# On representing graphs with unit intervals

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschatlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Alexander Apke
aus Ankum

Berichterstatter:

Prof. Dr. Rainer Schrader
Prof. Dr. Hubert Randerath

Tag der mündlichen Prüfung:

18. Juli 2018

# Abstract


A graph $G = (V, E)$ is an interval graph if there exists a collection $F = \{I(v) \subset \mathbb{R} \mid v \in V\}$ of intervals on the real line such that for all $u, v \in V$ the intervals $I(u)$ and $I(v)$ intersect if and only if $uv \in E$. If we find such a collection where further $|I(v)| = c,\ c \in \mathbb{R}$ for every $v \in V$, we call $G$ a unit interval graph.

Accordingly, we call a partial order $Q = (V, \leq)$ an interval order (resp. a semiorder) if the co-comparability graph $\overline{G}(Q)$ is an interval graph (resp. a unit interval graph).

Two partial orders are equivalent if they have the same comparability graph. A parameter or property $f$ of partial orders is a comparability invariant if it is invariant under equivalent orders.

In this thesis, we firstly introduce the non-unit count as a parameter of an interval graph or an interval order. The non-unit count of $G$ (resp. $Q$) is the smallest number of intervals whose lengths have to deviate from unit length in an interval representation $F \in \mathcal{R}_1(G)$ (resp. $F \in \mathcal{R}_1(Q)$).

We characterize those interval graphs that have non-unit count one. Further, we investigate the special case where intervals are forced to have at least unit length. In that case, the minimal number of deviating intervals in an interval representation for $G$ is called the normalized non-unit count $\tau_{>}(G)$. We show that $\tau_{>}(G)$ equals the number of centers of $G$.

In contrast to the non-unit count, it turns out that both the normalized non-unit count and the property of being a partial order with non-unit count one are comparability invariants.

In the subsequent chapters, we focus on the semiorder dimension of a partial order, another parameter to measure a partial orders' distance to being a semiorder. A partial order $Q = (V, \leq)$ has semiorder (resp. interval) dimension $s$ if there are $s$ semiorders (resp. interval orders) $Q_1, \ldots, Q_s$ such that for all $u, v \in V$ we have $u \leq_Q v$ if and only if $u \leq_{Q_i} v$ for every $i = 1, \ldots, s$.

Habib et al. [42] have shown that interval dimension is a comparability invariant. Felsner and Möhring [24] could prove this for semiorder dimension two. We examine the question whether this carries over to semiorder dimension $s \geq 3$. We introduce the excess representation as a specific trapezoid representation. For partial orders of semiorder dimension three, we show that admitting such a representation is a comparability invariant. We conjecture that every partial order of semiorder dimension three admits an excess representation. This would imply that semiorder dimension three is a comparability invariant as well. Subsequently, we prove the conjecture for partial orders induced by $(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$–free graphs.

The semiorder dimension of a partial order may be arbitrarily large. The same is true for the semiorder dimension of an interval order, as shown by Fishburn [28]. For partial orders of a fixed semiorder dimension $s$, no characterization is known, even in the case $s = 2$.

We give a characterization for the class of interval orders with semiorder dimension two as well as for the class of graphs that induce these orders. Our characterizations admit efficient recognition algorithms. Further, we provide a sufficient condition that applies for all partial orders of semiorder dimension two.

# Kurzzusammenfassung


Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Intervallgraph, falls eine Menge $F = \{I(v) \subset \mathbb{R} \mid v \in V\}$ von Intervallen auf der reellen Achse existiert, so dass sich für zwei Knoten $u, v \in V$ die beiden Intervalle $I(u)$ und $I(v)$ genau dann schneiden, wenn $uv \in E$. Finden wir eine solche Menge, in der außerdem $|I(v)| = c,\ c \in \mathbb{R}$ für jedes $v \in V$ gilt, nennen wir $G$ einen Einheitsintervallgraph.

Entsprechend nennen wir eine Halbordnung $Q = (V, \leq)$ eine Intervallordnung bzw. eine Einheitsintervallordnung, falls der Co-Vergleichbarkeitsgraph $\overline{G}(Q)$ ein Intervallgraph bzw. ein Einheitsintervallgraph ist.

Zwei Halbordnungen sind äquivalent, falls sie den gleichen Vergleichbarkeitsgraphen besitzen. Ein Parameter oder eine Eigenschaft $f$ einer Halbordnung ist eine Komparabilitätsinvariante, falls sie unter äquivalenten Halbordnungen invariant ist.

In dieser Arbeit führen wir die Nicht-Einheitszahl als Parameter eines Intervallgraphen bzw. einer Intervallordnung ein. Die Nicht-Einheitszahl von $G$ bzw. $Q$ ist die kleinste Anzahl von Intervallen, deren Längen in einer Intervalldarstellung $F \in \mathcal{R}_1(G)$ bzw. $F \in \mathcal{R}_1(Q)$ von der Einheitslänge abweichen müssen.

Wir charakterisieren jene Intervallgraphen, deren Nicht-Einheitszahl Eins beträgt. Des Weiteren untersuchen wir den Spezialfall, in dem Intervalllängen mindestens die Einheitslänge betragen müssen. In diesem Fall bezeichnen wir die minimale Anzahl von abweichenden Intervallen in einer Intervalldarstellung für $G$ als Normalisierte Nicht-Einheitszahl $\tau_>(G)$. Wir zeigen, dass $\tau_>(G)$ der Anzahl der Zentren von $G$ entspricht.

Es stellt sich heraus, dass sowohl die Normalisierte Nicht-Einheitszahl als auch die Nicht-Einheitszahl Eins, im Gegensatz zur Nicht-Einheitszahl im Allgemeinen, Komparabilitätsinvarianten sind.

In den darauf folgenden Kapiteln konzentrieren wir uns auf die Einheitsintervalldimension einer Halbordnung. Neben der Nicht-Einheitszahl ist dies ein

weiterer Parameter, der für eine Halbordnung angibt, wie weit diese davon entfernt ist, eine Einheitsintervallordnung zu sein. Eine Halbordnung $Q = (V, \leq)$ hat die (Einheits-)intervalldimension $s$, falls es $s$ (Einheits-)intervallordnungen $Q_1, \ldots, Q_s$ gibt, so dass für alle $u, v \in V$ gilt, dass $u \leq_Q v$ genau dann, wenn $u \leq_{Q_i} v$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Habib et al. [42] haben gezeigt, dass die Intervalldimension eine Komparabilitätsinvariante darstellt. Felsner und Möhring [24] konnten dies für Einheitsintervalldimension Zwei beweisen. Wir stellen die Frage, ob sich dieses Resultat auf Einheitsintervalldimension $s \geq 3$ übertragen lässt. Dazu führen wir die Überdeckungs-Darstellung einer Halbordnung ein. Für Halbordnungen mit Einheitsintervalldimension Drei zeigen wir, dass die Eigenschaft eine solche Darstellung zu besitzen eine Komparabilitätsinvariante darstellt. Wir vermuten, dass jede Halbordnung mit Einheitsintervalldimension Drei eine Überdeckungs-Darstellung besitzt. Dies würde bedeuten, dass Einheitsintervalldimension Drei eine Komparabilitätsinvariante ist. Anschließend beweisen wir die Vermutung für Halbordnungen, die von $(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$– freien Graphen induziert werden.

Die Einheitsintervalldimension einer Halbordnung kann beliebig groß sein. Dasselbe gilt für die Einheitsintervalldimension einer Intervallordnung, wie von Fishburn [28] gezeigt. Für Halbordnungen mit einer festen Einheitsintervalldimension $s$ ist bislang keine Charakterisierung bekannt, selbst im Fall $s = 2$.

Wir geben ein Charakterisierung für die Klasse der Intervallordnungen mit Einheitsintervalldimension Zwei an, sowie für die Klasse der Graphen, die diese Halbordnungen induzieren. Unsere Charakterisierungen erlauben effiziente Erkennungsalgorithmen. Außerdem geben wir eine für alle Halbordnungen geltende hinreichende Bedingung dafür an, Einheitsintervalldimension Zwei zu haben.