Starke Gesetze der großen Zahlen bei blockweisen Unabhängigkeitsbedingungen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von

Dirk Brüggemann

aus Duisburg

Köln 2003

Berichterstatter:	Prof. Dr. D. Landers
	Prof. Dr. A. Klenke
	Prof. Dr. W. Stute

Tag der mündlichen Prüfung: 12.12.2002

Einleitung

Ein wichtiges Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie ist das Starke Gesetz der großen Zahlen (Strong Law of Large Numbers, SLLN). Es besagt, dass das arithmetische Mittel einer Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert 0 mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen Null konvergiert, i.Z.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Will man Konvergenzraten im SLLN untersuchen, so ist es sinnvoll, auch Mittel der Form $\frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k$ zu betrachten, wobei $m : [0,\infty) \to (0,\infty)$ eine isotone, also monoton wachsende, Funktion ist, so dass $\lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$. Eine solche Funktion wird im Folgenden als Normierungsfunktion bezeichnet, und eine Aussage der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

wird *verallgemeinertes Starkes Gesetz der großen Zahlen* oder kurz *gSLLN* genannt.

Die Betrachtung von SLLN hat eine lange Tradition in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Das wohl bekannteste Kriterium für die Gültigkeit des SLLN geht auf Kolmogorov zurück, der in (Kolmogorov 1930) bewies, dass das SLLN für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen genau dann gilt, wenn ihr Erwartungswert existiert und endlich ist. Schon zwei Jahre zuvor zeigte Kolmogorov, dass das Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P[X_k^2]}{m^2(k)} < \infty$$

hinreichend dafür ist, dass für eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, quadratintegrierbaren und zentrierten Zufallsvariablen das gSLLN gilt, vgl. (Kolmogorov 1928). Ein analoges Kriterium für Folgen von paarweise unkorrelierten und zentrierten Zufallsvariablen geht auf Rademacher und Menshov zurück, die unabhängig voneinander zunächst ein Kriterium für die fast sichere Konvergenz von Orthogonalreihen bewiesen, aus welchem dann später das hinreichende Kriterium

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{P[X_k^2]}{m^2(k)} \log^2 k < \infty$$

für das gSLLN hergeleitet wurde.

Im Jahr 1981 bewies N. Etemadi in (Etemadi 1981), dass das SLLN auch für paarweise unabhängige, identisch verteilte und zentrierte Zufallsvariable gilt. Hierbei kann jedoch i.A. nicht auf die identische Verteilung der Zufallsvariablen verzichtet werden, wie Csörgö, Tandori und Totik in ihrer Arbeit (Csörgö et al. 1983) zeigten. Dort wird auch ein zusätzliches Kriterium hergeleitet, welches zusammen mit dem Kriterium von Kolmogorov die Gültigkeit des gSLLN auch für Folgen von paarweise unabhängigen, quadratintegrierbaren und zentrierten Zufallsvariablen gewährleistet. Diese Zusatzbedingung kann im gSLLN auch bei identisch verteilten Zufallsvariablen nicht weggelassen werden, wie in Kapitel 2 dieser Arbeit in Verallgemeinerung des Gegenbeispiels aus (Tandori 1986) gezeigt wird.

Im ersten Kapitel der Arbeit werden im Anschluss an einige vorbereitende Definitionen die oben bereits erwähnten Kriterien zur Gültigkeit des (g)SLLN noch einmal explizit angeführt, da diese die wesentlichen Hilfsmittel in den Kapiteln 2 und 3 sind. Ergänzt werden diese durch die Resultate aus (Iosifescu and Theodorescu 1969), die zeigen, dass sich einige Resultate aus (Kolmogorov 1928) – wie z.B. der Drei-Reihen-Satz – auch auf Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen übertragen lassen, wenn diese zusätzlich einer geeigneten asymptotischen Unabhängigkeitsbedingung genügen, dem sogenannten *schwachen φ-Mischen.*

Das Ziel von Kapitel 2 ist die Verallgemeinerung des Gegenbeispiels von Tandori aus (Tandori 1986), so dass unter geeigneten Regularitätsbedingungen auch Gegenbeispiele zum gSLLN für Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen hergeleitet werden können. Der entscheidende Schritt ist dabei die in Lemma 2.3 erfolgende Übertragung eines Resultates aus (Tandori 1972) auf allgemeine Normierungsfunkionen, da alle übrigen benötigten Resultate bereits von Tandori für den Fall allgemeiner Normierung bewiesen wurden. Mit Hilfe dieser Verallgemeinerung können dann auch Aussagen zur Konvergenzrate im SLLN für Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen gemacht werden. Dabei zeigt sich, dass sogar Folgen von identisch verteilten, $\{-1, 1\}$-wertigen, paarweise unabhängigen Zufallsvariablen eine von der (innerhalb einer geeigneten Klasse von Normierungsfunktionen) schlechtestmöglichen Konvergenzrate im unabhängigen Fall um den Faktor $\log^{\frac{3}{2}} n$ nach oben abweichende Konvergenzrate aufweisen können, welche der ungünstigsten Konvergenzrate (innerhalb dieser Funktionenklasse) im Fall von orthogonalen Zufallsvariablen entspricht.

Eine Möglichkeit zum Beweis des SLLN für eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besteht darin, dass zunächst durch Anwendung einer Maximalungleichung gefolgert wird, dass

$$\lim_{n\to\infty} \max_{2^n<l\leq 2^{n+1}} \frac{1}{2^n}\Big| \sum_{k=2^n+1}^{l} X_k\Big| = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

woraus dann mit Standardargumenten aus der Theorie der Summationsverfahren bereits die Gültigkeit des SLLN folgt. Hierbei werden nur im ersten Schritt bei der Abschätzung der Maxima Voraussetzungen an die Abhängigkeitsstruktur benötigt, und auch dann nur für die Blöcke $(X_{2^n+1}, \ldots, X_{2^{n+1}})$, $n \in \mathbb{N}$. Móricz zeigte in (Móricz 1987), dass die Voraussetzung der blockweisen m-Abhängigkeit zusammen mit dem Kriterium von Kolmogorov die Gültigkeit des SLLN garantiert, ebenso die blockweise Quasiorthogonalität zusammen mit dem Kriterium von Rademacher und Menshov. Dabei heißt eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *blockweise* m-abhängig, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle k, l mit $2^{n-1} + 1 < k < l \leq 2^n$ und $l - k > m$ die Systeme $\{X_{2^{n-1}+1}, \ldots, X_k\}$ und $\{X_l, \ldots, X_{2^n}\}$ unabhängig sind, und *blockweise quasiorthogonal*, falls die X_k quadratintegrierbar sind mit Varianz $P[(X_k - P[X_k])^2] = \sigma^2$, und es eine Konstante $C > 0$ und deterministische Funktionen $f_n : \{0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\} \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass

$$\sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} f_n(j) \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und $|P[X_k X_l]| \leq \sigma_k \sigma_l f_n(|k - l|)$ für alle $k, l \in \{2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n\}$. Blockweise 0-abhängige Zufallsvariablen werden auch als blockweise unabhängige Zufallsvariablen bezeichnet, während man von blockweise orthogonalen Zufallsvariablen spricht, falls $f_n = 1_{\{0\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden kann.

Gaposhkin griff diese Ideen in seinen Arbeiten (Gaposhkin 1990) und (Gaposhkin 1994) auf und betrachtete auch andere Blöcke als $\{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$; beschränkte sich aber bei seinen Betrachtungen auf blockweise orthogonale bzw. blockweise unabhängige Zufallsvariable. Die wichtigsten Ergebnisse von Gaposhkin sollen hier kurz zusammengefasst werden. Zunächst ist es notwendig, die zu betrachtenden Blöcke auf einfache Weise zu beschreiben. Sind die Blöcke vorgegeben, so genügt es beispielsweise sich das erste Element eines jeden Blocks zu notieren. Umgekehrt erzeugt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $a_{n+1} \geq a_n + 1$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Blöcken vermöge $I_n := (a_n, a_{n+1}] \cap \mathbb{N}$.
Ist $a_n = n \log_+^q n$ für ein $q \geq 0$ und sind $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Blöcke, so gilt für festes $p \in (1, 2]$ das SLLN genau dann für alle Folgen von bzgl. (I_n) blockweise unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten, wenn $q > (p - 1)^{-1}$. Im Falle $p = 2$ gilt diese Aussage auch für bzgl. (I_n) blockweise orthogonale Zufallsvariablen, in diesem Fall beträgt der kritische Wert für q gerade 1; siehe dazu auch Theorem 1, 1a, 2 und 2a in (Gaposhkin 1990).
Ebenso bewies Gaposhkin, dass für $a_n = \exp(n^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ und zugehörigen Blöcken (I_n) das Kriterium $\sum_{k=2}^{\infty} P[X_k^2] \log^2 k < \infty$ von Rademacher und Menshov genau dann für alle Folgen von zentrierten, bzgl. I_n blockweise orthogonalen, quadratintegrierbaren Zufallsvariablen hinreichend für die Konvergenz der Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ ist, wenn $\alpha > \frac{1}{2}$ ist. In (Gaposhkin 1994) konnte er hingegen folgendes zeigen: ist $a_n = \exp(n^\alpha)$, so ist für $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ das Kriterium

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} \log^{(1-\alpha)/\alpha} k < \infty \tag{1}$$

und für $\alpha > \frac{1}{3}$ das Rademacher-Menshov-Kriterium

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} \log^2 k < \infty$$

hinreichend und unter gewissen Regularitätsbedingungen an die Folge (σ_k) auch notwendig für die Gültigkeit des SLLN für alle Folgen von zentrierten, quadratintegrierbaren und bzgl. der von (a_n) erzeugten Blöcke (I_n) blockweise orthogonalen Zufallsvariablen mit $P[X_k^2] = \sigma_k^2$. Ist die Folge von Zufallsvariablen sogar blockweise unabhängig bzgl. (I_n), so ist Kriterium (1) sogar für alle $\alpha \in (0, 1)$ hinreichend und notwendig im obigen Sinne.
Das Rademacher/Menshov-Kriterium ist also hier im Unterschied zum analogen Kriterium zur Konvergenz von Reihen auch für $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ anwendbar. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass die Mittelung im SLLN das bei blockweiser Unabhängigkeit mögliche Auftreten eines skalaren Vielfachen einer fest vorgegebenen Zufallsvariablen in mehreren (oder sogar allen) Blöcken auffangen kann.
Ähnliche Kriterien lassen sich auch im Fall $a_n = n^q$ für ein $q > 1$ sowie für blockweise unabhängige Zufallsvariablen mit vorgegebenen p-ten Momenten für ein $p \in (1, 2]$ angeben, siehe dazu die Ausführungen in (Gaposhkin 1994). Auch ist es möglich, anderere Abhängigkeitsstrukturen innerhalb der Blöcke zu untersuchen, wie z.B. blockweise Martingaldifferenzfolgen oder blockweise Mischungsbedingungen.

In (Le Gac 1992) wird die Frage aufgeworfen, welche Kriterien für die Gültigkeit von Starken Gesetzen existieren, falls man auf Unabhängigkeitsvoraussetzungen innerhalb der Blöcke verzichtet und stattdessen fordert, dass die Zufallsvariablen aus verschiedenen Blöcken unkorreliert sind. Diese Frage wird in Kapitel 3 dieser Arbeit aufgegriffen und auf Folgen von Zufallsvariablen verallgemeinert, für die die Block-σ-Algebren $\sigma(X_k, k \in I_n)$ oder die Blocksummen $\sum_{k \in I_n} X_k$ unabhängig, paarweise unabhängig oder (im Fall von Blocksummen) unkorreliert sind. Erwartungsgemäß steht hier im Unterschied zu den Arbeiten von Gaposhkin und Le Gac nicht die Frage nach geringstmöglichen Blocklängen, sondern nach größtmöglichen Wachstumsraten der Blocklängen im Vordergrund.

Die hier vorgestellten Starken Gesetze für Zufallsvariablen mit unabhängigen oder unkorrelierten Blocksummen werden bewiesen, indem zunächst durch Anwendung der in Kapitel 1 angeführten Sätze die fast sichere Konvergenz der Blocksummen gezeigt wird, woraus dann mit einer Abschätzung der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \max_{l\in I_n} \left| \sum_{k=\lfloor a_n \rfloor+1}^{l} X_k \right| = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

die Gültigkeit des gSLLN folgt. Darauf aufbauend werden hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit des allgemeinen Ergebnisses hergeleitet, unter anderem ein Ergebnis zum Verhalten von Folgen mit gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten im SLLN in Abhängigkeit von der Wahl der Blocklängen.

Zum Schluss werden noch das Konvergenzverhalten und die -geschwindigkeit von Folgen mit paarweise unabhängigen Blöcken mit dem von Folgen mit unabhängigen Blöcken bzw. unkorrelierten Blocksummen verglichen, wobei sich analoge Ergebnisse zum in Kapitel 2 betrachteten Konvergenzverhalten von Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen ergeben. Auch hier sind für Folgen mit paarweise unabhängigen Blöcken ohne Zusatzbedingungen nur die Resultate für Folgen mit orthogonalen Blocksummen anwendbar, so dass im Allgemeinen nicht dieselbe Konvergenzrate wie für Folgen mit unabhängigen Blöcken erreicht werden kann.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. D. Landers für die Betreuung sowie zahlreiche hilfreiche Hinweise bei der Fertigstellung dieser Arbeit danken, ebenso Herrn Dipl.-Math. Marcus Schölpen und Herrn Dipl.-Math. Dipl.-Phys. Karl Riedel für die Durchsicht diverser Rohfassungen und die daraus entstandenen Korrekturvorschläge.

Kapitel 1

Einige grundlegende Sätze

1.1 Notation

Zunächst einige technische Definitionen:

Definition 1.1
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von reellen Zahlen heißt* (strikt) isoton, *falls sie (streng) monoton wachsend ist, d.h. falls* $a_{n+1} \geq a_n$ *(bzw.* $a_{n+1} > a_n$*) für alle* $n \in \mathbb{N}$, *und* (strikt) antiton, *falls* $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(strikt) isoton ist.*

Definition 1.2
Es sei $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *der natürliche Logarithmus und* $\log_+$ *die Abbildung* $\log_+ : [0,\infty) \ni x \mapsto \log(\max\{e,x\}) \in [1,\infty)$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ *sei* $\lfloor x \rfloor$ *die größte ganze Zahl* k *mit* $k \leq x$, *d.h.* $\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.
Eine Funktion $m : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *heißt* Normierungsfunktion, *falls sie isoton ist mit* $\lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$.

Definition 1.3
Es seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen von positiven reellen Zahlen.* (b_n) *heißt* von der Ordnung $O(c_n)$, *falls* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{c_n} < \infty$, *und* von der Ordnung $o(c_n)$, *falls* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$.

Schreibweise: $b_n = O(c_n)$ *bzw.* $b_n = o(c_n)$.

Ist X eine nicht-negative oder integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so bezeichnet $P[X]$ den Erwartungswert von X bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P.

Definition 1.4
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zufallsvariablen heißt* orthogonal, *falls alle* X_n *quadratintegrierbar sind mit*

$$P[X_j X_k] = 0 \quad \forall j,k \in \mathbb{N},\ j \neq k.$$

Gilt zusätzlich noch $P[X_n^2] = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so spricht man von einer* orthonormalen Folge *von Zufallsvariablen.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* zentriert, *falls* $P[X_n] = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.5
Jede zentrierte Folge von orthogonalen Zufallsvariablen ist paarweise unkorreliert.

Lemma 1.6 (verallgemeinerte Konvexitätsungleichung)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall,* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty)$ *mit* $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ *und* $g : I \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion. Dann gilt für alle* $x_1, \dots, x_n \in I$ *die Abschätzung*

$$g\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\Big) \le \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k).$$

Beweis: Betrachte das diskrete W-Maß $P := \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_{x_k}$ auf dem Messraum $(I, \mathfrak{B} \cap I)$, wobei für $x \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_x(B) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{falls } x \notin B \end{cases}, \quad B \in \mathfrak{B} \cap I.$$

Die Jensen'sche Ungleichung liefert dann

$$g\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\Big) = g\left(P[\mathrm{id}_\mathbb{R}]\right) \le P[g] = \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k).$$

■

Definition 1.7
Es sei X *eine reellwertige Zufallsvariable auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Dann heißt*

$$\operatorname{ess\,sup}(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P\{X > x\} = 0\} \in (-\infty, \infty]$$

das wesentliche Supremum *von* X. *Analog heißt*

$$\operatorname{ess\,inf}(X) := -\operatorname{ess\,sup}(-X) \in [-\infty, \infty)$$

wesentliches Infimum *von* X. *Ist* X P*-f.s. beschränkt, so bezeichnet*

$$\operatorname{ess\,osc}(X) := \operatorname{ess\,sup}(X) - \operatorname{ess\,inf}(X)$$

die wesentliche Schwankungsbreite *von* X.

Es soll nun ein zum Beweis von starken Gesetzen der großen Zahlen geeigneter Begriff der asymptotischen Unabhängigkeit eingeführt werden. Dieser ist eine Abschwächung der in der Literatur üblichen Definition des φ-Mischens.

Definition 1.8
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein W-Raum. Für Teil-*σ*-Algebren* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *von* $\mathcal{A}$ *definiere*

$$\varphi(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) := \sup_{B \in \mathcal{A}_2, A \in \mathcal{A}_1, P(A)>0} |P(B|A) - P(B)|.$$

Ist $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Teil-*σ*-Algebren von* $\mathcal{A}$*, so setze für alle* $n, k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(k, n) := \varphi\Big(\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i, \bigvee_{i=k+n}^{\infty} \mathcal{A}_i\Big)$$

sowie

$$\varphi(n) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k, n), \qquad \varphi^*(n) := \sup_{i\in\mathbb{N}} \varphi(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+n}).$$

Die Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* φ-mischend*, falls* $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$*, und* schwach φ-mischend*, falls*

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi(k, n_0) < 1 \quad \textit{für ein } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *heißt* (schwach) φ-mischend*, falls die Folge* $(a_\sigma(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *(schwach)* φ*-mischend ist.*

Bemerkung 1.9

- *Betrachtet man in Definition 1.8 an Stelle von* $\varphi(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ *die Messzahl* $\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ *für die Abhängigkeit zweier* σ*-Algebren, wobei*

  $$\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) := \sup_{A\in\mathcal{A}_1, B\in\mathcal{A}_2} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|,$$

  so gelangt man analog zum Begriff des α-Mischens *oder* starken Mischens*, welcher eine Abschwächung des* φ*-Mischens ist: Es gilt für die analog zu* $\varphi(n)$ *definierten* α*-Mischungskoeffizienten* $\alpha(n)$ *die Beziehung*

  $$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0.$$

- *Es gibt Folgen* (X_n) *von orthonormalen und zentrierten Zufallsvariablen, die schwach* φ*-mischend, aber nicht* φ*-mischend sind, und zusätzlich* α*-mischend mit beliebig schneller Konvergenz der Mischungskoeffizienten* $\alpha(n)$ *gegen Null. Dies lässt sich durch eine geeignete Modifikation der in Theorem 7.4 in (Bradley 1986) vorgestellten Konstruktion beweisen.*

Zum Abschluss dieses vorbereitenden Abschnittes soll noch das Lemma von Kronecker zitiert werden, welches ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis von starken Gesetzen der großen Zahlen ist.

Lemma 1.10 (Kronecker)
Es seien (a_n) *eine Folge von rellen Zahlen und* (b_n) *eine isotone Folge von positiven reellen Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \textit{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

1.2 Starke Gesetze der großen Zahlen

In diesem Abschnitt werden einige bekannte Kriterien für die Gültigkeit des allgemeinen starken Gesetzes der Großen Zahlen (generalized Strong Law of Large Numbers, gSLLN) aufgelistet. Diese dienen zum einen als Ausgangspunkt für den Beweis des gSLLN für Folgen von Zufallsvariablen mit unabhängigen oder paarweise unabhängigen Blöcken in Abschnitt 3 und werden zum anderen als Referenz bei den Konvergenzratenüberlegungen in Abschnitt 2 benötigt. Die klassischen Resultate für Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen werden dabei in einer verallgemeinerten Form für Folgen von schwach φ-mischenden, paarweise unabhängigen Zufallsvariablen angegeben.

Dazu werden zunächst einige Resultate von Iosifescu und Theodorescu für Folgen von schwach φ-mischenden Zufallsvariablen angeführt (s. Iosifescu and Theodorescu 1969, S. 16–18).

Satz 1.11
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten, quadratintegrierbaren Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(n, n_0) < 1 \tag{1.1}$$

und

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} P\Big[\Big(\sum_{k=m}^{m+p} X_{kn_0+i}\Big)^2\Big] = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n_0\} \tag{1.2}$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \textit{konvergiert } P\textit{-f.s.}$$

Die zunächst wenig anschauliche Bedingung (1.2) ist äquivalent dazu, dass die Folgen $(\sum_{k=1}^{m} X_{kn_0+i})_{m\in\mathbb{N}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n_0\}$ L_2-Cauchy-Folgen sind, und damit zur L_2-Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} X_{kn_0+i}$, $i \in \{1, \dots, n_0\}$. Da in den bei Iosifescu und Theodorescu angeführten Beweisen der nun folgenden Sätze aber stets (1.2) nachgewiesen wird, wurde diese Bedingung unverändert übernommen.

Bemerkung 1.12
Sind in Satz 1.11 die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unkorreliert, so ist die Bedingung (1.2) äquivalent zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n^2] < \infty.$$

Das folgende Korollar liefert drei hinreichende Kriterien für die fast sichere Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ für schwach φ-mischende Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sind die Zufallsvariablen paarweise unabhängig, so verschwinden alle Mischungskoeffizienten $\varphi^*(n)$. In diesem Fall ist Kriterium (a) gerade das Kolmogorov-Kriterium zur Konvergenz von Reihen von unabhängigen, quadratintegrierbaren Zufallsvariablen.

Korollar 1.13
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten, quadratintegrierbaren und schwach φ-mischenden Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann sind die folgenden Kriterien jeweils hinreichend für die P-fast sichere Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi^*(n))^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P[X_n^2] < \infty,$$

(b) Die Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}$, sind beschränkt mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^*(n) < \infty \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{ess\,osc}(X_n))^2 < \infty,$$

(c) Die Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}$, sind gleichmäßig beschränkt mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^*(n) < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n|] < \infty \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P[X_n^2] < \infty.$$

Da für messbare Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von schwach φ-mischenden Zufallsvariablen auch die Folge $(f_n(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach φ-mischend bezüglich der Folge von σ-Algebren $(a_\sigma(X_n))_{n\in\mathbb{N}})$ ist, ergibt sich aus dem obigen Korollar unmittelbar die folgende Verallgemeinerung des Dreireihensatzes von Kolmogorov:

Korollar 1.14
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten, quadratintegrierbaren und schwach φ-mischenden Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Es existiere ein $a > 0$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a\} < \infty$$

und die Folge $(X_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n^a := X_n 1_{\{|X_n| \le a\}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) aus Korollar 1.13 erfüllt. In den Fällen (a) und (b) sei zusätzlich $\sum_{n=1}^{i} nftyP[X_n^a]$ konvergent. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ P-f.s.

Das obige Korollar erlaubt die Übertragung vieler bekannter gSLLN auf Folgen von paarweise unabhängigen, schwach φ-mischenden Zufallsvariablen. Zur besseren Vergleichbarkeit mit den klassischen Resultaten wird in den folgenden Sätzen an Stelle einer Normierungsfunktion m eine isotone Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen zur Normierung eingesetzt. Eine solche Folge lässt sich aber stets zu einer Normierungsfunktion fortsetzen, und vermöge $b_n := m(n)$ liefert jede Normierungsfunktion m eine Normierungsfolge (b_n). In Kapitel 3 werden allerdings Normierungsfunktionen auch an nicht notwendig ganzzahligen Stellen ausgewertet, daher ist eine Beschränkung auf Normierungsfolgen in dieser Arbeit nicht möglich.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des SLLN von Chung (vgl. Chung 1974, Theorem 5.4.1) entlang der Ideen von Chandra und Goswami.

Satz 1.15
Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen, schwach φ-mischenden und zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei eine isotone Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen gegeben mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine stetige, isotone Funktion, so dass die Funktionen $x \mapsto \frac{x}{g_n(x)}$ und $x \mapsto \frac{g_n(x)}{x^2}$ antiton sind. Setze $g_n(0) := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[g_n(|X_n|)]}{g_n(b_n)} < \infty, \tag{1.3}$$

so folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{b_n} \quad \textit{konvergiert } P\textit{-f.s.}$$

Mit dem Lemma von Kronecker folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\textit{-f.s.}$$

Der Beweis von Satz 1.15 kann analog zum Beweis in (Chung 1974) geführt werden. Da aufgrund der paarweisen Unabhängigkeit $\varphi^*(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist dabei Korollar 1.14 an Stelle des gewöhnlichen Dreireihensatzes anwendbar. Als Spezialfall erhält man bei Wahl von $g_n(x) = x^2$ für alle $x \in [0,\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ das bekannte Kolmogorovsche Gesetz der großen Zahlen.
Dieses Resultat für Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen lässt sich bei direkter Anwendung von Satz 1.11 unter Beachtung von Bemerkung 1.12 auf den Fall einer Folge mit lediglich unkorrelierten Zufallsvariablen übertragen.

Korollar 1.16
Es seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von paarweise unkorrelierten, schwach* φ*-mischenden und zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit positiver, endlicher Varianz* $P[X_n^2]$, $n \in \mathbb{N}$. *Ferner sei eine isotone Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von positiven reellen Zahlen gegeben mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[X_n^2]}{b_n^2} < \infty, \tag{1.4}$$

so folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{b_n} \quad \text{konvergiert } P\text{-f.s.}$$

Mit dem Lemma von Kronecker folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Das folgende Analogon zum Satz von Chung für paarweise unabhängige Zufallsvariablen wurde von Chandra und Goswami in (Chandra and Goswami 1992) bewiesen. Man beachte, dass dieses Ergebnis im Gegensatz zum Ergebnis von Chung nicht mehr die fast sichere Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{b_n}$ beinhaltet.

Satz 1.17
Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit* $P[X_n] = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Ferner seien* $K \in (0, \infty)$ *sowie zwei Folgen* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von positiven reellen Zahlen gegeben, so dass* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *isoton ist mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *und*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{b_n} < K.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *sei* $g_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *eine stetige, isotone Funktion, so dass die Funktionen* $x \mapsto \frac{x}{g_n(x)}$ *und* $x \mapsto \frac{g_n(x)}{x^2}$ *antiton sind. Setze* $g_n(0) := 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
Gelten dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[g_n(|X_n|)]}{g_n(b_n)} < \infty \tag{1.5}$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} P\left[|X_k| 1_{\{|X_k| \le c_k\}}\right] < \infty, \tag{1.6}$$

so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Auch zu diesem Satz gibt es ein wohlbekanntes Korollar, das SLLN von Csörgö, Tandori und Totik, welches hier in einer leicht verallgemeinerten Form als gSLLN angegeben ist. Dieses zeigt, dass das gSLLN von Kolmogorov unter Hinzunahme einer zusätzlichen Bedingung auch für Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen gilt. Das verallgemeinerte Gegenbeispiel von Tandori (Satz 2.1) zeigt, dass das gSLLN von Kolmogorov sich nicht ohne Zusatzbedingungen auf paarweise unabhängige Zufallsvariable übertragen lässt.

Korollar 1.18
Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Varianz $P[X_n^2] \in (0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen gegeben, so dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ isoton ist mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
Gelten dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[X_n^2]}{b_n^2} < \infty \tag{1.7}$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} P[|X_k|] < \infty, \tag{1.8}$$

so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Im Fall von identisch verteilten Zufallsvariablen gibt es im SLLN keinen Unterschied zwischen paarweise unabhängigen und unabhängigen Folgen von Zufallsvariablen. Dies besagt der berühmte Satz von Etemadi (vgl. Etemadi 1981):

Satz 1.19
Für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen, identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Nun sollen noch das Konvergenzkriterium für Orthogonalreihen von Rademacher und Menshov und das daraus folgende gSLLN für Folgen von orthonormalen Zufallsvariablen angegeben werden.

Satz 1.20
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von orthonormalen Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *und* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann ist die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 \log^2 n < \infty$$

hinreichend für die P*-fast sichere Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n X_n$.

Korollar 1.21
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von orthonormalen Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *und* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen von positiven reellen Zahlen, so dass* (b_n) *isoton ist mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *und*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Sind im obigen Korollar die Zufallsvariablen zusätzlich schwach φ-mischend, so kann das Rademacher-Menshov-Kriterium zum Kolmogorov-Kriterium abgeschwächt werden. Dazu wird Korollar 1.16 noch einmal in einer leicht veränderten Version angeführt, deren Darstellung sich am obigen Korollar zum Satz von Rademacher und Menshov orientiert.

Satz 1.22
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von schwach* φ*-mischenden, orthonormalen Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *und* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen von positiven reellen Zahlen, so dass* (b_n) *isoton ist mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *und*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} < \infty.$$

Dann gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{b_n} X_n \quad \text{konvergiert } P\text{-f.s.}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Kapitel 2

Ein allgemeines Gegenbeispiel zum gSLLN für paarweise unabhängige Zufallsvariablen

In diesem Kapitel soll eine Verallgemeinerung des Gegenbeispiels von Tandori in (Tandori 1986) angegeben werden. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass im Gegensatz zum Resultat von Tandori, bei welchem nur das SLLN, also die Wahl von $m = \mathrm{id}_{[0,\infty)}$, betrachtet wird, auch allgemeine Normierungsfunktionen m zugelassen werden. Dies ermöglicht es, auch Aussagen zum Konvergenzverhalten von Folgen von gleichmäßig beschränkten, paarweise unabhängigen Zufallsvariablen zu machen.

2.1 Das verallgemeinerte Gegenbeispiel von Tandori

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes, welcher unter geeigneten Regularitätsbedingungen zu einer vorgegebenen Normierungsfunktion die Existenz einer Folge von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen mit vorgegebenen Varianzen liefert, deren Verhalten im gSLLN dem im ungünstigsten Fall möglichen Verhalten einer Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen entspricht.

Satz 2.1
Es seien eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen und eine Normierungsfunktion m gegeben mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N},n\geq 2} n\sigma_n^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2\right)^{-1} =: T < \infty, \tag{2.1}$$

$$\frac{\sigma_n}{m(n)} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \log^2 n = \infty. \tag{2.3}$$

Dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$|X_n| = \sigma_n \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

also insbesondere $P[X_n^2] = \sigma_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{2.5}$$

Für den Beweis von Satz 2.1 werden einige bekannte Sätze benötigt, die hier kurz angegeben werden sollen.
Ausgangspunkt der Beweisführung ist der folgende Satz von Tandori (s. Tandori 1957, §2).

Satz 2.2
Zu jeder antitonen Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 \log^2 n = \infty \tag{2.6}$$

existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, gleichmäßig beschränkten und zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n X_n$ P-f.s. divergiert.

Mit Hilfe dieses Resultates wird im folgenden Lemma die Existenz einer Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, zentrierten und durch ein $K \in [1, \infty)$ gleichmäßig beschränkten Zufallsvariablen gefolgert, so dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n := \sigma_n Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Beziehung (2.5) genügt. Mit Hilfe eines Klassifikationssatzes von Tandori folgt, dass bei Abschwächung von (2.5) zur einfachen Divergenz die obige Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gewählt werden kann, dass $|Z_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere paarweise unabhängig, und eine Modifikation analog zum Beweis des nun folgenden Lemmas führt zur gewünschten Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 2.3
Es seien eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen und eine Normierungsfunktion m gegeben mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2} n\sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2 \right)^{-1} =: T < \infty, \tag{2.7}$$

$$\frac{\sigma_n}{m(n)} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \log^2 n = \infty. \tag{2.9}$$

Dann gibt es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, zentrierten und gleichmäßig beschränkten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{2.10}$$

Da der Beweis des Lemmas recht lang ist, sollen hier zunächst die weiteren benötigten Sätze angegeben werden. Das folgende Resultat entspricht Satz II in (Tandori 1985).

Satz 2.4
Es seien eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen und eine Normierungsfunktion m gegeben. Dann sind äquivalent:

(a) *Es gibt eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, zentrierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und ein $K \in [1, \infty)$, so dass*

$$|X_n| \leq K \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \Big| > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

(b) *Es gibt eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, zentrierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass*

$$|X_n| = 1 \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \Big| > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Als weiteres Hilfsmittel benötigt man das folgende einfache Lemma:

Lemma 2.5
Jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit der Eigenschaft $|X_n| = 1$ P-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist paarweise unabhängig.

Beweis:
Da wegen $|X_n| = 1$ P-f.s. auch $1_{\{X_n=1\}} = \frac{1}{2}(X_n + 1)$ P-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\begin{aligned} & (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ paarweise unabhängig} \\ \iff\ & (1_{\{X_n=1\}})_{n\in\mathbb{N}} \text{ paarweise unabhängig} \\ \iff\ & (1_{\{X_n=1\}})_{n\in\mathbb{N}} \text{ paarweise unkorreliert} \\ \iff\ & (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ paarweise unkorreliert} \end{aligned}$$

■

Es sollen nun die noch fehlenden Beweise nachgetragen werden. Der Beweis des Lemma 2.3 entsprechenden Resultates in (Tandori 1972) lässt sich problemlos übertragen.

Beweis von Lemma 2.3:
Der gesamte Beweis ist recht technisch. Die Konstruktion erfolgt durch Anwendung von Satz 2.2 auf eine geeignete antitone Folge $(\widetilde{\sigma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dazu definiert man eine Hilfsfolge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$l_n \leq l_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{l_n} = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\sigma_n}{l_n} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{l_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l_n^2} \log^2 n = \infty \tag{2.14}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l_n^2} \log^{\frac{3}{2}} n < \infty \tag{2.15}$$

Mit dieser Folge ergibt sich dann wie folgt die Behauptung: Aufgrund der Eigenschaften (2.13) und (2.14) der Folge $(\frac{\sigma_n}{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ liefert Satz 2.2 die Existenz einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen, zentrierten und gleichmäßig beschränkten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{l_n} X_n$ P-f.s. divergiert. Es soll nun gezeigt werden, dass diese Folge den Anforderungen des Lemmas genügt. Dazu ist nur noch zu zeigen, dass (2.10) gilt, d.h.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Betrachte hierzu die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $V_n := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k$ für $n \in \mathbb{N}$ und $V_0 := 0$, und zerlege die Folgenglieder in je zwei Summanden: die Partialsumme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{l_k} X_k$

der fast sicher divergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{l_k} X_k$ und ein Restglied, für welches man fast sichere Konvergenz nachweist. Multiplikation obiger Folge mit dem Faktor $\frac{l_n}{m(n)}$, der nach (2.12) gegen unendlich strebt, liefert dann die Behauptung.
Für die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man durch partielle Summation die Darstellung

$$\frac{1}{l_n} V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{l_k} X_k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{l_k} - \frac{1}{l_{k+1}} \right) V_k. \tag{2.16}$$

Es bleibt gemäß der obigen Überlegungen die fast sichere Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) V_n$ nachzuweisen. Dies ist jedoch mit einigem Aufwand verbunden.
Da die Zufallsvariablen X_n nach Konstruktion orthonormal sind, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$P[|V_n|] \leq \Big(P[V_n^2] \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ gilt unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{l_k} - \frac{1}{l_{k+1}} \right) P[|V_k|] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{l_k} - \frac{1}{l_{k+1}} \right) \Big(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sigma_1}{l_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{l_k} \Big(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{l_k} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{l_n} \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\sigma_1}{l_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{l_k} \left(\Big(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \frac{\sigma_1}{l_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\sigma_k^2}{2\, l_k} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j^2 \Big)^{-\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.7)}{\leq} \frac{\sigma_1}{l_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\sigma_k \sqrt{T}}{l_k \sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$P\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) |V_n| \Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) P[|V_n|] \\
&\le \frac{\sigma_1}{l_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{T}}{l_n \sqrt{n}} \\
&\le \frac{\sigma_1}{l_1} + \sqrt{T} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l_n^2} \log^{\frac{3}{2}} n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\frac{3}{2}} n} \right)^{\frac{1}{2}} \overset{(2.15)}{<} \infty
\end{aligned}
$$

Dies impliziert, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) |V_n|$ endlichen Erwartungswert hat; insbesondere ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) V_n$ fast sicher absolut konvergent. Da nach Wahl der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ darüber hinaus die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{l_n} X_n$ fast sicher divergiert, hat man mit der Darstellung (2.16):

$$
\frac{1}{l_n} V_n = \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \quad \text{divergiert } P\text{-f.s.}
$$

Insbesondere gilt also unter Beachtung von (2.12)

$$
\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{m(n)} \left| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \right| = \limsup_{n \to \infty} \frac{l_n}{m(n)} \frac{1}{l_n} \left| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k \right| = \infty \quad P\text{-f.s.}
$$

Es bleibt zu zeigen, dass eine Folge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den oben angeführten Eigenschaften existiert. Setze dazu

$$
A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{m^2(k)} \log_+^2 k \quad \forall n \in \mathbb{N}
$$

und damit

$$
l_n := m(n) \sqrt{A_n \log_+ A_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Wegen der Isotonie von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und m gilt dann (2.11). Aufgrund von (2.9) ist $\lim_{n \to \infty} A_n = \infty$, und daher gilt auch (2.12). Aus (2.8) folgt (2.13), da

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_n}{l_n} = \frac{\sigma_n}{m(n)\sqrt{A_n \log_+ A_n}} &\ge \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \frac{1}{\sqrt{A_n \log_+ A_n}} \\
&\ge \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)\sqrt{A_{n+1} \log_+ A_{n+1}}} = \frac{\sigma_{n+1}}{l_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l_n^2} \log^2 n \quad = \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n) A_n \log_+ A_n} \log^2 n
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.8)}{\geq} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_{n+1}^2}{4m^2(n+1)A_n \log_+ A_n} \log^2(n+1) \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n+1}-A_n}{4A_n \log_+ A_n} \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{A_n}^{A_n+1} \frac{dx}{4x \log_+ x} = \frac{1}{4} \int_{A_2}^{\infty} \frac{1}{x \log_+ x} dx = \infty,
\end{aligned}
$$

und daher ist auch (2.14) erfüllt. Nun existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 3$, mit $\frac{\sigma_1^2}{l_1^2} \leq n_0$ und $A_{n_0-1} \geq 2$, und somit gilt

$$
\begin{aligned}
A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{m^2(k)} \log_+^2 k \quad &\leq \quad \frac{\sigma_1^2}{l_1^2} \sum_{k=1}^{n} \log^2 n \leq n^4 \\
&\Rightarrow \quad \log^{-\frac{1}{2}} n \leq 2 \log_+^{-\frac{1}{2}} A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \quad (2.17)
\end{aligned}
$$

Hiermit berechnet man

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l_n^2} \log^{\frac{3}{2}} n \quad &= \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n) A_n \log_+ A_n} \log^{\frac{3}{2}} n \\
&= \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n \log_+ A_n} \log^{-\frac{1}{2}} n \\
&\overset{(2.17)}{\leq} \quad 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n \log_+^{\frac{3}{2}} A_n} \\
&\leq \quad 2 \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \log^{\frac{3}{2}} x} dx < \infty,
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt auch (2.15).

■

Beweis von Satz 2.1:
Setze für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{m^2(k)} \log_+^2 k \quad \text{und} \quad l(n) := m(n)\sqrt{A_n}.
$$

Dann gilt wegen (2.3)

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{m(n)} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{m^2(k)} \log_+^2 k \Big)^{\frac{1}{2}} = \infty. \tag{2.18}
$$

Aus (2.2) folgt dann zunächst

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \frac{\sigma_{n+1}^2}{m^2(n+1)} \log_+^2(n+1)\} \\ &\leq A_n + 4\frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \log_+^2 n \leq 5A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{l^2(n)} \log^2 n &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)A_n} \log^2 n \geq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{5A_{n-1}} \\ &\geq \sum_{n=4}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \frac{dx}{5x} = \frac{1}{5} \int_{A_3}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ferner gilt wegen der Monotonie der A_n mit (2.2):

$$\frac{\sigma_n}{l(n)} = \frac{\sigma_n}{m(n)\sqrt{A_n}} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \frac{1}{\sqrt{A_n}} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)\sqrt{A_{n+1}}} = \frac{\sigma_{n+1}}{l(n+1)}$$

Setze nun die isotone Folge $(l(n))_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer Normierungsfunktion l fort. Dann sind für $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und l alle Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllt, und somit existieren ein $K \in [1, \infty)$ und eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$|Z_n| \leq K \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{l(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k Z_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Dies impliziert gemäß Satz 2.4 die Existenz einer Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthonormalen und zentrierten, also insbesondere paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$|Y_n| = 1 \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{l(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k Y_k \Big| > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Hieraus folgt nun für die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n := \sigma_n Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aufgrund der Definition von l:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \limsup_{n\to\infty} \frac{l(n)}{m(n)} \frac{1}{l(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} \sigma_k Y_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Da nun nach Lemma 2.5 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen sind, folgt die Behauptung. ■

Manchmal ist es vorteilhafter, das Wachstum der Normierungsfunktion an Stelle des Wachstums der Varianzen zu beschränken. Das folgende Lemma liefert eine einfache und leicht nachzuweisende Bedingung an die Normierungsfunktion m, die zusammen mit den Voraussetzungen (2.2) und (2.3) von Satz 2.1 garantiert, dass $\sup_{n\in\mathbb{N},n\geq 2} n\sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2\right)^{-1} < \infty$.

Lemma 2.6
Es seien eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen, eine Normierungsfunktion m und eine Konstante $M \in (0,\infty)$ gegeben mit

$$m(2n) \leq M \cdot m(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

$$\frac{\sigma_n}{m(n)} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N},n\geq 2} n\sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2\right)^{-1} < \infty,$$

d.h. auch die Voraussetzung (2.1) aus Satz 2.1 ist erfüllt.

Beweis:
Aus (2.20) und (2.21) sowie der für alle $n \geq 2$ gültigen Beziehung $n \leq 4^{\frac{n-1}{2}} \leq 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sigma_k^2}{m^2(k)}\, m^2(k) \geq \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}^{n-1} m^2(k) \geq \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\, m^2(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) \geq \frac{n\sigma_n^2}{4M^4},$$

d.h. es ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N},n\geq 2} n\sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2\right)^{-1} \leq 4M^4 < \infty$$

■

Als Konsequenz ergibt sich das folgende Korollar zu Satz 2.1:

Korollar 2.7
Es seien eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen, eine Normierungsfunktion m und eine Konstante $M \in (0,\infty)$ gegeben mit

$$m(2n) \leq M \cdot m(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

$$\frac{\sigma_n}{m(n)} \geq \frac{\sigma_{n+1}}{m(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{m^2(n)} \log^2 n = \infty. \tag{2.24}$$

Dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$|X_n| = \sigma_n \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.25}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{2.26}$$

2.2 Einige Folgerungen aus dem Gegenbeispiel von Tandori

Bemerkung 2.8
Eine erste Konsequenz aus Satz 2.1 ist die Notwendigkeit von Zusatzbedingungen bei der Verallgemeinerung des gSLLN von Kolmogorov auf paarweise unabhängige Zufallsvariablen. Auch eine Verschärfung der Voraussetzung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P[X_n^2]}{b_n^2}$ zu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P[X_n^2]}{b_n^2} \log^{2-\varepsilon} n < \infty$$

für ein $\varepsilon \in (0,2)$ ist i.A. nicht hinreichend für die Gültigkeit des gSLLN für lediglich paarweise unabhängige Zufallsvariablen. Für $\varepsilon = 0$ folgt allerdings mit dem Satz von Rademacher/Menshov bereits die Gültigkeit des gSLLN für Folgen von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen. In dieser Hinsicht verhalten sich also paarweise unabhängige Zufallsvariablen wie paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen.

Beweis:
Sei m eine Normierungsfunktion, welche der Wachstumsbedingung (2.22) genügt, und setze $b_n := m(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\sigma_n := b_n \Big(n \log_+^3 n\Big)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \log^{2-\varepsilon} n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} < \infty.$$

Da aber andererseits die Monotoniebedingung (2.2) erfüllt ist und

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \log^2 n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty,$$

liefert Satz 2.1 die Existenz einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen mit Varianz $P[X_n^2] = \sigma_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, welche nicht dem gSLLN mit Normierungsfunktion m genügt.

■

Als nächstes soll die Konvergenzrate im SLLN für paarweise unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable untersucht werden. Für unabhängige, quadratintegrierbare, identisch verteilte und zentrierte Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Varianz σ^2 auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt mit dem Gesetz vom iterierten Logarithmus

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n \log\log n}} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \sigma \quad P\text{-f.s.},$$

und somit für eine Normierungsfunktion m

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n \log\log n}}{m(n)} = 0.$$

Sind die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich paarweise unabhängig, so ist eine wesentlich langsamere Konvergenz möglich. Die dabei auftretenden Konvergenzraten entsprechen denjenigen für Folgen von lediglich paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen. Dabei können die Zufallsvariablen sogar derart gewählt werden, dass sie einer symmetrisierten Binomialverteilung mit Parameter $p = \frac{1}{2}$ genügen, also insbesondere gleichmäßig beschränkt sind. Es existieren dann Momente beliebiger Ordnung.

Satz 2.9
Zu jeder Normierungsfunktion m mit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^2(n)} \log^2 n = \infty \tag{2.27}$$

gibt es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Da die zu konstruierenden Zufallsvariablen Varianz 1 haben sollen, setzt man $\sigma_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $n\sigma_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2\right)^{-1} \leq 2$ für alle $n \geq 2$, so dass (2.1) erfüllt ist. Somit ist Satz 2.1 anwendbar. Dieser liefert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit den gewünschten Eigenschaften. Man beachte dabei, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ aus der Eigenschaft $|X_n| = 1$ P-f.s. zusammen mit der Zentriertheit von X_n folgt, dass $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$.

■

Die folgenden Betrachtungen sollen zum Abschluss des Kapitels den Unterschied im Konvergenzverhalten zwischen Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen und Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen noch einmal klar herausstellen:
Für Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten, zentrierten und quadratintegrierbaren Zufallsvariablen gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = o\left(\sqrt{n^{-1}(\log\log n)^{1+\varepsilon}}\right) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $\varepsilon > 0$, aber nicht für $\varepsilon = 0$. Für Folgen von paarweise unabhängigen, identisch verteilten, zentrierten und beschränkten Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt ebenso wie für Folgen von unkorrelierten, identisch verteilten Zufallsvariablen nach dem Kriterium von Rademacher/Menshov

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = o\left(\sqrt{n^{-1}(\log n)^3(\log\log n)^{1+\varepsilon}}\right) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $\varepsilon > 0$, aber i.A. nicht mehr für $\varepsilon = 0$. Wählt man in Satz 2.9 nämlich $m(x) = \sqrt{x(\log_+ x)^3 \log_+ \log_+ x}$, so folgt wegen $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n(\log n)^3 \log\log n} = \infty$, dass eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen, identisch verteilten, zentrierten und beschränkten Zufallsvariablen existiert, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(\log n)^3 \log\log n}} \left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Somit unterscheidet sich die im ungünstigsten Fall mögliche Konvergenzrate im SLLN zwischen unabhängigen und paarweise unabhängigen Folgen von identisch verteilten, quadratintegierbaren Zufallsvariablen um den Faktor $\log^{\frac{3}{2}} n$.

Kapitel 3

Starke Gesetze der großen Zahlen bei unabhängigen bzw. paarweise unabhängigen Blocksummen

In diesem Teil der Arbeit werden Folgen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen betrachtet, die sich derart in Blöcke $(X_k)_{k\in I_n}$, $n \in \mathbb{N}$, zusammenfassen lassen, dass die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen aus verschiedenen Blöcken bekannt ist, während innerhalb der Blöcke keine Kenntnis der Abhängigkeitsstruktur unterstellt wird. Summiert man nun die Zufallsvariablen eines Blockes auf, erhält man eine neue Folge $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, deren Abhängigkeitsstruktur bekannt ist, und auf die daher die Resultate aus den ersten beiden Kapiteln angewendet werden können. Im Extremfall können alle Zufallsvariablen eines Blockes identisch sein, d.h. es gilt $B_n = |I_n|X_k$ für ein $k \in I_n$. Dies lässt sich zur Konstruktion von Beispielen nutzen, die die Beurteilung der vorgestellten Kriterien hinsichtlich ihrer Optimalität ermöglichen.

3.1 Notation

Zur Charakterisierung der Blöcke wäre es naheliegend, die Folge der ersten Elemente der Blöcke I_n zu notieren. Die dadurch bedingte Ganzzahligkeit der Folgenglieder verursacht aber Probleme bei einigen Monotoniebedingungen, die insbesondere bei der Konstruktion von Gegenbeispielen benötigt werden. Daher werden im Folgenden zur Definition von Blöcken auch nicht notwendig ganzzahlige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugelassen, wie z.B. $a_n = n^p$, $n \in \mathbb{N}$, mit $1 < p < 2$.

Die folgenden Bezeichnungen erleichtern die Arbeit mit Blöcken von Zufallsvariablen und werden im Rest dieses Kapitels ohne Referenz verwendet.

Definition 3.1
Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_{n+1} - a_n \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Eine solche Folge wird auch blockerzeugende Folge *genannt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der n-te Block I_n definiert durch*

$$I_n := (a_n, a_{n+1}] \cap \mathbb{N} \neq \emptyset,$$

mit Blocklänge D_n und kleinstem Element a_n^*, d.h.

$$D_n := |I_n| = [a_{n+1}] - [a_n] \geq 1 \quad \textit{und} \quad a_n^* := \min(I_n) = [a_n] + 1.$$

Bemerkung 3.2
Für jede blockerzeugende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten die Beziehungen $a_n^* \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{D_n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis
Zunächst gilt $a_n \leq [a_n] + 1 = a_n^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (a_n) blockerzeugend ist, gelten die Abschätzungen

$$a_{n+1} - a_n \leq ([a_{n+1}] + 1) - [a_n] \leq 2\,([a_{n+1}] - [a_n]) = 2D_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$D_n = [a_{n+1}] - [a_n] \leq a_{n+1} - (a_n - 1) \leq 2(a_{n+1} - a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

woraus unmittelbar der zweite Teil der Behauptung folgt. ■

Definition 3.3
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine blockerzeugende Folge.
(X_n) besitzt (paarweise) unabhängige (a_n)-Blöcke, *falls die σ-Algebren $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n)$, $n \in \mathbb{N}$, (paarweise) unabhängig sind.*

Bemerkung 3.4

(a) *Man beachte, dass für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (paarweise) unabhängigen Blöcken keinerlei Anforderungen an die Abhängigkeitsstruktur innerhalb der Blöcke gestellt werden. Meist wird an Stelle der (paarweisen) Unabhängigkeit der Blöcke nur die (paarweise) Unabhängigkeit der Blocksummen benötigt.*

(b) *Wählt man $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (a_n) eine blockerzeugende Folge mit Blöcken der Länge 1, und eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (paarweise) unabhängigen (a_n)-Blöcken ist nichts anderes als eine Folge von (paarweise) unabhängigen Zufallsvariablen.*

(c) *Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit (paarweise) unabhängigen (a_n)-Blöcken und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Y_n = f_n(X_{a_n^*}, \ldots, X_{a_{n+1}^*-1})$ für eine Borel-messbare Funktion $f_n : \mathbb{R}^{D_n} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (paarweise) unabhängig. Insbesondere impliziert die (paarweise) Unabhängigkeit der (a_n)-Blöcke, dass die Folgen $(\sum_{k\in I_n} X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der (a_n)-Blocksummen und $(\sum_{k\in I_n} |X_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ der absoluten (a_n)-Blocksummen beide Folgen von (paarweise) unabhängigen Zufallsvariablen sind.*

3.2 Ein allgemeines Ergebnis

In diesem Abschnitt soll ein möglichst allgemeines SLLN unter blockweisen Abhängigkeitsbedingungen angegeben werden, aus welchem dann durch Spezialisierung einige Verallgemeinerungen bekannter Resultate gewonnen werden können. Die Grundidee ist die Zerlegung der Partialsummen $\sum_{k=1}^{l} X_k$ in eine Summe von Blocksummen $B_n = \sum_{k\in I_n} X_k$ und eine Restsumme. Sind für die Folge (B_n) dann die Voraussetzungen eines der in Kapitel 1 angeführten Gesetze der großen Zahlen erfüllt, so genügt es, durch geeignete Voraussetzungen an die Restsummen sicherzustellen, dass diese vernachlässigbar sind. Oft wird dies durch Bedingungen an die Momente der Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in I_n}$ erreicht.

Satz 3.5
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Normierungsfunktion m und eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Gelten dann (mit $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$) die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \max_{l\in I_n} \left| \sum_{k=a_n^*}^{l} X_k \right| = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} B_j = 0 \quad P\text{-f.s.}, \tag{3.2}$$

so folgt

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{m(l)} \sum_{j=1}^{l} X_j = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.3}$$

Beweis:

Sei $l \in \mathbb{N}$ gegeben und $n \in \mathbb{N}$ der eindeutig bestimmte Index, so dass $l \in I_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(l)}\Big|\sum_{k=1}^{l} X_k\Big| &\leq \frac{1}{m(l)}\Big|\sum_{k=1}^{[a_1]} X_k\Big| + \frac{1}{m(l)}\Big|\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k\in I_j} X_k\Big| + \frac{1}{m(l)}\Big|\sum_{k=a_n^*}^{l} X_k\Big| \\ &\leq \frac{1}{m(l)}\Big|\sum_{k=1}^{[a_1]} X_k\Big| + \frac{1}{m(a_{n-1})}\Big|\sum_{j=1}^{n-1} B_j\Big| + \frac{1}{m(a_n)}\max_{l\in I_n}\Big|\sum_{k=a_n^*}^{l} X_k\Big|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Beachtung von (3.1) und (3.2) bei Grenzübergang $l \to \infty$ die Behauptung. ■

3.3 Zwei hinreichende Kriterien für die Anwendbarkeit von Satz 3.5

Nun sollen hinreichende Kriterien an die Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und die Blockstruktur angegeben werden, unter denen die Voraussetzungen von Satz 3.5 erfüllt sind.
Als erstes Ergebnis soll Satz 1.17 auf Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen verallgemeinert werden. Wie schon dort werden nichtnegative Funktionen g_n verwendet, die mindestens so schnell wie die Identität und höchstens so schnell wie $x \mapsto x^2$ wachsen. Diese können o.B.d.A. konvex gewählt werden. Meist wird nur eine von n unabhängige Funktion g betrachtet, z.B. $g(x) = x^p$ für ein $p \in [1, 2]$ oder $g(x) = x\log_+(x)^q$ für ein $q > 0$. Auch die Wahl $g(x) = x^p\log_+(x)^q$ ist möglich, falls $p \in [1, 2)$ und $q \geq 0$. Falls nicht für alle Blöcke die Existenz von p-ten Momenten für ein von n unabhängiges p gesichert ist, kann es unter Umständen sinnvoll sein, die Wahl der Funktion g von n abhängig zu machen, z.B. $g_n(x) = x^{p_n}$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit $1 \leq p_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bei Chandra und Goswami, die das in Satz 1.17 angeführte Resultat als eines der Hauptergebnisse ihrer Arbeit (Chandra and Goswami 1992) auffassen, findet sich abgesehen von der oben angeführten speziellen Wahl $g_n(x) = x^{p_n}$ kein Beispiel für Anwendungen des Satzes mit von n abhängigen Funktionen g_n.

Satz 3.6
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Normierungsfunktion m sowie eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine stetige, isotone Funktion, so dass die Funktionen $x \mapsto \frac{x}{g_n(x)}$ und $x \mapsto \frac{g_n(x)}{x^2}$ antiton

sind. Setze $g_n(0) := 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Es gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \max_{l\in I_n} \Big| \sum_{k=a_n^*}^{l} X_k \Big| = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.4}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[g_n(|B_n|)]}{g_n(m(a_n))} \quad < \quad \infty \tag{3.5}$$

sowie eine der folgenden beiden Bedingungen:

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{schwach } \varphi\text{-mischend} \tag{3.6}$$

oder

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} P[|B_j|] \quad < \quad \infty. \tag{3.7}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.8}$$

Beweis:
Aus den Voraussetzungen (3.5), (3.6) bzw. (3.7) folgt mit Satz 1.15 bzw. Satz 1.17, jeweils angewendet auf $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(m(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ an Stelle von (X_n) und (b_n), die Gültigkeit von (3.2). Somit ist Satz 3.5 anwendbar; dieser liefert die Behauptung.
■

Im Allgemeinen wird über das Verhalten von $\max_{l\in I_n} |\sum_{k=a_n^*}^{l} X_k|$ nur wenig bekannt sein. Daher stellt sich die Frage nach geeigneten hinreichenden Bedingungen an die einzelnen Zufallsvariablen für die Gültigkeit von (3.1). Im folgenden Korollar sollen daher blockweise Bedingungen an geeignete Momente der Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ angegeben werden, welche gewährleisten, dass die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllt sind. Für die dort verwendeten Funktionen g_n wird nun zusätzlich Konvexität und eine abgeschwächte Form der Submultiplikativität gefordert, welche für Funktionen vom Typ $g_n(x) = x^{p_n} \log_+^{q_n} x$ mit $1 \le p_n \le 2$ und $q_n \ge 0$ ($q_n = 0$ falls $p_n = 2$) erfüllt ist. Dies ermöglicht es, die Funktionen g_n direkt auf die einzelnen Zufallsvariablen anzuwenden und dann mittels blockspezifischer oberer Schranken C_n für die Momente $P[g_n(X_k)], k \in I_n$, Abschätzungen für die schon in Satz 3.6 verwendeten Momente $P[g_n(B_n)]$ zu erhalten. Im Spezialfall $g_n = g$ und $C_n = C$ für alle n liefert das folgende Korollar ein gSLLN für Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten Momenten $P[g(X_k)], k \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.7
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von positiven reellen Zahlen mit* $a_{n+1} \geq a_n + 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *eine Normierungsfunktion* m *und eine Folge* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von nichtnegativen reellen Zahlen sowie eine Folge* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen* $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $g_n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *eine konvexe, isotone Funktion, so dass die Funktionen* $x \mapsto \frac{x}{g_n(x)}$ *und* $x \mapsto \frac{g_n(x)}{x^2}$ *antiton sind und* $g_n(1) = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Setze* $g_n(0) := 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Es gelte*

$$0 < \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in(0,\infty)} \frac{g_n(xy)}{g_n(x)g_n(y)} =: K \quad < \quad \infty, \tag{3.9}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \max_{k\in I_n} P[g_n(|X_k|)] \quad \leq \quad C_n, \tag{3.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{g_n(a_{n+1} - a_n)}{g_n(m(a_n))} \quad < \quad \infty, \tag{3.11}$$

sowie eine der folgenden beiden Bedingungen:

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{schwach } \varphi\textit{-mischend} \tag{3.12}$$

oder

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} g_j^{-1}(C_j)(a_{j+1} - a_j) \quad < \quad \infty. \tag{3.13}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow 0 \quad P\textit{-f.s.} \tag{3.14}$$

Beweis:
Zunächst soll eine Abschätzung für die Funktionen g_n hergeleitet werden. Seien dazu zwei Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen und eine Konstante $M > 1$ gegeben, so dass $c_n \leq M d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Bedingung $g_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt zusammen mit (3.9) und der Antitonie von $x \mapsto \frac{g_n(x)}{x^2}$ die Abschätzung

$$g_n(c_n) \leq K g_n(M) g_n(d_n) \leq K M^2 g_n(1) g_n(d_n) = K M^2 g_n(d_n). \tag{3.15}$$

Speziell für $c_n = D_n$, $d_n = a_{n+1} - a_n$ und $M = 2$ folgt aufgrund der nach Bemerkung 3.2 gültigen Abschätzung $D_n \leq 2(a_{n+1} - a_n)$, dass $c_n \leq M d_n$ ist. Daher liefert (3.15) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$g_n(D_n) \leq 4K g_n(a_{n+1} - a_n).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P[B_n] = 0$, und wegen (3.10) unter Verwendung der verallgemeinerten Konvexitätsungleichung aus Lemma 1.6 mit $\alpha_k = D_n^{-1}$ und $x_k = D_n|X_k(\omega)|$ für alle $k \in I_n$ sowie der Abschätzung (3.9) für die Funktionen g_n auch

$$\begin{aligned} P[g_n(|B_n|)] &\leq P\Big[g_n\Big(\sum_{k\in I_n}|X_k|\Big)\Big] \leq \frac{1}{D_n}\sum_{k\in I_n}P[g_n(D_n|X_k|)] \\ &\leq \frac{1}{D_n}\sum_{k\in I_n}Kg_n(D_n)P[g_n(|X_k|)] \leq KC_ng_n(D_n). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Hieraus folgt mit (3.13) sowie dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n\big(\sum_{k\in I_n}|X_k|\big)}{g_n(m(a_n))}\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P\Big[g_n\big(\sum_{k\in I_n}|X_k|\big)\Big]}{g_n(m(a_n))} \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{KC_ng_n(D_n)}{g_n(m(a_n))} &\leq 4K^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{g_n(a_{n+1}-a_n)}{g_n(m(a_n))} < \infty. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n\Big(\sum_{k\in I_n}|X_k|\Big)}{g_n(m(a_n))} = 0 \quad P\text{-f.s..}$$

Zeige nun, dass dann auch (3.1) gilt. Seien dazu $\omega \in \Omega$, $b_n := \sum_{k\in I_n}|X_n(\omega)|$ und $m_n := m(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun angenommen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n(b_n)}{g_n(m_n)} = 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{b_n}{m_n} > 0.$$

Dann existiert ein $L \in (0,1)$ und eine Teilfolge $(n_j)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_{n_j} \geq L\,m_{n_j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Anwendung von (3.15) mit $M = 1/L > 1$, $c_j = m_{n_j}$ und $d_j = b_{n_j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ liefert

$$\frac{g_{n_j}(b_{n_j})}{g_{n_j}(m_{n_j})} \geq \frac{L^2}{K} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

im Widerspruch zur Annahme. Daher gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(a_n)}\max_{l\in I_n}\Big|\sum_{k=a_n^*}^{l}X_k\Big| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(a_n)}\sum_{k\in I_n}|X_k| = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. (3.1) ist erfüllt.
Weiterhin folgt aus (3.11), (3.16) und der Jensen'schen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P[g_n(|B_n|)]}{g_n(m(a_n))} < \infty \tag{3.17}$$

sowie im Fall der Gültigkeit von (3.13) auch

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} P[|B_j|] \quad &\leq \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in I_j} P[|X_k|] \\
&\leq \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in I_j} g_j^{-1}\left(P[g_j(|X_k|)]\right) \\
&\overset{(3.10)}{\leq} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} D_j g_j^{-1}(C_j) \qquad (3.18) \\
&\leq \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} g_j^{-1}(C_j)(a_{j+1}-a_j) \\
&< \quad \infty,
\end{aligned}$$

d.h. auch die übrigen Voraussetzungen von Satz 3.6 sind erfüllt. Dieser liefert dann die Behauptung. ■

3.4 Erste Anwendungen der allgemeinen Kriterien

Es sollen nun einige Folgerungen aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes angegeben werden. Der Beweis erfolgt in der Regel durch Wahl geeigneter, oft von n unabhängiger Konstanten C_n und Funktionen g_n in Satz 3.6 oder Korollar 3.7.

Das folgende Korollar liefert ein Starkes Gesetz der großen Zahlen für Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten und paarweise unabhängigen Blocksummen, wobei $p \in (1, 2]$. In diesem Spezialfall ist Bedingung (3.13) automatisch erfüllt. Bei Betrachtung des arithmetischen Mittels (also $m = \mathrm{id}_{(0,\infty)}$) ist somit eine das Wachstum der blockerzeugenden Folge (a_n) einschränkende Bedingung hinreichend für die Gültigkeit des SLLN. Diese kann auch für Folgen mit unabhängigen a_n-Blöcken nicht abgeschwächt werden, wie Korollar 3.17 zeigt. Insbesondere unterscheiden sich die bestmöglichen hinreichenden Kriterien für Folgen mit unabhängigen bzw. mit lediglich paarweise unabhängigen Blocksummen in diesem Fall nicht. Betrachtet man allerdings die Konvergenzrate im SLLN, so zeigt Satz 3.20, dass sehr wohl ein Unterschied zwischen Folgen von Zufallsvariablen mit unabhängigen und lediglich paarweise unabhängigen Blocksummen besteht.

Korollar 3.8
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass für ein $p \in (1, 2]$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p] < \infty. \tag{3.19}$$

Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big)^p < \infty, \tag{3.20}$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.21}$$

Bedingung (3.20) ist beispielsweise für $a_n = n^q$ mit $q > 1$ erfüllt.

Beweis:
Setze $C_n := C := \sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p]$ und $g_n := x \mapsto x^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $m := \mathrm{id}_{(0,\infty)}$. Dann gilt (3.10) aus Korollar 3.7. Da alle g_n multiplikativ sind, ist (3.9) für $K = 1$ erfüllt. Ferner gelten

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{g_n(a_{n+1} - a_n)}{g_n(m(a_n))}) = C \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big)^p < \infty$$

und

$$\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} g_j^{-1}(C_j)(a_{j+1} - a_j) \leq \frac{C^{1/p}}{a_n} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da (3.20) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ impliziert, ist somit (3.13) erfüllt. Folglich ist Korollar 3.7 anwendbar; dieses liefert die Gültigkeit von (3.21).
Ist $a_n = n^q$ für ein $q \in (1, \infty)$, so ist $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{q(n+1)^{q-1}}{n^q} \leq q\, 2^{q-1} n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^p\, 2^{p(q-1)}}{n^p} < \infty,$$

d.h. (3.20) ist erfüllt.

■

Bemerkung 3.9
Ist $p = 1$, so ist die gleichmäßige Beschränktheit der ersten Momente schon bei Blöcken der Länge 1 (und damit bei beliebiger Blocklänge) nicht hinreichend für die Gültigkeit des SLLN, da für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P\{X_n = n\log_+ n\} = P\{X_n = -n\log_+ n\} = (2n\log_+ n)^{-1}$$

und $P\{X_n = 0\} = 1 - (n\log_+ n)^{-1}$ gilt: $P[X_n] = 0$ und $P[|X_n|] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Für die unabhängigen Ereignisse $\{\frac{1}{n}|X_n| \geq \log_+ n\}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq n\log_+ n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log_+ n} = \infty,$$

und mit dem 2. Borel-Cantelli-Lemma folgt, dass P-f.s. unendlich viele dieser Ereignisse eintreten. Somit gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|X_n| = \infty \quad P\text{-f.s.},$$

und da

$$\frac{1}{n}|X_n| \leq \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| + \frac{1}{n-1}\Big|\sum_{k=1}^{n-1} X_k\Big|$$

ist, führt die Annahme

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| < \infty\right\} > 0$$

zu einem Widerspruch. ■

Gemäß Korollar 3.8 gilt das SLLN für Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen und gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten für ein $p > 1$, falls die Blocklängen polynomial wachsen. Es soll nun ein entsprechendes Kriterium für Folgen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen angegeben werden, bei denen die Momente $P[|X_k|\log_+^{1+\alpha}|X_k|]$ für ein $\alpha > 0$ gleichmäßig beschränkt sind. Hier ist nur noch ein langsameres Wachstum der Folge (a_n) und damit der Blocklängen zulässig. Aufgrund der obigen Bemerkung ist a priori klar, dass die Wahl $\alpha = 0$ nicht sinnvoll ist.

Korollar 3.10
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass für ein $\alpha > 0$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k| \log_+^{1+\alpha}(|X_k|)] < \infty. \tag{3.22}$$

Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{n+1} - a_n) \log_+^{1+\alpha}(a_{n+1} - a_n)}{a_n \log_+^{1+\alpha}(a_n)} < \infty, \tag{3.23}$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.24}$$

Bedingung (3.23) ist beispielsweise für $a_n = n \log_+^{1+\beta} n$ mit $\beta \geq 0$ erfüllt.

Beweis:
Setze $C_n := C := \sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k| \log_+^{1+\alpha}(|X_k|)]$ und $g_n := g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $g : [0, \infty) \ni x \mapsto x \log_+^{1+\alpha}(x) \in [0, \infty)$ sowie $m := \mathrm{id}_{(0,\infty)}$. Dann ist (3.10) aus Korollar 3.7 erfüllt, denn es ist

$$\max_{k\in I_n} P[|X_k| \log_+^{1+\alpha}(|X_k|)] \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem gilt

$$g(xy) \leq 2^{1+\alpha} g(x)g(y) \quad \forall x, y \in [0, \infty],$$

d.h. (3.9) ist für $K = 2^{1+\alpha}$ erfüllt. Ferner hat man

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{g_n(a_{n+1} - a_n)}{g_n(m(a_n))} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{n+1} - a_n) \log_+^{1+\alpha}(a_{n+1} - a_n)}{a_n \log_+^{1+\alpha}(a_n)} < \infty$$

und

$$\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} g_j^{-1}(C_j)(a_{j+1} - a_j) \leq \frac{g^{-1}(C)}{a_n} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da (3.23) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ impliziert, ist somit (3.13) erfüllt. Folglich ist Korollar 3.7 anwendbar; dieses liefert die Gültigkeit von (3.24).
Ist $a_n := n \log_+^{1+\beta}(n)$ mit festem $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$, so ist (a_n) eine blockerzeugende Folge. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= (n+1) \log^{1+\beta}(n+1) - n \log^{1+\beta} n \\
&\leq \max_{\xi\in[n,n+1]} \left(\log^{1+\beta} \xi + \xi\, \xi^{-1}\, (1+\beta) \log^{\beta} \xi\right) \\
&\leq (1 + \beta + \log(n+1)) \log(n+1)^{\beta} \\
&\leq 2^{2+\beta} \log^{1+\beta}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0
\end{aligned}$$

mit einem geeigneten $n_0 \in \mathbb{N}$. Da ferner $\log\log\log(n) = o(\log\log(n))$ ist, gilt $\log\log\log(n) \le \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \log\log(n)$ und damit $(\log\log(n))^{1+\alpha} \le \log^{\alpha/2}(n)$ für alle hinreichend großen n. Es folgt (mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{(a_{n+1}-a_n)\log_+^{1+\alpha}(a_{n+1}-a_n)}{a_n \log_+^{1+\alpha}(a_n)} &\le \frac{2^{2+\beta}\log^{1+\beta}(n)\log_+^{1+\alpha}(2^{2+\beta}\log^{1+\beta}(n))}{n\log^{1+\beta}(n)\log_+^{1+\alpha}(n\log^{1+\beta}(n))} \\ &\le \frac{K\,(\log\log(n))^{1+\alpha}}{n(\log(n)+(1+\beta)\log\log(n))^{1+\alpha}} \le \frac{K}{n\log^{1+\alpha/2}(n)} \quad \forall n \ge n_0\end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(a_{n+1}-a_n)\log_+^{1+\alpha}(a_{n+1}-a_n)}{a_n\log_+^{1+\alpha}(a_n)} \le \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{K}{n\log^{1+\alpha/2} n} < \infty.$$

Somit ist (3.23) für diese spezielle Wahl der blockerzeugenden Folge (a_n) erfüllt.

■

3.5 Ergebnisse unter der Annahme unkorrelierter Blocksummen

Bisher wurden nur Folgen von Zufallsvariablen mit unabhängigen oder paarweise unabhängigen Blocksummen betrachtet. Im Fall von paarweise unabhängigen Blocksummen waren Zusatzbedingungen wie (3.7) oder (3.6) zum Beweis von Starken Gesetzen nötig. Eine Alternative hierzu ist eine Verschärfung von (3.5). Diese ermöglicht eine Anwendung der Ergebnisse für unkorrelierte bzw. orthogonale Zufallsvariable, und führt daher zu Resultaten für Folgen von Zufallsvariablen mit unkorrelierten Blocksummen.

Satz 3.11
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen, eine Normierungsfunktion m und eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von quadratintegrierbaren, zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Folge der Blocksummen $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, sei unkorreliert, und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \max_{l\in I_n} \left| \sum_{k=a_n^*}^{l} X_k \right| = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.25}$$

Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[B_n^2]}{m^2(a_n)} \log^2 n < \infty \tag{3.26}$$

oder ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach φ-mischend und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[B_n^2]}{m^2(a_n)} < \infty, \tag{3.27}$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.28}$$

Beweis:
Die Bedingungen an $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewährleisten die Anwendbarkeit von Korollar 1.21 bzw. Satz 1.22, welche jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \sum_{j=1}^{n} B_j = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

liefern. Die Behauptung folgt dann mit Satz 3.5.

■

Bemerkung 3.12
Gelten in Satz 3.11 die Bedingungen (3.26) bzw. (3.27) sogar für die Folge $A_n := \sum_{k\in I_n} |X_k|$, $n \in \mathbb{N}$, der absoluten Blocksummen an Stelle der Folge $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, so ist (3.25) automatisch erfüllt.

Beweis:
Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert zusammen mit (3.26) bzw. (3.27) für (A_n) statt (B_n) die Abschätzung

$$P\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{m^2(a_n)}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[A_n^2]}{m^2(a_n)} < \infty$$

und damit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \max_{l\in I_n} \Big| \sum_{k=a_n^*}^{l} X_k \Big| \le \limsup_{n\to\infty} \frac{A_n}{m(a_n)} = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. es gilt (3.25).

■

Sind blockweise Schranken für die Varianz der Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben, so erhält man das folgende Korollar, welches sich als Verallgemeinerung des

Rademacher-Menshov-Kriteriums (vgl. Korollar 1.21) auf Folgen mit unkorrelierten Blocksummen auffassen lässt. Wie schon im Fall einer Folge von unkorrelierten Zufallsvariablen kann auch hier auf den in (3.30) auftretenden Faktor $\log^2 n$ im Allgemeinen nicht verzichtet werden, selbst wenn die Blocksummen sogar paarweise unabhängig sind. Dies wird später in Satz 3.20 bewiesen.

Korollar 3.13
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Normierungsfunktion m und eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen reellen Zahlen sowie eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unkorrelierten Blocksummen $B_n := \sum_{k\in I_n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \max_{k\in I_n} P[X_k^2] \leq C_n^2. \tag{3.29}$$

Setze $\gamma_n := \frac{C_n(a_{n+1}-a_n)}{m(a_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n \quad < \quad \infty \tag{3.30}$$

oder ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach φ-mischend mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \quad < \quad \infty, \tag{3.31}$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.32}$$

Beweis:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $P[B_n] = 0$ und wegen (3.29) auch

$$\begin{aligned} P[B_n^2] &\leq P\Big[\Big(\sum_{k\in I_n} |X_k|\Big)^2\Big] \\ &\leq D_n^2 C_n^2 \leq 4C_n^2(a_{n+1}-a_n)^2 = 4\gamma_n^2 m^2(a_n). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Daher implizieren (3.30) bzw. (3.31) die Gültigkeit von (3.26) bzw. (3.27), und zusammen mit (3.33) und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für $A_n := \sum_{k\in I_n} |X_k|$, $n \in \mathbb{N}$,

$$P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{m^2(a_n)}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P[A_n^2]}{m^2(a_n)} \leq 4\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty.$$

Dies impliziert (3.25). Somit ist Satz 3.11 anwendbar; dieser liefert die Behauptung. ∎

3.6 Untersuchungen zur Optimalität der vorgestellten Kriterien

Es soll nun untersucht werden, inwieweit in den obigen Sätzen die Anforderungen an die Momente abgeschwächt werden können. Die hier angeführten Gegenbeispiele basieren darauf, dass aus einer vorgegebenen Folge von (paarweise) unabhängigen Blocksummen (B_n) eine Folge von Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $X_k = X_l$ für alle $k, l \in I_n$ konstruiert wird. Dann gilt $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n) = a_\sigma(B_n)$, d.h. auch die Block-$\sigma$-Algebren sind (paarweise) unabhängig. Eine Verschärfung der Voraussetzungen von der Unabhängigkeit der Blocksummen zur Unabhängigkeit der Blöcke ermöglicht daher keine Abschwächung der übrigen Voraussetzungen.
In Satz 3.14 wird gezeigt, dass die Bedingung (3.11) aus Korollar 3.7, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{g_n(a_{n+1} - a_n)}{g_n(m(a_n))} < \infty,$$

im Fall $g_n = x \mapsto x^{p_n}$, $p_n \in [1, 2]$, $n \in \mathbb{N}$, auch für Zufallsvariablen mit unabhängigen Blöcken eine notwendige Bedingung dafür ist, dass das gSLLN mit Normierungsfunktion m für alle Folgen von Zufallsvariablen gilt, die den übrigen Voraussetzungen von Korollar 3.7 genügen. In diesem Sinne ist (3.11) also bestmöglich. Für allgemeine g_n ist diese Optimalitätseigenschaft allerdings nicht nachweisbar.

Satz 3.14
Gegeben seien Folgen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n \in [1, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie eine Normierungsfunktion m, so dass

$$(\exists T \in (0, \infty))(\forall n \in \mathbb{N}) \quad m(a_{n+1}) \leq T m(a_n). \tag{3.34}$$

Mit der Abkürzung $\gamma_n := C_n^{1/p_n} \frac{a_{n+1}-a_n}{m(a_n)}$ gelte

$$\gamma_n \geq \gamma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_n} = \infty. \tag{3.36}$$

Dann existiert eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen Block-σ-Algebren $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass gilt:

$$P[|X_k|^{p_n}] = C_n \quad \forall k \in I_n \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.37}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.38}$$

Beweis:
Setze für alle $n \in \mathbb{N}$

$$z_n := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{p_k} \quad \text{und} \quad l_n := m(a_n) z_n^{p_n^{-1}}.$$

Dann gilt wegen (3.36) unter Beachtung von $p_n \in [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{m(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{p_k}\Big)^{\frac{1}{p_n}} = \infty. \tag{3.39}$$

Da $\gamma_1 > 0$ ist, folgt dann aus (3.35) mit $K := \gamma_1(1+\gamma_1^{-p_1})$ zunächst $\gamma_{n+1}^{p_{n+1}} \leq \gamma_1^{p_{n+1}} \leq K\gamma_1^{p_1}$ und daraus

$$z_{n+1} = z_n + \gamma_{n+1}^{p_{n+1}} \leq z_n + K\gamma_1^{p_1} \leq (K+1) z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{(a_{n+1}-a_n)^{p_n}}{l_n^{p_n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{p_n}}{z_n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{(K+1) z_{n-1}} \\ &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{dx}{(K+1)x} = \frac{1}{K+1} \int_{z_1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Wähle nun einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, beispielsweise $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda_{[0,1]})$, und darauf eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen Zufallsvariablen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P(Y_n = \alpha_n) = P(Y_n = -\alpha_n) = 2^{-1}\beta_n \quad \text{und} \quad P(Y_n = 0) = 1 - \beta_n, \tag{3.41}$$

wobei $\alpha_n := \max\{l_n, C_n^{1/p_n}(a_{n+1}-a_n)\}$ und $\beta_n := \min\{1, l_n^{-p_n} C_n (a_{n+1}-a_n)^{p_n}\}$ ist. Es gilt dann

$$P[Y_n] = 0 \quad \text{und} \quad P[|Y_n|^{p_n}] = C_n (a_{n+1}-a_n)^{p_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Definiere nun

$$X_k := \begin{cases} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} Y_n & \text{, falls } k \in I_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{a_2 - a_1} Y_1 & \text{, falls } k \in \{1, \dots, [a_1]\} \end{cases}$$

Dann ist $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n) = a_\sigma(Y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit besitzt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Blöcke. Ferner gilt für $k \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, wegen (3.42)

$$P[X_k] = \frac{1}{a_{n+1}-a_n} P[Y_n] = 0 \quad \text{und} \quad P[|X_k|^{p_n}] = \frac{1}{(a_{n+1}-a_n)^{p_n}} P[|Y_n|^{p_n}] = C_n,$$

d.h. es gilt auch (3.37). Falls nun auch noch

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{l_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k\Big| > 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{3.43}$$

mit

$$c_n := \frac{D_n}{a_{n+1}-a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

so folgt (3.38) unter Verwendung von (3.34) und (3.39)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{i\to\infty} \frac{1}{m(i)}\Big|\sum_{k=1}^{i} X_k\Big| \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_{n+1})}\Big|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_j} X_k\Big| - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_{n+1})}\Big|\sum_{k=1}^{[a_1]} X_k\Big| \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{Tm(a_n)}\Big|\sum_{j=1}^{n} D_j \frac{1}{a_{j+1}-a_j} Y_j\Big| \\
&= \frac{1}{T}\limsup_{n\to\infty} \frac{l_n}{m(a_n)} \cdot \frac{1}{l_n}\Big|\sum_{j=1}^{n} c_j Y_j\Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Es bleibt also (3.43) zu zeigen. Sei dazu angenommen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k\Big| = 0 \qquad P\text{-f.s.} \tag{3.44}$$

Zunächst gilt nach Konstruktion der Y_n (siehe (3.41))

$$P\Big\{\frac{1}{l_n}|Y_n| \geq 1\Big\} = \beta_n = \min\Big\{1, C_n \frac{(a_{n+1}-a_n)^{p_n}}{l_n^{p_n}}\Big\}$$

und daher mit (3.40)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big\{\frac{1}{l_n}|Y_n| \geq 1\Big\} = \infty.$$

Da $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist, liefert das Borel-Cantelli-Lemma

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{l_n}|Y_n| \geq 1 \qquad P\text{-f.s.} \tag{3.45}$$

Nach Bem. 3.2 gilt $c_n \in [2^{-1}, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da nach Konstruktion $l_n \leq l_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liefert die Annahme (3.44)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n} c_n Y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k - \lim_{n\to\infty} \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \frac{1}{l_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1} c_k Y_k = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

und damit auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n} Y_n = 0 \qquad P\text{-f.s.} \tag{3.46}$$

im Widerspruch zu (3.45). Somit ist die Annahme falsch, und mit dem 0–1–Gesetz von Kolmogorov folgt (3.43). ■

Bemerkung 3.15
Satz 3.14 lässt sich nicht in derselben Allgemeinheit wie Korollar 3.7 formulieren, da die dort betrachteten Funktionen g_n i.A. nicht multiplikativ sind. Im obigen Beweis wird jedoch an mehreren Stellen die Multiplikativität der Abbildungen $x \mapsto x^{p_n}$ ausgenutzt.

Bemerkung 3.16
Die Wachstumsbedingung (3.34) dient in erster Linie dazu, das Wachstum der Normierungsfunktion im Verhältnis zum Wachstum der Blocklängen zu begrenzen. Werden die Blöcke verlängert (etwa durch Übergang von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit einer Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(0) = 0$, für die $f - \mathrm{id}_{[0,\infty)}$ isoton ist), so kann dies dazu führen, dass die Wachstumsbedingung nicht mehr erfüllt ist. Da sich durch eine solche Manipulation der Blocklängen auch die Koeffizienten γ_n ändern, ist der Effekt einer solchen Änderung auf die Existenz eines Gegenbeispiels nur schwer einzuschätzen.

Es soll nun wieder der Spezialfall einer Folge von Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten absoluten p-ten Momenten für ein $p \in [1,2]$ betrachtet werden. Die Normierung erfolgt mit $m = \mathrm{id}_{[0,\infty)}$. In Korollar 3.8 wurden bereits hinreichende Bedingungen für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ angegeben, die die Gültigkeit des SLLN gewährleisten. Satz 3.14 ermöglicht es nun zu zeigen, dass die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)^p < \infty$$

in Korollar 3.8, welche das maximal zulässige Wachstum der Blocklängen beschränkt, auch für Folgen von Zufallsvariablen mit unabhängigen Blöcken nicht abgeschwächt werden kann, etwa zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)^{\tilde{p}} < \infty$$

mit $\tilde{p} > p$.

Korollar 3.17
Gegeben seien ein $p \in [1,2]$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} > a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big)^p = \infty. \tag{3.47}$$

Dann existiert eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen Block-σ-Algebren $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass gilt:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p] < \infty, \tag{3.48}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.49}$$

Bedingung (3.47) ist beispielsweise für $a_n = \alpha^n$ für ein $\alpha > 1$ und beliebiges $p \in [1,2]$ erfüllt.

Beweis:
Setze $C_n := 1$ und $p_n := p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $m := \mathrm{id}_{(0,\infty)}$. Aufgrund der Monotonie von $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ ist (3.34) aus Satz 3.14 für $T := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1}$ erfüllt, und auch (3.35) ist erfüllt, da $\gamma_n := \frac{C_n(a_{n+1}-a_n)}{m(a_n)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 > 0$ monoton fallend ist. Aus (3.47) folgt die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_n}$, also (3.36). Folglich ist Satz 3.14 anwendbar; dieser liefert die Existenz einer Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen Blöcken und

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p] = 1 < \infty,$$

so dass (3.49) erfüllt ist. ■

Das obige Korollar zeigt insbesondere, dass bei exponentiell wachsender Blocklänge eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten ($p \in [1,2]$ beliebig, aber fest) und unabhängigen Block-σ-Algebren existiert, die nicht dem SLLN genügt.

3.7 Ein Beispiel zur Gültigkeit des SLLN bei gleichmäßig beschränkten p-ten Momenten

In den Korollaren 3.8 und 3.17 wurde bereits erwähnt, dass unabhängig von der Wahl von $p \in (1,2]$ für Folgen von zentrierten Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten p-ten absoluten Momenten und paarweise unabhängigen Blocksummen bei polynomial wachsenden Blocklängen das SLLN gilt, während für exponentiell wachsende Blocklängen das SLLN nicht mehr gilt. Es stellt sich daher die Frage, welches Wachstum der Blocklängen bzw. der blockerzeugenden Folge (a_n) für eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten p-ten absoluten Momenten noch die Gültigkeit des SLLN gewährleistet. Dies wird im folgenden Beispiel geklärt.

Beispiel 3.18
Es sei $p \in (1,2]$ und $a_n := \exp(n^q)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $q \in (0,1)$.

(a) *Ist $q < 1 - p^{-1}$, so gilt für jede Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen $\sum_{k\in I_n} X_k$ und gleichmäßig beschränkten absoluten p-ten Momenten*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

(b) *Ist $q \geq 1 - p^{-1}$, so existiert eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten absoluten p-ten Momenten, so dass die Block-σ-Algebren $a_\sigma(Y_k, k \in I_n)$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind und*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Seien $p \in (1,2]$ und $q \in (0,1)$ beliebig, aber fest. Aus der Abschätzung

$$0 < q(2n)^{q-1} \leq q(n+1)^{q-1} \leq (n+1)^q - n^q \leq q\, n^{q-1}$$

folgt unter Beachtung von $x \leq e^x - 1 \leq x\, e^x$ für alle $x \geq 0$ sowie $q - 1 < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} q^p(2n)^{(q-1)p} &\leq \left(\exp(q(2n)^{q-1}) - 1\right)^p \leq \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)^p \\ &\leq \left(\exp(qn^{q-1}) - 1\right)^p \leq \left(qn^{q-1}e^{qn^{q-1}}\right)^p \leq q^p e^{pq} n^{(q-1)p} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)^p < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{(q-1)p} < \infty \;\Leftrightarrow\; (q-1)p < -1.$$

Somit ist für $q < 1 - p^{-1}$ Korollar 3.8 anwendbar und liefert die Gültigkeit von (a); und da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left((n+1)^q - n^q\right)$ monoton fallend ist, ist für $q \geq 1 - p^{-1}$ Korollar 3.17 anwendbar und liefert die Existenz der Folge $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus (b). ∎

Aus obigem Beispiel lässt sich nun folgern, dass die Momentenbedingung in Korollar 3.8 nicht abgeschwächt werden kann, selbst wenn man in (3.20) einen Faktor $\log^2 n$ hinzunimmt und die Unabhängigkeit der Blöcke an Stelle der Unabhängigkeit der Blocksummen fordert. Eine analoge Aussage gilt für Korollar 3.13, wo selbst die Unabhängigkeit der Blöcke (statt lediglich unkorrelierter Blocksummen) und eine gleichmäßige Beschränktheit der p-ten absoluten Momente für ein $p < 2$ nicht die Anwendbarkeit des Kriteriums (3.29) gewährleistet.

Bemerkung 3.19

Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $a_{n+1} \geq a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine Normierungsfunktion m, sowie eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen (a_n)-Blöcken auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{m(a_n)} \right)^p \log^2 n < \infty \qquad \text{für ein } p \in (1, 2], \tag{3.50}$$

so ist

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^r] < \infty \qquad \text{für ein } r \in (1, 2),\ r < p, \tag{3.51}$$

nicht hinreichend für die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Insbesondere können die Bedingungen (3.19) aus Korollar 3.8 (bei Wahl von $C_n \equiv C$) und (3.29) aus Korollar 3.13 nicht zu (3.51) abgeschwächt werden.

Beweis:

Sei $p \in (1, 2]$ und $r \in (1, p)$. Wähle $q \in (0, 1)$ mit $1 - r^{-1} < q < 1 - p^{-1}$, und setze $a_n := \exp(n^q)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $m = \mathrm{id}_{[0,\infty)}$. Dann folgt wie im Beweis von Beispiel 3.18 mit einer geeigneten Konstanten $K \in (0, \infty)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{m(a_n)} \right)^p \log^2 n \leq K \sum_{n=2}^{\infty} n^{(q-1)p} \log^2 n < \infty,$$

da $(q - 1)p < -1$ und daher $n^{(q-1)p} \log^2 n = o(n^{\tilde{p}})$ für ein $\tilde{p} < -1$. Andererseits gilt $q > 1 - r^{-1}$, und daher existiert nach Beispiel 3.18(b) eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit den geforderten Eigenschaften.
Da (3.50) für $p = 2$ gerade die Spezialisierung von (3.30) für $C_n \equiv C$ ist und außerdem eine Verschärfung von (3.20), folgt insbesondere, dass diese Bedingungen nicht abgeschwächt werden können. ■

3.8 Vergleich der Konvergenzraten von Folgen mit unabhängigen Blöcken und Folgen mit unkorrelierten Blocksummen

Es soll nun gezeigt werden, dass sich auch Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blöcken bezüglich der Konvergenzrate im SLLN im Extremfall verhalten wie Folgen mit lediglich paarweise unkorrelierten Blocksummen. Ist nämlich in Korollar 3.13 Bedingung (3.30) verletzt, so kann eine Folge (X_k) von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blöcken angegeben werden, die alle übrigen Voraussetzungen des Korollars erfüllt, für die aber

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Zur Konstruktion dieser Folge wird das Gegenbeispiel von Tandori verwendet, welches das zu Satz 3.20 analoge Ergebnis für Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen beinhaltet. Damit erhält man eine Folge von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen, die dann als Blocksummen der zu konstruierenden Folge betrachtet werden können. Aus dieser Folge von Blocksummen wird dann wie in 3.14 die gesuchte Folge von zentrierten und fast sicher beschränkten Zufallsvariablen gewonnen.

Satz 3.20
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen, *eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen, eine Normierungsfunktion m sowie ein $T \in (0,\infty)$. Mit der Abkürzung $\gamma_n := \frac{C_n(a_{n+1}-a_n)}{m(a_n)}$, $n \in \mathbb{N}$, gelte*

$$\gamma_n \geq \gamma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.52}$$

$$m(a_{2n}) \leq T m(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.53}$$

sowie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n = \infty. \tag{3.54}$$

Dann existiert eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Block-σ-Algebren $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass gilt:

$$|X_k| = C_n \quad P\text{-f.s.} \quad \forall k \in I_n \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.55}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.56}$$

Insbesondere gilt dann $P[X_k^2] = C_n^2$ für alle $k \in I_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Während in Satz 3.14 gezeigt wurde, dass das in Korollar 3.7 präsentierte hinreichende Kriterium (3.11) für das gSLLN für Folgen von Zufallsvariablen mit unabhängigen Blöcken nicht verbesserbar ist, liefert Satz 3.20, dass auch (3.30) in diesem Sinne das bestmögliche hinreichende Kriterium für das gSLLN bei Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blöcken (und damit auch unkorrelierten Blocksummen) ist. Die hier verwendeten Regularitätsbedindungen sind strikter als in Satz 3.14, da (3.53) eine stärkere Einschränkung des kombinierten Wachstums von Normierungsfunktion m und blockerzeugender Folge (a_n) darstellt als die entsprechende Bedingung (3.34) in Satz 3.14, die $m(a_n)$ mit $m(a_{n+1})$ an Stelle von $m(a_{2n})$ vergleicht.

Beweis des Satzes:
Zunächst folgt aus der Ganzzahligkeit der Folge (a_n), dass $a_{n+1} - a_n = D_n = |I_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Korollar 2.7 liefert aufgrund von (3.52) – (3.54) die Existenz einer Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen auf einem geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den Eigenschaften

$$P[Y_n] = 0, \quad |Y_n| = C_n D_n \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.57}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \Big| \sum_{k=1}^{n} Y_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.58}$$

Definiere nun

$$X_k := \begin{cases} \frac{1}{D_n} Y_n & \text{, falls } k \in I_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{D_1} Y_1 & \text{, falls } k \in \{1, \dots, a_1\} \end{cases} .$$

Dann ist $a_\sigma(X_k \mid k \in I_n) = a_\sigma(Y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit hat $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise unabhängige (a_n)-Blöcke. Ferner gilt für $k \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, wegen (3.57)

$$P[X_k] = \frac{1}{D_n} P[Y_n] = 0 \quad \text{und} \quad |X_k| = \frac{1}{D_n} |Y_n| = C_n \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. es gilt auch (3.55). Schließlich hat man

$$\begin{aligned} &\limsup_{i\to\infty} \frac{1}{m(i)} \Big| \sum_{k=1}^{i} X_k \Big| \\ \geq\ & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_{n+1})} \Big| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in I_j} X_k \Big| - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_{n+1})} \Big| \sum_{k=1}^{a_1} X_k \Big| \\ \geq\ & \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{T m(a_n)} \Big| \sum_{j=1}^{n} D_j \frac{1}{D_j} Y_j \Big| \\ =\ & \frac{1}{T} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m(a_n)} \Big| \sum_{j=1}^{n} Y_j \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

d.h. es ist auch (3.56) erfüllt. ■

Bevor einige Konsequenzen aus Satz 3.20 notiert werden, soll noch kurz auf die dort verwendeten Regularitätsbedingungen eingegangen werden.

Bemerkung 3.21
Die Ganzzahligkeit der blockerzeugenden Folge (a_n) in Satz 3.20 dient nur der Beweisvereinfachung. Auf (3.53) kann dagegen nicht verzichtet werden.

Beweis:
Seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion m gegeben, so dass die Voraussetzungen von Satz 3.20 erfüllt sind und zusätzlich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^2(a_n)} \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (a_{k+1} - a_k)^2 < \infty \tag{3.59}$$

gilt. Wegen der Ganzzahligkeit von (a_n) ist dann $a_{n+1} - a_n = D_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$m_0 : (1, \infty] \ni x \mapsto 2^x m(x) \in (0, \infty)$$

und

$$C_n^0 := 2^{a_n} C_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\gamma_n^0 := \frac{C_n^0 D_n}{m_0(a_n)} = \frac{C_n D_n}{m(a_n)} = \gamma_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

und somit gelten (3.52) und (3.54) auch für m_0 und (C_n^0). Nun gilt wegen (3.59) unter Beachtung von $\sum_{k=1}^n 2^{2a_k} \le \sum_{j=0}^{a_n} 4^j \le \frac{4}{3} 2^{2a_n}$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{a_k} C_k D_k \le \Big(\sum_{k=1}^{n} 2^{2a_k} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} C_k^2 D_k^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le K 2^{a_n} m(a_n) = K m_0(a_n)$$

für ein geeignetes $K \in (0, \infty)$. Für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$|X_k| \le C_n^0 \; P\text{-f.s.} \quad \forall k \in I_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt dann aber für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $l \in I_n$, die Abschätzung

$$\frac{1}{m_0(l)} \Big| \sum_{k=a_1+1}^{l} X_k \Big| \le \frac{1}{m_0(a_n)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in I_n} |X_k| \le \frac{1}{m_0(a_n)} \sum_{k=1}^{n} C_k^0 D_k \le K < \infty \quad P\text{-f.s.},$$

also insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m_0(n)} \Big| \sum_{k=a_1+1}^{n} X_k \Big| \le K < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Auf (3.53) kann daher in Satz 3.20 nicht verzichtet werden.

■

Es soll nun näher auf die Implikationen von Satz 3.20 für das Verhalten von Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen eingegangen werden.

Bemerkung 3.22
Eine erste Konsequenz aus Satz 3.20 ist die Optimalität des Faktors $\log^2 n$ *in Bedingung (3.30) von Korollar 3.13. Eine Abschwächung der Voraussetzung der Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n$ *zu*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \log^{2-\varepsilon} n < \infty$$

für ein $\varepsilon \in (0,2)$ *ist nicht hinreichend für die Gültigkeit des gSLLN für Folgen von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blocksummen, während im Fall unabhängiger Blocksummen stets* $\varepsilon = 2$ *gewählt werden kann.*

Beweis:
Sei (a_n) eine blockerzeugende Folge mit Werten in $\mathbb{N}$ und m eine Normierungsfunktion, welche der Wachstumsbedingung (3.53) genügt, und setze $b_n := m(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$C_n := \frac{b_n}{a_{n+1} - a_n}\Big(n \log_+^3 n\Big)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\gamma_n = \frac{C_n(a_{n+1} - a_n)}{m(a_n)} = \frac{1}{\sqrt{n \log_+^3 n}},$$

und für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n^2 \log^{2-\varepsilon} n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} < \infty. \tag{3.60}$$

Insbesondere folgt also für $\varepsilon = 2$ mit dem Lemma von Kronecker die Gültigkeit von (3.59). Da außerdem die Monotoniebedingung (3.52) erfüllt ist und

$$\sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty,$$

liefert Satz 3.20 die Existenz einer Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit paarweise unabhängigen (a_n)-Blöcken und Varianz $P[X_k^2] = C_n^2$ für alle $k \in I_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$, welche nicht dem gSLLN mit Normierungsfunktion m genügt.

Für eine beliebige Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen (a_n)-Blocksummen, für die (3.60) mit $\varepsilon = 2$ erfüllt ist, liefert dagegen Korollar 3.7 mit $g_n(x) = x^2$ für alle $x \in [0,\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, angewendet auf (a_n), m und die oben definierten Schranken C_n für die Varianz im n-ten Block I_n, die Gültigkeit des gSLLN mit Normierung durch m.

■

Das folgende Beispiel ist eine weitere Anwendung von Satz 3.20 und dient dem Vergleich der Konvergenzraten bei Folgen von Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen bzw. unabhängigen Blocksummen und polynomial wachsenden Blocklängen. Es zeigt, dass die Konvergenzgeschwindigkeit in Korollar 3.8 bei lediglich paarweise unabhängigen Blocksummen geringer sein kann als die schlechteste Konvergenzgeschwindigkeit im Fall unabhängiger Blocksummen.

Beispiel 3.23
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $a_n := n^q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Ist $p \in (1,2]$ fest gewählt und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen (a_n)-Blöcken auf einem W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},P)$, so dass*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p] < \infty,$$

so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = o\left(n^{-\frac{1}{q}(1-\frac{1}{p})}\log^{\frac{1}{p}+\varepsilon} n\right) \quad P\text{-f.s.} \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.61}$$

aber nicht mehr für $\varepsilon = 0$. Speziell für $p = 2$ ergibt sich die Konvergenzrate $o(n^{-1/(2q)}\log^{1/2+\varepsilon} n)$. Erwartungsgemäß nimmt die Konvergenzrate im SLLN bei zunehmender Blocklänge (d.h. bei wachsendem q) ab.

(b) *Ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} P[X_k^2] < \infty,$$

die lediglich paarweise unabhängige (a_n)-Blöcke besitzt, so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = o\left(n^{-\frac{1}{2q}}\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} n\right) \quad P\text{-f.s.} \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.62}$$

aber nicht mehr für $\varepsilon = 0$, da eine Folge $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $B_s(1,1/2)$-verteilten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blöcken

$$a_\sigma(Y_k \mid n^q < k \leq (n+1)^q),\ n \in \mathbb{N},$$

auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert, für die gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{2-q^{-1}} \log^3 n}} \Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| = \infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.63}$$

Somit kann selbst für identisch verteilte und beschränkte Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Blöcken polynomialer Länge die Konvergenzrate im klassischen SLLN geringer sein als im ungünstigsten Fall bei zentrierten Zufallsvariablen mit unabhängigen Blöcken und lediglich gleichmäßig beschränkten Varianzen. Diese minimalen Konvergenzraten unterscheiden sich im Fall $p = 2$ gerade um den Faktor $\log n$.

Beweis:
Definiere $m_{r,s}(x) := x^r \log_+^s x$ und $\gamma_{r,s}(n) := \frac{a_{n+1}-a_n}{m_{r,s}(a_n)}$ für alle $r \in [1,\infty)$, $s \in [0,\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$m_{r,0}(x) \le m_{r,s}(x) \le C_{s,\varepsilon} m_{r+\varepsilon,0}(x) \quad \forall x \in [0,\infty)\, \forall r \ge 1, s \ge 0, \varepsilon > 0$$

mit geeigneten Konstanten $C_{s,\varepsilon} \in (0,\infty)$. Mit der für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Abschätzung $qn^{q-1} \le a_{n+1} - a_n \le q2^q n^{q-1}$ folgt für festes $r \ge 1$, $s,t \ge 0$, beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} q^{1-s} n^{(q-1)-rq} \log_+^{t-s} n &\le \gamma_{r,s}(n) \log_+^t n \\ &\le q2^q n^{(q-1)-rq} \log_+^{t-s} n \le K n^{(q-1)-rq+\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.64}$$

mit einer von s,t,q,ε, nicht aber von n abhängigen Konstanten K. Nun konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (n^\alpha \log_+^\beta n)^{-1}$ für $\alpha, \beta \ge 0$ genau dann, wenn entweder $\alpha > 1$ ist oder $\alpha = 1$ und $\beta > 1$. Da $p((q-1) - rq) > 1$ äquivalent ist zu $r > 1 - q^{-1}(1 - p^{-1})$ und $p(s - t/p) > 1$ äquivalent ist zu $s > (t+1)/p$, folgt hieraus und aus (3.64)

$$r > 1 - q^{-1}(1-p^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r,s}^p(n) \log_+^t n < \infty \quad \forall s,t \in [0,\infty) \tag{3.65}$$

sowie

$$r = 1 - q^{-1}(1-p^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r,s}^p(n) \log_+^t n < \infty \iff s > (t+1)/p \right) \tag{3.66}$$

Für eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit den in (a) vorausgesetzten Eigenschaften und beliebiges $\varepsilon > 0$ folgt daher aus (3.64) und (3.66) mit $t = 0$, dass für $r_0 := 1 - q^{-1}(1-p^{-1})$ und $s_\varepsilon := p^{-1} + \varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{m_{r_0,s_\varepsilon}(a_n)} \right)^p < \infty,$$

für $\varepsilon = 0$ ist diese Reihe dagegen divergent. Somit ist für $\varepsilon > 0$ Korollar 3.7 mit $g_n := g := x \mapsto x^p$, $C_n := C := \sup_{k\in\mathbb{N}} P[|X_k|^p]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie der Normierungsfunktion m_{r_0,s_ε} anwendbar. Dieses liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-q^{-1}(1-p^{-1})} \log_+^{p^{-1}+\varepsilon} n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Aus Satz 3.14 folgt dagegen, dass für $\varepsilon = 0$ im Allgemeinen keine fast sichere Konvergenz mehr vorliegt. Somit ergeben sich die Konvergenzraten aus (3.61).
Ebenso folgt für eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit den in (b) vorausgesetzten Eigenschaften für beliebiges $\varepsilon > 0$ aus (3.64) und (3.66) mit $t = 2$ und $p = 2$ sowie $r_0 := 1 - \frac{1}{2q}$ und $s_\varepsilon := \frac{3}{2} + \varepsilon$, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{r_0,s_\varepsilon}^2(n) \log^2 n < \infty,$$

so dass Korollar 3.13 mit $C_n := C := \sup_{k\in\mathbb{N}} P[X_k^2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie der Normierungsfunktion m_{r_0,s_ε} anwendbar ist. Dieses liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{2q}} \log_+^{\frac{3}{2}+\varepsilon} n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

und somit die in (3.62) behaupteten Konvergenzraten.
Nun ist $a_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(\gamma_{r,s}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für alle $r \geq 1$, $s \geq 0$ monoton fallend. Ferner gilt für $n \geq 2$ die Abschätzung $m_{r,s}(a_{2n}) = ((2n)^q)^r \log_+^s((2n)^q) \leq 2^{rq} n^{rq} \log^s(n^{2q}) = 2^{rq+s} m_{r,s}(a_n)$, d.h. $m_{r,s}$ genügt der Wachstumsbedingung (3.53). Speziell für $r_0 := 1 - \frac{1}{2q}$, $s_0 := \frac{3}{2}$, $t = 2$ und $p = 2$ liefert (3.66) zusammen mit (3.64), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{r_0,s_0}^2 \log_+^2 n = \infty.$$

Somit sind bei Wahl von $C_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Normierungsfunktion m_{r_0,s_0} alle Voraussetzungen von Satz 3.20 erfüllt. Dieser liefert eine Folge $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von zentrierten Zufallsvariablen mit paarweise unabhängigen Block-σ-Algebren $a_\sigma(Y_k \mid n^q < k \leq n^{q+1})$, $n \in \mathbb{N}$, die (3.63) genügt und für die gilt

$$|Y_k| = 1 \quad P\text{-f.s.} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt zusammen mit der Zentriertheit der Zufallsvariablen, dass

$$P\{Y_k = 1\} = P\{Y_k = -1\} = \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. alle Y_k sind identisch $B_s(1, \frac{1}{2})$-verteilt. Somit ist auch (b) vollständig bewiesen. ∎

Symbolverzeichnis

$a_\sigma(X_1, \ldots, X_n)$	von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra
$\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i$	die von der Vereinigung der σ-Algebren $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, erzeugte σ-Algebra
$\mathfrak{B}$	Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$
$\mathfrak{B} \cap A$	Spur von $\mathfrak{B}$ in einer Borel-Menge $A \in \mathfrak{B}$
$B_s(n,p)$	symmetrisierte Binomialverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$
$P[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X unter P
λ	Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}$
λ_A	Einschränkung des Lebesgue-Maßes λ auf $\mathfrak{B} \cap A$, $A \in \mathfrak{B}$
$\log x$	natürlicher Logarithmus von x
$\log_+ x$	$\log(\max\{e, x\})$
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne bzw. mit 0)
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen, Menge der positiven reellen Zahlen
$\lvert M \rvert$	Elementeanzahl einer endlichen Menge M
1_M	charakteristische Funktion der Menge M, d.h. $1_M(x) = 1$ falls $x \in M$, $1_M(x) = 0$ falls $x \notin M$
id_M	die Identität auf M, d.h. $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$
I_n, D_n, a_n^*	Block, Blocklänge und erstes Element eines Blocks, s. Definition 3.1
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich x
$b_n = O(c_n)$	$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{c_n} < \infty$
$b_n = o(c_n)$	$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$
$\varphi(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$	φ-Mischungskoeffizient der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$
$\varphi(k,n)$, $\varphi(n)$, $\varphi^*(n)$	verschiedene φ-Mischungskoeffizienten, s. Definition 1.8
SLLN	Abkürzung für *Starkes Gesetz der großen Zahlen*
gSLLN	Abkürzung für das *verallgemeinerte* SLLN, d.h. es wird mit einer allgemeinen Normierungsfunktion m gemittelt
W-Raum	Abkürzung für *Wahrscheinlichkeitsraum*

Literaturverzeichnis

1 R. Bradley. Basic properties of strong mixing conditions. In E. Eberlein and M. Taqqu, editors, *Dependence in Probability and Statistics*, Progress in Probability and Statistics, pages 165–192, Boston, 1986. Birkhäuser.

2 T. K. Chandra and A. Goswami. Cesáro uniform integrability and the strong law of large numbers. *Sankhyā A*, 54:215–231, 1992.

3 K. L. Chung. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, San Diego, second edition, 1974.

4 S. Csörgö, K. Tandori, and V. Totik. On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables. *Acta Math. Hung.*, 42(3–4):319–330, 1983.

5 N. Etemadi. An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 55:119–122, 1981.

6 V. Gaposhkin. Series in block-orthogonal and block-independent systems. *Izvestiya VUZ. Matematika*, 34(5):12–18, 1990.

7 V. Gaposhkin. On the strong law of large numbers for blockwise independent and blockwise orthogonal random variables. *Theory of Probability*, 39:677–684, 1994.

8 B. Le Gac. Blocks of orthogonal random variables and the strong law of large numbers. *Analysis Mathematica*, 18:103–109, 1992.

9 M. Iosifescu and R. Theodorescu. *Random Processes and Learning.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, first edition, 1969.

10 A. Kolmogorov. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen. *Math. Ann.*, 99:309–319, 1928.

11 A. Kolmogorov. Bemerkungen zu meiner Arbeit „über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen“. *Math. Ann.*, 102:484–488, 1930.

12 F. Móricz. Strong Limit Theorems for Blockwise m-dependent and Blockwise Quasiorthogonal Sequences of Random Variables. *Proc. AMS*, 101(4):709–715, 1987.

13 K. Tandori. Über die orthogonalen Funktionen I. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 18: 57–130, 1957.

14 K. Tandori. Bemerkungen zum Gesetz der großen Zahlen. *Periodica Math. Hungarica*, 2(1–4):33–39, 1972.

15 K. Tandori. Über die Mittel von orthogonalen Funktionen. II. *Acta Math. Hung.*, 45:397–423, 1985.

16 K. Tandori. Bemerkung über die paarweise unabhängigen zufälligen Größen. *Acta Math. Hung.*, 48(3–4):357–359, 1986.

Zusammenfassung

Es ist seit langem bekannt, dass das Starke Gesetz der großen Zahlen (SLLN) für alle Folgen von identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen gilt, falls diese unabhängig sind. Etemadi verallgemeinerte diese Aussage auf Folgen von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, dass sich paarweise unabhängige Folgen allerdings bezüglich der Konvergenzraten im SLLN sehr wohl von Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen unterscheiden, und sich im Extremfall wie paarweise unkorrlierte Folgen verhalten. Dazu wird ein Gegenbeispiel von Tandori auf den Fall einer allgemeinen Normierung der Partialsummen im SLLN verallgemeinert.
In einem zweiten Teil werden Starke Gesetze für Folgen von Zufallsvariablen vorgestellt, bei denen die Folge in Blöcke aufgeteilt werden kann, so dass die Abhängigkeitsstrukturen zwischen verschiedenen Blöcken bekannt sind, während über die Abhängigkeiten innerhalb der Blöcke keine Annahmen getroffen werden. Durch Verallgemeinerung der Gegenbeispiele aus dem ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, dass die erzielten Ergebnisse in einem gewissen Sinne bestmöglich sind.

Abstract

The classical Strong Law of Large Numbers (SLLN) states that the arithmetic means of a sequence of independent, identically distributed zero mean random variables converge to zero almost surely. Etemadi has shown that the independence condition may be weakened to pairwise independence. We show that this does not imply the same rates of convergence in the SLLN for both conditions of independence. To prove this, a counterexample of Tandori is generalized, which is then used to show that sequences of pairwise independent random variables may exhibit the convergence properties of sequences of orthogonal random variables.
The second part of this work is concerned with sequences of random variables that may be grouped into blocks, such that the blocks satisfy conditions of independence, while the dependence structure within the blocks is arbitrary. Several sufficient conditions for the SLLN are exposed, and it is shown by generalization of the results of the first part that the given conditions are optimal in a certain sense.

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe; daß diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat; daß sie - abgesehen von unten angegebenen Teilpublikationen - noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. D. Landers betreut worden.