})}, \end{aligned}$$

mit $\tilde{c}_1(T), \tilde{c}_i(T) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Für Funktionen u mit $\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} < 1/\tilde{c}_1(T)$ erhalten wir hiermit die Ungleichung (12.11).

Sei nun $\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} \geq 1/\tilde{c}_1(T)$. Dann wählen wir eine Zerlegung $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m = T$ des Intervalles $[0, T]$, so dass $\|u\|_{L^2(T_j, T_{j+1}; \mathbb{R})} < 1/\tilde{c}_1(T)$ für $j = 0, 1, \dots, m-1$. Wie oben erhalten wir dann die Existenz eindeutiger Lösungen $\psi \in C([T_j, T_{j+1}], \mathcal{H}_{(0)})$, die wir zu einer eindeutigen stetigen Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ zusammensetzen können, welche (12.11) erfüllt.

Da die Konstante $\tilde{c}_1(T)$ gleichmäßig beschränkt ist auf beschränkten Intervallen, hängt die zu wählende Zerlegung des Intervalles $[0, T]$ lediglich von der Konstanten $R > 0$ ab, für die $\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})} < R$ ist, und die Konstante C in (12.11) hängt entsprechend nur von T und R ab. \square

Auf analoge Weise zeigt man **unter der Voraussetzung, dass Lemma 12.1 Gültigkeit hat:**

Proposition 12.4. *Es sei $T > 0$, $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(1)}$, $u, w_i \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ und $\sigma_i \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$ ($i = 1, \dots, n$). Dann hat das Anfangswertproblem (12.8), (12.9) eine eindeutige (milde) Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$, die für alle $t \in [0, T]$ die folgende Integralgleichung in $\mathcal{H}_{(1)}$ erfüllt:*

$$\psi(t) = e^{-itA_\gamma} \psi_0 + i \int_0^t e^{-i(t-s)A_\gamma} \left[u(s)x\psi(s) + \sum_{i=1}^n w_i(s)x\sigma_i(s) \right] ds. \quad (12.12)$$

Außerdem existiert für jedes $R > 0$ ein $C = C(T, R) > 0$, so dass für diese milde Lösung, unter der Voraussetzung $\|u\|_{H_0^1(0, T; \mathbb{R})} < R$, die folgende Ungleichung gilt:

$$\|\psi\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})} \leq C \left(\|\psi_0\|_{\mathcal{H}_{(1)}} + \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{H_0^1(0, T; \mathbb{R})} \|\sigma_i\|_{C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})} \right). \quad (12.13)$$

12.3 C^1 -Regularität der Endpunkt-Abbildung

Wir führen nun für $T > 0$ die Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} P_T : L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) &\rightarrow T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \\ \varphi &\mapsto P_T(\varphi) \end{aligned}$$

ein, sowie die Endpunkt-Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta_T : L^2(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \\ u &\mapsto P_T(\psi(T)), \end{aligned} \quad (12.14)$$

für die Lösung $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ von

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A_{\gamma} \psi - u(t)x\psi \quad (x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (12.15)$$

$$\psi(0) = \varphi_{1,\gamma}, \quad (12.16)$$

mit einer Kontrollfunktion $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$.

Wir zeigen, dass - **die Richtigkeit von Lemma 12.1 vorausgesetzt** - Θ_T die folgenden Eigenschaften hat:

Proposition 12.5. *Sei $T > 0$. Dann ist die durch (12.14) definierte Abbildung Θ_T eine C^1 -Abbildung.*

Überdies gilt für beliebige $u, w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$

$$d\Theta_T(u).w = P_T(\Psi(T)), \quad (12.17)$$

mit der milden Lösung $\Psi \in C([0, T]; \mathcal{H}_{(0)})$ des um (ψ, u) linearisierten Systems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = A_{\gamma} \Psi - u(t)x\Psi - w(t)x\psi, \quad (12.18)$$

$$\Psi(0, x) = 0. \quad (12.19)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass Θ_T differenzierbar ist und dass für das Differential $d\Theta_T$ Gleichung (12.17) gilt.

Sei ψ die milde Lösung von (12.15), (12.16) und Ψ die milde Lösung von (12.18), (12.19).

Außerdem sei $\tilde{\psi} \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ die Lösung des folgenden Systems:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = A_{\gamma} \tilde{\psi} - (u + w)(t)x\tilde{\psi}, \quad (12.20)$$

$$\tilde{\psi}(0, x) = \varphi_{1,\gamma}. \quad (12.21)$$

Wir definieren nun die Differenzfunktion $\Delta := \tilde{\psi} - \psi - \Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_{(0)}$, welche offensichtlich eine milde Lösung des Anfangswertproblems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta = A_{\gamma} \Delta - (u + w)(t)x\Delta - w(t)x\Psi, \quad (12.22)$$

$$\Delta(0, x) = 0, \quad (12.23)$$

ist.

Wir zeigen nun, dass gilt:

$$\|\Delta\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} = o(\|w\|_{L^2}) \quad \text{für } \|w\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (12.24)$$

Sei $R > 0$ so gewählt, dass

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} < R \quad \text{und} \quad \|u + w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} < R.$$

Dann existieren gemäß (12.11) positive Konstanten $C_j = C_j(T, R)$ ($j = 0, 1, 2$), so dass

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} &\leq C_0 \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\Psi\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \\ &\leq C_0 C_1 \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2 \|\psi\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \\ &\leq C_0 C_1 C_2 \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2 \|\varphi_{1,\gamma}\|_{\mathcal{H}_{(0)}}, \end{aligned}$$

womit (12.24) folgt.

Wir zeigen nun die lokale Lipschitz-Stetigkeit der Abbildung $d\Theta_T$.

Seien $u, \tilde{u}, w \in L^2(0, T; \mathbb{R})$, $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ die (milde) Lösung des bilinearen Systems (12.15), (12.16), $\Psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ die Lösung des linearisierten Systems (12.18), (12.19), $\tilde{\psi} \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ die Lösung des bilinearen Systems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = A_\gamma \tilde{\psi} - \tilde{u}(t)x\tilde{\psi}, \quad (12.25)$$

$$\tilde{\psi}(0, x) = \varphi_{1,\gamma}, \quad (12.26)$$

sowie $\tilde{\Psi} \in C([0, T], \mathcal{H}_{(0)})$ die Lösung des folgenden, um $(\tilde{\psi}, \tilde{u})$ linearisierten Systems:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi} = A_\gamma \tilde{\Psi} - \tilde{u}(t)x\tilde{\Psi} - w(t)x\tilde{\psi}, \quad (12.27)$$

$$\tilde{\Psi}(0, x) = 0. \quad (12.28)$$

Es ist dann

$$[d\Theta_T(u) - d\Theta_T(\tilde{u})].w = P_T[\Psi(T) - \tilde{\Psi}(T)] = P_T[\Delta(T)],$$

wobei Δ nun die milde Lösung ist von

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta = A_\gamma \Delta - u(t)x\Delta - (u(t) - \tilde{u}(t))x\tilde{\Psi} - w(t)x(\psi - \tilde{\psi}), \quad (12.29)$$

$$\Delta(0, x) = 0. \quad (12.30)$$

Sei $R > 0$ nun so gewählt, dass

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} < R \quad \text{und} \quad \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} < R.$$

Wir werden zeigen, dass dann eine Konstante $C = C(T, R) > 0$ existiert, so dass

$$\|\Delta\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \leq C \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}, \quad (12.31)$$

d.h. $d\Theta_T$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Mittels Ungleichung (12.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} &\leq C_3 \left(\|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\tilde{\Psi}\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \right. \\ &\quad \left. + \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \right) \\ &\leq C_4 \left(\|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\tilde{\psi}\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \right. \\ &\quad \left. + \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\tilde{\psi}\|_{C([0,T],\mathcal{H}_{(0)})} \right) \\ &\leq C_5 \|w\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})} \|\varphi_{1,\gamma}\|_{\mathcal{H}_{(0)}}, \end{aligned}$$

wobei $C_j = C_j(T, R) > 0$ für $j = 3, 4, 5$, und (12.31) folgt mit $C := C_5 \|\varphi_{1,\gamma}\|_{\mathcal{H}_{(0)}}$. \square

Analog erhält man für die Endpunkt-Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_T : H_0^1(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H}_{(1)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \\ u &\mapsto P_T(\psi(T)), \end{aligned} \quad (12.32)$$

die einer Kontrollfunktion $u \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ die Projektion des Endpunktes $\psi(T)$ der Lösungsfunktion $\psi \in C([0, T], \mathcal{H}_{(1)})$ von (12.15), (12.16), mit einem Anfangswert $\psi_0 \in \mathcal{H}_{(1)}$, auf den Tangentialraum von $\psi_{1,\gamma}(T)$ zuordnet, **die Richtigkeit von Lemma 12.1 vorausgesetzt:**

Proposition 12.6. *Sei $T > 0$. Dann ist die durch (12.32) definierte Abbildung $\tilde{\Theta}_T$ eine C^1 -Abbildung.*

Überdies gilt für beliebige $u, w \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$

$$d\Theta_T(u).w = P_T(\Psi(T)), \quad (12.33)$$

mit der milden Lösung $\Psi \in C([0, T]; \mathcal{H}_{(1)})$ des um (ψ, u) linearisierten Systems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = A_\gamma \Psi - u(t)x\Psi - w(t)x\psi, \quad (12.34)$$

$$\Psi(0, x) = 0. \quad (12.35)$$

Bemerkung 12.7. *Gemäß (12.17) ist die in Kapitel 11 nachgewiesene exakte Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems (11.6), (11.7) (für $l = 1$) in $\mathcal{H}_{(0)}$ mittels einer Kontrollfunktion $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ äquivalent zur Surjektivität der Abbildung $d\Theta_T(0) : L^2(0, T; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$ und damit zur Existenz einer stetigen Rechts-Inversen $d\Theta_T(0)^{-1} : \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R})$. Genauso ist gemäß (12.33) die exakte Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems in $\mathcal{H}_{(1)}$ mittels einer Kontrollfunktion $u \in H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ äquivalent zur Existenz einer stetigen Rechts-Inversen $d\tilde{\Theta}_T(0)^{-1} : \mathcal{H}_{(1)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \rightarrow H_0^1(0, T; \mathbb{R})$.*

12.4 Lokale Kontrollierbarkeit in der Nähe von $\psi_{1,\gamma}$

Wir werden nun, die Richtigkeit von Lemma 12.1 vorausgesetzt, mittels eines Satzes über lokale Umkehrbarkeit in Banachräumen, die lokale Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = A_\gamma \psi - u(t)x\psi \quad (x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (12.36)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (12.37)$$

in der Nähe der Trajektorie $(\psi_{1,\gamma}, u \equiv 0)$, mittels L^2 -Kontrollen, in $\mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(0)}$ zeigen (analog mittels H_0^1 -Kontrollen in $\mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(1)}$).

Gilt Lemma 12.1, so hat man

Theorem 12.8. *Für einen beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ existiert ein $\delta > 0$ und eine C^1 -Abbildung*

$$\Gamma : Z_{(0),T} \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}),$$

wobei

$$Z_{(0),T} := \{\psi_f \in \mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(0)} \mid \|\psi_f - \psi_{1,\gamma}(T)\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta\},$$

so dass $\Gamma(\psi_{1,\gamma}(T)) = 0$ ist, und die Lösung ψ von (12.36), (12.37), mit Anfangszustand $\psi_0 = \varphi_{1,\gamma}$ und Kontrolle $u = \Gamma(\psi_f)$, für jedes $\psi_f \in Z_{(0),T}$ die Zielbedingung $\psi(T) = \psi_f$ erfüllt.

Bemerkung 12.9. *Theorem 12.8 beweist aufgrund der Zeitreversibilität des Schrödinger-Kontrollsystems (12.36), (12.37) die lokale Kontrollierbarkeit desselben in der Nähe des Grundzustandes $\psi_{1,\gamma}$:*

Für jeden Zeitpunkt $T > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Anfangs- und Zielzustände $\psi_0, \psi_f \in \mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(0)}$ mit

$$\|\psi_0 - \varphi_{1,\gamma}\|_{\mathcal{H}_{(0)}} + \|\psi_f - \psi_{1,\gamma}(T)\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta$$

eine Kontrolle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ existiert, so dass die Lösung des Anfangswertproblems (12.36), (12.37) die Zielbedingung $\psi(T) = \psi_f$ erfüllt.

Beweis von Theorem 12.8.² Es sei $T > 0$. $R > 0$ sei so klein gewählt, dass die Lösung $\psi(t)$ von (12.36), (12.37) mit $\psi_0 = \varphi_{1,\gamma}$ für alle $u \in B_R[L^2(0, T; \mathbb{R})] := \{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}) \mid \|v\|_{L^2} < R\}$ die Eigenschaft

$$\Re \langle \psi(T), \psi_{1,\gamma}(T) \rangle > 0 \quad (12.38)$$

erfüllt.

Außerdem wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass für alle $\psi_f \in \mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(0)}$ mit $\|\psi_f - \psi_{1,\gamma}(T)\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta$ gilt:

$$\Re \langle \psi_f, \psi_{1,\gamma}(T) \rangle > 0. \quad (12.39)$$

²Der Beweis erfolgt in Analogie zu dem Beweis von Theorem 1 in [12].

Laut Proposition 12.5 ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Theta_T : L^2(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \\ u &\mapsto P_T(\psi(T))\end{aligned}$$

eine C^1 -Abbildung zwischen den Banachräumen $L^2(0, T; \mathbb{R})$ und $\mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))$. Ihr Differential $d\Theta_T$ in 0 hat zudem eine stetige Rechts-Inverse $d\Theta_T(0)^{-1} : \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R})$ (vgl. Bemerkung 12.7). Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit in Banachräumen (vgl. Lemma 11.1) existiert dann ein $\delta_1 \in (0, \delta)$ und eine C^1 -Abbildung

$$\Theta_T^{-1} : B_{\delta_1}[\mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))] \rightarrow B_R[L^2(0, T; \mathbb{R})],$$

so dass $\Theta_T(\Theta_T^{-1}(\psi_f)) = \psi_f$ für alle $\psi_f \in B_{\delta_1}[\mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))] := \{\psi \in \mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T)) \mid \|\psi\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta_1\}$.

Sei nun $\psi_f \in \mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(0)}$ mit $\|\psi_f - \psi_{1,\gamma}(T)\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta_1$. Dann gilt natürlich auch $\|P_T\psi_f\|_{\mathcal{H}_{(0)}} < \delta_1$, d.h. $P_T\psi_f \in B_{\delta_1}[\mathcal{H}_{(0)} \cap T_{\mathbb{S}}(\psi_{1,\gamma}(T))]$. Die folgende Abbildung ist daher wohldefiniert:

$$\Gamma(\psi_f) := \Theta_T^{-1}(P_T\psi_f).$$

Wir wählen nun als Kontrollfunktion in (12.36) $u = \Gamma(\psi_f)$. Die zugehörige Lösung ψ erfüllt wegen (12.38) und (12.39)

$$\begin{aligned}\psi(T) &= \sqrt{1 - \|P_T(\psi(T))\|_{L^2}^2} \psi_{1,\gamma} + P_T(\psi(T)) \\ &= \sqrt{1 - \|\Theta_T(u)\|_{L^2}^2} \psi_{1,\gamma} + \Theta_T(u) \\ &= \sqrt{1 - \|P_T\psi_f\|_{L^2}^2} \psi_{1,\gamma} + P_T\psi_f \\ &= \psi_f. \square\end{aligned}$$

Ganz analog erhält man **unter der Voraussetzung der Richtigkeit von Lemma 12.1:**

Theorem 12.10. *Für einen beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ existiert ein $\delta > 0$ und eine C^1 -Abbildung*

$$\Gamma : Z_{(1),T} \rightarrow H_0^1(0, T; \mathbb{R}),$$

wobei

$$Z_{(1),T} := \{\psi_f \in \mathbb{S} \cap \mathcal{H}_{(1)} \mid \|\psi_f - \psi_{1,\gamma}(T)\|_{\mathcal{H}_{(1)}} < \delta\},$$

so dass $\Gamma(\psi_{1,\gamma}(T)) = 0$ ist, und die Lösung ψ von (12.36), (12.37), mit Anfangszustand $\psi_0 = \varphi_{1,\gamma}$ und Kontrolle $u = \Gamma(\psi_f)$, für jedes $\psi_f \in Z_{(1),T}$ die Zielbedingung $\psi(T) = \psi_f$ erfüllt.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein bilineares Kontrollproblem für die eindimensionale zeitabhängige Schrödingergleichung mit einem anharmonischen quartischen Potential behandelt. Bilineare Kontrollprobleme für Schrödingergleichungen modellieren die Laserkontrolle von Quantensystemen und haben vor allem aufgrund dieser ihrer konkreten physikalischen Anwendbarkeit in letzter Zeit ein starkes Interesse erfahren. Zudem hat man mittlerweile erkannt, dass neben einer approximativen oder optimalen Kontrollierbarkeit auch eine exakte Kontrollierbarkeit von bilinearen Schrödinger-Gleichungen, anders als aufgrund eines allgemeinen negativen Ergebnisses über unendlichdimensionale bilineare Kontrollsysteme von J. M. Ball, J. E. Marsden und M. Slemrod (Theorem 3.6 in [3]) zunächst angenommen, nicht ausgeschlossen ist. Entscheidend ist hier das Auffinden eines geeigneten Banachraumes für die Zustandsfunktionen, so dass der Kontrolloperator in diesem Raum nicht beschränkt ist, das System aber dennoch wohldefiniert ist.

K. Beauchard und C. Laurent ist es in [12] beispielsweise gelungen, die lokale exakte Kontrollierbarkeit der eindimensionalen linearen Schrödingergleichung mit einem unendlich tiefen Potentialtopf (Teilchen im Kasten), in der Nähe des Grundzustandes, mit L^2 -Kontrollen, in dem Raum $D((-\frac{1}{2}\Delta)^{3/2})$, in beliebiger Zeit $T > 0$, mittels des Linearisierungsprinzips, zu zeigen.

K. Beauchard, H. Lange und H. Teismann haben in [11] eine nichtlineare Variante dieses Problems untersucht und, ebenfalls mittels des Linearisierungsprinzips, die lokale exakte Kontrollierbarkeit in der Nähe des Grundzustandes eines eindimensionalen Bose-Einstein-Kondensates in einem unendlich tiefen Potentialtopf variabler Länge nachgewiesen.

Für die eindimensionale bilineare Schrödingergleichung mit einem harmonischen Potential haben M. Mirrahimi und P. Rouchon in [68] indes die Nicht-Kontrollierbarkeit mittels des geometrischen Verfahrens der iterierten Lie-Klammern nachgewiesen: Die von dem inneren Hamilton-Operator und dem Interaktions-Operator (Kontroll-Operator) erzeugte Lie-Algebra ist endlichdimensional und das System ist gemäß eines Theorems von M. Huang, T.J. Tarn und J.W. Clark³ nicht kontrollierbar.

In einem ersten Schritt wird in dieser Arbeit zunächst gezeigt, dass das geometrische Verfahren der iterierten Lie-Klammern im Falle eines anharmonischen quartischen Potentials ein anderes Ergebnis liefert als bei einem harmonischen Potential: Die entsprechende Lie-Algebra ist hier unendlichdimensional und eine Kontrollierbarkeit daher nicht ausgeschlossen. Die sukzessiven Anpassungen des Definitionsbereiches der iterierten Lie-Klammern deuten allerdings darauf hin, dass eine Kontrollierbarkeit des Systems, anders als beim Teilchen im Kasten, höchstens in einem Teilraum des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ möglich sein wird.

Es wird sodann mittels einer Transformation des Systems und eines Satzes von Kato gezeigt, dass das betrachtete Kontrollproblem als Cauchyproblem

³vgl. HTC Corollary 2 in [24]

wohlgestellt ist und für eine beliebige Kontrollfunktion $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ eine milde Lösung im Definitionsbereich des Hamilton-Operators besitzt und dass diese, sofern u stetig ist, auch klassisch ist.

Um das System gemäß des Linearisierungsprinzips auf eine mögliche lokale exakte Kontrollierbarkeit in der Nähe des Grundzustandes zu untersuchen, wird das System um die Grundzustandstrajektorie linearisiert und zunächst die Wohldefiniertheit dieses linearisierten Systems im Definitionsbereich des Hamilton-Operators gezeigt. Die exakte Kontrollierbarkeit des linearen Problems entspricht der Lösbarkeit eines trigonometrischen Momentenproblems für die Kontrollfunktion, welche für nicht-symmetrische Potentiale mittels einer Variante eines Satzes von Ingham nachgewiesen wird. Im Falle eines symmetrischen Potentials erweist sich das linearisierte System als nicht kontrollierbar.

Für die Anwendung des Satzes von Ingham bedarf es genauer Kenntnisse über die Eigenwerte und Eigenfunktionen des inneren Hamilton-Operators. Da für diese, anders als beim Teilchen im Kasten oder beim Harmonischen Oszillator, keine analytischen Formeln bekannt sind, werden einerseits qualitative spektrale Eigenschaften untersucht und andererseits diverse asymptotische Abschätzungen der Eigenwerte, der spektralen Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Eigenwerten sowie der Eigenfunktionen und ihrer Ableitungen vorgenommen. Als Beiprodukt dieser Untersuchungen wird ein negatives Ergebnis bezüglich der Kontrollierbarkeit des Anharmonischen Quartischen Oszillators mittels distributiver Kontrollen erhalten. Außerdem wird mit Hilfe der Abschätzungen der Eigenfunktionen, im Falle der Positivität des inneren Hamilton-Operators, die Zugehörigkeit derselben zu dem Gelfand-Shilov-Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ festgestellt.

Bei den Funktionenräumen, in denen die exakte Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems einerseits mittels Kontrollfunktionen aus $L^2(0, T; \mathbb{R})$ und andererseits aus $H_0^1(0, T; \mathbb{R})$ möglich ist, handelt es sich um gewichtete Lebesgue-Räume, die sich aufgrund der untersuchten Größenordnung der Fourierkoeffizienten der Funktion $x\varphi_1$ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des positiven Hamilton-Operators als Teilräume eines abstrakten Gevrey-Raumes der Ordnung $4/3$ für den Hamilton-Operator erweisen. Es wird überdies gezeigt, dass sich der Raum $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ als unendliche Vereinigung solcher abstrakter Gevrey-Räume darstellen lässt, womit man erkennt, dass der gewichtete Lebesgue-Raum ebenfalls ein Teilraum von $\mathcal{S}_{1/3}^{2/3}$ ist.

Die Wohldefiniertheit des linearisierten Systems in den relevanten gewichteten Lebesgue-Räumen, d.h. die Invarianzeigenschaft der milden Lösungen, ist auf einen Regularisierungseffekt für das in der zugehörigen Integralgleichung auftretende Integral zurückzuführen: Obwohl der Integrand nicht in den betrachteten Räumen liegt, ist dies für das (oszillierende) Integral sehr wohl der Fall.

Wir gehen davon aus, dass ein solcher Effekt in diesen Räumen auch für die bilineare Gleichung gegeben ist. Durch den Nachweis der Existenz einer milden Lösung des bilinearen Systems im Definitionsbereich $D(A)$ des Hamilton-Operators wurde ein solcher Effekt für das auftretende Integral bereits implizit für den Raum $D(A)$ nachgewiesen.

Unter der Annahme, dass dieser Effekt für das bilineare System auch in denjenigen Räumen gegeben ist, in denen das linearisierte System kontrollierbar ist, wird die Wohldefiniertheit bilinearer Systeme in diesen Räumen, die C^1 -Regularität der Endpunktabbildung und schließlich, durch die Anwendung eines klassischen allgemeinen Satzes über lokale Umkehrbarkeit in Banachräumen, die lokale Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems in diesen Räumen gezeigt.

Wir erwarten, dass sich, mittels der in dieser Arbeit verwendeten Methoden, analoge Ergebnisse auch im Fall einer allgemeineren konvexen Potentialfunktion der Art

$$V(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} x^{2j} \right) - \gamma x \quad (n \geq 2, a_{2n} > 0, a_{2j} \geq 0 (j < n), \gamma \in \mathbb{R})$$

erhalten lassen, also zum Beispiel auch für sextische oder oktsche anharmonische Oszillatoren.

Auch in diesen Fällen liegt für den Operator $A := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ ein rein diskretes Spektrum aus reellen Eigenwerten vor, die allesamt einfach sind und im Falle betragsmäßig kleiner γ -Werte positiv. Mittels E.C. Titchmarshs Formel (7.10) berechnen sich die Eigenwerte im Spezialfall $V(x) = a_{2n}x^{2n}$ zu

$$\lambda_k = C \left(k + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right)^{2n/n+1}$$

mit einer von a_{2n} abhängigen Konstanten $C > 0$. Mit Hilfe des Lemmas 7.8 wird sich auch für ein allgemeines Potential obiger Gestalt ein entsprechendes asymptotisches Verhalten ergeben, woraus für die spektralen Lücken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten gemäß Lemma 7.11 folgt

$$|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \geq C_1 k^{\frac{n-1}{n+1}} \quad (C_1 > 0),$$

d.h. die spektralen Lücken wachsen sogar umso stärker mit k je größer n ist und erfüllen damit die Voraussetzung des Satzes von Ingham.

Wie im quartischen Fall wird sich auch hier die A -Beschränktheit des Multiplikationsoperators $B\varphi := x\varphi$ zeigen lassen und damit die Analytizität der Eigenfunktionen φ_k sowie der Eigenwerte λ_k als Funktionen von γ in der Nähe von Null. Ein störungstheoretischer Ansatz wird zeigen, dass die Fourierkoeffizienten $\langle x\varphi_1, \varphi_k \rangle$ von $x\varphi_1$ in der Basis der Eigenfunktionen φ_k im Fall $\gamma \neq 0$ (und betragsmäßig klein) von Null verschieden sind und mittels des Satzes von Ingham wird man die exakte Kontrollierbarkeit des linearisierten Systems mittels L^2 -Kontrollen für Zustände aus dem Tangentialraum

an die L^2 -Einheitssphäre in ψ_1 im Raum $\mathcal{H}_{(0)}(a_{2n}, a_{2n-2}, \dots, a_2, \gamma)$ zeigen können (und analog in $\mathcal{H}_{(1)}(a_{2n}, a_{2n-2}, \dots, a_2, \gamma)$ für Kontrollen aus $H_0^1(0, T; \mathbb{R})$), wobei

$$\mathcal{H}_{(s)}(a_{2n}, a_{2n-2}, \dots, a_2, \gamma) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \psi, \varphi_k \rangle|^2}{|\langle x\varphi_1, \varphi_k \rangle|^2} \lambda_k^{2s} < \infty \right\}.$$

Es ist zu vermuten, dass es sich hierbei um Teilräume eines abstrakten Gevrey-Raumes der Ordnung $2n/(n+1)$ für den Hamilton-Operator A handelt, welcher wiederum ein Teilraum von $\mathcal{S}_{1/(n+1)}^{n/(n+1)}$ sein wird.

Die in dieser Arbeit erhaltenen positiven Kontrollierbarkeits-Ergebnisse beschränken sich auf den Fall nicht-symmetrischer quartischer Potentiale der Art $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma x$ mit $\alpha > 0, \beta \geq 0$ und $\gamma \neq 0$. Im Fall eines symmetrischen Potentials mit $\gamma = 0$ wird gezeigt, dass die Kontrollierbarkeit der entsprechenden linearisierten Systeme an den Paritätseigenschaften der Eigenfunktionen sowie des Kontrollpotentials $-u(t)x$ scheitert. Wir vermuten jedoch, dass auch in diesen Fällen, die Gültigkeit der Invarianzeigenschaft für die Zustandsfunktion in den entsprechenden Räumen vorausgesetzt, eine lokale exakte Kontrollierbarkeit des bilinearen Systems in der Nähe des Grundzustandes $\psi_{1,0}$ in denselben Räumen möglich ist wie für $\psi_{1,\gamma}$ mit einem betragsmäßig kleinen γ - allerdings nicht in beliebig kleiner Zeit $T > 0$.

Als Beweismethode bietet sich etwa die von J.-M. Coron in [26] eingeführte *Return-Methode* in Verbindung mit quasi-statischen Deformationen der Kontrollfunktionen an. Diese Methode wurde von J.-M. Coron zunächst genutzt, um ein Stabilitätsproblem zu lösen, anschließend aber auch von mehreren Autoren für Kontrollierbarkeitszwecke eingesetzt⁴.

Gemäß dieser Methode nutzt man die Nähe des Grundzustandes $\psi_{1,0}$ zu $\psi_{1,\gamma}$ ($|\gamma|$ klein) aus: Die lokale Kontrollierbarkeit in der Nähe von $(\psi_{1,\gamma}, u \equiv 0)$ erlaubt es, das System in einer beliebigen Zeit $T > 0$ von jedem beliebigen Zustand in einer Umgebung V_0 von $\psi_{1,\gamma}(0) = \varphi_{1,\gamma}$ in jeden beliebigen Zustand in einer kleinen Umgebung V_T von $\psi_{1,\gamma}(T)$ zu lenken. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass sich das System von einem Anfangszustand ψ_0 , der hinreichend nahe an einem Punkt $\varphi_{1,0} e^{i\phi_0}$ ($\phi_0 \in \mathbb{R}$) von $\psi_{1,0}$ ist, in einen Zustand aus V_0 überführen lässt, und ausgehend von einem Zustand aus V_T wieder zurück in die Nähe eines Punktes $\varphi_{1,0} e^{i\phi_1}$ ($\phi_1 \in \mathbb{R}$) des Grundzustandes $\psi_{1,0}$. Dies kann mittels quasi-statischer Deformationen der Kontrollfunktionen gelingen: Die Idee ist die Konstruktion einer Trajektorie (ψ, u) , die ausgehend von dem Anfangspunkt $\varphi_{1,0} e^{i\phi_0}$ auf der Grundzustands-Trajektorie $(\psi_{1,0}, u \equiv 0)$, durch eine sehr langsame Änderung des Wertes der Kontrolle u von $u(0) = 0$ auf $u(T_1) = \gamma$, zu jedem Zeitpunkt $t_1 \in [0, T_1]$ sehr nahe an irgendeinem Punkt auf der Grundzustandstrajektorie für die konstante Kontrollfunktion $w \equiv u(t_1)$:

$$t \mapsto \varphi_{1,u(t_1)} e^{i\lambda_{1,u(t_1)} t}$$

bleibt. Folglich wird $\psi(T_1)$ sehr nahe an $\varphi_{1,\gamma}$ liegen (bis auf einen Phasenfaktor). Aus Stetigkeitsgründen bezüglich der Anfangsbedingung, bringt diesel-

⁴Eine detaillierte Beschreibung der Techniken inklusive eines Anwendungsbeispiels für ein bilineares Kontrollproblem findet sich z.B. in J.-M. Corons Buch [25].

be Kontrollfunktion aber auch jeden Anfangszustand, der zwar nicht exakt auf $\psi_{1,0}$ liegt, aber immerhin in einem ε -Schlauch um $\psi_{1,0}$, ebenfalls in die Nähe von $\psi_{1,\gamma}$. Analog bringt eine Kontrollfunktion u , deren Werte sich auf einem Zeitintervall $[T_2, T_3]$ ($T_1 \leq T_2 < T_3$) sehr langsam von $u(T_2) = \gamma$ auf $u(T_3) = 0$ ändern, die zugehörige Trajektorie aus der Nähe von $\psi_{1,\gamma}(T)$ (zum Zeitpunkt T_2) wieder nahe an einen Punkt auf $\psi_{1,0}$ (zum Zeitpunkt T_3) heran.

Ein Nachteil der Methode ist, dass die quasi-statischen Transformationen viel Zeit erfordern, d.h. eine lokale exakte Kontrollierbarkeit des Anharmonischen Quartischen Oszillators mit einem symmetrischem Potential wird vermutlich, anders als bei einem nicht-symmetrischen Potential, nicht in beliebig kleiner Zeit $T > 0$ möglich sein.

Anhang

Anhang A

Hilfsmittel

A.1

a) Jeder symmetrische Operator T ist abschließbar, $\overline{T} \subset T^*$.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) T ist wesentlich selbstadjungiert (d.h. T^* ist selbstadjungiert),

ii) $\overline{T} = T^*$,

iii) \overline{T} ist selbstadjungiert.

\overline{T} ist dann die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von T .

c) Sind X und Y Hilberträume und ist T ein Operator von X nach Y mit $D(T) = X$ und $D(T^*)$ dicht in Y , so ist T beschränkt. Insbesondere gilt der Satz von Hellinger-Toeplitz: Ist T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum X mit $D(T) = X$, so ist T beschränkt.

(vgl. Satz 4.10 in [99])

A.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

(vgl. Lemma V.1.9 in [100])

A.3

Sei H ein komplexer Hilbertraum.

Dann sind für einen symmetrischen, dicht definierten Operator $T : H \supset D(T) \rightarrow H$ die folgenden Aussagen äquivalent:

1. T ist selbstadjungiert.

2. T ist abgeschlossen und $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.
3. $\operatorname{im}(T \pm i) = H$.

(vgl. Satz VII.2.8 in [100])

A.4 (Satz von Kato)

Sei X ein Hilbertraum und $H(t), t \in [0, T]$, eine Familie von selbstadjungierten Operatoren in X .

Angenommen, es gelten die beiden folgenden Voraussetzungen:

(V1) Es existiert ein Hilbertraum Y , welcher stetig und dicht in X eingebettet ist, und eine Familie von Isomorphismen $S(t)$ von Y nach X , $t \in [0, T]$, so dass

$$S(t)H(t)S(t)^{-1} = H(t) + Q(t) \quad \text{mit } Q(t) \in B(X), \quad (\text{A.1a})$$

$$t \in [0, T] \mapsto Q(t) \quad \text{stark stetig in } X, \quad (\text{A.1b})$$

$$t \in [0, T] \mapsto S(t) \quad \text{stark differenzierbar von } Y \text{ nach } X. \quad (\text{A.1c})$$

(V2)

$$Y \subseteq D(H(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, T], \quad (\text{A.1d})$$

$$t \in [0, T] \mapsto H(t) \quad \text{Norm-stetig in } B(Y, X). \quad (\text{A.1e})$$

Dann existiert ein eindeutiger Evolutions-Operator $U(t, s)$, definiert auf $[0, T] \times [0, T]$, so dass

- (i) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(X)$;
- (ii) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ für alle $t, s, r \in [0, T]$;
- (iii) $U(t, s)Y \subseteq Y$ für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$;
- (iv) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ stark stetig von $[0, T] \times [0, T]$ nach $B(Y)$;
- (v) $i \frac{dU(t, s)}{dt} = H(t)U(t, s)$, $i \frac{dU(t, s)}{ds} = -U(t, s)H(s)$ gelten stark als Gleichungen zwischen Operatoren von Y nach X ;
- (vi) $U(t, s)$ ist unitär für alle $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.

(vgl. Theorem 2.1 in [51])

A.5 (Orthonormalbasen)

Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ ein Orthonormalsystem.

- (a) Es existiert eine Orthonormalbasis S' mit $S \subset S'$.
- (b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. S ist eine Orthonormalbasis.
2. Ist $x \in H$ und $x \perp S$, so ist $x = 0$.
3. Es gilt $H = \overline{\operatorname{lin} S}$.

$$4. \quad x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e \quad \forall x \in H.$$

$$5. \quad \langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

$$6. \quad \|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \quad \forall x \in H. \quad (\text{Parsevalsche Gleichung})$$

(vgl. Satz V.4.9 in [100])

A.6 (Eigenwerte des harmonischen Oszillators in einem konstanten elektrischen Feld)

Sei $\beta > 0$, $\lambda_k (k \in \mathbb{N})$ seien die Eigenwerte des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta x^2$ und $\lambda_{k,\gamma} (k \in \mathbb{N})$ seien diejenigen des Operators $A_\gamma = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta x^2 - \gamma x$ ($\gamma \in \mathbb{R}$).

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_k - \lambda_{k,\gamma} = \frac{\gamma^2}{4\beta}. \quad (\text{A.2})$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} A_\gamma &= -\frac{d^2}{dx^2} + \beta x^2 - \gamma x \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \left(\sqrt{\beta}x - \frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\beta} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \beta \left(x - \frac{\gamma}{2\beta} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\beta}. \end{aligned}$$

Mittels der Variablentransformation $y := x - \frac{\gamma}{2\beta}$ erhält man

$$A_\gamma = -\frac{d^2}{dy^2} + \beta y^2 - \frac{\gamma^2}{4\beta}.$$

Die Eigenwerte des Operators A_γ unterscheiden sich dementsprechend lediglich um den konstanten Term $\frac{\gamma^2}{4\beta}$ von denen des Operators A_0 :

$$\lambda_{k,\gamma} = \lambda_k - \frac{\gamma^2}{4\beta}. \quad \square$$

Anhang B

Numerische Berechnungen

Zur numerischen Berechnung von Eigenwerten λ_k und Eigenfunktionen φ_k ($k \in \mathbb{N}$) des Hamiltonoperators A , sowie der Fourierkoeffizienten $\langle x\varphi_1, \varphi_k \rangle$ in der Basis dieser Eigenfunktionen, nutzen wir endlichdimensionale Matrixdarstellungen von Orts- sowie Impulsoperatoren um den Hamiltonoperator als Matrixfunktion dieser Orts- und Impulsmatrizen zu berechnen (diskrete Operator Darstellung)¹.

Wir ersetzen hierfür die Operatoren q (Ortsoperator) und $p = -i\nabla$ (Impulsoperator) durch ihre Matrixdarstellungen in der Basis der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators (Hermite-Funktionen). Es ist dann²

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

und

$$p = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Da sich nur endlichdimensionale Matrizen numerisch darstellen lassen, müssen die eigentlich unendlichdimensionalen Matrizen abgeschnitten werden, und man erwartet dementsprechend, dass die numerischen Ergebnisse nur näherungsweise korrekt sind. Wir können uns aber der numerischen Exaktheit der, mit Hilfe dieser endlichdimensionalen Matrizen, berechneten Größen vergewissern, indem wir die gewählte Matrixdimension verändern: Ändern sich die berechneten Werte auch im Falle einer größeren Matrixdimension nicht, können wir die Werte als numerisch exakt ansehen.

¹vgl. § 8.3.3 in [58]

²vgl. § 6.1.1 in [58]

B.1 Eigenwerte

Die Eigenwerte des Hamiltonoperators $A = p^2 + \alpha q^4 + \beta q^2 - \gamma q$ lassen sich in MATLAB oder Octave nun leicht berechnen. Beispielsweise liefert der folgende Code für $\alpha = 1, \beta = 0$ und $\gamma = 0.5$ die ersten 25 Eigenwerte:

```
m=sqrt(1:199);
q=1/sqrt(2)*(diag(m,-1)+diag(m,1));
p= i/sqrt(2)*(diag(m,-1)-diag(m,1));
a=1; b=0; c=0.5;
H=p^2+a*q^4+b*q^2-c*q;
Eig=eig(H);
E=Eig(1:25)
```

B.2 Fourier-Koeffizienten $b_{k,\gamma}$

Mittels des folgenden Programmcodes lassen sich in Octave die Beträge der ersten Fourier-Koeffizienten $b_{k,\gamma} := \langle x\varphi_{1,\gamma}, \varphi_{k,\gamma} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) berechnen (beispielhaft für $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0.0005$), eine untere Schranke für diese, sowie eine Regressionsfunktion für die Wertepaare $(\lambda_{k,\gamma}^{3/4}, \tilde{b}_{k,\gamma})$ ($k \in \mathbb{N}$) mit

$$\tilde{b}_{k,\gamma} := \begin{cases} \frac{|b_{k,\gamma}|}{\gamma} & \text{f. } k \text{ ungerade,} \\ |b_{k,\gamma}| & \text{f. } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Außerdem plottet das Programm diese Wertepaare sowie die zugehörige Regressionsfunktion. Die Ergebnisse des Programmlaufs sind in den Tabellen 11.1 und 11.2 sowie in Abbildung 11.1 zu finden. Außerdem liefert dieses Programm nach entsprechender Änderung der Parameterwerte α, β und γ (bzw. a, b und c im Programmcode) die Werte für Tabelle 11.3. Bei einer Verwendung des Codes in MATLAB ist zu beachten, dass die verwendete Funktion *corrcoef* hier eine andere Bedeutung hat.

```
m=sqrt(1:199);
x=1/sqrt(2)*(diag(m,-1)+diag(m,1));
p=i/sqrt(2)*(diag(m,-1)-diag(m,1));
a=1;
b=1;
c=0.0005;
H=p^2+a*x^4+b*x^2-c*x;
[V,D]=eig(H);
[E,index]=sort(diag(D));
x=-33:0.005:33;
```

```
%Initialisierung der Vektoren
```

```
Evektor=zeros(1,15);
Ivektor=zeros(1,15);
Kvektor=zeros(1,15);
```

```

USvektor=zeros(1,15);
Quotientenvektor=zeros(1,15);
Ktildevektor=zeros(1,15);
Ktildevektorkurz=zeros(1,14);
Lvektor=zeros(1,15);
Lvektorkurz=zeros(1,14);

%Berechnung der ersten 15 Eigenfunktionen für den Operator H
%auf Basis der 72 ersten (orthonormierten) Hermite-Funktionen

for k=1:15
    nummer=k;
    E(nummer);
    proj=V(:,index(nummer));
    h0=[1];
    hermval=(sqrt(pi))^(-0.5)*polyval(h0,x).*exp(-0.5*x.^2);
    y_k=proj(1)*hermval;
    h1=[sqrt(2) 0];
    hermval=(sqrt(pi))^(-0.5)*polyval(h1,x).*exp(-0.5*x.^2);
    y_k=y_k + proj(2)*hermval;
    v1=[1 0];
    v0=[0 0 1];

    for n=2:72
        h2=sqrt(2/n)*conv(h1,v1)-sqrt(1-1/n)*conv(h0,v0);
        h0=h1;
        h1=h2;
        hermval=(sqrt(pi))^(-0.5)*polyval(h2,x).*exp(-0.5*x.^2);
        y_k=y_k + proj(n+1) * hermval;
    end;

%Berechnung der Beträge der ersten 15 Fourierkoeffizienten
%K=K(k) von x*y_1

I=trapz(x,abs(y_k).^2);

if(k==1)
    z=y_k;
endif;
K=abs(trapz(x,z.*conj(y_k).*x));

%Berechnung einer unteren Schranke US für K

US=c/2 * exp(-(E(nummer)/a^(1/3))^0.75);
Quotient=US/K;

```

```

%Zuweisung der Werte für die oben initialisierten Vektoren

Evektor(nummer)=E(nummer);
Ivektor(nummer)=I;
Kvektor(nummer)=K;
USvektor(nummer)=US;
Quotientenvektor(nummer)=Quotient;
L=E(nummer)^0.75;
Lvektor(nummer)=L;

%Die ungeraden Komponenten von Ktildevektor erhalten die
%Werte K/c zugewiesen, die geraden Komponenten die Werte K

if(rem(nummer,2)==1)
Ktildevektor(nummer)=K/c;
else
Ktildevektor(nummer)=K;
end;

%Wir vernachlässigen die ersten Einträge der Vektoren
%Lvektor und Ktildevektor bei der Berechnung der Regres-
%sionsfunktion

Ktildevektorkurz=Ktildevektor(2:15);
Lvektorkurz=Lvektor(2:15);

end;

%Berechnung der Regressionsfunktion und Wertaufstellungen in
%Tabellen

z=log(Ktildevektorkurz);
%Lege eine Regressionsgrade durch die Punkte
p=polyfit(Lvektorkurz,z,1)
R=corrcoef(z,polyval(p,Lvektorkurz))
Expfunktion=[p(1) exp(p(2))]
Rsquared=R^2
fitwerte=Expfunktion(2)*exp(Expfunktion(1)*Lvektor);
Diffsquared=(fitwerte-Ktildevektor).^2;

%Ausgabe der berechneten Werte in den Tabellen A, B und C
A=[Ivektor']
B=[Evektor' Kvektor' USvektor' Quotientenvektor']
C=[Lvektor' Ktildevektor' fitwerte' Diffsquared']

%Plot der Fittingfunktion

```

```

% Definiere m als die Steigung der Regressionsgeraden
m=p(1);
% Definiere z0 als den y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden
z0=p(2);
subplot(1,1,1);
hold on
plot(Lvektorkurz,Ktildevvektorkurz,'Color','k','LineStyle',
'none','Marker','*');
axis([0 28 -0.05 0.6]);
x=1:0.01:27;
a=exp(z0);
b=m;
fit=a*exp(b*x);
plot(x,fit,'- k')
str=sprintf('f(x) = %1.4f * exp(%1.4f*x) , R^2 = %1.4f',a,b,
Rsquared);
text(5,0.25,str,'Color','k','fontsize',18);
hold off;
print('Regressionsfunktion.pdf')

```

Dank des exponentiellen Abklingens der Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ ($k \in \mathbb{N}$) für $|x| \rightarrow \infty^3$, wissen wir, dass eine reelle Zahl $x^* > 0$ existiert, so dass der Wert des Integranden $x\varphi_{1,\gamma}\bar{\varphi}_{k,\gamma}$ des uneigentlichen Integrals $b_{k,\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{1,\gamma}\bar{\varphi}_{k,\gamma} dx$ für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > x^*$ numerisch effektiv Null ist. Für das vorstehende Beispiel lässt sich etwa $x^* = 33$ numerisch identifizieren (für $k = 1, \dots, 15$). Wir berechnen daher anstelle von $|b_{k,\gamma}|$ lediglich den Betrag K des endlichen Integrals $\int_{-33}^{33} x\varphi_{1,\gamma}\bar{\varphi}_{k,\gamma} dx$. Genauer: Wir approximieren diesen Wert mit Hilfe der Trapezregel bei einer gewählten Stützstellenweite von 0.005. Dazu berechnen wir zunächst die Werte der Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ an den gewählten Stützstellen:

Seien

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.3})$$

die Hermiteschen Polynome und

$$\phi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.4})$$

die orthonormierten Hermite-Funktionen (Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators), die bekanntlich eine Basis des $L^2(\mathbb{R})$ bilden. Dann lassen sich

³siehe Proposition 8.12

die Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ von A_γ in dieser Basis darstellen durch:

$$\varphi_{k,\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_{k,\gamma}, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (\text{B.5})$$

Wir gehen davon aus, dass für die ersten Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ schon eine endliche Anzahl an Basisvektoren ϕ_n genügt, um die Werte von $\varphi_{k,\gamma}$ hinreichend gut zu approximieren. Wir beschränken uns daher in dem obigen Beispiel bei der Berechnung der ersten fünfzehn Eigenfunktionen $\varphi_{k,\gamma}$ (im Programmcode y_k) auf die ersten 72 Basisfunktionen ϕ_n . Die Genauigkeit der berechneten Werte überprüfen wir dann anhand des Integrals $I = \int_{-33}^{33} |\varphi_{k,\gamma}(x)|^2 dx$, dessen Wert Eins sein müsste.

Im Programm werden durch den Befehl $[V, D] = \text{eig}(H)$ in Zeile 8 zwei Matrizen erzeugt: Eine Diagonalmatrix D , deren Einträge die Eigenwerte von H sind, sowie eine Matrix V , die die zugehörigen Eigenvektoren als Spalten enthält (d.h. die k -te Spalte von V enthält die Fourierkoeffizienten $\langle \varphi_{k,\gamma}, \phi_n \rangle$). Der jeweils relevante Eigenvektor wird in Zeile 14 aus der Matrix V ausgelesen und mit 'proj' bezeichnet. Dann wird zunächst das nullte Hermite-Polynom an den Stützstellen ausgewertet und die Werte jeweils mit dem ersten Eintrag des ausgelesenen Eigenvektors 'proj' multipliziert. Im Anschluss wird das erste Hermite-Polynom ausgewertet, die Werte mit dem zweiten Eintrag des Eigenvektors 'proj' multipliziert und die Ergebnisse jeweils zu den vorherigen addiert. Alle weiteren Summanden werden dann rekursiv unter Ausnutzung der Rekursions-Gleichung für die Hermite-Polynome

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{B.6})$$

ermittelt.

Schließlich wird der Näherungswert $K = K(k)$ für $|b_{k,\gamma}|$ berechnet, sowie der von $k \in \mathbb{N}$ abhängige Ausdruck

$$US = US(k) = \frac{\gamma}{2} e^{-\alpha^{-1/4} \lambda_{k,\gamma}^{3/4}}, \quad (\text{B.7})$$

der jeweils eine untere Schranke für den entsprechenden Koeffizienten $|b_{k,\gamma}|$ darstellt. Diese untere Schranke wurde numerisch an zahlreichen Beispielen getestet und hat im Falle $0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq \alpha$ und $0 < \gamma \leq \alpha/2$ Gültigkeit. Anhand der Quotienten US/K , die für wachsende Werte $k \in \mathbb{N}$ immer kleiner werden, erkennt man, dass US auch für große $k \in \mathbb{N}$ nicht größer wird als K bzw. als $|b_{k,\gamma}|$.

Nachdem wir *Ktildevektor* so definieren, dass die k -te Komponente des Vektors *Ktildevektor*(k) für gerade k dem Wert $K(k)$ entspricht und für ungerade k dem Wert $K(k)/c$, bestimmen wir, unter Vernachlässigung der ersten Vektorkomponente, mittels der Methode der kleinsten Quadrate, eine Regressionsfunktion der Art $f(x) = a \exp(bx)$ ($b < 0$) für die Wertepaare $(E(k)^{3/4}, \text{Ktildevektor}(k))$ ($k = 2, \dots, 15$). Anhand des Bestimmtheitsmaßes R^2 , in Verbindung mit einer klar fallenden Tendenz der Fehlerquadrate

DiffSquared für wachsende Werte k , kann man die Qualität der Approximation erkennen.

Die ermittelten Werte geben wir schließlich in Tabellenform aus: Tabelle A enthält, für $k = 1, \dots, 15$, die Werte der Integrale $I(k) = \int_{-33}^{33} |\varphi_{k,\gamma}(x)|^2 dx$. Ta-

belle B enthält die Eigenwerte des Operators H , die Werte $K(k)$ als Approximationswerte der Fourierkoeffizienten $b_{k,\gamma}$, die Werte der unteren Schranke $US(k)$ sowie diejenigen des Quotientens $US(k)/K(k)$. In Tabelle C geben wir die Werte $E(k)^{3/4}$, $Ktildevektor(k)$, die Werte der ermittelten Regressionsfunktion $fitwerte(k)$ an den Stützstellen $E(k)^{3/4}$ sowie die quadrierte Differenz $DiffSquared(k)$ zwischen den exakten Werten und den Werten der Regressionsfunktion an den Stützstellen aus.

Zuguterletzt werden die Datenpunkte $(E(k)^{3/4}, Ktildevektor(k))$ ($k = 2, \dots, 15$) sowie die zugehörige Regressionsfunktion geplottet und deren genaue Formel sowie das Bestimmtheitsmaß R^2 ausgegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Adami, U. Boscain: *Controllability of the Schrödinger Equation via Intersection of Eigenvalues*, Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 1080-1085, Sevilla, 2005
- [2] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov: *Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York, 1995
- [3] J. M. Ball, J. E. Marsden, M. Slemrod: *Controllability for Distributed Bilinear Systems*, SIAM J. Control and Optimization, 20(4), 575-597, 1982
- [4] L. Baudouin: *A bilinear optimal control problem applied to a time dependent Hartree-Fock equation coupled with classical nuclear dynamics*, Portugaliae Mathematica, 63(3), 293-325, 2006
- [5] L. Baudouin, O. Kavian, J.-P. Puel: *Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control*, J. Diff. Eq., 216(1), 188-222, 2005
- [6] L. Baudouin, J. Salomon: *Constructive solution of a bilinear optimal control problem for a Schrödinger equation*, Systems and Control Letters, 57(6), 453-464, 2008
- [7] K. Beauchard: *Controllability of a quantum particle in a 1D variable domain*, ESAIM: COCV, 14(1), 105-147, 2008
- [8] K. Beauchard: *Local controllability of a 1-D Schrödinger equation*, J. Math. Pures et Appl., 84(7), 851-956, 2005
- [9] K. Beauchard, J.-M. Coron: *Controllability of a quantum particle in a moving potential well*, J. Funct. Anal., 232(2), 328-389, 2006
- [10] K. Beauchard, J.-M. Coron, H. Teismann: *Minimal time for the bilinear control of Schrödinger equations*, Systems and Control Letters, 71, 1-6, 2014
- [11] K. Beauchard, H. Lange, H. Teismann: *Local exact controllability of a One-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation*, SIAM J. Control and Optimization, 53(5), 2781-2818, 2015

-
- [12] K. Beauchard, C. Laurent: *Local controllability of 1D linear and non-linear Schrödinger equations with bilinear control*, J. Math. Pures et Appl., 94(5), 520-554, 2010
- [13] K. Beauchard, M. Mirrahimi: *Practical stabilization of a quantum particle in a one-dimensional infinite square potential well*, SIAM J. Control and Optimization, 48(2), 1179-1205, 2009
- [14] K. Beauchard, M. Morancey: *Local controllability of 1D Schrödinger equations with bilinear control and minimal time*, Math. Control Rel. Fields, 4, 125-160, 2014
- [15] F. A. Berezin, M. A. Shubin: *The Schrödinger Equation*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1991
- [16] R. P. Boas, Jr.: *Entire Functions*, Acad. Press, New York, 1954
- [17] U. Boscain, M. Caponigro, M. Sigalotti: *On some open questions in bilinear quantum control*, arXiv:1304.7181, 2013
- [18] U. Boscain, M. Caponigro, T. Chambrion, M. Sigalotti: *A weak spectral condition for the controllability of the bilinear Schrödinger equation with application to the control of a rotating planar molecule*, Comm. Math. Phys., 311(2), 423-455, 2012
- [19] U. Boscain, M. Caponigro, M. Sigalotti: *Multi-input Schrödinger equation: controllability, tracking and application to the quantum angular momentum*, J. Diff. Eq., 256(11), 3524-3551, 2013
- [20] N. Boussaid, M. Caponigro, T. Chambrion: *Weakly-coupled Systems in Quantum Control*, IEEE Trans. on Automatic Control, 58(9), 2205-2216, 2013
- [21] E. Cancès, C. Le Bris: *On the time-dependent Hartree-Fock equations coupled with a classical nuclear dynamics*, Math. Mod. and Meth. Appl. Sci., 9, 963-990, 1999
- [22] E. Cancès, C. Le Bris, M. Pilot: *Contrôle optimal bilinéaire d'une équation de Schrödinger*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 330(7), 567-571, 2000
- [23] T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti, U. Boscain: *Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field*, Ann. I. H. Poincaré-AN, 26(1), 329-349, 2009
- [24] J. W. Clark, D. G. Lucarelli, T.-J. Tarn: *Control of quantum systems*, Int. J. Mod. Phys. B, 17(28), 5397-5412, 2003
- [25] J.-M. Coron: *Control and nonlinearity*, Amer. Math. Soc., Providence, 2007
- [26] J.-M. Coron: *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift*, Math. Control Signals Systems, 5(3), 295-312, 1992

-
- [27] J.-M. Coron: *On the small-time local controllability of a quantum particle in a moving one-dimensional infinite square potential well*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 342(2), 103-108, 2006
- [28] M. Dahleh, A. Peirce, H. Rabitz, V. Ramakrishna, M. V. Salapaka: *Controllability of molecular systems*, Phys. Rev. A, 51(2), 960-966, 1995
- [29] D. D'Alessandro: *Introduction to Quantum Control and Dynamics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007
- [30] A. F. M. ter Elst, S. J. L. van Eijndhoven: *A Gevrey space characterization of certain Gelfand-Shilov spaces \mathcal{S}_α^β* , Indagationes Mathematicae (Proc.), 92(2), 175-184, 1989
- [31] S. J. L. van Eijndhoven, J. de Graaf, R. S. Pathak: *A characterization of the spaces $\mathcal{S}_{1/k+1}^{k/k+1}$ by means of holomorphic semigroups*, SIAM J. Math. Anal., 14(6), 1180-1186, 1983
- [32] A. Eremenko, A. Gabrielov, B. Shapiro: *Zeros of eigenfunctions of some anharmonic oscillators*, Ann. I. Fourier Grenoble, 58(2), 603-624, 2008
- [33] S. Ervedoza, J.-P. Puel: *Approximate controllability for a system of Schrödinger equations modeling a single trapped ion*, Ann. I. H. Poincaré-AN, 26(6), 2111-2136, 2009
- [34] L. D. Faddeev, O. A. Yakubovskii: *Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students*, Amer. Math. Soc., Providence, 2009
- [35] B. Feng, J. Liu, J. Zheng: *Optimal bilinear control of nonlinear Hartree equation in \mathbb{R}^3* , Electronic J. Diff. Eq., 130, 1-14, 2013
- [36] G. M. Fichtenholz: *Differential- und Integralrechnung II*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974
- [37] O. Forster: *Analysis 3*, Vieweg, Wiesbaden, 2009
- [38] I. M. Gelfand, G. E. Shilov: *Generalized Functions*, Vol. 2, Acad. Press, New York, 1968
- [39] M. Ghisi, M. Gobino: *Derivative loss for Kirchhoff equations with non-Lipschitz nonlinear term*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 8(5), 613-646, 2009
- [40] M. Ghisi, M. Gobino: *Kirchhoff Equations in Generalized Gevrey Spaces: Local Existence, Global Existence, Uniqueness*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 42 Suppl., 89-110, 2010
- [41] K. Goldhorn, H. Heinz: *Mathematik für Physiker 3*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- [42] G. G. Gundersen: *A subclass of anharmonic oscillators whose eigenfunctions have no recurrence relation*, Proc. Amer. Math. Soc., 58, 109-113, 1976

- [43] G. G. Gundersen: *Exponential Operators from Anharmonic Oscillators*, J. Diff. Eq., 27, 298-312, 1978
- [44] A. Haraux: *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire*, J. Math. Pures et Appl., 68, 457-465, 1989
- [45] M. Hintermüller, D. Marahrens, P.A. Markowich, C. Sparber: *Optimal bilinear control of Gross-Pitaevskii Equations*, SIAM J. Control and Optimization, 51(3), 2509-2543, 2013
- [46] F. T. Hioe, E. W. Montroll: *Quantum theory of anharmonic oscillators. I. Energy levels of oscillators with positive quartic anharmonicity*, J. Math. Phys., 16(1945), 1975
- [47] P. D. Hislop, I.M. Sigal: *Introduction to Spectral Theory with applications to Schrödinger operators*, Springer, New York, 1996
- [48] G. M. Huang, T. J. Tarn, J. W. Clark: *On the controllability of quantum-mechanical systems*, J. Math. Phys. , 24, 2608-2618, 1983
- [49] R. Illner, H. Lange, H. Teismann: *Limitations on the control of Schrödinger equations*, ESAIM: COCV, 12(4), 615-635, 2006
- [50] R. Illner, H. Lange, H. Teismann: *A note on the exact internal control of nonlinear Schrödinger equations*, CRM Proc. Lecture Notes, 33, 127-137, 2003
- [51] R. J. Iorio, Jr, Dan Marchesin: *On the Schrödinger equation with time-dependent electric fields*, Proc. R. Soc. Edinburgh, 96(1), 117-134, 1984
- [52] K. Ito, K. Kunisch: *Optimal Bilinear Control of an Abstract Schrödinger Equation*, SIAM J. Control and Optimization, 46(1), 274-287, 2007
- [53] A. I. Kashpirovskii: *Equality of the spaces \mathcal{S}_α^β and $\mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}^\beta$* , Funct. Anal. and Its Applications, 14(2), 129-129, 1980
- [54] T. Kato: *Linear evolution equations of 'hyperbolic' type II.*, Math. Soc. Japan, 25, 648-666, 1973
- [55] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin Heidelberg, 1976
- [56] K. Königsberger: *Analysis 1*, Springer, Berlin Heidelberg, 1999
- [57] V. Komornik, P. Loreti: *Fourier series in control theory*, Springer, New York, 2005
- [58] H. J. Korsch: *Mathematik der Quantenmechanik*, Binomi, Barsinghausen, 2013
- [59] H. J. Korsch, M. Glück: *Quantenmechanik mit Matlab*, Vorlesungsskript aus dem SS 1998, Universität Kaiserslautern, <http://aleph.physik.uni-kl.de/~korsch/vorlesung/Qmatlab.pdf>

-
- [60] W. Krabs: *On Moment Theory and Controllability of One-Dimensional Vibrating Systems and Heating Processes*, Springer, Berlin Heidelberg, 1992
- [61] D. G. Luenberger: *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1969
- [62] Y. Maday, G. Turinici: *New formulations of monotonically convergent quantum control algorithms*, J. Chem. Phys., 118(18), 2003
- [63] A. I. Markushevich: *Theory of functions of a complex variable*, transl. and ed. by R. A. Silverman, Chelsea Publishing Company, New York, 1977
- [64] P. Mason, M. Sigalotti: *Generic controllability properties for the bilinear Schrödinger equation*, Comm. Part. Diff. Eq., 35(4), 685-706, 2010
- [65] A. Messiah: *Quantenmechanik*, Bd. 1, de Gruyter, Berlin, 1991
- [66] P. D. Miller: *Applied asymptotic analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, 2006
- [67] M. Mirrahimi: *Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential*, Ann. I. H. Poincaré-AN, 26(5), 1743-1765, 2009
- [68] M. Mirrahimi, P. Rouchon: *Controllability of quantum harmonic oscillators*, IEEE Trans. on Automatic Control, 49(5), 745-747, 2004
- [69] M. Morancey: *Simultaneous local exact controllability of 1D bilinear Schrödinger equations*, Ann. I. H. Poincaré-AN, 31(3), 501-529, 2014
- [70] M. Morancey, V. Nersesyan: *Simultaneous global exact controllability of an arbitrary number of 1D bilinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures et Appl., 103(1), 228-254, 2015
- [71] V. Nersesyan: *Growth of Sobolev Norms and Controllability of the Schrödinger Equation*, Comm. Math. Phys., 290(1), 371-387, 2009
- [72] V. Nersesyan: *Global approximate controllability for Schrödinger Equation in higher Sobolev norms and applications*, Ann. I. H. Poincaré-AN, 27(3), 901-915, 2010
- [73] V. Nersesyan, H. Nersisyan: *Global exact controllability in infinite time of Schrödinger equation*, J. Math. Pures et Appl., 97(4), 295-317, 2012
- [74] V. Nersesyan, H. Nersisyan: *Global exact controllability in infinite time of Schrödinger equation: multidimensional case*, arXiv:1201.3445, 2012
- [75] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983

- [76] V. S. Rabinovich: *Exponential estimates for eigenfunctions of Schrödinger operators with rapidly increasing and discontinuous potentials*, Contemp. Math., Vol. 364, 2004
- [77] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Acad. Press, New York, 1975
- [78] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators*, Acad. Press, San Diego, 1978
- [79] J. Salomon: *Convergence of the time-discretized monotonic schemes*, ESAIM: M2AN, 41(1), 77-93, 2007
- [80] J. Salomon: *Limit points of the monotonic schemes in quantum control*, Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Sevilla, 2005
- [81] F. Schwabl: *Quantenmechanik*, Springer, Berlin Heidelberg, 2005
- [82] B. Simon, A. Dicke: *Coupling Constant Analyticity for the Anharmonic Oscillator*, Ann. Phys., 58(1), 76-136, 1970
- [83] B. Simon: *Distributions and their Hermite expansions*, J. Math. Phys., 12, 140-148, 1971
- [84] B. Simon: *Pointwise Bounds on Eigenfunctions and Wave Packets in N-Body Quantum Systems. III*, Trans. Amer. Math. Soc., 208, 317-329, 1975
- [85] W. A. Strauss: *Partielle Differentialgleichungen*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1995
- [86] L. A. Takhtajan: *Quantum Mechanics for Mathematicians*, Amer. Math. Soc., Providence, 2008
- [87] H. Tamura: *Asymptotic formulas with sharp remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators of second order*, Duke Math. J., 49(1), 1982
- [88] D. Tannor, V. Kazakov, V. Orlov: *Control of photochemical branching: Novel procedures for finding optimal pulses and global upper bounds*, in: Time Dependent Quantum Molecular Dynamics (Eds. J. Broeckhove and L. Lathouwers), 347-360, 1992
- [89] H. Teismann: *Generalized coherent states and the control of quantum systems*, J. Math. Phys., 46(12), 122106, 2005
- [90] G. Teschl: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators*, Amer. Math. Soc., Providence, 2009
- [91] E. C. Titchmarsh: *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, Part I, Second Edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1962

-
- [92] E. C. Titchmarsh: *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, Oxford Univ. Press, London, 1946
- [93] E. C. Titchmarsh: *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, Part II, Oxford Univ. Press, Oxford, 1958
- [94] E. C. Titchmarsh: *On the eigenvalues in problems with spherical symmetry*, Proc. R. Soc. Lond. A, 245(1241), 1958
- [95] E.C. Titchmarsh: *On the eigenvalues in problems with spherical symmetry. II*, Proc. R. Soc. Lond. A, 251(1264), 1959
- [96] E.C. Titchmarsh: *On the eigenvalues in problems with spherical symmetry. III*, Proc. R. Soc. Lond. A, 252(1271), 1959
- [97] G. Turinici: *Controllable quantities for bilinear quantum systems*, Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 1364-1369, 2000
- [98] A. S. Vshivzev, N. V. Norin, V. N. Sorokin: *Solution of the spectral problem for the Schrödinger equation with a degenerate polynomial potential of even power*, Theoret. and Math. Phys., 109(1), 1329-1341, 1996
- [99] J. Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teil I, Teubner, Stuttgart, 2000
- [100] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin Heidelberg, 2002
- [101] K. Yajima: *Smoothness and Non-Smoothness of the Fundamental Solution of Time Dependent Schrödinger Equations*, Comm. Math. Phys., 181(3), 605-629, 1996
- [102] K. Yajima, G. Zhang: *Smoothing Property for Schrödinger Equations with Potential Superquadratic at Infinity*, Comm. Math. Phys., 221(3), 573-590, 2001
- [103] J. Zabczyk: *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 2008
- [104] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis: Applications of mathematical physics*, Springer, New York, 1999
- [105] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Springer, New York, 1995
- [106] W. Zhu, H. Rabitz: *A rapid monotonically convergent iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator*, J. Chem. Phys., 109, 385-391, 1998
- [107] E. Zuazua: *Remarks on the controllability of the Schrödinger equation*, CRM Proc. Lecture Notes 33, 193-211, 2003

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde.

Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. Horst Lange betreut worden.

Teilpublikationen liegen nicht vor.

Wuppertal, im Dezember 2016

