

## Kurzzusammenfassung

Als Wissenschaft der Vermittlung fachlichen Wissens ist die Mathematikdidaktik inhaltlich der Mathematik zuzuordnen. Da Lernprozesse kognitiver und somit individueller Art sind und eine fachliche Ordnung nur selten direkt widerspiegeln, ist die Mathematikdidaktik auch auf andere Bezugsdisziplinen angewiesen. Zu diesen Bezugsdisziplinen zählen unter anderem die Soziologie, die Philosophie, die Erziehungs- bzw. Bildungswissenschaft etc.

Ausgehend von theoretischen Betrachtungen aus der Philosophie wird in dieser Arbeit der Versuch unternommen, einen Begriff zur Analyse von Lernprozessen bereitzustellen. Das Ziel dieses Vorgehens besteht darin, diese Prozesse eingehender zu verstehen, sodass sie basierend auf den Ergebnissen verschiedener Analysen in weiteren Arbeiten gezielt(er) gesteuert werden können. Bei diesem Begriff handelt es sich um den Begriff *Familienähnlichkeiten*, welcher aus der Sprachspielphilosophie von Ludwig Wittgenstein stammt.

Dem Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten wird in vielen Disziplinen große Bedeutung zugesprochen. In der Mathematik werden Ähnlichkeiten beispielsweise in der Geometrie thematisiert. So sind z. B. zwei Dreiecke zueinander ähnlich, wenn die Längenverhältnisse einander entsprechender Strecken sowie die einander entsprechenden Winkel gleich groß sind. In der Literaturwissenschaft, der Psychologie und der Mathematikdidaktik werden Ähnlichkeiten u.a. im Kontext von Analogien, Analogieschlüssen und Metaphern betrachtet. In der Mathematikdidaktik wird das Erkennen und Nutzen von Analogien und Metaphern z.B. als bedeutende heuristische Strategie für das Mathematiklernen eingeordnet, indem neue Zusammenhänge durch alte gesehen werden. So kann etwa eine Aufgabe wie  $24 + 3$  unter Bezugnahme der Aufgabe  $4 + 3$  gelöst werden. Diese (und weitere) Erscheinungsformen von Ähnlichkeiten werden in dieser Arbeit zunächst thematisiert, um die bereits bestehende Bedeutung von Ähnlichkeiten beim Lernen von Mathematik zu betrachten.

In einem Unterrichtsversuch wurde die Bedeutung von Familienähnlichkeiten bei Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern untersucht. Der Unterricht wurde in drei vierten (Grundschule) und zwei sechsten (Gymnasium) Schulklassen durchgeführt. Im Unterricht wurden vorrangig Aufgaben aus der Arithmetik bearbeitet (Konstanzgesetze der Addition und Multiplikation, Endstellenregeln zur Teilbarkeit, Figurierte Zahldarstellungen).

Das Entdecken und Begründen stellen wesentliche Tätigkeiten im Mathematikunterricht dar. Dem eigenständigen Entdecken mathematischer Zusammenhänge wird ein hoher Stellenwert

hinsichtlich der Nachhaltigkeit von Lernprozessen beigemessen. Die alleinige Entdeckung eines Zusammenhangs hat an sich noch keine Gültigkeit. Es gilt ihn zu begründen (bzw. zu beweisen). Diese Prozesse standen im Fokus der vorgenommenen Analysen. Demnach wurden beispielsweise die Endstellenregeln zur Teilbarkeit durch vier und acht nicht nur präsentiert, sondern vor der Begründung der Regeln durch die Lernenden zunächst eigenständig erkannt.

Die Analysen zeigten, dass Lernende Ähnlichkeiten beim Entdecken und Begründen nutzten. Hierzu konnten verschiedene Arten von Ähnlichkeiten herausgearbeitet werden. Darüber hinaus wurde herausgearbeitet, welche Chancen und Gefahren das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten in mathematischen Lehr- und Lernprozessen bergen können.

## Abstract

The principles of teaching mathematics are part of Mathematical Sciences in general. The learning process is cognitive and individual. It rarely reflects the order of Mathematics. That is why mathematics education is dependant on other disciplines like sociology, philosophy, educational science etc.

Based on philosophical theories this dissertation at hand aims at providing a concept that can be used as a means of analysing the learning process. The objective of this approach is to gain a better understanding of the learning process as such. Ideally, it is going to serve as a guideline for future research. The concept is termed *family resemblances* and originated in Ludwig Wittgenstein's philosophy of language-games.

The ability to recognise and utilise similarities is of great significance for many disciplines. Within the field of mathematics, similarities are widely used in geometry for instance. For example, two triangles are similar to one another if the length proportions of corresponding segments as well as the corresponding angles are the same. In literary studies, psychology and mathematics education similarities are looked at in the context of analogies, analogical reasoning and metaphors. In mathematics education the ability to recognise and utilise analogies and metaphors is an important heuristic strategy in the learning of mathematics. New logical connections can be made by drawing on established knowledge. The equation  $24 + 3$  can be solved in reference to the equation  $4 + 3$ . This and other phenomena of similarities are scrutinised in order to understand the importance of similarities for the learning of mathematics.

Within the framework of a class experiment, the importance of family resemblances for the learning process of students was investigated. The experiment was carried out in three primary school classes (students aged 9 to 10) and two secondary school classes (students aged 12 to 13). The students mainly worked on arithmetic task (balancing equations in addition and multiplication, sequence of numbers, divisibility rules).

Discovery and reasoning processes are significant phenomena in mathematics instructions. The independent discovery of mathematical relationships is of high importance for the permanence of acquired knowledge. The sole discovery of a mathematical relationship is not valid in itself. It has to be proved in a comprehensible way. This process of discovery and reasoning was the focus of the analysis. For example, the divisibility rules of four and eight were not simply introduced by the teacher, but the learners were encouraged to discover the rules independently. Thereafter, the newly discovered rules were proved by the students.

The analysis showed that learners used similarities in the process of discovering and reasoning. Various types of similarities were identified. Furthermore, this dissertation examines opportunities and dangers that may result from utilising similarities in mathematical teaching and the mathematical learning process.