

HALLALGEBREN ZAHMER GATTUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität zu Köln

vorgelegt von
Christian Reinecke
aus
Frankfurt (Oder)

Bonn, 2018

Berichtersteller:
(Gutachter)

Prof. Dr. Igor Burban

Prof. Dr. Peter Littellmann

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Dezember 2017

Abstract

Since the end of the 1980s, the study of quantum groups $U_q(\mathfrak{g})$ has been a major focus within the field of modern representation theory and they play an important role for applications in mathematical physics. They are a q -deformation of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ of a Kac-Moody Lie algebra \mathfrak{g} and are endowed with the structure of a Hopf algebra.

Hall algebras $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ of hereditary categories \mathcal{A} are closely related to quantum groups and explain their Hopf structure. They were introduced in the late 1980s by Ringel and have been drawing much attention since then. For example, the composition (Hall) algebra $\mathcal{C}(Q)$ of the Kronecker quiver $Q = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bullet$ is isomorphic to the positive part $U_q^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ of the quantum group $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. This allowed Burban and Schiffmann in [BS12] to develop some known results about $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ in a more conceptual way.

For a symmetric Cartan matrix, the connection between the composition algebra $\mathcal{C}(Q)$ of its simply laced quiver and the

quantum group $U_q(\mathfrak{g})$ of its associated Kac-Moody Lie algebra is well-understood, see Schiffmann [S09] for details. However, this connection was much less developed for non-symmetric Cartan matrices. Instead of simply laced quivers, species are involved and were described by Dlab und Ringel in [DR76].

Hence, the main purpose of this thesis is to study the more general objects and the following results have been established:

- For Cartan matrices of finite or affine type, the symmetries of $U_q(\mathfrak{g})$ introduced by Lusztig in [L94] correspond to the reflection functors of $\mathscr{P}^b(\text{Rep}(Q))$ by Bernstein, Gelfand and Ponomarev.
- The composition algebra for species of Dynkin or Euclidean type contains all preprojective and all preinjective representations, as well as certain sums $\widetilde{\mathbb{1}}_{r\delta}$ of regular elements.

Using the approach of [BS12], some initial results for the Kac-Moody Lie algebra of type \widetilde{A}_1^2 are presented as well.

Kurzzusammenfassung

Quantengruppen $U_q(\mathfrak{g})$ stehen seit Ende der 80-er Jahre im Mittelpunkt der modernen Darstellungstheorie und spielen eine wichtige Rolle bei Anwendungen in der mathematischen Physik. Sie sind q -Deformationen der universellen, einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ einer Kac-Moody-Liealgebra \mathfrak{g} und tragen die Struktur einer Hopfalgebra.

In engem Zusammenhang zu Quantengruppen stehen Hallalgebren $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ erblicher Kategorien und beschreiben deren Hopfstruktur. Sie wurden Ende der 80-er Jahre von Ringel eingeführt und haben seitdem für viel Aufmerksamkeit gesorgt. Zum Beispiel ist die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(Q)$ der Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen des Kroneckerköchers $Q = \bullet \rightleftarrows \bullet$ zum positiven Teil $U_q^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ der Quantengruppe $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ isomorph. Dies erlaubte es Burban und Schiffmann [BS12], einige bekannte Resultate über $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ „konzeptuell“ herzuleiten.

Dieser Zusammenhang ist für Liealgebren mit *symmetrischer* Cartanmatrix auf der einen Seite bzw. für Köcher mit einfachen Kanten auf der anderen Seite gut verstanden und z.B. bei Schiff-

mann [S09] detailliert beschrieben. Für Liealgebren *symmetrisierbarer* Cartanmatrizen bzw. für Gattungen ist der Zusammenhang weniger erforscht, obwohl Gattungen und ihre Darstellungstheorie bereits in den 70-er Jahren von Dlab und Ringel [DR76] beschrieben wurden.

Für die Verallgemeinerung auf symmetrisierbare Cartanmatrizen sind in dieser Dissertation folgende Ergebnisse beschrieben:

- Für Cartanmatrizen von endlichem oder affinem Typ entsprechen die Lusztigschen Symmetrien [L94] den Spiegelfunktoren von Bernstein, Gelfand und Ponomarev.
- Die Kompositionsalgebra für Gattungen vom Dynkintyp oder Euklidischem Typ enthält alle präprojektiven und alle präinjektiven Darstellungen sowie geeignete Summen $\tilde{\mathbb{I}}_{r,\delta}$ regulärer Elemente.

Für eine Verallgemeinerung der Resultate aus [BS12] auf die Liealgebra vom Typ \tilde{A}_1^2 werden erste Ergebnisse erzielt.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iii
Kurzzusammenfassung	v
Inhaltsverzeichnis	vii
Einleitung	ix
1 Hallalgebren und Quantengruppen	1
1.1 Hopfalgebren	5
1.2 Abgeleitete Kategorien	11
1.3 Hallalgebren	15
1.4 Quantengruppen	24
2 Darstellungstheorie zahmer Gattungen	31
2.1 Gattungen	33
2.2 Quadratische Form und Wurzeln	49
2.3 Spiegelungsfunktoren	55
	vii

2.4	Coxeterfunktoren	65
3	Kompositionsalgebra zahmer Gattungen	69
3.1	Abgeleitete Spiegelungsfunktoren	71
3.2	Spiegelungsfunktoren und Kompositionsalgebren	81
3.3	Elemente der Kompositionsalgebra	95
3.4	Spezialfall \tilde{A}_1^2	100
	Literaturverzeichnis	113
	Erklärung zur Dissertation	117

Einleitung

Seit Ende der 80-er Jahre stehen Quantengruppen im Mittelpunkt der modernen Darstellungstheorie. Eine Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g})$ ist eine sogenannte q -Deformation der universell einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ einer Kac-Moody-Liealgebra \mathfrak{g} . Ihre Darstellungstheorie spielt eine wichtige Rolle bei Anwendungen in der mathematischen Physik und hat eine reichhaltige und elegante Kombinatorik.

Als Beispiel nimmt die Algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ eine wichtige Rolle in der Theorie des Heisenbergschen XXZ-Modells ein, welches insbesondere eine phänomenologisch zufriedenstellende Beschreibung des Antiferromagnetismus liefert. Aus mathematischer Perspektive hat $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ eine sehr interessante und reichhaltige Darstellungstheorie.

Die Hopfalgebrenstruktur der Quantengruppen wird am besten durch die Theorie der Hallalgebren erblicher Kategorien beschrieben. Die Theorie der Hallalgebren wurde Ende der 80-er Jahre von Ringel eingeführt und hat seitdem für sehr viel Aufmerksamkeit gesorgt. Zum Beispiel ist die Kompositionshallal-

gebra $\mathcal{C}(Q)$ der Kategorie der Darstellungen des Kroneckerk6chers $Q = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bullet$ zum positiven Teil $U_q^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ der Quantengruppe $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ isomorph. Wie im Forschungsprogramm einer Arbeit von Burban und Schiffmann [BS12] gezeigt wurde, lassen sich 6ber die Darstellungstheorie von Q viele Resultate 6ber $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ „konzeptuell“ herleiten:

- Die Lusztigschen Symmetrien von $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ entsprechen den Spiegelungsfunktoren von Bernstein, Gelfand und Ponomarev,
- die Poincar6-Birkhoff-Witt-Basis von $U_q^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ l6sst sich mit Hilfe der Auslander-Reiten-Theorie endlichdimensionaler Darstellungen von Q konstruieren und
- der Drinfeld-Beck-Isomorphismus $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{L}\mathfrak{sl}_2)$ steht im Bezug zur 6quivalenz abgeleiteter Kategorien $\mathcal{D}^b(\text{Rep}(Q)) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{Coh}(\mathbb{P}^1))$.

Die Liealgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ besitzt die Cartanmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ welche 6ber eine Art Zwilling } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

verf6gt. Die zweite Cartanmatrix geh6rt zur Quantengruppe $U_q(\widehat{A}_1^2)$, die auch Anwendungen in der mathematischen Physik hat: Sie ist die Symmetriealgebra des sogenannten Korepin-Izergin-Modells. Allerdings ist ihre Cartanmatrix nicht symmetrisch bzw. besitzt ihr klassifizierendes Diagramm keine einfachen Kanten.

Analog zum Kroneckerköcher kann die positive Hälfte $U_q(\mathfrak{b}^+)$ einer Kac-Moody-Liealgebra \mathfrak{g} mit symmetrischer Cartanmatrix als Kompositionsalgebra ihres beschreibenden Diagramms realisiert werden (vgl. [S09]). Für die umfassendere Klasse symmetrisierbarer Cartanmatrizen ist der Zusammenhang bisher weniger detailliert in der Forschungsliteratur zu finden. Dazu soll mit dieser Dissertation ein Beitrag geleistet werden.

Als Motivation für Gattungen soll an eine klassische Herkunft für Pfadalgebren erinnert werden: Betrachte eine endlich dimensionale, basische und erbliche Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k . Dann zerfällt der Quotient nach dem Jacobsonradikal $\text{rad}(A)$ in ein Produkt

$$\Lambda_0 := A/\text{rad}(A) = \prod_{1 \leq i \leq n} F_i$$

aus endlich dimensionalen Schiefk orpfern F_i mit $F_i \cong k$ und der Quotient $\text{rad}(A)/\text{rad}^2(A)$ wird zu einem Λ_0 - Λ_0 -Bimodul. Dieser Quotient kann weiter in F_i - F_j -Bimoduln ${}_iM_j$

$$\Lambda_1 := \text{rad}(A)/\text{rad}^2(A) = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} {}_iM_j$$

mit ${}_iM_j \cong k^{m_{i,j}}$ zerlegt werden. Mit diesen Daten lässt sich ein Köcher Q definieren, der n Knoten und $m_{i,j}$ parallele Kanten der Form $i \rightarrow j$ besitzt. Da A endlich dimensional ist, wird der Köcher weder Schleifen noch gerichtete Kreise haben und es gilt das bekannte Theorem (u.a. in [ASS06] zu finden)

$$A \cong kQ := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n \quad \text{mit } \Lambda_n := \underbrace{\Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \dots \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1}_{n \text{ mal}},$$

welches einen Isomorphismus zwischen der ursprünglichen Algebra A und der Pfadalgebra kQ des konstruierten Köchers Q liefert. Die Voraussetzungen basisch bzw. erblich kann man durch eine Abschwächung der Aussage auf Morita-Äquivalenz bzw. einen Quotienten kQ/I nach einem zulässigen Ideal I fallen lassen.

Zur Konstruktion einer Hallalgebra sind endliche Morphenräume sowie eine endliche Anzahl an Erweiterungen zwingend notwendig, sodass in obigem Beispiel die Algebra A über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q , insbesondere also über einem *nicht* algebraisch abgeschlossenem Körper lebt. Die erwähnten Schiefkörper F_i sind nicht mehr notwendigerweise zu \mathbb{F}_q isomorph, aber ihrerseits endlich und somit glücklicherweise ebenfalls endliche Körper. Für die F_i - F_j -Bimoduln ${}_iM_j$ lassen sich nicht mehr notwendigerweise Basen simultan bzgl. der Wirkung von beiden Körpern finden.

In diesem Fall genügen also die Daten (Q_0, Q_1) über Knoten und Kanten eines Köchers nicht mehr. Stattdessen sind neben der Indexmenge Γ der Knoten noch die Körper $\{F_i\}_{i \in \Gamma}$ und die Bimoduln $\{{}_iM_j\}_{i, j \in \Gamma}$ ausschlaggebend und definieren zusammen eine Gattung. Das oben erwähnte Theorem besitzt eine „modifizierte“ Variante für perfekte (insbesondere endliche) statt algebraisch abgeschlossene Körper, die sich genauso wie obige Variante liest, wobei die beschriebene Tensoralgebra nicht mehr mit der Pfadalgebra eines Köchers übereinstimmt.

Definiert man nun $f_i := [F_i : \mathbb{F}_q]$ als den Grad der Körpererweiterung und $d_{ij} := \dim_{F_j}({}_iM_j)$, stellt man fest, dass $f_j d_{ij} = f_i d_{ji}$ gilt. Mit den f_i lässt sich also eine Diagonalmatrix D und mit den d_{ij} eine Cartanmatrix C definieren, sodass DC sym-

metrisch ist. Insbesondere sind Gattungen bzw. die Kategorie ihrer Darstellungen ein potentiell gutes Instrument, um Quantengruppen symmetrisierbarer Cartanmatrizen durch Hallalgebren auszudrücken. Hiermit wird ein Beitrag geleistet, um diese Sichtweise zu bestätigen.

Diese Dissertation ist in drei Kapitel aufgeteilt.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen zur Hallalgebra $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ einer geeigneten, abelschen Kategorie \mathcal{A} und deren (reduziertem) Drinfeld-doppel $\mathcal{DH}(\mathcal{A})$ gelegt und folgende Inhalte wiederholt: Der Satz von Cramer liefert Isomorphismen zwischen reduzierten Drinfeld-doppeln von Hallalgebren und erfordert seinerseits etwas Grundbau über die beschränkte, abgeleitete Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie \mathcal{A} - vor allem für eine erbliche Kategorie \mathcal{A} . Von weiterem zentralem Interesse ist die Beziehung zur Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g}_C)$ einer Cartanmatrix C , welche zuerst eingeführt und in Analogie zur Hallalgebra als Drinfeld-doppel ihrer Hälfte $U_q(\mathfrak{b}_C^+)$ formuliert wird.

Im zweiten Kapitel werden Gattungen Γ und ihre Darstellungstheorie $\text{Rep}(\Gamma)$ entwickelt, wobei der Schwerpunkt auf Gattungen mit einer positiv semidefiniten, quadratischen Form q_Γ liegt (im Folgenden als zahme Gattungen bezeichnet). Bereits in den Grundlagen fallen dabei viele Ähnlichkeiten zu Köchern Q auf, die sich größtenteils daraus ergeben, dass beide assoziierten Algebren kQ bzw. $\Lambda(\Gamma)$ Tensoralgebren sind. Die beiden Begriffe eines relativ bzw. absolut gewichteten Graphen werden verglichen und in einen Zusammenhang mit symmetrisierbaren Cartanmatrizen C gestellt. Für Quellen bzw. Senken $* \in \Gamma$ definierte Spiegelungsfunktoren \mathbb{S}_*^\pm und die zu einer zulässigen Folge

von Knoten assoziierten Coxeterfunktoren \mathbb{C}^\pm sind auch hier der Start der Konstruktion vieler unzerlegbarer Darstellungen.

Das dritten Kapitel konzentriert sich auf die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ der Hallalgebra $\mathcal{H}(\Gamma)$ aller endlichdimensionaler Darstellungen einer Gattung Γ . Als erstes Resultat dieser Dissertation wird gezeigt, dass die abgeleiteten Spiegelungsfunktionen

$$\mathbb{R}\mathcal{S}_*^+ : \quad \mathcal{D}^b(\Gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{D}^b(s_*\Gamma) \quad : \mathbb{L}\mathcal{S}_*^-$$

für beliebige Gattungen Γ Äquivalenzen der beschränkten, abgeleiteten Kategorien $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ und $\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)$ der Darstellungen von Γ bzw. der im Knoten $*$ $\in \Gamma$ gespiegelten Gattung $s_*\Gamma$ bilden. Zusätzlich kann für zahme Gattungen gezeigt werden, dass sich die durch den Satz von Cramer induzierten Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm der reduzierten Drinfeldoppel $\mathcal{DH}(\Gamma)$ bzw. $\mathcal{DH}(s_*\Gamma)$ auf die reduzierten Doppel der Kompositionsalgebren einschränken lassen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_*^+ : & \mathcal{DH}(\Gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{DH}(s_*\Gamma) & : \mathcal{S}_*^- , \\ & \begin{array}{c} \subseteq \uparrow \\ \mathcal{DC}(\Gamma) \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \subseteq \\ \mathcal{DC}(s_*\Gamma) \end{array} \\ & & \mathcal{DC}(\Gamma) \langle \dots \dots \dots \rangle \mathcal{DC}(s_*\Gamma) \end{array}$$

welche isomorph zur Quantengruppe sind. Durch eine geeignete Wahl des Isomorphismus ergeben sich genau die bereits von Lusztig in [L94, Chapter 37] beschriebenen Isomorphismen, für die hiermit eine kategorielle und damit konzeptuelle Konstruktion beschrieben wird. Desweiteren lassen sich für zahme Gat-

tungen folgende Elemente in der Kompositionsalgebra finden

$$\prod_{P \in \mathcal{P}} [P]^{m_P} \cdot \prod_{r \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{1}}_{r\delta}^{m_r} \cdot \prod_{I \in \mathcal{I}} [I]^{m_I} ,$$

wobei δ die imaginäre Wurzel, $\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta}$ die Summe aller regulären Darstellungen mit Dimensionsvektor $r\delta$ und \mathcal{P} bzw. \mathcal{I} die vollen Unterkategorien der präprojektiven bzw. präinjektiven Darstellungen der zahmen Gattung Γ beschreiben. Im Fall des Kroneckerköchers bzw. einer Gattung vom Typ \tilde{A}_1^1 konnte in [BS12] gezeigt werden, dass diese Elemente eine Basis der Kompositionsalgebra bilden. Der Drinfeld-Beck-Isomorphismus $U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2)$ steht im Bezug zur Äquivalenz der abgeleiteten Kategorien $\mathcal{D}^b(\text{Rep}(Q))$ und $\mathcal{D}^b(\text{Coh}(\mathbb{P}^1))$. Daher ist es sinnvoll, eine Art Kompositionsalgebra in $\text{Coh}(\mathbb{P}^1)$ zu definieren, für die eine Basis bereits bekannt ist und welche maßgeblich im Beweis hilft. Für den eingangs erwähnten Zwilling \tilde{A}_1^2 werden am Ende erste Resultate beschrieben, wobei vor allem die Konstruktion eines Analogons zu $\text{Coh}(\mathbb{P}^1)$ mittels Kipptheorie gelungen ist.

Vom gegenwärtigen Stand der Arbeit ausgehend gibt es mehrere mögliche Anschlussprojekte.

Als nächstliegende Aufgabe kann das beschriebene Programm für die vermutete Basis der Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$ mit größerem geometrischem Hintergrund höchstwahrscheinlich vollendet werden.

Vermutlich lassen sich die von den abgeleiteten Spiegelungsfunktoren induzierten Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm für beliebige Gattungen auf die reduzierten Drinfeld-Doppel der Kompositionsalgebren einschränken. Dazu müsste eine Kante von beliebigem Ge-

wicht (n, m) betrachtet und die gespiegelten einfachen Darstellungen $\mathbb{S}_*^\pm(S_i)$ als Linearkombination von Produkten von S_* und S_i geschrieben werden.

Über Kac-Moody-Liealgebren hinaus werden in der Literatur auch verallgemeinerte Kac-Moody-Liealgebren bzw. Borcherds Kac-Moody-Liealgebren betrachtet. Auch wenn deren Graphen Schleifen erlauben, sind an Knoten ohne Schleifen Spiegelungsfunktionen wie bei Gattungen möglich, sodass sich vielleicht Analogie zu den von Lusztig beschriebenen Isomorphismen ergeben.

Danksagung

Großer Dank gilt zunächst meinem Doktorvater Herrn Professor Dr. Igor Burban für die Betreuung dieser Dissertation. Er hat mir nicht nur einen guten Einstieg in das Thema ermöglicht, sondern mich auch die ganze Zeit über bei diesem interessanten Thema begleitet. In besonderem Maße möchte ich mich auch bei Dr. Lennart Galinat bedanken, der mir gerade in den letzten Monaten während unzähliger Stunden mit mathematischen Diskussionen, Ideen und Korrekturhinweisen zur Seite stand, sowie bei Sebastian Opper, er mir bis fast zur letzten Stunde vor der Abgabe mathematisch beistand.

Sehr hilfreich waren darüberhinaus auch die Korrekturhinweise von Delia, Wassilij und Yana und die Unterstützung der ganzen Arbeitsgruppe. Zuletzt gilt mein Dank auch meinen Freunden und meiner Familie, die mich während meiner gesamten Promotion auf jede erdenkliche Art unterstützt haben.

Kapitel 1

Hallalgebren und Quantengruppen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit allen Grundlagen zu Hallalgebren und Quantengruppen, die im weiteren Verlauf wichtig sein werden. Zu Beginn werden dabei Quantenzahlen und nützliche Formeln für diese eingeführt.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit Hopfalgebren H , welche die mathematische Struktur sowohl von Quantengruppen als auch Hallalgebren beschreiben. Die Zusatzstruktur einer Hopfalgebra gegenüber einer Algebra bereichern die Modulkategorie $\text{Mod-}H$ um weitere Operationen wie Tensorprodukte oder duale Moduln. Beispiele für Hopfalgebren sind Gruppenalgebren $k[G]$ und Polynomringe $k[X_i \mid i \in I]$ mit beliebig vielen Variablen. Das Tensorprodukt $A \otimes B$ zweier Hopfalgebren A und B

trägt die Struktur einer Hopfalgebra $\tilde{\mathcal{D}}_\varphi(A, B)$ - Drinfelddoppel oder Quantendoppel genannt -, welches von einer Hopfalgebrenpaarung $\varphi : A \times B \rightarrow k$ abhängt und im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird.

Im Abschnitt über abgeleitete Kategorien werden die Begriffe der Kategorie beschränkter Kettenkomplexe $\text{Chain}^b(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie \mathcal{A} , deren Homotopiekategorie $\text{Hot}^b(\mathcal{A})$ und deren abgeleiteter Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ wiederholt. Da für Hallalgebren erbliche Kategorien vonnöten sind, wird zusätzlich an einige Eigenschaften von $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ erinnert, die für erbliche Kategorien \mathcal{A} gelten.

Der dritte Abschnitt führt die Hallalgebra $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ einer geeigneten Kategorie \mathcal{A} in einer kompakten und an die Darstellung in [BS12] angelehnten Form ein. Diese wird am einfachsten Beispiel $\mathcal{A} = \text{Mod-}\mathbb{F}_q$ veranschaulicht und liefert direkt eine nützliche Formel für Potenzen einfacher Objekte einer Hallalgebra. Die Greenske Form ist eine Hopfpaarung und ermöglicht die Konstruktion des Drinfelddoppels $\mathcal{DH}(\mathcal{A})$, welche eine naheliegende Reduzierung $\mathcal{DH}(\mathcal{A})$ besitzt. Für diese Reduzierung gilt der Satz von Cramer, welcher von einer Äquivalenz geeigneter, abgeleiteter Kategorien $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ ausgehend einen Isomorphismus der reduzierten Drinfelddoppel $\mathcal{DH}(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{DH}(\mathcal{B})$ liefert und von zentraler Bedeutung im letzten Kapitel sein wird.

Im letzten Abschnitt wird die Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g}_C)$ einer Cartanmatrix C eingeführt, welche sich ähnlich zur Hallalgebra als ein reduziertes Doppel ihrer Unterhopfalgebra $U_q(\mathfrak{b}_C^\pm)$ schreiben lässt. Man erhält eine Einbettung $U_q(\mathfrak{b}_C^\pm) \rightarrow \mathcal{H}(Q_C)$, deren Bild die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(Q_C)$ genannt wird und

für darstellungsendliche Cartanmatrizen bereits mit der gesamten Hallalgebra übereinstimmt.

Quantenzahlen

Definition 1.1: Für $0 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ definiere

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_v := \frac{[m]_v!}{[n]_v! \cdot [m-n]_v!}, \quad [n]_v! := \prod_{i=1}^n [i]_v \quad \text{und} \quad [n]_v := \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}}.$$

Sind Verwechslungen ausgeschlossen oder spielt v nur eine untergeordnete Rolle, wird der Index auch weggelassen.

Bemerkung 1.2: Aus der Definition geht schnell hervor, dass

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m-n \end{bmatrix}.$$

Lemma 1.3: Für $0 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ gilt

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = v^{m-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + v^{-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}.$$

Beweis: Eine explizite Rechnung liefert das Gewünschte:

$$\begin{aligned} \text{rechte Seite} &= v^{m-n} \frac{[m-1]!}{[n-1]![m-n]!} + v^{-n} \frac{[m-1]!}{[n]![m-1-n]!} \\ &= \frac{[m-1]!}{[n]![m-n]!} \cdot \left(v^{m-n}[n] + v^{-n}[m-n] \right). \end{aligned}$$

Zeige noch $v^{m-n}[n] + v^{-n}[m-n] = [m]$:

$$\begin{aligned}
 v^{m-n}[n] + v^{-n}[m-n] &= v^{m-n} \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}} + v^{-n} \frac{v^{m-n} - v^{n-m}}{v - v^{-1}} \\
 &= \frac{1}{v - v^{-1}} \left(v^m - \underbrace{v^{m-2n} + v^{m-2n}}_{=0} - v^{-m} \right).
 \end{aligned}$$

✓

Lemma 1.4: Ist $\text{Gr}(p, d) = \{V \subseteq k^d \mid \dim(V) = p\}$ und $v = \sqrt{|k|}$, so gilt

$$|\text{Gr}(n, m+n)| = v^{mn} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Zählen aller möglichen (geordneten) Basen für V in k^{n+m} . Da unterschiedliche Basen den selben Vektorraum liefern können, muss das Ergebnis noch durch die Anzahl aller (geordneten) Basen von V geteilt werden. Wähle nacheinander immer weitere Basisvektoren $\{v_i\}_{i=1}^n$ im Komplement von $\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ und erhalte

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^n (|k|^{m+n} - |k|^{i-1}) &= \prod_{i=0}^{n-1} (|k|^{m+n} - |k|^i) \\
 &= \prod_{i=0}^{n-1} (v^{2(m+n)} - v^{2i}) \\
 &= \prod_{i=0}^{n-1} v^{m+n+i} \cdot (v^{m+n-i} - v^{-(m+n-i)}).
 \end{aligned}$$

Die Basen von V lassen sich analog zählen, sodass sich eine ähnliche Formel ergibt:

$$\prod_{i=1}^n (|k|^n - |k|^{i-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} v^{n+i} \cdot (v^{n-i} - v^{-(n-i)}) .$$

Als Quotient und erweitert mit $\frac{v-v^{-1}}{v-v^{-1}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{n-1} v^{m+n+i} \frac{v^{m+n-i} - v^{-(m+n-i)}}{v - v^{-1}} \cdot \left(v^{n+i} \frac{v^{n-i} - v^{-(n-i)}}{v - v^{-1}} \right)^{-1} \\ = & \prod_{i=0}^{n-1} v^{m+n+i} v^{-i-n} \cdot \frac{[m+n-i]}{[n-i]} \\ = & \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} v^m . \end{aligned}$$

✓

1.1 Hopfalgebren

Definition 1.5: Sei k eine Körper. Eine k -Algebra ist ein Tupel (A, μ, η) bestehend aus einem k -Vektorraum A und zwei linearen Abbildungen *Multiplikation* $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ und *Einheit* $\eta : k \rightarrow$

A , sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \text{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 k \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & A \otimes k \\
 \lambda \otimes a \rightarrow \lambda a \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \lambda \otimes a \rightarrow \lambda a \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Eine k -*Koalgebra* ist ein Tupel (C, Δ, ε) bestehend aus einem k -Vektorraum C und zwei linearen Abbildungen *Komultiplikation* $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ und *Koeinheit* $\varepsilon : C \rightarrow k$, sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \\
 \text{id} \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 k \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & C \otimes k \\
 c \rightarrow 1 \otimes c \searrow & & \uparrow \Delta & & \swarrow c \rightarrow c \otimes 1 \\
 & & C & &
 \end{array}$$

Eine k -*Bialgebra* ist ein Tupel $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$, sodass (B, μ, η) eine Algebra und (B, Δ, ε) ein Koalgebra ist und μ, ε Algebrenmorphisme bzw. äquivalent μ, η Koalgebrenmorphisme sind.

Bemerkung 1.6: Trägt eine k -Algebra A die Struktur einer Bialgebra, bereichert das die Modulkategorie $\text{Mod-}A$ um folgende Operationen:

- Sind M und N zwei A -Moduln, so wird (der Vektorraum) $M \otimes_k N$ durch lineare Fortsetzung der Vorschrift $(m \otimes n) \cdot a := m \otimes n \cdot \Delta(a)$ zu einem A -Modul.
- Der Körper k wird durch $\lambda \cdot a := \lambda \cdot \varepsilon(a)$ zu einem A -Modul.

Wegen der Eigenschaften von Δ und ε ist die Operation $-\otimes-$ assoziativ und der Modul k ein neutrales Element bzgl. \otimes .

Beispiel 1.7: Sei V ein Vektorraum und bezeichne mit $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ das Vertauschen der Einträge, gegeben durch $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ auf Erzeugern.

Ist (A, μ, η) eine Algebra, so ist die *opponierte Algebra* $A^{op} := (A, \mu \circ \tau, \eta)$ wieder eine Algebra. Ist dual (C, Δ, ε) eine Koalgebra, so ist die *coopponierte Koalgebra* $C^{coop} := (C, \tau \circ \Delta, \varepsilon)$ wieder eine Koalgebra.

Definition 1.8: Sei C eine Koalgebra. Ein Unterraum $I \subseteq C$ heißt *Koideal*, falls $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ und $\varepsilon(I) = 0$.

Lemma 1.9: Ist $I \subseteq C$ Koideal einer Koalgebra C , so trägt der Quotientenvektorraum C/I eine kanonische Koalgebrenstruktur.

Definition 1.10: Seien B und B' k -Bialgebren. Eine *Bialgebrenpaarung* ist eine Bilinearform $\varphi : B \times B' \rightarrow k$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall b' \in B' : \quad \varphi(\mu_B(b_1 \otimes b_2), b') = \varphi(b_1 \otimes b_2, \Delta_{B'}(b')),$$

$$\forall b \in B \forall b'_1, b'_2 \in B' : \quad \varphi(b, \mu_{B'}(b'_1 \otimes b'_2)) = \varphi(\Delta_B(b), b'_1 \otimes b'_2),$$

$$\forall b \in B : \quad \varphi(b, \eta_{B'}(1)) = \varepsilon_B(b),$$

$$\forall b' \in B' : \quad \varphi(\eta_B(1), b') = \varepsilon_{B'}(b').$$

Die Bilinearform wird dabei durch $\varphi(b_1 \otimes b_2, b'_1 \otimes b'_2) = \varphi(b_1, b'_1) \cdot \varphi(b_2, b'_2)$ auf das Tensorprodukt fortgesetzt.

Lemma 1.11: Seien A eine Algebra und C eine Koalgebra. Auf der Menge $\text{Hom}_k(C, A)$ kann man das *Konvolutionsprodukt*

$$f * g := \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C$$

definieren, welches assoziativ ist und ein neutrales Element $\eta_A \circ \varepsilon_C$ besitzt.

Definition 1.12: Eine Bialgebra H heißt *Hopfalgebra*, falls $\text{id} \in \text{End}_k(H)$ bzgl. des Konvolutionsprodukts ein Inverses *Antipode* $S : H \rightarrow H$ besitzt.

Bemerkung 1.13: Seien H eine Hopfalgebra, M und N zwei H -Moduln und schreibe $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ für $h \in H$. Der Vektorraum $\text{Hom}_k(M, N)$ wird Dank der Antipode mit der Vorschrift $(f \cdot h)(m) := \sum f(mS(h_{(1)}))h_{(2)}$ zu einem H -Modul.

Insbesondere kann man Moduln durch $M^* := \text{Hom}_k(M, k)$ dualisieren.

Lemma 1.14: Sei H eine Hopfalgebra. Dann definiert die Antipode S einen Morphismus von Bialgebren $S : H \rightarrow (H^{op})^{coop}$. Insbesondere ist $S : H \rightarrow H$ ein Antialgebrenmorphismus.

Beispiel 1.15: Sei k ein Körper. Die Eigenschaften einer Komultiplikation, Koeinheit und Antipode legen diese bereits auf dem Körper fest, sodass $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$ und $S(1) = 1$ als einzige mögliche Wahl die Struktur einer Hopfalgebra definieren.

Die beschriebenen Zusatzmöglichkeiten für Moduln ergeben hier in diesem Spezialfall lediglich die bereits bekannten Konstruktionen für Vektorräume.

Beispiel 1.16: Sei k ein Körper. Dann wird die freie Algebra $k\langle X_i | i \in I \rangle$ erzeugt von $\{X_i | i \in I\}$ durch

$$\begin{aligned}\Delta(X_i) &= X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i, \\ \varepsilon(X_i) &= 0 \quad \text{und} \\ S(X_i) &= -X_i\end{aligned}$$

zu einer Hopfalgebra. Das Ideal $(X_i X_j - X_j X_i | i \neq j)$ ist ein Koideal, sodass auch der Polynomring $k[X_i | i \in I]$ eine Hopfalgebrastruktur trägt.

Beispiel 1.17: Seien k ein Körper und G eine Gruppe. Die Gruppenalgebra $k[G] = \bigoplus_{g \in G} k e_g$ mit Multiplikation $e_g \cdot e_h := e_{gh}$ wird durch folgende Vorschriften zu einer Hopfalgebra:

$$\begin{aligned}\Delta(e_g) &= e_g \otimes e_g, \\ \varepsilon(e_g) &= 1, \\ S(e_g) &= e_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Definition 1.18: Seien H_1 und H_2 k -Hopfalgebren. Eine *Hopfalgebra Paarung* $\varphi : H_1 \times H_2 \rightarrow k$ ist eine Bialgebra Paarung mit der zusätzlichen Eigenschaft $\varphi(S_{H_1}(h_1), h_2) = \varphi(h_1, S_{H_2}^{-1}(h_2))$ für $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$.

Theorem 1.19 (Drinfeld): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann existiert eine eindeutige Hopfalgebrastruktur auf $\widetilde{\mathcal{D}}H := H \otimes H_{coop}^*$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

- H und H_{coop}^* sind Hopfunteralgebren von $\widetilde{\mathcal{D}}H$.

- Die natürliche Paarung $\{-, -\}$ auf $\tilde{\mathcal{D}}H$ ist eine Hopfalgebrenpaarung.
- Sind $h \in H$ und $h' \in H_{coop}^*$, so ist $h \cdot h' = h \otimes h' \in \tilde{\mathcal{D}}H$.

Darüberhinaus gelte folgende Vertauschregel für $h \in H$ und $h' \in H_{coop}^*$:

$$h' \cdot h = \sum \{h'_{(1)}, h_{(3)}\} \{S^{-1}(h'_{(3)}), h_{(1)}\} h_{(2)} h'_{(2)}$$

Die Hopfalgebra $\tilde{\mathcal{D}}H$ heißt *Drinfelddoppel*.

Bemerkung 1.20: Ist $\varphi : H_1 \times H_2 \rightarrow k$ eine nicht ausgeartete Hopfalgebrenpaarung, lassen sich H_1^* und H_2 miteinander identifizieren, sodass sich ein Drinfelddoppel $\tilde{\mathcal{D}}_\varphi(H_1, H_2) = H_1 \otimes H_2^{coop}$ ergibt.

Besonders interessant ist der Fall $H_1 = H_2$, für den sich das Theorem wie folgt leicht umformulieren lässt.

Lemma 1.21: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra mit einer nicht ausgearteten Hopfalgebrenpaarung $(-, -)$. Seien H^+ und H^- zwei isomorphe Kopien von H , wobei H^- mit dem opponierten Koprodukt ausgestattet sei. Sei D die Hopfalgebra erzeugt von H^+ und H^- modulo folgender Relationen:

- H^\pm seien Unterhopfalgebren.
- Für $h^\pm \in H^\pm$ gelte

$$h^- \cdot h^+ = \sum (h^-_{(1)}, h^+_{(3)}) (S^{-1}(h^-_{(3)}), h^+_{(1)}) h^+_{(2)} h^-_{(2)} .$$

Dann ist die Multiplikationsabbildung $H^+ \otimes H^- \rightarrow D$ ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Bemerkung 1.22: Diese Umformulierung lässt sich auch auf unendlichdimensionale Hopfalgebren oder ausgeartete Hopfalgebrenpaarungen anwenden, liefert aber im allgemeinen nur eine topologische Hopfalgebra, d.h. dass die Komultiplikation $\Delta : D \rightarrow D \widehat{\otimes} D$ Werte in einer geeigneten Vervollständigung des Tensorprodukts $D \otimes D$ annimmt.

Beispiel 1.23: Seien H und H' Hopfalgebren, dann definiert $\varphi_0(h, h') := \varepsilon_H(h)\varepsilon_{H'}(h')$ eine Hopfalgebrenpaarung. Das Drinfeldprodukt $\widetilde{\mathcal{D}}_{\varphi_0}(H, H') = H \otimes H'_{coop}$ ist das Standardprodukt zweier Hopfalgebren mit eintragsweise definierter Hopfalgebrenstruktur (und opponierter Komultiplikation für H').

1.2 Abgeleitete Kategorien

Definition 1.24: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- Ein *Kettenkomplex* in \mathcal{A} ist ein Tupel $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit Objekten $X_i \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ und Morphismen $d_X^i : X^i \rightarrow X^{i+1}$, sodass $d_X^{i+1} \circ d_X^i = 0$ oder äquivalent $\text{im}(d_X^i) \subseteq \text{ker}(d_X^{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
- Ein *Morphismus von Kettenkomplexen* $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ besteht aus Morphismen $f^i : X^i \rightarrow Y^i \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^i)$, sodass $f^{i+1} \circ d_X^i = d_Y^i \circ f^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

- Ein Kettenkomplex X^\bullet heißt *beschränkt*, wenn $X^i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{Z}$.

Bezeichne mit $\text{Chain}^b(\mathcal{A})$ die Kategorie aller beschränkten Kettenkomplexe.

Bemerkung 1.25: $\text{Chain}^b(\mathcal{A})$ ist eine abelsche Kategorie mit eintragsweisen direkten Summen, Bildern und Kernen.

Definition 1.26: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- Zwei Morphismen $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ von Kettenkomplexen heißen *homotop*, wenn es Morphismen $h^i : X^i \rightarrow Y^{i-1}$ gibt, sodass $f^i - g^i = h^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}h^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
- Der *Shiftfunktorkomplex* $[1]$ ist auf Kettenkomplexen durch $(X^\bullet[1])^i := X^{i+1}$ und $(d_{X[1]})^i := -d_X^{i+1}$ für Objekte bzw. $(f^\bullet[1])^i := f^{i+1}$ für Morphismen definiert.
- Der *Abbildungskegel* $\text{Cone}(f^\bullet)$ eines Morphismus $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ist gegeben durch

$$\text{Cone}(f^\bullet)^i := X^{i+1} \oplus Y^i \quad \text{und} \quad d_{\text{Cone}(f^\bullet)}^i := \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass sich ein kurze, exakte Folge ergibt:

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \xrightarrow{\iota} \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{\pi} X^\bullet[1] \longrightarrow 0.$$

Bezeichne mit $\text{Hot}^b(\mathcal{A}) := \text{Chain}^b(\mathcal{A}) / \sim$ die *Homotopiekategorie* der beschränkten Kettenkomplexe von \mathcal{A} , wobei genau dann $f^\bullet \sim g^\bullet$, wenn f^\bullet und g^\bullet homotop sind.

Bemerkung 1.27: $\text{Hot}^b(\mathcal{A})$ ist eine additive Kategorie und wird zusammen mit dem Shiftfunktors [1] und Dreiecken isomorph zu Dreiecken der Gestalt $X \xrightarrow{f^\bullet} Y \longrightarrow \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{+1}$ zu einer triangulierten Kategorie.

Definition 1.28: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- Die i -te *Kohomologie* eines Kettenkomplexes X^\bullet ist definiert als der Quotient $H^i(X^\bullet) := \ker(d_X^i) / \text{im}(d_X^{i-1})$.
- Ist $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Morphismus von Kettenkomplexen, so induziert f^\bullet eine Abbildung $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$.
- Ein Morphismus von Kettenkomplexen f^\bullet heißt *Quasiisomorphismus*, falls $H^i(f^\bullet)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Bezeichne mit Qis die Klasse der Quasiisomorphismen.

Die *abgeleitete Kategorie* $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) := Qis^{-1} \text{Hot}^b(\mathcal{A})$ entsteht aus $\text{Hot}^b(\mathcal{A})$ durch Invertieren aller Quasiisomorphismen.

Bemerkung 1.29: $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ ist eine additive Kategorie und wird zusammen mit dem Shiftfunktors [1] und Dreiecken isomorph zu Dreiecken der Gestalt $X \xrightarrow{f^\bullet} Y \longrightarrow \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{+1}$ zu einer triangulierten Kategorie.

Theorem 1.30: Der Funktor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A}), A \mapsto A[0]$ mit $A[0]_0 = A$ und $A[0]_i = 0$ für $i \neq 0$ ist volltreu. Das wesentliche Bild besteht dabei aus allen beschränkten Kettenkomplexen, deren Kohomologie sich in Grad 0 konzentriert.

Definition 1.31: Sei R ein Ring und $\mathcal{A} := \text{Mod-}R$. Bezeichne mit $\text{Hot}_P^b(\mathcal{A})$ die Homotopiekategorie aller beschränkten Kettenkomplexe projektiver Moduln und mit $\text{Hot}_I^b(\mathcal{A})$ die Homotopiekategorie aller beschränkten Kettenkomplexe injektiver Moduln.

Theorem 1.32: Sei R ein Ring von endlicher globaler Dimension und X^\bullet ein beschränkter Komplex in $\mathcal{A} := \text{Mod-}R$.

- Es gibt ein ausgezeichnetes Dreieck $pX^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow aX^\bullet \xrightarrow{+1}$ in $\text{Hot}(\mathcal{A})$ mit $pX^\bullet \in \text{Hot}_P^b(\mathcal{A})$ und aX^\bullet azyklisch, d.h. $H^i(aX^\bullet) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
- Es gibt ein ausgezeichnetes Dreieck $aX^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow iX^\bullet \xrightarrow{+1}$ in $\text{Hot}(\mathcal{A})$ mit $iX^\bullet \in \text{Hot}_I^b(\mathcal{A})$ und aX^\bullet azyklisch.

Desweiteren lassen sich p und i zu additiven Funktoren fortsetzen.

Lemma 1.33: Die Komposition $\text{Hot}_P^b(\mathcal{A}) \hookrightarrow \text{Hot}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ ist eine Äquivalenz triangulierter Kategorien. Analoges gilt für $\text{Hot}_I^b(\mathcal{A})$.

Lemma 1.34: Seien M und N R -Moduln und $\mathcal{A} = \text{Mod-}R$, dann gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(M[i], N[j]) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{j-i}(M, N) .$$

Lemma 1.35: Sei R ein erblicher Ring und $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{Mod-}R)$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$X^\bullet \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(X^\bullet)[i] .$$

Lemma 1.36: Sei \mathcal{A} eine erbliche, abelsche Kategorie. Dann ist jedes unzerlegbare Objekt der abgeleiteten Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ für ein geeignetes $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ und $n \in \mathbb{Z}$ isomorph zu $X[n]$.

1.3 Hallalgebren

Im Folgenden sei $k = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $|\mathbb{F}_q| = q$ Elementen und $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}[\sqrt{q}] := \mathbb{Q}[v]/(v^2 - q)$.

Definition 1.37: Eine im Wesentlichen kleine, abelsche Kategorie \mathcal{A} heißt *finitär*, falls sie folgendes erfüllt:

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A}) : \quad |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)| < \infty ,$$

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A}) : \quad |\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)| < \infty .$$

Lemma 1.38: Die Kategorie aller endlich erzeugten Moduln $\text{Mod-}A$ einer endlich dimensionalen Algebra A über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q ist finitär.

Insbesondere ist die Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q}(Q)$ eines Köcher Q über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q finitär.

Definition 1.39: Sei \mathcal{A} eine finitäre Kategorie und bezeichne mit $\mathcal{X} = \text{Ob}(\mathcal{A}) / \cong$ die Menge aller Äquivalenzklassen ihrer Objekte. Bezeichne für ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ dessen Isomorphieklasse in \mathcal{X} mit $[X]$.

Definition 1.40: Sei \mathcal{A} eine finitäre Kategorie. Für $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ bezeichne mit

$$\begin{aligned} a_X &= |\text{Aut}_{\mathcal{A}}(X)|, \\ P_{X,Y}^Z &= \left| \left\{ (f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X) \mid \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \text{ ist exakt} \right\} \right|, \\ F_{X,Y}^Z &= \frac{P_{X,Y}^Z}{a_X \cdot a_Y}. \end{aligned}$$

Definition 1.41: Sei $K_0(\mathcal{A})$ die Grothendieckgruppe einer finitären, erblichen, k -linearen Kategorie \mathcal{A} . Für ein Element $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ bezeichne mit $\bar{X} \in K_0(\mathcal{A})$ sein Bild in $K_0(\mathcal{A})$. Bezeichne mit $\langle -, - \rangle$ die Eulerform

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : K_0(\mathcal{A}) \times K_0(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &\mapsto \dim_k \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) - \dim_k \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \end{aligned}$$

und mit $(-, -)$ ihre Symmetrisierung

$$\begin{aligned} (-, -) : K_0(\mathcal{A}) \times K_0(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &\mapsto \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{X} \rangle. \end{aligned}$$

Definition 1.42: Die *erweiterte, getwistete Hallalgebra* $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (über dem Körper \mathbb{Q}) einer finitären, erblichen und k -linearen

Kategorie \mathcal{A} ist als formaler Vektorraum

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) := \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \tilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})] \quad \text{mit} \quad \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) := \bigoplus_{[Z] \in \mathcal{X}} \tilde{\mathbb{Q}} \cdot [Z].$$

Für eine Klasse $\alpha \in K_0(\mathcal{A})$ bezeichne durch K_α das entsprechende Element in der Gruppenalgebra $\tilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})]$, welche mit der üblichen Multiplikation $K_\alpha \cdot K_\beta = K_{\alpha+\beta}$ versehen ist. Für $[X], [Y] \in \mathcal{X}$ definiere auf $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ die Multiplikation durch

$$[X] \cdot [Y] := \sqrt{\frac{|\text{Hom}(X, Y)|}{|\text{Ext}^1(X, Y)|}} \sum_{[Z] \in \mathcal{X}} F_{X, Y}^Z [Z] = v^{(\overline{X}, \overline{Y})} \sum_{[Z] \in \mathcal{X}} F_{X, Y}^Z [Z].$$

Das Tensorprodukt $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \tilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})]$ erhält für $\alpha \in K_0(\mathcal{A})$ und $[X] \in \mathcal{X}$ durch folgende Tauschregel ein Produkt

$$K_\alpha \cdot [X] := v^{(\alpha, \overline{X})} [X] \cdot K_\alpha.$$

Bemerkung 1.43: Wie in [R90] gezeigt, ist obige Multiplikation assoziativ und $1 := [0] \otimes K_0$ ist das neutrale Element. Verwende im Folgenden die Notation $[X]K_\alpha$ für ein Element $[X] \otimes K_\alpha \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Insbesondere wird $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ zu einer Unteralgebra und heißt die (unerweiterete) Hallalgebra. In dieser gesamten Arbeit wird die Notation $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ und $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ wie oben definiert verwendet und die hier zur Vollständigkeit angegebenen Adjektive (un-)erweitert bzw. getwistet nicht weiter verwendet.

Lemma 1.44: Für die Koeffizienten gilt

$$F_{X, Y}^Z = |\{M \subseteq Z \mid M \cong Y, Z/M \cong X\}|.$$

Man kann Koeffizienten $F_{M_1, M_2, \dots, M_n}^M$ für Produkte $[M_1] \cdot [M_2] \cdot \dots \cdot [M_n]$ definieren und erhält eine analoge Aussage durch das Zählen von Ketten aufsteigender Unterräume mit geeigneten Quotienten:

$$F_{M_1, M_2, \dots, M_n}^M = |\{L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n = M \mid L_i/L_{i-1} \cong M_i\}|.$$

Lemma 1.45: Sei \mathcal{A} eine finitäre, erbliche und k -lineare Kategorie und seien $P, I \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(I, P) &= 0, \\ \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, I) &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt $[P] \cdot [I] = v^{\langle \bar{P}, \bar{I} \rangle} \cdot [P \oplus I] \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Beweis: Es genügt, $F_{P, I}^{P \oplus I} = 0$ zu zeigen. Betrachte eine kurze, exakte Folge, deren Mittelterm $I \oplus P \in \text{Ext}^1(P, I) = 0$ sein muss:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{(f \ \lambda)^t} I \oplus P \xrightarrow{(\mu \ g)} P \longrightarrow 0$$

Hierbei gilt $0 = \lambda \in \text{Hom}(I, P)$ und somit $\text{im}(f \ \lambda) = I \oplus 0$, sodass $\mu = 0$ wegen der Exaktheit folgt. Das Paar $(f, g) \in \text{Aut}(I) \times \text{Aut}(P)$ kann beliebig sein, sodass sich $F_{P, I}^{P \oplus I} = 1$ ergibt.

✓

Beispiel 1.46: Als einfachsten Fall kann man die Kategorie endlichdimensionaler Vektorräume über \mathbb{F}_q betrachten und ihre Hallalgebra $\overline{\mathcal{H}}(\text{Mod-}\mathbb{F}_q)$ berechnen: Bis auf Isomorphie ist eine

Basis durch $\{[\mathbb{F}_q^n] \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben. Hierbei gilt

$$[\mathbb{F}_q^n] \cdot [\mathbb{F}_q^m] = v^{2mn} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} [\mathbb{F}_q^{m+n}].$$

Für den Vorfaktor $v^{\langle \mathbb{F}_q^n, \mathbb{F}_q^m \rangle}$ ergibt sich v^{mn} und der Koeffizient $F_{\mathbb{F}_q^n, \mathbb{F}_q^m}^{\mathbb{F}_q^{m+n}} = |\mathrm{Gr}(n, m+n)|$ ergibt sich aus dem Zählen von Untervektorräumen (Lemma 1.4). Der folgende Isomorphismus

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathbb{F}_q) &\cong \tilde{\mathbb{Q}} \left[x, \frac{x^2}{v^2[2]_v!}, \frac{x^3}{v^6[3]_v!}, \dots \right] = \tilde{\mathbb{Q}}[x] \\ [\mathbb{F}_q^n] &\mapsto v^{-n(n-1)} \frac{x^n}{[n]_v!} \end{aligned}$$

kann nachgerechnet werden und wird von folgendem Lemma motiviert:

Lemma 1.47: Sei \mathcal{A} eine finitäre, erbliche und k -lineare Kategorie und $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ein einfaches Objekt ohne Selbsterweiterungen. Mit $v_S := \sqrt{|\mathrm{End}(S)|}$ gilt dann

$$[S^{\oplus n}] = v_S^{-n(n-1)} \frac{[S]^n}{[n]_{v_S}!}.$$

Beweis: Beweis per Induktion (für $n = 1$ ist nichts zu zeigen). Wegen $\mathrm{End}(S) = D$ und $\mathrm{Ext}^1(S) = 0$ ergibt sich als Eulerform $\langle S^n, S \rangle = n \cdot \dim \mathrm{End}(S)$. Rechne

$$[S^n] \cdot [S] = v_S^n |\mathrm{Gr}(1, n+1)| \cdot [S^{n+1}] = v_S^{2n} [n+1]_{v_S} \cdot [S^{n+1}].$$

Umgestellt und mit Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$[S^{n+1}] = \frac{v_S^{-2n}}{[n+1]_{v_S}} \cdot [S] \cdot [S^n] = \frac{v_S^{-2n}}{[n+1]_{v_S}} \frac{v_S^{-n^2+n}}{[n]_{v_S}!} [S]^{n+1} .$$

Hierbei ist $-n^2 - n = -(n+1)((n+1) - 1)$ der geforderte Exponent. ✓

Definition 1.48: Ist \mathcal{A} eine finitäre, erbliche und k -lineare Kategorie endlicher Länge über k , so trägt $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ eine natürliche Bialgebrenstruktur, wie in [G95] bewiesen (siehe auch [R96]). Komultiplikation $\Delta : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \mathcal{H}(\mathcal{A})$ und Koeinheit $\varepsilon : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}}$ sind dabei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta : [Z]K_\alpha &\mapsto \sum_{[X],[Y] \in \mathcal{X}} v^{\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle} \frac{P_{X,Y}^Z}{a_Z} [X]K_{\bar{Y}+\alpha} \otimes [Y]K_\alpha , \\ \varepsilon : [Z]K_\alpha &\mapsto \delta_{Z,0} . \end{aligned}$$

Wie in [XY01] bewiesen, besitzt die Hallalgebra $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ eine Antipode für eine Kategorie endlicher Länge. Für jede denkbare Filtrierung eines Objektes X enthält $S([X])$ einen Summanden bestehend aus dem Produkt der Quotienten der Objekte der Filtrierung zusammen mit einem geeigneten Koeffizienten. Die genau Formel kann z.B. in [S09, Chapter 1.7, p.18] gefunden werden, spielt im Folgenden allerdings eine untergeordnete Rolle.

Beispiel 1.49: Ist S ein einfaches Objekt in \mathcal{A} , so ergibt das Koprodukt

$$\Delta([S]) = [S] \otimes 1 + K_{\bar{S}} \otimes [S] .$$

Das Drinfelddoppel einer Hallalgebra

Definition 1.50: Weiterhin wird von Green [G95] eine Bialgebrenpaarung durch folgende Definition auf Elementartensoren eingeführt

$$\begin{aligned} (-, -) : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \times \mathcal{H}(\mathcal{A}) &\rightarrow \tilde{\mathbb{Q}} \\ ([X]K_\alpha, [Y]K_\beta) &\mapsto v^{(\alpha, \beta)} \frac{\delta_{X, Y}}{a_X}, \end{aligned}$$

welche sowohl auf $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ als auch eingeschränkt auf $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ nicht ausgeartet und symmetrisch ist.

Bemerkung 1.51: Hat \mathcal{A} keine endliche Länge (z.B. die Kategorie kohärenter Garben einer projektiven Kurve) bleibt die Greensche Paarung nachwievor eine wohldefinierte, symmetrische Bilinearform.

Die Komultiplikation kann allerdings unendliche Summen liefern. Dabei ist es möglich, eine vervollständigte $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Algebra $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{H}(\mathcal{A})$ einzuführen, sodass $\Delta : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{H}(\mathcal{A})$ ein Algebrenhomomorphismus wird und alle relevanten Eigenschaften erfüllt. In diesem Fall spricht man von einer topologischen Bialgebra.

Definition 1.52: Das *Drinfelddoppel* von $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ bzgl. der Greenschen Paarung ist die assoziative Algebra $\tilde{\mathcal{D}}\mathcal{H}(\mathcal{A})$, welche das freie Produkt der beiden Algebren $\mathcal{H}^-(\mathcal{A})$ und $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ modulo

folgender Relationen (für $a, b \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$) ist:

$$\sum_{i,j} a_i^{(1)-} b_j^{(2)+} (a_i^{(2)}, b_j^{(1)}) = \sum_{i,j} b_j^{(1)+} a_i^{(2)-} (a_i^{(1)}, b_j^{(2)})$$

Hierbei sind $\mathcal{H}^\pm(\mathcal{A}) := \mathcal{H}(\mathcal{A})$ als Algebren, wobei Objekte aus $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ die Dekoration \pm erhalten, und für $a := [Z]^\pm K_\alpha$

$$\Delta(a) = \sum_i a_i^{(1)\pm} \otimes a_i^{(2)\pm} = \sum_{[X][Y] \in \mathcal{X}} v^{\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle} \frac{P_{X,Y}^Z}{a_Z} [X]^\pm K_{\pm \overline{Y} + \alpha} \otimes [Y]^\pm K_\alpha$$

Theorem 1.53: Die Multiplikation $\mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}\mathcal{H}(\mathcal{A})$ ist ein Isomorphismus von $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Vektorräumen.

Hat \mathcal{A} darüber hinaus endliche Länge, so ist $\tilde{\mathcal{D}}\mathcal{H}(\mathcal{A})$ eine Hopfalgebra und $\mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}\mathcal{H}(\mathcal{A})$, $a \mapsto a \otimes \mathbb{1}^-$ eine Einbettung von Hopfalgebren.

Definition 1.54: Sei \mathcal{A} eine finitäre, erbliche und k -lineare Kategorie. Das *reduzierte Drinfeld-doppel* $\mathcal{D}\mathcal{H}(\mathcal{A})$ ist der Quotient von $\tilde{\mathcal{D}}\mathcal{H}(\mathcal{A})$ nach dem zweiseitigen Ideal

$$I = \langle K_\alpha^+ \otimes K_{-\alpha}^- - \mathbb{1}^+ \otimes \mathbb{1}^- \mid \alpha \in K \rangle$$

Ist \mathcal{A} zusätzlich von endlicher Länge, so ist I ein Hopfideal und $\mathcal{D}\mathcal{H}(\mathcal{A})$ zusätzlich eine Hopfalgebra.

Lemma 1.55: Multiplikation ist ein Isomorphismus von $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Vektorräumen:

$$\overline{\mathcal{H}}^+(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \tilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})] \otimes_{\tilde{\mathbb{Q}}} \overline{\mathcal{H}}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}\mathcal{H}(\mathcal{A})$$

Theorem 1.56 [C09]: Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei k -lineare, endliche, erbliche Kategorien. Nehme weiterhin an, eine der beiden sei artinsch und es gebe eine Äquivalenz abgeleiteter Kategorien $\overline{\mathbb{F}} : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$. Dann gibt es einen Algebrenisomorphismus

$$\mathbb{F} : \mathcal{DH}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{DH}(\mathcal{B}),$$

der eindeutig durch folgende Eigenschaften gegeben ist: Für $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ mit $\overline{\mathbb{F}}(A) \cong B[n]$ mit geeignetem $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathbb{F}([A]^\pm) = v^{n\langle \overline{A}, \overline{A} \rangle} [B]^{\pm(-1)^n} K_{\pm(-1)^n \overline{B}}^n$$

Für $\alpha \in K_0(\mathcal{A})$ gilt $\mathbb{F}(K_\alpha) = K_{\overline{\mathbb{F}}(\alpha)}$.

Beispiel 1.57: Im Folgenden werden vor allem die drei Spezialfälle $n \in \{-1, 0, 1\}$ relevant sein:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{F}}(A) \cong B[1] : \quad \mathbb{F}([A]^\pm) &= v^{\langle \overline{A}, \overline{A} \rangle} [B]^\mp K_{\overline{B}}^{\pm 1} \\ \overline{\mathbb{F}}(A) \cong B[0] : \quad \mathbb{F}([A]^\pm) &= [B]^\pm \\ \overline{\mathbb{F}}(A) \cong B[-1] : \quad \mathbb{F}([A]^\pm) &= v^{-\langle \overline{A}, \overline{A} \rangle} [B]^\mp K_{\overline{B}}^{\pm 1} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.58: Beachtet man die Dreieckszerlegung aus Lemma 1.55, fallen zwei Eigenschaften des Isomorphismus von Cramer auf:

- Der Diagonalanteil $\widetilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})]$ wird auf sich selbst abgebildet.
- Ein unzerlegbares Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ aufgefasst als Element $[A]^\pm$ einer der beiden (echten) Hälften $\overline{\mathcal{H}}^\pm(\mathcal{A})$ wird

in eine der beiden (erweiterten) Hälften $\overline{\mathcal{H}}^\pm(\mathcal{A}) \otimes \widetilde{\mathbb{Q}}[K_0(\mathcal{A})]$ geschickt. Gilt $\overline{\mathbb{F}}(A) \cong B[n]$, so wird $[A]^\pm$ genau dann in dieselbe Hälfte abgebildet, wenn n gerade ist.

1.4 Quantengruppen

Definition 1.59: Eine Matrix $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ heißt (*symmetrisierbare*) *Cartanmatrix*, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\forall i \in \{1, \dots, n\} : c_{ii} = 2$
- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : c_{ij} \leq 0$
- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : c_{ij} = 0 \Rightarrow c_{ji} = 0$
- Es gibt es Diagonalmatrix D , so dass DC symmetrisch ist.

Definition 1.60: Sei $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ eine Cartanmatrix und $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix, sodass DC symmetrisch ist. Dann ist die *generische Quantengruppe* $U_q(\mathfrak{g}_C)$ als Algebra über $\mathbb{Q}(q)$ von E_i, F_i und $K_i^{\pm 1}$ für $1 \leq i \leq n$ erzeugt, welche folgende Relationen erfüllen ($q_i := q^{d_i}$):

$$K_i \cdot K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} \cdot K_i ,$$

$$K_i \cdot K_j = K_j \cdot K_i ,$$

$$\begin{aligned}
 K_i \cdot E_j &= q_i^{c_{ij}} E_j \cdot K_i , \\
 K_i \cdot F_j &= q_i^{-c_{ij}} F_j \cdot K_i , \\
 [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} ,
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-c_{ij}-k} E_j E_i^k = 0 \text{ und}$$

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-c_{ij}-k} F_j F_i^k = 0 .$$

Die Hopfalgebrenstruktur ist dabei mit Komultiplikation $\Delta : U_q(\mathfrak{g}_C) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}_C) \otimes U_q(\mathfrak{g}_C)$, Koeinheit $\varepsilon : U_q(\mathfrak{g}_C) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ und Antipode $S : U_q(\mathfrak{g}_C) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}_C)$ auf Erzeugern wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 \Delta : \quad E_i &\mapsto E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i , \\
 F_i &\mapsto F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i , \\
 K_i^{\pm 1} &\mapsto K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon : \quad E_i &\mapsto 0 , & S : \quad E_i &\mapsto -K_i^{-1} E_i , \\
 F_i &\mapsto 0 , & F_i &\mapsto -F_i K_i , \\
 K_i^{\pm 1} &\mapsto 1 , & K_i^{\pm 1} &\mapsto K_i^{\mp 1} .
 \end{aligned}$$

Definition 1.61: Definiere die folgenden Unteralgebren der Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g}_C)$ einer Cartanmatrix C :

- $U_q(\mathfrak{h}_C) := \langle K_i^{\pm 1} \rangle$,

- $U_q(\mathfrak{n}_C^+) := \langle E_i \rangle$ sowie $U_q(\mathfrak{b}_C^+) := \langle E_i, K_i^{\pm 1} \rangle$ und
- $U_q(\mathfrak{n}_C^-) := \langle F_i \rangle$ sowie $U_q(\mathfrak{b}_C^-) := \langle F_i, K_i^{\pm 1} \rangle$.

Theorem 1.62 (Dreieckszerlegung): Die Multiplikation liefert den Vektorraumisomorphismus

$$U_q(\mathfrak{g}_C) \cong U_q(\mathfrak{n}_C^-) \otimes U_q(\mathfrak{h}_C) \otimes U_q(\mathfrak{n}_C^+).$$

Lemma 1.63: Es gibt eine eindeutige Hopfpaarung

$$\varphi : U_q(\mathfrak{b}_C^+) \times U_q(\mathfrak{b}_C^-) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$$

mit folgenden Eigenschaften für $\xi, \eta \in \{\pm 1\}$:

$$\varphi(E, F) = \frac{1}{q^{-1} - q}, \quad \varphi(E, K^\xi) = 0 = \varphi(K^\eta, F), \quad \varphi(K^\xi, K^\eta) = q^{-2\xi\eta}.$$

Lemma 1.64: Das zweiseitige Ideal

$$(K_i \otimes 1 - 1 \otimes K_i) \subseteq \mathcal{D}_\varphi(U_q(\mathfrak{b}_C^+), U_q(\mathfrak{b}_C^-))$$

ist ein Hopfideal. Darüberhinaus gibt es einen Isomorphismus

$$U_q(\mathfrak{g}_C) \cong \mathcal{D}_\varphi(U_q(\mathfrak{b}_C^+), U_q(\mathfrak{b}_C^-)) / (K_i \otimes 1 - 1 \otimes K_i)$$

von Hopfalgebren.

Bezug zu Hallalgebren

Definition 1.65: Sei $C \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ eine symmetrische Cartanmatrix. Definiere den Graphen Q_C durch $\{1, \dots, n\}$ als Knotenmenge und $|C_{ij}|$ Kanten zwischen Knoten $i < j$.

Bemerkung 1.66: Für die Dimensionsvektoren der unzerlegbaren Darstellungen spielt die genaue Orientierung der Kanten so lange keine Rolle, wie sie keine orientierten Kreise enthält. Daher wird für eine symmetrische Cartanmatrix C im Folgenden Q_C mit einer kreisfreien Orientierung versehen und als Köcher behandelt.

Theorem 1.67 (Ringel, Green): Für eine symmetrische Cartanmatrix ist die folgende Abbildung (gegeben auf Erzeugern) eine Einbettung von Hopfalgebren

$$\begin{aligned} U_v(\mathfrak{b}_C^+) &\rightarrow \mathcal{H}(Q_C), \\ E_i &\mapsto [S_i] \\ K_i &\mapsto K_{S_i} \end{aligned}$$

wobei $U_v(\mathfrak{b}_C^+)$ die in $q = v = \sqrt{|k|}$ spezialisierte Quantengruppe beschreibt.

Diese Abbildung ist genau dann ein Isomorphismus, wenn C von endlichem Typ ist, d.h. wenn \mathfrak{g}_C eine einfache Liealgebra bzw. wenn Q_C ein Dynkinköcher ist.

Bemerkung 1.68: Das Bild dieser Einbettung spielt eine wichtige Rolle, da es einen anderen Blickwinkel auf Quantengruppen ermöglicht, und erhält daher eine eigene Bezeichnung.

Definition 1.69: Die *Kompositionsalgebra*

$$\mathcal{C}(Q_C) := \langle S_i \mid i \in Q_0 \rangle \otimes \tilde{\mathbb{Q}}[K_0(Q_C)] \subseteq \mathcal{H}(Q_C)$$

der Hallalgebra ist das Erzeugnis der einfachen Darstellungen zusammen mit der Gruppenalgebra der Grothendieckgruppe.

Bemerkung 1.70: Da die Kategorie der Darstellungen des Köchers Q_C und die assoziierte Kac-Moody-Liealgebra \mathfrak{g}_C für eine symmetrische Cartanmatrix C einige Gemeinsamkeiten haben, sollen diese tabellarisch gegenübergestellt werden:

(Klassen) einfacher Objekte $[S_i]$	\longleftrightarrow	Einfache Wurzeln α_i
Grothendieckgruppe $K_0(Q_C)$	\longleftrightarrow	Wurzelgitter $\bigoplus_i \mathbb{Z}\alpha_i$
(Klassen) unzerlegbarer Objekte	\longleftrightarrow	positives Wurzelsystem Δ^+
(unerw.) Hallalgebra $\overline{\mathcal{H}}(Q_C)$	\longleftrightarrow	nilpotenter Anteil $\mathcal{U}_v(\mathfrak{n}_C^+)$
Gruppenalgebra $\tilde{\mathbb{Q}}[K_0(Q_C)]$	\longleftrightarrow	Cartananteil $\mathcal{U}_v(\mathfrak{h}_C)$
(erw.) Hallalgebra $\mathcal{H}(Q_C)$	\longleftrightarrow	Borelanteil $\mathcal{U}_v(\mathfrak{b}_C^+)$
endl./ zahmer/ wilder Typ	\longleftrightarrow	einf./ aff./ restliche Liealg.

Beispiel 1.71: Für eine einfache Darstellung $[S_i]$ gilt in der Hallalgebra $\Delta([S_i]^\pm) = [S_i]^\pm \otimes 1 + K_{S_i}^{\pm 1} \otimes [S_i]^\pm$. Die entsprechende Relation für $a = b = [S_i]$ im Drinfelddoublet ist

$$[S_i]^+[S_i]^- + (S_i, S_i)K_{S_i} = [S_i]^-[S_i]^+ + (S_i, S_i)K_{S_i}^{-1} .$$

Mittels $(S_i, S_i)^{-1} = |\text{Aut}(S_i)| = q^{d_i} - 1$ ergibt sich umgeschrieben

$$[[S_i]^+, [S_i]^-] = \frac{K_{S_i}^{-1} - K_{S_i}}{q^{d_i} - 1} = -v^{d_i} \frac{K_{S_i} - K_{S_i}^{-1}}{v^{d_i} - v^{-d_i}}.$$

Für Köcher gilt natürlich $\text{End}(S_i) = k$ bzw. $|\text{Aut}(S_i)| = q - 1$, allerdings ist obige Rechnung so direkt auf Gattungen anwendbar.

Bemerkung 1.72: Obige Relation weicht von den üblichen Konventionen für Quantengruppen ab. Ein Automorphismus der Quantengruppe behebt diesen Unterschied durch die Umskalierung $E_i \mapsto E_i$, $F_i \mapsto -v^{-d_i} F_i$ und $K_i \mapsto K_i$, welche zu minimal anderen Relationen führt (vgl. [BS12, Definition 3.10, Remark 3.12, p.10]).

Mit der üblichen Definition für Quantengruppen ergibt sich folgendes Theorem.

Theorem 1.73: Die folgende Abbildung (gegeben auf Erzeugern) ist eine Einbettung von Hopfalgebren:

$$\begin{aligned} U_v(\mathfrak{g}_C) &\rightarrow \mathcal{DH}(Q_C) \\ E_i &\mapsto [S_i]^+ \\ K_i &\mapsto K_{S_i} \\ F_i &\mapsto -v^{(\underline{\dim}(S_i), \underline{\dim}(S_i))} [S_i]^- \end{aligned}$$

Bemerkung 1.74: Obige Theoreme sind bereits so formuliert, dass sie auch für Gattungen gültig sind, wobei d_i den i -ten Ein-

trag im Symmetrisator der Cartanmatrix bzw. den Grad der Körpererweiterung im Knoten i beschreibt.

Kapitel 2

Darstellungstheorie zahmer Gattungen

Da sich unter allen inhaltlichen Voraussetzungen vermutlich Gattungen und ihre Darstellungstheorie der geringsten Popularität erfreuen, sollen diese im zweiten Kapitel mit etwas mehr Details dargestellt werden. Große Teile des Kapitels orientiert sich dabei an [DR76] und [D80].

Im ersten Abschnitt werden Gattungen sowie deren zugrundeliegenden gewichteten Graphen und die Kategorie ihrer Darstellungen eingeführt. Die zu ihnen assoziierte Algebra ähnelt der Pfadalgebra von Köchern und hat ähnliche Eigenschaften wie z.B. Erbllichkeit oder Endlichdimensionalität für eine Gattung ohne gerichtete Kreise. Vergleichbar mit einer symmetrisierbaren bzw. symmetrisierten Cartanmatrix gibt es die Kon-

zepte relativer bzw. absoluter Gewichte. Weiteres grundlegendes Verständnis wird in [L12] gut herausgearbeitet.

Der Abschnitt über die quadratische Form einer Gattung und ihrer Wurzeln beschreibt die Klassifikation entsprechend dem Darstellungstyp der Gattung in Dynkingraphen, Euklidische Graphen und restliche Graphen. Weiterhin wird der Defekt einer Darstellung definiert, mit dem man entscheiden kann, ob eine unzerlegbare Darstellung präinjektiv, präprojektiv oder regulär ist.

Nach ein wenig Vorarbeit werden anschließend im dritten Abschnitt die Spiegelungsfunktoren \mathbb{S}_*^+ für eine Senke $* \in \Gamma$ (bzw. \mathbb{S}_*^- für eine Quelle) definiert und auf die einfachen Darstellungen S_i einer Gattung angewendet. Viele zentrale Eigenschaften gelten in gleichem Maße wie bei Köchern. So bilden $(\mathbb{S}_*^-, \mathbb{S}_*^+)$ ein adjungiertes Paar und quasiinverse Funktoren für geeignete Unterkategorien.

Im Abschnitt über Coxeterfunktoren werden analog zum Vorgehen für Köcher Spiegelungsfunktoren entlang einer zulässigen Folge von Knoten verkettet. Dabei wird in jedem Knoten genau einmal gespiegelt, so dass man insgesamt einen Endofunktor erhält und neue Darstellungen für eine Gattung mit fixierter Orientierung produzieren kann. Wie bei zahmen Köchern zerfällt die Kategorie der Darstellungen einer zahmen Gattung in die drei additiven Unterkategorien aller präprojektiven, aller regulären und aller präinjektiven Objekte.

2.1 Gattungen

Definition 2.1: Ein *gewichteter Graph* (Γ, d) ist eine endliche Menge Γ (die Knoten) zusammen mit Gewichten $d = \{d_{ij} \in \mathbb{N}_0\}_{i,j \in \Gamma}$, wobei $\forall i \in \Gamma : d_{ii} = 0$, sodass es $\{f_i \in \mathbb{N}_+\}_{i \in \Gamma}$ gibt, die Folgendes erfüllen

$$\forall i, j \in \Gamma : d_{ij} f_j = d_{ji} f_i .$$

Man sagt, der Graph hat eine Kante zwischen $i \in \Gamma$ und $j \in \Gamma$, wenn $d_{ij}, d_{ji} \neq 0$, und schreibt

$$i \xrightarrow{(d_{ij}, d_{ji})} j$$

Dabei werden Gewichte der Form $(1, 1)$ nicht angeschrieben und Kanten im Fall $(0, 0)$ ganz weggelassen. Hierbei ist zu beachten, dass die Bedingung an die Gewichte die Eigenschaft $d_{ij} = 0 \Leftrightarrow d_{ji} = 0$ impliziert. Insbesondere erlaubt die Definition keine parallelen Kanten und wegen $d_{ii} = 0$ auch keine Schleifen.

Beispiel 2.2: Folgendes sind Beispiele für gewichtete Graphen. Wie später ausgeführt, ist es gewollt, dass sich der erste gewichtete Graph nicht von dem Köcher des Typs A_3 unterscheiden lässt.

$$\bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \quad \bullet \xrightarrow{(1,4)} \bullet \quad \bullet \xrightarrow{(1,3)} \bullet \xrightarrow{(1,3)} \bullet$$

Definition 2.3: Eine *Gattung* $(\Gamma, d, \Omega, \{F_i\}_{i \in \Gamma}, \{M_j\}_{j \in \Gamma})$ ist ein gewichteter Graph (Γ, d) zusammen mit

- einer *Orientierung* Ω der Kanten und
- einer Menge $\{F_i\}_{i \in \Gamma}$ an Schiefkörpern und einer Menge $\{{}_i M_j\}_{i, j \in \Gamma}$ an F_i - F_j -Bimoduln, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\dim_{F_j}({}_i M_j) = d_{ij} \quad \text{und}$$

$${}_j M_i \cong \text{Hom}_{F_i}({}_i M_j, F_i) \cong \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j) .$$

Die letzte Bedingung ist als Isomorphismus bzgl. folgender F_j - F_i -Bimodulstrukturen zu verstehen:

$$\begin{aligned} F_j \times \text{Hom}_{F_i}({}_i M_j, F_i) \times F_i &\rightarrow \text{Hom}_{F_i}({}_i M_j, F_i) , \\ (\lambda, f, \mu) &\mapsto \lambda f \mu : m \mapsto f(m \lambda) \mu \\ F_j \times \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j) \times F_i &\rightarrow \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j) . \\ (\lambda, f, \mu) &\mapsto \lambda f \mu : m \mapsto \lambda f(\mu m) \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4: Das folgende Lemma hilft dabei, Bimoduln ${}_i M_j$ zu finden bzw. zu konstruieren, welche obige Bedingung erfüllen.

Lemma 2.5 [D80, Lemma (0.2), p.24]: Seien F und G zwei Schiefkörper über einem gemeinsamen zentralen Körper k , sodass $[F : k]$ und $[G : k]$ endlich sind. Wirkt k auf einen endlichdimensionalen Bimodul ${}_F M_G$ zentral, erhält man einen G - F -Bimodulisomorphismus:

$$\text{Hom}_F({}_F M_G, F) \cong \text{Hom}_G({}_F M_G, G)$$

Beweis: Beachtet man $\text{Hom}_k(F, k) \cong {}_F F_F$ erlaubt die Adjunktion von Hom und \otimes folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_F({}_F M_G, F) &\cong \text{Hom}_F({}_F M_G, \text{Hom}_k(F, k)) \\ &\cong \text{Hom}_k({}_F F_F \otimes {}_F M_G, k) \\ &\cong \text{Hom}_k({}_F M_G, k) \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung ist für $\text{Hom}_G({}_F M_G, G)$ möglich und zeigt das Gewünschte. Dlab [D80] führt die Details, u.a. die Bimodulstrukturen weiter aus. \checkmark

Bemerkung 2.6: Auch wenn sich die Theorie der Gattungen mit Schiefkörpern beschreiben lässt und dies im allgemeinen Fall einer endlich dimensionalen Algebra A auch tatsächlich auftreten kann (vgl. das Beispiel der Einleitung), erfordert die Hallalgebra jedoch einen endlichen Grundkörper. Nach Wahlen von f_i und einem endlichen Körper k lassen sich endliche Körper F_i mit $[F_i : k] = f_i$ und Körper ${}_i F_j$ als Bimoduln mit $[{}_i F_j : k] = d_{ij} f_j$ wählen. Insofern wird in dieser Arbeit genau dieses Szenario angenommen.

Beispiel 2.7: Zu den ersten beiden gewichteten Graphen aus Beispiel 2.2 sind folgende Realisierungen möglich. Dabei ist zu beachten, dass die Bedingung ${}_j M_i \cong {}_i M_j^*$ für alle praktischen Anwendungen als Gleichheit angenommen werden kann und dies die Notation vereinfacht.

$$\mathbb{F}_p \xrightarrow{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p \quad \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]} \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] \quad \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]} \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

Beachte dabei, dass endliche Körpererweiterungen endlicher Körper eindeutig sind, sodass in den rechten beiden Beispielen aus

2.2 der kleinere Körper bereits den größeren festlegt und nicht-isomorphe Gattungen mit denselben zugrundeliegenden Graphen über dem selben Körper k einen unendlichen Körper wie z.B. \mathbb{Q} erfordern.

Definition 2.8: Sei Γ eine Gattung mit Orientierung Ω . Die Orientierung $s_*\Omega$ (für $*$ $\in \Gamma$) entsteht aus Ω durch Umdrehen aller an $*$ anliegenden Pfeile. Schreibe auch $s_*\Gamma$ für eine Gattung Γ mit geänderter Orientierung.

Definition 2.9: Sei $(\Gamma, d, \Omega, \{F_i\}_{i \in \Gamma}, \{M_j\}_{i,j \in \Gamma})$ eine Gattung und seien

$$\Lambda_0 := \prod_{i \in \Gamma} F_i \quad \text{und} \quad \Lambda_1 := \bigoplus_{i \rightarrow j} M_j .$$

Dann ist Λ_0 eine k -Algebra und Λ_1 ein Λ_0 - Λ_0 -Bimodul, wobei

$$(\lambda_r)_{r \in \Gamma} \cdot ({}_i m_j)_{i,j \in \Gamma} \cdot (\mu_s)_{s \in \Gamma} \quad := \quad (\lambda_i \cdot {}_i m_j \cdot \mu_j)_{i,j \in \Gamma}$$

die bereits vorhandene F_i - F_j -Bimodulstruktur der einzelnen Summanden trivial fortsetzt. Die *Tensoralgebra* der Gattung Γ ist

$$\Lambda(\Gamma) \quad := \quad \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_1^{\otimes n} ,$$

wobei $\Lambda_1^{\otimes 0} := \Lambda_0$ und $\Lambda_1^{\otimes n+1} := \Lambda_1^{\otimes n} \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1$.

Bemerkung 2.10: Die Definition gewichteter Graphen schließt parallele Kanten vollständig aus. Auch wenn die Motivation der Einleitung keinen Bedarf an parallelen Kanten erkennen lässt,

stellt sich die Frage, ob bzw. inwieweit sich die Theorie durch parallele Kanten verändert.

Lemay beschäftigt sich mit dieser Frage in [L12] und liefert folgende Antwort: Die Tensoralgebren zweier Gattungen (mit parallelen Kanten) Γ und Γ' sind genau dann isomorph, wenn es für jedes Paar (i, j) von Knoten und parallelen Kanten $\rho_1, \dots, \rho_n : i \rightarrow j$ einen Isomorphismus $\bigoplus_{i=1}^n M_{\rho_i} \cong \bigoplus_{i=1}^n M'_{\rho_i}$ zwischen den direkten Summen entsprechender Bimoduln gibt.

Darstellungen

Definition 2.11: Eine *Darstellung* $X = (\{X_i\}_{i \in \Gamma}, \{j\varphi_i\}_{i \rightarrow j})$ einer Gattung Γ ist eine Menge endlichdimensionaler Rechts- F_i -Vektorräume $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ zusammen mit F_j -linearen Morphismen

$${}_j\varphi_i : X_i \otimes_{F_i} {}_iM_j \rightarrow X_j$$

für jede Kante $i \rightarrow j$ in Γ . Ein *Morphismus* $\alpha : X \rightarrow X'$ von Darstellungen ist eine Menge F_i -linearer Abbildungen $\{\alpha_i : X_i \rightarrow X'_i\}_{i \in \Gamma}$, sodass

$$\forall i, j \in \Gamma : \quad {}_j\varphi'_i \circ (\alpha_i \otimes \text{id}) = \alpha_j \circ {}_j\varphi_i .$$

Es kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X_i \otimes {}_iM_j & \xrightarrow{{}_j\varphi_i} & X_j \\ \alpha_i \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \alpha_j \\ X'_i \otimes {}_iM_j & \xrightarrow{{}_j\varphi'_i} & X'_j \end{array}$$

Bemerkung 2.12: Es ergibt sich eine abelsche Kategorie $\text{Rep}(\Gamma)$, wobei direkte Summe, Kerne, Bilder, etc. jeweils punktweise definiert sind.

Beispiel 2.13: Sei Γ eine Gattung. Für $i \in \Gamma$ bezeichnet S_i die Darstellung mit $(S_i)_i = F_i$ und $(S_i)_j = 0$ für $i \neq j$. Entsprechend sind alle Abbildungen ${}_r\varphi_s$ der Darstellung trivial. Diese Darstellungen sind einfach und wenn die Gattung keine gerichteten Kreise hat, sind alle einfachen Darstellungen von der Form S_i für ein geeignetes $i \in \Gamma$.

Offenbar gilt $\text{Hom}(S_i, S_j) = \delta_{ij}F_i$. Die Erweiterungen $\text{Ext}^1(S_i, S_j)$ hängen stark von der Kante $i-j$ ab und verschwinden bei Nichtexistenz der Kante oder der Orientierung $j \rightarrow i$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F_j & \xrightarrow{\cong} & X_j & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X_i & \xrightarrow{\cong} & F_i & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Horizontale Pfeile beschreiben hierbei wie gewohnt lineare k -Abbildungen für einen geeigneten Körper k , wohingegen vertikale Pfeile den Abbildungen ${}_i\varphi_j : X_j \otimes_j M_i \rightarrow X_i$ entsprechen und zur besseren optischen Unterscheidung gestrichelt dargestellt sind.

Gibt es jedoch eine Kante der Form $j \leftarrow i$, stellt die eingeforderte Kommutativität der Quadrate keine Bedingung dar und alle Darstellungen des Dimensionsvektors $\underline{\dim}(S_i \oplus S_j)$ sind mögliche Erweiterungen.

Beispiel 2.14 (Köcher als Spezialfall): Erfüllt ein gewichteter Graph (Γ, d) die zusätzliche Eigenschaft $\forall i, j \in \Gamma : d_{ij} = d_{ji}$, so ist $\{f_i := 1\}_{i \in \Gamma}$ eine mögliche Wahl. Zur Konstruktion einer Gattung können die Schiefkörper F_i alle als derselbe Körper k und die Bimoduln als $k^{d_{ij}}$ mit identischer Links- und Rechtswirkung gewählt werden.

Betrachtet man nun die Kategorie der Darstellungen dieses Spezialfalls, stellt man fest, dass die linearen Abbildungen ${}_j\varphi_i$ einer Darstellung dieselbe Information kodieren, wie d_{ij} lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen X_i der Darstellung (ι bezeichnet die kanonische Einbettung in eine beliebige Komponente):

$$X_i \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_i^{\oplus d_{ij}} \xrightarrow{\cong} X_i \otimes_k k^{d_{ij}} \xrightarrow{{}_j\varphi_i} X_j$$

Insgesamt sieht man also, dass der Spezialfall $d_{ij} = d_{ji}$ die klassische Theorie der Köcher (mit d_{ij} parallelen Kanten) und ihrer Darstellungen darstellt und diese entsprechend als Spezialfall der Gattungen auftaucht.

Theorem 2.15 [D80, Proposition (0.1), p.16]: Sei Γ eine Gattung. Dann sind die Kategorien $\text{Rep}(\Gamma)$ aller endlich-dimensionalen Darstellungen von Γ und $\text{Mod-}\Lambda(\Gamma)$ aller endlich erzeugter Moduln über $\Lambda(\Gamma)$ äquivalent zueinander.

Beweis: Ist $(X_i, {}_j\varphi_i)$ eine Darstellung, so wird $\bigoplus_{i \in \Gamma} X_i$ wie folgt zu einem $\Lambda(\Gamma)$ -Modul: Λ_0 wirkt durch $(x_i)_{i \in \Gamma} \cdot (\lambda_j)_{j \in \Gamma} := (x_i \lambda_i)_{i \in \Gamma}$ und Λ_1 wirkt durch $(x_i)_{i \in \Gamma} \cdot ({}_r m_s)_{r \rightarrow s} := (\sum_{i \rightarrow j} {}_j\varphi_i(x_i \otimes {}_i m_j))_{j \in \Gamma}$. Diese Vorschrift lässt sich rekursiv auf Λ_n fortsetzen.

Für einen Morphismus $\alpha : (X_i, {}_j\varphi_i) \rightarrow (X'_i, {}_j\varphi'_i)$ ist die Abbildung $\alpha : \bigoplus_{i \in \Gamma} X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \Gamma} X'_i$, $(x_i) \mapsto (\alpha_i(x_i))$ nach Definition $\Lambda(\Gamma)$ -linear.

Ist umgekehrt X ein $\Lambda(\Gamma)$ -Modul und bezeichnet $e_i := (\dots, 0, 1, 0, \dots) \in \Lambda_0$ das Idempotent zu $1 \in F_i$, so sind $X_i := X e_i$ F_i -Vektorräume und die Λ_1 -Wirkung induziert lineare Abbildungen ${}_j\varphi_i : X e_i \otimes_i M_j \rightarrow X e_j$. \checkmark

Theorem 2.16 [H06, Chapter 4, p. 14]: Sei Λ_0 ein halbeinfacher Ring und Λ_1 ein Λ_0 -Bimodul endlicher Länge. Dann ist der Tensorring Λ erblich.

$$\Lambda := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \dots \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \quad (n \text{ mal})$$

Genauer besitzt ein Modul $M \in \text{Mod-}\Lambda$ folgende projektive Auflösungen $P(M)^\bullet$ und folgende injektive Auflösung $I(M)^\bullet$. Hierbei bezeichnet $\Lambda_+ := \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda$ das Radikal.

$$P(M)^\bullet : \quad 0 \rightarrow M \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_+ \xrightarrow{\delta_M} M \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \xrightarrow{\varepsilon_M} M \rightarrow 0$$

$$\varepsilon_M : \quad m \otimes \lambda \mapsto m\lambda$$

$$\delta_M : \quad m \otimes (\mu \otimes \lambda) \mapsto m \otimes (\mu \otimes \lambda) - m\mu \otimes \lambda$$

$$I(M)^\bullet : \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon^M} \text{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, M) \xrightarrow{\delta^M} \text{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_+, M) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon^M : \quad m \mapsto (\lambda \mapsto m\lambda)$$

$$\delta^M : \quad f \mapsto (\lambda \otimes \mu \mapsto f(\lambda \otimes \mu) - f(\lambda)\mu)$$

Lemma 2.17: Gattungen ohne gerichtete Kreise sind erblich.

Beweis: Zu zeigen sind die Voraussetzungen des obigen Theorems. Als Produkt von Körpern ist der Ring $\Lambda_0 = \prod_{i \in \Gamma} F_i$ halbeinfach und der Bimodul $\Lambda_1 = \bigoplus_{i \rightarrow j} {}_i M_j$ nach Voraussetzung endlich dimensional über k , also hat er insbesondere endliche Länge über $\prod_{i \in \Gamma} F_i$. \checkmark

Beispiel 2.18: Seien Γ eine Gattung und $*$ $\in \Gamma$ eine Quelle. Die projektive Auflösung von S_* ist dann:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{* \rightarrow j} {}_* M_j \otimes_{F_j} P_j \longrightarrow P_* \longrightarrow S_* \longrightarrow 0$$

Für Köcher gilt ${}_* M_j \cong F_j$, sodass man für diesen Spezialfall die gewohnte Auflösung erhält.

Beweis: Bezeichne mit $e_* = (0, \dots, 0, 1_{F_*}, 0, \dots, 0) \in \prod_{i \in \Gamma} F_i$ das $*$ -te primitive Idempotent und erhalte $S_* = e_* \Lambda_0$ und $P_* = e_* \Lambda$. Damit ergibt sich schnell:

$$S_* \otimes_{\Lambda_0} \Lambda = e_* \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \cong e_* \Lambda = P_*$$

Für den zweiten Term berechnet man:

$$\begin{aligned} S_* \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_+ &= e_* \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \cong e_* \bigoplus_{i \rightarrow j} {}_i M_j \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \\ &\cong \bigoplus_{* \rightarrow j} {}_* M_j \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \cong \bigoplus_{* \rightarrow j} \bigoplus_{i \in \Gamma} {}_* M_j e_i \otimes_{F_i} e_i \Lambda \\ &\cong \bigoplus_{* \rightarrow j} {}_* M_j \otimes_{F_j} e_j \Lambda = \bigoplus_{* \rightarrow j} {}_* M_j \otimes_{F_j} P_j \end{aligned}$$

Beachte weiterhin folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 P_* = e_*\Lambda &= e_* \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\bigoplus_{i \rightarrow j} M_j \right)^{\otimes n} \cong F_* \oplus \bigoplus_{* \rightarrow j} M_j \otimes_{\Lambda_0} \Lambda \\
 &\cong F_* \oplus \bigoplus_{* \rightarrow j} M_j e_j \otimes_{F_j} e_j \Lambda = F_* \oplus \bigoplus_{* \rightarrow j} M_j \otimes_{F_j} P_j
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist also der linke Term der kurzen, exakten Folge ein Unterobjekt von P_* , sodass sich als Morphismen die Einbettung und die Quotientenprojektion ergeben. \checkmark

Bemerkung 2.19: Insgesamt ist die Kategorie $\text{Rep}(\Gamma)$ einer Gattung Γ über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q also endlich, abelsch und erblich, sodass man deren Hallalgebra betrachten kann. Zur einfacheren Lesbarkeit und wegen der Äquivalenz zwischen $\text{Rep}(\Gamma)$ und $\text{Mod-}\Lambda(\Gamma)$ wird im folgenden immer die abkürzende Notation $\mathcal{H}(\Gamma) := \mathcal{H}(\text{Rep}(\Gamma)) \cong \mathcal{H}(\text{Mod-}\Lambda(\Gamma))$ und analog auch $\mathcal{C}(\Gamma)$, $\mathcal{D}^b(\Gamma)$, etc. verwendet.

Beispiel 2.20: In Fortsetzung des Beispiels 2.13 sollen hier Produkte der einfachen Darstellungen S_i für $i \in \Gamma$ in der Hallalgebra $\mathcal{H}(\Gamma)$ exemplarisch berechnet werden. Deren Potenzen wurden bereits in Lemma 1.47 berechnet:

$$[S_i^{\oplus n}] = v^{-nf_i(n-1)} \frac{[S_i]^n}{[n]_{v^{f_i}}!}$$

Dabei ergibt sich $\sqrt{|\text{End}(S_i)|} = v^{f_i}$ für $v = \sqrt{|\mathbb{F}_q|} = \sqrt{q}$ und $f_i = [F_i : \mathbb{F}_q]$.

Gibt es Kante der Form $i \rightarrow j$, so erfüllt das Paar $([S_j], [S_i])$ die Voraussetzungen für Lemma 1.45 und es gilt $[S_j] \cdot [S_i] = [S_i \oplus S_j]$. Weiter gilt

$$[S_i] \cdot [S_j] = v^{\langle \underline{\dim}(S_i), \underline{\dim}(S_j) \rangle} \sum_{\substack{X \in \text{Rep}(\Gamma) \\ \underline{\dim}(X) = \underline{\dim}(S_i \oplus S_j)}} [X]$$

Hierbei ist der Koeffizient $F_{S_i, S_j}^X = 1$, da es aus Dimensionsgründen wegen $\dim_{F_j}((X)_j) = \dim_{F_j}((S_j)_j)$ nur eine Unterdarstellung $Y \subseteq X$ mit $Y \cong S_j$ gibt. Dieser Beweis trifft gleichermaßen auf höhere Dimensionen $[S_i^a]$ und $[S_j^b]$ mit $a, b \in \mathbb{N}^+$ zu, sodass die Formel nachwievor gilt, wenn man $S_i \mapsto S_i^a$ und $S_j \mapsto S_j^b$ substituiert.

Gibt es überhaupt keine Kante zwischen i und j , impliziert $\underline{\dim}(X) = \underline{\dim}(S_i^a \oplus S_j^b)$ bereits $X \cong S_i^a \oplus S_j^b$ und daher auch $\langle \underline{\dim}(S_i^a), \underline{\dim}(S_j^b) \rangle = 0$. Also stimmen beide Produkte überein und es gilt $[S_i^a] \cdot [S_j^b] = [S_j^b] \cdot [S_i^a]$, d.h. $[S_i^a]$ und $[S_j^b]$ kommutieren.

Gattungen und Cartanmatrizen

Definition 2.21: Definiere eine Matrix $C_\Gamma = (c_{ij})_{i,j \in \Gamma}$ für einen gewichteten Graphen Γ wie folgt:

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -d_{ji} & i \neq j \end{cases}$$

Sei $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ eine symmetrisierbare Cartanmatrix. Definiere einen gewichteten Graphen $(\Gamma_C, \{d_{ij}\}_{i,j \in \Gamma_C})$ mit Knoten-

menge $\Gamma_C := \{1, \dots, n\}$ wie folgt:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ -c_{ji} & i \neq j \end{cases}$$

Lemma 2.22: Für gewichtete Graphen Γ und symmetrisierbare Cartanmatrizen C gelten folgende Aussagen:

- C_Γ ist eine symmetrisierbare Cartanmatrix.
- Γ_C ist ein gewichteter Graph.
- Die Abbildungen $\Gamma \mapsto C_\Gamma$ und $C \mapsto \Gamma_C$ sind invers zueinander.

Beweis: 1) Seien $\{f_i \in \mathbb{N}^+\}_{i \in \Gamma}$, sodass $d_{ij}f_j = d_{ji}f_i$. Die Eigenschaften $c_{ii} = 2$ und $c_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ sind wegen $d_{ij} \geq 0$ offensichtlich erfüllt. Die Eigenschaft $f_i > 0$ impliziert dann $c_{ij} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} = 0$.

Bezeichnet D die Diagonalmatrix mit Einträgen f_i , lauten die Einträge des Produktes außerhalb der Diagonalen $(DC_\Gamma)_{ij} = f_i c_{ij} = -d_{ji}f_i$, sodass C_Γ symmetrisierbar ist.

2) Offenbar gelten $d_{ii} = 0$ und $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Ist D eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$, so rechnet man $d_{ij}f_j = -f_j c_{ji} = -(DC)_{ji} = -(DC)_{ij} = -f_j c_{ij} = d_{ji}f_i$.

3) Die Daten d_{ii} bzw. c_{ii} werden jeweils per Definition auf den geforderten Wert gesetzt. Führt man beide Konstruktionen nacheinander aus, heben sich der doppelte Vorzeichenwechsel und der doppelte Indextausch jeweils gegenseitig auf. ✓

Bemerkung 2.23: In der Literatur ist auch die Definition eines „absolut gewichteten Graphen“ zu finden, welche von der obigen Definition (relativer) Gewichte nur leicht abweicht. Details zu den Unterschieden und Gemeinsamkeiten beider Definitionen sind in [L12] gut ausgearbeitet, sodass hier nur das Wichtigste genannt werden soll.

Definition 2.24: Ein absolut gewichteter Graph (Γ, f, m) besteht aus einer endlichen Menge Γ (den Knoten) und Gewichten $f = \{f_i \in \mathbb{N}^+ \mid i \in \Gamma\}$ für die Knoten und Gewichten $m = \{m_{\{i,j\}} \in \mathbb{N}_0 \mid i \neq j \in \Gamma\}$ für die Kanten, wobei folgende Eigenschaft gilt:

$$\forall i, j \in \Gamma : \quad f_i | m_{\{i,j\}} \wedge f_j | m_{\{i,j\}}$$

Bemerkung 2.25: Noch bevor man sich Gattungen ansieht, ist es sinnvoll, beide Arten der Gewichtungen aus kategorieller Sicht zu vergleichen, sodass noch Morphismen für die Kategorie absolut gewichteter Graphen \mathcal{Q}_{abs} bzw. relativ gewichteter Graphen \mathcal{Q}_{rel} definiert werden.

Definition 2.26: Ein Morphismus (relativ) gewichteter Graphen ist eine Abbildung $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, sodass $d_{ij} = d'_{\xi(i), \xi(j)}$ für alle $i, j \in \Gamma$ gilt.

Ein Morphismus absolut gewichteter Graphen ist eine Abbildung $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, sodass $f_i = f'_{\xi(i)}$ und $m_{\{i,j\}} = m'_{\{\xi(i), \xi(j)\}}$ für alle $i, j \in \Gamma$ gelten.

Lemma 2.27 [L12, Lemma 1.5, p.6]: Die folgende Vorschrift

definiert einen treuen und surjektiven Funktor:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} : \quad \mathcal{Q}_{\text{abs}} &\rightarrow \mathcal{Q}_{\text{rel}} \\ (\Gamma, f, m) &\mapsto \left(\Gamma, \{d_{ij} := \frac{m_{\{i,j\}}}{f_j} \mid i, j \in \Gamma\} \right) \\ \xi &\mapsto \xi \end{aligned}$$

Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass diese Vorschrift wohldefiniert ist. Aus $f_j | m_{\{i,j\}}$ folgt, dass $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Rechne weiter

$$d_{ij} f_j = \frac{m_{\{i,j\}}}{f_j} f_j = m_{\{i,j\}} = m_{\{j,i\}} = \frac{m_{\{j,i\}}}{f_i} f_i = d_{ji} f_i .$$

Also sind die Gewichte der Knoten $\{f_i \mid i \in \Gamma\}$ eine mögliche Wahl, sodass die Bedingung an die relativen Gewichte (d_{ij}, d_{ji}) erfüllt wird.

Für einen Morphismus $\xi : (\Gamma, f, m) \rightarrow (\Gamma', f', m')$ rechne

$$d'_{\xi(i), \xi(j)} = \frac{m_{\{\xi(i), \xi(j)\}}}{f'_{\xi(j)}} = \frac{m_{\{i,j\}}}{f_j} = d_{ij} .$$

Daher ist ξ auch ein Morphismus (relativ) gewichteter Graphen. Offensichtlich erhält der Funktor Identität und Komposition von Morphismen.

Da der Funktor auf Morphismen als Identität wirkt, ist er treu. Sei (Γ, d) ein (relativ) gewichteter Graph und $\{f_i \in \mathbb{N}^+ \mid i \in \Gamma\}$ eine mögliche Wahl mit der Eigenschaft $d_{ij} f_j = d_{ji} f_i$. Nun definiert $m_{\{i,j\}} := d_{ij} f_j = d_{ji} f_i$ zusammen mit bereits genannten Daten einen absolut gewichteten Graphen (Γ, f, m) , da nach Definition $f_i | m_{i,j}$ und $f_j | m_{i,j}$ erfüllt sind. Der Funktor kehrt die

gerade ausgeführte Konstruktion um, sodass (Γ, f, m) ein Urbild von (Γ, d) und der Funktor damit surjektiv ist. \checkmark

Bemerkung 2.28: Der Funktor ist nicht injektiv, da folgende zwei absolut gewichtete Graphen dasselbe Bild haben (anstelle der Knoten stehen hier deren Gewichte):

$$1 \xrightarrow{4} 4 \quad 2 \xrightarrow{8} 8 \quad \xrightarrow{\mathbb{F}} \quad \bullet \xrightarrow{(1,4)} \bullet$$

Bemerkung 2.29: Der Funktor ist auch nicht voll, wie in folgendem Beispiel zu sehen ist. Seien Γ und Γ' absolut gewichtete Graphen wie durch folgende Grafik definiert. Ihre Bilder unter \mathbb{F} lassen sich leicht berechnen:

$$\Gamma : \quad 1 \xrightarrow{3} 3 \quad \mathbb{F}(\Gamma) : \quad a_1 \xrightarrow{(1,3)} a_2$$

$$\Gamma' : \quad 1 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{3} 9 \quad \mathbb{F}(\Gamma') : \quad b_1 \xrightarrow{(1,3)} b_2 \xrightarrow{(1,3)} b_3$$

Hierbei besteht $\text{Hom}_{\mathcal{Q}_{\text{abs}}}(\Gamma, \Gamma') = \{\xi : a_i \mapsto b_i\}$ aus genau einer Abbildung, da die Gewichte erhalten bleiben müssen.

Allerdings gibt es hier zwei Morphismen $\text{Hom}_{\mathcal{Q}_{\text{rel}}}(\mathbb{F}(\Gamma), \mathbb{F}(\Gamma')) = \{\xi_0, \xi_1\}$ der Form $\xi_j(a_i) = b_{i+j}$, welche $\mathbb{F}(\Gamma)$ als linke bzw. rechte Kante in $\mathbb{F}(\Gamma')$ einbetten.

Bemerkung 2.30: Absolut gewichtete Graphen Γ entsprechen symmetrisierten Cartanmatrizen DC wie durch den Funktor bzw. die Gleichung $m_{\{i,j\}} = d_{ij}f_j = d_{ji}f_i$ im Beweis des letzten Lemmas gezeigt wird.

Definition 2.31: Eine Gattung eines absolut gewichteten Graphen über einem Körper k besteht neben der Orientierung Ω aus den gleichen Daten $\{F_i\}_{i \in \Gamma}$ und $\{ {}_i M_j \}_{i,j \in \Gamma}$ wie eine Gattung eines relativ gewichteten Graphen, wobei anstelle der Eigenschaft $\dim_{F_j}({}_i M_j) = d_{ij}$ die Eigenschaften $[F_i : k] = f_i$ und $\dim_k({}_i M_j) = m_{\{i,j\}}$ eingefordert werden.

Definition 2.32: Ein Morphismus von Gattungen über (relativ bzw. absolut) gewichteten Graphen ist ein Morphismus $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ von (relativ bzw. absolut) gewichteten Graphen zusammen mit verträglichen Morphismen $\psi_i : F_i \rightarrow F'_{\xi(i)}$ und ${}_i \psi_j : {}_i M_j \rightarrow \xi(i) M'_{\xi(j)}$, d.h. für alle $i, j \in \Gamma$ und alle $\lambda_i \in F_i$, $\lambda_j \in F_j$ und $m \in {}_i M_j$ gelte:

$${}_i \psi_j(\lambda_i m \lambda_j) = \psi_i(\lambda_i) \cdot {}_i \psi_j(m) \cdot \psi_j(\lambda_j)$$

Bezeichne mit \mathcal{G}_{abs} bzw. \mathcal{G}_{rel} die Kategorie der Gattungen über absolut bzw. relativ gewichteten Graphen.

Lemma 2.33 [L12, Proposition 2.6, p.9]: Eine Gattung eines absolut gewichteten Graphen Γ ist auch eine Gattung aufgefasst über dem relativ gewichteten Graphen $\mathbb{F}(\Gamma)$.

Der somit definierte Vergissfunktor $\mathcal{G}_{\text{abs}} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{rel}}$ ist treu und injektiv auf Objekten. Insbesondere lässt sich \mathcal{G}_{abs} als Unterkategorie von \mathcal{G}_{rel} auffassen.

Bemerkung 2.34: Das letzte Lemma und der Vergleich zur Notation symmetrisierbarer Cartanmatrizen motivieren die Verwendung relativer anstatt absoluter Gewichte.

2.2 Quadratische Form und Wurzeln

Bemerkung 2.35: Die Darstellungstheorie der Gattungen verläuft in großen Teilen analog zur Darstellungstheorie der Köcher und wird in [DR76] dargestellt.

Definition 2.36: Die gewichteten Graphen der folgenden Liste nennt man Dynkingraphen (der Index beschreibt die Anzahl der Knoten):

$$A_n \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad n \geq 1$$

$$B_n \quad \bullet \xrightarrow{(1,2)} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad n \geq 2$$

$$C_n \quad \bullet \xrightarrow{(2,1)} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad n \geq 2$$

$$D_n \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \quad n \geq 4$$

$$E_n \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad n = 6, 7, 8$$

$$F_4 \quad \bullet - \bullet \overset{(1,2)}{\text{---}} \bullet - \bullet$$

$$G_2 \quad \bullet \overset{(1,3)}{\text{---}} \bullet$$

Definition 2.37: Die gewichteten Graphen der folgenden Liste nennt man Euklidische Graphen (der Index n ist dabei um genau eins geringer als die Anzahl der Knoten):

$$\tilde{A}_1^2 \quad \bullet \overset{(1,4)}{\text{---}} \bullet$$

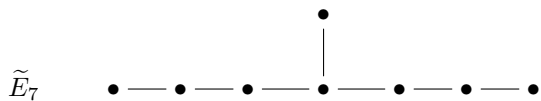
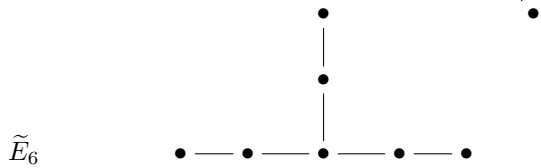
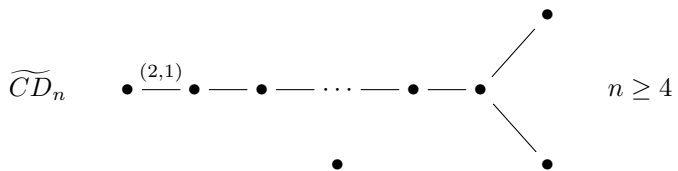
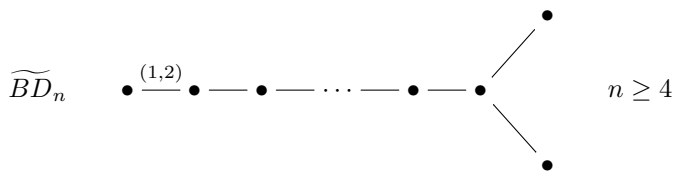
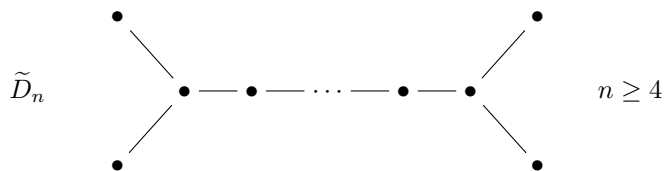
$$\tilde{A}_1^1 \quad \bullet \overset{(2,2)}{\text{---}} \bullet$$

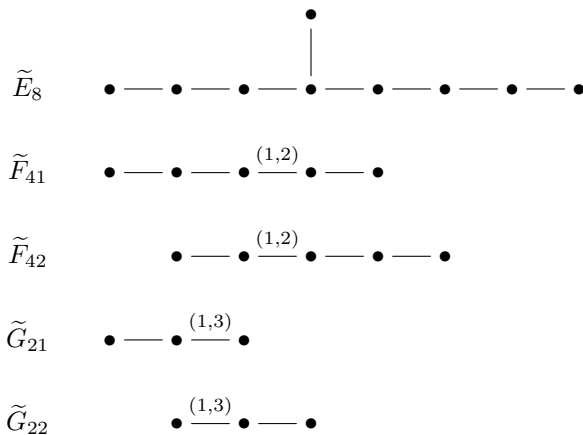
$$\tilde{A}_n \quad \begin{array}{c} \bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad n \geq 2$$

$$\tilde{B}_n \quad \bullet \overset{(1,2)}{\text{---}} \bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet \overset{(2,1)}{\text{---}} \bullet \quad n \geq 2$$

$$\tilde{C}_n \quad \bullet \overset{(2,1)}{\text{---}} \bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet \overset{(1,2)}{\text{---}} \bullet \quad n \geq 2$$

$$\widetilde{BC}_n \quad \bullet \overset{(1,2)}{\text{---}} \bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet \overset{(1,2)}{\text{---}} \bullet \quad n \geq 2$$





Definition 2.38: Sei (Γ, d) ein gewichteter Graph und $\mathbb{Q}^\Gamma := \{(x_i)_{i \in \Gamma} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$. Definiere eine symmetrische Bilinearform

$$b_\Gamma : \mathbb{Q}^\Gamma \times \mathbb{Q}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}, \quad ((x_i), (y_i)) \mapsto \sum_{i \in \Gamma} f_i x_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \Gamma} d_{ij} f_j x_i y_j$$

mit zugehöriger quadratischer Form

$$q_\Gamma : \mathbb{Q}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (x_i) \mapsto \sum_{i \in \Gamma} f_i x_i^2 - \sum_{i, j \in \Gamma} d_{ij} f_j x_i x_j$$

Beide Abbildungen sind nur bis auf einen positiven, ganzzahligen Faktor wohldefiniert, welcher für die Nullstellen keine Rolle spielt.

Lemma 2.39: Für einen zusammenhängenden, gewichteten Graph Γ gelten:

- Γ ist genau dann Dynkin, wenn q_Γ positiv definit ist.
- Γ ist genau dann Euklidisch, wenn q_Γ positiv semi-definit ist.

Bemerkung 2.40: Ist ein zusammenhängender Köcher nicht vom Dynkintyp, so enthält er einen Euklidischen Unterköcher.

Da Gewichte insbesondere parallele Kanten simulieren können, lässt sich dieser Fakt nicht auf die nächstliegende Art verallgemeinern.

Lemma 2.41 [D80, Lemma 1.3, p.41]: Ist der zusammenhängende, gewichtete Graph (Γ, d) nicht Dynkin, so enthält er einen Euklidischen Graphen oder einen Graphen der folgenden beiden Typen

$$i \xrightarrow{(d_{ij}, d_{ji})} j \qquad d_{ij}d_{ji} \geq 5$$

$$i \xrightarrow{(d_{ij}, d_{ji})} j \xrightarrow{(d_{jk}, d_{kj})} k \qquad d_{ij}d_{ji} = 3, \quad d_{jk}d_{kj} \in \{2, 3\}$$

Definition 2.42: Sei Γ eine Gattung und $* \in \Gamma$. Definiere eine Reflexion

$$\sigma_* : \mathbb{Q}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}^\Gamma, \quad x \mapsto x - \frac{b_\Gamma(x, e_*)}{b_\Gamma(e_*, e_*)} e_*,$$

wobei $e_* \in \mathbb{Q}^\Gamma$ den $*$ -ten Basisvektor bezeichnet. Ein *Coxeter-element* ist die Verkettung $c = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_n}$ für eine geeignete Reihenfolge aller Knoten $i_1, \dots, i_n \in \Gamma$.

Die *Weylgruppe* W_Γ ist das Erzeugnis aller Reflexionen σ_* . Ein Vektor $x \in \mathbb{Q}^\Gamma$ heißt *Wurzel*, wenn es ein $w \in W_\Gamma$ und ein $i \in \Gamma$ mit $x = w(e_i)$ gibt.

Lemma 2.43 [D80, Lemma 1.6, p.44]: Sei Γ ein gewichteter Graph und $x \in \mathbb{Q}^\Gamma$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Es gilt $w(x) = x$ für alle $w \in W_\Gamma$.
- Es gilt $\sigma_*(x) = x$ für alle $*$ $\in \Gamma$.
- Es gilt $b_\Gamma(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{Q}^\Gamma$.

Für einen Dynkingraph oder Euklidischen Graphen gehört zur Liste:

- $q_\Gamma(x) = 0$

Erfüllt ein Vektor $x \in \mathbb{Q}^\Gamma$ diese Eigenschaften, nennt man ihn *stabil*. Bezeichne mit $R_\Gamma = \{x \in \mathbb{Q}^\Gamma \mid b_\Gamma(x, -) = 0\}$ das Radikal der Bilinearform bzw. die Menge aller stabilen Vektoren.

Lemma 2.44 [D80, Lemma 1.7, p.45]: Ist Γ ein Dynkingraph, so ist $R_\Gamma = \{0\}$.

Ist Γ ein Euklidischer Graph, so ist R_Γ eindimensional und besitzt einen eindeutigen Erzeuger δ mit positiven, ganzzahligen Einträgen unter denen mindestens einer 1 ist. Dieser Erzeuger wird im folgenden *imaginäre Wurzel* bezeichnet.

Bemerkung 2.45: Ist Γ ein Euklidischer Graph, wirkt W_Γ offenbar trivial auf R_Γ . Jedes Element $w \in W_\Gamma$ induziert eine Transformation \bar{w} auf $\mathbb{Q}^\Gamma/R_\Gamma$. Die Gruppe dieser Transformationen wird mit \bar{W}_Γ bezeichnet und ist endlich [D80, Proposition 1.9, p.46].

Definition 2.46: Sei Γ ein Euklidischer Graph. Sei m die Ordnung des von der Coxetertransformation c induzierten Elementes $\bar{c} \in \bar{W}_\Gamma$ in der Weylgruppe. Für einen Vektor $x \in \mathbb{Q}^\Gamma$ gilt dann:

$$c^m(x) = x + \partial_c(x) \cdot \delta$$

Die Zahl $\partial_c(x)$ heißt *Defekt* von x . Dabei ist $\partial_c : \mathbb{Q}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}$ eine Linearform.

Beispiel 2.47: Dlab und Ringel [DR76, p.39 ff.] geben den Defekt für alle Gattungen von Euklidischem Typ an. Für \tilde{A}_1^2 mit der Knotenbezeichnung $1 \xrightarrow{(1,4)} 2$ ergibt sich beispielsweise $\partial(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$.

2.3 Spiegelungsfunktoren

Lemma 2.48: Seien ${}_iM_j$ F_i - F_j -Bimoduln mit dualen ${}_jM_i$. Seien $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ und $\{Y_j\}_{j \in \Gamma}$ F_i - bzw. F_j -Vektorräume. Dann gibt es natürliche Isomorphismen:

$$\mathrm{Hom}_{F_j}(X_i \otimes {}_iM_j, Y_j) \cong \mathrm{Hom}_{F_i}(X_i, Y_j \otimes {}_jM_i)$$

Beweis: Beginne mit folgenden Isomorphismen

$$Y_j \otimes_j M_i \cong Y_j \otimes_j M_i^{**} \cong Y_j \otimes_{F_j} \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j) \cong \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, Y_j)$$

und verwende die Adjunktion zwischen $- \otimes_j M_i$ und $\text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, -)$. Hierbei ist X_i als Vektorraum insbesondere projektiv, also erhält $\text{Hom}_{F_i}(X_i, -)$ obigen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{F_j}(X_i \otimes_j M_i, Y_j) &\cong \text{Hom}_{F_i}(X_i, \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, Y_j)) \\ &\cong \text{Hom}_{F_i}(X_i, Y_j \otimes_j M_i) \end{aligned}$$

✓

Bemerkung 2.49: Wie in [D08, 2.2] ausgeführt, ist der Isomorphismus wie folgt:

- Sei $\{m_1, m_2, \dots, m_d\}$ eine F_j -Basis von ${}_i M_j$,
- $\{m^1, m^2, \dots, m^d\}$ die duale Basis von ${}_i M_j^* = \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j)$ und
- bezeichne mit $\xi : {}_i M_j^* \rightarrow {}_j M_i$ den Isomorphismus (Teil der Daten).

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{F_j}(X_i \otimes_j M_i, Y_j) &\cong \text{Hom}_{F_i}(X_i, Y_j \otimes_j M_i), \\ \varphi &\mapsto \bar{\varphi} \\ \bar{\psi} &\leftarrow \psi \end{aligned}$$

wobei

$$\bar{\varphi} : X_i \rightarrow Y_j \otimes_j M_i, \quad x \mapsto \sum_{p=1}^d \varphi(x \otimes m_p) \otimes \xi(m^p) \text{ und}$$

$$\bar{\psi} : X_i \otimes_i M_j \rightarrow Y_j, \quad z \otimes m_p \mapsto z_p \quad \text{für } \psi(z) = \sum_{p=1}^d z_p \otimes \xi(m^p).$$

Lemma 2.50: Seien Γ eine Gattung und X, Y zwei Darstellungen. Dann gilt:

$$\dim_k \text{Hom}(X, Y) - \dim_k \text{Ext}^1(X, Y) = \sum_{i \in \Gamma} f_i x_i y_i - \sum_{j \rightarrow i} d_{ji} f_i x_j y_i,$$

wobei $f_i := [F_i : k]$ und $x_i := \underline{\dim}(X)_i$ bzw. $y_i := \underline{\dim}(Y)_i$.

Beweis: Bezeichne mit $X = (X_i, {}_i\varphi_j)$ und $Y = (Y_i, {}_i\psi_j)$ die Vektorräume und Abbildungen der Darstellungen. Definiere die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_{X,Y} : \bigoplus_{i \in \Gamma} \text{Hom}_{F_i}(X_i, Y_i) &\rightarrow \bigoplus_{j \rightarrow i} \text{Hom}_{F_i}(X_j \otimes_j M_i, Y_i) . \\ (\alpha_i)_{i \in \Gamma} &\mapsto ({}_i\psi_j \circ (\alpha_j \otimes \text{id}) - \alpha_i \circ {}_i\varphi_j)_{j \rightarrow i} \end{aligned}$$

Bezeichnet $D(f)$ den Definitions- und $W(f)$ den Wertebereich einer Abbildung $f : D(f) \rightarrow W(f)$, so gelten für k -lineare Abbildungen f allgemein $\dim D(f) = \dim \ker(f) + \dim \text{im}(f)$ und $\dim W(f) = \dim \text{im}(f) + \dim \text{coker}(f)$. Mit Hilfe der Definition

$[F_i : k] = f_i$ rechnet man

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in \Gamma} f_i x_i y_i - \sum_{j \rightarrow i} d_{ji} f_i x_j y_i \\
 = & \sum_{i \in \Gamma} f_i \dim_{F_i}(X_i) \dim_{F_i}(Y_i) - \sum_{j \rightarrow i} d_{ji} f_i \dim_{F_j}(X_j) \dim_{F_i}(Y_i) \\
 = & \sum_{i \in \Gamma} f_i \dim_{F_i} \operatorname{Hom}_{F_i}(X_i, Y_i) - \sum_{j \rightarrow i} f_i \dim_{F_i} \operatorname{Hom}_{F_i}(X_j \otimes_j M_i, Y_i) \\
 = & \dim_k D(\Phi_{X,Y}) - \dim_k W(\Phi_{X,Y}) \\
 = & \dim_k \ker(\Phi_{X,Y}) - \dim_k \operatorname{coker}(\Phi_{X,Y}) .
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $\ker(\Phi_{X,Y}) = \operatorname{Hom}(X, Y)$ nach Definition und $\operatorname{coker}(\Phi_{X,Y}) \cong \operatorname{Ext}^1(X, Y)$ eine in [D80, Prop. 2.2, pp. 58-61] beschriebene Rechnung. \checkmark

Definition

Bemerkung 2.51: Sei Γ eine Gattung. Definiere im folgenden zwei Spiegelungsfunktoren:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{S}_*^+ : \operatorname{Rep}(\Gamma) &\rightarrow \operatorname{Rep}(s_*\Gamma) & (* \in \Gamma \text{ eine Senke}) \\
 \mathbb{S}_*^- : \operatorname{Rep}(\Gamma) &\rightarrow \operatorname{Rep}(s_*\Gamma) & (* \in \Gamma \text{ eine Quelle})
 \end{aligned}$$

Definition 2.52: Sei $*$ eine Senke und X eine Darstellung. Definiere $\mathbb{S}_*^+(X) := Y = (Y_i, j\psi_i)$ durch $Y_i := X_i$ falls $i \neq *$ und Y_* als den Kern in

$$0 \longrightarrow Y_* \xrightarrow{(j\psi_*)_j} \bigoplus_{j \in \Gamma} X_j \otimes_j M_* \xrightarrow{(*\varphi_j)_j} X_* .$$

Definiere ${}_j\psi_i := {}_j\varphi_i$ falls $i \neq *$ und

$${}_j\psi_* := {}_j\bar{l}_* : Y_* \otimes {}_jM_* \rightarrow Y_j .$$

Morphismen $\alpha : X \rightarrow X'$ ändern sich nur an Position $*$, wo man die Einschränkung von $\bigoplus \alpha_j \otimes \text{id}$ als die von der universellen Eigenschaft des Kerns induzierte Abbildung erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_jM_* & \longrightarrow & X_* \\ & & \downarrow \exists! \mathbb{S}_*^+(\alpha)_* & & \downarrow \bigoplus \alpha_j \otimes \text{id} & & \downarrow \alpha_* \\ 0 & \longrightarrow & Y'_* & \longrightarrow & \bigoplus X'_j \otimes {}_jM_* & \longrightarrow & X'_* \end{array}$$

Definition 2.53: Sei $*$ eine Quelle und X eine Darstellung. Definiere $\mathbb{S}_*^-(X) := Y = (Y_i, {}_j\psi_i)$ durch $Y_j := X_j$ falls $j \neq *$ und Y_* als den Kokern in

$$X_* \xrightarrow{({}_i\bar{\varphi}_*)_i} \bigoplus_{i \in \Gamma} X_i \otimes {}_iM_* \xrightarrow{({}_*\pi_i)_i} Y_* \longrightarrow 0 .$$

Definiere ${}_j\psi_i := {}_j\varphi_i$ falls $j \neq *$ und

$${}_*\psi_i := {}_*\pi_i : Y_i \otimes {}_iM_* \rightarrow Y_* .$$

Morphismen $\alpha : X \rightarrow X'$ ändern sich nur an Position $*$, wo man die Projektion von $\bigoplus \alpha_i \otimes \text{id}$ als die von der universellen Eigenschaft des Kokerns induzierte Abbildung erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} X_* & \longrightarrow & \bigoplus X_i \otimes {}_iM_* & \longrightarrow & Y_* & \longrightarrow & 0 \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \bigoplus \alpha_i \otimes \text{id} & & \downarrow \exists! \mathbb{S}_*^-(\alpha)_* & & \\ X'_* & \longrightarrow & \bigoplus X'_i \otimes {}_iM_* & \longrightarrow & Y'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Bemerkung 2.54: Da alle benötigten Konstruktionen mit direkten Summen vertauschen, sind \mathbb{S}_*^\pm additive Funktoren.

Beispiel 2.55: Sei Γ eine Gattung, seien $*, i \in \Gamma$ zwei Knoten und $*$ eine Senke. Es soll die einfache Darstellung S_i mittels \mathbb{S}_*^+ gespiegelt werden. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Gilt $i = *$, so ist nach Definition ${}_i M_* = 0$ und entsprechend auch $\bigoplus_{j \in \Gamma} (S_i)_j \otimes_j M_* = 0$. Es folgt $(\mathbb{S}_*^+(S_i))_* = 0$, sodass man als gespiegelte Darstellung $\mathbb{S}_*^+(S_i) = 0$ die triviale Darstellung erhält.

2) Gelten $i \neq *$ und $d_{i*} = 0$ bzw. sind i und $*$ nicht durch eine Kante verbunden, ist ebenfalls ${}_i M_* = 0$ und wie im ersten Fall ergibt sich $\mathbb{S}_*^+(S_i)_* = 0$, sodass sich insgesamt mit $\mathbb{S}_*^+(S_i) = S_i$ nichts ändert.

3) Gelten $i \neq *$ und $d_{i*} \neq 0$, erhält man als definierende kurze, exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}_*^+(S_i)_* \longrightarrow (S_i)_i \otimes {}_i M_* \longrightarrow (S_i)_* .$$

Wegen $(S_i)_* = 0$ und $(S_i)_i = F_i$ folgt $\mathbb{S}_*^+(S_i)_* \cong {}_i M_*$ und man erhält den Dimensionsvektor $(\dots, 0, 1, d_{i*}, 0, \dots)$. Die einzige relevante Abbildung dieser Darstellung ist (bis auf Isomorphie) die Auswertungsabbildung

$${}_*\varphi_i : \quad {}_i M_* \otimes {}_i M_*^* \rightarrow F_i, \quad (m, f) \mapsto f(m) .$$

Beispiel 2.56: Sei Γ eine Gattung, seien $*, i \in \Gamma$ zwei Knoten und $*$ eine Quelle. Als Fortsetzung des obigen Beispiels soll die

einfache Darstellung S_i mittels \mathbb{S}_*^- gespiegelt werden. Dabei sind analog drei Fälle zu unterscheiden:

- 1) und 2) Gilt $i = *$ bzw. $d_{i*} = 0$ so erhält man völlig analog zu obigem Beispiel $\mathbb{S}_*^-(S_i) = 0$ bzw. $\mathbb{S}_*^-(S_i) = S_i$.
- 3) Gelten $i \neq *$ und $d_{i*} \neq 0$, erhält man als definierende kurze, exakte Folge

$$(S_i)_* \longrightarrow (S_i)_i \otimes {}_iM_* \longrightarrow \mathbb{S}_*^-(S_i)_* \longrightarrow 0 .$$

Wegen $(S_i)_* = 0$ und $(S_i)_i = F_i$ folgt $\mathbb{S}_*^-(S_i)_* \cong {}_iM_*$ und man erhält den Dimensionsvektor $(\dots, 0, 1, d_{i*}, 0, \dots)$. Die einzige relevante Abbildung dieser Darstellung ist (bis auf Isomorphie) die Multiplikation:

$${}_i\varphi_* : F_i \otimes {}_iM_* \rightarrow {}_iM_*, \quad (\lambda, m) \mapsto \lambda m .$$

Erste Eigenschaften

Lemma 2.57: Sei Γ eine Gattung. Dann gibt es zwei natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{S}_*^- \circ \mathbb{S}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{1}_{\text{Rep}(\Gamma)} && (* \text{ eine Senke}) \text{ und} \\ \eta : \mathbb{1}_{\text{Rep}(\Gamma)} &\longrightarrow \mathbb{S}_*^+ \circ \mathbb{S}_*^- && (* \text{ eine Quelle}). \end{aligned}$$

Die zwei natürlichen Transformationen erfüllen

$$\mathbb{1}_{\mathbb{S}_*^-} = \varepsilon_{\mathbb{S}_*^-(-)} \circ \mathbb{S}_*^-(\eta_-) : \mathbb{S}_*^- \longrightarrow \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- \longrightarrow \mathbb{S}_*^- ,$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{S}_*^+} = \mathbb{S}_*^+(\varepsilon_-) \circ \eta_{\mathbb{S}_*^+(-)} : \mathbb{S}_*^+ \longrightarrow \mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ \longrightarrow \mathbb{S}_*^+ .$$

Insbesondere bilden die Funktoren $(\mathbb{S}_*^-, \mathbb{S}_*^+)$ ein adjungiertes Paar mit Einheit η und Koeinheit ε .

Beweis: 1) Konstruktion der natürlichen Transformationen: In folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_j M_* & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow (\varepsilon_X)_* \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_j M_* & \longrightarrow & X_* \end{array}$$

induziert die universelle Eigenschaft des Kokerns die gestrichelte Abbildung. Zusammen mit $(\varepsilon_X)_i := \text{id}_{X_i}$ für $i \neq *$ ergibt sich eine Transformation, die wegen der Eindeutigkeit durch die universelle Eigenschaft natürlich ist.

Analog induziert die universelle Eigenschaft des Kerns folgende Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} X_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_j M_* & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow (\eta_X)_* & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_j M_* & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- X)_* \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zusammen mit id_{X_i} lässt sich wieder eine natürliche Transformation bauen.

2) Nachweis der Eigenschaften: Ersetze zuerst X durch $\mathbb{S}_*^+(X)$ in dem Diagramm für η

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{S}_*^+ X)_* & \xrightarrow{\iota} & \bigoplus X_j \otimes_j M_* & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow (\eta_{\mathbb{S}_*^+(X)})_* & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes_j M_* & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Wende nun \mathbb{S}_*^+ auf ε_X an und füge das definierende Diagramm hinzu

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes_j M_i & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X)_* & \\
 \downarrow \mathbb{S}_*^+(\varepsilon_X)_* & & & \bigoplus \varepsilon_j \otimes \text{id} \parallel = \text{id} & & \downarrow (\varepsilon_X)_* & \\
 0 \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ X)_* & \xrightarrow{\iota} & \bigoplus X_j \otimes_j M_i & \longrightarrow & X_* &
 \end{array}$$

Die zweite Zeile des ersten und die erste Zeile des zweiten Diagramms sind gleich. Also ergibt sich zusammen ein großes kommutatives Diagramm. Da beide mit ι beschrifteten Inklusionen gleich sind, macht anstelle von $\mathbb{S}_*^+(\varepsilon_X)_* \circ (\eta_{\mathbb{S}_*^+(X)})_*$ auch $(\text{id}_{\mathbb{S}_*^+(X)})_*$ das große Diagramm kommutativ, sodass diese beiden nach der Eindeutigkeit der vom Kern induzierten Abbildung gleich sind. Daher ergibt sich insgesamt $\text{id}_{\mathbb{S}_*^+(X)} = \mathbb{S}_*^+(\varepsilon_X) \circ \eta_{\mathbb{S}_*^+(X)}$.

Analog ergibt sich folgendes Diagramm, welches $\text{id}_{\mathbb{S}_*^-(X)} = \varepsilon_{\mathbb{S}_*^-(X)} \circ$

$\mathbb{S}_*^-(\eta_X)$ zeigt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_* & \longrightarrow & \bigoplus X_i \otimes {}_i M_j & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow & 0 \\
 (\eta_X)_* \downarrow & & \bigoplus \eta_i \otimes \text{id} \parallel = \text{id} & & \downarrow \mathbb{S}_*^-(\eta_X)_* & & \\
 0 \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_i \otimes {}_i M_j & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow (\varepsilon_{\mathbb{S}_*^-(X)})_* & & \\
 0 \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^- X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_i \otimes {}_i M_j & \longrightarrow & (\mathbb{S}_*^- X)_* &
 \end{array}$$

✓

Lemma 2.58 [DR76, Lemma 2.5, p. 64]: Sei Γ eine Gattung und X eine Darstellung. Dann gelten:

- (Knoten $*$ $\in \Gamma$ eine Senke) $X \cong \mathbb{S}_*^-(\mathbb{S}_*^+(X)) \oplus P$, wobei $P \cong S_*^n$.
Ist X unzerlegbar, gilt also entweder $X \cong S_*$ oder $X \cong \mathbb{S}_*^-(\mathbb{S}_*^+(X))$.
- (Knoten $*$ $\in \Gamma$ eine Quelle) $X \cong \mathbb{S}_*^+(\mathbb{S}_*^-(X)) \oplus I$, wobei $I \cong S_*^n$.
Ist X unzerlegbar, gilt also entweder $X \cong S_*$ oder $X \cong \mathbb{S}_*^+(\mathbb{S}_*^-(X))$.

Definition 2.59: Ist $*$ eine Senke oder Quelle, so sei $\text{Rep}_*(\Gamma)$ die Unterkategorie von $\text{Rep}(\Gamma)$, deren Objekte die einfache Darstellung S_* nicht als direkten Summanden enthalten.

Bemerkung 2.60: Die Unterkategorie $\text{Rep}_*(\Gamma)$ ist additiv, aber nicht mehr abelsch. Betrachtet man Darstellungen des K6ochers $1 \rightarrow 2$ vom Typ A_2 , bilden die drei unzerlegbaren Darstellungen eine kurze, exakte Folge

$$0 \longrightarrow S_2 = P_2 \longrightarrow P_1 = I_2 \longrightarrow S_1 = I_1 \longrightarrow 0$$

Da einer der beiden einfachen in der Unterkategorie wegf6allt, ist diese nicht unter Kokernen bzw. Kernen abgeschlossen.

Bemerkung 2.61: Es gilt $\text{Ind}(\text{Rep}(\Gamma)) = \text{Ind}(\text{Rep}_*(\Gamma)) \cup \{S_*\}$.

Ist $*$ eine Senke, so ist $\text{Rep}_*(\Gamma) = \{X \in \text{Rep}(\Gamma) \mid \text{Hom}(X, S_*) = 0\}$.

Ist $*$ eine Quelle, so ist $\text{Rep}_*(\Gamma) = \{Y \in \text{Rep}(\Gamma) \mid \text{Hom}(S_*, Y) = 0\}$.

Lemma 2.62 [DR76, Proposition 2.6, p. 66]: Die Spiegelungsfunktoren bilden eine 6Aquivalenz geeigneter Unterkategorien (hier ist $*$ eine Senke):

$$\text{Rep}_*(\Gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{S_*^+} \\ \xleftarrow{S_*^-} \end{array} \text{Rep}_*(s_*\Gamma)$$

2.4 Coxeterfunktoren

Definition 2.63: Eine zul6assige Folge von Knoten $i_1, \dots, i_n \in \Gamma$ ist eine Bijektion auf der Knotenmenge, sodass f6ur alle $0 \leq j < n$ der Knoten i_{j+1} eine Senke in der Gattung $s_{i_j} \dots s_{i_1} \Gamma$ ist.

Bemerkung 2.64: Ist i_1, \dots, i_n eine zulässige Folge, so erfüllt i_n, \dots, i_1 die Eigenschaft, dass für alle $0 < j \leq n$ der Knoten i_{j-1} eine Quelle in der Gattung $s_{i_j} \dots s_{i_n} \Gamma$ ist.

Lemma 2.65: Es gibt genau dann eine zulässige Folge von Knoten, wenn die Gattung keine orientierten Kreise hat.

Definition 2.66: Sei Γ eine Gattung ohne orientierte Kreise und sei $1, \dots, n$ eine zulässige Folge von Knoten. Dann sind die *Coxeterfunktoren* \mathbb{C}^\pm definiert als

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^+ &:= \mathbb{S}_n^+ \circ \dots \circ \mathbb{S}_1^+ : \text{Rep}(\Gamma) \rightarrow \text{Rep}(\Gamma) \\ \mathbb{C}^- &:= \mathbb{S}_1^- \circ \dots \circ \mathbb{S}_n^- : \text{Rep}(\Gamma) \rightarrow \text{Rep}(\Gamma) \end{aligned}$$

Lemma 2.67 [D80, Lemma 2.9, p. 63]: Sei Γ eine Gattung ohne orientierte Kreise und X eine Darstellung.

- Es gilt $X \cong \mathbb{C}^-(\mathbb{C}^+(X)) \oplus P$, wobei P projektiv ist.
Ist X unzerlegbar, ist also entweder X projektiv oder $X \cong \mathbb{C}^-(\mathbb{C}^+(X))$.
- Es gilt $X \cong \mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-(X)) \oplus I$, wobei I injektiv ist.
Ist X unzerlegbar, ist also entweder X injektiv oder $X \cong \mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-(X))$.

Lemma 2.68 [D80, Proposition 2.10, p.71]: Die Coxeterfunktoren bilden Äquivalenzen geeigneter Unterkategorien

$$\text{Rep}_{proj}(\Gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{C}^+} \\ \xleftarrow{\mathbb{C}^-} \end{array} \text{Rep}_{inj}(\Gamma) ,$$

wobei $\text{Rep}_{proj}(\Gamma)$ bzw. $\text{Rep}_{inj}(\Gamma)$ die Unterkategorie aller Darstellungen ohne projektiven bzw. ohne injektiven Summanden bezeichnet.

Definition 2.69: Eine unzerlegbare Darstellung X heißt *präprojektiv*, falls $\mathbb{C}^n(X) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{C}^n := (\mathbb{C}^+)^n$. Sie heißt *präinjektiv*, falls $\mathbb{C}^{-n}(X) = 0$, wobei $\mathbb{C}^{-n} := (\mathbb{C}^-)^n$. Andernfalls nennt man X *regulär* und es gilt $\mathbb{C}^n(x) \cong X$ für ein $n \in \mathbb{N}^+$.

Bezeichne mit \mathcal{P} , \mathcal{I} bzw. \mathcal{R} die Unterkategorien bestehend auf direkten Summen präprojektiver, präinjektiver bzw. regulärer Objekte.

Lemma 2.70 [D80, Proposition 1.11, p.49]: Sei Γ ein Euklidischer Graph und c ein Coxeterelement, dann gelten:

- Eine unzerlegbare Darstellung ist genau dann präprojektiv, wenn sie negativen Defekt hat.
- Eine unzerlegbare Darstellung ist genau dann regulär, wenn ihr Defekt verschwindet.
- Eine unzerlegbare Darstellung ist genau dann präinjektiv, wenn sie positiven Defekt hat.

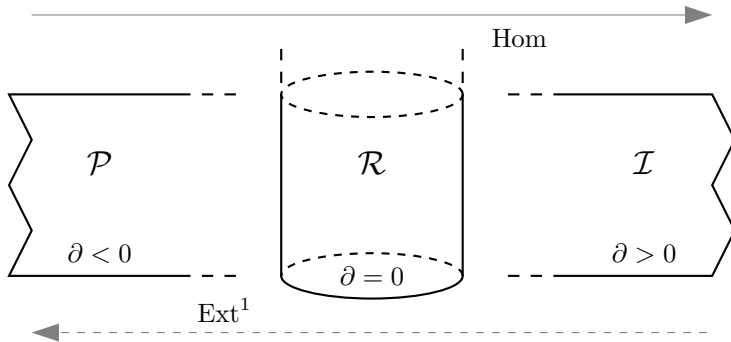
Lemma 2.71 [S09, Proposition 3.31, p.48]: Die Kategorien \mathcal{P} und \mathcal{I} sind exakt und unter Erweiterungen abgeschlossen. Die Kategorie \mathcal{R} ist abelsch und unter Erweiterungen abgeschlossen.

Sind $P \in \mathcal{P}$, $R \in \mathcal{R}$ und $I \in \mathcal{I}$ gelten zusätzlich:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(I, P) &= \text{Hom}(I, R) = \text{Hom}(R, P) = \{0\} \\ \text{Ext}^1(P, I) &= \text{Ext}^1(R, I) = \text{Ext}^1(P, R) = \{0\} \end{aligned}$$

Die Aussagen sind auch als [D80, Lemma 2.13, p.75] und [D80, Proposition 4.2, p. 93] zu finden.

Bemerkung 2.72: Die obigen Lemmata ergeben folgendes, schematisches Bild der unzerlegbaren Darstellungen einer zahmen Gattung:



Dabei befinden sich die injektiven Darstellungen $\{I_i\}_{i \in \Gamma}$ ganz rechts in \mathcal{I} und nach links folgenden die Darstellungen $\{\mathbb{C}^n(I_i) \mid n \in \mathbb{N}^+\}_{i \in \Gamma}$. Dual befinden sich ganz links in \mathcal{P} die projektiven Darstellungen $\{P_i\}_{i \in \Gamma}$ und rechts von diesen die Darstellungen $\{\mathbb{C}^{-n}(P_i) \mid n \in \mathbb{N}^+\}_{i \in \Gamma}$. In der Mitte befinden sich die regulären Darstellungen, welche unendlich hohe Röhren bilden.

Kapitel 3

Kompositionsalgebra zahmer Gattungen

Das finale Kapitel beschäftigt sich mit der Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ einer zahmen Gattung Γ , wobei zuerst Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm konstruiert und dann mit deren Hilfe Elemente der Kompositionsalgebra identifiziert werden.

Der Abschnitt über abgeleitete Spiegelungsfunktoren führt anfangs noch einige weitere Eigenschaften über Spiegelungsfunktoren aus, so induzieren diese z.B. Bijektionen

$$\mathrm{Ext}^1(X'', X') \longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}_*^\pm(X''), \mathcal{S}_*^\pm(X'))$$

für bestimmte Darstellungen X' und X'' der Gattung Γ . Als erstes Resultat dieser Dissertation wird gezeigt, dass die abgeleiteten Spiegelungsfunktoren quasiinverse Äquivalenzen bilden.

Diese Äquivalenzen induzieren nach dem Satz von Cramer 1.56 Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm zwischen den reduzierten Drinfelddoppeln. Es konnte gezeigt werden, dass sich diese für Gattungen mit Gewichten der Form $(1, n)$, $(n, 1)$ oder (t, t) - insbesondere also für alle zahmen Gattungen - zu Isomorphismen zwischen den Drinfelddoppeln der Kompositionsalgebren einschränken lassen. Mithilfe des Isomorphismus zwischen dem Drinfelddoppel $\mathcal{DC}(\Gamma)$ und der Quantengruppe $U_v(\mathfrak{g}_{C_\Gamma})$ erhält man also Isomorphismen der Quantengruppe. Explizite Rechnungen zeigen dabei, dass \mathcal{S}_*^\pm mit den von Lusztig [L94, Chapter 37] beschriebenen Isomorphismen übereinstimmen.

In voller Allgemeinheit konnte im dritten Abschnitt gezeigt werden, dass die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ beliebiger zahmer Gattungen Γ alle präprojektiven Darstellungen, alle präinjektiven Darstellungen sowie die Summen regulärer Objekte $\tilde{\mathbb{I}}_{r\delta}$ mit Dimensionsvektor $r\delta$ enthält. Hierbei ist $r \in \mathbb{N}$ und δ die imaginäre Wurzel. Für Gattungen von endlichem Darstellungstyp lässt sich ebenfalls zeigen, dass alle präprojektiven und präinjektiven Darstellungen in der Kompositionsalgebra enthalten sind, d.h. dass diese mit der ganzen Hallalgebra übereinstimmt.

Im letzten Abschnitt wird ein Teil des Programms von [BS12] über den Kroneckerköcher Q für die Gattung Γ vom Typ \tilde{A}_1^2 durchgeführt. Burban und Schiffmann konnten zeigen, dass Produkte der Elemente aus dem dritten Abschnitt eine Basis der Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(Q)$ bilden. Statt dies direkt zu zeigen, wurden kohärente Garben auf \mathbb{P}^1 betrachtet und eine Kompositionsalgebra in der Hallalgebra $\mathcal{H}(\text{Coh}(\mathbb{P}^1))$ definiert, deren Basis bereits aus früheren Arbeiten bekannt war. In Vorberei-

zung auf die Definition einer geeigneten geometrischem Kurve für die Gattung Γ wurde die Kategorie $\text{Rep}(\Gamma) = \mathcal{P} \vee \mathcal{R} \vee \mathcal{I}$ wie in [HRS96] beschrieben mittels Kipptheorie in die Form $\mathcal{I}[-1] \vee \mathcal{P} \vee \mathcal{R}$ gebracht, welche wie beim Kroneckerköcher das übliche Bild von Geradenbündeln und Torsionsgarben nachstellt.

3.1 Abgeleitete Spiegelungsfunktoren

Lemma 3.1: $\text{Rep}_*(\Gamma)$ ist unter Erweiterungen abgeschlossen.

Beweis: Ist $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ exakt und gilt $\text{Hom}(X', S_*) = 0 = \text{Hom}(X'', S_*)$, so folgt nach der Halbexaktheit von $\text{Hom}(-, S_*)$ auch $\text{Hom}(X, S_*) = 0$

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(X', S_*) \longleftarrow \text{Hom}(X, S_*) \longleftarrow \text{Hom}(X'', S_*) \quad .$$

✓

Lemma 3.2: Die eingeschränkten Funktoren $\mathbb{S}_*^\pm : \text{Rep}_*(\Gamma) \rightarrow \text{Rep}_*(s_*\Gamma)$ sind exakt (wobei $*$ eine Senke bzw. eine Quelle sei), d.h. ist

$$\eta : \quad 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\pi} X'' \longrightarrow 0$$

eine kurze, exakte Folge in $\text{Rep}(\Gamma)$, sodass sich alle beteiligten Darstellungen X', X, X'' bereits in $\text{Rep}_*(\Gamma)$ befinden, dann ist auch die Folge

$$\mathbb{S}_*^+(\eta) : \quad 0 \rightarrow \mathbb{S}_*^+(X') \xrightarrow{\mathbb{S}_*^+(\iota)} \mathbb{S}_*^+(X) \xrightarrow{\mathbb{S}_*^+(\pi)} \mathbb{S}_*^+(X'') \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Das folgende Diagramm entstammt der Definition für \mathbb{S}_*^+ angewendet auf ι und π , wobei die Zeilen jeweils exakt sind, weil die einfache Darstellung S_* nicht als Summand auftaucht:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^+(X')_* & \longrightarrow & \bigoplus X'_j \otimes {}_jM_* & \longrightarrow & X'_* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \mathbb{S}_*^+(\iota)_k & & \downarrow \bigoplus \iota_j \otimes \text{id} & & \downarrow \iota_* \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^+(X)_* & \longrightarrow & \bigoplus X_j \otimes {}_jM_* & \longrightarrow & X_* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \mathbb{S}_*^+(\pi)_* & & \downarrow \bigoplus \pi_j \otimes \text{id} & & \downarrow \pi_* \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^+(X'')_* & \longrightarrow & \bigoplus X''_j \otimes {}_jM_* & \longrightarrow & X''_* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Die letzte und mittlere Spalte sind beide nach Voraussetzung exakt (Als Bimodul über Schiefkörper sind alle ${}_jM_i$ frei, insbesondere also flach). Dank des 3x3-Lemmas folgt daher, dass auch die erste Spalte exakt ist. Da die Abbildungen ι und π nur am Knoten $*$ geändert werden, folgt die Behauptung.

Ist $* \in \Gamma$ eine Quelle, erhält man ein analoges Diagramm mit erneut exakten Zeilen, da S_* nicht als Unterdarstellung auftaucht. ✓

Lemma 3.3: In $\text{Rep}_*(\Gamma)$ induzieren \mathbb{S}_*^\pm Bijektionen der Ext^1 -Gruppen:

$$\forall X', X'' \in \text{Rep}_*(\Gamma) : \text{Ext}^1(X'', X') \leftrightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{S}_*^\pm(X''), \mathbb{S}_*^\pm(X')) .$$

Beweis: Sei $*$ eine Senke, $X', X'' \in \text{Rep}_*(\Gamma)$ und $\eta \in \text{Ext}^1(X'', X')$ eine kurze, exakte Folge

$$\eta : 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0 .$$

Da $\text{Rep}_*(\Gamma)$ unter Erweiterungen abgeschlossen ist, erhält man $X \in \text{Rep}_*(\Gamma)$, also ist η eine kurze, exakte Folge in $\text{Rep}_*(\Gamma)$. Da \mathbb{S}_*^+ auf $\text{Rep}_*(\Gamma)$ exakt ist und auch $\text{Rep}_*(s_*\Gamma)$ unter Erweiterungen abgeschlossen ist, ist $\mathbb{S}_*^+(\eta) \in \text{Ext}^1(\mathbb{S}_*^\pm(X''), \mathbb{S}_*^\pm(X'))$ eine kurze, exakte Folge in $\text{Rep}_*(s_*\Gamma)$. Anwenden von \mathbb{S}_*^- liefert aus gleichen Gründen eine kurze, exakte Folge wieder in $\text{Rep}_*(\Gamma)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \cong \eta_{X'} & & \uparrow \cong \eta_X & & \uparrow \cong \eta_{X''} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X' & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X & \longrightarrow & \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+ X'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Koeinheit liefert einen Isomorphismus der kurzen, exakten Folgen $\eta \cong \mathbb{S}_*^- \mathbb{S}_*^+(\eta)$, weil S_* kein direkter Summand ist. Ist $\xi \in \text{Ext}^1(\mathbb{S}_*^\pm(X''), \mathbb{S}_*^\pm(X'))$ eine kurze, exakte Folge, erhält man $\xi \cong \mathbb{S}_*^+ \mathbb{S}_*^-(\xi)$ mit analogen Argumenten, sodass \mathbb{S}_*^+ und \mathbb{S}_*^- inverse Abbildungen zwischen den beiden Mengen $\text{Ext}^1(X'', X')$ und $\text{Ext}^1(\mathbb{S}_*^\pm(X''), \mathbb{S}_*^\pm(X'))$ bilden.

Ist $*$ eine Quelle, vertauscht man \mathbb{S}_*^+ mit \mathbb{S}_*^- und Koeinheit mit Einheit. ✓

Lemma 3.4 [K04, Proposition, Chapter 3, p.11]: Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien und $\mathbb{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Hat \mathcal{A} genügend injektive Objekte und ist $M^\bullet \in \text{Chain}^b(\mathcal{A})$ ein (nach links) beschränkter Kettenkomplex. Dann existiert der rechtsabgeleitete Funktor $\mathbb{R}\mathbb{F} : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ für M^\bullet und es gilt

$$\mathbb{R}\mathbb{F}(M^\bullet) = \mathbb{F}(I^\bullet),$$

wobei $M^\bullet \rightarrow I^\bullet$ ein Quasiisomorphismus zu einem (nach links) beschränkten Komplex I^\bullet mit injektiven Objekt ist.

Beispiel 3.5: Als Erinnerung an abgeleitete Funktoren soll für eine Gattung Γ an einer Quelle $*$ die (injektive) einfache Darstellung S_* mittels LS_*^- gespiegelt werden. Als projektive Auflösung wurde bereits

$$P^\bullet : \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{* \rightarrow j} {}_j M_j \otimes_{F_j} P_j \longrightarrow P_* \longrightarrow S_* \longrightarrow 0$$

berechnet. Spiegelt man zuerst den linken Term mit \mathbb{S}_*^- : Da $*$ eine Quelle ist, besitzt die linke Darstellung am Knoten $*$ einen 0-dimensionalen Vektorraum und die Kokernkonstruktion für \mathbb{S}_*^- am Knoten $*$ vereinfacht sich zu $\bigoplus_{* \rightarrow i} (\bigoplus_{* \rightarrow j} {}_j M_j \otimes P_j)_i \otimes_i M_*$. Spiegelt man P_* , so erhält man am Knoten $*$ den Vektorraum $\text{coker}(F_* \hookrightarrow \bigoplus_{* \rightarrow i} (P_*)_i \otimes_i M_*)$. Als Bild $\mathbb{S}_*^-(P^\bullet)$ ergibt sich der Kettenkomplex

$$\bigoplus_{* \rightarrow i} \left(\bigoplus_{* \rightarrow j} {}_j M_j \otimes P_j \right)_i \otimes_i M_* \rightarrow \text{coker} \left(F_* \hookrightarrow \bigoplus_{* \rightarrow i} (P_*)_i \otimes_i M_* \right) \rightarrow 0$$

Dieser Kettenkomplex ist etwas unhandlich, kann aber mit Hilfe des Lemmas 1.35 vereinfacht werden: Da die kurze, exakte Folge P^\bullet eine Gleichung in der Grothendieckgruppe liefert, gilt $(P_*)_i = (\bigoplus_{* \rightarrow j} {}^*M_j \otimes P_j)_i$. Als linksadjungierter Funktor ist \mathbb{S}_*^- rechtsexakt, also ist $\mathbb{S}_*^-(P^\bullet)$ im mittleren und rechten Term exakt, d.h. alle beteiligten Abbildungen surjektiv. Damit folgt $H^0(\mathbb{S}_*^-(P^\bullet)) = 0$ und aus Dimensionsgründen auch $H^{-1}(\mathbb{S}_*^-(P^\bullet)) = S_*$. Insgesamt ergibt sich also $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-(S_*[0]) \cong S_*[1] \in \mathcal{D}^b(s_*\Gamma)$.

Bemerkung 3.6: Obiges Beispiel gilt in dualer Weise für eine Senke $*$, dessen einfacher S_* durch den abgeleiteten Funktor $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$ in die andere Richtung auf $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_*[0]) \cong S_*[-1]$ verschoben wird.

Lemma 3.7 [B78]: Seien \mathcal{T} und \mathcal{S} triangulierte Kategorien, $\mathbb{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ ein exakter Funktor und $\{X_i\}$ eine Familie von Objekten in \mathcal{T} . Wenn \mathcal{T} von $\{X_i\}$ und \mathcal{S} von $\{\mathbb{F}(X_i)\}$ erzeugt ist und $\mathbb{F} : \text{Hom}_{\mathcal{T}}^\bullet(X_i, X_j) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}}^\bullet(\mathbb{F}(X_i), \mathbb{F}(X_j))$ ein Isomorphismus ist, dann ist \mathbb{F} eine Äquivalenz von Kategorien.

Theorem 3.8: Spiegelungsfunktoren induzieren Äquivalenzen auf den beschränkten, abgeleiteten Kategorien (hier ist $*$ eine Senke).

$$\mathcal{D}^b(\Gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+} \\ \xleftarrow{\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-} \end{array} \mathcal{D}^b(s_*\Gamma)$$

Beweis: Sei $*$ eine Senke (für eine Quelle erhält man einen analogen Beweis mit vertauschten Rollen von \mathbb{S}_*^+ und \mathbb{S}_*^-). Dem

Lemma von Beilinson folgend, sollen alle Voraussetzungen für $\{S_i[0] \mid i \in \Gamma\}$ gezeigt werden.

1) Zeige zuerst, dass diese Elemente ganz $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ erzeugen:
 Die Kategorie $\text{Rep}(\Gamma)$ erlaubt Kompositionsreihen $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n$, deren kurze, exakte Folgen $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+1}/M_i \longrightarrow 0$ Dreiecke in $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ liefern. Da alle einfachen Objekte und damit alle M_{i+1}/M_i enthalten sind, sind es per Induktion auch alle M_i . Somit sind alle Objekte $M_n[0]$ enthalten, was (bis auf Verschiebung) wegen Lemma 1.35 bereits genügt.

2) Berechne als nächstes die Bilder der Erzeuger unter $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$:
 Für S_* wurde $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_*[0]) \cong S_*[-1]$ bereits berechnet. Betrachte für $i \neq *$ nun eine injektive Auflösung $\eta : S_i \rightarrow I^\bullet$. Da der einfache S_* nicht injektiv ist, befindet sich die ganze Auflösung in der Unterkategorie $\text{Rep}_*(\Gamma)$. Die Auflösung η ist allerdings eine kurze, exakte Folge, weil $\text{Rep}(\Gamma)$ erblich ist, sodass $\mathbb{S}_*^+(\eta) : \mathbb{S}_*^+(S_i) \rightarrow \mathbb{S}_*^+(I^\bullet)$ nach Lemma 3.2 wieder exakt ist. Entsprechend besitzt $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_i[0]) = \mathbb{S}_*^+(I^\bullet)$ genau eine nicht-triviale Kohomologie und es gilt $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_i[0]) \cong H^0(\mathbb{S}_*^+(I^\bullet))[0] \cong \mathbb{S}_*^+(S_i)[0]$.

3) Zeige, dass die Bilder $\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)$ erzeugen:
 Da der eingeschränkte Funktor $\mathbb{S}_*^+ : \text{Rep}_*(\Gamma) \rightarrow \text{Rep}_*(s_*\Gamma)$ eine Äquivalenz ist und $\{S_i \mid i \neq *\}$ ein Erzeugendensystem von $\text{Rep}(\Gamma)$ bildet, ist $\{\mathbb{S}_*^+(S_i) \mid i \neq *\}$ ein Erzeugendensystem für $\text{Rep}_*(s_*\Gamma)$. Zusammen mit $S_*[-1]$ werden alle einfachen (bis auf Verschiebung) erzeugt und somit bereits ganz $\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)$.

4) Als letzter Schritt ist zu zeigen, dass

$$\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+ : \text{Hom}^\bullet(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(X), \mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(Y))$$

für Erzeuger X, Y ein Isomorphismus ist:

Beide beteiligten Kategorien $\text{Rep}(\Gamma)$ und $\text{Rep}(s_*\Gamma)$ sind erblich, sodass $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$ auf Grad 0 und 1 konzentriert ist. Alle beteiligten Objekte (bis auf S_*) befinden sich in der Unterkategorien $\text{Rep}_*(\Gamma)$, auf der \mathbb{S}_*^+ bereits volltreu wirkt und Bijektionen auf den Erweiterungsgruppen induziert. Für das Paar (X, Y) bleiben also noch die drei Fälle zu prüfen, in denen $X = S_*[0] = Y$ oder nur $X = S_*[0]$ bzw. $Y = S_*[0]$ gilt. In diesen drei Fällen wird die Behauptung einzeln nachgewiesen:

$$\begin{aligned}
 i) \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Gamma)}(S_*[0], S_*[0]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)}(S_*[-1], S_*[-1]) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Gamma)}(S_*[0], S_*[1]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)}(S_*[-1], S_*[0])
 \end{aligned}$$

Beide Räume der ersten Zeile sind über dem Körper F_* von der Identität id_{S_*} erzeugt, welche durch Funktoren generell ineinander überführt werden. Die Räume in der zweiten Zeile sind isomorph zu Ext^1 und somit trivial, da S_* auf der linken Seite in $\text{Rep}(\Gamma)$ projektiv bzw. auf der rechten Seite in $\text{Rep}(s_*\Gamma)$ injektiv ist.

$$\begin{aligned}
 ii) \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Gamma)}(S_i[0], S_*[0]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)}(\mathbb{S}_*^+(S_i)[0], S_*[-1]) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Gamma)}(S_i[0], S_*[1]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(s_*\Gamma)}(\mathbb{S}_*^+(S_i)[0], S_*[0])
 \end{aligned}$$

Die linke Seite der ersten Zeile ist offensichtlich trivial und die rechte Seite isomorph zu $\text{Ext}^{-1}(\mathbb{S}_*^+(S_i), S_*) = 0$. Die Räume der zweiten Zeile lassen sich durch folgende Diagramme beschreiben:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F_* & \xrightarrow{\cong} & X_* & \longrightarrow & 0 & & {}_iM_* & \xrightarrow{\psi_*} & F_* \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & | & & | & \text{*\varphi}_i & | & & | & & | \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X_i & \xrightarrow{\cong} & F_i & \longrightarrow & 0 & & F_i & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

In der zweiten Zeile sind links beliebige Erweiterungen möglich und durch eine lineare Abbildung ${}_*\varphi_i : F_i \otimes {}_iM_* \rightarrow F_*$ gegeben. Auf der rechten Seite sind beliebige lineare Abbildungen $\psi_* : {}_iM_* \rightarrow F_*$ möglich, sodass beide Räume die gleiche Dimension haben. Also genügt es zu zeigen, dass die \mathbb{F}_q -lineare Abbildung injektiv ist, was aus Gründen der Lesbarkeit in das nachfolgende Lemma ausgelagert wurde.

$$\begin{aligned} iii) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}^b(\Gamma)}(S_*[0], S_i[0]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}^b(s_*\Gamma)}(S_*[-1], \mathbb{S}_*^+(S_i)[0]) \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}^b(\Gamma)}(S_*[0], S_i[1]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}^b(s_*\Gamma)}(S_*[-1], \mathbb{S}_*^+(S_i)[1]) \end{aligned}$$

Die linke Seite der ersten Zeile ist offensichtlich trivial und die rechte Seite isomorph zu $\text{Ext}^1(S_*, \mathbb{S}_*^+(S_i))$, dessen Dimension sich mit der Formel aus Lemma 2.50 berechnen lässt. Mit $X = S_*$ und $Y = \mathbb{S}_*^+(S_i)$ ergibt sich $\langle \underline{\dim}(X), \underline{\dim}(Y) \rangle = f_*x_*y_* + f_ix_iy_i - d_{*i}f_ix_*y_i = f_*d_{i*} + 0 - d_{*i}f_i = 0$. Es genügt also, $\text{Hom}(S_*, \mathbb{S}_*^+(S_i)) = 0$ zu zeigen. Da die Auswertungsabbildung nicht ausgeartet ist, erzwingt die Kommutativität des folgenden Quadrates bereits $\psi_* = 0$.

$$\begin{array}{ccc} F_* & \xrightarrow{\quad} & {}_iM_* \\ | & \psi_* & | \\ | & & | m \otimes f \mapsto f(m) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_i \end{array}$$

Der linke Ext^1 -Raum der zweiten Zeile im Fall *iii*) ist wegen der Projektivität des Moduls S_* trivial und die rechte Seite zu $\text{Ext}^2(S_*, \mathbb{S}_*^+(S_i)) = 0$ isomorph. ✓

Bemerkung 3.9: Dem Beweis entnimmt man die Aussage $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(X[0]) \cong \mathbb{S}_*^+(X)[0]$ für Darstellungen $X \in \text{Rep}_*(\Gamma)$ (analog für $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-$), sodass sich

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\mathbb{S}_*^-(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(X[0])) &\cong \mathbb{L}\mathbb{S}_*^-(\mathbb{S}_*^+(X)[0]) \\ &\cong \mathbb{S}_*^-\mathbb{S}_*^+(X)[0] \\ &\cong X[0] \end{aligned}$$

ergibt. Ähnlich erhält man $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_*[0])) \cong \mathbb{L}\mathbb{S}_*^-(S_*[-1]) \cong S_*[0]$ bzw. analoge Aussagen bei vertauschter Reihenfolge von $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-$ und $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$.

Alles in allem sieht man also, dass die Funktoren $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-$ und $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$ quasiinvers zueinander sind.

Lemma 3.10: Die von $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$ induzierte Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}^b(\Gamma)}(S_i[0], S_*[1]) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}^b(s_*\Gamma)}(\mathbb{S}_*^+(S_i)[0], S_*[0])$$

ist injektiv.

Beweis: Da die Abbildung \mathbb{F}_q -linear ist, genügt es zu zeigen, dass der Kern trivial ist. Dies geschieht, indem $0 \neq f^\bullet \in \text{Hom}(S_i[0], S_*[1])$ angenommen und $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet) \neq 0$ bewiesen wird: Mit dem Abbildungskegel $\text{Cone}(f^\bullet)$ ergibt sich ein Dreieck

$$S_i[0] \xrightarrow{f^\bullet} S_*[1] \longrightarrow \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{+1} ,$$

welches geshiftet wie folgt aussieht

$$S_*[0] \longrightarrow \text{Cone}(f^\bullet)[-1] \longrightarrow S_i[0] \xrightarrow{f^\bullet} .$$

Hierbei konzentrieren sich $S_*[0]$ und $S_i[0]$ im Grad 0, sodass dies auch auf $\text{Cone}(f^\bullet)[-1]$ zutrifft und sich mit $E := H^0(\text{Cone}(f^\bullet)[-1])$ eine kurze, exakte Folge ergibt:

$$0 \longrightarrow S_* \longrightarrow E \xrightarrow{\beta} S_i \longrightarrow 0 .$$

Dabei sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Es gilt $f^\bullet = 0$.
- Es gibt einen Spalt $s : S_i \rightarrow E$, d.h. es gilt $\beta \circ s = \text{id}_{S_i}$.
- Es gilt $E \cong S_i \oplus S_*$.

Nach Voraussetzung sind alle drei Aussagen falsch und somit gilt $E \in \text{Rep}_*(\Gamma)$. Wende nun $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$ auf das geshiftete Dreieck an und erhalte

$$\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_*[0]) \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(E[0]) \xrightarrow{\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(\beta)} \mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_i[0]) \xrightarrow[\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet)]{+1} .$$

Die vorhandenen Kettenkomplexe wurden dabei bereits genauer bestimmt, sodass man folgendes, kommutative Diagramm erhält

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(E[0]) & \xrightarrow{\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(\beta^\bullet)} & \mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(S_i[0]) \xrightarrow[\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet)]{+1} \longrightarrow \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{S}_*^+(E)[0] & \xrightarrow{H^0(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet))} & \mathbb{S}_*^+(S_i)[0] \end{array} .$$

In obigem Diagramm sind alle Räume X im Grad 0 konzentriert. Also gibt es natürliche Isomorphismen $X \longrightarrow \tau^{\geq 0}(X) \longleftarrow$

$\tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0}(X) = H^0(X)$, deren „Verkettung“ die vertikalen Pfeile des Diagramms beschreibt. Daher gilt auch $H^0(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet)) = H^0(\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet))^0 = \mathbb{S}_*^+(\beta) \in \text{Hom}(\mathbb{S}_*^+(E), \mathbb{S}_*^+(S_i))$.

Der Funktor \mathbb{S}_*^+ ist als Äquivalenz insbesondere volltreu auf $\text{Rep}_*(\Gamma)$. Der Morphismus $\beta \in \text{Hom}(E, S_i)$ besitzt keinen Spalt, also besitzt $\mathbb{S}_*^+(\beta)$ ebenfalls keinen Spalt. Wegen der Kommutativität obigen Diagramms besitzt $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(\beta^\bullet)$ ebenfalls keinen Spalt. Damit ist schlussendlich $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(f^\bullet) \neq 0$. \checkmark

3.2 Spiegelungsfunktoren und Kompositionsalgebren

Bemerkung 3.11: Im letzten Abschnitt wurde bewiesen, dass die abgeleiteten Funktoren $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+$ und $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-$ Äquivalenzen der abgeleiteten Kategorien bilden. Nach dem Satz von Cramer (Theorem 1.56) induzieren diese Isomorphismen der reduzierten Drinfeldoppel der entsprechenden Hallalgebren

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}\mathcal{H}(\Gamma) & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_*^+} \\ \xleftarrow{s_*^-} \end{array} & \mathcal{D}\mathcal{H}(s_*\Gamma) \\
 \subseteq \uparrow & & \uparrow \subseteq \\
 \mathcal{D}\mathcal{C}(\Gamma) & \begin{array}{c} \longleftarrow \dots \longrightarrow \end{array} & \mathcal{D}\mathcal{C}(s_*\Gamma)
 \end{array}$$

Ziel dieses Abschnittes ist es nachzuweisen, dass sich die Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm auf die Drinfeldoppel der Kompositionsalgebren einschränken lassen. Dies ist für alle Gattungen mit Gewichten

der Form $(1, n)$, $(n, 1)$ oder (t, t) gelungen, also insbesondere für alle Dynkingraphen und Euklidischen Graphen.

Die Drinfeldoppel der Kompositionsalgebren sind isomorph zur Quantengruppe, sodass ein Vergleich zu Lusztigschen Symmetrien möglich wird.

Bemerkung 3.12: Die Kompositionsalgebren sind von den einfachen Darstellungen $S_i \in \text{Rep}(\Gamma)$ und der Gruppenalgebra der Grothedieckgruppe erzeugt. Hierbei ist zu beachten, dass Elemente der Gruppenalgebra der Grothedieckgruppe nach Definition wieder auf diese abgebildet werden. Insofern genügt es, die Bilder $\mathcal{S}_*^\pm(S_i)$ als Produkte der einfachen Darstellungen $S_j \in \text{Rep}(s_*\Gamma)$ zu schreiben. Dies soll als erster Schritt für die abgeleiteten Spiegelungsfunktoren $\mathbb{R}\mathcal{S}_*^+$ und $\mathbb{L}\mathcal{S}_*^-$ getan werden.

Bemerkung 3.13: Wie in den Beispielen 2.55 und 2.56 bereits für $\mathbb{S}_*^\pm(S_i)$ zu sehen war, sind lediglich die Gewichte (d_{i*}, d_{*i}) von Bedeutung, sodass der gesamte restliche gewichtete Graph keine Rolle spielt. Ist Γ eine Gattung und bezeichnet $\Gamma_{\{i,*\}}$ den vollen Untergraphen mit Knotenmenge $\{*, i\}$, kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Rep}(\Gamma_{\{i,*\}}) & \xrightarrow{\mathbb{S}_*^\pm} & \text{Rep}(s_*\Gamma_{\{i,*\}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Rep}(\Gamma) & \xrightarrow{\mathbb{S}_*^\pm} & \text{Rep}(s_*\Gamma)
 \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile bezeichnen dabei die Einbettung. Daher genügt es, einfache Darstellungen einer Gattung bestehend aus

zwei Knoten $\{1, 2\}$ mit den Gewichten (d_{12}, d_{21}) zu betrachten.

Bemerkung 3.14: Den Auflistungen 2.36 und 2.37 ist zu entnehmen, dass die Kanten der Dynkingraphen und Euklidischer Graphen (bei fixierter Orientierung) alle Gewichte der Form $(1, n)$, $(n, 1)$ oder (t, t) tragen, welche es zu betrachten genügt.

Lemma 3.15: Der Dualisierungsfunktor

$$\mathrm{Hom}_k(-, k) : \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda^{op}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien. Für eine Gattung entsteht $\Lambda(\Gamma)^{op}$ aus $\Lambda(\Gamma)$ durch Umdrehen aller Pfeile, was sich vollkommen analog zu Köchern zeigen lässt.

Bemerkung 3.16: Dank des Dualisierungsfunktors genügt es, einen der beiden Fälle $(1, n)$ bzw. $(n, 1)$ zu betrachten. Wie sich später herausstellen wird, bietet der Fall (t, t) keine zusätzlichen Herausforderungen.

Beispiel 3.17: Betrachte die folgende Gattung Γ

$$1 \xrightarrow{(1, n)} 2$$

$$\mathbb{F}_p \xrightarrow{\mathbb{F}_{p^n}} \mathbb{F}_{p^n}$$

Hier müssen auf die beiden einfachen Darstellungen S_1 und S_2 jeweils die abgeleiteten Funktoren $\mathbb{R}\mathbb{S}_2^+$ und $\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-$ der möglichen Spiegelungen angewendet werden. Dies geschah bereits in den

Beispielen 2.55, 2.56, 3.5 und 3.6:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}_p \longrightarrow 0 & \xrightarrow{\mathbb{RS}_2^+} & \mathbb{F}_p \longleftarrow \mathbb{F}_{p^n} \\
 \\
 0 \longrightarrow \mathbb{F}_{p^n} & \xrightarrow{\mathbb{RS}_2^+} & (0 \longleftarrow \mathbb{F}_{p^n}) [1] \\
 \\
 \mathbb{F}_p \longrightarrow 0 & \xrightarrow{\mathbb{LS}_1^-} & (\mathbb{F}_p \longleftarrow 0) [-1] \\
 \\
 0 \longrightarrow \mathbb{F}_{p^n} & \xrightarrow{\mathbb{LS}_1^-} & \mathbb{F}_{p^n} \longleftarrow \mathbb{F}_{p^n}
 \end{array}$$

Schreibe zuerst $\mathbb{RS}_2^+(S_1) \in \mathcal{H}(s_2\Gamma)$ als Produkt von einfachen Darstellungen: Aus kombinatorischen Gründen ist eine Darstellung X zum Dimensionsvektor $\underline{\dim}(X) = (1, 1)$ entweder unzerlegbar oder es gilt $X \cong S_1 \oplus S_2$. Da das Gewicht $(1, n)$ den Kroneckerköcher ausschließt, ist $(1, 1)$ keine imaginäre Wurzel und die unzerlegbare Darstellung dieses Dimensionsvektors eindeutig, d.h. $X \cong \mathbb{RS}_2^+(S_1)$. In $\mathcal{H}(s_2\Gamma)$ gilt $[S_1] \cdot [S_2] = [S_1 \oplus S_2]$ und $[S_2] \cdot [S_1] = v^{-n}[S_1 \oplus S_2] + v^{-n}[\mathbb{RS}_2^+(S_1)]$, wie in Beispiel 2.20 berechnet, wobei sich der Vorfaktor v^{-n} mit Lemma 2.50 berechnen lässt. Zusammengesetzt ergibt sich also:

$$[\mathbb{RS}_2^+(S_1)] = v^n[S_2][S_1] - [S_1][S_2] \in \mathcal{H}(s_2\Gamma).$$

Für die Darstellung $\mathbb{LS}_1^-(S_2)$ ist beim Dimensionsvektor $(n, 1)$ auf den nächsten Seiten deutlich mehr Rechenaufwand zu be-

treiben, um folgende Darstellung zu erhalten:

$$[\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)] = \sum_{i+j=n} (-1)^j v^i [S_1]^{(j)} [S_2] [S_1]^{(i)} \in \mathcal{H}(s_1\Gamma) .$$

Beispiel 3.18: Um die Darstellung $\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)$ als Produkt von einfachen Darstellungen zu schreiben, finden im Folgenden alle Rechnungen in der Hallalgebra der gespielegelten Gattung $s_1\Gamma$ statt

$$1 \xleftarrow{(1,n)} 2$$

$$\mathbb{F}_p \xleftarrow{\mathbb{F}_{p^n}} \mathbb{F}_{p^n}$$

Bezeichne mit

$$\mathbb{1}_{(x,y)} = \sum_{\substack{X \in \text{Rep}(s_1\Gamma) \\ \dim(X) = (x,y)}} [X]$$

Als Euler-Form ergibt sich (vgl. Lemma 2.50)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i \in s_1\Gamma} [F_i : \mathbb{F}_p] x_i^2 - \sum_{j \rightarrow i} d_{ij} [F_i : \mathbb{F}_p] x_i y_j \\ &= x_1 y_1 + n x_2 y_2 - n x_2 y_1 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ziel der folgenden Rechnungen ist es, eine geeignete Linearkombinationen all jener Produkte einfacher Darstellungen $[S_1]^j [S_2] [S_1]^i$

zu finden, welche den Dimensionsvektor $\underline{\dim}(\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)) = (n, 1)$ haben.

Dazu werden diese Produkte zuerst berechnet.

Lemma 3.19: Es gilt $[S_1^{\oplus i}] \cdot [S_2] = [S_1^{\oplus i} \oplus S_2]$.

Beweis: Berechne zuerst den Vorfaktor

$$\langle \underline{\dim}(S_1^{\oplus i}), \underline{\dim}(S_2) \rangle = \begin{pmatrix} i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Betrachte nun mögliche Erweiterungen $M = (M_1, M_2, \varphi : M_2 \otimes F_{p^n} \rightarrow M_1)$, wobei die erste Zeile den Knoten 1 und die zweite Zeile den Knoten 2 beschreibt. Die vertikalen Pfeile beschreiben dabei keinesfalls eine Abbildungen zwischen Start- und Endvektorraum und sind zur Vermeidung dieser Verwechslung gestrichelt dargestellt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{F}_p^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & | & & | & & | & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_{p^n} & \xrightarrow{\cong} & M_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die horizontalen Abbildungen müssen aufgrund der Exaktheit Isomorphismen bzw. Nullabbildungen sein und die Kommutativität der angedeuteten Quadrate impliziert $0 = \varphi : M_2 \otimes F_{p^n} \rightarrow M_1$ und somit $M \cong S_1^{\oplus i} \oplus S_2$. Insbesondere hat die Darstellung M genau eine Unterdarstellung isomorph zu S_2 und der Quotient von M nach dieser Unterdarstellung ist automatisch

isomorph zu $S_1^{\oplus i}$. Es ergibt sich $F_{(S_1^{\oplus i}, S_2)}^M = 1$ unabhängig von M als Koeffizient in der Summe. ✓

Lemma 3.20: Bezeichne mit $\mathbb{1}_{(n,1)}(j)$ die Summe aller Darstellungen (M_1, M_2, φ) mit $j = \dim(\text{im}(\varphi))$. Für $0 \leq i \leq n$ gilt dann:

$$[S_1^{\oplus n-i} \oplus S_2] \cdot [S_1^{\oplus i}] = v^{-i^2} \sum_{j=0}^i |\text{Gr}(i-j, n-j)| \cdot \mathbb{1}_{(n,1)}(j)$$

Beweis: Berechne erneut zuerst den Vorfaktor

$$\begin{aligned} \langle \underline{\dim}(S_1^{\oplus n-i} \oplus S_2), \underline{\dim}(S_1^{\oplus i}) \rangle &= \begin{pmatrix} n-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -i^2. \end{aligned}$$

Betrachte nun kurze, exakte Folgen η mit einer mögliche Erweiterungen M , wobei wieder die erste Zeile den Knoten 1 und die zweite Zeile den Knoten 2 beschreibt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p^i & \xrightarrow{\iota} & M_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{F}_p^{n-i} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & | & & \varphi | & & | 0 \\ & & | & & | & & | \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{F}_{p^n} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Kommutativität des angedeuteten, rechten Quadrates erzwingt

$$0 = \pi \circ \varphi: M_2 \otimes \mathbb{F}_{p^n} \longrightarrow \mathbb{F}_p^{n-i}.$$

Also gilt $\text{im}(\varphi) \subseteq \ker(\pi) = \text{im}(\iota)$. Gegeben einen Untervektorraum $\text{im}(\varphi) \subseteq M_1$ treten genau die Erweiterungen η auf,

die $\text{im}(\varphi) \subseteq \text{im}(\iota)$ erfüllen. Zu zählen sind also $\dim(\text{im}(\iota))$ -dimensionale Untervektorräume, die zwischen einem gegebenen $\dim(\text{im}(\varphi))$ -dimensionalen Untervektorraum in einem $\dim(M_1)$ -dimensionalen Vektorraum liegen. Übergang zum Quotienten nach $\text{im}(\varphi)$ ergibt $|\text{Gr}(i-j, n-j)|$ als Koeffizienten, wobei hier $n = \dim(M_1)$, $i = \dim(\text{im}(\varphi))$ und $j = \dim(\text{im}(\varphi))$.

Für eine gegebene Erweiterung M hängt der Koeffizient $F_{S_1^{\oplus n-i} \oplus S_2, S_1^{\oplus i}}^M$ nur von $\dim(\text{im}(\varphi))$ ab, sodass diese zu einer Summe $\mathbb{1}_{(n,1)}(j)$ zusammen gefasst werden können. ✓

Bemerkung 3.21: Wie später gezeigt wird, gilt $\mathbb{1}_{(n,1)}(n) = [\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)]$, sodass das im folgenden Lemma beschriebene Gleichungssystem nach $\mathbb{1}_{(n,1)}(n)$ aufgelöst werden muss.

Lemma 3.22: Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$v^n [S_1]^{(n-i)} [S_2] [S_1]^{(i)} = \sum_{j=0}^i v^{(n-i)(n-j)} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix} \mathbb{1}_{(n,1)}(j) .$$

Beweis: Zusammensetzen aller bisheriger Formeln liefert das Gewünschte. Beachte dabei Lemma 1.47 und $\text{End}(S_i) = F_i$:

$$\begin{aligned} v^n [S_1]^{(n-i)} [S_2] [S_1]^{(i)} &= v^{n+(n-i)(n-i-1)+i(i-1)} [S_1^{n-i}] [S_2] [S_1^i] \\ &= v^{n^2-2in+2i^2} \cdot v^{-i^2} \sum_{j=0}^i |\text{Gr}(i-j, n-j)| \cdot \mathbb{1}_{(n,1)}(j) \\ &= v^{(n-i)^2} \sum_{j=0}^i v^{(n-i)(i-j)} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix} \cdot \mathbb{1}_{(n,1)}(j) . \end{aligned}$$

✓

Bemerkung 3.23: Als Matrix geschrieben ergibt sich

$$v^n \cdot \begin{pmatrix} [S_1]^{(n)}[S_2] \\ [S_1]^{(n-1)}[S_2][S_1] \\ \vdots \\ [S_2][S_1]^{(n)} \end{pmatrix} = A^{(n)} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(n,1)}(0) \\ \mathbb{1}_{(n,1)}(1) \\ \vdots \\ \mathbb{1}_{(n,1)}(n) \end{pmatrix},$$

wobei $A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})_{i,j=0}^n \in \text{Mat}_{n+1 \times n+1}(\mathbb{C})$ mit Einträgen

$$a_{ij}^{(n)} = v^{(n-i)(n-j)} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}.$$

Insbesondere gelten also $a_{ii}^{(n)} = v^{(n-i)^2}$ und $a_{ij}^{(n)} = 0$ falls $i < j$. Somit ist $A^{(n)}$ eine untere Dreiecksmatrix mit invertierbaren Diagonaleinträgen.

Bemerkung 3.24: Da hier nur der Ausdruck für $\mathbb{1}_{(n,1)}(n)$ gesucht wird, genügt es, die unterste Zeile der Inversen von $A^{(n)}$ zu berechnen. Betrachte dazu das Produkt „Inverse mal $A^{(n)}$ “

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= (A^{(n)})^{-1} \cdot A^{(n)} \\ &= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \xi_n^{(n)} & \dots & \xi_1^{(n)} & \xi_0^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00}^{(n)} \\ a_{10}^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n0}^{(n)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und berechne explizit den Eintrag $(i, j) = (n, 0)$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n a_{i0}^{(n)} \xi_{n-i}^{(n)} = a_{00}^{(n)} \xi_n^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_{i0}^{(n)} \xi_{n-i}^{(n)} \\ &= v^{n^2} \xi_n^{(n)} + \sum_{i=1}^n v^{n(n-i)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \xi_{n-i}^{(n)}. \end{aligned}$$

Auflösen nach $\xi_n^{(n)}$ ergibt

$$\xi_n^{(n)} = - \sum_{i=1}^n v^{-in} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \xi_{n-i}^{(n)},$$

wobei $n(n-i) - n^2 = -in$ im Exponenten.

Bemerkung 3.25: Gemäß der Definition von $A^{(n)}$ gilt

$$a_{i+1, j+1}^{(n+1)} = a_{ij}^{(n)}.$$

Also besteht die Matrix $A^{(n+1)}$ aus ihrer ersten Spalte (die erste Zeile wird mit 0 aufgefüllt) und der Matrix $A^{(n)}$ als unteren rechten „Block“.

Da es sich um eine Dreiecksmatrix handelt, ist das Vergessen der ersten Spalte und Zeile ein Algebrenmorphismus $\text{Mat}_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Insbesondere gleicht das Inverse von $A^{(n)}$ dem unteren rechten Block der Inversen von $A^{(n+1)}$, sodass sich die Einträge $\xi_i := \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n+1)}$ rekursiv berechnen lassen.

Lemma 3.26: Es gilt $\xi_n = (-1)^n v^{-n}$.

Beweis: Beweis per Induktion ($\xi_0 = 1$), Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 \xi_n &= - \sum_{i=1}^n v^{-in} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \xi_{n-i} \\
 &= - \sum_{i=1}^n v^{-in} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot (-1)^{n-i} v^{-(n-i)} \\
 &= (-1)^n v^{-n} \cdot \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v^{i-in} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v^{i-in} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = 1 .$$

Für $n = 1$ ergibt sich das Gewünschte, rechne noch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} v^{i-i(n+1)} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} \\
 = &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} v^{-in} \left(v^{n+1-i} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} + v^{-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \right) \\
 = &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} v^{-(i-1)(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i v^{-i(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \\
 = &\sum_{j=0}^n (-1)^j v^{-j(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i v^{-i(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j v^{-j(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n (-1)^i v^{-i(n+1)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} + 0 .$$

✓

Lemma 3.27: Setzt man alle Rechnungen zusammen, ergibt sich für $\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)$ folgendes:

$$[\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)] = \sum_{i+j=n} (-1)^j v^i [S_1]^{(j)} [S_2][S_1]^{(i)} .$$

Beweis: Für das Gleichungssystem aus Bemerkung 3.23 wurde die untere Zeile der Inversen von $A^{(n)}$ berechnet. Beachtet man $v^n \cdot v^{-j} = v^j$, ergibt sich die behauptete Darstellung für $\mathbb{1}_{(n,1)}(n)$, also genügt es, $\mathbb{1}_{(n,1)}(n) = [\mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)]$ zu zeigen:

Sei $[X]$ ein beliebiger Summand in $\mathbb{1}_{(n,1)}(n)$ und schreibe $X = Y \oplus Y'$ als direkte Summe. Sei ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $\dim(Y_2) = 1$, d.h. $X_2 = Y_2$. Da der Morphismus ${}_1\varphi_2 : X_2 \otimes_{\mathbb{F}_{p^n}} \rightarrow X_1$ surjektiv ist, gilt bereits $Y \cong X$ und somit $Y' = 0$, sodass X unzerlegbar ist. Der Dimensionsvektor $(n, 1)$ ist keine imaginäre Wurzel, also gibt es nur eine unzerlegbare Darstellung $X \cong \mathbb{L}\mathbb{S}_1^-(S_2)$ mit diesem Dimensionsvektor. ✓

Bemerkung 3.28: Die folgende Gattung beschreibt den t -Kroneckerköcher:

$$\bullet \xleftarrow{(t,t)} \bullet$$

Als Eulerform erhält man

$$\langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Diese taucht in obiger Beweisführung bei genau den zwei Berechnungen $[S_1^i] \cdot [S_2]$ und $[S_1^{n-i} \oplus S_2] \cdot [S_1^i]$ auf. Eine genauere Betrachtung ergibt, dass der untere, rechte Eintrag der Matrix keinen Beitrag zum Gesamtergebnis liefert. Da dies der einzige Unterschied zur Eulerform des obigen Beispiels ist, gilt der letzte Satz in gleicher Weise für den t -Kroneckerköcher.

Theorem 3.29: Die von den abgeleiteten Spiegelungsfunktoren induzierten Isomorphismen $\mathcal{S}_*^\pm : \mathcal{DH}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{DH}(s_*\Gamma)$ bilden für Dynkingraphen und Euklidische Graphen die Drinfeldoppel der Kompositionsalgebren $\mathcal{DC}(\Gamma)$ und $\mathcal{DC}(s_*\Gamma)$ ineinander ab.

Beweis: Wie in den Bemerkungen 3.12 bis 3.16 ausgeführt, genügt es, eine einzelne Kante mit Gewicht $(1, n)$ bzw. (t, t) zu betrachten. Die Wirkung der abgeleiteten Spiegelungsfunktoren wurde im Beispiel 3.17 aufgelistet. Die hier relevanten Spezialfälle des Isomorphismus \mathcal{S}_*^\pm wurden bereits im Beispiel 1.57 ausgeführt. Setzt man alle Bausteine zusammen, ergibt sich in der Notation aus Beispiel 3.17 folgende Vorschrift der Isomorphismen auf den Erzeugern von $\mathcal{DC}(\Gamma)$, deren Bilder alle in $\mathcal{DC}(s_*\Gamma)$ liegen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2^+(K_{S_1}) &= K_{S_1} K_{S_2} , \\ \mathcal{S}_2^+(K_{S_2}) &= K_{S_2}^{-1} , \\ \mathcal{S}_2^+([S_1]^\pm) &= v^n [S_2]^\pm [S_1]^\pm - [S_1]^\pm [S_2]^\pm , \\ \mathcal{S}_2^+([S_2]^\pm) &= v^n [S_2]^\mp K_{S_2}^{\mp 1} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1^-(K_{S_1}) &= K_{S_1}^{-1} , \\
 \mathcal{S}_1^-(K_{S_2}) &= K_{S_1}^n K_{S_2} , \\
 \mathcal{S}_1^-([S_1]^\pm) &= v^{-1}[S_1]^\mp K_{S_1}^{\pm 1} , \\
 \mathcal{S}_1^-([S_2]^\pm) &= \sum_{i+j=n} (-1)^j v^i ([S_1]^\pm)^{(j)} [S_2]^\pm ([S_1]^\pm)^{(i)} .
 \end{aligned}$$

✓

Bemerkung 3.30: Betrachtet man die Wirkung des Funktors \mathcal{S}_2^+ auf der Quantengruppe mittels der in Theorem 1.73 angegebenen Einbettung, ergibt sich folgende Abbildung:

$$\begin{aligned}
 E_1 &\mapsto v^n E_2 E_1 - E_1 E_2 , \\
 E_2 &\mapsto -F_2 K_2^{-1} , \\
 K_1 &\mapsto K_1 K_2 , \\
 K_2 &\mapsto K_2^{-1} , \\
 F_1 &\mapsto v^{-n} F_1 F_2 - F_2 F_1 , \\
 F_2 &\mapsto -K_2 E_2 .
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich genau der Automorphismus $T_{2,-}'$ in Lusztigs Notation (vgl. [L94, 37.1.3, p.288]), wobei zwei Dinge zu beachten sind: Erstens wurde hier zur einfacheren Berechnung im Graphen $s_1\Gamma$ gerechnet, sodass sich genau die opponierte Reihenfolge der Elemente E_i und F_i ergibt, und zweitens scheint es eine kleine Ungenauigkeit mit den Vorzeichen zu geben, welche durch

den Automorphismus der Quantengruppe $E_i \mapsto -E_i, F_i \mapsto -F_i$ und $K_i \mapsto K_i$ gelöst wird.

Bemerkung 3.31: Analog ergibt sich für \mathcal{S}_1^- auf der Quantengruppe folgendes:

$$\begin{aligned} E_1 &\mapsto -K_1 F_1, \\ E_2 &\mapsto \sum_{i+j=n} (-1)^j v^i E_1^{(j)} E_2 E_1^{(i)}, \\ K_1 &\mapsto K_1^{-1}, \\ K_2 &\mapsto K_1^n K_2, \\ F_1 &\mapsto -E_1 K_1^{-1}, \\ F_2 &\mapsto \sum_{i+j=n} (-1)^i v^{-j} F_1^{(j)} F_2 F_1^{(i)}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich erneut genau der Automorphismus $T'_{1,+}$ in Lusztigs Notation (vgl. [L94, 37.1.3, p.287]), wenn man obige Anmerkungen berücksichtigt.

3.3 Elemente der Kompositionsalgebra

Bemerkung 3.32: Ist Γ eine Gattung von Dynkintyp, so gibt es einen Isomorphismus $U_v(\mathfrak{g}_{Cr}) \cong \mathcal{D}\mathcal{H}(\Gamma)$. Insbesondere stimmt die Kompositionsalgebra mit der gesamten Hallalgebra überein. Im Euklidischen Fall hingegen ist die Kompositionsalgebra echt kleiner, sodass sich die Frage stellt, was genau sich darin befindet oder wie eine Basis aussieht.

Nachdem als wichtigstes Hilfsmittel gezeigt wurde, dass sich die von den abgeleiteten Spiegelungsfunktoren induzierten Isomorphismen auf die Kompositionsalgebren einschränken lassen,

werden in diesem Abschnitt folgende Elemente in der Kompositionsalgebra gefunden:

$$\prod_{P \in \mathcal{P}}^{\rightarrow} [P]^{m_P} \cdot \prod_{r \in \mathbb{N}_0} \tilde{\mathbb{I}}_{r\delta}^{m_r} \cdot \prod_{I \in \mathcal{I}}^{\rightarrow} [I]^{m_I} .$$

Hierbei bezeichnet δ die imaginäre Wurzel des Euklidischen Graphen und $m_\xi \in \mathbb{N}_0$ für $\xi \in \mathcal{P} \cup \mathbb{N}_0 \cup \mathcal{I}$ mögliche Vielfachheiten. Zusätzlich lassen sich die Produkte der präprojektiven bzw. präinjektiven Darstellungen aufgrund der Struktur der Homomorphismen und Erweiterungsgruppen so sortieren, dass sich möglichst einfach $[P] \cdot [P'] = v^{\langle \dim(P), \dim(P') \rangle} [P \oplus P']$ bzw. Analoges für präinjektive Darstellungen ergibt.

Bemerkung 3.33: Beachtet man die Zerlegung $\text{Rep}(\Gamma) = \mathcal{P} \vee \mathcal{R} \vee \mathcal{I}$, stellt man fest, dass alle präprojektiven und alle präinjektiven Darstellungen in der Kompositionsalgebra enthalten sind. Sortiert man dabei Produkte wie oben angegeben, ist leicht zu sehen, dass das linke (bzw. rechte) Produkt eine Basis für den Untervektorraum aller präprojektiven (bzw. präinjektiven) Darstellungen bildet.

Lemma 3.34: Die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ eines Dynkingraphs oder eines Euklidischen Graphen enthält alle präprojektiven und alle präinjektiven Darstellungen.

Beweis: Über die anfängliche Analyse des Isomorphismus von Cramer in Bemerkung 1.58 hinaus, fallen für die Isomorphismen \mathcal{S}_*^\pm noch zwei weitere Dinge auf:

- Schreibt man $\mathcal{C}^\pm(\Gamma)$ für das Bild der Kompositionsalgebra in einer der zwei Hälften des Drinfelddoppels, werden unzerlegbare Objekte einer Hälfte nach Theorem 3.29 in eine der beiden Hälften abgebildet.
- Viel stärker gilt noch $\mathbb{R}\mathbb{S}_*^+(X) \cong Y[0]$ falls $X \not\cong S_*$ unzerlegbar ist (selbiges für $\mathbb{L}\mathbb{S}_*^-$), sodass fast alle unzerlegbaren Darstellungen einer Hälfte des Drinfelddoppels wieder in dieselbe Hälfte geschickt werden.

Alle präprojektiven P bzw. alle präinjektiven Darstellungen I können durch Spiegeln der einfachen Darstellungen erzeugt werden. Schreibt man $P = \mathbb{S}_{i_1}^- \mathbb{S}_{i_2}^- \dots \mathbb{S}_{i_l}^-(S_m)$, gilt $m \neq i_l$ und alle Darstellungen $\mathbb{S}_{i_j}^- \mathbb{S}_{i_{j+1}}^- \dots \mathbb{S}_{i_l}^-(S_m)$ sind unzerlegbar. Daher folgt per Induktion $[P]^\pm \cdot K_\alpha = \mathbb{S}_{i_1}^- \mathbb{S}_{i_2}^- \dots \mathbb{S}_{i_l}^-([S_m]^\pm) \in \mathcal{C}^\pm(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} \Gamma)$ für ein geeignetes $\alpha \in K_0(\Gamma)$. Nach Definition von $\mathcal{C}^\pm(\Gamma)$ ist das nur dann möglich, wenn bereits $[P] \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Analoges gilt für $[I]$. ✓

Bemerkung 3.35: Folgendes Lemma ist in erster Linie ein Hilfsmittel, doch bereits für sich interessant. Das Analogon für Köcher wurde schon in z.B. [H06, Lemma 4.4, p. 9] bewiesen.

Lemma 3.36: Sei Γ eine Gattung ohne gerichtete Kreise und $d \in \mathbb{N}_0^\Gamma$. Dann enthält die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ alle Elemente der Form

$$\mathbb{1}_d := \sum_{\dim(X)=d} [X].$$

Beweis: Dieses Lemma kann als Fortsetzung des Beispiels 2.20 betrachtet werden, wobei im Wesentlichen bereits im Beispiel 2.13 alle Argumente geliefert werden. Da Γ keine gerichteten Kreise enthält, kann eine zulässige Reihenfolge der Knoten $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ gewählt werden, sodass es nur Kanten der Orientierung $i \rightarrow j$ für $j > i$ gibt. Zeige per Induktion über n , dass für ein geeignetes $N \in \mathbb{Z}$ folgende Formel gilt:

$$\mathbb{1}_d = v^N \cdot [S_1]^{(d_1)} \cdot [S_2]^{(d_2)} \cdot \dots \cdot [S_n]^{(d_n)} .$$

Für die Terme $[S_{n-1}^{d_{n-1}}] \cdot [S_n^{d_n}]$ und $[S_n^{d_n}]$ wurde dies bereits im Beispiel 2.20 explizit berechnet. Betrachte also den Ausdruck $[S_i^{d_i}] \cdot \mathbb{1}_{\tilde{d}}$ mit $\tilde{d} = \sum_{j>i} d_j e_j$. Für jede mögliche Darstellung Z in $\mathbb{1}_{\tilde{d}+d_i e_i}$, jede Unterdarstellung X in $\mathbb{1}_{\tilde{d}}$ und jeden möglichen Knoten $j > i$ ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z_i & \xrightarrow{\cong} & F_i^{d_i} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X_j & \xrightarrow{\cong} & Z_j & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 . \end{array}$$

Dies ist trivialerweise der Fall, sollte es in Γ keine Kante zwischen i und j geben. Weiterhin ist zu beachten, dass jede solche Darstellung Z genau eine Unterdarstellung X mit Dimensionsvektor \tilde{d} besitzt. Da j im vollen Untergraphen auf den Knoten $\{i + 1, \dots, n - 1, n\}$ nach Wahl der zulässigen Reihenfolge eine Quelle ist, erhält man die gesuchte Unterdarstellung, indem man Z_i durch $\{0\}$ ersetzt. Umgekehrt wird eine Unterdarstellung X durch den Dimensionsvektor \tilde{d} bereits vollständig festgelegt, da

die Vektorräume $Z_j = X_j$ für $j > i$ übereinstimmen. Damit wurde $F_{[S_i^{d_i}], [X]}^{[Z]} = 1$ berechnet und bewiesen, dass alle Summanden aus $\mathbb{1}_{\tilde{d} + d_i e_i}$ im Produkt $[S_i^{d_i}] \cdot \mathbb{1}_{\tilde{d}}$ mit demselben Koeffizienten auftauchen. ✓

Lemma 3.37: Sei Γ eine Gattung vom Euklidischen Typ und $\delta \in \mathbb{N}^\Gamma$ die imaginäre Wurzel. Dann enthält die Kompositions algebra $\mathcal{C}(\Gamma)$ alle Elemente der Form

$$\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta} := \sum_{\substack{\dim(R)=r\delta \\ R \in \mathcal{R}}} [R].$$

Beweis: Sei X eine Darstellung mit $\underline{\dim}(X) = r\delta$. Dann zerfällt X eindeutig als eine direkte Summe $X \cong P \oplus R \oplus I$, wobei $P \in \mathcal{P}$ präprojektiv, $R \in \mathcal{R}$ regulär und $I \in \mathcal{I}$ präinjektiv ist. Weiter gilt $\underline{\dim}(X) = \underline{\dim}(P) + \underline{\dim}(R) + \underline{\dim}(I)$.

$$\mathbb{1}_{r\delta} = \sum_{\underline{\dim}(X)=r\delta} [X] = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, R \in \mathcal{R}, I \in \mathcal{I} \\ \underline{\dim}(P) + \underline{\dim}(R) + \underline{\dim}(I) = r\delta}} [P \oplus R \oplus I].$$

Die Struktur der Erweiterungen und Homomorphismen liefert die Voraussetzungen für Lemma 1.45 und ergibt somit:

$$\begin{aligned} [P] \cdot [R] &= v^{\langle \underline{\dim}(P), \underline{\dim}(R) \rangle} [P \oplus R], \\ [P \oplus R] \cdot [I] &= v^{\langle \underline{\dim}(P \oplus R), \underline{\dim}(I) \rangle} [P \oplus R \oplus I]. \end{aligned}$$

Zusammengesetzt erhält man

$$\mathbb{1}_{r\delta} = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, R \in \mathcal{R}, I \in \mathcal{I} \\ \underline{\dim}(P) + \underline{\dim}(R) + \underline{\dim}(I) = r\delta}} v^{-\xi} \cdot [P] \cdot [R] \cdot [I],$$

wobei $\xi = \langle \underline{\dim}(P), \underline{\dim}(R) \rangle + \langle \underline{\dim}(P \oplus R), \underline{\dim}(I) \rangle$ den berechneten Exponenten abkürzt. Dieser hängt nicht direkt von R , sondern nur von $\underline{\dim}(R) = s\delta$ für $s \leq r$ ab. Fasst man in der Summe Terme mit gleichem Dimensionsvektor für R zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{r\delta} &= \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, s \leq r, I \in \mathcal{I} \\ \underline{\dim}(P) + \underline{\dim}(I) = (r-s)\delta}} v^{-\xi} \cdot [P] \cdot \tilde{\mathbb{1}}_{s\delta} \cdot [I] \\ &= \tilde{\mathbb{1}}_{r\delta} + \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, s < r, I \in \mathcal{I} \\ \underline{\dim}(P) + \underline{\dim}(I) = (r-s)\delta}} v^{-\xi} \cdot [P] \cdot \tilde{\mathbb{1}}_{s\delta} \cdot [I]. \end{aligned}$$

Bereits bekannt sind $\mathbb{1}_{r\delta}, [P], [I] \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Im Rahmen einer Induktion über r lässt sich weiterhin $\tilde{\mathbb{1}}_{s\delta} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ für $s < r$ annehmen, sodass nun auch $\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ folgt. ✓

3.4 Spezialfall \tilde{A}_1^2

Bemerkung 3.38: Im letzten Abschnitt geht es um die Gattung vom Typ \tilde{A}_1^2 , für die im restlichen Abschnitt die Bezeichnung der Knoten und die Orientierung wie folgt festgelegt seien:

$$1 \xrightarrow{(1,4)} 2 \qquad \mathbb{F}_q \xrightarrow{\mathbb{F}_{q^4}} \mathbb{F}_{q^4}$$

Als Eulerform, quadratische Form und Defekt ergeben sich (z.B. in [DR76] zu finden)

$$\begin{aligned} \langle \underline{\dim}(X), \underline{\dim}(Y) \rangle &= x_1 y_1 + 4x_2 y_2 - 4x_1 y_2, \\ q(\underline{\dim} X) &= (x_1 - 2x_2)^2 \text{ und} \\ \partial(\underline{\dim} X) &= x_1 - 2x_2, \end{aligned}$$

sodass man als imaginäre Wurzel $(2, 1)$ erhält. Als suggestive, wenngleich unpräzise Notation wird die gerade beschriebene Gattung \tilde{A}_1^2 genannt.

Dabei sollen Ideen und Resultate der Arbeit [BS12] vom Kroneckerköcher $Q = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bullet$ (bzw. von der Gattung vom Typ \tilde{A}_1^1) auf den Fall \tilde{A}_1^2 übertragen werden. Manches davon ist gelungen, z.B. lässt sich mit Stabilitätsbedingungen ein alternativer Beweis für $\tilde{\mathbb{1}}_{(2r,r)} \in \mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$ angeben oder allgemein zeigen, dass diese Elemente miteinander kommutieren.

Die Verwandtschaft des Kroneckerköchers und der projektiven Grade \mathbb{P}^1 (präziser sind $\mathcal{D}^b(\text{Rep}(Q))$ und $\mathcal{D}^b(\text{Coh}(\mathbb{P}^1))$ äquivalent) ist lange bekannt, doch die genaue Kurve für eine beliebige zahme Gattung weniger naheliegend. In [HRS96] wird von einer abelschen Kategorie ausgehend mittels Kipptheorie eine Konstruktion beschrieben, welche angewendet auf $\text{Rep}(\Gamma)$ für das Torsionspaar $(\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R})$ die Kategorie $\text{Coh}(\mathbb{X})$ kohärenter Garben eines geeigneten geometrischen Objekts \mathbb{X} nachstellen soll.

Definition 3.39: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Paar $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ voller Unterkategorien in \mathcal{A} heißt *Torsionspaar* in \mathcal{A} , falls es folgende Bedingungen erfüllt:

- $\forall T \in \mathcal{T} \forall F \in \mathcal{F} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$
- Für alle $A \in \mathcal{A}$ gibt es eine kurze, exakte Folge

$$0 \longrightarrow t(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/t(A) \longrightarrow 0$$

mit $t(A) \in \mathcal{T}$ und $A/t(A) \in \mathcal{F}$.

Die Unterkategorie \mathcal{T} heißt *Torsionsklasse* und die Unterkategorie \mathcal{F} heißt *torsionsfreie Klasse*.

Definition 3.40: Sei \mathcal{T} eine triangulierte Kategorie mit Verschiebungsfunktor [1]. Eine *t-Struktur* $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ ist ein Paar voller Unterkategorien von \mathcal{T} , sodass für $\mathcal{T}^{\geq n} := \mathcal{T}^{\geq 0}[-n]$ und $\mathcal{T}^{\leq n} := \mathcal{T}^{\leq 0}[n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\forall X \in \mathcal{T}^{\leq 0} \forall Y \in \mathcal{T}^{\geq 1} : \text{Hom}(X, Y) = 0$
- $\mathcal{T}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{T}^{\leq 1}$ und $\mathcal{T}^{\geq 1} \subseteq \mathcal{T}^{\geq 0}$
- Für jedes $X \in \mathcal{T}$ gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck

$$X^{\leq 0} \longrightarrow X \longrightarrow X^{\geq 1} \longrightarrow X^{\leq 0}[1]$$

mit $X^{\leq 0} \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ und $X^{\geq 1} \in \mathcal{T}^{\geq 1}$.

Die volle Unterkategorie $\mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0}$ von \mathcal{T} heißt das *Herz* der *t-Struktur* und ist eine abelsche Kategorie.

Lemma 3.41 [HRS96, Proposition 2.1, p.12]: Sei $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar einer abelschen Kategorie \mathcal{A} und definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &= \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \mid H^1(X^\bullet) \in \mathcal{T}, \forall i > 1 : H^i(X^\bullet) = 0\}, \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &= \{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \mid H^0(X^\bullet) \in \mathcal{F}, \forall i < 0 : H^i(X^\bullet) = 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ eine t -Struktur in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Lemma 3.42 [HRS96, Corollary 2.2, p.13]: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar in \mathcal{A} , dann gelten:

- Man erhält eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$:

$$\{X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \mid H^1(X^\bullet) \in \mathcal{T}, H^0(X^\bullet) \in \mathcal{F}, H^i(X^\bullet) = 0 \text{ sonst}\}.$$

- Das Paar $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ ist ein Torsionspaar in $\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$.
- Für $X, Y \in \mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$ und $n = 0, 1$ gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}])}(X, Y[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]).$$

Bemerkung 3.43: Dieses Lemma wird im Folgenden auf $\mathrm{Rep}(\Gamma)$ bzw. $\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda(\Gamma)$ angewendet werden, welche eine erbliche Kategorie ist. Mit Hilfe des Lemmas 1.35 lässt sich die Kategorie $\mathrm{Rep}(\Gamma)[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$ als die Unterkategorie umformulieren, deren Objekte isomorph zu Objekten X^\bullet mit $X_1^\bullet \in \mathcal{T}$, $X_0^\bullet \in \mathcal{F}$ und $X_i^\bullet = 0$ für $i \neq 0, 1$ sind, wobei alle $d_X^i = 0$ sind.

Definition 3.44: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar. Die Torsionsklasse \mathcal{T} heißt *Torsionskipplasse*, falls \mathcal{T} ein Koerzeuger für \mathcal{A} ist, d.h. falls es für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $T_A \in \mathcal{T}$ und eine injektive Abbildung $A \hookrightarrow T_A$ gibt. Eine torsionsfreie Klasse \mathcal{T} heißt dual *torsionsfreie Kokipplasse*, falls \mathcal{F} ein Erzeuger für \mathcal{A} ist.

Lemma 3.45 [HRS96, Lemma 3.1, p.17]: Sei Λ eine artinsche Algebra und $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar in $\text{Mod-}\Lambda$, dann gelten:

- \mathcal{T} ist genau dann eine Torsionskipppklasse, wenn \mathcal{T} alle unzerlegbaren, injektiven Moduln in $\text{Mod-}\Lambda$ enthält.
- \mathcal{F} ist genau dann eine torsionsfreie Kokippklasse, wenn \mathcal{F} alle unzerlegbaren, projektiven Moduln in $\text{Mod-}\Lambda$ enthält.

Lemma 3.46: Sei Γ eine Gattung vom Dynkintyp oder von Euklidischem Typ. Dann bildet das Paar $(\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R})$ in $\text{Rep}(\Gamma)$ ein Torsionspaar. Darüber hinaus ist \mathcal{I} eine Torsionskipppklasse und $\mathcal{P} \vee \mathcal{R}$ eine torsionsfreie Kokippklasse.

Beweis: 1) Die erste Eigenschaft eines Torsionspaares $\text{Hom}(\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}) = 0$ gilt wegen der Struktur der Morphismen in $\text{Rep}(\Gamma)$.

2) Für unzerlegbare Objekte $I \in \mathcal{I}$ bzw. $X \in \mathcal{P} \vee \mathcal{R}$ erfüllen die kurzen, exakten Folgen der Form

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 ,$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

die zweite Eigenschaft eines Torsionspaares. Zerlegt man ein beliebiges Objekt in dessen direkte Summanden, ergibt die direkte Summe obiger kurzer, exakter Folgen die gesuchte Folge.

3) Die Tensoralgebra von Γ ist endlich dimensional, insbesondere also artinsch. Da \mathcal{I} alle injektiven Objekte und $\mathcal{P} \vee \mathcal{R}$ alle

projektiven Objekte enthält, liegen nach Lemma 3.45 eine Torsionskipplasse bzw. eine torsionfreie Kippklasse vor. \checkmark

Theorem 3.47 [HRS96, Theorem 3.3, p.18]: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar und $\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$ wie in Lemma 3.42. Nehme zusätzlich an, \mathcal{T} sei eine Torsionkipplasse. Dann gelten:

- Hat $\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]$ genügend projektive Objekte, gibt es eine triangulierte Äquivalenz $\mathbb{G} : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, sodass $\mathbb{G}|_{\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}]}$ der Identitätsfunktors ist.
- Hat \mathcal{A} genügend injektive Objekte, gibt es eine triangulierte Äquivalenz $\mathbb{F} : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A}[\mathcal{T}, \mathcal{F}])$, sodass $\mathbb{F}|_{\mathcal{A}} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ der Identitätsfunktors ist.

Lemma 3.48: Für eine Gattung Γ von Dynkintyp oder Euklidischem Typ ist die Kategorie $\text{Rep}(\Gamma)[\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}]$ erblich.

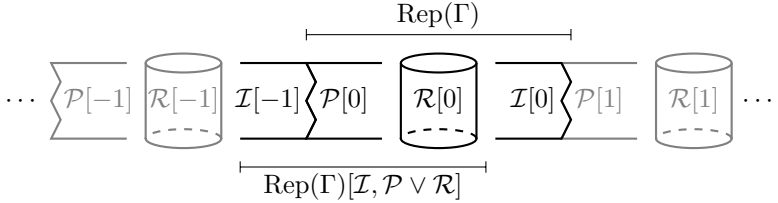
Beweis: Jedes Objekt $B \in \text{Rep}(\Gamma)[\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}]$ ist von der Form $B = X \oplus I[-1]$ mit $X \in \mathcal{P} \vee \mathcal{R}$ und $I \in \mathcal{I}$. Schreibe für die folgende Rechnung abkürzend $\mathcal{A} := \text{Rep}(\Gamma)$ und $\mathcal{B} := \text{Rep}(\Gamma)[\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}]$:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{B}}^2(B_1, B_2) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{B})}(B_1, B_2[2]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(B_1, B_2[2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X_1, X_2[2]) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X_1, I_2[1]) \\
 &\quad \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(I_1[-1], X_2[2]) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(I_1[-1], I_2[1]) \\
 &\cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^2(X_1, X_2) \oplus \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X_1, I_2) \\
 &\quad \oplus \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^3(I_1, X_2) \oplus \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^2(I_1, I_2) .
 \end{aligned}$$

Hier verschwinden alle $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^i(-, -)$ für $i > 1$, da $\operatorname{Rep}(\Gamma)$ bereits erblich ist. Der Term $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X_1, I_2)$ ist wegen Lemma 2.71 ebenfalls trivial. \checkmark

Bemerkung 3.49: Die Konstruktion der Kategorie $\operatorname{Rep}(\Gamma)[\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}]$ lässt sich durch folgendes Bild von $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ veranschaulichen:



Lemma 1.36 und Bemerkung 3.43 beschreiben die (unzerlegbaren) Objekte genau. Morphismen und Erweiterungen werden durch 3.42 gegeben, wobei es keine höheren Erweiterungsgruppen gibt, wie im Lemma 3.48 gezeigt wurde. Schlussendlich besagt Theorem 3.47, dass die abgeleiteten Kategorien „leicht verschoben“ exakt übereinstimmen.

Bemerkung 3.50: Im restlichen Teil soll ein alternativer Beweis für $\mathbb{1}_{r\delta} \in \mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$ präsentiert werden, welcher Stabilitäts-

bedingungen als Hilfsmittel benutzt. In großer Allgemeinheit wurden diese von Rudakov [R97] für abelsche Kategorien behandelt, wobei sich hier als Ansatz die an abgeleitete Kategorien angepasste Formulierung von Bridgeland [B07] als sinnvoll herausgestellt hat.

Zusätzlich stellt man fest, dass die Elemente $\mathbb{1}_{r\delta}$ untereinander kommutieren.

Definition 3.51: Eine *Stabilitätsfunktion* auf einer abelschen Kategorie \mathcal{A} ist ein Gruppenhomomorphismus $Z : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$, sodass für alle $0 \neq A \in \mathcal{A}$ die komplexe Zahl $Z(A)$ in der oberen Halbebene \mathbb{H} liegt. Hierbei gilt

$$\mathbb{H} = \{re^{\pi i \phi} \in \mathbb{C} \mid r \in \mathbb{R}^+, \phi \in (0, 1]\}.$$

Die *Phase* eines Objektes $0 \neq A \in \mathcal{A}$ ist definiert als

$$\phi(A) = \frac{\arg Z(A)}{\pi} \in (0, 1].$$

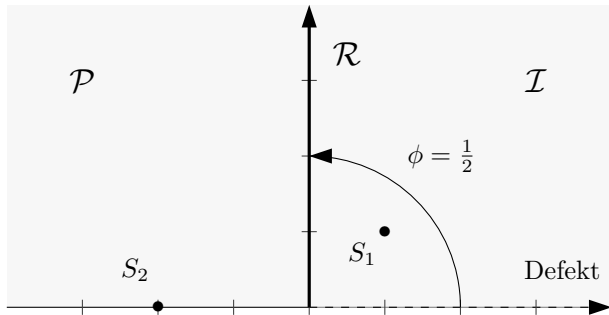
Ein Objekt $0 \neq A \in \mathcal{A}$ heißt *semistabil* (bzgl. Z), wenn $\phi(E) \leq \phi(A)$ für jedes Unterobjekt $0 \neq E \subseteq A$ gilt. Äquivalent gilt $\phi(A) \leq \phi(F)$ für jeden Quotienten $A \twoheadrightarrow F \neq 0$ eines semistabilen Objekts.

Bezeichne für eine Gattung Γ mit $\mathbb{1}_d^{ss}$ die Summe aller semistabilen Darstellungen in $\text{Rep}(\Gamma)$ mit Dimensionsvektor $d \in \mathbb{N}_0^\Gamma$.

Definition 3.52: Definiere folgende Stabilitätsfunktion für $\tilde{\mathcal{A}}_1^2$:

$$\begin{aligned} Z : \quad K_0(\tilde{\mathcal{A}}_1^2) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \underline{\dim}(X) = (x_1, x_2) &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist das Bild in der oberen Halbebene \mathbb{H} der komplexen Zahlen enthalten und die regulären Objekte liegen auf dem Strahl $i\mathbb{R}^+$, da der Wert auf der x -Achse $Z(\underline{\dim} X)_1$ genau der Defekt von X ist.



Lemma 3.53 [K09, Chapter 0.5, p.22]: Die regulären Objekte \mathcal{R} sind in $\text{Rep}(\Gamma)[\mathcal{I}, \mathcal{P} \vee \mathcal{R}]$ genau die Objekte mit endlicher Länge. Insbesondere sind Unterobjekte regulärer Objekte wieder regulär.

Lemma 3.54: Die Summe der semistabilen Objekte bzgl. der Stabilitätsfunktion aus Definition 3.52 in $\text{Rep}(\tilde{A}_1^2)$ mit Bild $(0, r)$ sind genau die regulären Objekte $\tilde{\mathbb{I}}_{r\delta}$ mit Dimensionsvektor $r\delta$.

Beweis: Urbilder X unter Z mit Bild $(0, r)$ erfüllen die Gleichung $x_1 - 2x_2 = 0$ und $x_1 = r$, womit sich als Dimensionsvektor $\underline{\dim}(X) = r\delta$ ergibt. Schreibe $X = P \oplus R \oplus I$ mit $P \in \mathcal{P}$, $R \in \mathcal{R}$ und $I \in \mathcal{I}$. Hierbei gilt $\partial(P) < 0$, $\partial(R) = 0$ und $\partial(I) > 0$

sowie $\partial(P) + \partial(I) = \partial(P) + \partial(R) + \partial(I) = \partial(X) = 0$. Wegen des Defekts gilt also genau dann $P \neq 0$, wenn $I \neq 0$. Wäre aber $P \neq 0$, so wäre $P \subset X$ ein Unterobjekt mit $\phi(P) > \phi(X)$ und damit X nicht semistabil. Also genügt es zu zeigen, dass Objekte $R \in \mathcal{R}$ semistabil sind. Da Unterobjekte $S \subseteq R$ wieder regulär sind, gilt $\phi(S) = \phi(R)$. \checkmark

Theorem 3.55 [R02, Theorem 5.1, p.12]: Für beliebige Stabilitätsfunktionen Z gilt:

$$\mathbb{1}_\alpha^{ss} = \mathbb{1}_\alpha + \sum_{s \geq 2} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_s = \alpha \\ \forall t < s: \mu(\alpha_1) + \dots + \mu(\alpha_t) > \mu(\alpha)}} v^{-\sum_{i < j} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} \mathbb{1}_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \mathbb{1}_{\alpha_s} .$$

Insbesondere lassen sich die Elemente $\mathbb{1}_\alpha^{ss}$ durch die Elemente $\mathbb{1}_\alpha$ ausdrücken.

Bemerkung 3.56: Mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen und dem Theorem von Reineke lässt sich ein alternativer Beweis für $\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta} \in \mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$ geben.

Lemma 3.57: Die Kompositionsalgebra $\mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$ enthält alle Elemente der Form $\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta}$, wobei $r \in \mathbb{N}$ und δ die imaginäre Wurzel ist.

Beweis: Lemma 3.54 beschreibt die Gleichheit der Summen $\tilde{\mathbb{1}}_{r\delta} = \mathbb{1}_{r\delta}^{ss}$ für die Stabilitätsfunktion aus Definition 3.52, welche sich nach Theorem 3.55 als polynomielle Kombination geeigneter $\mathbb{1}_\alpha$ schreiben lassen. Diese sind jedoch nach Lemma 3.36 bereits in der Kompositionsalgebra enthalten. \checkmark

Lemma 3.58: Die Gattung vom Typ \tilde{A}_1^2 enthält nur homogene reguläre Darstellungen.

Beweis: In [D08] werden die Dimensionsvektoren aller präprojektiven und aller präinjektiven Darstellungen aufgelistet:

$$\begin{aligned} \underline{\dim} \tau^{-n}(P_1) &= (2n - 1, n) , \\ \underline{\dim} \tau^{-n}(P_2) &= (4n - 4, 2n - 1) , \\ \underline{\dim} \tau^n(I_1) &= (2n - 1, n - 1) , \\ \underline{\dim} \tau^n(I_2) &= (4n, 2n - 1) . \end{aligned}$$

Ein Routinerechnung ergibt dann

$$\underline{\dim} \tau^{n+1}(I_1) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\dim} \tau^n(I_1) .$$

Diese Matrix beschreibt die Wirkung der Auslander-Reiten-Verschiebung τ auf der Grothendieckgruppe $K_0(\tilde{A}_1^2)$. Als charakteristisches Polynom ergibt sich

$$\chi_\tau(t) = \det \begin{pmatrix} 3 - t & -4 \\ 1 & -1 - t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 ,$$

so dass der einzige Eigenwert die Nullstelle $t_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$ ist. Ist also X eine reguläre Darstellung mit $\tau^n(X) \cong X$, so folgt bereits $n = 1$. ✓

Lemma 3.59: Für $r, s \in \mathbb{N}$ kommutieren die Elemente $\tilde{\mathbb{I}}_{r,\delta}$ und $\tilde{\mathbb{I}}_{s,\delta}$ in $\mathcal{C}(\tilde{A}_1^2)$.

Beweis: Betrachte zwei Summanden $[X]$ aus der Summe $\tilde{\mathbb{I}}_{r,\delta}$ und $[Y]$ aus der Summe $\tilde{\mathbb{I}}_{s,\delta}$. Liegen diese Summanden in verschiedenen Röhren, so gibt es weder Morphismen noch Erweiterungen

zwischen ihnen und ihr Produkt (in beiden Reihenfolgen) ergibt $[X \oplus Y]$.

Die Hallalgebra einer homogenen Röhre ist isomorph zur klassischen Hallalgebra $\mathcal{H}(\text{Rep}^{nil}(Q_J))$ aller nilpotenten Darstellungen des Jordanköchers $Q_J = \bullet \curvearrowright$. Liegen also die Summanden $[X]$ und $[Y]$ in der selben Röhre, kommutieren diese ebenfalls, da $\mathcal{H}(\text{Rep}^{nil}(Q_J))$ kommutativ ist. \checkmark

Literaturverzeichnis

- [ASS06] I. ASSEM, D. SIMSON, A. SKOWROŃSKI: *Elementes of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1*, London Math. Soc. (vol. 65), 2006.
- [B78] A. A. BEILINSON: *Coherent Sheaves on \mathbb{P}^n and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (3) 68–69, 1978.
- [B07] T. BRIDGELAND: *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. 166, pp. 317-345, 2007.
- [BS12] I. BURBAN, O. SCHIFFMANN: *Two descriptions of the quantum affine algebra $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ via Hall algebra approach*, Glasgow Mathematical Journal, 54 (2) 283-307, 2012.
- [C09] T. CRAMER: *Double Hall algebras and derived equivalences*, arXiv:0809.3470v5, 2009.

- [D08] K. DIETRICH: *Funktorielle Operationen auf präprojektiven Komponenten zahmer Bimoduln*, Diplomarbeit in Paderborn, 2008.
- [D80] V. DLAB: *Representations of valued graphs*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1980.
- [DR76] V. DLAB, C. M. RINGEL: *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Am. Math. Soc. (Vol. 6, Nr. 173), 1976.
- [G95] J. GREEN: *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Inventiones mathematicae 102 (2) 361-377, 1995.
- [HRS96] D. HAPPEL, I. REITEN, S. O. SMALØ: *Tilting in Abelian Categories and Quasitilted Algebras*, Mem. Am. Math. Soc. (Vol. 120, Nr. 575), 1996.
- [H06] A. W. HUBERY: *Ringel-Hall algebras*, Vorlesungsskript in Paderborn, Winter 2006.
- [K04] B. KELLER: *Derived Categories and Tilting*, 2004.
- [K09] D. KUSSIN: *Noncommutative Curves of Genus Zero*, Mem. Am. Math. Soc. (Vol. 201, Nr. 942), 2009.
- [L12] J. LEMAY: *Valued Graphs and the Representation Theory of Lie Algebras*, Axioms 2012 (1) 111-148, 2012.

- [L94] G. LUSZTIG: *Introduction to Quantum Groups*, Modern Birkhäuser Classics, 1994.
- [R02] M. REINEKE: *The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli*, Invent. Math. (Vol. 152, no. 2) 349-368, 2003.
- [R90] C.-M. RINGEL: *Hall algebras and quantum groups*, Inventiones mathematicae 101 (1) 583-591, 1990.
- [R96] C.-M. RINGEL: *Green's theorem on Hall algebras*, CMS Conference Proceedings (19) 185-245, 1996.
- [R97] A. RUDAKOV: *Stability for an Abelian Category*, J. Algebra 197, pp. 231-145, 1997.
- [S09] O. SCHIFFMANN: *Lectures on Hall algebras*, arXiv:math/0611 617v2, 2009.
- [XY01] J. XIAO, S. YANG: *BGP-reflection functors and Lusztig's symmetries: A Ringel-Hall algebra approach to quantum groups*, Journal Algebra 241 (1) 204-246, 2001.

Erklärung zur Dissertation

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbstständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; dass sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist, sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde.

Die Bestimmungen der Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Professor Dr. Igor Burban betreut worden. Teilpublikationen liegen noch nicht vor.

Ort, Datum

Christian Reinecke